

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 67

5

2026

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, А. Е. Гутман

Редакторы:

В. Л. Береснев,	А. А. Лаптев,
А. Ю. Веснин,	В. Д. Мазуров,
Г. В. Демиденко,	А. Е. Миронов,
Е. И. Зельманов,	А. Г. Мясников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 67, № 5 (399) Сентябрь—октябрь, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Абызов А. Н. Матрицы над полными кольцами дискретного нормирования	755
Азаров Д. Н. Фильтрационные теоремы о слабой мощности обобщенных свободных произведений групп	774
Аминов Ю. А. О поверхностях переноса	788
Асеев В. В. Квазирегулярность и многозначная квазимёбиусовость в R^n	806
Башеева А. О., Швидефски М. В. Многообразие решеток, порожденное $L4$. II	816
Берестовский В. Н. Геодезические индуцированной субримановой метрики на Вселенной Дефриза	829
Быстров Д. В. Задача Неймана для квазилинейных уравнений с критическим ростом правой части в липшицевых областях на многообразии	841
Волчков Вит. В., Волчкова Н. П. Представление решений одного класса уравнений свертки на группе H_{red}^n	857
Губарев В. Ю., Чжан Ч. Универсальная обертывающая алгебры n согласованных скобок Ли	879
Гутман А. Е. Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть III: Рекуррентность	891
Карманова М. Б. Пример липшицева графика отображений групп Энгеля и формула площади	903
Копылов Я. А. Трансляционно инвариантные линейные функционалы и одномерные когомологии Орлича	918

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2026

Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А. О числе неприводимых компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии	924
Ли Б., Сюй Ч., Дураков Б. Е., Мамонтов А. С. Об условиях конечности для групп, порожденных элементами порядка 3	931
Логачев А. В. Уточненный принцип больших уклонений для ломаных, построенных по суммам независимых случайных величин	942
Лотов В. И. О случайном блуждании со специфическим алгоритмом переключений	960
Чечкина А. Г. Об оценке спектральной функции задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения с измеримыми коэффициентами	979
Шарафутдинов В. А. Кубические интегралы гамильтоновой системы с потенциалом класса C^1 на плоском 2-торе	986
Шиманогов И. Н., Вялый М. Н. Вычислимые изоморфизмы относительно регулярных булевых алгебр	1007
Валерий Владимирович Обуховский (27.04.1947–02.02.2026)	1020

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

МАТРИЦЫ НАД ПОЛНЫМИ КОЛЬЦАМИ ДИСКРЕТНОГО НОРМИРОВАНИЯ

А. Н. Абызов

Аннотация. Для матриц над полными кольцами дискретного нормирования вводится и изучается матричный аналог понятия представителя Тейхмюллера, который тесно связан со свойствами p -адических пределов последовательностей следов p -примарных степеней целочисленных матриц, рассматриваемых в работе. Также получены обобщения матричных аналогов сравнений Эйлера и Гаусса на случай матриц над коммутативными кольцами.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.501

Ключевые слова: кольцо дискретного нормирования, сравнение Гаусса, сравнение Эйлера, представитель Тейхмюллера.

1. Введение

В 1839 г. Шёнеманном в работе [1] было доказано сравнение

$$\alpha_1^p + \dots + \alpha_m^p \equiv \alpha_1 + \dots + \alpha_m \pmod{p}, \quad (1)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — все корни с учетом их кратностей унитарного многочлена $f \in \mathbb{Z}[x]$ и p — простое число. Это утверждение равносильно матричному аналогу малой теоремы Ферма, согласно которому для произвольной квадратной целочисленной матрицы A сравнение $\text{tr}(A^p) \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$ имеет место для каждого простого числа p . Сравнение (1) впоследствии переоткрывалось в ряде работ, например, в работе С. О. Шатуновского [2]. Широким обобщением малой теоремы Ферма является сравнение

$$\sum_{d|n} \mu(d) a^{\frac{n}{d}} \equiv 0 \pmod{n}, \quad (2)$$

которое имеет место для произвольных $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ и в литературе называется сравнением Гаусса. Частным случаем сравнения (2) является сравнение Эйлера, согласно которому сравнение

$$a^{p^n} \equiv a^{p^{n-1}} \pmod{p^n} \quad (3)$$

имеет место для каждого простого числа p и всякого натурального числа n . Согласно Диксону [3, с. 84–86] сравнение (2) было впервые получено Гауссом в случае, когда a — простое число. В случае, когда a является степенью простого

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 25-11-00348) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2026-1328/1).

числа сравнение Гаусса было доказано Шёнеманном в 1846 г. на основе того факта, что если p — простое число, то $\frac{\sum_{d|n} \mu(d)(p^m)^{\frac{d}{n}}}{n}$ — количество неразложимых унитарных многочленов степени n над полем из p^m элементов. В общем случае сравнение Гаусса было доказано Серре в 1855 г. Обобщение сравнения Гаусса на случай кольца целых конечного расширения поля $\mathbb{Q}$ было получено согласно [3, с. 86] в 1902 г. Вестлундом. Этот результат также был переоткрыт в недавней работе [4]. Матричный аналог сравнения Гаусса, согласно которому для каждой квадратной целочисленной матрицы A сравнение

$$\sum_{d|n} \mu(d) \operatorname{tr}(A^{\frac{n}{d}}) \equiv 0 \pmod{n} \quad (4)$$

имеет место для всякого натурального числа n , независимо был получен в 1921 г. Янихеном [5] и Шуром [6] в 1937 г. В частности, имеет место матричный аналог сравнения Эйлера, согласно которому для произвольной квадратной целочисленной матрицы A и простого числа p сравнение

$$\operatorname{tr}(A^{p^n}) \equiv \operatorname{tr}(A^{p^{n-1}}) \pmod{p^n} \quad (5)$$

имеет место для каждого $n \in \mathbb{N}$. Матричные аналоги сравнений Эйлера и Гаусса и различные способы их доказательств изучены в работах [7–12].

Из сравнения (5) следует, что для произвольной квадратной целочисленной матрицы A последовательность $(\operatorname{tr}(A^{p^n}))_{n \in \mathbb{N}}$ сходится относительно p -адической нормы к некоторому p -адическому числу. Одной из целей настоящей работы является изучение свойств таких пределов на основе арифметических свойств матриц над полными кольцами дискретного нормирования. Также изучаются обобщения сравнений Эйлера и Гаусса на случай матриц над коммутативными кольцами. Второй раздел носит предварительный характер и в нем в случае коммутативного кольца R приводятся обобщения сравнений Эйлера и Гаусса по модулю максимальных идеалов M , у которых фактор-кольца R/M конечны. В третьем разделе показано, что каждая матрица $A \in M_n(R)$, где R — полное кольцо дискретного нормирования, у которого $R/J(R) \cong \mathbb{F}_q$ и $J(R) = \pi R$, однозначно представима в виде $A = E + N$, где $E^{q^s} = E$, $N^k \in M_n(J(R))$ для некоторых $s, k \in \mathbb{N}$ и $EN = NE$. При этом π -адический предел $\lim_{t \rightarrow \infty} A^{q^{st}}$ равен E . Матрицу E можно рассматривать как естественный матричный аналог представителя Тейхмюллера для матрицы A . В четвертом разделе матричные аналоги сравнений Эйлера и Гаусса обобщаются на случай коммутативных колец. В качестве приложений получены аналогичные сравнения для следов целых алгебраических элементов из конечных расширений поля $\mathbb{Q}$. В пятом разделе с помощью матричного аналога представителя Тейхмюллера доказываются свойства p -адических пределов вида $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A^{p^k})$, где A — целочисленная матрица и p — простое число. В частности, показано, что такие пределы являются целыми над $\mathbb{Z}$, а группы Галуа полей разложения их минимальных многочленов над $\mathbb{Q}$ являются абелевыми. Также приведены примеры, иллюстрирующие доказанные утверждения.

Группу обратимых элементов кольца R и радикал Джекобсона R будем обозначать соответственно через $U(R)$ и $J(R)$. Если I — идеал кольца R , то для произвольных элементов $a, b \in R$ тот факт, что $a - b \in I$, будем обозначать через $a \equiv b \pmod{I}$.

2. Предварительные результаты

Лемма 2.1. Пусть R — коммутативное локальное кольцо, I — собственный идеал R и $R/J(R) \cong \mathbb{F}_q$, где $q = p^s$ и p — простое число. Если $\bigcap_{k=1}^{\infty} I^k = 0$, R полно в I -адической топологии и $J(R)/I$ — ниль-идеал фактор-кольца R/I , то всякий элемент $a \in R$ однозначно представим в виде

$$a = e + j,$$

где $e^q = e$, $j \in J(R)$. При этом I -адический предел $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{q^k}$ равен e .

Доказательство. ПЕРВЫЙ СЛУЧАЙ: I — ниль-идеал. Ясно, что согласно условию леммы первый случай равносильен тому факту, что $J(R)$ является ниль-идеалом. Рассмотрим естественный гомоморфизм $f : R \rightarrow R/J(R)$. Гомоморфизм f индуцирует сюръективный гомоморфизм $g = f|_{U(R)} : U(R) \rightarrow U(R/J(R))$. Покажем, что $\text{Ker}(g) = \{1 + j \mid j \in J(R)\}$ является p -группой. Пусть $1 + j \in \text{Ker}(g)$, где $j \in J(R)$. Так как $p1_R \in J(R)$, то $(p1_R)^{k_1} = j^{p^{k_2}} = 0$ для некоторых $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Тогда для некоторого $t \in R$ имеют место равенства $(1 + j)^{p^{k_1+k_2}} = (1 + pt)^{p^{k_1}} = 1$. Так как $U(R)/\text{Ker}(g)$ является циклической группой порядка $q - 1$ и $q - 1$ не делится на p , то стандартные рассуждения показывают, что для некоторой циклической подгруппы H группы $U(R)$ группа $U(R)$ является прямым произведением своих подгрупп $\text{Ker}(g)$ и H . Очевидно, что H совпадает с множеством всех элементов r из R , для которых выполнено равенство $r^{q-1} = 1$. Следовательно, для каждого элемента r из R существует однозначно определенный q -потент e такой, что $r \equiv e \pmod{J(R)}$.

ВТОРОЙ СЛУЧАЙ: $I^k \neq 0$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. Для каждого натурального числа k естественный гомоморфизм из R/I^{k+1} в R/I^k обозначим через π_k . Из условия леммы следует, что имеет место изоморфизм $R \cong \varprojlim R/I^k = \{(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \mid \pi_k(r_{k+1}) = r_k\}$. Для произвольного элемента $(r_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \varprojlim R/I^k$, где $r_k \in R/I^k$ для каждого k , согласно первому случаю имеет однозначное представление в виде $r_k = e_k + j_k$, где $e_k \in R/I^k$, $j_k \in J(R)/I^k$ и $e_k^q = e_k$. Тогда из однозначности следует, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеют место равенства $\pi_k(e_{k+1}) = e_k$, $\pi_k(j_{k+1}) = j_k$. Таким образом, всякий элемент r из R однозначно представим в виде $r = e + j$, где $e^q = e$ и $j \in J(R)$.

Рассмотрим произвольный элемент $a \in R$. Согласно изложенному выше имеет место равенство $a = e + j$, где $e^q = e$, $j \in J(R)$. Покажем, что $e = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{q^k}$. Для некоторого t_0 имеем $p^{t_0}, j^{t_0} \in I$. Пусть n — произвольное натуральное число. Тогда для каждого натурального числа N такого, что $N > \frac{2t_0n}{s}$, имеют место равенства

$$a^{q^N} = (e + j)^{q^N} = e + \sum_{1 \leq k \leq sN} \binom{p^{sN}}{k} e^{p^{sN}-k} j^k + \sum_{sN < k} \binom{p^{sN}}{k} e^{p^{sN}-k} j^k$$

и поскольку $p^{sN-k+1} \mid \binom{p^{sN}}{k}$ для $1 \leq k \leq sN$, то $a^{q^N} - e \in I^n$. Таким образом, $e = \lim_{k \rightarrow \infty} a^{q^k}$. $\square$

Отметим важный случай предыдущего утверждения. Пусть L — локальное поле, т. е. поле, полное относительно дискретного нормирования ν , у которого поле вычетов конечно. В этом случае хорошо известно, что для всякого элемента a из кольца нормирования для ν однозначно определен такой q -потент e , где

q — количество элементов из поля вычетов ν , что $\nu(a - e) < 1$. Этот q -потент называется *представителем Тейхмюллера* для a .

Следствие 2.2. Пусть кольцо R коммутативно и M — максимальный идеал. Если $R/M \cong \mathbb{F}_q$, где $q = p^s$ и p — простое число, то имеют место утверждения:

- (1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякий элемент $a \in R/M^n$ однозначно представим в виде

$$a = e + \beta,$$

где $e^q = e$ и $\beta \in \text{Nil}(R/M^n)$;

- (2) для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всякого элемента $a \in R/M^{s(n-1)+1}$ выполнено равенство $a^{q^n} = a^{q^{n-1}}$.

Доказательство. Первый пункт следует из леммы 2.1. Докажем второй пункт. Так как при $n = 1$ утверждение п. (2) очевидно, то без ограничения общности можно считать, что $n > 1$. Пусть $a \in R/M^{s(n-1)+1}$. Согласно п. (1) для a имеет место равенство $a = e + \beta$, где $e^q = e$ и $\beta \in M/M^{s(n-1)+1}$. Так как $p^{s(n-1)-k+1} \mid \binom{p^{s(n-1)}}{k}$ для $1 \leq k \leq s(n-1)$ и $p \in M$, то

$$\begin{aligned} a^{q^{n-1}} = (e + \beta)^{q^{n-1}} &= e + \sum_{1 \leq k \leq s(n-1)} \binom{p^{s(n-1)}}{k} e^{p^{s(n-1)}-k} \beta^k \\ &\quad + \sum_{s(n-1) < k} \binom{p^{s(n-1)}}{k} e^{p^{s(n-1)}-k} \beta^k = e \end{aligned}$$

и, следовательно, $a^{q^n} = (a^{q^{n-1}})^q = e^q = e = a^{q^{n-1}}$. $\square$

Следствие 2.3. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение и R — кольцо целых поля P . Если M — простой идеал кольца R , то для каждого $n \in \mathbb{N}$ и для всякого $a \in R$ имеет место сравнение

$$a^{N(M)^n} \equiv a^{N(M)^{n-1}} \pmod{M^{s(n-1)+1}},$$

где s — относительная степень идеала M над $M \cap \mathbb{Z}$. В частности, для каждого $a \in R$ имеет место сравнение

$$a^{N(M)^n} \equiv a^{N(M)^{n-1}} \pmod{M^n}.$$

Следствие 2.4. Пусть R — коммутативное кольцо, $M_1, \dots, M_k$ — различные максимальные идеалы кольца R и для каждого i имеет место изоморфизм $R/M_i \cong \mathbb{F}_{q_i}$, где $q_i = p_i^{s_i}$ и p_i — простое число. Тогда для каждого $a \in R$ и любого набора натуральных чисел $n_1, \dots, n_k$ имеет место сравнение

$$a^{q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}} + \sum_{t=1}^k (-1)^t \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq k} a^{\frac{q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}}{q_{i_1} \dots q_{i_t}}} \equiv 0 \pmod{\prod_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1}}. \quad (6)$$

Доказательство. Обозначим левую часть сравнения (6) через A . Для каждого $1 \leq i \leq k$ и всякого натурального числа m согласно следствию 2.2 имеет место сравнение

$$a^{mq_i^{n_i}} \equiv a^{mq_i^{n_i-1}} \pmod{M_i^{s_i(n_i-1)+1}}.$$

Следовательно, $A \in M_i^{s_i(n_i-1)+1}$ для каждого $1 \leq i \leq k$. Так как семейство идеалов $M_1, \dots, M_k$ комаксимально, то

$$\bigcap_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1} = \prod_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1}.$$

Таким образом, $A \in \prod_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1}$. $\square$

Следуя [4], введем обобщение функции Мёбиуса на случай колец целых конечных расширений поля $\mathbb{Q}$. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ и R — кольцо целых K . Для произвольного ненулевого собственного идеала I кольца R положим $\mu(I) = (-1)^n$, если I является произведением n различных простых идеалов R , и $\mu(I) = 0$, если I делится на квадрат некоторого простого идеала. Также положим $\mu(R) = 1$. Из следствия 2.4 непосредственно вытекает

Следствие 2.5. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, R — кольцо целых поля P и $A = M_1^{n_1} \dots M_k^{n_k}$, где $M_1, \dots, M_k$ — различные простые идеалы кольца R и $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$. Если $N(M_i) = p_i^{s_i}$ для каждого $1 \leq i \leq k$, где p_i — простое число, то для всякого $a \in R$ имеет место сравнение

$$\sum_{I|A} \mu(I) a^{N(AI^{-1})} \equiv 0 \left(\text{mod} \prod_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1} \right). \quad (7)$$

В частности, для каждого $a \in R$ имеет место сравнение

$$\sum_{I|A} \mu(I) a^{N(AI^{-1})} \equiv 0 \pmod{A}. \quad (8)$$

Следствие 2.6. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение и R — кольцо целых поля P . Если M — простой идеал кольца R и $N(M) = p^s$, где p — простое число, то имеют место утверждения

- (1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякий элемент $a \in R/M^n$ однозначно представим в виде

$$a = e + \beta,$$

где $e^{p^s} = e$ и $\beta \in \text{Nil}(R/M^n)$;

- (2) сравнение

$$a^{p^r} \equiv a^{p^{r-1}} \pmod{M^r}$$

выполнено для каждого $a \in R$ и $r \in \mathbb{N}$ в точности тогда, когда $s = 1$.

3. Разложения матрицы над полными кольцами дискретного нормирования

Пусть A — алгебра над кольцом дискретного нормирования R и $J(R) = \pi R$. Линейную топологию на A , в которой степени идеала πA образуют фундаментальную систему окрестностей нуля, назовем π -адической.

Теорема 3.1. Пусть R — полное кольцо дискретного нормирования, $J(R) = \pi R$ и $R/J(R) \cong \mathbb{F}_q$, где $q = p^r$ и p — простое число. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица $A \in M_n(R)$ однозначно представима в виде

$$A = E + N,$$

где $E^{q^s} = E$, $N^k \in M_n(J(R))$ для некоторых $s, k \in \mathbb{N}$ и $EN = NE$. При этом π -адический предел $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{sk}}$ равен E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in M_n(R)$. Так как R -алгебра $R[A]$ является алгеброй конечного типа, то из [13, теорема 10.1.4] следует, что для некоторого семейства ортогональных ненулевых идемпотентов $e_1, \dots, e_m \in R[A]$ выполнены условия: $R[A]e_i$ — локальная алгебра для каждого i и $1 = e_1 + \dots + e_m$. Фиксируем некоторое $1 \leq i \leq m$. Ясно, что алгебра $R[A]e_i$ является полной в π -адической топологии и как R -модуль конечно порождена и свободна. Покажем, что πe_i содержится в радикале Джекобсона $J(R[A]e_i)$ алгебры $R[A]e_i$. Предположим противное, тогда для некоторого $a \in R[A]e_i$ имеет место равенство $\pi a = e_i$ и, следовательно, $\pi R[A]e_i = R[A]e_i$. Получили противоречие с леммой Накаямы. Таким образом, $\pi R[A]e_i \subseteq J(R[A]e_i)$. Фактор-кольцо $R[A]e_i/\pi R[A]e_i$ имеет естественную структуру конечномерного векторного пространства над полем $R/\pi R$. Тогда $R[A]e_i/\pi R[A]e_i$ — конечное кольцо и, следовательно, $J(R[A]e_i)/\pi R[A]e_i$ является нильпотентным идеалом $R[A]e_i/\pi R[A]e_i$. Заметим, что $R[A]e_i/J(R[A]e_i)$ — конечное поле, порядок которого равен q^{s_i} , где s_i — некоторое натуральное число. Тогда из леммы 2.1 следует, что имеет место равенство $e_i A = E_i + N_i$, где $E_i^{q^{s_i}} = E_i \in R[A]e_i$, $N_i \in J(R[A]e_i)$ и $N_i^{k_i} \in \pi R[A]e_i$ для некоторого $k_i \in \mathbb{N}$. Таким образом, для матрицы A имеет место представление

$$A = E + N,$$

где

$$E = \sum_{i=1}^m E_i, \quad N = \sum_{i=1}^m N_i, \quad E^{q^{s_1 \dots s_m}} = E, \quad N^{\max(k_1, \dots, k_m)} \in \pi M_n(R), \quad EN = NE.$$

Пусть $s = s_1 \dots s_m$ и $k = \max(k_1, \dots, k_m)$.

Покажем, что $E = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{sk}}$. Пусть k_0 — такое натуральное число, что $p^{k_0} > k$. Тогда для некоторого $T \in M_n(R)$ имеет место равенство $A^{p^{k_0}} = (E + N)^{p^{k_0}} = E^{p^{k_0}} + pT + N^{p^{k_0}}$. Так как $p \in \pi R$ и $N^{p^{k_0}} \in \pi M_n(R)$, то $A^{p^{k_0}} = E^{p^{k_0}} + \pi T'$, где $T' \in M_n(R)$. Несложно заметить, что T' коммутирует с E . Тогда для каждого натурального числа $t > \frac{k_0}{rs}$ имеют место равенства

$$\begin{aligned} A^{q^{st}} &= A^{p^{rst}} = (A^{p^{k_0}})^{p^{rst-k_0}} = (E^{p^{k_0}} + \pi T')^{p^{rst-k_0}} \\ &= E + \sum_{1 \leq i \leq rst-k_0} \binom{p^{rst-k_0}}{i} E^{p^{rst-ip^{k_0}}} \pi^i T'^i + \sum_{rst-k_0 < i} \binom{p^{rst-k_0}}{i} E^{p^{rst-ip^{k_0}}} \pi^i T'^i. \end{aligned}$$

Поскольку $p^{rst-k_0-i+1} \mid \binom{p^{rst-k_0}}{i}$ для $1 \leq i \leq rst-k_0$, то $A^{q^{st}} - E \in \pi^{rst-k_0} M_n(R)$. Таким образом, последовательность $(A^{q^{sk}})_{k \in \mathbb{N}}$ в π -адической топологии сходится к E .

Предположим, что для матрицы A имеет место также разложение

$$A = E' + N',$$

где $E'^{q^{s'}} = E'$, $N'^{k'} \in \pi M_n(R)$ и $E'N' = N'E'$. Тогда $E' = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s'k}}$ и, следовательно,

$$E' = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s'k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s' sk}} = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{sk}} = E. \quad \square$$

Далее матрицу E из формулировки предыдущего утверждения будем называть *представителем Тейхмюллера* для матрицы A .

Лемма 3.2. Пусть R — полное кольцо дискретного нормирования и $R/J(R) \cong \mathbb{F}_q$. Тогда

- (1) если E_1, E_2 — представители Тейхмюллера соответственно для матриц $A, B \in M_n(R)$ и $AB = BA$, то $E_1 E_2$ — представитель Тейхмюллера для матрицы AB ;
- (2) если матрица A обратима в $M_n(R)$ и E — ее представитель Тейхмюллера, то матрица E обратима в $M_n(R)$ и E^{-1} является представителем Тейхмюллера для A^{-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Для некоторых $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ имеют место равенства

$$E_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s_1 k}}, \quad E_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} B^{q^{s_2 k}}.$$

Тогда

$$E_1 E_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s_1 s_2 k}} \lim_{k \rightarrow \infty} B^{q^{s_1 s_2 k}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (AB)^{q^{s_1 s_2 k}}$$

и, следовательно, $E_1 E_2$ — представитель Тейхмюллера для матрицы AB .

(2) Следует из первого пункта. $\square$

Теорема 3.3. Пусть R — коммутативное локальное кольцо, для которого имеет место изоморфизм $R/J(R) \cong \mathbb{F}_q$ и $\bigcap_{k=1}^{\infty} J(R)^k = 0$. Если R полно в $J(R)$ -адической топологии, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица $A \in M_n(R)$ представима в виде

$$A = E + N,$$

где $E^q = E$, $N^k \in M_n(J(R))$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in M_n(R)$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $f : R \rightarrow R/J(R)$. Через f также обозначим гомоморфизм из $M_n(R)$ в $M_n(R/J(R))$, индуцированный этим естественным гомоморфизмом. Обозначим поле $R/J(R)$ через P . Согласно [14, теорема 2] имеет место равенство $f(A) = E + N$, где $E, N \in M_n(P)$, $E^q = E$ и $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Так как фактор-алгебра $P[x]/(x^q - x)$ изоморфна конечному прямому произведению поля P , то для некоторого семейства ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_m \in P[E]$ имеет место равенство $E = \sum_{i=1}^m e_i f(\alpha_i)$, где $\alpha_i \in R$ для каждого i . Согласно [15, теорема 12.4, с. 43] для некоторого семейства ортогональных идемпотентов $E_1, \dots, E_m \in M_n(R)$ равенство $f(E_i) = e_i$ выполнено для каждого i . Из леммы 2.1 следует, что для каждого i имеет место равенство $\alpha_i = \varepsilon_i + \beta_i$, где $\varepsilon_i, \beta_i \in R$, $\varepsilon_i^q = \varepsilon_i$ и $\beta_i \in J(R)$. Тогда $E' = \sum_{i=1}^m E_i \varepsilon_i$ — q -потент и $f(E') = E$. Так как $f(A - E')^k = N^k = 0$, то $(A - E')^k \in J(M_n(R))$. $\square$

Следующее утверждение можно рассматривать как матричный аналог первого пункта следствия 2.2.

Следствие 3.4. Пусть кольцо R коммутативно и M — максимальный идеал. Если $R/M \cong \mathbb{F}_q$, то для каждого $m, n \in \mathbb{N}$ всякая матрица $A \in M_n(R/M^m)$ представима в виде

$$A = E + N,$$

где $E^q = E$, $N^k = 0$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

4. Сравнения для следов матриц над коммутативными кольцами

Следующее утверждение является обобщением матричного аналога малой теоремы Ферма, установленного в работе [1], на случай коммутативных колец.

Теорема 4.1 [14, следствие 2]. Пусть R — коммутативное кольцо и M — максимальный идеал кольца R такой, что $R/M \cong \mathbb{F}_q$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и каждой матрицы $A \in M_n(R)$ имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(A^q) \equiv \mathrm{tr}(A) \pmod{M}. \quad (9)$$

Пусть R — область целостности, $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \in R[x]$ — унитарный многочлен степени n и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все его корни с учетом их кратностей из некоторого конечного расширения поля частных R . Через C_f будем обозначать сопровождающую матрицу к f , т. е. матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Хорошо известно, что характеристический многочлен матрицы C_f совпадает с f . Следовательно, для каждого натурального числа m имеет место равенство $\alpha_1^m + \dots + \alpha_n^m = \mathrm{tr}(C_f^m)$. Таким образом, всякая последовательность $(\mathrm{tr}(A^{q^k}))_{k \in \mathbb{N}}$, где $A \in M_n(R)$ и $q \in \mathbb{N}$, совпадает с последовательностью вида $(\alpha_1^{q^k} + \dots + \alpha_n^{q^k})_{k \in \mathbb{N}}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — все корни с учетом их кратностей некоторого унитарного многочлена $f \in R[x]$, и наоборот.

Следующее утверждение можно рассматривать как матричный аналог второго пункта следствия 2.2.

Теорема 4.2. Пусть R — коммутативное кольцо и M — максимальный идеал кольца R такой, что $R/M \cong \mathbb{F}_q$, где $q = p^s$ и p — простое число. Тогда для произвольного неотрицательного целого числа m , каждого $n \in \mathbb{N}$ и всякой матрицы $A \in M_n(R)$ имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(A^{q^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}(A^{q^m}) \pmod{M^{sm+1}}. \quad (10)$$

В частности, если $R/M \cong \mathbb{F}_p$, то $\mathrm{tr}(A^{p^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}(A^{p^m}) \pmod{M^{m+1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что R — область целостности. Докажем с помощью индукции по k , что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и для каждой матрицы $X \in M_n(R)$ имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(X^{q^k}) \equiv \mathrm{tr}(X^{p^k}) \pmod{M^{k+1}}. \quad (11)$$

При $k = 0$ утверждение следует из теоремы 4.1. Предположим, что для некоторого неотрицательного целого числа k сравнение (11) имеет место для всякой матрицы $X \in M_n(R)$. Пусть $A \in M_n(R)$ и $Q(R)$ — поле частных кольца R , $K/Q(R)$ — поле разложения характеристического многочлена $\chi_A(t)$ матрицы A и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ — все корни $\chi_A(t)$ с учетом их кратностей. Для каждого семейства неотрицательных целых чисел $k_1, \dots, k_n$ через $A_{k_1, \dots, k_n}$ обозначим

множество всех мономов из $R[x_1, \dots, x_n]$, получаемых из $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ перестановками переменных. Сумму всех элементов из множества $A_{k_1, \dots, k_n}$ обозначим через $S_{k_1, \dots, k_n}(x_1, \dots, x_n)$. Несложно заметить, что если $f_1, \dots, f_N$ — все различные мономы из $A_{k_1, \dots, k_n}$, то $f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n), \dots, f_N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — все корни с учетом их кратностей некоторого унитарного многочлена из $R[x]$.

Из предположения индукции и замечаний, сделанных перед теоремой 4.2, следуют сравнения

$$\alpha_1^{qp^k} + \dots + \alpha_n^{qp^k} \equiv \alpha_1^{p^k} + \dots + \alpha_n^{p^k} \pmod{M^{k+1}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{qp^k} + \dots + f_N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{qp^k} \\ \equiv f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{p^k} + \dots + f_N(\alpha_1, \dots, \alpha_n)^{p^k} \pmod{M^{k+1}}. \end{aligned}$$

При этом последнее сравнение можно записать в виде

$$S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{qp^k}, \dots, \alpha_n^{qp^k}) \equiv S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{p^k}, \dots, \alpha_n^{p^k}) \pmod{M^{k+1}}. \quad (13)$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} (\alpha_1^{qp^k} + \dots + \alpha_n^{qp^k})^p &= \alpha_1^{qp^{k+1}} + \dots + \alpha_n^{qp^{k+1}} \\ &+ \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p, \\ p > k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n}} \binom{p}{k_1, \dots, k_n} S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{qp^k}, \dots, \alpha_n^{qp^k}), \\ (\alpha_1^{p^k} + \dots + \alpha_n^{p^k})^p &= \alpha_1^{p^{k+1}} + \dots + \alpha_n^{p^{k+1}} \\ &+ \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p, \\ p > k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n}} \binom{p}{k_1, \dots, k_n} S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{p^k}, \dots, \alpha_n^{p^k}). \end{aligned}$$

Так как $p \in M$, из сравнений (12), (13) следует, что

$$\begin{aligned} (\alpha_1^{qp^k} + \dots + \alpha_n^{qp^k})^p &\equiv (\alpha_1^{p^k} + \dots + \alpha_n^{p^k})^p \pmod{M^{k+2}}, \\ \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p, \\ p > k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n}} \binom{p}{k_1, \dots, k_n} S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{qp^k}, \dots, \alpha_n^{qp^k}) \\ &\equiv \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_n = p, \\ p > k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n}} \binom{p}{k_1, \dots, k_n} S_{k_1, \dots, k_n}(\alpha_1^{p^k}, \dots, \alpha_n^{p^k}) \pmod{M^{k+2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место сравнение $\text{tr}(A^{qp^{k+1}}) \equiv \text{tr}(A^{p^{k+1}}) \pmod{M^{k+2}}$.

Покажем, что для произвольной матрицы $A \in M_n(R)$ выполнено сравнение (10). Так как согласно доказанному выше для произвольного неотрицательного целого числа k имеет место сравнение $\text{tr}(A^{qp^k}) \equiv \text{tr}(A^{p^k}) \pmod{M^{k+1}}$, то для $k = sm$ имеем $\text{tr}(A^{q^{m+1}}) \equiv \text{tr}(A^{q^m}) \pmod{M^{sm+1}}$.

Предположим теперь, что R — произвольное коммутативное кольцо, для которого выполнены условия теоремы, и $A \in M_n(R)$. Несложно заметить, что для некоторой области целостности R' имеет место эпиморфизм колец $\psi: R' \rightarrow$

R . В качестве такого эпиморфизма можно рассмотреть, например, гомоморфизм, действующий из $\mathbb{Z}[\{x_r\}_{r \in R}]$ в R согласно правилу $x_r \mapsto r$ для каждого $r \in R$. Гомоморфизм ψ индуцирует кольцевой гомоморфизм $\psi' : M_n(R') \rightarrow M_n(R)$. Ясно, что $\psi^{-1}(M)$ — максимальный идеал кольца R' и $R'/\psi^{-1}(M) \cong \mathbb{F}_q$. Для некоторой матрицы $B \in M_n(R')$ имеет место равенство $\psi'(B) = A$. Тогда согласно доказанному выше имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(B^{q^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}(B^q)(\mathrm{mod} \psi^{-1}(M)^{sm+1}).$$

Таким образом, $\mathrm{tr}(A^{q^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}(A^q)(\mathrm{mod} M^{sm+1})$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. Пусть M — максимальный идеал коммутативного кольца R , для которого выполнены условия: $R/M \cong \mathbb{F}_q$ и $\bigcap_{i=1}^{\infty} M^i = 0$. Из предыдущей теоремы следует, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ и всякой матрицы $A \in M_n(R)$ последовательность $(\mathrm{tr}(A^{q^k}))_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому элементу из M -адического пополнения кольца R . Свойства таких пределов в случае, когда R — кольцо целых некоторого конечного расширения $P/\mathbb{Q}$, будут рассмотрены в следующем разделе.

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству следствия 2.4.

Следствие 4.4. Пусть R — коммутативное кольцо, $M_1, \dots, M_k$ — различные максимальные идеалы R и для каждого i имеет место изоморфизм $R/M_i \cong \mathbb{F}_{q_i}$, где $q_i = p_i^{s_i}$ и p_i — простое число. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$, каждой матрицы $A \in M_n(R)$ и любого набора натуральных чисел $n_1, \dots, n_k$ имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(A^{q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}}) + \sum_{t=1}^k (-1)^t \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_t \leq k} \mathrm{tr}(A^{\frac{q_1^{n_1} \dots q_k^{n_k}}{q_{i_1} \dots q_{i_t}}}) \equiv 0 \left(\mathrm{mod} \prod_{i=1}^k M_i^{s_i(n_i-1)+1} \right). \quad (14)$$

Матричным аналогом сравнения (8) является следующее утверждение.

Следствие 4.5. Пусть $K/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, R — кольцо целых поля K и I — ненулевой идеал R . Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ и каждой матрицы $A \in M_n(R)$ имеет место сравнение

$$\sum_{J|I} \mu(J) \mathrm{tr}(A^{N(IJ^{-1})}) \equiv 0(\mathrm{mod} I). \quad (15)$$

Теорема 4.6. Пусть R — дедекиндово кольцо, P — поле частных R , K/P — конечное сепарабельное расширение P и R' — целое замыкание R в K . Если M — максимальный идеал R и $R/M \cong \mathbb{F}_{p^s}$, где p — простое число, то для каждого $\alpha \in R'$ и произвольного неотрицательного целого числа m выполнено сравнение

$$\mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^{q^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^q)(\mathrm{mod} M^{sm+1}),$$

где $q = p^s$. В частности, если $R/M \cong \mathbb{F}_p$, то

$$\mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^{p^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^p)(\mathrm{mod} M^{m+1}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha \in R'$. Из условия теоремы следует, что R' является конечно порожденным R -модулем. Пусть $S = R \setminus M$. Тогда R_S является

кольцом дискретного нормирования и, следовательно, R'_S — свободный конечно порожденный R_S -модуль. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — базис R_S -модуля R'_S . Так как $\alpha \in R'_S$, то имеет место эндоморфизм $\hat{\alpha}$ модуля ${}_S R'_S$, действующий согласно правилу $x \mapsto \alpha x$ для каждого $x \in R'_S$. Пусть A — матрица $\hat{\alpha}$ относительно базиса $e_1, \dots, e_n$. Так как $R_S/M_S \cong R/M \cong \mathbb{F}_{p^s}$, то согласно теореме 4.2 для каждого неотрицательного целого числа m имеет место сравнение

$$\mathrm{tr}(A^{q^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}(A^{q^m}) \pmod{M_S^{sm+1}}. \quad (16)$$

Поскольку $\mathrm{tr}(A^{q^m}) = \mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^{q^m}) \in R$, то стандартные рассуждения показывают, что выполнено также сравнение

$$\mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^{q^m}) \equiv \mathrm{tr}_{K/P}(\alpha^{q^{m+1}}) \pmod{M^{sm+1}}. \quad \square \quad (17)$$

Следующее утверждение вытекает из следствия 2.6 и теоремы 4.6.

Следствие 4.7. Пусть L/K — конечное расширение числового поля K , R — кольцо целых поля K , R' — целое замыкание R в L и M — простой идеал кольца R , содержащий простое число p . Тогда для каждого элемента $b \in R'$ и произвольного неотрицательного целого числа m выполнено сравнение

$$\mathrm{tr}_{L/K}(b^{N(M)^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}_{L/K}(b^{N(M)^m}) \pmod{M^{sm+1}},$$

где $N(M) = p^s$. В частности, если $R/M \cong \mathbb{F}_p$, то

$$\mathrm{tr}_{L/K}(b^{p^{m+1}}) \equiv \mathrm{tr}_{L/K}(b^{p^m}) \pmod{M^{m+1}}.$$

Следствие 4.8. Пусть L/K — конечное расширение числового поля K , R — кольцо целых поля K , R' — целое замыкание R в L и I — ненулевой идеал кольца R . Тогда для каждого элемента $b \in R'$ выполнено сравнение

$$\sum_{J|I} \mu(J) \mathrm{tr}_{L/K}(b^{N(IJ^{-1})}) \equiv 0 \pmod{I}. \quad (18)$$

Следствие 4.9 [9, теорема 3]. Пусть L/K — расширение Галуа числового поля K , R — кольцо целых поля K и R' — целое замыкание R в L , M — простой идеал кольца R , содержащий простое число p и такой, что свойство

$$a^{p^r} \equiv a^{p^{r-1}} \pmod{M^r} \quad (19)$$

выполнено для всех $r \in \mathbb{N}$ и $a \in R$. Тогда для каждого элемента $b \in R'$ и произвольного $r \in \mathbb{N}$ выполнено сравнение

$$\mathrm{tr}_{L/K}(b^{p^r}) \equiv \mathrm{tr}_{L/K}(b^{p^{r-1}}) \pmod{M^r}.$$

Замечание 4.10. А. В. Зарелуа в работе [9] на странице 89 отметил возможность освобождения от требования справедливости сравнения (19) для всех $r \in \mathbb{N}$ и $a \in R$ из предыдущего утверждения за счет замены показателей p^r в формулировке следствия 4.9 на показатели $N(M^r)$. Следствие 4.7 можно рассматривать как одно из возможных утверждений, которое удовлетворяет выше сформулированному требованию.

5. Приложения и примеры

Теорема 5.1. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, R — кольцо целых поля P , M — максимальный идеал R и $R/M \cong \mathbb{F}_q$. Тогда имеют место утверждения:

- (1) для каждой матрицы $A \in M_n(R)$ M -адический предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k})$ является целым над $\mathbb{Z}$ и группа Галуа поля разложения его минимального многочлена над $\mathbb{Q}$ является абелевой;
- (2) для произвольной обратимой матрицы A из $M_n(R)$ M -адические пределы $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k})$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{-q^k})$ сопряжены над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A \in M_n(R)$. Через P' обозначим пополнение P относительно M -нормы. Также через R' и M' обозначим замыкания относительно M -нормы соответственно R и M в поле P' . Так как $R'/M' \cong R/M \cong \mathbb{F}_q$, то согласно теореме 3.1 для некоторого $s_0 \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $\lim_{k \rightarrow \infty} A^{q^{s_0 k}} = E$, где $E = E^{q^{s_0}}$ — представитель Тейхмюллера матрицы A , принадлежащий кольцу $M_n(R')$. Согласно замечанию 4.3 последовательность $(\text{tr}(A^{q^k}))_{k \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому элементу из M -адического пополнения кольца R . Следовательно,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^{s_0 k}}) = \text{tr}(E).$$

Так как $E^{q^{s_0}} = E$, то $\text{tr}(E)$ — сумма корней $(q^{s_0} - 1)$ -степени из единицы, принадлежащих алгебраическому замыканию поля P' . Таким образом, $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k})$ — корень некоторого целочисленного унитарного многочлена, у которого группа Галуа его поля разложения над $\mathbb{Q}$ является абелевой.

Предположим, что $\det(A)$ обратим в R . Из леммы 3.2 следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{-q^k}) = \text{tr}(E^{-1}).$$

Следовательно, для автоморфизма φ поля $\mathbb{Q}(\varepsilon_{q^{s_0}-1})$, для которого выполнено равенство $\varphi(\varepsilon_{q^{s_0}-1}) = \varepsilon_{q^{s_0}-1}^{-1}$, имеем

$$\varphi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k})\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{-q^k}). \quad \square$$

Следствие 5.2. Пусть $A \in M_n(\mathbb{Z})$ и p — простое число. Тогда имеют место следующие утверждения:

- (1) p -адический предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$ является целым над $\mathbb{Z}$ и группа Галуа поля разложения его минимального многочлена над $\mathbb{Q}$ является абелевой;
- (2) если $|\det(A)| = 1$, то p -адические числа $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{-p^k}) \in \mathbb{Q}_p$ сопряжены над полем $\mathbb{Q}$.

Следствие 5.3. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, R — кольцо целых поля P , M — максимальный идеал R и $R/M \cong \mathbb{F}_q$. Если $A \in M_n(R)$ и $x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i a_i^{(k)} x^{n-i}$ — характеристический многочлен A^k для каждого $k \in \mathbb{N}$, то для всякого $1 \leq i \leq n$ существует M -адический предел $\lim_{k \rightarrow \infty} a_i^{(q^k)}$, который является целым над $\mathbb{Z}$ и группа Галуа поля разложения его минимального многочлена над $\mathbb{Q}$ является абелевой. При этом если A — обратимая матрица в $M_n(R)$ и E — представитель Тейхмюллера матрицы A , то коэффициенты характеристических

многочленов матриц E и E^{-1} , стоящие при одинаковых степенях, сопряжены над $\mathbb{Q}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейный оператор $\mathbf{A}$, действующий на векторном пространстве P^n и у которого матрица относительно некоторого базиса P^n равна A . Тогда хорошо известно, что для каждого $1 \leq i \leq n$ и всякого $k \in \mathbb{N}$ $a_i^{(k)}$ — след линейного оператора $\bigwedge^i \mathbf{A}^k$, который действует на $\bigwedge^i(P^n)$. Так как, очевидно, относительно некоторого базиса $\bigwedge^i(P^n)$ компоненты матрицы линейного оператора $\bigwedge^i \mathbf{A}$ принадлежат R , то утверждение следствия 5.3 непосредственно вытекает из теоремы 5.1. $\square$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ через $L_n(x)$ и $F_n(x)$ обозначим соответственно многочлены

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} - x \text{ и } \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{n-2i} - x.$$

Далее нам потребуется следующее тождество, которое в литературе называется тождеством Куммера и является частным случаем тождества Жирара — Варинга:

$$x^n + y^n = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} (xy)^i (x+y)^{n-2i}. \quad (20)$$

Теорема 5.4. Пусть $P/\mathbb{Q}$ — конечное расширение, R — кольцо целых поля P , M — максимальный идеал R и $R/M \cong \mathbb{F}_q$. Если $A \in M_2(R)$, то M -адический предел $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{q^k})$ — корень многочлена $\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{q}{q-i} \binom{q-i}{i} \beta^i x^{q-2i} - x$, где β — представитель Тейхмюллера $\det(A)$, принадлежащий пополнению поля P относительно M -нормы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть α_1, α_2 — корни характеристического многочлена матрицы A из алгебраического замыкания поля P . Тогда $\text{tr}(A^n) = \alpha_1^n + \alpha_2^n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Подставим в тождество (20) вместо n, x и y соответственно $q, \alpha_1^{q^k}$ и $\alpha_2^{q^k}$. В результате получим равенства

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{q}{q-i} \binom{q-i}{i} (\alpha_1 \alpha_2)^{q^k i} \text{tr}(A^{q^k})^{q-2i} &= \text{tr}(A^{q^{k+1}}), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{q}{q-i} \binom{q-i}{i} (\alpha_1 \alpha_2)^{q^k i} \text{tr}(A^{q^k})^{q-2i} \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{tr}(A^{q^{k+1}})), \\ \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor} (-1)^i \frac{q}{q-i} \binom{q-i}{i} \beta^i \alpha^{q-2i} &= \alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Если p — простое число, то кольцо целых p -адических чисел будем обозначать через $\widehat{\mathbb{Z}}_p$.

Следствие 5.5. Пусть p — простое число. Имеют место следующие утверждения:

- (1) для каждой матрицы $A \in M_2(\mathbb{Z})$, у которой $\det(A) = 1$, p -адический предел $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$ — корень многочлена $L_p(x)$ и $\alpha \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$;

- (2) для каждого $0 \leq r \leq p-1$ существует такой однозначно определенный корень $\alpha_r \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ многочлена $L_p(x)$, что $\alpha_r \equiv r \pmod{p}$;
- (3) корни многочлена $L_p(x)$ составляют полную систему представителей смежных классов фактор-кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p/p\widehat{\mathbb{Z}}_p$ и имеет место равенство

$$L_p(x) = \prod_{r=0}^{p-1} (x - \alpha_r).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A — произвольная матрица из $M_2(\mathbb{Z})$ и $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$. Так как сравнение $\text{tr}(A^{p^n}) \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$ имеет место для каждого $n \in \mathbb{N}$, то $\alpha \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ для матрицы $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ имеют место равенства $\text{tr}(A_0) = k$ и $|A_0| = 1$. Тогда для каждого $0 \leq r \leq p-1$ существует такая матрица $A \in M_2(\mathbb{Z})$, что $|A| = 1$ и $\alpha_r = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$ сравнимо с r по модулю p . Из теоремы 5.4 следует, что $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1}$ — различные корни многочлена $L_p(x)$ степени p . Таким образом, имеет место равенство $L_p(x) = \prod_{r=0}^{p-1} (x - \alpha_r)$. $\square$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству следствия 5.5.

Следствие 5.6. Пусть p — нечетное простое число. Имеют место следующие утверждения:

- (1) для каждой матрицы $A \in M_2(\mathbb{Z})$, у которой $\det(A) = -1$, p -адический предел $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}(A^{p^k})$ — корень многочлена $F_p(x)$ и $\beta \equiv \text{tr}(A) \pmod{p}$;
- (2) для каждого $0 \leq r \leq p-1$ существует такой однозначно определенный корень $\beta_r \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$ многочлена $F_p(x)$, что $\beta_r \equiv r \pmod{p}$;
- (3) корни многочлена $F_p(x)$ составляют полную систему представителей смежных классов фактор-кольца $\widehat{\mathbb{Z}}_p/p\widehat{\mathbb{Z}}_p$ и имеет место равенство

$$F_p(x) = \prod_{r=0}^{p-1} (x - \beta_r).$$

Рассмотрим некоторые свойства введенных выше семейств многочленов $(L_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ и $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, которые представляют определенный интерес ввиду приведенных выше утверждений.

Лемма 5.7. Пусть n — нечетное число, $n > 1$. Тогда

- (1) над полем $\mathbb{R}$ для многочлена $L_n(x)$ имеет место разложение

$$L_n(x) = \prod_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left(x - 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) \right) \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(x - 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n+1} \right) \right); \quad (21)$$

- (2) над полем $\mathbb{R}$ для многочлена $F_n(x)$ имеют место следующие разложения:

(а) если $n \equiv 1 \pmod{4}$ и $n = 4m + 1$, то

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^m \left(x^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) \right) \prod_{k=1}^m \left(x^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi(2k-1)}{n+1} \right) \right) x, \quad (22)$$

(b) если $n \equiv 3 \pmod{4}$ и $n = 4m + 3$, то

$$F_n(x) = \prod_{k=1}^m \left(x^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) \right) \prod_{k=1}^{m+1} \left(x^2 + 4 \sin^2 \left(\frac{\pi(2k-1)}{n+1} \right) \right) x. \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Для каждого натурального n через ε_n будем обозначать комплексный примитивный корень n -й степени из единицы. Так как $\varepsilon_{n-1}^{kn} = \varepsilon_{n-1}^k$, то согласно тождеству (20) имеют место равенства

$$L_n \left(2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) \right) = L_n(\varepsilon_{n-1}^k + \varepsilon_{n-1}^{-k}) = 0,$$

$$L_n \left(2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n+1} \right) \right) = L_n(\varepsilon_{n+1}^k + \varepsilon_{n+1}^{-k}) = 0.$$

Несложно заметить, что множество

$$\left\{ 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) \mid 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \right\} \cup \left\{ 2 \cos \left(\frac{2\pi k}{n+1} \right) \mid 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \right\}$$

состоит из n чисел. Таким образом, имеет место равенство (21).

(2) Так как $\varepsilon_{n-1}^{kn} = \varepsilon_{n-1}^k$ и $\varepsilon_{2(n+1)}^{(2k-1)n} = -\varepsilon_{2(n+1)}^{-(2k-1)}$, то согласно тождеству (20) имеют место равенства

$$F_n \left(2 \sin \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) i \right) = F_n(\varepsilon_{n-1}^k - \varepsilon_{n-1}^{-k}) = 0,$$

$$F_n \left(2 \sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{n+1} \right) i \right) = F_n(\varepsilon_{2(n+1)}^{2k-1} - \varepsilon_{2(n+1)}^{-(2k-1)}) = 0.$$

Несложно заметить, что множества

$$\{0\} \cup \left\{ 2 \sin \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) i \mid -m \leq k \leq m \right\} \cup \left\{ 2 \sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{n+1} \right) i \mid -m \leq k \leq m \right\},$$

если $n \equiv 1 \pmod{4}$ и $n = 4m + 1$, и

$$\begin{aligned} \{0\} \cup \left\{ 2 \sin \left(\frac{2\pi k}{n-1} \right) i \mid -m \leq k \leq m \right\} \\ \cup \left\{ 2 \sin \left(\frac{\pi(2k-1)}{n+1} \right) i \mid -(m+1) \leq k \leq m+1 \right\}, \end{aligned}$$

если $n \equiv 3 \pmod{4}$ и $n = 4m + 3$, состоят из n чисел. Таким образом, имеют место равенства (22) и (23). $\square$

Теорема 5.8. Пусть p — нечетное простое число, $n, m \in \mathbb{N}$ и $n \mid m$. Тогда

- (1) $L_{p^n}(x) \mid L_{p^m}(x)$;
- (2) $F_{p^n}(x) \mid F_{p^m}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = nl$.

(1) Согласно доказательству п. (1) леммы 5.7

$$A = \{\varepsilon_{p^n-1}^k + \varepsilon_{p^n-1}^{-k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\varepsilon_{p^n+1}^k + \varepsilon_{p^n+1}^{-k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

— множество всех решений уравнения $L_{p^n} = 0$ и

$$B = \{\varepsilon_{p^{nl}-1}^k + \varepsilon_{p^{nl}-1}^{-k}\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\varepsilon_{p^{nl}+1}^k + \varepsilon_{p^{nl}+1}^{-k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$$

— множество всех решений уравнения $L_{p^{nl}} = 0$. Так как имеют место свойства

- (a) $p^n - 1 \mid p^{nl} - 1$,
 - (b) $p^n + 1 \mid p^{nl} + 1$, если l нечетно,
 - (c) $p^n + 1 \mid p^{nl} - 1$, если l четно,
- то $\langle \varepsilon_{p^n-1} \rangle \cup \langle \varepsilon_{p^n+1} \rangle \subseteq \langle \varepsilon_{p^{nl}-1} \rangle \cup \langle \varepsilon_{p^{nl}+1} \rangle$ и, следовательно, $A \subseteq B$.
 (2) Согласно доказательству п. (2) леммы 5.7

$$A = \{ \varepsilon_{p^n-1}^k - \varepsilon_{p^n-1}^{-k} \}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{ \varepsilon_{2(p^n+1)}^{2k+1} - \varepsilon_{2(p^n+1)}^{-(2k+1)} \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

— множество всех решений уравнения $F_{p^n} = 0$ и

$$B = \{ \varepsilon_{p^{nl}-1}^k - \varepsilon_{p^{nl}-1}^{-k} \}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{ \varepsilon_{2(p^{nl}+1)}^{2k+1} - \varepsilon_{2(p^{nl}+1)}^{-(2k+1)} \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

— множество всех решений уравнения $F_{p^{nl}} = 0$. Так как имеют место свойства

- (a) $p^n - 1 \mid p^{nl} - 1$,
- (b) $p^n + 1 \mid p^{nl} + 1$ и $\frac{p^{nl}+1}{p^n+1}$ — нечетное натуральное число, если l нечетно,
- (c) $p^n + 1 \mid p^{nl} - 1$ и $\frac{p^{nl}-1}{p^n+1}$ — четное натуральное число, если l четно,

то

$$\langle \varepsilon_{p^n-1} \rangle \cup \{ \varepsilon_{2(p^n+1)}^{2k+1} \}_{k \in \mathbb{Z}} \subseteq \langle \varepsilon_{p^{nl}-1} \rangle \cup \{ \varepsilon_{2(p^{nl}+1)}^{2k+1} \}_{k \in \mathbb{Z}}$$

и тем самым получаем $A \subseteq B$. $\square$

В качестве замечания отметим связь семейства многочленов $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ с подходом к доказательству квадратичного закона взаимности, предложенным Эйзенштейном в работе [16]. Воспользуемся леммой Гаусса — Шеринга для доказательства квадратичного закона взаимности для символа Якоби, согласно которой для произвольных различных натуральных нечетных чисел n, m имеет место равенство

$$\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{\varepsilon_n^{mk} - \varepsilon_n^{-km}}{\varepsilon_n^k - \varepsilon_n^{-k}} = \left(\frac{m}{n} \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.9. Пусть n, m — различные нечетные натуральные числа > 1 . Имеет место равенство

$$F_n(x) + x = xG_n(x^2),$$

где

$$G_n(x) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n}{n-i} \binom{n-i}{i} x^{\frac{n-2i-1}{2}}.$$

Из тождества Куммера для каждого $1 \leq k \leq \frac{m-1}{2}$ следуют равенства

$$G_n((\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k})^2) = \frac{F_n(\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k}) + \varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k}}{\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k}} = \frac{\varepsilon_m^{nk} - \varepsilon_m^{-kn}}{\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k}}.$$

Аналогично для каждого $1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$ имеет место равенство

$$G_n((\varepsilon_n^k - \varepsilon_n^{-k})^2) = 0.$$

Так как $\deg(G_n(x)) = \frac{n-1}{2}$ и $(\varepsilon_n - \varepsilon_n^{-1})^2, \dots, (\varepsilon_n^{\frac{n-1}{2}} - \varepsilon_n^{-\frac{n-1}{2}})^2$ — попарно различные числа, то

$$G_n(x) = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (x - (\varepsilon_n^k - \varepsilon_n^{-k})^2).$$

Тогда

$$\operatorname{Res}(G_m(x), G_n(x)) = \prod_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} G_n((\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k})^2) = \prod_{k=1}^{\frac{m-1}{2}} \frac{\varepsilon_m^{nk} - \varepsilon_m^{-kn}}{\varepsilon_m^k - \varepsilon_m^{-k}} = \left(\frac{n}{m}\right).$$

Аналогично $\operatorname{Res}(G_n(x), G_m(x)) = \left(\frac{m}{n}\right)$. Так как

$$\operatorname{Res}(G_n(x), G_m(x)) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}} \operatorname{Res}(G_m(x), G_n(x)),$$

то

$$\left(\frac{n}{m}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2} \frac{m-1}{2}} \left(\frac{m}{n}\right).$$

Другой подход к доказательству квадратичного закона взаимности для символа Якоби, также основанному на лемме Гаусса — Шеринга, предложен в [17].

ПРИМЕР 5.10. Пусть $A \in M_2(\mathbb{Z})$ и $\det(A) = 1$. Найдем значение 2-адического предела $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A^{2^k})$. Пусть α_1, α_2 — корни характеристического многочлена A с учетом их кратностей. Так как

$$\operatorname{tr}(A^{2^{k+1}}) = \alpha_1^{2^{k+1}} + \alpha_2^{2^{k+1}} = (\alpha_1^{2^k} + \alpha_2^{2^k})^2 - 2 = \operatorname{tr}(A^{2^k})^2 - 2,$$

то α — корень многочлена $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеют место сравнения

- (a) $\operatorname{tr}(A^{2^k}) \equiv -1 \pmod{2^{k+1}}$, если след $\operatorname{tr}(A)$ нечетен;
- (b) $\operatorname{tr}(A^{2^k}) \equiv 2 \pmod{2^{k+1}}$, если след $\operatorname{tr}(A)$ четен.

Докажем по индукции п. (a). Если $k = 1$, то сравнение п. (a) проверяется непосредственно. Предположим, что сравнение п. (a) имеет место для некоторого k . Тогда $\operatorname{tr}(A^{2^k}) = -1 + 2^{k+1}t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\operatorname{tr}(A^{2^{k+1}}) = (-1 + 2^{k+1}t)^2 - 2 = -1 + 2^{k+2}(-t + t^2 2^k).$$

П. (b) доказывается аналогично.

Таким образом, $\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A^{2^k}) = \begin{cases} -1, & \text{если след } \operatorname{tr}(A) \text{ нечетен,} \\ 2, & \text{если след } \operatorname{tr}(A) \text{ четен.} \end{cases}$

ПРИМЕР 5.11. Пусть $A \in M_2(\mathbb{Z})$ и $\det(A) = 1$. Найдем значение 3-адического предела $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A^{3^k})$. Пусть α_1, α_2 — корни характеристического многочлена A с учетом их кратностей. Так как

$$\operatorname{tr}(A^{3^{k+1}}) = \alpha_1^{3^{k+1}} + \alpha_2^{3^{k+1}} = (\alpha_1^{3^k} + \alpha_2^{3^k})^3 - 3(\alpha_1^{3^k} + \alpha_2^{3^k}) = \operatorname{tr}(A^{3^k})^3 - 3\operatorname{tr}(A^{3^k}),$$

то α — корень многочлена $L_3(x) = x^3 - 4x$. Покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеют место сравнения

- (a) $\operatorname{tr}(A^{3^k}) \equiv 2 \pmod{3^{2k+1}}$, если $\operatorname{tr}(A) \equiv 2 \pmod{3}$;
- (b) $\operatorname{tr}(A^{3^k}) \equiv -2 \pmod{3^{2k+1}}$, если $\operatorname{tr}(A) \equiv 1 \pmod{3}$;
- (c) $\operatorname{tr}(A^{3^k}) \equiv 0 \pmod{3^{k+1}}$, если $\operatorname{tr}(A) \equiv 0 \pmod{3}$.

Докажем по индукции п. (a). Если $k = 1$, то сравнение п. (a) проверяется непосредственно. Предположим, что сравнение п. (a) имеет место для некоторого k . Тогда $\operatorname{tr}(A^{3^k}) = 2 + 3^{2k+1}t$, где $t \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $\operatorname{tr}(A^{3^{k+1}}) = (2 + 3^{2k+1}t)^3 - 3(2 + 3^{2k+1}t) = 2 + t'3^{2k+3}$, где $t' \in \mathbb{Z}$.

Пп. (b) и (c) доказывается аналогично.

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{tr}(A^{3^k}) = \begin{cases} 2, & \text{если } \operatorname{tr}(A) \equiv 2 \pmod{3}, \\ -2, & \text{если } \operatorname{tr}(A) \equiv 1 \pmod{3}, \\ 0, & \text{если } \operatorname{tr}(A) \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

ПРИМЕР 5.12. Числами Перрена называется последовательность $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условиям

$$P_1 = 0, P_2 = 2, P_3 = 3 \text{ и } P_{n+3} = P_{n+1} + P_n \ (n \in \mathbb{N}).$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $P_n = \operatorname{tr}(C^n)$, где C — сопровождающая матрица к многочлену $x^3 - x - 1$. Доопределим последовательность Перрена на множество всех целых чисел согласно правилу $P_n = \operatorname{tr}(C^n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Найдем значения 2-адических пределов $\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{2^k}$ и $\beta = \lim_{k \rightarrow \infty} P_{-2^k}$. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — корни характеристического многочлена C . Заметим, что поскольку $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$, то $\operatorname{tr}(C^{-n}) = \alpha_1^{-n} + \alpha_2^{-n} + \alpha_3^{-n} = (\alpha_1 \alpha_2)^n + (\alpha_1 \alpha_3)^n + (\alpha_2 \alpha_3)^n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(C^{2^{k+1}}) &= \alpha_1^{2^{k+1}} + \alpha_2^{2^{k+1}} + \alpha_3^{2^{k+1}} \\ &= (\alpha_1^{2^k} + \alpha_2^{2^k} + \alpha_3^{2^k})^2 - 2(\alpha_1^{2^k} \alpha_2^{2^k} + \alpha_1^{2^k} \alpha_3^{2^k} + \alpha_2^{2^k} \alpha_3^{2^k}) = \operatorname{tr}(C^{2^k})^2 - 2 \operatorname{tr}(C^{-2^k}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем равенство

$$\operatorname{tr}(C^{-2^{k+1}}) = \operatorname{tr}(C^{-2^k})^2 - 2 \operatorname{tr}(C^{2^k}).$$

Тогда $\alpha = \alpha^2 - 2\beta$, $\beta = \beta^2 - 2\alpha$ и, следовательно, α, β являются корнями многочлена $x^4 - 2x^3 - x^2 - 6x = x(x-3)(x^2+x+2)$.

Покажем, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеют место сравнения

- (а) $P_{2^k} P_{-2^k} \equiv 2 \pmod{2^k}$;
- (б) $P_{2^k} + P_{-2^k} + 1 \equiv 0 \pmod{2^k}$.

Докажем по индукции пп. (а) и (б). Если $k = 1$, то сравнения пунктов (а) и (б) проверяются непосредственно. Предположим, что сравнения пунктов (а) и (б) имеют место для некоторого k . Тогда $P_{2^k} P_{-2^k} = 2 + 2^k t$, $P_{2^k} + P_{-2^k} = -1 + 2^k t'$, где $t, t' \in \mathbb{Z}$. Справедливы равенства

$$\begin{aligned} P_{2^{k+1}} P_{-2^{k+1}} &= (P_{2^k}^2 - 2P_{-2^k})(P_{-2^k}^2 - 2P_{2^k}) \\ &= (P_{2^k} P_{-2^k})^2 - 2(P_{2^k} + P_{-2^k})((P_{2^k} + P_{-2^k})^2 - 3P_{2^k} P_{-2^k}) + 4P_{2^k} P_{-2^k} \\ &= (2 + 2^k t)^2 - 2(-1 + 2^k t')((-1 + 2^k t')^2 - 3(2 + 2^k t)) + 4(2 + 2^k t) = 2 + t'' 2^{k+1}, \end{aligned}$$

где $t'' \in \mathbb{Z}$. Аналогично доказывается сравнение $P_{2^{k+1}} + P_{-2^{k+1}} + 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$.

Таким образом, 2-адические числа α и β являются различными корнями многочлена $x^2 + x + 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Schönemann T. Theorie der symmetrischen Functionen der Wurzeln einer Gleichung. Allgemeine Sätze über Congruenzen nebst einigen Anwendungen derselben // J. Reine Angew. Math. 1839. N 19. P. 289–308.
2. Шатуновский С. О. Обь условіяхъ существованія n неравныхъ корней сравненія n -й степени по простому модулю. Казань: Типо-литографія Императорск. ун-та, 1903.
3. Dickson L. E. History of the theory of numbers. New York: Chelsea, 1971. V. 1.

4. Gladki P., Pulikowski M. Gauss congruences in algebraic number fields // Ann. Math. Silesianae. 2022. V. 36, N 1. P. 53–56.
5. Jänichen W. Über die Verallgemeinerung einer Gauss'schen Formel aus der Theorie der höhern Kongruenzen // Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft. 1921. V. 20. P. 23–29.
6. Schur I. Arithmetische Eigenschaften der Potenzsummen einer algebraischen Gleichung // Compositio Mathematica. 1937. V. 4. P. 432–444.
7. Арнольд В. И. Матричная теорема Эйлера — Ферма // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 6. С. 61–70.
8. Зарелуа А. В. О матричных аналогах малой теоремы Ферма // Мат. заметки. 2006. Т. 79, № 6. С. 838–853.
9. Зарелуа А. В. О сравнениях для следов степеней некоторых матриц // Тр. МИАН. 2008. Т. 263. С. 85–105.
10. Винберг Э. Б. Малая теорема Ферма и ее обобщения // Мат. просвещение. Сер. 3. 2008. Т. 12. С. 43–53.
11. Smyth C. J. A coloring proof of a generalization of Fermat's little theorem // Am. Math. Monthly. 1986. V. 93, N 6. P. 469–471.
12. Jezierski J., Marzantowicz W. Homotopy methods in topological fixed and periodic points theory. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
13. Ford T. J. Separable algebras. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2017.
14. Абызов А. Н., Мухаметгалиев И. И. О некоторых матричных аналогах малой теоремы Ферма // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 2. С. 163–168.
15. Фейт У. Теория представлений конечных групп. М.: Наука, 1990.
16. Eisenstein G. Applications de l'Algèbre à l'Arithmétique transcendante // J. Reine Angew. Mathematik. 1845. V. 29. P. 177–184.
17. Kuroki A., Katayama S. A variation of Takagi's proof for quadratic reciprocity laws of Jacobi symbols // J. Math. Univ. Tokushima. 2009. V. 43. P. 9–23.

Поступила в редакцию 28 октября 2025 г.

После доработки 17 июня 2026 г.

Принята к публикации 22 июня 2026 г.

Абызов Адель Наилевич (ORCID 0000-0002-9809-2091)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420000;
Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Московский пр., 9, Санкт-Петербург 190031
Adel.Abyzov@kpfu.ru

ФИЛЬТРАЦИОННЫЕ ТЕОРЕМЫ О СЛАБОЙ МОЩНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ГРУПП

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — свободное произведение с одной объединенной подгруппой H групп G_i , где $i \in I$. Для группы G получена фильтрационная теорема, дающая общий метод, который позволяет доказывать почти все известные теоремы о слабой мощности обобщенных свободных произведений групп. С помощью этого метода доказан ряд новых результатов о слабой мощности группы G при дополнительных ограничениях на группы G_i и подгруппу H . Доказанная здесь фильтрационная теорема является аналогом классической фильтрационной теоремы Баумслага о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.502

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, обобщенное свободное произведение групп.

1. Введение

Напомним, что элемент x бесконечного порядка группы A называется *слабо мощным*, если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы A на конечную группу, переводящий x в элемент порядка mn . При $m = 1$ это определение совпадает с классическим определением мощного элемента. Группа A называется *слабо мощной*, если она финитно аппроксимируема и все ее элементы бесконечного порядка являются слабо мощными.

Понятие слабой мощности группы является одной из наиболее удачных модификаций классического понятия мощности. Об этом свидетельствует ряд недавних исследований слабой мощности свободных конструкций [1–4]. Исследования классического свойства мощности свободных конструкций сталкиваются с большими трудностями.

Изучение свойства мощности и его модификаций для свободных конструкций идет «по следам» исследований свойства финитной аппроксимируемости. Доказательства почти всех известных теорем о финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп идейно основаны на так называемой фильтрационной теореме Баумслага [5], дающей весьма общие достаточные условия финитной аппроксимируемости обобщенного свободного произведения групп (формулировка приведена ниже — теорема 1, п. 1). Изначально эта теорема была сформулирована и доказана Баумслагом для свободного произведения

Исследование выполнено за счет гранта по приоритетным направлениям деятельности РНФ «Аппроксимационные свойства групп» (2025–2026).

двух групп с объединенной подгруппой. Затем в работе Ширвани [6] она была частично обращена и распространена на свободное произведение произвольного семейства групп с одной объединенной подгруппой (теорема 2, п. 1). Здесь будут доказаны аналоги результатов Баумслага и Ширвани, дающие общие методы для исследования слабой мощности свободного произведения любого семейства групп с одной объединенной подгруппой.

Переходя к формулировкам фильтрационных теорем, напомним прежде всего, что семейство $(A_j)_{j \in J}$ подгрупп группы A называется *фильтрацией*, если $\bigcap_{j \in J} A_j = 1$. Семейство $(A_j)_{j \in J}$ подгрупп группы A называется *B-фильтрацией*, где B — подгруппа группы A , если $\bigcap_{j \in J} BA_j = B$. Пусть теперь $(A_j)_{j \in J}$ — семейство всех нормальных подгрупп конечного индекса группы A . Очевидно, что семейство $(A_j)_{j \in J}$ является фильтрацией (B -фильтрацией) тогда и только тогда, когда группа A финитно аппроксимируема (подгруппа B финитно отделима в группе A).

Для формулировок фильтрационных теорем нам потребуется ряд обозначений, которые будут использоваться всюду в этой работе.

Через G будем обозначать свободное произведение групп семейства $(G_i)_{i \in I}$ с одной объединенной подгруппой H . Для группы G будем использовать также и следующее более развернутое обозначение:

$$G = *_{i \in I} G_i(H).$$

Хорошо известно, что все свободные множители G_i естественным образом вложимы в группу G . Поэтому мы можем считать, что все G_i (и объединенная подгруппа H) являются подгруппами группы G . Тогда $G_i \cap G_j = H$ для любых различных $i, j \in I$.

В каждом свободном множителе G_i выберем какую-нибудь подгруппу U_i . Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *нормальной*, если U_i — нормальная подгруппа группы G_i для каждого $i \in I$. Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *H-совместимой*, если $H \cap U_i = H \cap U_j$ для любых $i, j \in I$. Систему подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ будем называть *ограниченной*, если индексы $[G_i : U_i]$ конечны и ограничены.

Чтобы одновременно рассматривать несколько нормальных H -совместимых ограниченных систем, будем индексировать каждую такую систему $U = (U_i)_{i \in I}$ и все входящие в нее подгруппы U_i верхним индексом $\lambda \in \Lambda$. Тогда система $U = (U_i)_{i \in I}$ будет записана в виде

$$U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I},$$

где $\lambda \in \Lambda$, а семейство $(U^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ представляет собой семейство всех нормальных H -совместимых ограниченных систем.

Заметим, что для любого $\lambda \in \Lambda$ и для любого $i \in I$ подгруппа U_i^λ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G_i , для каждого фиксированного $\lambda \in \Lambda$ семейство $(U_i^\lambda)_{i \in I}$ является нормальной H -совместимой ограниченной системой и для каждого фиксированного $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ состоит из тех и только тех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , которые входят в нормальные H -совместимые ограниченные системы. Заметим, что подгруппы из семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ не обязаны быть попарно различными. Особое значение имеют следующие два фильтрационные условия,

которые в некоторых сформулированных ниже теоремах наложены на семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

1. Семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией, т. е.

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_i^\lambda = 1.$$

2. Семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, т. е.

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} HU_i^\lambda = H.$$

Теорема 1. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, и пусть для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Группа G финитно аппроксимируема.
2. Если элемент g группы G не сопряжен в группе G ни в какой свободный множитель G_i , то g — слабо мощный элемент группы G .
3. Если элемент g бесконечного порядка группы G сопряжен в группе G с некоторым элементом a из свободного множителя G_i , то элемент g является слабо мощным в группе G тогда и только тогда, когда элемент a является слабо мощным в группе G_i по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Здесь и далее мы называем элемент x бесконечного порядка группы A *слабо мощным по модулю семейства* $(A_j)_{j \in J}$ нормальных подгрупп конечного индекса группы A , если существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует $j \in J$ такой, что порядок элемента x по модулю подгруппы A_j равен mn .

Первое утверждение теоремы 1 хорошо известно как фильтрационная теорема Баумслага и доказано в [5, 6]. Доказательства второго и третьего утверждений теоремы 1 приведены ниже.

Теорема 2. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются группами с нетривиальными тождествами. Пусть множество I содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$.

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией.
2. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией и для каждого $i \in I$ все элементы бесконечного порядка группы G_i являются слабо мощными по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Достаточность в первом утверждении теоремы 2 обеспечивается утверждением 1 теоремы 1, а необходимость доказана Ширвани в работе [6], посвященной обращению теоремы Баумслага. Второе утверждение теоремы 2 является непосредственным следствием из теоремы 1 и первого утверждения теоремы 2.

На основе теорем 1 и 2 при дополнительных ограничениях на свободные множители и объединенную подгруппу могут быть доказаны многие известные результаты о финитной аппроксимируемости и слабой мощности обобщенных свободных произведений групп. Формулировки этих результатов выглядят достаточно просто — они не содержат фильтрационных условий и условий слабой

мощности по модулю семейства подгрупп. Здесь с помощью теорем 1 и 2 мы докажем несколько новых результатов о слабой мощности группы $G = *_{i \in I} G_i(H)$, первый из которых относится к случаю, когда объединенная подгруппа H конечна, а остальные — к случаю, когда H — бесконечная циклическая группа.

Теорема 3. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами. Пусть объединенная подгруппа H конечна. Тогда следующие условия равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Отсюда следует, что свободное произведение конечного числа слабо мощных групп с одной конечной объединенной подгруппой является слабо мощной группой. Это утверждение известно и доказано в [1].

Рассмотрим теперь случай, когда объединенная подгруппа H является бесконечной циклической. Для порождающего элемента h подгруппы H критерий мощности (слабой мощности) имеет следующий вид.

Теорема 4. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и объединенная подгруппа H является бесконечной циклической с порождающим элементом h . Тогда следующие два условия равносильны.

1. Элемент h является мощным (слабо мощным) в группе G .
2. Для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^n$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены (существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены).

Если множество I конечно, то условия 1 и 2 равносильны следующему условию.

3. Элемент h является мощным (слабо мощным) в каждом свободном множителе G_i .

Как показывает установленная здесь теорема 5 (см. ниже), при определенных условиях слабая мощность свободного произведения $G = *_{i \in I} G_i(H)$ с бесконечной циклической объединенной подгруппой H равносильна слабой мощности в группе G порождающего элемента h подгруппы H .

Теорема 5. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i являются слабо мощными группами, и пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой и H финитно отделима в каждом свободном множителе G_i .

1. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .
2. Если множество I конечно, то группа G является слабо мощной.

Заметим, что если в условиях теоремы 5 множество I конечно, то по теореме 4 элемент h будет слабо мощным в группе G . Поэтому второе утверждение теоремы 5 является непосредственным следствием из первого утверждения теоремы 5 и теоремы 4.

Второе утверждение теоремы 5 известно и доказано в работе [4].

Теорема 6. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами с нетривиальными тождествами. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической, множество I содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$. Тогда следующие три утверждения равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Подгруппа H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$, и порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .
3. Группа G финитно аппроксимируема, и порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G .

Теорема 6 является непосредственным следствием сформулированных выше теорем. В самом деле, импликация $1 \Rightarrow 3$ очевидна. Импликация $3 \Rightarrow 2$ имеет место, так как из финитной аппроксимируемости группы G по теореме 2 следует, что для каждого $i \in I$ семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, откуда следует, что H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$. Импликация $2 \Rightarrow 1$ имеет место в силу первого утверждения теоремы 5.

Если в теореме 6 дополнительно потребовать конечность множества I , то по теореме 4 элемент h будет слабо мощным в группе G и тогда теорема 6 примет следующий более завершенный вид.

Теорема 7. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются слабо мощными группами с нетривиальными тождествами. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической, множество I конечно, содержит более одного элемента и $H \neq G_i$ для каждого $i \in I$. Тогда порождающий элемент h подгруппы H является слабо мощным в G и следующие три утверждения равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Подгруппа H финитно отделима в группе G_i для каждого $i \in I$.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Так как почти полициклические группы являются слабо мощными [1, следствие 1.1] и в них все подгруппы финитно отделимы, то из теоремы 7 вытекает следующее утверждение: свободное произведение конечного числа почти полициклических групп с одной бесконечной циклической объединенной подгруппой является слабо мощной группой. Это утверждение известно и доказано в [1].

Более содержательным и нетривиальным следствием из рассмотренных выше фильтрационных теорем является следующий результат.

Теорема 8. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения с ограниченными рангами Гирша. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой с порождающим элементом h . Для каждого $i \in I$ обозначим через n_i наибольшее из всех целых положительных n таких, что уравнение $x^n = h$ разрешимо в группе G_i . Пусть Q_G — подгруппа аддитивной группы Q рациональных чисел, порожденная всеми дробями $1/n_i$, где $i \in I$.

1. Группа G финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда $Q_G \neq Q$.
2. Группа G является слабо мощной тогда и только тогда, когда Q_G не содержит подгруппу Q_p p -ичных дробей ни для какого простого p .

Первое утверждение теоремы 8 известно и доказано в работе [7].

Далее приведены доказательства теорем 1 (утверждения 2, 3); 3; 4; 5 (утверждение 1); 8 (утверждение 2).

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1. Пусть K — почти свободная группа, и пусть F — какая-нибудь нормальная свободная подгруппа конечного индекса группы K . Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Все элементы из F являются мощными в K .
2. Группа K является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы доказано в [8, лемма 8]. Для доказательства второго утверждения заметим прежде всего, что группа K финитно аппроксимируема. Докажем слабую мощность для любого элемента x бесконечного порядка группы K . Пусть $X = \langle x \rangle$ — циклическая подгруппа группы K , порожденная элементом x . Тогда $X \cap F = X^m = \langle x^m \rangle$ для некоторого целого положительного числа m . Так как $x^m \in F$, то по первому утверждению леммы 1 элемент x^m является мощным в K , т. е. для любого целого положительного числа n в группе K существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $X^m \cap N = X^{mn}$. Тогда $L = F \cap N$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы K и $X \cap L = X \cap F \cap N = X^m \cap N = X^{mn}$. Тем самым доказана слабая мощность элемента x в группе K .

Лемма 2. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i конечны и их порядки ограничены. Тогда группа G почти свободна и (в силу леммы 1) является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что группа G финитно аппроксимируема (см., например, [9, теорема 1.1]). Поэтому в группе G существует нормальная подгруппа P конечного индекса, тривиально пересекающая конечную подгруппу H . Тогда в силу теоремы Неймана [10, с. 122] группа P раскладывается в свободное произведение $P = F * A_1 * A_2 * \dots$, где F — свободная группа, $A_1, A_2, \dots$ — сопряжения некоторых подгрупп свободных множителей G_i . Из условий леммы следует, что группы $A_1, A_2, \dots$ конечны и их порядки ограничены. Поэтому с точностью до изоморфизма группы $A_1, A_2, \dots$ исчерпываются конечным набором групп $B_1, B_2, \dots, B_n$. Рассмотрим гомоморфизм φ группы P на прямое произведение $B = B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n$, переводящий F в 1 и действующий на каждом свободном множителе A_i как изоморфизм на подходящий прямой множитель B_j . Ядро L гомоморфизма φ является нормальной подгруппой конечного индекса группы P , тривиально пересекающей подгруппы $A_1, A_2, \dots$. Поэтому L — свободная подгруппа конечного индекса группы P . Отсюда и из того, что P имеет конечный индекс в G , следует, что G почти свободна.

3. Используемые обозначения и предварительные замечания

Пусть, как и выше, $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение групп G_i с одной объединенной подгруппой H . Здесь и далее сохраняются все обозначения из разд. 1.

С каждой нормальной H -совместимой системой подгрупп $U = (U_i)_{i \in I}$ свяжем свободное произведение $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ групп G_i/U_i с одной объединенной подгруппой H_U , склеивающие соотношения которого имеют вид $hU_i =$

hU_j , где $h \in H$, $i \in I$, $j \in I$, а объединенная подгруппа H_U совпадает с каждой из подгрупп HU_i/U_i .

Если $U = (U_i)_{i \in I}$ — нормальная H -совместимая система, то через $\rho_U : G \rightarrow G_U$ будем обозначать гомоморфизм группы G на группу G_U , продолжающий естественные гомоморфизмы $G_i \rightarrow G_i/U_i$, где $i \in I$. Заметим, что $H\rho_U = H_U$.

Если нормальная H -совместимая система $U = (U_i)_{i \in I}$ является ограниченной, то группа G_U представляет собой свободное произведение конечных групп G_i/U_i ограниченных порядков с объединением H_U и поэтому в силу леммы 2 группа G_U является слабо мощной.

Если N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G , то система $U = (G_i \cap N)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что $U = U^\lambda$, т. е. $G_i \cap N = U_i^\lambda$ для всех $i \in I$. Отсюда следует, что если группа G финитно аппроксимируема (т. е. если семейство всех ее нормальных подгрупп конечного индекса является фильтрацией), то и семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ также является фильтрацией для каждого $i \in I$. Это необходимое условие финитной аппроксимируемости группы G не является достаточным. Достаточные условия финитной аппроксимируемости группы G указаны в теореме 1.

4. Доказательство теоремы 1

Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение групп G_i с одной объединенной подгруппой H . Здесь и далее сохраняются все обозначения из разд. 1 и 3.

Лемма 3. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, и пусть семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией для некоторого $i \in I$. Тогда для любого элемента $a \in G_i \setminus H$ существует гомоморфизм φ группы G на конечную группу такой, что $a\varphi \notin H\varphi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию леммы $a \notin HU_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Системе $U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I}$ для удобства будем обозначать через $U = (U_i)_{i \in I}$. Как отмечалось в разд. 3, группа $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ является слабо мощной и поэтому она финитно аппроксимируема. Так как $a \notin HU_i$, то $aU_i \notin HU_i/U_i$. С другой стороны, по определению гомоморфизма $\rho_U : G \rightarrow G_U$ имеем $a\rho_U = aU_i$, $H\rho_U = HU_i/U_i$. Таким образом, $a\rho_U \notin H\rho_U$, причем $H\rho_U = H_U$ — конечная подгруппа финитно аппроксимируемой группы G_U , и поэтому $H\rho_U$ финитно отделима в G_U . Следовательно, существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $a\rho_U \rho \notin H\rho_U \rho$. Гомоморфизм $\varphi = \rho_U \rho$ является искомым. Лемма доказана.

Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$. Напомним, что *несократимой записью элемента* $a \in G$ называется выражение $a = a_1 a_2 \dots a_s$, где сомножители a_k принадлежат свободным множителям G_i , причем при $s > 1$ сомножители a_k не входят в объединенную подгруппу H , и соседние сомножители a_k и a_{k+1} не лежат в одном и том же свободном множителе G_i . Несократимая запись $a = a_1 a_2 \dots a_s$ называется *циклически несократимой*, если при $s > 1$ крайние сомножители a_1 и a_s не лежат в одном и том же свободном множителе G_i . Хорошо известно, что если элемент $a \in G$ имеет несократимую запись длины $s > 1$, то $a \neq 1$. Поэтому если элемент $a \in G$ имеет циклически несократимую запись длины $s > 1$, то порядок элемента a бесконечен. Элемент $a \in G$, обладающий циклически несократимой записью, называется *циклически несократимым элементом*.

Лемма 4. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией для каждого $i \in I$. Пусть g — элемент группы G , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i . Тогда g — слабо мощный элемент группы G .

Доказательство. Хорошо известно и легко проверяется, что любой элемент группы G сопряжен с некоторым циклически несократимым элементом. Обозначим через a циклически несократимый элемент группы G , сопряженный с g . Так как порядки сопряженных элементов (и их гомоморфных образов) равны, то нам достаточно доказать слабую мощность для элемента a . По условию леммы элемент a не принадлежит никакому свободному множителю. Поэтому его циклически несократимая запись имеет вид $a = a_1 a_2 \dots a_s$, где $s > 1$, сомножители a_k принадлежат свободным множителям G_i и не входят в объединенную подгруппу H , причем соседние сомножители a_k и a_{k+1} (а также крайние сомножители a_1 и a_s) не лежат в одном и том же свободном множителе G_i .

Так как для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ существует $i \in I$ такой, что $a_k \in G_i \setminus H$, и так как семейство $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является H -фильтрацией, то по лемме 3 для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ существует гомоморфизм φ_k группы G на конечную группу такой, что $a_k \varphi_k \notin H \varphi_k$, т. е. $a_k \notin H N_k$, где N_k — ядро гомоморфизма φ_k . Тогда $a_k \notin H N$ для каждого $k = 1, 2, \dots, s$, где $N = N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_s$ — нормальная подгруппа конечного индекса группы G .

Для каждого $i \in I$ введем обозначение $U_i = G_i \cap N$. Так как N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G , то система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, и тогда в силу леммы 2 группа $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$ является слабо мощной.

Очевидно, что естественный гомоморфизм $\varepsilon : G \rightarrow G/N$ проходит через гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$, т. е. существует гомоморфизм $\sigma : G_U \rightarrow G/N$ такой, что $\varepsilon = \rho_U \sigma$.

Так как $a_k \notin H N$ для каждого $k = 1, 2, \dots, s$, то $a_k \varepsilon \notin H \varepsilon$. Отсюда и из того, что $\varepsilon = \rho_U \sigma$, следует, что для каждого $k = 1, 2, \dots, s$ элемент $a_k \rho_U$ не принадлежит объединенной подгруппе $H \rho_U = H_U$ группы $G_U = *_{i \in I} G_i/U_i(H_U)$. Поэтому запись

$$a \rho_U = a_1 \rho_U a_2 \rho_U \dots a_s \rho_U$$

несократима (и даже циклически несократима) в G_U , причем ее длина $s > 1$. Поэтому порядок элемента $a \rho_U$ бесконечен, а так как группа G_U является слабо мощной, то существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм φ группы G_U на конечную группу такой, что порядок элемента $a \rho_U \varphi$ равен mn . Слабая мощность элемента a доказана.

Лемма 5. Пусть g — элемент бесконечного порядка группы $G = *_{i \in I} G_i(H)$, сопряженный с элементом a из свободного множителя G_i . Тогда для произвольного целого положительного числа n следующие два условия равносильны.

1. В группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что порядок элемента g по модулю подгруппы N равен n .

2. Существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен n .

В частности, элемент g является слабо мощным в G тогда и только тогда, когда элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Доказательство. Пусть N — нормальная подгруппа конечного индекса группы G и $|gN| = n = |aN|$. Тогда система $U = (G_i \cap N)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что $U = U^\lambda =$

$(U_i^\lambda)_{i \in I}$. Так как $a \in G_i$ и $G_i \cap N = U_i^\lambda$, то $|aU_i^\lambda| = |aN| = n$. Мы видим, что из условия 1 вытекает условие 2.

Наоборот, пусть выполняется условие 2, т. е. $|aU_i^\lambda| = n$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Систему $U^\lambda = (U_i^\lambda)_{i \in I}$ для удобства будем обозначать через $U = (U_i)_{i \in I}$. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент a из G_i на элемент $a\rho_U = aU_i$ порядка n , а так как группа G_U финитно аппроксимируема, то существует гомоморфизм φ группы G_U на конечную группу такой, что порядок элемента $a\rho_U\varphi$ равен n . Ядро N гомоморфизма $\rho_U\varphi$ является нормальной подгруппой конечного индекса группы G , и порядок элемента a (а значит, и сопряженного с ним элемента g) по модулю подгруппы N равен n . Таким образом, выполняется условие 1. Лемма доказана.

Утверждения 2 и 3 доказываемой теоремы 1 обеспечиваются леммами 4 и 5 соответственно. Утверждение 1 теоремы 1 доказано в работах [5, 6].

5. Доказательство теоремы 3

Лемма 6. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ — свободное произведение слабо мощных групп G_i с одной конечной объединенной подгруппой H . Пусть для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены. Тогда группа G является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $i \in I$ обозначим через Φ_i множество всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i . Так как группа G_i финитно аппроксимируема и ее конечная подгруппа H финитно отделима, то множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией. Обозначим через Ω_i подмножество множества Φ_i , состоящее из всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , тривиально пересекающих H . Если $T \in \Phi_i$, то $T \cap U_i \in \Omega_i$. Отсюда и из того, что множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и множество Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией.

Очевидно, что система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, т. е. $U = U^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Очевидно также, что если в системе U заменить какую-либо подгруппу U_i на любую другую подгруппу из Ω_i , то получится снова нормальная H -совместимая ограниченная система. Поэтому $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда и из того, что Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Поэтому в силу пп. 1, 2 теоремы 1 группа G финитно аппроксимируема и в ней будет слабо мощным любой элемент g , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i .

Теперь для завершения доказательства леммы остается проверить слабую мощность для элемента g бесконечного порядка группы G , сопряженного с элементом a из свободного множителя G_i . Пусть $A = \langle a \rangle$, $M \in \Omega_i$. Тогда $A \cap M = A^m$ для некоторого целого положительного m . Так как a^m — слабо мощный элемент группы G_i , существует целое положительное число l такое, что для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $A^m \cap N = A^{mln}$. Пусть $L = M \cap N$. Тогда $L \in \Omega_i$ и $A \cap L = A \cap M \cap N = A^m \cap N = A^{mln}$. Поскольку $L \in \Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, то $L = U_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Равенство $A \cap L = A^{mln}$ означает, что элемент a имеет порядок mln по модулю подгруппы U_i^λ . Мы

нашли целое положительное число $k = ml$ такое, что для любого целого положительного числа n существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен kn . Иными словами, элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда по п. 3 теоремы 1 следует, что элемент g является слабо мощным в группе G . Лемма доказана.

Доказываемая теорема 3 утверждает, что для свободного произведения $G = *_{i \in I} G_i(H)$ слабо мощных групп G_i с одной объединенной конечной подгруппой H следующие условия равносильны.

1. Группа G является слабо мощной.
2. Для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, тривиально пересекающая H и такая, что индексы $[G_i : U_i]$ ограничены.
3. Группа G финитно аппроксимируема.

Если группа $G = *_{i \in I} G_i(H)$ финитно аппроксимируема, то в ней существует нормальная подгруппа N конечного индекса, тривиально пересекающая конечную подгруппу H , и тогда подгруппы $U_i = G_i \cap N$ удовлетворяют условию 2. Таким образом, имеет место импликация $3 \Rightarrow 2$. Импликация $2 \Rightarrow 1$ обеспечивается леммой 6. Импликация $1 \Rightarrow 3$ очевидна.

6. Доказательство теоремы 4

Лемма 7. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и объединенная подгруппа H является бесконечной циклической с порождающим элементом h . Тогда следующие два условия равносильны.

1. Элемент h является слабо мощным в группе G .
2. Существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$, и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены.

Если множество I конечно, то условия 1 и 2 равносильны следующему условию.

3. Элемент h является слабо мощным в каждом свободном множителе G_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть выполняется условие 1, т. е. существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n в группе G существует нормальная подгруппа N_n конечного индекса такая, что $H \cap N_n = H^{mn}$. Тогда подгруппы $U_{in} = G_i \cap N_n$ удовлетворяют всем требованиям из условия 2.

Наоборот, пусть выполняется условие 2. Тогда для произвольного фиксированного целого положительного числа n система $U = (U_{in})_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена. Поэтому группа G_U финитно аппроксимируема. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент h в элемент $h\rho_U = hU_{in}$ порядка mn . Из последних двух обстоятельств следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $|h\rho_U\rho| = |h\rho_U| = mn$. Тем самым доказано выполнение условия 1.

Таким образом, условия 1 и 2 равносильны. Очевидно, что из условия 1 следует условие 3 (даже без дополнительного предположения о конечности множества I). Остается доказать импликацию $3 \Rightarrow 2$ при условии, что множество I конечно.

Пусть множество I конечно и выполняется условие 3, т. е. элемент h является слабо мощным в каждом свободном множителе G_i . Тогда для каждого

$i \in I$ существует целое положительное число m_i такое, что для любого кратного s числа m_i в группе G_i существует нормальная подгруппа конечного индекса, по модулю которой порядок элемента h равен s . Очевидно, что для числа $m = \prod_{i \in I} m_i$ выполняются все требования из условия 2.

Доказанная лемма 7 совпадает с той частью теоремы 4, которая дает критерий слабой мощности элемента h . Аналогично легко доказать и другую часть теоремы 4, дающую критерий мощности элемента h (полагая в доказательстве леммы 7 $m = 1$ и $m_i = 1$).

7. Доказательство теоремы 5

Как отмечалось выше, второе утверждение теоремы 5 является непосредственным следствием из первого утверждения теоремы 5 и теоремы 4. Необходимость в первом утверждении теоремы 5 очевидна, а достаточность обеспечивается следующей леммой.

Лемма 8. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$, все свободные множители G_i являются слабо мощными группами, объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой и H финитно отделима в каждом свободном множителе G_i . Пусть порождающий элемент h группы H является слабо мощным в G . Тогда группа G является слабо мощной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 4 существует целое положительное число m такое, что для любого $i \in I$ и для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа U_{in} конечного индекса такая, что $H \cap U_{in} = H^{mn}$ и при каждом фиксированном n индексы $[G_i : U_{in}]$ ограничены.

Для каждого $i \in I$ обозначим через Φ_i множество всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i . Так как группа G_i финитно аппроксимируема и ее подгруппа H финитно отделима, то множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией. Обозначим через Ω_i подмножество множества Φ_i , состоящее из всех нормальных подгрупп конечного индекса группы G_i , по модулю которых порядок элемента h кратен m . Если $T \in \Phi_i$, то $T \cap U_{i1} \in \Omega_i$. Отсюда и из того, что множество Φ_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и множество Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией.

Покажем, что $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Пусть $W \in \Omega_i$. Тогда W — нормальная подгруппа конечного индекса группы G_i и $|hW| = mn$ для некоторого целого положительного числа n . Очевидно, что система $U = (U_{in})_{i \in I}$ нормальна, H -совместима и ограничена, т. е. $U = U^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Очевидно также, что если в системе U заменить подгруппу U_{in} на W , то в силу равенства $H \cap U_{in} = H^{mn} = H \cap W$ получится снова нормальная H -совместимая ограниченная система. Поэтому $W \in (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$.

Из доказанного включения $\Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ и из того, что Ω_i является фильтрацией и H -фильтрацией, следует, что и $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ является фильтрацией и H -фильтрацией. Поэтому в силу пп. 1, 2 теоремы 1 группа G финитно аппроксимируема и в ней будет слабо мощным любой элемент g , не сопряженный ни в какой свободный множитель G_i .

Теперь для завершения доказательства леммы остается проверить слабую мощность для элемента g бесконечного порядка группы G , сопряженного с элементом a из свободного множителя G_i . Зафиксируем какую-нибудь подгруппу

$W \in \Omega_i$. Заметим, что если X — произвольная нормальная подгруппа конечного индекса группы G_i , то $X \cap W \in \Omega_i$. Пусть $A = \langle a \rangle$. Тогда $A \cap W = A^w$ для некоторого целого положительного w . Так как a^w — слабо мощный элемент группы G_i , то существует целое положительное число l такое, что для любого целого положительного числа n в группе G_i существует нормальная подгруппа N конечного индекса такая, что $A^w \cap N = A^{wln}$. Пусть $L = W \cap N$. Тогда $L \in \Omega_i$ и $A \cap L = A \cap W \cap N = A^w \cap N = A^{wln}$. Так как $L \in \Omega_i \subseteq (U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, то $L = U_i^\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Равенство $A \cap L = A^{wln}$ означает, что элемент a имеет порядок wln по модулю подгруппы U_i^λ . Мы нашли целое положительное число $k = wl$ такое, что для любого целого положительного числа n существует $\lambda \in \Lambda$ такой, что порядок элемента a по модулю подгруппы U_i^λ равен kn . Иными словами, элемент a является слабо мощным по модулю семейства $(U_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Отсюда по п. 3 теоремы 1 следует, что элемент g является слабо мощным в группе G . Лемма доказана.

8. Доказательство теоремы 8

Элемент a группы A будем называть p -полным (где p — простое число), если уравнение $x^{p^k} = a$ разрешимо в группе A для любого целого положительного числа k .

Лемма 9. Пусть элемент a бесконечного порядка группы A является слабо мощным. Тогда элемент a не является p -полным ни для какого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть p — простое число. По условию леммы существует целое положительное число m такое, что для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы A на конечную группу, переводящий a в элемент порядка mp . В частности, существует гомоморфизм φ группы A на конечную группу B такой, что $|a\varphi| = mp$. Так как в конечной группе нет p -полных элементов порядка p и $|a^m\varphi| = p$, то элемент $a^m\varphi$ не является p -полным в группе B . Поэтому элемент a^m (а значит, и элемент a) не является p -полным в группе A .

Лемма 10. Пусть $G = *_{i \in I} G_i(H)$ и все свободные множители G_i являются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения с ограниченными рангами Гирша. Пусть объединенная подгруппа H является бесконечной циклической группой с порождающим элементом h . Для каждого $i \in I$ обозначим через n_i наибольшее из всех целых положительных n таких, что уравнение $x^n = h$ разрешимо в группе G_i . Пусть Q_G — подгруппа аддитивной группы Q рациональных чисел, порожденная всеми дробями $1/n_i$, где $i \in I$. Тогда следующие утверждения равносильны.

1. Элемент h является мощным в группе G .
2. Элемент h является слабо мощным в группе G .
3. Группа Q_G не содержит подгруппу Q_p p -ичных дробей ни для какого простого p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация $1 \Rightarrow 2$ очевидна. Импликация $2 \Rightarrow 3$ обеспечивается леммой 9. Остается проверить импликацию $3 \Rightarrow 1$.

Из ограничений, наложенных на группы G_i , следует, что каждая из них обладает нормальным рядом с бесконечными циклическими факторами, причем длины этих рядов ограничены некоторым числом r . Поэтому ступени нильпотентности c_i групп G_i также ограничены этим числом r и для любого целого

положительного числа n индексы степенных подгрупп G_i^n в группах G_i ограничены числом n^r .

Предположим, что выполняется условие 3. Проверка условия 1 сводится к проверке p -мощности элемента h для произвольного простого p , т. е. к доказательству того, что для любого целого положительного числа s существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий h в элемент порядка p^s . Так как $Q_p \not\subseteq Q_G$, то существует целое положительное число k такое, что p^k не делит никакое n_i . Тогда для любого $i \in I$ уравнение $x^{p^k} = h$ не разрешимо в группе G_i , и поэтому в G_i не разрешимо уравнение $x^{p^{k+s}} = h^{p^s}$, откуда по лемме А. И. Мальцева [11, лемма 2] $h^{p^s} \notin G_i^{p^{(k+s)c_i}}$, и так как $c_i \leq r$, то $h^{p^s} \notin G_i^{p^{(k+s)r}}$. Отсюда и из элементарных свойств конечных p -групп следует, что для каждого $i \in I$ в группе G_i существует нормальная подгруппа U_i конечного индекса, содержащая $G_i^{p^{(k+s)r}}$ и такая, что $|hU_i| = p^s$. Тогда система $U = (U_i)_{i \in I}$ нормальна и H -совместима. Более того, система U ограничена, так как

$$[G_i : U_i] \leq [G_i : G_i^{p^{(k+s)r}}] \leq p^{(k+s)r^2}.$$

Поэтому в силу леммы 2 группа G_U финитно аппроксимируема. Гомоморфизм $\rho_U : G \rightarrow G_U$ отображает элемент h в элемент $h\rho_U = hU_i$ порядка p^s . Из последних двух обстоятельств следует, что существует гомоморфизм ρ группы G_U на конечную группу такой, что $|h\rho_U\rho| = |h\rho_U| = p^s$. Тем самым доказана p -мощность (а значит, и мощность) элемента h в группе G . Лемма доказана.

Завершая доказательство теоремы 8, напомним, что конечно порожденные нильпотентные группы являются мощными [12, следствие 1.2], и в них все подгруппы финитно отделимы. Поэтому второе утверждение доказываемой нами теоремы 8 вытекает из теоремы 5 и леммы 10. Первое утверждение теоремы 8 доказано в работе [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Азаров Д. Н. О слабой π -мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
2. Asri M. S. M., Wong K. B., Wong P. C. Criterion for the weak potency of certain HNN extensions // Math. Slovaca. 2019. V. 69, N 2. P. 381–390.
3. Asri M. S. M., Othman W. A. M., Wong K. B., Wong P. C. Weak potency and cyclic subgroup separability of certain free products and tree products // Bull. Korean Math. Soc. 2023. V. 60, N 5. P. 1375–1390.
4. Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W. Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
5. Baumslag G. On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.
6. Shirvani M. A converse to a residual finiteness theorem of G. Baumslag // Proc. Am. Math. Soc. 1988. V. 104, N 3. P. 703–706.
7. Азаров Д. Н., Иванова Е. А. Аппроксимационные свойства свободных произведений конечно порожденных нильпотентных групп с циклическим объединением // Вестн. Ивановск. гос. ун-та. Сер. Естественные, общественные науки. 2008. № 2. С. 56–62.
8. Азаров Д. Н. О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1130.
9. Азаров Д. Н. О финитной аппроксимируемости свободных произведений групп с одной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 1. С. 3–13.
10. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
11. Мальцев А. И. О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Ивановск. пед. ин-та. 1958. Т. 18, № 5. С. 49–60.

12. Азаров Д. Н. О π -мощности некоторых разрешимых групп // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 771–788.

Поступила в редакцию 9 апреля 2026 г.

После доработки 15 июня 2026 г.

Принята к публикации 31 июля 2026 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Ю. А. Аминов

Аннотация. В евклидовых пространствах рассматриваются поверхности переноса, получаемые как сумма двух кривых. Внутренняя геометрия таких поверхностей представлена одной функцией — углом между координатными линиями. Это облегчает рассмотрение изгибаний, т. е. деформаций с сохранением внутренней геометрии.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.503

Ключевые слова: изгибания, изометрические погружения метрик, гауссова кривизна, уравнения Петерсона — Кодацци, геодезические и параболические кривые, замкнутые поверхности, индикатриса касательных.

1. Введение

Радиус-вектор $r(\xi, \eta)$ поверхности переноса F^2 записывается в виде $r(\xi, \eta) = X(\xi) + Y(\eta)$, т. е. в виде суммы радиус-векторов двух кривых. Координаты на заданных кривых автоматически переносятся на поверхность F^2 . Заданные кривые, вообще говоря, не лежат на этой поверхности. Но семейство кривых $\xi = \text{const}$ на поверхности составлено из кривых, параллельных и конгруэнтных второй заданной кривой (параллельно перенесенных), и аналогичное свойство имеет место для семейства $\eta = \text{const}$. Эти семейства образуют сеть переноса на F^2 одной кривой $\eta = 0$ вдоль кривой $\xi = 0$. Естественно назвать их *образующими кривыми*. Заметим, что используется и другое определение поверхностей переноса. Приведем определение из книги [1]. Рассмотрим две кривые $R_1 = U(u)$, $R_2 = V(v)$, пересекающиеся в некоторой точке M_0 с радиус-вектором $U(u_0) = V(v_0)$. Если одну из них переносить параллельно так, чтобы ее точка M_0 скользила по другой, то получим поверхность переноса

$$r = U(u) + V(v) - U(u_0).$$

При таком определении заданные кривые лежат на поверхности переноса. Но определение недостаточно конструктивное, так как неясно, в каком именно направлении надо переносить вторую кривую, чтобы она скользила по первой. Поэтому записывают выражение радиус-вектора поверхности в явном виде и с ним работают.

Исследованию поверхностей переноса были посвящены работы С. Ли, А. Пуанкаре, Г. Дарбу и др. в связи с отысканием поверхностей, несущих две и больше сетей переноса. Существуют поверхности, которые несут бесконечное число сетей переноса. Некоторые вопросы по поверхностям переноса описываются в книге В. И. Шуликовского [1]. Интересный результат по поверхностям переноса получен Я. П. Бланком в [2]: *поверхностями переноса с постоянной*

гауссовой кривизной могут быть только цилиндрические поверхности или плоскость. Будем считать, что координаты ξ, η являются длинами дуг на координатных кривых. В этом случае метрика поверхности записывается в чебышевском виде:

$$ds^2 = (d\xi)^2 + 2 \cos \omega d\xi d\eta + (d\eta)^2, \quad \cos \omega = (\tau_1, \tau_2), \quad (1)$$

где τ_i — единичные касательные векторы к координатным линиям. Заметим, что для поверхности переноса в n -мерном евклидовом пространстве E^n вид метрики тот же самый. Отметим сразу, что гауссова кривизна K , если воспользоваться формулой Фробениуса, запишется так:

$$K = \frac{-1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (2)$$

Такой вид позволяет сразу доказать некоторые утверждения о непогружаемости некоторых полных метрик в виде поверхностей переноса в E^n . Затем мы рассматриваем изгибания сначала в классе поверхностей переноса, затем в классе общих поверхностей. При этом используются результаты Э. Г. Позняка. Особый интерес представляют изгибания замкнутых регулярных поверхностей, так как несмотря на значительный прогресс в развитии геометрии до сих пор неизвестно, существуют ли замкнутые регулярные поверхности класса регулярности C^2 , допускающие непрерывные изгибания. Эта проблема неоднократно возникала в работах известных авторов, например, в работах А. Д. Александрова [3] еще в 1947 г., Кейпера [4] в 1978 г., И. Х. Сабитова [5–7] и др. Заметим, что для выпуклых замкнутых поверхностей доказана однозначная определенность своей метрикой: теорема Кон-Фоссена. Красивое доказательство ее было получено Герглотцем с помощью интегральной формулы. Для общих выпуклых поверхностей однозначная определенность была установлена А. В. Погореловым. Как показал Н. В. Ефимов еще в 1940 г., существуют поверхности неизгибаемые в малом [8]. А. Д. Александров доказал неизгибаемость замкнутых (даже невыпуклых) аналитических поверхностей типа T (см. [9]). Вопросам изгибания поверхностей были посвящены многие работы, например, [10–17]. Интерес представляют изгибания замкнутых поверхностей переноса. Мы доказываем некоторые теоремы о неизгибаемости кусков поверхностей переноса с гауссовой кривизной $K \neq 0$ в классе поверхностей переноса и затем изгибаемость в более широком классе общих поверхностей. Для замкнутых регулярных аналитических поверхностей переноса с кривизнами $k_i \neq 0$ образующих кривых доказывается неизгибаемость в классе поверхностей переноса.

2. О полных метриках неположительной кривизны

Рассмотрим изометрические погружения метрик в евклидовы пространства в виде поверхностей переноса. Имеет место

Лемма 1. Модуль интегральной гауссовой кривизны по координатному прямоугольнику определяющих кривых на поверхности переноса класса регулярности C^3 меньше 2π .

Для доказательства используем формулу (2). Элемент площади поверхности dS в рассматриваемых координатах равен $\sin \omega d\xi d\eta$. Поэтому, интегрируя по координатному прямоугольнику, получим

$$\left| \iint K dS \right| = \left| \iint \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \right| = |\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4|, \quad (3)$$

где $\omega_i = \omega(P_i)$ — значение угла ω в вершинах P_i прямоугольника, которые занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. На регулярной поверхности угол ω удовлетворяет неравенствам $0 < \omega < \pi$. Поэтому выражение в правой стороне (3) меньше 2π , что и доказывает утверждение леммы 1.

Теорема 1. *Полная метрика с гауссовой кривизной, отделенной от нуля: $K \leq -a^2 < 0$, $a = \text{const}$, не погружается изометрически в виде поверхности переноса класса регулярности C^3 , гомеоморфной плоскости, ни в какое конечномерное евклидово пространство.*

Допустим, такое погружение существует и координация поверхности ξ, η регулярна. Координатная сеть не разрывается, так как длины противоположных сторон координатного четырехугольника равны. Рассмотрим интеграл от гауссовой кривизны по координатному четырехугольнику. Площадь полной поверхности отрицательной кривизны, гомеоморфной плоскости, бесконечна. Это легко доказывается, если выбрать на поверхности отрицательной кривизны полярные координаты и рассмотреть геодезические круги. Любой геодезический круг можно включить в координатный четырехугольник. Действительно, геодезический круг вместе с граничной окружностью является компактом. Координаты ξ, η являются непрерывными функциями точки на поверхности. Поэтому они принимают минимальные и максимальные значения ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2 соответственно на этом компакте. Следовательно, этот геодезический круг лежит внутри координатного четырехугольника: $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Левая часть (3) при условии отделенности гауссовой кривизны от нуля неограниченна, если взять интеграл по последовательности геодезических кругов. В то же время каждая ограниченная область на поверхности накрывается координатным четырехугольником с координатами ξ, η . По лемме 1 площадь каждой ограниченной области равномерно ограничена сверху. Приходим к противоречию.

В частности, плоскость Лобачевского не погружается изометрически в виде поверхности переноса ни в какое конечномерное евклидово пространство. Здесь уместно указать на аналогию (3) с формулой Хаццидакиса, относящейся к асимптотической сети на поверхности постоянной отрицательной кривизны, из которой следует теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны, и указать на отличие в ситуации. Теорема Гильберта и ее обобщение — знаменитая теорема Н. В. Ефимова — касаются только поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве, так как по теореме Э. Р. Розендорна плоскость Лобачевского допускает регулярное изометрическое погружение в 5-мерное евклидово пространство. Но заключение нашей теоремы 1 относится к поверхностям в любом n -мерном евклидовом пространстве. Заметим, что существуют в E^3 полные поверхности переноса с $K < 0$. Поэтому условие в теореме 1 на отделенность кривизны от нуля существенно. Примером такой поверхности является поверхность

$$r(\xi, \eta) = \left(\xi, \frac{\xi^2}{2}, 0 \right) - \left(0, \frac{\eta^2}{2}, \eta \right),$$

гауссова кривизна которой $K = -\frac{1}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}$.

3. К вопросу однозначной определенности поверхности переноса своей метрикой

Далее рассматриваем поверхности в E^3 . В условиях следующей теоремы 2 имеются исключительные случаи. Их можно сформулировать в развернутой

форме с помощью функции ω и в краткой более геометрической форме. Исключительным будем называть случай, когда существуют такие функции $A(\eta)$ и $B(\xi)$, а также постоянная C_0 , что выполняются одновременно уравнения

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Так как здесь фигурируют неизвестные функции, то сформулируем исключительные случаи так.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ I. На образующих кривых есть точки, в которых кривизна кривой или кручение равны нулю. Это случай $C_0 = 0$. Если хотя бы одна образующая кривая плоская, то поверхность относится к исключительному случаю.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ II. Следующее выражение постоянно на поверхности:

$$\left(\frac{(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right)^3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = C_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где β_i — бинормали кривых, k_i — кривизны и κ_i — кручение.

Теорема 2. Область на поверхности переноса класса регулярности C^5 , не принадлежащая исключительным случаям и с $K \neq 0$, не допускает непрерывных изгибаний в классе поверхностей переноса.

Условием теоремы удовлетворяет основная масса поверхностей переноса. Заметим, что в этом случае имеется почти однозначная определенность. Но в зависимости от значений коэффициентов P , Q , R будет однозначная определенность с точностью до симметрии и движения в пространстве, а могут существовать несколько неконгруэнтных поверхностей переноса с одной и той же метрикой. Этот эффект в классе общих поверхностей был известен и раньше. Коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности переноса имеют вид

$$L(\xi, \eta) = (X_{\xi\xi}, n), \quad M = 0, \quad N(\xi, \eta) = (Y_{\eta\eta}, n),$$

где n — единичный вектор нормали поверхности. Уравнения Петерсона — Кодацци имеют простой вид

$$L_\eta = \frac{N\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad N_\xi = \frac{L\omega_\eta}{\sin \omega}. \quad (6)$$

Уравнение Гаусса имеет вид $LN = K \sin^2 \omega$. В дальнейшем используем обозначение $K \sin^2 \omega = \Phi$. С помощью формулы (2) и уравнений (6) находим два первых интеграла. Существуют две функции одной переменной $C(\xi)$ и $D(\eta)$ такие, что

$$L^2 + (\omega_\xi)^2 = C(\xi), \quad N^2 + (\omega_\eta)^2 = D(\eta). \quad (7)$$

Заметим, что равенства (7) имеют простой геометрический смысл: L^2 -квадрат нормальной кривизны ξ -линии. Ниже покажем, что $(-\omega_\xi)$ является геодезической кривизной этой координатной линии. Поэтому функция $C(\xi)$ — квадрат кривизны $k_1(\xi)$ первой образующей кривой. Аналогично $D(\eta) = k_2^2(\eta)$. Обозначим $N^2 = V$. Составим систему уравнений для V . Сначала запишем следующую систему уравнений:

$$N_\xi = \frac{\Phi \omega_\eta}{N \sin \omega}, \quad L_\eta N + L N_\eta = \Phi_\eta.$$

Заменяем L_η с помощью уравнений Петерсона — Кодацци. Далее используем обозначения $\omega_\xi = p$, $\omega_\eta = q$. После некоторых преобразований получим

$$V_\xi = \frac{2\Phi q}{\sin \omega}, \quad V_\eta = -2V^2 \frac{p}{\Phi \sin \omega} + 2V \frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial \eta}.$$

Записывая условие совместности этой системы, получим квадратичное уравнение для определения V :

$$V^2 P + VQ + R\Phi^2 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты этого уравнения имеют вид

$$P = \left(\frac{p}{\Phi \sin \omega} \right)_\xi, \quad Q = - \left[\frac{\partial^2 \ln |\Phi|}{\partial \xi \partial \eta} - 4 \frac{pq}{\sin^2 \omega} \right], \quad R = \left(\frac{q}{\Phi \sin \omega} \right)_\eta. \quad (9)$$

Мы видим, что все коэффициенты P , Q , R выражены с помощью метрики поверхности переноса и можем определить V , исключая тот случай, когда все коэффициенты нулевые. Обозначим $\Delta = Q^2 - 4PR\Phi^2$. Предполагая $P \neq 0$, получим

$$V = \frac{-Q \pm \sqrt{\Delta}}{2P}.$$

Числитель дроби, стоящей в правой части, симметричен относительно координат ξ , η . В приведенной формуле для V два значения. Обозначим $U = L^2$. Для этого выражения имеет место уравнение

$$U^2 R + UQ + P\Phi^2 = 0.$$

При условии $R \neq 0$ можем записать

$$U = \frac{-Q \pm \sqrt{\Delta}}{2R}.$$

В зависимости от выбора знака перед радикалом в выражениях V , U будем писать эти обозначения со знаками $+$ или $-$ снизу. Оба решения должны быть отличны от нуля, так как их произведение $UV = \Phi^2 \neq 0$ по условию теоремы. Если взять пары U , V с одинаковыми знаками при радикалах, то это условие будет выполняться только в случае $\Delta = 0$. Тогда имеем единственное решение

$$V = \frac{-Q}{2P}, \quad U = \frac{-Q}{2R}.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда знаки при радикалах различны. Условие на произведение UV выполняется автоматически. Рассмотрим, например, пару V_+ , U_- . Положим $P > 0$, $R < 0$. Тогда $\Delta > Q^2$. Имеем положительные решения

$$V_+ = \frac{-Q + \sqrt{\Delta}}{2P} > 0, \quad U_- = \frac{-Q - \sqrt{\Delta}}{2R} > 0.$$

Если $P < 0$, $R > 0$, то $\Delta > Q^2$. Получим положительные решения для пары $V_- U_+$. Но так как знаки у коэффициентов P , R поменялись, то изменилась внутренняя геометрия. Поэтому можем считать, что в этом случае есть одно положительное решение. Рассмотрим теперь случай, когда P , R одного знака, а Q противоположного знака. Тогда $\Delta < Q^2$. Если $P > 0$, $R > 0$, $Q < 0$, то положительное решение дают две пары $V_+ U_-$ и $V_- U_+$, т. е. внутренняя геометрия допускает два решения. Другой случай двух решений получается для $P < 0$, $R < 0$, $Q > 0$. В качестве решений подходят те же пары. Но

внутренняя геометрия изменилась. Наконец, рассмотрим случай $P = 0$, $R \neq 0$, $Q \neq 0$. Тогда имеем единственное решение

$$V = -\frac{R\Phi^2}{Q}, \quad U = -\frac{Q}{R}.$$

Если $P = 0$, $R = 0$, то и $Q = 0$ — исключительный случай, который рассматривается ниже. Хотя в некоторых случаях получились пары решений, эти решения не соединяются между собой непрерывным семейством решений. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая область не допускает непрерывных изгибаний в этом случае в классе поверхностей переноса.

Так как $K \neq 0$, то $V \neq 0$, и достаточно рассмотреть случай $P = R = 0$. Из этих условий находим, что найдутся функции $A(\eta)$, $B(\xi)$ такие, что

$$\omega_\xi = -A(\eta)\Phi \sin \omega, \quad \omega_\eta = -B(\xi)\Phi \sin \omega. \quad (10)$$

Подставив выражение Φ и используя формулу (2), находим

$$\omega_\xi = A(\eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \sin^2 \omega = \sin^2 \omega \frac{\partial}{\partial \xi} (A(\eta) \omega_\eta).$$

Отсюда следует, что найдутся функции $C(\eta)$, $D(\xi)$ такие, что

$$\operatorname{ctg} \omega = -A(\eta) \omega_\eta + C(\eta), \quad \operatorname{ctg} \omega = -B(\xi) \omega_\xi + D(\xi). \quad (11)$$

Заменяя здесь производные угла ω с помощью (10), получим

$$\operatorname{ctg} \omega = AB\Phi \sin \omega + C(\eta) = AB\Phi \sin \omega + D(\xi).$$

Стало быть, $C(\eta) = D(\xi) = -C_0 = \text{const}$. Поэтому (11) переписываются в виде

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (12)$$

Мы пришли к формулировке исключительных случаев, указанных выше. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для замкнутой регулярной поверхности переноса исключительный случай II не может выполняться на всей поверхности. Действительно, если поверхность регулярна, то $0 < \sin \omega$ и функция ω принимает максимальные и минимальные значения в некоторых точках. В этих точках $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$. Из уравнений (12) тогда следует, что $\operatorname{ctg} \omega = -C_0$, т. е. максимальное и минимальное значение функции ω совпадают и эта функция постоянна на поверхности. Следовательно, гауссова кривизна поверхности $K = 0$ и по теореме Я. П. Бланка эта поверхность цилиндрическая или плоскость, что противоречит условию ее замкнутости.

Однако исключительные случаи I и II могут иметь место в отдельных точках, интервалах и двумерных областях.

Выясним геометрический смысл производных угла ω . Используем формулу Бонне для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_g}$ кривой, заданной уравнением $\varphi(\xi, \eta) = \text{const}$:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{W} \left[\left(\frac{F\varphi_\eta - G\varphi_\xi}{\Lambda} \right)_\xi + \left(\frac{F\varphi_\xi - E\varphi_\eta}{\Lambda} \right)_\eta \right],$$

где в классических обозначениях первой квадратичной формы

$$W = \sqrt{EG - F^2}, \quad \Lambda = \sqrt{E\varphi_\eta^2 - 2F\varphi_\xi\varphi_\eta + G\varphi_\xi^2}.$$

Кривая с параметром ξ задается уравнением $\eta = \text{const}$. Поэтому $\varphi_\xi = 0$, $\varphi_\eta = 1$, $\Lambda = 1$, $W = \sin \omega$. Геодезическая кривизна этой линии $\frac{1}{\rho_{g1}} = -\omega_\xi$. Для кривой с параметром η аналогично имеем для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_{g2}} = -\omega_\eta$.

4. Исключительные случаи

Определяющие кривые поверхности переноса обозначим через Γ_1 , Γ_2 и их натуральные реперы — через τ_i , ν_i , β_i .

Лемма 2. *Имеет место следующее выражение для гауссовой кривизны поверхности переноса:*

$$K = -\frac{k_1 k_2 (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}{\sin^4 \omega}.$$

Действительно, для поверхности переноса имеем

$$K = \frac{LN}{\sin^2 \omega}.$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы и единичной нормали n можем записать

$$L = (r_{\xi\xi}, n), \quad N = (r_{\eta\eta}, n), \quad n = \frac{[\tau_1, \tau_2]}{\sin \omega}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{k_1(\nu_1, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\tau_1, \nu_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\beta_1, \tau_2)}{\sin \omega},$$

$$N = \frac{k_2(\nu_2, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = \frac{k_2(\tau_1, \beta_2)}{\sin \omega}.$$

Из этих соотношений следует лемма 2.

Если в некоторой области поверхности $K \neq 0$, то $k_i \neq 0$, $(\tau_1, \beta_2) \neq 0$, $(\tau_2, \beta_1) \neq 0$. Рассмотрим простой исключительный случай I, когда $C_0 = 0$. Первое уравнение из (12) перепишем в виде

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega} = \frac{(\tau_1, \tau_2)_\eta}{(\tau_1, \tau_2)}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по ξ , после применения формул Френе получим

$$k_1 k_2 [(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\tau_1, \nu_2)(\nu_1, \tau_2)] = 0.$$

Либо одна из кривизн k_i равна нулю и тогда имеем исключительный случай I, либо равно нулю выражение в квадратных скобках. Пусть равно нулю выражение в квадратных скобках. С помощью формулы векторной алгебры $([ab], [cd]) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$ равенство нулю выражения в квадратных скобках можно записать в виде $(\beta_1, \beta_2) = 0$. Дифференцируя это равенство по ξ , получим $\kappa_1(\nu_1, \beta_2) = 0$. Если кручения отличны от нуля, то после дифференцирования по η получим $(\nu_1, \nu_2) = 0$. Опять дифференцируя по η , получим $(\nu_1, -k_2 \tau_2 + \kappa_2 \beta_2) = 0$. Но мы уже получили $(\nu_1, \beta_2) = 0$. Поэтому $(\nu_1, \tau_2) = 0$. Это означает, что кривая γ_2 лежит в постоянной плоскости, ортогональной $\nu_1(\xi)$. Вновь имеем исключительный случай I, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай $C_0 \neq 0$.

Лемма 3. *Постоянная C_0 имеет выражение*

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}. \quad (13)$$

Используем первое уравнение из (12)

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega + C_0 \sin \omega}.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по ξ , получим

$$(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta})(\cos \omega + C_0 \sin \omega) - (\tau_1, \tau_2)[(\tau_{1\xi}, \tau_2) + C_0 \omega_\xi \cos \omega] = 0. \quad (14)$$

Заменяем ω_ξ с помощью соотношения $\sin \omega \omega_\xi = -(\tau_{1\xi}, \tau_2)$. Сумма слагаемых без C_0 записывается в виде

$$([\tau_{1\xi} \tau_1], [\tau_{2\eta} \tau_2]) = k_1 k_2 ([\nu_1 \tau_1], [\nu_2 \tau_2]) = k_1 k_2 (\beta_1, \beta_2).$$

Слагаемое, содержащее C_0 , приобретает вид

$$C_0 \frac{(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta}) \sin^2 \omega + (\tau_1, \tau_2)(\tau_{1\xi}, \tau_2)(\tau_1, \tau_{2\eta})}{\sin \omega}.$$

Используем соотношение $\sin^2 \omega = 1 - (\tau_1, \tau_2)^2$. Уравнение (14) переписывается в виде

$$\begin{aligned} k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)[(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \nu_2)]}{\sin \omega} \right\} \\ = k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right\} = 0. \end{aligned}$$

По нашему предположению $k_1 k_2 \neq 0$. Из равенства нулю выражения в фигурных скобках получим выражение C_0 . Заметим, что имеет место равенство

$$(\nu_1, \nu_2) = ([\tau_1 \beta_1], [\tau_2 \beta_2]) = (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2) - (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1).$$

Поэтому получаем выражение

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}. \quad (15)$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. В рассматриваемом исключительном случае II имеют место выражения для отношения кривизн и кручений определяющих кривых

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\beta_1, \tau_2)^2}, \quad \frac{k_2}{\kappa_2} = -\frac{(\tau_2, \beta_1) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_1, \beta_2)^2}. \quad (16)$$

Получим выражение для этого отношения на кривой γ_1 . Дифференцируем выражение C_0 по ξ . Получим в числителе

$$\begin{aligned} [-\kappa_1(\nu_1, \beta_2) \sin \omega + (\beta_1, \beta_2) \cos \omega \omega_\xi](\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) \\ - (\beta_1, \beta_2) \sin \omega [k_1(\nu_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) - \kappa_1(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \nu_1)] = 0. \end{aligned}$$

Используем уравнение $(\cos \omega)_\xi = -\sin \omega \omega_\xi = k_1(\nu_1, \tau_2)$. После умножения левой и правой частей уравнения на $\sin \omega$ соберем отдельно члены, содержащие k_1 и κ_1 . Получим

$$\begin{aligned} -k_1(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)[(\tau_1, \tau_2)(\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \beta_2) + (1 - (\tau_1, \tau_2)^2)(\nu_1, \beta_2)] \\ = -k_1(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)[(\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \nu_2) + (\nu_1, \beta_2)]. \end{aligned}$$

Выражение в последних квадратных скобках можно заменить на $(\tau_2, \beta_1)(\tau_1, \nu_2)$. Далее

$$-\kappa_1 \sin^2 \omega(\tau_1, \beta_2)[(\nu_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) - (\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \nu_1)].$$

Выражение в квадратных скобках можно заменить на (τ_1, ν_2) . Этот же сомножитель имеется среди сомножителей при k_1 . Если бы на некотором куске кривой с параметром ξ этот сомножитель был равен нулю, то этот кусок был бы плоским и поверхность относилась бы к исключительному случаю I. В нашем случае можно на него сократить. В отдельных точках или линиях, где этот сомножитель обращается в нуль, получаемые формулы справедливы в силу непрерывности входящих в них выражений. В результате получим

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)^2}.$$

Лемма 4 доказана.

Для произведения таких отношений для двух образующих кривых имеем

$$\frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{\sin^4 \omega}{(\beta_1, \beta_2)^2 (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}.$$

Сравнивая с выражением C_0 в (13), получаем

$$C_0 = \left(\frac{(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right)^3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Это выражение фигурирует в определении исключительного случая II.

Для иллюстрации выражения C_0 возьмем в качестве образующих поверхности переноса кривые откоса. У кривой откоса отношение кручения κ к кривизне k есть постоянное число: $\frac{\kappa}{k} = \text{const}$. Обозначим $\varphi_i = \arctg \frac{\kappa_i}{k_i}$, $\rho_i = \sqrt{k_i^2 + \kappa_i^2}$,

$$\sigma_i = \int \rho_i ds_i$$

— новый параметр на кривой. Возьмем кривые откоса с совпадающими осями. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в E^3 . Натуральные реперы записываются в простом виде

$$\tau_i = \cos \varphi_i A_i + e_3 \sin \varphi_i,$$

$$\nu_i = e_1 \cos \sigma_i + e_2 \sin \sigma_i,$$

$$\beta_i = -\sin \varphi_i A_i + e_3 \cos \varphi_i,$$

где $A_i = e_1 \sin \sigma_i - e_2 \cos \sigma_i$. В этом случае надо только вычислить отношение

$$\frac{(\beta_1, \beta_2)^2}{1 - (\tau_1, \tau_2)^2},$$

которое обозначим через D_0 . По определению $D_0 \geq 0$. Предположим, что D_0 — постоянное число. Перепишем это условие в таком виде

$$(\beta_1, \beta_2)^2 + D_0(\tau_1, \tau_2)^2 = D_0.$$

Находим

$$(\tau_1, \tau_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\sigma_1 - \sigma_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$(\beta_1, \beta_2) = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\sigma_1 - \sigma_2) + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2.$$

Введем обозначение для переменного выражения $\theta = \sigma_1 - \sigma_2$. Заметим, что углы φ_i постоянные. Вышеуказанное условие постоянства D_0 записывается в виде

$$A \cos^2 \theta + 2B(1 + D_0) \cos \theta + C = D_0,$$

где A, B, C — постоянные числа, причем при условии, что $k_i \neq 0, \kappa_i \neq 0$, число $A > 0$. Так как θ изменяется, то левая часть уравнения не может быть постоянным числом. Поэтому поверхность переноса указанных линий откоса к исключительным случаям не относится. Следовательно, теорема 2 применима к ее областям, в которых $K \neq 0$.

5. Образующие кривые плоские

Рассмотрим поверхность переноса, когда образующие кривые лежат в перпендикулярных плоскостях. Нетрудно установить, что поверхность относится к исключительному случаю I. Ниже рассмотрим конкретный простейший пример такой поверхности. Но сейчас укажем пример изгибаемости таких поверхностей в классе поверхностей переноса, предложенный рецензентом после прочтения первого варианта работы. Пусть производные непрерывно дифференцируемых функций $a(\xi), b(\eta)$ удовлетворяют неравенствам $0 < |a'(\xi)| < 1, 0 < |b'(\eta)| < 1$. Следующая поверхность, заданная радиус-вектором $r(\xi, \eta, t)$, дает пример непрерывного семейства изгибаний по параметру t в окрестности числа $t = 1$ в классе поверхностей переноса:

$$r(\xi, \eta, t) = \left(\int_0^\xi \sqrt{1 - t^2(a'(u))^2} du, ta(\xi) + t^{-1}b(\eta), \int_0^\eta \sqrt{1 - t^{-2}(b'(v))^2} dv \right).$$

Метрика каждой такой поверхности из семейства $t = \text{const}$ имеет вид $ds^2 = (d\xi)^2 + 2a'(\xi)b'(\eta)d\xi d\eta + (d\eta)^2$ и не зависит от t . В то же время такие поверхности являются поверхностями переноса. Поверхность относится к исключительному случаю. Коэффициенты уравнения (8) $P = Q = R = 0$. Действительно, в этом случае $\cos \omega = a'b'$. Гауссова кривизна имеет вид

$$K = \frac{a''b''}{(1 - (a'b')^2)^2}.$$

Имеем, например, выражение

$$P = - \left(\frac{(\cos \omega)_\xi}{K \sin^4 \omega} \right)_\xi = - \left(\frac{b'}{b''} \right)_\xi = 0.$$

Аналогично устанавливается, что $Q = R = 0$. Поэтому условия теоремы 2 существенны.

Рассмотрим простейший пример замкнутой поверхности переноса, в котором образующие кривые — окружности единичного радиуса, лежащие в перпендикулярных плоскостях.

$$r(\xi, \eta) = (\cos \xi, \sin \xi, 0) + (0, \cos \eta, \sin \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi.$$

Находим $\cos \omega = -\cos \xi \sin \eta$. Поверхность относится к описанному выше типу. Детерминант метрического тензора равен нулю в точках, где $\cos^2 \omega = 1$, а это

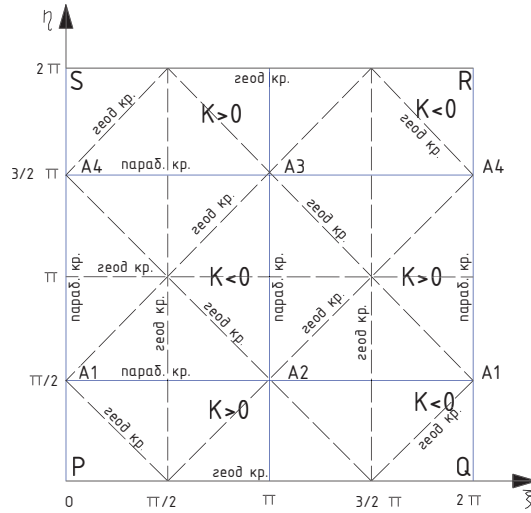


Рис. 1.

значит в точках, где одновременно $\cos^2 \xi = 1$, $\sin^2(\eta) = 1$. Поэтому на поверхности есть четыре особые точки: $A_1(0, \pi/2)$, $A_2(\pi, \pi/2)$, $A_3(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $A_4(0, \frac{3}{2}\pi)$, в которых нарушается регулярность поверхности. В этих особых точках гауссова кривизна K не определена, и диапазон ее значений в окрестности каждой такой точки составляет $(-\infty, +\infty)$.

Выше найдено выражение для геодезической кривизны координатных линий: $(-\omega_\xi)$ для ξ -линии и $(-\omega_\eta)$ для η -линии. Из полученного выражения для $\cos \omega$ находим выражения для геодезической кривизны координатных линий и затем геодезические, которые являются координатными линиями:

$$\omega_\xi = -\frac{\sin \xi \sin \eta}{\sin \omega}, \quad \eta = 0, \eta = \pi,$$

$$\omega_\eta = \frac{\cos \xi \cos \eta}{\sin \omega}, \quad \xi = \pi/2, \xi = \frac{3}{2}\pi.$$

Поэтому на поверхности, если рассматривать квадрат параметров со стороной 2π и с отождествленными противоположными сторонами, есть две вертикальные и две горизонтальные геодезические петли. Ни одна из них не проходит через особые точки A_i . Имеются также по две наклонные геодезические в правую и левую стороны, задаваемые уравнением $\xi \pm \eta = c = \text{const}$, где $c = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$. Замкнутая область на поверхности, в которой одновременно соблюдаются строгие неравенства $0 < |\cos \xi| < 1$, $0 < |\sin \eta| < 1$, включая границу (т. е. область, не содержащая особых точек A_i), согласно сказанному выше допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.

Гауссова кривизна поверхности имеет вид

$$K = \frac{\sin \xi \cos \eta}{\sin^4 \omega}.$$

Поэтому на поверхности есть две связные области положительной кривизны и две связные области отрицательной кривизны, которые разделяются четырьмя параболическими линиями (рис. 1). Эти параболические линии являются координатными линиями и они проходят ровно посередине между геодезическими

петлями. Они также проходят через все четыре особые точки A_i . Поверхность имеет самопересечения по отрезкам прямых, соединяющих точки A_1 с A_3 и A_2 с A_4 . Эти отрезки пересекаются в начале координат. Пространственное поведение поверхности довольно сложное (рис. 2). Имеются четыре воронки по осям x_1 и x_3 и две выпуклые области в положительном и отрицательном направлениях оси x_2 . Здесь x_1, x_2, x_3 — обычные декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве. Вершины квадрата параметров P, Q, R, S отображаются в точку $(1, 1, 0)$, точка $\xi = \pi, \eta = \pi$ отображается в диаметрально противоположную точку $(-1, -1, 0)$.

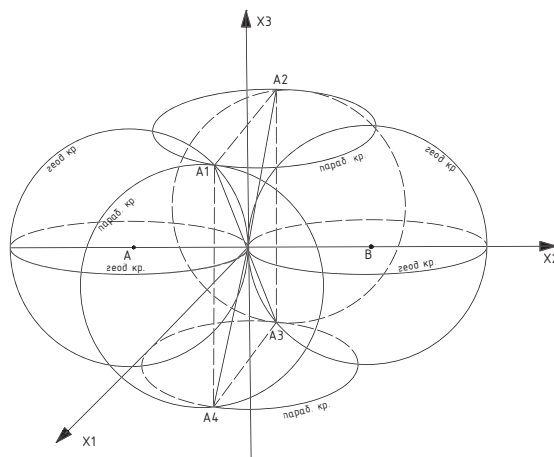


Рис. 2.

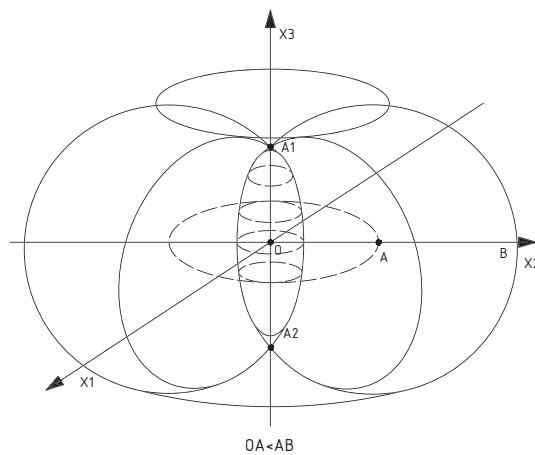


Рис. 3.

Все четыре особые точки лежат в плоскости $x_2 = 0$. Две точки в областях $K < 0$: $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = \pi$ и $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = 0$, отображаются в начало координат $(0, 0, 0)$. В то же время в областях $K > 0$ точка $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = 0$ имеет образом точку $(0, 2, 0)$, а точка $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = \pi$ имеет образ $(0, -2, 0)$. Заметим, что поведение поверхности не меняется, если брать базовые окружности различных радиусов и с различными центрами.

Для сравнения рассмотрим обычный тор, который образуется тоже с помощью двух окружностей в перпендикулярных плоскостях, но не является поверх-

ностью переноса. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в E^3 . Радиус-вектор тора можно записать в виде

$$r(\xi, \eta) = \rho a + a \cos \eta + e_3 \sin \eta,$$

где $a = e_1 \cos \xi + e_2 \sin \xi$, $\rho = \text{const}$ — радиус окружности в плоскости x_1, x_2 . Координаты ξ, η изменяются на промежутке $[0, 2\pi]$. Метрика имеет вид $ds^2 = (\rho + \cos \eta)^2 d\xi^2 + d\eta^2$. Если $\rho > 1$, то особых точек на поверхности тора нет. Если $\rho = 1$, то имеется одна особая точка в начале координат. При $0 < \rho < 1$ на поверхности тора имеются две особые точки, расположенные симметрично на оси x_3 , соответствующие двум решениям уравнения $\cos \eta = -\rho$ (рис. 3, где радиус горизонтальной окружности OA меньше радиуса вертикальной окружности AB). На поверхности находятся две области с $K > 0$ и две области с $K < 0$. Внутри этой поверхности содержится веретенообразное выпуклое тело. Имеются две параболические линии $\eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

6. Изгибание поверхностей переноса отрицательной кривизны в общем классе поверхностей

Теорема 3. Пусть в области в виде координатного прямоугольника на поверхности переноса класса регулярности $C^{4,1}$ выполнено $K < 0$. Тогда эта область допускает изгибания в классе общих поверхностей класса регулярности $C^{3,1}$.

Нетрудно доказать: если тождественно $M = 0$ и метрика имеет вид (1), то поверхность является поверхностью переноса. Запишем уравнения Петерсона — Кодаци для метрики поверхности переноса, не предполагая, что $M = 0$, т. е. для общих поверхностей. Используем приведенные коэффициенты второй квадратичной формы l, m, n , положив $L = l \sin \omega$, $M = m \sin \omega$, $N = n \sin \omega$. Тогда основные уравнения теории поверхностей в этом случае приобретают вид

$$m_\xi = l_\eta + l \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega} - n \frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (17)$$

$$m_\eta = n_\xi - l \frac{\omega_\eta}{\sin \omega} + n \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (18)$$

$$ln - m^2 = K. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega}, \quad a_2 = -\frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (20)$$

$$b_1 = -\frac{\omega_\eta}{\sin \omega}, \quad b_2 = \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}. \quad (21)$$

Если мы найдем семейство решений этой системы, непрерывно зависящее от некоторого параметра t , такое, что при $t = 0$ имеем $m = 0$, а при $t > 0$ и $t < 0$ имеем $m \neq 0$ и коэффициенты l, m, n непрерывно зависят от параметра t , то получим непрерывное изгибание поверхности переноса. Чтобы выполнить уравнение Гаусса в случае $K < 0$, используем преобразование Б. Л. Рождественского [22] и получим систему уравнений для двух переменных r, s , положив

$$l = \frac{2krs}{s-r}, \quad m = -\frac{k(r+s)}{s-r}, \quad n = \frac{2k}{s-r}, \quad k = \sqrt{-K}. \quad (22)$$

Полученная система уравнений имеет симметричный вид. Она использовалась в работах Э. Г. Позняка [18, 19] для построения изометрических погружений в

целом метрик отрицательной кривизны, записанных в полугеодезической системе координат. Но такую же систему уравнений можно вывести и в рассматриваемом случае для метрики (1):

$$r_\xi + sr_\eta = A_0 + A_1r + A_2s + A_3r^2 + A_4rs + A_5r^2s, \quad (23)$$

$$s_\xi + rs_\eta = A_0 + A_2r + A_1s + A_3s^2 + A_4rs + A_5rs^2. \quad (24)$$

Коэффициенты A_i определяются метрикой поверхности и имеют вид

$$A_0 = -a_2, \quad A_1 = b_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi}, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi},$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_4 = -a_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_5 = b_1.$$

Предполагаем, что имеется некоторая поверхность переноса F_0 , которая определяет метрику и функцию $\omega(\xi, \eta)$. Приведенные коэффициенты этой поверхности обозначим $l_0(\xi, \eta)$, $m_0 = 0$, $n_0(\xi, \eta)$. Будем рассматривать построение семейства поверхностей $F(\xi, \eta, t)$ в окрестности $t = 0$, включающего F_0 , с помощью системы уравнений на r, s , в которой коэффициенты A_i не меняются (т. е. не зависят от t), а меняются только начальные условия для этой системы с изменением параметра t . В работе Э. Г. Позняка рассматривается полоса на плоскости параметров $T_a = \{0 \leq \xi \leq a, -\infty < \eta < +\infty\}$. Но нам достаточно рассмотреть координатный четырехугольник. Заметим, что для поверхности переноса $m = 0$ и, следовательно, $r = -s$. Начальные условия зададим на линии $\xi = 0$ так, что при $t = 0$ эти условия совпадают с начальными условиями для поверхности F_0 , а для $t > 0$ отличаются от них и $m \neq 0$. Например, можем положить

$$r(0, \eta, t) = r_0(0, \eta) + tk(0, \eta), \quad s(0, \eta, t) = -r_0(0, \eta) + tk(0, \eta). \quad (25)$$

В работе Э. Г. Позняка [18] доказана теорема существования решения системы уравнений

$$\begin{aligned} r_\xi + sr_\eta &= \Phi_1(\xi, \eta, r, s), \\ s_\xi + rs_\eta &= \Phi_2(\xi, \eta, r, s). \end{aligned} \quad (*)$$

Ранее системы такого вида рассматривались Р. Курантом. В работе [18] правые части представляют собой многочлены относительно неизвестных функций r, s :

$$\Phi_k = \sum A_{lm} r^l s^m.$$

В работе Э. Г. Позняка предполагается, что коэффициенты A_{lm} заданы в полосе T_a и начальные данные задачи Коши $r_0(\eta)$, $s_0(\eta)$ являются $C^{1,1}$ -ограниченными функциями в этой полосе и на оси η . Эти условия называются условиями регулярности. Доказывается

Теорема существования (Э. Г. Позняк). Если коэффициенты правых частей системы (*) и начальные данные удовлетворяют условиям регулярности, то в некоторой полосе T_h , $h \leq a$, существует $C^{1,1}$ -ограниченное решение r, s этой системы, обращающееся в r_0, s_0 при $\xi = 0$. Для ширины этой полосы h дается оценка снизу, зависящая от коэффициентов правых частей рассматриваемой системы и от начальных данных.

Доказывается также свойство корректности решений системы типа (*). Дается оценка близости решений двух соответствующих систем. В нашем случае

обе системы даются заданной поверхностью переноса. В работе [18] рассматриваются две системы на r, s , коэффициенты правых частей которых отличаются в T_a в метрике $C^{1,1}$ менее чем на δ . В нашей работе эти соответствующие коэффициенты совпадают. Кроме того, предполагается, что начальные данные для каждой из этих двух систем отличаются от начальных данных r_0, s_0 менее чем на δ . Доказаны следующие утверждения.

Лемма 5. Если коэффициенты правых частей указанных двух систем отличаются в полосе T_a в метрике $C^{1,1}$ менее чем на ε и начальные данные отличаются на оси η в метрике $C^{1,1}$ также менее чем на ε , то решения этих систем, определяемые указанными начальными данными, отличаются менее чем на $P\varepsilon$. Константа P зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и ее решения $\{r, s\}$.

Лемма 6. Можно указать такое δ , что любая система вида $(*)$, коэффициенты правых частей которой отличаются в полосе T_a в метрике $C^{1,1}$ от коэффициентов правых частей заданной системы менее чем на δ , имеет в этой полосе $C^{1,1}$ -ограниченное решение для любых начальных данных, отличающихся на оси η в метрике $C^{1,1}$ от r_0, s_0 менее чем на δ . Константа δ зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и от данного ее решения (r, s) .

После получения решений системы уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци с помощью теоремы Бонне определяется семейство поверхностей, изометричных данной области поверхности переноса. Полученные поверхности имеют регулярность $C^{3,1}$. В рассматриваемом нами случае условие регулярности заданной области поверхности переноса в виде координатного четырехугольника имеет вид

$$\min |r_0 - s_0| = b > 0,$$

где минимум берется по этому четырехугольнику. Оно будет выполнено и на близкой поверхности, построенной изгибанием.

В работе [20] рассматривается реализация аналитической метрики переменного знака кривизны, но с помощью другого вида системы дифференциальных уравнений. Заметим, что области поверхностей с $K > 0$ с краем тоже допускают изгибания. Этому вопросу посвящены многочисленные работы, например, А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. С. Лейбина [12], И. Н. Векуа [13], К. М. Белова [14–16]. Е. В. Шикиным был предложен в [23] другой метод к вопросу погружения метрик отрицательной кривизны, который позволяет несколько снизить требования регулярности на метрику поверхности.

7. О неизгибаемости в классе поверхностей переноса замкнутых аналитических поверхностей переноса

Рассмотрим замкнутую аналитическую поверхность переноса и возможность непрерывных изгибаний ее в классе поверхностей переноса. Имеет место

Теорема 4. Замкнутая аналитическая поверхность переноса с кривизнами $k_i \neq 0$ образующих кривых не допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.

Поверхность имеет топологический тип тора. Предполагаем, что координатная сеть ξ, η регулярна и покрывает всю поверхность. На замкнутой поверхности переноса обязательно существует параболическая кривая. Так как

кривизны определяющих кривых отличны от нуля, то на параболической кривой выполняется, например, уравнение $(\beta_1, \tau_2) = 0$. Возможны два случая: 1) параболическая кривая имеет окрестность некоторой ее точки, проектирующуюся на координатную ξ -линию в некоторую окрестность некоторой точки ξ_0 , 2) параболическая кривая полностью совпадает с координатной η -линией.

Рассмотрим первый случай. В некоторой окрестности точки ξ_0 параболическая кривая задается в виде $\eta = \varphi(\xi)$. Очевидно, что функция $\varphi(\xi)$ имеет внутренне-геометрический смысл. Выше мы установили первый интеграл для системы уравнений Петерсона — Кодацци

$$L^2(\xi, \eta) + \omega_\xi^2(\xi, \eta) = C(\xi).$$

Найдем выражение функции $C(\xi)$. В некоторой окрестности точки ξ_0 будет выполняться $\omega_\xi^2(\xi, \varphi(\xi)) = C(\xi)$. Поэтому квадрат коэффициента второй квадратичной формы L^2 выражается через величины, относящиеся к внутренней геометрии:

$$L^2(\xi, \eta) = \omega_\xi^2(\xi, \varphi(\xi)) - \omega_\xi^2(\xi, \eta).$$

Тогда выражение второго коэффициента второй квадратичной формы $N(\xi, \eta)$ находится из выражения гауссовой кривизны. Заметим, что эти коэффициенты определяются с точностью до знака, что соответствует выбору поверхности с точностью до зеркального отражения. Всякая поверхность переноса, изометричная рассматриваемой, также аналитична. Действительно, ее замкнутые образующие не могут быть плоскими, поскольку в противном случае индикатриса касательных плоской образующей является большой окружностью и должна пересекаться с индикатрисой касательных второй замкнутой образующей, что дает особую точку поверхности. Поэтому среди касательных к каждой образующей можно выбрать три линейно независимых вектора. Если η_1, η_2, η_3 соответствуют трем таким касательным второй образующей, то равенства

$$(\tau_1(\xi), \tau_2(\eta_j)) = \cos \omega(\xi, \eta_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

выражают компоненты $\tau_1(\xi)$ в фиксированном базисе через аналитические функции ξ ; следовательно, τ_1 аналитична. Аналогично аналитична τ_2 , а значит, и поверхность переноса. Поэтому связь второй квадратичной формы с внутренней геометрией распространяется на всю поверхность. Во втором случае, когда параболическая кривая совпадает со второй координатной линией, покажем, что эта линия плоская и лежит на касательной плоскости к поверхности. Дифференцируя уравнение $(\beta_1, \tau_2(\eta)) = 0$ по η и принимая во внимание, что $k_2 \neq 0$, получим $(\beta_1, \nu_2) = 0$. Дифференцируя еще раз по η , получим $\kappa_2(\beta_1, \beta_2) = 0$. Вторым сомножителем в этом равенстве отличен от нуля. Действительно, имеем три равенства

$$(\beta_1, \tau_2) = 0, \quad (\beta_1, \nu_2) = 0, \quad (\beta_1, \tau_2)^2 + (\beta_1, \nu_2)^2 + (\beta_1, \beta_2)^2 = 1.$$

Следовательно, $(\beta_1, \beta_2)^2 = 1$. Поэтому $\kappa_2 = 0$ на всей координатной η -кривой. Кроме того, $\beta_1 = \pm \beta_2$. Касательные векторы к поверхности вдоль этой кривой τ_1, τ_2 ортогональны β_2 , причем этот вектор постоянен вдоль кривой. Итак, в этом случае параболическая кривая плоская и эта плоскость, в которой она лежит, касательная к поверхности. Тем самым можно, рассматривая изгибание в классе поверхностей переноса и учитывая условие аналитичности поверхности, применить метод А. Д. Александрова, когда он рассматривал аналитические

замкнутые поверхности типа (Т) в работе [9]. В доказательстве А. Д. Александрова используется условие: геодезическая кривизна рассматриваемой параболической кривой в некоторой точке отлична от нуля. Оно у нас выполнено, так как главная нормаль этой параболической линии лежит в касательной плоскости и, следовательно, ее геодезическая кривизна совпадает с $k_2 \neq 0$. В [9] доказывается, что вторые квадратичные формы рассматриваемых изометричных аналитических поверхностей совпадают. Здесь мы существенно использовали тот факт, что рассматривали поверхность переноса и изгибание в классе поверхностей переноса. При общем изгибании (если оно существует) могло оказаться, что плоская параболическая кривая переходит в неплоскую кривую. В таком случае мы не можем использовать метод А. Д. Александрова.

Другой способ завершения доказательства: так как η -кривая плоская и замкнутая, то ее индикатриса касательных — большая окружность единичной сферы. Она должна пересекаться с индикатрисой касательных второй образующей ξ -кривой согласно критерию М. Я. Выгодского [21]: индикатриса касательных замкнутой пространственной кривой пересекается со всеми большими окружностями на единичной сфере. Точка пересечения этих индикатрис соответствует особенности на поверхности, что противоречит условию теоремы. Теорема 4 доказана.

Заметим, что в рассматриваемых случаях плоская параболическая кривая выполняет роль шпангоута из корабельного дела. Но там используют их несколько штук на определенном расстоянии друг от друга.

Благодарности. Я благодарен моей дочери Татьяне Аминовой за техническую помощь, моей внучке Ирине Монтян за подготовку чертежей, Анатолию и Наталье Стакун за постоянную поддержку и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963.
2. Бланк Я. П. О поверхностях переноса постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 5. С. 1037–1039.
3. Александров А. Д. О работах С. Э. Кон-Фоссена // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2. С. 107–141.
4. Кейпер Н. Х. Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 , по Роберту Коннелли // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 18. 1980. С. 210–227.
5. Сабитов И. Х. О метриках, допускающих дисконтинуум неконгруэнтных погружений в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 18, № 2. С. 1023–1026.
6. Сабитов И. Х. Жесткость и неизгибаемость в «малом» и в «целом» поверхностей вращения с уплощениями в полусах // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 10. С. 127–160.
7. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибания поверхностей // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии 1991. Т. 23. С. 131–184.
8. Ефимов Н. В. Доказательство существования поверхности, не изгибаемой в малом // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27, № 4. С. 314–317.
9. Александров А. Д. Об одном классе замкнутых поверхностей // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 1. С. 69–77.
10. Са Эрп Р., Тубиана Э. Дискретные и недискретные изометрические деформации поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 887–893.
11. Аминов Ю. А. О неизгибаемости замкнутых поверхностей тригонометрического типа // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1710–1720.
12. Лейбин А. С. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 5. С. 149–159.

13. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
14. Белов К. М. Об однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 239–241.
15. Белов К. М. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 3. С. 475–477.
16. Белов К. М. К вопросу об изгибании поверхностей // Укр. геом. сб. 1969. Т. 7. С. 13–19.
17. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 2. С. 47–158.
18. Позняк Э. Г. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны // Укр. геом. сб. 1966. Т. 3. С. 78–92.
19. Позняк Э. Г. Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 4. С. 47–76.
20. Позняк Э. Г. Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны // Укр. геом. сб. 1969. Т. 7. С. 89–97.
21. Выгодский М. Я. О замкнутых линиях с заданной индикатрисой касательных // Мат. сб. 1945. Т. 16, № 1. С. 73–80.
22. Рождественский Б. Л. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 1. С. 50–52.
23. Шикин Е. В. О регулярной реализации в целом в E^3 двумерных метрик класса C^2 с отрицательной кривизной класса C^1 // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1014–1016.

Поступила в редакцию 20 сентября 2025 г.

После доработки 3 февраля 2026 г.

Принята к публикации 11 февраля 2026 г.

Аминов Юрий Ахметович
uaminov0917@gmail.com

КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТЬ И МНОГОЗНАЧНАЯ КВАЗИМЁБИУСОВОСТЬ В R^n

В. В. Асеев

Аннотация. Доказана следующая теорема. Для квазирегулярности отображения областей в R^n достаточно наличия верхней оценки искажения птолемеевой характеристики обобщенных тетрад у обратного (многозначного) отображения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.504

Ключевые слова: квазиконформность, квазирегулярность, квазимероморфность, квазимёбиусовость, обобщенная тетрада, птолемеева характеристика, многозначная квазимёбиусовость.

Введение

Данная статья служит продолжением работ [1–4]. Приведем некоторые пояснения по поводу используемой терминологии.

КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ И КВАЗИМЕРОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Распространив аналитическое определение квазиконформности (см. например, [5, 4.2]) на случай непрерывных (не обязательно инъективных) отображений областей в $\overline{R}^n$, Ю. Г. Решетняк [6] ввел в рассмотрение класс отображений с ограниченным искажением. В частности, он установил, что непостоянные отображения этого класса являются открытыми и дискретными. Результаты изучения дифференциальных свойств таких отображений были представлены в монографии Ю. Г. Решетняка [7]. С 1969 г. к изучению отображений с ограниченным искажением подключились финские математики Мартио, Рикман и Вяйсяля [8–10]. Акцентируя внимание на метрических и топологических свойствах, они назвали такие отображения «квазирегулярными» и предложили в [8] удобное «метрическое определение» квазирегулярности непрерывного открытого дискретного отображения областей в $\overline{R}^n$ (см. ниже § 2), приводящее к тому же классу отображений, что и у Ю. Г. Решетняка. Благодаря инвариантности метрического определения относительно мёбиусовых преобразований, свойство квазирегулярности естественно распространяется на отображения областей в $\overline{R}^n$ и называется «квазимероморфностью» (см. [9, с. 3]). В случае инъективных отображений квазимероморфность тождественна квазиконформности.

КВАЗИМЁБИУСОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ. Этим термином Вяйсяля [11] наделил инъективные отображения в метрических пространствах, ограниченно искажающие абсолютное двойное отношение четверки точек. Свойство квазимёбиусовости является мёбиусово-инвариантной модификацией свойства квазисиммет-

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0026).

ричности, рассмотренного ранее в [12], и может быть использовано при изучении инъективных отображений в произвольных полуметрических пространствах (в том числе в дискретных пространствах). В $\overline{R}^n$ связь между квазимёбиусовостью и квазиконформностью выражена следующим образом:

- (а) любое квазимёбиусово отображение области является квазиконформным [11, теорема 5.2];
- (b) любое квазиконформное отображение области является локально квазимёбиусовым [11, с. 232];
- (с) квазиконформное отображение всего пространства $\overline{R}^n$ на себя является квазимёбиусовым [11, с. 232].

ПТОЛЕМЕЕВА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕТРАДЫ. Упорядоченная четверка попарно различных точек, разбитая на две пары, называется *тетрадой*. Птолемея характеристика $\beta(T)$ тетрады T в пространстве $\overline{R}^n$ есть мёбиусово-инвариантная величина, определяемая формулой (1.0.1). При любом η -квазимёбиусовом отображении $f : D \rightarrow f(D) \subset \overline{R}^n$ области $D \subset \overline{R}^n$ для каждой тетрады T в D выполняется неравенство $\beta(f(T)) \leq \omega(\beta(T))$ с контрольной функцией $\omega(t) = 2\eta(t)$ (см. [13, утверждение 3.3]). В случае инъективного отображения f области $D \subset \overline{R}^n$ верно и обратное утверждение: выполнение неравенства $\beta(f(T)) \leq \omega(\beta(T))$ с контрольной функцией ω влечет η -квазимёбиусовость f с контрольной функцией η , зависящей лишь от ω (см. [14, теорема 6.2]).

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕТРАДЫ И СВОЙСТВО BAD. В [13] было введено понятие обобщенного угла $\Phi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$, стороны A_1, A_2 и вершины B_1, B_2 которого являются множествами в полуметрическом пространстве (X, ρ) , у которых $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ и $\#(B_1 \cup B_2) \geq 2$. В частном случае, когда A_1, A_2, B_1, B_2 попарно не пересекаются, для обобщенного угла используется термин «обобщенная тетрада» (см. [1]). В случае обобщенной тетрады вместо величины $\alpha(\Psi)$ обобщенного угла Ψ , введенной в [13, (4.1.1)], оказалось удобнее использовать числовую характеристику $\beta(\Psi) := 1/\alpha(\Psi)$, названную «птолемеевой характеристикой» (обобщенной) тетрады (см. ниже формулы (1.0.1) и (1.0.2)). В [15, § 4] рассматривались многозначные отображения $F : X \rightarrow 2^Y$ птолемеяевых полуметрических пространств. Свойство гиперинъективности $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset)$ гарантирует, что образ $F(\Psi)$ обобщенного угла Ψ в X является обобщенным углом. Выполнение для любого обобщенного угла Ψ в X оценки $\alpha(F(\Psi)) \geq \eta(\alpha(\Psi))$ искажения величин обобщенных углов с некоторой контрольной функцией η было названо свойством η -BAD (bounded angular distortion). Свойство η -BAD имеется, например, у отображений, обратных к проекции пространства $\overline{R}^n$ на подпространство [15, теорема 8.1], а также для отображений, обратных к координатным функциям квазирегулярного отображения $f : \overline{R}^n \rightarrow \overline{R}^n$ (см. [16, теорема 2]). Топологические и метрические свойства многозначных отображений со свойством BAD изучались в [14, 17].

В терминах птолемеяевой характеристики обобщенных тетрад свойство ω -BAD для многозначного гиперинъективного отображения F означает выполнение оценки $\beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi))$ для любой тетрады Ψ и ее образа — обобщенной тетрады $F(\Psi)$. В пространстве $\overline{R}^n$ при условии $\#F(y) \leq N < \infty$ для всех y это свойство упоминается в [1, 3, 4] как *многозначная квазимёбиусовость* и сводится к обычной квазимёбиусовости в случае однозначных отображений областей в $\overline{R}^n$.

Цель наших исследований — установить связь между свойством квазиморфности отображения $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset \overline{R}^n$ области $D \subset \overline{R}^n$ и свойством

многозначной квазимёбиусовости обратного отображения $F = f^{-1}$ по аналогии с вышеупомянутыми утверждениями (а), (b) и (с) о связи между квазиконформностью и квазимёбиусовостью.

В [2, теорема 1.7] получен следующий аналог утверждения (с): для семейства всех K -квазимероморфных отображений $f : \overline{R}^n \rightarrow \overline{R}^n$, у которых $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{R}^n$, существует контрольная функция $\omega_{K,N} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, зависящая только от K, N и такая, что

$$\beta(f^{-1}(\Psi)) \leq \omega_{K,N}(\beta(\Psi))$$

для любой тетрады $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ в $\overline{R}^n$.

Основной результат данной статьи (теорема 5.1) — это обобщение утверждения (а), полученное в следующей форме. Пусть отображение $f : D \rightarrow \Omega$ областей в $\overline{R}^n$ таково, что обратное к нему отображение $F = f^{-1}$ является многозначным квазимёбиусовым с контрольной функцией $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда f является K^* -квазирегулярным отображением с $K^* \leq \omega(3)$.

§ 1. Терминология и обозначения

Приведем (с незначительными изменениями в символике) определения и утверждения из [3, § 1], относящиеся к многозначным отображениям со свойством BAD, т. е. со свойством многозначной квазимёбиусовости.

Семейство всех непустых компактных подмножеств в $\overline{R}^n$ обозначаем через $\text{Comp}(\overline{R}^n)$. Через $\sigma(\cdot, \cdot)$ обозначаем *хордовое расстояние* в $\overline{R}^n$, определяемое формулой

$$\sigma(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \cdot \sqrt{1 + |y|^2}} \text{ при } x, y \in R^n;$$

$$\sigma(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}; \quad \sigma(\infty, \infty) = 0.$$

Тетрадой называем четверку попарно различных точек в $\overline{R}^n$, разбитую на две пары: $(a_1, a_2; b_1, b_2)$. Ее *птолемеева характеристика* есть величина

$$\beta(a_1, a_2; b_1, b_2) = \frac{\sigma(a_1, b_1) \cdot \sigma(a_2, b_2) + \sigma(a_1, b_2) \cdot \sigma(a_2, b_1)}{\sigma(a_1, a_2) \cdot \sigma(b_1, b_2)}. \quad (1.0.1)$$

Заметим, что если $\{a_1, a_2, b_1, b_2\} \subset R^n$, то в формуле (1.0.1) хордовые расстояния можно заменить расстояниями в евклидовой метрике.

Обобщенной тетрадой называем четверку компактных попарно не пересекающихся множеств в $\overline{R}^n$, разбитую на две пары: $(A_1, A_2; B_1, B_2)$. Ее птолемеева характеристика задается формулой

$$\beta(A_1, A_2; B_1, B_2) = \max_{u_1 \in A_1, u_2 \in A_2} \left\{ \min_{v_1 \in B_1, v_2 \in B_2} \beta(u_1, u_2; v_1, v_2) \right\}. \quad (1.0.2)$$

Для натурального $N \geq 1$, открытого множества $\Omega \subset R^n$ и гомеоморфизма $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ рассматриваем семейство $QM^*(\omega, N, \Omega)$ всех многозначных отображений $F : \Omega \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ таких, что

(1.0.3) $F(\Omega) := \bigcup \{F(y) : y \in \Omega\}$ — открытое множество в R^n ;

(1.0.4) (гиперинъективность) $(y_1 \neq y_2) \Rightarrow (F(y_1) \cap F(y_2) = \emptyset)$;

(1.0.5) $\sup \{\#F(y) : y \in \Omega\} \leq N$;

(1.0.6) (свойство ω -BAD) для любой тетрады $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ в Ω и ее образа $(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2))$ выполняется оценка

$$\beta(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2)) \leq \omega(\beta(a_1, a_2; b_1, b_2)). \quad (1.0.7)$$

Отображения класса $QM^*(\omega, N, \Omega)$ будем называть *многозначными квазимёбиусовыми* отображениями.

Полное доказательство следующего утверждения см. в [3, 1.1].

Утверждение 1.1. Любое отображение $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$ непрерывно как многозначное отображение (см. [18, § 18]) в любой точке $y_0 \in \Omega$. При этом левое обратное к нему отображение $f : F(\Omega) \rightarrow \Omega$ является непрерывным, открытым, замкнутым и дискретным.

Для заданного отображения $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$ положим $\Omega_k := \{y \in \Omega : \#F(y) \geq k\}$ и $\Sigma_k := \{y \in \Omega : \#F(y) = k\}$, где $k = 1, 2, \dots, N$. При этом $\Omega_1 = \Omega$.

Утверждение 1.2. При любом $k = 1, \dots, N$ множества Ω_k и $F(\Omega_k) = f^{-1}(\Omega_k)$ открыты в R^n . Множество $\Sigma_N = \Omega_N$ открыто, а каждое из множеств Σ_k при $1 \leq k < N$ либо пусто, либо замкнуто в Ω_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае число $H(y)$ — количество компонент множества $F(y)$ — совпадает с $\#F(y)$. Поэтому из [1, утверждение 2.0.2(ii)] следует, что Ω_k открыто в Ω . В силу того, что Ω открыто в R^n , множество Ω_k также открыто в R^n . В силу непрерывности отображения f множество $f^{-1}(\Omega_k)$ открыто в $f^{-1}(\Omega)$. Так как по условию (1.0.3) множество $f^{-1}(\Omega) = F(\Omega)$ открыто в R^n , то $f^{-1}(\Omega_k)$ также открыто в R^n .

Так как $\Sigma_k = \Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$ при $1 \leq k < N$, то Σ_k замкнуто относительно Ω_k .

§ 2. Квазирегулярные отображения

В этом параграфе мы следуем [4, §1]. Для непрерывного открытого дискретного отображения $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset R^n$ открытого множества $D \subset R^n$ точка $x_0 \in D$ называется *точкой ветвления*, если не существует такой окрестности U точки x_0 , чтобы ограничение $f|_U$ было инъективным отображением. Множество всех точек ветвления отображения f обозначается символом B_f . Для точки $x_0 \in D$ и $r > 0$ символом $U(x_0, f, r)$ обозначается компонента открытого множества $f^{-1}(B(f(x_0), r))$, содержащая точку x_0 . При этом имеем

Утверждение 2.1 [8, 2.8, лемма 2.9]. Существует положительная функция $\sigma(x)$ на множестве D такая, что при любом $0 < r \leq \sigma(x)$ множество $U(x, f, r)$ имеет компактное замыкание в D и является канонической нормальной окрестностью точки x , т. е.

$$f(U(x, f, r)) = B(f(x), r); \quad f(\partial U(x, f, r)) = \partial f(U(x, f, r)) = \partial B(f(x), r).$$

При этом

$$\text{diam } U(x, f, r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

Основные свойства канонических нормальных окрестностей указаны в [8, 2.8, лемма 2.9] и приведены в [4, лемма 1.1].

Обратная линейная дилатация отображения f в точке $x_0 \in D$ есть величина (возможно, ∞)

$$H^*(x_0, f) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max\{|z - x_0| : z \in \partial U(x_0, f, r)\}}{\min\{|z - x_0| : z \in \partial U(x_0, f, r)\}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8, теорема 4.14]. Непрерывное открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset R^n$ области $D \subset R^n$ называется *K^* -квазирегулярным*, если величина $H^*(x, f)$ локально ограничена в D и $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$.

Утверждение 2.2 [8, лемма 2.11]. Если $D \subset R^n$ — открытое множество и $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, то множество его точек ветвления имеет топологическую размерность $\dim B_f \leq n - 2$. Следовательно, для любой компоненты $G \subset D$ множество $G \setminus B_f$ связно и отображение f либо сохраняет ориентацию в G , либо меняет ее на противоположную.

Поэтому в классе открытых дискретных отображений условие сохранения ориентации в области D при определении 2.1 квазирегулярного отображения опущено, т. е. мы допускаем, что квазирегулярное отображение может обращать ориентацию в области D .

§ 3. Слабая квазисимметричность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [19, определение 1.2]. Инъективное отображение $\varphi : A \rightarrow \varphi(A) \subset R^n$ множества $A \subset R^n$ называется *слабо (h, H) -квазисимметрическим* с константами $h > 0$ и $H \geq 1$, если для любой тройки попарно различных точек $\{x_1, x_2, x_3\} \subset A$ справедлива импликация

$$\left(\frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} \leq h \right) \implies \left(\frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_3)|}{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|} \leq H \right).$$

Теорема 3.2. Пусть заданы $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$, $h > 1$ и $k \in \{1, \dots, N\}$. Тогда для любой точки $y_0 \in \Sigma_k$ с образом $F(y_0) = \{x_0^1, \dots, x_0^k\}$ существует такое положительное число $r_h < \min\{\sigma(x) : x \in F(y_0)\}$, что при любом $0 < r \leq r_h$ ограничение отображения F на множестве $\Sigma_k \cap B(y_0, r)$ распадается на k однозначных ветвей:

$$F|_{\Sigma_k \cap B(y_0, r)}(y) = \Phi_1(y) \cup \dots \cup \Phi_k(y),$$

каждая из которых осуществляет слабо (h, H) -квазисимметрическое отображение

$$\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r) \rightarrow F(\Sigma_k) \cap U(x_0^j, f, r)$$

с константой $H = \omega(3(1 + 2h))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $y_0 \in \Sigma_k$ и ее образ $F(y_0) = \{x_0^1, \dots, x_0^k\}$. Отметим какую-нибудь точку $z_0 \in \Omega \setminus \{y_0\}$ и ее образ $Z = F(z_0)$. Фиксируем $d_0 > 0$ такое, что

$$\text{dist}(F(y_0), Z) > d_0, \quad |x_0^i - x_0^j| > d_0$$

при всех $x_0^i \neq x_0^j$ из $F(y_0)$.

По утверждению 1.1 существует левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \rightarrow \Omega$, являющееся непрерывным открытым и дискретным. Применив утверждение 2.1 о существовании и свойствах канонических нормальных окрестностей, найдем достаточно малое $r_0 > 0$ такое, что

$$r_0 < \min\{\sigma(x_0^1), \sigma(x_0^2), \dots, \sigma(x_0^k)\}, \quad r_0 < |y_0 - z_0|/3; \quad \overline{B}(y_0, r_0) \subset \Omega_k,$$

а канонические нормальные окрестности $U_i := U(x_0^i, f, r_0)$ точек $x_0^1, \dots, x_0^k$ имеют настолько малые диаметры (см. (2.1.1)), что

$$\text{dist}(\overline{U}_i, \overline{U}_j) > d_0/3 \quad \text{при} \quad i \neq j; \tag{3.2.1}$$

$$\text{dist}(\overline{U}_j, Z) > d_0/3 \quad \text{при} \quad \text{всех} \quad j = 1, \dots, k. \tag{3.2.2}$$

Положив $\Phi_i(y) := F(y) \cap U_i$ ($i = 1, \dots, k$) для всех $y \in B(y_0, r_0)$, получим k ветвей (в общем случае многозначных) отображения $F|_{B(y_0, r_0)}$. Так как $\#\Phi_i(y) = 1$ при $y \in \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$, то каждое из отображений Φ_i однозначно на множестве $\Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$.

Остается доказать, что каждое отображение Φ_i слабо $(h, \omega(3(1+2h)))$ -квазисимметрическое на $\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)$ при некотором $0 < r_h < r_0$.

Пусть задано $h > 1$. В шаре $B(y_0, r)$ радиуса $r < r_0$ рассмотрим произвольную тройку попарно различных точек $(y_1, y_2, y_3) \subset \Sigma_k \cap B(y_0, r)$, у которой

$$\frac{|y_1 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \leq h. \quad (3.2.3)$$

Найдем верхнюю оценку величины

$$\beta(y_1, y_2; y_3, z_0) = \frac{|y_1 - y_3| \cdot |y_2 - z_0| + |y_1 - z_0| \cdot |y_2 - y_3|}{|y_1 - y_2| \cdot |y_3 - z_0|}. \quad (3.2.4)$$

Так как $r < r_0 < |z_0 - y_0|/2$, то $|y_1 - z_0| \leq |z_0 - y_0| + r \leq (3/2)|z_0 - y_0|$ и аналогично $|y_2 - z_0| \leq (3/2)|z_0 - y_0|$. Кроме того,

$$|y_3 - z_0| \geq |z_0 - y_0| - |y_3 - y_0| \geq |z_0 - y_0| - r \geq (1/2)|z_0 - y_0|.$$

Используя указанные неравенства в выражении (3.2.4), получаем оценку

$$\begin{aligned} \beta(y_1, y_2; y_3, z_0) &\leq \frac{(3/2)|z_0 - y_0|}{(1/2)|z_0 - y_0|} \cdot \frac{|y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \\ &\leq 3 \cdot \frac{|y_1 - y_3| + (|y_2 - y_1| + |y_1 - y_3|)}{|y_1 - y_2|} = 3 \left(1 + 2 \frac{|y_1 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \right). \end{aligned}$$

С учетом (3.2.3) приходим к оценке

$$\beta(y_1, y_2; y_3, z_0) \leq 3(1 + 2h). \quad (3.2.5)$$

Рассмотрим образ $F(\Psi) = (F(y_1), F(y_2); F(y_3), Z)$ тетрады $\Psi = (y_1, y_2; y_3, z_0)$ и отображение Φ_j при некотором $j \in \{1, \dots, k\}$.

Пусть $\Phi_j(y_1) = \{x_1\}$, $\Phi_j(y_2) = \{x_2\}$, $\Phi_j(y_3) = \{x_3\}$ (напомним, что Φ_j — однозначное отображение на $\Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$ и $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$, поэтому мы можем в дальнейшем рассматривать $\Phi_j(y)$ при $y \in \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$ как точки в R^n). Тогда в силу формулы (1.0.2)

$$\begin{aligned} \beta(F(\Psi)) &\geq \beta(\{x_1\}, \{x_2\}; F(y_3), Z) = \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; v_1, v_2) \\ &= \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \frac{|x_1 - v_1| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - v_1|}{|x_1 - x_2| \cdot |v_1 - v_2|}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Так как $\text{diam}(U(x_0^j, f, r)) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ (это одно из свойств канонических нормальных окрестностей, отмеченное в [8, лемма 2.9]), найдется такое $r_h < r_0$, что

$$\text{diam}(U(x_0^j, f, r)) < \min \left\{ \frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3 \cdot \omega(3(1+2h))} \right\} \quad (3.2.7)$$

при любых $0 < r \leq r_h$ и $j \in \{1, \dots, k\}$.

Убедимся, что минимум по $v_1 \in F(y_3)$ в формуле (3.2.6) реализуется при $v_1 = x_3$.

Допустим, от противного, что этот минимум достигается в какой-то другой точке $\tilde{x}_3 \in F(y_3) \setminus \{x_3\}$. Тогда

$$\beta(F(\Psi)) \geq \min_{v_2 \in Z} \frac{|x_1 - \tilde{x}_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |\tilde{x}_3 - v_2|}.$$

Так как $x_1 \in U_j$, а $\tilde{x}_3 \in U_i$ с $i \neq j$, то (см.(3.2.1)) $|x_1 - \tilde{x}_3| > d_0/3$ и (см.(3.2.2)) $|x_1 - v_2| > d_0/3$ при любом $v_2 \in Z$. Кроме того, в силу (3.2.7) $|x_1 - x_2| \leq \text{diam}(U(x_0^j, f, r)) < d_0/(3\omega(3(1+2h)))$.

Следовательно, при любом $v_2 \in Z$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - \tilde{x}_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |\tilde{x}_3 - v_2|} &> \frac{d_0/3}{|x_1 - x_2|} \cdot \frac{|x_2 - v_2| + |x_2 - \tilde{x}_3|}{|\tilde{x}_3 - v_2|} \\ &\geq \frac{d_0 \cdot 3\omega(3(1+2h))}{3d_0} = \omega(3(1+2h)). \end{aligned}$$

Но тогда $\beta(F(\Psi)) > \omega(3(1+2h))$ и свойство ω -BAD (см.(1.0.6)) отображения F вместе с неравенством (3.2.5) дает противоречие:

$$\omega(3(1+2h)) < \beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi)) \leq \omega(3(1+2h)).$$

Следовательно (см. (3.2.6)),

$$\begin{aligned} \beta(F(\Psi)) &\geq \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; v_1, v_2) = \min_{v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; x_3, v_2) \\ &= \min_{v_2 \in Z} \frac{|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - x_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |x_3 - v_2|}. \end{aligned}$$

Из оценок (3.2.7) и (3.2.2) вытекает, что $|x_1 - x_3| \leq d_0/3 < |x_1 - v_2|$. Поэтому при любом выборе точки $v_2 \in Z$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - x_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |x_3 - v_2|} &\geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} \cdot \frac{|x_2 - v_2| + |x_2 - x_3|}{|x_3 - v_2|} \\ &\geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\beta(F(\Psi)) \geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} = \frac{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_3)|}{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_2)|}.$$

Используя свойство ω -BAD отображения F и неравенство (3.2.5), получаем требуемую оценку для отображения Φ_j :

$$\frac{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_3)|}{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_2)|} \leq \beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi)) \leq \omega(3(1+2h)) = H,$$

справедливую при любом выборе точек $\{y_1, y_2, y_3\}$ в $\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)$, удовлетворяющих условию $|y_1 - y_3|/|y_1 - y_2| \leq h$.

Значит, отображение $\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r_h) \rightarrow U(x_0^j, f, r_h)$ является слабо (h, H) -квазисимметрическим. Теорема доказана.

§ 4. Теорема об устранимости

Будем использовать следующую теорему об устранимости в классе квази-регулярных отображений в R^n .

Теорема 4.1 [4, теорема 3.1, следствие 3.2]. Пусть $f : D \rightarrow \Omega = f(D)$ — непрерывное открытое дискретное отображение области $D \subset R^n$ на область $\Omega \subset R^n$, и пусть $N = \max\{\#f^{-1}(y) : y \in \Omega\}$. Пусть множество $E \subset D$ замкнуто относительно D и при этом

- (i) ограничение $f|_{D \setminus E}$ является K^* -квазирегулярным отображением;
- (ii) для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$ множество

$$E_k := \{x \in E : \#f^{-1}(f(x)) = k\}$$

либо пусто, либо любая точка $x_0 \in E_k$ имеет окрестность $U \subset D$ такую, что отображение $f|_{U \cap E_k}$ инъективно, а обратное к нему отображение является слабо (h, H) -квазисимметрическим с параметрами $h > 1$, $H \geq 1$.

Тогда отображение f будет $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным в области D , где $\tilde{K}^*$ зависит лишь от $\{K^*, h, H, N, n\}$.

Если при этом множество E имеет нулевую n -мерную меру Лебега, то f будет K^* -квазирегулярным в области D .

§ 5. Основная теорема

Основным результатом данной статьи является

Теорема 5.1. Пусть отображение $f : D \rightarrow \Omega$ области $D \subset R^n$ на область $\Omega \subset R^n$ таково, что $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \Omega$. Если обратное к нему многозначное отображение $F = f^{-1}$ имеет свойство ω -BAD с некоторым гомеоморфизмом (контрольной функцией) $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, то f является K^* -квазирегулярным отображением с $K^* \leq \omega(3)$.

Частный случай этой теоремы был доказан в работе [3].

Утверждение 5.2 [3, лемма 3.4]. Пусть непрерывное открытое дискретное отображение $g : D' \rightarrow \Omega'$ области $D' \subset R^n$ на область $\Omega' \subset R^n$ таково, что $g^{-1} \in QM^*(\omega, N, \Omega')$ и $B_g = \emptyset$, т. е. g не имеет точек ветвления в области D' . Тогда g является $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным отображением с $\tilde{K}^* \leq \omega(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, можно считать, что

$$N = \max\{\#f^{-1}(y) : y \in \Omega\}.$$

Множество B_f замкнуто относительно области D (см. [20, замечание 1.1]). Из непрерывности и замкнутости отображения f (см. утверждение 1.1) следует, что $f(B_f)$ замкнуто относительно Ω и $f^{-1}(f(B_f))$ замкнуто относительно D .

У непрерывного открытого дискретного отображения $\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n - 2$ (см. [21, теорема 4.6]). Так как f к тому же замкнутое отображение (см. утверждение 1.1), то $\dim f^{-1}(f(B_f)) \leq n - 2$ (см. [22, теорема 5.5]). Более того (см. [20, следствие 2.3]),

$$\dim B_f = \dim f(B_f) = \dim f^{-1}(f(B_f)) \leq n - 2. \quad (5.2.1)$$

Множество в R^n с топологической размерностью $\leq n - 2$ не нарушает связности области. Поэтому из (5.2.1) следует, что $\Omega \setminus f(B_f)$ и $D \setminus f^{-1}(f(B_f))$ являются областями в R^n .

Положим $E := f^{-1}(f(B_f))$, $D' = D \setminus E$, $\Omega' = \Omega \setminus f(B_f)$, $g = f|_{D'} : D' \rightarrow \Omega'$, $g^{-1} = F|_{\Omega'}$. Так как $F|_{\Omega'} \in QM^*(\omega, N, \Omega')$ (выполняются все условия (1.0.3)–(1.0.6) с заменой Ω на Ω' и $B_g = \emptyset$), то отображение g , будучи левым обратным к $F|_{\Omega'}$, удовлетворяет условию (i) в теореме 4.1 с $K^* \leq \omega(3)$.

Теперь нужно убедиться, что выполняется условие (ii) в теореме 4.1.

Так как $\#F(y) = N$ при всех $y \in \Sigma_N$, то ограничение $F|_{\Sigma_N}$ удовлетворяет условиям утверждения [1, 2.4], в силу которого обратное отображение f является локальным гомеоморфизмом на множестве $F(\Sigma_N)$ и не имеет точек ветвления на этом множестве, т. е. $F(\Sigma_N) \cap B_f = \emptyset$.

Покажем, что множество $E_N = \{x \in f^{-1}(f(B_f)) : \#F(f(x)) = N\}$ пусто.

Допустим от противного, что нашлась точка $x \in E_N$, и рассмотрим образ $y = f(x)$ этой точки. Так как $\#F(y) = \#F(f(x)) = N$, то $y \in \Sigma_N = \Omega_N$.

Поскольку $x \in f^{-1}(f(B_f))$, то $y = f(x) \in f(B_f)$. Это означает, что $y = f(z)$ для некоторой точки $z \in B_f$. Так как $y = f(z) \in \Sigma_N$, точка y имеет в точности N прообразов (максимальное число прообразов) и все они лежат в области $F(\Sigma_N) = F(\Omega_N)$, не содержащей точек ветвления. Но тогда точка $z \in f^{-1}(y)$ — один из этих прообразов — не может быть точкой ветвления. Это противоречит выбору точки $z \in B_f$.

Полученное противоречие доказывает, что $E_N = \emptyset$.

Следовательно, $E = E_1 \cup \dots \cup E_{N-1} \cup E_N = E_1 \cup \dots \cup E_{N-1}$. Поэтому произвольно заданная точка $x_0 \in E$ лежит в некотором множестве $E_k = F(\Sigma_k)$, где $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Значит, $y_0 = f(x_0) \in \Sigma_k$, и $F(y_0) = \{x_{01}, \dots, x_{0k}\}$.

Воспользовавшись утверждением 2.1, найдем достаточно малое $r_0 > 0$, для которого $r_0 < \min\{\sigma(x_{01}), \dots, \sigma(x_{0k})\}$ и канонические нормальные окрестности $U(x_{01}, f, r_0), \dots, U(x_{0k}, f, r_0)$ попарно не пересекаются. Для произвольно заданного $h > 1$ применим к точке $y_0 \in \Sigma_k$ теорему 3.2 и найдем $0 < r_h < r_0$ такое, что

$$F|_{\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)}(y) = \Phi_1(y) \cup \dots \cup \Phi_k(y),$$

где каждая из однозначных ветвей

$$\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r_h) \rightarrow F(\Sigma_k) \cap U(x_{0j}, f, r_h)$$

является слабо (h, H) -квазисимметрическим отображением с $H = \omega(3(1 + 2h))$. Тогда любая точка x_{0j} , где $j \in \{1, \dots, k\}$, имеет окрестность $U_j = U(x_{0j}, f, r_h)$, в которой отображение $f|_{U_j \cap E_k} = (\Phi_j|_{f(U_j \cap E_k)})^{-1}$ инъективно, а обратное к нему отображение Φ_j является слабо (h, H) -квазисимметрическим. Значит, выполняется условие (ii) в теореме 4.1, в силу которой отображение f является $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным в области D с некоторым $\tilde{K}^*$, зависящим только от $\{K^*, h, H, n, N\}$.

Применив к квазирегулярному отображению $f : D \rightarrow \Omega$ последовательно [8, лемма 2.27, теорема 8.3, теорема 8.4], получаем равенства

$$0 = \text{mes } f(B_f) = \text{mes } B_f = \text{mes } f^{-1}(f(B_f)) = \text{mes } E.$$

Поскольку множество E имеет лебегову меру 0, заключительная часть теоремы 4.1 дает равенство $\tilde{K}^* = K^* \leq \omega(3)$, и отображение f является K^* -квазирегулярным во всей области D с $K^* \leq \omega(3)$.

Теорема 5.1 доказана.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимательное прочтение данной работы и за сделанные им замечания, способствовавшие значительному улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В. В. Многозначные квазимёбиусовы отображения на римановой сфере // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 450–464.
2. Асеев В. В. Графические пределы квазимероморфных отображений и искажение характеристики тетрад // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.
3. Асеев В. В. Птолемеева характеристика тетрад и квазирегулярные отображения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 785–794.
4. Асеев В. В. Об устранимых особенностях для квазирегулярных отображений // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 3. С. 363–377.
5. Künzi H. P. Quasikonforme Abbildungen. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1960.
6. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
7. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
8. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. N 448. P. 1–40.
9. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. N 465. P. 1–13.
10. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. N 488. P. 1–31.
11. Väisälä J. QuasiMöbius maps // J. d'Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
12. Tukia F., Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.
13. Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенев А. В. Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
14. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
15. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
16. Aseev V. V. On coordinate vector-functions of quasiregular mappings // Sib. Electron. Math. Reports. 2018. V. 15. P. 768–772.
17. Асеев В. В. Многозначные отображения со свойством квазимёбиусовости. // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 953–972.
18. Куратовский К. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.
19. Xiantao Wang, Qingshan Zhou. Quasimöbius maps, weakly quasimöbius maps and uniformly perfectness in quasi-metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2017. V. 42, N 1. P. 257–284.
20. Church Ph. T., Hemmingsen E. Light open maps on n -manifolds // Duke Math. J. 1960. V. 27, N 4. P. 527–536.
21. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993. (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge/ A Series; V. 26).
22. Väisälä J. Discrete open mappings on manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1967. N 392. P. 1–10.

Поступила в редакцию 6 октября 2025 г.

После доработки 9 июня 2026 г.

Принята к публикации 15 июня 2026 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
aseevvv@yandex.ru, ase@math.nsc.ru

МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕТОК, ПОРОЖДЕННОЕ L_4 . II

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

Аннотация. Установлена дуальная эквивалентность для категории биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию, порожденному конечной решеткой L_4 , с полными гомоморфизмами решеток в качестве морфизмов, расширяя таким образом дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.505

Ключевые слова: дуальность, биалгебраическая решетка, многообразие.

1. Введение

В работах [1, 2] дуальность Биркгофа для биалгебраических дистрибутивных решеток была продолжена на многообразии $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденное пентагоном N_5 ; таким образом была получена дуальная эквивалентность категории, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие $\mathbf{SP}(N_5)$, а морфизмами — полные решеточные гомоморфизмы, и категории так называемых N_5 -пространств с N_5 -отображениями в качестве морфизмов. Оказалось, что подобная дуальность биркгофовского типа может быть получена и для других конечно порожденных многообразий решеток. А именно, такие дуальности были установлены ранее для:

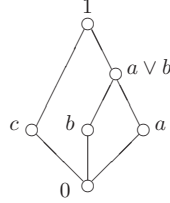
- многообразия $\mathbf{SP}(L_6)$, порожденного решеткой L_6 подпорядков трехэлементной цепи, в [3, 4];
- многообразия $\mathbf{SP}(M_3)$, порожденного алмазом M_3 , в [5, 6] (перевод на английский язык см. в [7]);
- многообразий, порожденных решетками подпорядков частичных порядков длины 2, в [8, 9].

Все эти дуальности расширяли дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток, а также дуальность, найденную в работах [1, 2], в случае, когда данное многообразие содержало многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$.

Здесь мы рассматриваем многообразие $\mathbf{SP}(L_4)$, порожденное конечной решеткой L_4 (см. рис. 1, а также [10, с. 127]). Согласно теореме Маккензи [11] это многообразие имеет конечный базис тождеств. Более того, оно является верхним покрытием для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$ в решетке всех многообразий решеток (см. [12, разд. 2.2]).

Основываясь на результатах из [13], мы находим дуальную категорию для категории биалгебраических решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(L_4)$, — категорию

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0032, и при поддержке Комитета по науке Министерства науки и образования Республики Казахстан, проект AP23485395.

Рис. 1. Решетка L_4 .

$\mathbb{C}_4$, объектами которой являются L_4 -пространства, а морфизмами — L_4 -отображения, — и устанавливаем дуальную эквивалентность категории $\mathbb{C}_4$ и категории $\mathbb{BL}_4$ биалгебраических решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(L_4)$ с полными решеточными гомоморфизмами в качестве морфизмов (см. теорему 1). Отметим, что установленная здесь дуальная эквивалентность является расширением дуальной эквивалентности для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденного пентагоном, из работ [1, 2]. (Многообразие $\mathbf{SP}(L_4)$ содержит $\mathbf{SP}(N_5)$ в качестве собственного подмногообразия.) Таким образом, эта дуальная эквивалентность расширяет и дуальную эквивалентность Биркгофа для дистрибутивных решеток.

За всеми основными определениями и обозначениями теории решеток, не представленными здесь, мы отсылаем читателя к монографиям [10, 12]. За специфическими определениями, связанными с понятием минимального покрытия в решетке, а также за фактами о строении многообразия $\mathbf{SP}(L_4)$ мы отсылаем к [14, 10, 2, 13].

2. Категории $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$

Следующее определение является аналогом [2, определение 2.1]; оно отличается от последнего в пп. (s3) и (m4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структура $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_4 -пространством, если выполнены следующие условия:

- (s1) $X \cap Y = \emptyset$; более того, если $Y \neq \emptyset$, то $X \neq \emptyset$;
- (s2) $\leq$ является частичным порядком на $X \cup Y$;
- (s3) $f: Y \rightarrow (X \cup Y) \times X$ является функцией, причем для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$, выполняются следующие условия:
 - (a) $y \not\leq \{a, b\}$ и $b \not\leq y$ являются антицепями;
 - (b) если $a \in X$, то $a < y$;
 - (c) если $a \in Y$, то $f(a) = (y, b)$;
 - (d) если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $y \leq z$;
 - (e) если $z \leq y$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $z \ll \{a, b\}$ или $z \in Y$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$, где $f(z) = (c, d)$.

Для удобства также пишем $X(\mathbb{S})$ вместо X и $Y(\mathbb{S})$ вместо Y .

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f' \rangle$ — L_4 -пространства. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется L_4 -отображением, если выполнены следующие условия:

- (m1) φ отображает $X \cup Y$ в $X' \cup Y' \cup 2X'$, где $2X'$ обозначает семейство всех 2-элементных антицепей в $\langle X', \leq' \rangle$;
- (m2) если $u, v \in X \cup Y$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in X' \cup Y'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;
- (m3) для любого $x \in X$ справедливо включение $\varphi(x) \in X'$;
- (m4) для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$, выполнено следующее:

- (а) если $\varphi(y) \in X'$, то $\varphi(y) \ll \varphi(a)$ или $\varphi(y) \leq \varphi(b)$;
 (б) если $\varphi(y) \in Y'$, то $\varphi(a) \in X' \cup Y'$ и $f(\varphi(y)) = (\varphi(a), \varphi(b))$;
 (с) если $\varphi(y) \in 2X'$, то $\varphi(y) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq X'$ и $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \varphi(z)$ для любого $z \in X \cup Y$ с условием $y \leq z$.

Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ — L_4 -пространства, пусть

$$X_i = X(\mathbb{S}_i), \quad Y_i = Y(\mathbb{S}_i) \quad \text{для } i < 3,$$

и пусть $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_4 -отображения. Композиция $\varphi_0 \circ \varphi_1: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_2$ L_4 -отображений φ_0 и φ_1 определяется следующим образом. Пусть $u \in X_0 \cup Y_0$.

(с1) Если $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(u), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(u) \in X_2 \cup Y_2, \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(u) \in 2X_2 \text{ и } f(u) = (a, b). \end{cases}$$

(с2) Если $\varphi_0(u) \in 2X_1$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(a), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(b) \leq \varphi_1 \varphi_0(a), \\ \varphi_1 \varphi_0(b), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(a) \leq \varphi_1 \varphi_0(b), \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \text{если } \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \in 2X_2, \end{cases}$$

где $f(u) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$ и $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ в силу (m4-с) в последнем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в условии (с1) в случае, когда $\varphi_1 \varphi_0(u) \in 2X_2$, имеем $\varphi_0(u) \in Y_1$ и $u \in Y_0$ в силу условия (m3), примененного сначала к φ_1 , а затем к φ_0 . Это означает, что $f(u) = (a, b)$ для некоторых $a \in X_0 \cup Y_0$ и $b \in X_0$. Кроме того, $f(\varphi_0(u)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Таким образом, определение во второй строке условия (с1) корректно.

Лемма 1. Если $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ — L_4 -пространства, а $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_4 -отображения, то $\varphi_0 \circ \varphi_1$ также является L_4 -отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем для краткости $\psi = \varphi_0 \circ \varphi_1$ и

$$X_i = X(\mathbb{S}_i), \quad Y_i = Y(\mathbb{S}_i) \quad \text{для } i < 3.$$

Условия (m1) и (m3) определения 1 очевидным образом выполняются для ψ .

Утверждение 1. Условие (m2) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in X_0 \cup Y_0$ таковы, что $u \leq v$ в $\mathbb{S}_0$, и пусть $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$. Покажем, что $\psi(u) \leq \psi(v)$ в $\mathbb{S}_2$. Возможны следующие случаи.

СЛУЧАЙ m2.1: $\varphi_0(u), \varphi_0(v) \in X_1 \cup Y_1$. Этот случай рассматривается в точности так, как это сделано в начале доказательства утверждения 2.1 в доказательстве [2, лемма 2.2]. Действительно, в силу (m2), примененного к φ_0 , получаем, что $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(v)$. Поскольку $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$, заключаем по (m2), примененному к φ_1 , и (с1), что $\psi(u) = \varphi_1 \varphi_0(u) \leq \varphi_1 \varphi_0(v) = \psi(v)$.

СЛУЧАЙ m2.2: $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$ и $\varphi_0(v) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(v) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(v) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$ и $\psi(v) = \max\{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \in X_2$ в силу условия (с2), так как $\psi(v) \in X_2 \cup Y_2$.

Поскольку $u \leq v$ в $\mathbb{S}_0$, имеем в этом случае в силу (s3-e), что либо $u \ll \{a, b\}$, либо $u \in Y_0$, $f(u) = (c, d)$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$ в $\mathbb{S}_0$. В первом случае

$$\psi(u) = \varphi_1 \varphi_0(u) \ll \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \ll \max\{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} = \psi(v) \in X_2$$

согласно (m3) и (c2), поскольку $\psi(v) \in X_2 \cup Y_2$. Следовательно, $\psi(u) \leq \psi(v)$ в $\mathbb{S}_2$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $u \in Y_0$, $f(u) = (c, d)$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$ в $\mathbb{S}_0$. Тогда в силу включения $b, d \in X_0$, выполненного по условию (s3), заключаем с использованием условий (m2), (m3), примененных к φ_0 , что $\varphi_0(d) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v),$$

$$\psi(d) = \varphi_1\varphi_0(d) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v).$$

Ввиду нашего предположения о $\varphi_0(u)$ и условия (m4) возможны следующие два случая.

СЛУЧАЙ m2.2a: $\varphi_0(u) \in X_1$. В этом случае по (m3) получаем, что $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in X_2$. Более того, имеем по (m4-a), что либо $\varphi_0(u) \ll \varphi_0(c)$, либо $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(d)$. Во втором случае применяем (m2), (m3) к φ_1 и получаем, что

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(d) = \psi(d) \leq \psi(v).$$

В первом случае есть три возможности.

- $\varphi_0(c) \in X_1$. В этом случае применяем (m2), (m3) к φ_1 и получаем, что

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(c) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v).$$

- $\varphi_0(c) \in Y_1$. В этом случае $c \in Y_0$ и $f(c) = (u, d)$ по (s3-c), а $f(\varphi_0(c)) = (\varphi_0(u), \varphi_0(d)) \in X_1^2$ по (m3), (m4-b), а также в силу нашего предположения о том, что $\varphi_0(u) \in X_1$. Таким образом, имеем

$$\varphi_0(u) \leq \varphi_0(c) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1.$$

Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v)$$

и $\psi(u) \leq \psi(v)$.

- $\varphi_0(c) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $c \in Y_0$ и $f(c) = (u, d)$ в силу (s3-c). Более того, по условию (m4-c), примененному к φ_0 , имеем

$$\varphi_0(u) \ll \varphi_0(c) = \{\varphi_0(u), \varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1.$$

Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v)$$

и $\psi(u) \leq \psi(v)$.

В любом случае установлено, что $\psi(u) \leq \psi(v)$, что и требовалось.

СЛУЧАЙ m2.2b: $\varphi_0(u) \in Y_1$. В этом случае $\varphi_0(c) \in X_1 \cup Y_1$ и $f(\varphi_0(u)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Следовательно,

$$\{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$$

в $\mathbb{S}_1$ в силу условий (m2), (m3), примененных к φ_0 . Ввиду условий (m2), (m3), примененных к φ_1 , имеем в $\mathbb{S}_2$

$$\begin{aligned} \{\psi(c), \psi(d)\} &= \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \\ &\ll \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v). \end{aligned}$$

Если $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in X_2$, то, применяя (m4-a) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} \ll \psi(v),$$

что и требовалось. Если $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in Y_2$, то $\psi(c) = \varphi_1\varphi_0(c) \in X_2 \cup Y_2$ и $f(\psi(u)) = (\psi(c), \psi(d))$ в силу (m4-b), примененного к φ_1 . Поскольку $\{\psi(c), \psi(d)\} \ll \psi(v)$, заключаем по (s3-d), что $\psi(u) \leq \psi(v)$, что и требовалось показать.

СЛУЧАЙ m2.3: $\varphi_0(u) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(u) = (a, b)$. Применяя (m4-c) к φ_0 , получаем, что $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \varphi_0(v)$. Если $\varphi_0(v) \in X_1 \cup Y_1$, то, принимая во внимание включения $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$ и применяя (c1), (c2) и (m2), (m3) к φ_1 , получаем, что

$$\psi(u) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \leq \varphi_1\varphi_0(v) = \psi(v).$$

Если $\varphi_0(v) \notin X_1 \cup Y_1$, то $\varphi_0(v) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$, где $f(v) = (c, d)$. Более того, $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\}$. Принимая во внимание включения $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$ и применяя (c1), (c2) и (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(v).$$

Таким образом, условие (m2) выполняется для ψ . $\square$

Утверждение 2. Условие (m4-a) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Пусть $y \in Y_0$ и $f(y) = (a, b)$ в S_0 , пусть также $\psi(y) \in X_2$. Последнее включение может иметь место в следующих трех случаях.

СЛУЧАЙ m4.1: $\varphi_0(y) \in X_1$. В этом случае $\varphi_0(y) \ll \varphi_0(a)$ или $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(b)$ в S_1 в силу (m4-a), примененного к φ_0 . Поэтому, применяя (m2), (m3) и (c1), (c2) к φ_1 , получаем, что $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \ll \psi(a)$ или $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \leq \varphi_1\varphi_0(b) = \psi(b)$ в S_2 .

СЛУЧАЙ m4.2: $\varphi_0(y) \in Y_1$. В силу условия (m4-b), примененного к φ_0 , имеем $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ и $\varphi_0(a) \in X_1 \cup Y_1$. Более того, $\varphi_0(b) \in X_1$ в силу (m3), примененного к φ_0 . Используя условия (c1), (m3) и (m4-a), примененные к φ_1 , получаем, что $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \ll \varphi_1\varphi_0(a) = \psi(a)$ или $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \leq \varphi_1\varphi_0(b) = \psi(b)$.

СЛУЧАЙ m4.3: $\varphi_0(y) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(y) = (a, b)$. Так как $\psi(y) \in X_2$, получаем по (c2) и по (m2), (m3), примененным к φ_1 , равенства $\psi(y) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \max\{\psi(a), \psi(b)\}$. Таким образом, $\psi(y) \in \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$ и условие (m4-a) выполнено для ψ . $\square$

Утверждение 3. Условие (m4-b) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(y) \in Y_2$. В силу условий (c1), (c2) и (m3) это означает, что $\varphi_0(y) \in Y_1$, $\varphi_0(a) \in X_1 \cup Y_1$, а $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ по условию (m4-b), примененному к φ_0 . Применяя (m4-b) к φ_1 , получаем, что $\psi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \in X_2 \cup Y_2$ и $f(\psi(y)) = (\psi(a), \psi(b))$, устанавливая таким образом выполнение условия (m4-b) для ψ . $\square$

Утверждение 4. Условие (m4-c) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\psi(y) \in 2X_2$; тогда $y \in Y_0$, $\varphi_0(y) \notin X_1$ в силу условий (m3) и (c1), (c2), и в S_0 имеет место равенство $f(y) = (a, b)$. Далее, если $\varphi_0(y) \in Y_1$, то применяем условие (m4-b) к φ_0 и получаем, что $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$. Применяя теперь условия (c1) и (m4-c) к φ_1 и имея

в виду, что $\psi(y) \in 2X_2$, получаем $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Если же $\varphi_0(y) \in 2X_1$, то применяем (m4-с) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Имея в виду включение $\psi(y) \in 2X_2$, применяем (c1), (c2) и (m3) к φ_1 и заключаем, что $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Таким образом, в любом случае имеем $\psi(y) = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Предположим теперь, что элемент $z \in X_0 \cup Y_0$ таков, что $y \leq z$ в $\mathbb{S}_0$. Рассмотрим все возможные случаи для φ_0 , принимая во внимание тот факт, что $\varphi_0(y) \notin X_1$, см. выше.

СЛУЧАЙ m4A: $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Следующие подслучаи возможны для $\varphi_0(z)$ и $\psi(z)$.

СЛУЧАЙ m4A-1: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. Поскольку $y \leq z$ и $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$, по (m4-с), примененному к φ_0 , получаем, что $\varphi_0(a), \varphi_0(b) \leq \varphi_0(z)$. Условия (m2), (m3), примененные к φ_1 , влекут

$$\psi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \leq \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z); \quad \psi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) \leq \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z).$$

Поэтому $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \psi(z)$, что и требовалось.

СЛУЧАЙ m4A-2: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. В этом случае $\varphi_0(z) \in Y_1$ и поэтому $z \in Y_0$ в силу (m3) и (c1); таким образом, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$. Более того, $f(\varphi_0(z)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$ в $\mathbb{S}_1$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Следовательно, применяя (m4-с) к φ_1 , получаем

$$\psi(z) = \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \{\psi(c), \psi(d)\} \subseteq X_2.$$

Поскольку $y \leq z$ и $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$, получаем по условию (m4-с), примененному к φ_0 , что $\varphi_0(a), \varphi_0(b) \leq \varphi_0(z)$. По условию (s3-e), примененному к этим неравенствам, заключаем, что $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\}$. Тогда условия (m2), (m3), примененные к φ_1 , дают:

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4A-3: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. В этом случае $z \in Y_0$ по (m3), примененному к φ_0 , и $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$. Более того, $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$ по (m4-с), примененному к φ_0 , и

$$\psi(z) = \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \max\{\psi(c), \psi(d)\} \in X_2$$

по (m3) и (c2). Поскольку $y \leq z$, по условию (m4-с), примененному к φ_0 , имеем

$$\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z).$$

По условию (m2), примененному к φ_1 , и условию (c2) получаем

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4A-4: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. В этом случае $z \in Y_0$, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$, а $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$, как и в случае m4A-3 выше. Поскольку $y \leq z$, по условию (m4-с), примененному к φ_0 , имеем $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z)$. По (m2), (m3), примененным к φ_1 , и (c2) получаем

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4B: $\varphi_0(y) \in Y_1$. В этом случае $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ по условию (m4-b), примененному к φ_0 , и $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$ по условию (m4-с), примененному к φ_1 . Возможны следующие четыре случая.

СЛУЧАЙ m4B-1: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. В этом случае применяем (m2) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$, откуда

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z)$$

в силу (m4-c), примененного к φ_1 .

СЛУЧАЙ m4B-2: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. Применяем (m2) к φ_0 и получаем неравенство $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$. Более того, $\varphi_0(z) \in Y_1$ по (m3), примененному к φ_1 , и $z \in Y_0$ по (m3), примененному к φ_0 . Следовательно, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$ для некоторых $c \in X_0 \cup Y_0$ и $d \in X_0$. Так как $\varphi_0(z) \in Y_1$, по условию (m4-b), примененному к φ_0 , заключаем, что $f(\varphi_0(z)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$. Таким образом,

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z)$$

в силу условия (m4-c), примененного к φ_1 , условия (c1) и неравенства $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$.

СЛУЧАЙ m4B-3: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$. В этом случае, поскольку $\varphi_0(z) \notin X_1$, имеем включение $z \in Y_0$ в силу условия (m3), примененного к φ_0 . Таким образом, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$ для некоторых $c \in X_0 \cup Y_0$ и $d \in X_0$. Более того, $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$ по условию (m4-c), примененному к φ_0 . В силу условия (s3-e) либо $y \ll \{c, d\}$, либо $\{a, b\} \ll \{c, d\}$. В силу условий (m2), (m3), примененных к φ_0 или к ψ , см. утверждение 1 выше, получаем, что либо $\varphi_0(y) \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z) \subseteq X_1$, либо $\{\psi(a), \psi(b)\} \ll \{\psi(c), \psi(d)\}$. В первом случае применяем (m2), (m3) и (m4-c) к φ_1 и получаем, что $\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \{\psi(c), \psi(d)\}$. Таким образом, в любом из двух случаев

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \ll \{\psi(c), \psi(d)\}.$$

Если $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$, то $\psi(y) \ll \max\{\psi(c), \psi(d)\} = \psi(z)$ в силу (c2). Если $\psi(z) \subseteq X_2$, то $\psi(y) \ll \{\psi(c), \psi(d)\} = \psi(z)$ вновь в силу условия (c2). $\square$

Таким образом, условие (m4) выполняется для ψ . Доказательство леммы 1 завершено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ассоциативность операции композиции $\circ$ может быть установлена так же, как и в работе [2].

Пусть $\mathbb{BL}_4$ обозначает категорию, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(L_4)$, а морфизмами — полные решеточные гомоморфизмы (см. рис. 1). Пусть $\mathbb{C}_4$ обозначает категорию, объектами которой являются L_4 -пространства, а морфизмами — L_4 -отображения.

3. Контравариантный функтор из $\mathbb{C}_4$ в $\mathbb{BL}_4$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2, определение 3.1]. Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — L_4 -пространство. Подмножество $I \subseteq X \cup Y$ называется *идеалом* в $\mathbb{S}$, если $I = \downarrow I$ относительно частичного порядка $\leq$ и выполняется следующее условие:

$$\text{если } f(y) = (a, b) \text{ в } \mathbb{S} \text{ и } a, b \in I, \text{ то } y \in I.$$

Как и в работе [2], мы рассматриваем множество $F(\mathbb{S})$ всех идеалов в $\mathbb{S}$ как полную $(0, 1)$ -решетку, в которой $\emptyset$ является наименьшим, а $X \cup Y$ — наибольшим элементом.

Следующие утверждения могут быть установлены так же, как и в [2, разд. 3]. При этом отметим, что доказательство утверждения (ii) леммы 2 ниже практически дословно повторяет доказательство утверждения (i) из [2, утверждение 3.2] и использует свойства (s3-d,e) из определения L_4 -пространства.

Лемма 2. Для семейства $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ идеалов в $\mathbb{S}$ справедливы следующие утверждения.

- (i) $\bigwedge_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} Z_i$.
- (ii) $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in \bigcup_{i \in I} Z_i\}$.
- (iii) Если семейство $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ направлено вверх относительно $\subseteq$, то $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i$.

Лемма 3. Пусть Z — непустой идеал в $\mathbb{S}$.

- (i) Z является вполне $\vee$ -неразложимым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X \cup Y$.
- (ii) Z является вполне $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X$.
- (iii) Если $z \in X \cup Y$, то идеал $\downarrow z$ $\vee$ -прост в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $z \in X$.

Предложение 1. Если $\mathbb{S} — L_4$ -пространство, то $F(\mathbb{S})$ является биалгебраической решеткой.

Предложение 2. Если $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle — L_4$ -пространство, то $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 имеем

$$CJ(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in X \cup Y\},$$

$$CJ_P(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in X\},$$

$$CJ_{NP}(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in Y\}.$$

Поэтому, принимая во внимание лемму 3(iii), заключаем, что для любого элемента $x \in X$ идеал $\downarrow x$ не имеет нетривиального покрытия в $F(\mathbb{S})$. Более того, согласно леммам 2(ii) и 3(i) если $y \in Y$, то единственное минимальное покрытие идеала $\downarrow y$ — это покрытие $\downarrow y \subseteq \downarrow a \vee \downarrow b$, где $f(y) = (a, b)$ в $\mathbb{S}$. Таким образом, решетка $F(\mathbb{S})$ 2-дистрибутивна согласно [15, 14], см. также [13, лемма 2].

По предложению 1 $F(\mathbb{S})$ является биалгебраической J -решеткой для множества $J = CJ(F(\mathbb{S}))$. В силу [3, следствие 5] (см. также [13, лемма 3]) $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет тождеству (C_1) .

Предположим теперь, что $y \in Y$ и $f(y) = (a, b)$. По условию (s3) определения 1 $\downarrow b$ является $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$, поэтому решетка $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет условию (ii) из [13, предложение 2]. В силу [13, предложение 2] это означает, что решетка $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет тождеству (M_w) . Таким образом, $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_4)$ в силу [13, теорема 1]. $\square$

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f \rangle — L_4$ -пространства, и пусть $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}' — L_4$ -отображение. Как и в работе [2], для идеала Z' в $\mathbb{S}'$ полагаем

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in X \cup Y \mid \varphi(z) \in Z'\} \cup \{z \in Y \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}.$$

Рассмотрим отображение

$$F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S}), \quad F(\varphi): Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z').$$

В точности так, как и в доказательстве [2, предложение 3.4], получаем

Предложение 3. Для L_4 -пространств $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ и для L_4 -отображения $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ отображение $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$ является полным решеточным гомоморфизмом.

Следующее утверждение имеет такое же доказательство, как и [2, следствие 3.5].

Следствие 1. $F: \mathbb{C}_4 \rightarrow \mathbb{BL}_4$ является контравариантным функтором.

4. Контравариантный функтор из $\mathbb{BL}_4$ в $\mathbb{C}_4$

Следуя идее из работы [2], для произвольной решетки $L \in \mathbb{BL}_4$ полагаем

$$G(L) = \langle CJ_P(L), CJ_{NP}(L), \leq, f \rangle,$$

где частичный порядок $\leq$ унаследован из L , а для произвольного элемента $y \in CJ_{NP}(L)$ справедливо равенство $f(y) = (a, b)$ в случае, когда $y \leq a \vee b$ является единственным минимальным покрытием y в L таким, что $b \in CJ_P(L)$ и $b \not\leq y$ (см. предложения 2, 3, лемму 3 и теорему 1 из работы [13]).

Предложение 4. Если $L \in \mathbb{BL}_4$, то $G(L) \in \mathbb{C}_4$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что функция f определена корректно в силу предложений 2(ii) и 3 и теоремы 1 из [13]. Более того, ясно, что структура $G(L)$ удовлетворяет условиям (s1), (s2) определения 1.

Покажем, что $G(L)$ удовлетворяет и условию (s3). Для этого предположим, что $f(y) = (a, b)$ для некоторого $y \in Y$. По нашему определению структуры $G(L)$, приведенному выше, заключаем, что $y \leq a \vee b$ является минимальным покрытием элемента y в L таким, что $b \in CJ_P(L)$ и $b \not\leq y$. Более того, $y \not\leq \{a, b\}$, а $(a, b) \in (CJ_P(L) \cup CJ_{NP}(L)) \times CJ_P(L)$, поэтому условие (s3-a) выполнено. Если $a \in CJ_P(L)$, то $a < y$ в силу [13, предложение 3]. В силу того же самого предложения 3 из работы [13] и нашего определения функции f в $G(L)$ заключаем, что $a \leq y \vee b$ является минимальным покрытием в случае, когда $a \notin CJ_P(L)$; т. е. $f(a) = (y, b)$. Следовательно, условия (s3-b) и (s3-c) выполнены.

Далее, если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in CJ(L)$, то $y \leq a \vee b \leq z$ и условие (s3-d) выполнено. Наконец, пусть элемент $z \in CJ(L)$ таков, что $z \leq y$; в этом случае $z \leq y \leq a \vee b$ в L . Если покрытие $z \leq a \vee b$ тривиально, то $z \ll \{a, b\}$. Если же это покрытие нетривиально, то $z \in CJ_{NP}(L)$ и $\{u, v\} \ll \{a, b\}$, где $z \leq u \vee v$ является единственным минимальным покрытием элемента z в L (см. [13, лемма 3]). Таким образом, условие (s3-e) также выполнено, а структура $G(L)$ действительно является L_4 -пространством. $\square$

Для полных решеток L, M и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ рассмотрим следующее отображение (см. [14, 2]):

$$\beta_g: L \rightarrow M, \quad \beta_g: a \mapsto \bigwedge \{b \in M \mid a \leq g(b)\}.$$

Лемма 4 [2, лемма 4.2]. Пусть L, M — биалгебраические решетки, и пусть $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $a \leq g\beta_g(a)$ для всех $a \in L$ и $\beta_g g(b) \leq b$ для всех $b \in M$;
- (ii) $g\beta_g g(b) = g(b)$ для всех $b \in M$;
- (iii) $\beta_g g\beta_g(a) = \beta_g(a)$ для всех $a \in L$;
- (iv) $\beta_g(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \beta_g(a_i)$ для всех $a_i \in L, i \in I$;

- (v) если $x \in \text{CJ}_P(L)$, то $\beta_g(x) \in \text{CJ}_P(M)$;
- (vi) для каждого $b \in L$ с условием $\beta_g(b) \in \text{CJ}(M)$ найдется $y \in \text{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(b) = \beta_g(y)$; более того, $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$, если $\beta_g(b) \in \text{CJ}_{NP}(M)$;
- (vii) если гомоморфизм g разнозначен, то для каждого $b \in \text{CJ}(M)$ существует $a \in \text{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(a) = b$;
- (viii) если g является отображением «на», то $\beta_g(a) \in \text{CJ}(M)$ для каждого $a \in \text{CJ}(L)$, а ограничение отображения β_g на $\text{CJ}(L)$ является разнозначным отображением из $\text{CJ}(L)$ в $\text{CJ}(M)$.

Лемма 5. Пусть L, M — биалгебраические решетки, и пусть $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом. Пусть также элемент $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\mathfrak{M}_L(y) = \{\{a, b\}\}$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) если $\beta_g(y) \in \text{CJ}_{NP}(M)$, то $\mathfrak{M}_M(\beta_g(y)) = \{\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}\}$;
- (ii) если $\beta_g(y) \notin \text{CJ}(M)$, то множество $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$ является антицепью и $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из [16, предложение 8.1(3)].

(ii) Согласно работе [16] отображение β_g является морфизмом в категории верхних полурешеток, дуальным полному гомоморфизму решеток g . Таким образом, применяя предложение 8.1(3) из [16], имеем $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ и $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}(M)$. Если $\beta_g(a) \leq \beta_g(b)$, то

$$\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M),$$

что невозможно в силу нашего предположения. Таким образом, $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(b)$. Аналогично получаем, что $\beta_g(b) \not\leq \beta_g(a)$, и множество $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}(M)$ является антицепью.

Установим теперь, что элементы $\beta_g(a)$ и $\beta_g(b)$ просты. Действительно, пусть $\beta_g(a) \leq u_0 \vee u_1$ для некоторых $u_0, u_1 \in M$; тогда $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) \leq u_0 \vee u_1 \vee \beta_g(b)$. По лемме 4(i) получаем, что $y \leq g\beta_g(y) \leq g(u_0) \vee g(u_1) \vee g\beta_g(b)$. Если $y \leq g\beta_g(b)$, то $\beta_g(y) \leq \beta_g g\beta_g(b) = \beta_g(b) \leq \beta_g(y)$ по лемме 4, откуда получаем включение $\beta_g(y) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M)$, которое противоречит нашему предположению. Следовательно, $y \not\leq g\beta_g(b)$. Если $y \leq g(u_i)$ для некоторого $i < 2$, то $\beta_g(a) \leq \beta_g(y) \leq u_i$.

В противном случае $y \leq g(u_0) \vee g(u_1) \vee g\beta_g(b)$ является нетривиальным покрытием. Поскольку L является $\text{CJ}(L)$ -решеткой, а $\{a, b\}$ — единственное минимальное покрытие элемента y , имеем $\{a, b\} \ll \{g(u_0), g(u_1), g\beta_g(b)\}$. Если $a \leq g\beta_g(b)$, то $\beta_g(a) \leq \beta_g g\beta_g(b) = \beta_g(b)$, поэтому

$$\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M),$$

что противоречит нашему предположению. Следовательно, $a \leq g(u_i)$ для некоторого $i < 2$ и поэтому $\beta_g(a) \leq u_i$. В любом случае мы получаем, что $\beta_g(a) \leq u_i$ для некоторого $i < 2$. Это означает, что $\beta_g(a)$ является вполне простым элементом, что и требовалось. Похожим образом можно установить, что элемент $\beta_g(b)$ также вполне прост. $\square$

Для решеток $L, M \in \mathbb{BL}_4$ и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ мы определяем отображение $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ в точности так, как это сделано в работе [2]. Для $z \in \text{CJ}(L)$ полагаем

$$G(g)(z) = \begin{cases} \beta_g(z), & \text{если } \beta_g(z) \in \text{CJ}(M), \\ \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, & \text{если } \beta_g(z) \notin \text{CJ}(M) \text{ и } \mathfrak{M}_L(z) = \{\{a, b\}\}. \end{cases}$$

Предложение 5. Пусть $L, M \in \mathbb{BL}_4$, и пусть $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ является L_4 -отображением.

Доказательство. Вспоминаем определение 1. Ясно, что условие (m1) выполнено для $G(g)$. Условие (m2) следует из леммы 4(iv), а условие (m3) следует из леммы 4(v).

Чтобы доказать, что выполнено условие (m4), рассмотрим произвольный элемент $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ с условием $\mathfrak{M}_L(y) = \{\{a, b\}\}$, где $b \in \text{CJ}_P(L)$ таков, что $b \not\leq y$; т. е. $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$. По лемме 4(v) имеем

$$G(g)(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}_P(M).$$

Если $G(g)(y) \in \text{CJ}_P(M)$, то

$$G(g)(y) = \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$$

в силу леммы 4(iv), поэтому

$$G(g)(y) \ll \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\}.$$

Если $G(g)(a) = \beta_g(a)$, то $G(g)(y) \ll \{G(g)(a), G(g)(b)\}$, и заключение условия (m4-a) выполнено. Если же $G(g)(a) \neq \beta_g(a)$, это означает в силу определения $G(g)$, что $\beta_g(a) \notin \text{CJ}(M)$ и $G(g)(a) = \{\beta_g(y), \beta_g(b)\} = \{G(g)(y), G(g)(b)\}$, поскольку $\mathfrak{M}_L(a) = \{\{y, b\}\}$ в силу предложения 3 и теоремы 1 из [13]. Очевидным образом $G(g)(y) \ll G(g)(a)$, и заключение условия (m4-a) также выполнено.

Для доказательства выполнения условия (m4-b) для $G(g)$ предположим, что $G(g)(y) \in \text{CJ}_{NP}(M)$. В силу леммы 5(i) имеем $\mathfrak{M}_M(\beta_g(y)) = \{\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}\}$. Кроме того, в силу равенства $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$ и леммы 4(v) имеем включение $G(g)(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}_P(M)$. Предположим, что $\beta_g(b) \leq \beta_g(y)$. Если $\beta_g(a) \leq \beta_g(y)$, то в силу леммы 5(i) имеем $\beta_g(a) \vee \beta_g(b) \leq \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$, поэтому $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ и $\beta_g(y) \in \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}$ в силу неразложимости элемента $\beta_g(y)$, что противоречит лемме 5(i). Таким образом, $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(y)$, поэтому $a \not\leq y$ по лемме 4(iv). Если $a \in \text{CJ}_P(L)$, то в силу включений $a, b \in \text{CJ}_P(L)$ и только что установленного неравенства $a \not\leq y$ по предложению 3 из [13] мы имели бы неравенство $b \leq y$, что невозможно, так как $f(y) = (a, b)$ и поэтому $b \not\leq y$. Следовательно, $a \in \text{CJ}_{NP}(L)$ и $\mathfrak{M}_L(a) = \{\{y, b\}\}$ в силу [13, предложение 3]. По лемме 4(iv) получаем $\beta_g(a) \leq \beta_g(y) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y)$. Однако выше мы установили, что $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(y)$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $\beta_g(b) \leq \beta_g(y)$, неверно. Следовательно, $\beta_g(b) \not\leq \beta_g(y)$, поэтому $f(\beta_g(y)) = (\beta_g(a), \beta_g(b))$, и условие (m4-b) выполнено.

Далее, если $G(g)(y) \notin \text{CJ}(M)$, то $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ и $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$. Таким образом, множество

$$G(g)(y) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$$

является антицепью по лемме 5(ii). Выберем произвольный элемент $z \in \text{CJ}(L)$ такой, что $y \leq z$. Тогда

$$G(g)(a) \vee G(g)(b) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(z).$$

Если $\beta_g(z) \in \text{CJ}(M)$, то

$$G(g)(a), G(g)(b) \leq \beta_g(z) = G(g)(z).$$

Если $\beta_g(z) \notin \text{CJ}(M)$, то $z \in \text{CJ}_{NP}(L)$ по лемме 4(v); пусть $z \leq c \vee d$ — единственное минимальное покрытие элемента z в L . По лемме 5(ii) имеем $G(g)(z) = \{\beta_g(c), \beta_g(d)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$. Следовательно,

$$G(g)(a), G(g)(b) \leq \beta_g(z) = \beta_g(c) \vee \beta_g(d) = G(g)(c) \vee G(g)(d).$$

Поскольку элементы $G(g)(a)$ и $G(g)(b)$ оба просты, заключаем в силу неравенств $G(g)(a), G(g)(b) \leq G(g)(c) \vee G(g)(d)$, что

$$\{G(g)(a), G(g)(b)\} \ll \{G(g)(c), G(g)(d)\} = G(g)(z),$$

и условие (m4-c) выполнено. $\square$

Доказательство следующего утверждения повторяет доказательство [4, предложение 13], см. также доказательство [2, предложение 4.6].

Предложение 6. $G: \mathbb{BL}_4 \rightarrow \mathbb{C}_4$ является контравариантным функтором.

5. Основной результат

Доказательство следующей теоремы использует те же самые аргументы, что и доказательства предложений 5.1 и 5.3 из работы [2]. В этом доказательстве применяются те же самые естественные изоморфизмы ξ и η , что и в доказательстве предложений 5.1 и 5.3 из [2], где

$$\xi_S: \text{GF}(S) \rightarrow S; \quad \xi_S: \downarrow z \mapsto z; \quad \eta_L: \text{FG}(L) \rightarrow L; \quad \eta_L: I \mapsto \bigvee I.$$

Теорема 1. Функторы G и F устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$.

Как и в [2, с. 199], будем говорить, что L_4 -морфизм $\varphi: S \rightarrow S'$ сюръективен, если для любого $z' \in X' \cup Y'$ найдется $z \in X \cup Y$ такой, что $\varphi(z) = z'$. Кроме того, L_4 -морфизм φ инъективен, если $\varphi(X \cup Y) \subseteq X' \cup Y'$ и неравенство $\varphi(z_0) \leq \varphi(z_1)$ влечет неравенство $z_0 \leq z_1$ для произвольных элементов $z_0, z_1 \in X \cup Y$.

По аналогии со следствием 5.5 из [2] получаем такое утверждение.

Следствие 2. Справедливы следующие утверждения.

- (i) Сюръективные L_4 -морфизмы соответствуют по дуальности разнозначным полным решеточным гомоморфизмам и наоборот.
- (ii) Инъективные L_4 -морфизмы соответствуют по дуальности сюръективным полным решеточным гомоморфизмам и наоборот.
- (iii) Раздельные объединения L_4 -пространств соответствуют по дуальности декартовым произведениям решеток из $\mathbb{BL}_4$ и наоборот.

Пусть $(\mathbb{C}_4)_{fin}$ и $(\mathbb{BL}_4)_{fin}$ — полные подкатегории в категориях $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$ соответственно, объектами которых являются в точности все конечные объекты из больших категорий. Из определения функторов F и G , а также теоремы 1 получаем

Следствие 3. Категории $(\mathbb{C}_4)_{fin}$ и $(\mathbb{BL}_4)_{fin}$ дуально эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dziobiak W., Schwedfsky M. V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // Bull. Sec. Logic. 2022. V. 51, N 3. P. 329–344.
2. Дзебяк В., Швидефски М. В. Дуальность для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $(0, 1)$ -решеток, порожденному пентагоном // Алгебра и логика. 2024. Т. 63, № 2. С. 167–208.

3. Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V., Sultankulov K. D. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 902–911.
4. Башеева А. О., Швидефски М. В. Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 446–454.
5. Изьюрова А. Е., Швидефски М. В. Многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$. II. Дуальность // Математика и теоретические компьютерные науки. 2026. Т. 4, № 1. С. 67–91.
6. Изьюрова А. Е., Швидефски М. В. Многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств // Математика и теоретические компьютерные науки. 2024. Т. 2, № 3. С. 53–62.
7. Izyurova A. E., Schwidefsky M. V. A duality for the variety $\mathbf{SP}(M_3)$ // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 12. P. 6125–6142.
8. Kadyrova O. A., Schwidefsky M. V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases // Sib. Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 62–71.
9. Kadyrova O. A., Schwidefsky M. V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. Dualities // Lobachevskii J. Math. 2026. V. 47, N 4. P. 1572–1589.
10. Freese R., Ježek J., Nation J. B. Free lattices. Providence RI: Am. Math. Soc., 1995. (Math. Surveys Monogr.; V. 42).
11. McKenzie R. N. Equational bases and non-modular lattice varieties // Trans. Am. Math. Soc. 1972. V. 174. P. 1–43.
12. Jipsen P., Rose H. Varieties of lattices. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. (Lecture Notes Math.; V. 1533).
13. Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V. The lattice variety generated by L_4 . I // Lobachevskii J. Math. 2026. V. 47, N 3. P. 1326–1334.
14. Nation J. B. An approach to lattice varieties of finite height // Algebra Univers. 1990. V. 27, N 4. P. 521–543.
15. Huhn A. P. Schwach distributive Verbände // Acta Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33. P. 297–305.
16. Dziobiak W., Schwidefsky M. V. New results for algebraic lattices // Algebra and Logic. 2025. V. 64, N 3. P. 135–143.

Поступила в редакцию 5 февраля 2026 г.

После доработки 22 июня 2026 г.

Принята к публикации 22 июня 2026 г.

Башеева Айну́р Орынбасаровна (ORCID 0000-0002-9124-0055)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Казымукан, 13, Астана 010008, Казахстан
basheyeva3006@gmail.com

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
m.schwidefsky@g.nsu.ru

УДК 513.813:512.972+513.814+530.12

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ВСЕЛЕННОЙ ДЕФРИЗА

В. Н. Берестовский

Аннотация. Рассматривается Вселенная Дефриза с отрицательной космологической постоянной как четырехмерная группа Ли с левоинвариантными лоренцевой метрикой и естественно связанным с координатами ортонормальным базисом. Найдены в элементарных функциях координаты геодезических субримановой метрики на этой группе Ли, индуцированной распределением ранга 3, порожденным пространственноподобными векторными полями из указанного базиса. Все геодезические полные. Строго аномальная экстремаль не является геодезической.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.506

Ключевые слова: алгебра Ли, (а)нормальная экстремаль, Вселенная Дефриза, геодезическая, группа Ли, левоинвариантная субриманова метрика, строго аномальная экстремаль.

Введение

Вселенная (решение уравнения тяготения Эйнштейна) Дефриза DU была введена в работе [1] Дефриза. Автору были доступны лишь источники [2, 3], где приведена без деталей и пояснений некоторая информация о Вселенной Дефриза, в частности, что она имеет тип N Петрова, а группа ее изометрий шестимерна. В [3] выписаны, как утверждает автор, явные уравнения геодезических Вселенной Дефриза с отрицательной космологической постоянной.

Все «физически реализуемые» модели относятся к типу I или типу II; есть и «физически нереализуемые» типы III, IV [4]. В [4] дается детальная общая информация о Вселенных типа II, но не приводится ни одного такого примера и DU не упоминается, хотя DU имеет «наблюдаемый» (вырожденный) тип II Петрова (тип N). Автору не известны примеры Вселенных типа II, кроме DU.

Авторы статьи [5] исследовали модель Вселенной Дефриза DU из [3], но с противоположной сигнатурой как некоторой четырехмерной группы Ли G_4 с левоинвариантной лоренцевой метрикой и нашли ее геодезические (они незамкнуты, но могут быть неполными), все киллинговы векторные поля и структуры алгебр Ли группы Ли G_4 , группы Ли изометрий G_6 для DU и ее подгрупп Ли.

Несмотря на уникальность DU, автору не удалось найти в литературе точных сведений о тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна, Вейля и структуре тензора энергии-импульса для Вселенной Дефриза DU. Поэтому в статье [6]

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF–2026–0022.

вычислены эти тензоры и установлены условие времениподобного схождения, нарушение слабого энергетического условия и тип N Петрова [4]. Статья [6] имеет чисто математический характер, хотя в ней цитируются некоторые физические интерпретации полученных результатов.

Вселенная Дефрiza имеет левоинвариантную лоренцеву метрику и естественно связанный с координатами ортонормальный базис левоинвариантных векторных полей. Пространственноподобные векторные поля этого базиса порождают левоинвариантное распределение ранга три и задают на нем левоинвариантное скалярное произведение. Это распределение вполне неголономно и поэтому задает некоторую левоинвариантную субриманову метрику d на группе Ли G_4 .

В элементарных функциях найдены геодезические на (G_4, d) .

Установлена полнота всех геодезических.

Доказано, что строго аномальная экстремаль не является геодезической. Все геодезические, являющиеся 1-параметрическими подгруппами, составляют два бесконечных двумерных конуса с вершиной в единице группы, пересекающихся по одной образующей.

Для поиска геодезических применяется метод из статьи [7], основанный на принципе максимума Понтрягина. В связи со спецификой соответствующей системы ОДУ для Вселенной Дефрiza этот поиск естественно разбивается на четыре случая. Исследование первых двух случаев нетрудно. В то же время каждый из остальных двух случаев приходится разбивать на четыре подслучая, дающих геодезические разного вида.

§ 1. О Вселенной Дефрiza

Вселенная Дефрiza была впервые введена в [1] (1969) как чисто радиационное решение типа N Петрова уравнения тяготения Эйнштейна с шестимерной группой движений G_6 , как утверждает в [2], и приводится там в следующей форме (12.6):

$$ds^2 = \frac{3}{|\Lambda|y^2} \left[dx^2 + dy^2 - dv \left(du - \frac{\Lambda dv}{|\Lambda|y^2} \right) \right], \quad (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4, \quad y > 0, \quad (1)$$

где Λ — ненулевая космологическая постоянная.

Здесь мы принимаем форму (1) линейного элемента с $\Lambda = -3$.

Все ненулевые компоненты для метрического тензора (1) в x, y, u, v :

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{34} = -\frac{1}{2y^2}, \quad g_{44} = \frac{-1}{y^4}. \quad (2)$$

U (1) есть просто транзитивная группа изометрий $G_4(x', y', u', v')$:

$$(x, y, u, v) \rightarrow (y'x + x', y'y, u + u', (y')^2v + v'), \quad (x', u', v') \in \mathbb{R}^3, \quad y' > 0, \quad (3)$$

где единице в G_4 соответствует $(0, 1, 0, 0)$.

Вследствие равенств (1) и (2) касательные векторы к G_4 в единице

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial v} - 2\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad (4)$$

образуют ортонормальный базис сигнатуры $(+, +, +, -)$ в ds^2 . Вследствие (3) им соответствуют левоинвариантные векторные поля на G_4

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial v} - 2\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial v}, \quad (5)$$

и для элементов (4) алгебры Ли $(\mathfrak{g}_4, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G_4 есть только следующие (с точностью до перестановок) ненулевые скобки Ли:

$$[e_2, e_1] = e_1, \quad [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 2e_4. \quad (6)$$

Отсюда видно, что $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис 4-мерной разрешимой алгебры Ли вида $\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\{e_1, e_2, e_4\}$ — базис 3-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$, $\{e_4 - e_3\} = \{2\frac{\partial}{\partial u}\}$ — базис 1-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$.

В [5] замечено, что $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_{3,4}$ с базисом $\{E_1, E_2, E_3\}$ и $h = 1/2$ по классификации Г. М. Мубаракзянова в [8], где

$$[E_1, E_3] = E_1, \quad [E_2, E_3] = hE_2, \quad -1 \leq h < 1. \quad (7)$$

Действительно, для векторов $E_1 = e_4, E_2 = e_1, E_3 = -e_2/2$ выполнены равенства (7) с $h = 1/2$ вследствие (6).

Алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ и $\mathfrak{g}_{3,4}$ метабелевы с коммутативными нильрадикалами ко-размерности один.

На основании (6) для любого элемента X касательной алгебры $\mathfrak{g}_4$ односвязной группы Ли G_4 оператор $\text{ad } X$ не имеет ненулевых мнимых собственных значений, так как все собственные значения таких операторов вещественны. Поэтому по теореме 6.4 второй главы в [9] группа Ли G_4 экспоненциальная, т. е. экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g}_4 \rightarrow G_4$ для нее является диффеоморфизмом.

§ 2. Дифференциальные уравнения экстремалей индуцированной субримановой метрики

Из (6) вытекает, что 3-мерное подпространство V алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ с ортонормальным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ порождает $\mathfrak{g}_4$ скобками Ли $[\cdot, \cdot]$. Как следствие распределение $\mathcal{V}$ ранга 3, являющееся линейной оболочкой над $\mathbb{R}$ ортонормального базиса $\{X_1, X_2, X_3\}$ левоинвариантных векторных полей из (5), вполне неголономно и вследствие теоремы Раппельского — Чжоу задает некоторую левоинвариантную субриманову метрику d на G_4 .

Мы ищем геодезические, т. е. локально кратчайшие $\gamma(t)$ субриманова пространства $(G = G_4, d)$. Они должны быть *экстремалами*, т. е. удовлетворять принципу максимума Понтрягина. Определение нормальных и аномальных экстремалей дано в определении 3 из [7]. Нормальные экстремали — решения системы ОДУ из [7]:

$$\gamma'(t) = d_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \sum_{i=1}^r \psi_i(t) e_i, \quad |u(0)| = 1, \quad (8)$$

$$\psi_j'(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \psi_i(t) \psi_k(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Здесь r — ранг левоинвариантного вполне неголономного распределения на группе Ли G , связанного с субримановым пространством (G, d) , $d_{\gamma(t)}$ — дифференциал левого сдвига $l_{\gamma(t)}$ на элемент $\gamma(t) \in G$; $\psi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, — абсолютно непрерывные вещественные функции, C_{ij}^k — структурные константы в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ для $\mathfrak{g}$.

Мы предполагаем, что начало $\gamma(0)$ — единица группы Ли G .

В аппендиксе С из [10] доказано, что нормальные экстремали являются геодезическими.

Аномальные экстремали могут быть нестрого и строго аномальными. Нестрого аномальные экстремали — в точности те, которые можно реализовать и как нормальные экстремали.

Строго аномальные экстремали требуют особого рассмотрения.

В нашем случае (G_4, d) , $n = 4$, $r = 3$, и вследствие (6)

$$C_{21}^1 = 1 = -C_{12}^1, \quad C_{23}^4 = C_{24}^4 = 2 = -C_{32}^4 = -C_{42}^4 \quad (10)$$

— все ненулевые структурные константы для базиса $\{e_1, \dots, e_4\}$ в $\mathfrak{g}_4$. При этом $v = \pm e_1$ — единственные единичные векторы в V такие, что $[v, V] \subset V$. Поэтому на основании предложения 5 в [11] $\gamma(t) = \exp(\pm t e_1)$ — единственные параметризованные длиной дуги аномальные экстремали в (G_4, d) с началом в единице.

Они строго аномальные вследствие п. 2 теоремы 5, п. 2 теоремы 4 в [11] и того, что $\{\mathbb{R}e_1\}$ — нецентральный идеал в $\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathfrak{g}_1$.

Вследствие (3) и (5) система ОДУ (8) имеет вид

$$x'(t) = y(t)\psi_1(t), \quad y'(t) = y(t)\psi_2(t), \quad u'(t) = -2\psi_3(t), \quad v'(t) = y^2(t)\psi_3(t) \quad (11)$$

с начальными данными $(x(0), y(0), u(0), v(0)) = (0, 1, 0, 0)$.

На основании (10) система ОДУ (9) имеет вид

$$\psi'_1 = \psi_1\psi_2, \quad \psi'_2 = -(\psi_1^2 + 2\psi_3\psi_4), \quad \psi'_3 = \psi'_4 = 2\psi_2\psi_4 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\psi_i(0) = \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует закон сохранения

$$\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) + \psi_3^2(t) = 1. \quad (14)$$

Из последних двух равенств в (12) вытекают равенства

$$\psi_3 = \psi_4 + \varphi_3 - \varphi_4, \quad \psi'_2 = -(\psi_1^2 + 2\psi_4(\psi_4 + (\varphi_3 - \varphi_4))). \quad (15)$$

Предложение 1. (1) Если $\varphi_1 \neq 0$ ($\varphi_4 \neq 0$), то $\psi_1(t) \neq 0$ ($\psi_4(t) \neq 0$) для всех t из области определения функции ψ_1 (ψ_4).

(2) $\psi_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \psi_2(t_0) = 0, \psi_1^2(t_0) + 2\psi_3(t_0)\psi_4(t_0) = 0, t_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Ясно, что для (12) верны теоремы о существовании и единственности решения системы с заданными начальными условиями. Вследствие теоремы единственности и специального вида первого и четвертого уравнений в (12) решение $\psi_1(t)$ ($\psi_4(t)$) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда $\psi_1(t_1) = 0$ ($\psi_4(t_4) = 0$) для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}$ ($t_4 \in \mathbb{R}$). Аналогично с использованием второго равенства в (12) доказывается второе утверждение предложения 1.

Следствие 1. Если $\psi_2(t_0) = 0$ и не $\psi_2(t) \equiv 0$, то $\psi_2(t) \neq 0$ для $t \neq t_0$, близких к t_0 , при разных знаках для $t < t_0$ и $t > t_0$.

§ 3. Ковекторные функции индуцированной субримановой метрики на Вселенной Дефрiza

Согласно предложению 1 рассмотрим четыре возможных случая:

1) $\varphi_4 = 0, \varphi_1 = 0$; 2) $\varphi_4 = 0, \varphi_1 \neq 0$; 3) $\varphi_4 \neq 0, \varphi_1 = 0$; 4) $\varphi_4 \neq 0, \varphi_1 \neq 0$.

1. В этом случае вследствие (12) и предложения 1

$$\psi_i(t) \equiv \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1. \quad (16)$$

2. В этом случае $\psi_3(t) \equiv \varphi_3$, $|\varphi_3| < 1$,

$$\psi_2' = -\psi_1^2 = \psi_2^2 - (1 - \varphi_3^2), \quad \frac{d\psi_2}{\psi_2^2 - (1 - \varphi_3^2)} = dt,$$

$$t + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\psi_2 - a}{\psi_2 + a} \right| = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a - \psi_2}{a + \psi_2} \right), \quad a := \sqrt{1 - \varphi_3^2}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\psi_2(t) = \frac{a(1 - e^{2a(t+c)})}{1 + e^{2a(t+c)}} = -a \tanh(a(t+c)), \quad \varphi_2 = -a \tanh(ac); \quad (17)$$

$$\psi_1(t) = \pm \sqrt{a^2 - \psi_2^2(t)} = \frac{\pm a}{\cosh(a(t+c))}, \quad \varphi_1 = \frac{\pm a}{\cosh(ac)}. \quad (18)$$

В случаях 3 и 4, применяя первое и последнее равенства в (12), закон сохранения (14) и первое равенство в (15), получаем

$$\psi_1(t) = \varphi_1 \sqrt{\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}}, \quad (\psi_4'(t))^2 = 4\psi_4^2 \psi_2^2, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\psi_4'(t)}{2\psi_4(t)} \right)^2 = \psi_2^2(t) = A - B\psi_4(t) - \psi_4^2(t), \quad (20)$$

$$\psi_4'(t) = 2\psi_4(t)\varepsilon_2(t)\sqrt{A - B\psi_4(t) - \psi_4^2(t)}, \quad \varepsilon_2(t) = \text{sign}(\psi_2(t)), \quad (21)$$

$$A = 1 - (\varphi_3 - \varphi_4)^2, \quad B = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_4} + 2(\varphi_3 - \varphi_4), \quad A - B\varphi_4 - \varphi_4^2 = \varphi_2^2 \geq 0. \quad (22)$$

Лемма 1. $B^2 + 4A \geq 0$. При этом функция $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем тогда и только тогда, когда $B^2 + 4A > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \varphi_1^2/\varphi_4$. Тогда

$$\begin{aligned} B^2 + 4A &= (\alpha + 2(\varphi_3 - \varphi_4))^2 + 4A = \alpha^2 + 4\alpha(\varphi_3 - \varphi_4) + 4 \\ &= (\alpha + 2\varphi_3)^2 + 4(1 - \varphi_1^2 - \varphi_3^2) = (\alpha + 2\varphi_3)^2 + 4\varphi_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\varphi_2 = 0, \quad 2\varphi_3 = -\alpha = \frac{-\varphi_1^2}{\varphi_4} \iff \varphi_1^2 + 2\varphi_3\varphi_4 = 0,$$

т. е. $\psi_2(t)$ — тождественный нуль вследствие предложения 1.

Следствие 2. Если $A > 0$ или $A = 0, B \neq 0$, то $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем.

Следствие 3. Если $A > 0$ и $\varphi_2 = 0$, то $\psi_2(t) \neq 0$ для $t \neq 0$, близких к 0, имея при этом значения разных знаков при $t > 0$ и $t < 0$.

Доказательство. Вытекает из следствия 2, леммы 1 и (12).

Лемма 2. (1) $A - B\psi_4(t) > 0$.

(2) Если $A \leq 0$, то $B \neq 0$, $\text{sign}(B) = -\text{sign}(\varphi_4)$.

Доказательство. (1) Вследствие (20) $A - B\psi_4(t) = \psi_2^2(t) + \psi_4^2(t) > 0$.

(2) Пусть $A \leq 0$. Тогда вследствие (22)

$$-B\varphi_4 > 0, \quad B \neq 0, \quad \text{sign}(B) = -\text{sign}(\varphi_4).$$

Пусть $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем. Перепишем ОДУ (21) в виде

$$\xi' = 2 \left(\xi - \frac{B}{2} \right) \varepsilon_2 \sqrt{A + \frac{B^2}{4} - \xi^2}, \quad \xi = \psi_4 + \frac{B}{2}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{d\xi}{\left(\xi - \frac{B}{2} \right) \varepsilon_2 \sqrt{A + \frac{B^2}{4} - \xi^2}} = 2 dt. \quad (23)$$

Замечание 1. Уравнение (23) имеет смысл, если $\psi_2(t) \neq 0$. На основании следствия 1 нули функции $\psi_2(t)$ изолированы. Решив (23) при $\psi_2(t) \neq 0$, переходом к пределу найдем решение (23) и при $\psi_2(t) = 0$.

К решению (23) можно применить один из табличных неопределенных интегралов 2.56.4, 2.56.6, 2.56.7, 2.56.8 в [12]:

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + b)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = \frac{-1}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{b\xi + a^2 + (a^2 - b^2)^{1/2}(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi + b} \right|, \quad a^2 > b^2. \quad (24)$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + b)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{1/2}} \arcsin \frac{a^2 + b\xi}{a|\xi + b|}, \quad a^2 < b^2.$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + a)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right)^{1/2}, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi - a)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \left(\frac{a + \xi}{a - \xi} \right)^{1/2}, \quad a > 0.$$

У нас $a := \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + 4A}$, $b := -B/2$, $a^2 - b^2 = A$.

В случае 3 $\xi = \psi_3$, $b = -B/2 = \varphi_4 - \varphi_3$, $a^2 - b^2 = A$, $a = 1$.

Если $A > 0$, применяем интеграл 2.56.4, если $A < 0$, то интеграл 2.56.6, если $A = 0$ и $a = b > 0$, то 2.56.7, если $a = -b > 0$, то 2.56.8.

Группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой $(\cdot, \cdot)$ однозначно определяется скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на ее алгебре Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$. Тройка $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot))$ называется *метрической алгеброй Ли*. *Изоморфизмом метрических алгебр* называется изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий скалярное произведение.

Дословно так же можно определить *метрические (суб)лоренцевы и субримановы алгебры Ли* и их изоморфизмы. Важно то, что при всех изоморфизмах таких метрических алгебр Ли ОДУ (8), (9) и их аналоги для экстремалей и геодезических соответствующих групп Ли с левоинвариантной метрикой сохраняются.

Вследствие (6) в нашем случае все автоморфизмы метрической субримановой алгебры Ли порождаются преобразованиями базиса

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \rightarrow (-e_1, e_2, e_3, e_4), \quad (e_1, e_2, e_3, e_4) \rightarrow (e_1, e_2, -e_3, -e_4).$$

Они индуцируются изометричными автоморфизмами группы (G_4, d) :

$$(x, y, u, v) \rightarrow (-x, y, u, v), \quad (x, y, u, v) \rightarrow (x, y, -u, -v).$$

Будем считать, что $\varphi_4 > 0$ в I, II, III и $\varphi_4 < 0$ в IV.

I. $A > 0$. Применяя первый неопределенный интеграл, получаем

$$2(t + c) = \frac{-1}{\sqrt{A}} \ln \left| \frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4} \right|.$$

На основании (20)

$$\begin{aligned} b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2} &= \frac{1}{2}(-B\psi_4 + A + A + 2\sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(\psi_4^2 + \psi_2^2 + 2\sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2} + A) = \frac{1}{2}(\psi_4^2 + (\psi_2 + \sqrt{A})^2) \geq \frac{\psi_4^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Поэтому на основании предыдущего равенства

$$\begin{aligned} -2\sqrt{A}(t + c) &= \ln \left(\frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4} \right), \\ \exp(-2\sqrt{A}(t + c)) &= \frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4}, \\ \psi_4(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b) - A &= \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Возводя в квадрат, приводя подобные и сокращая на ψ_4 , получаем

$$\begin{aligned} \psi_4[(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b)^2 + A] &= 2A \exp(-2\sqrt{A}(t + c)), \\ \psi_4(t) &= \frac{2A \exp(-2\sqrt{A}(t + c))}{(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b)^2 + A}. \end{aligned} \quad (26)$$

II. $A < 0$. Применяя второй неопределенный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{A + b\psi_4(t)}{a\psi_4(t)} \right) &= 2\sqrt{-A}(t + c), \quad \frac{A + b\psi_4(t)}{a\psi_4(t)} = \sin(2\sqrt{-A}(t + c)), \\ \psi_4(t) &= \frac{-A}{b - a \sin(2\sqrt{-A}(t + c))}. \end{aligned} \quad (27)$$

Функция $\psi_4(t)$ определена корректно, так как $|b| > a$.

Заметим, что из (27) и четвертого равенства в (12) следует

$$\psi_2(t) = \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t + c))}{b - a \sin(2\sqrt{-A}(t + c))},$$

с выбирается так, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\sin(2\sqrt{-A}(c)) = \frac{A + b\varphi_4}{a\varphi_4}, \quad \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{b - a \sin(2\sqrt{-A}c)} = \varphi_2.$$

Пусть $\psi_2(t) \neq 0$, $A = 0$. По лемме 2

$$a = b = -B/2 > 0 \iff \varphi_4 > 0, \quad a = -b = B/2 \iff \varphi_4 < 0.$$

III. Применяем третий интеграл:

$$-\varepsilon_2 \left(\frac{a - \xi(t)}{a + \xi(t)} \right)^{1/2} = 2a(t + c).$$

Здесь выражение в левой части равенства всегда определено, так как

$$a + \xi(t) = \psi_4(t) > 0, \quad \frac{a - \xi(t)}{a + \xi(t)} = \frac{a^2 - \xi^2(t)}{(a + \xi(t))^2} = \frac{\psi_2^2(t)}{(a + \xi(t))^2}.$$

Пусть $\varepsilon := 2a(t + c)$. Тогда

$$\sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} = -\varepsilon_2 \varepsilon, \quad \xi = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon^2},$$

$$\psi_4(t) = \xi + a = \frac{2a}{1 + 4a^2(t + c)^2}, \quad c = \frac{\pm 1}{2a} \sqrt{\frac{2a - \varphi_4}{\varphi_4}}, \quad \varphi_4 > 0. \quad (28)$$

IV. С четвертым неопределенным интегралом имеем аналогично:

$$-\varepsilon_2 \left(\frac{a + \xi(t)}{a - \xi(t)} \right)^{1/2} = 2a(t + c), \quad \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} = -\varepsilon_2 \varepsilon, \quad \xi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon^2},$$

$$\psi_4(t) = \xi - a = \frac{-2a}{1 + 4a^2(t + c)^2}, \quad c = \frac{\pm 1}{2a} \sqrt{\frac{-(2a + \varphi_4)}{\varphi_4}}, \quad \varphi_4 < 0. \quad (29)$$

3. В этом случае $\psi_2^2(t) + \psi_3^2(t) \equiv 1$ и вследствие (12)

$$\psi_2'(t) = -2\psi_4(t)\psi_3(t), \quad \psi_3'(t) = 2\psi_2(t)\psi_4(t).$$

Отсюда видно, что тождество $\psi_2(t) \equiv 0$ невозможно.

4(а). Предположим, что $\psi_2(t) \equiv 0$. Вследствие (12)

$$\psi_i(t) \equiv \varphi_i, \quad i = 1, 3, 4, \quad 1 - \varphi_3^2 (= \varphi_1^2) = -2\varphi_4\varphi_3.$$

Решая последнее алгебраическое уравнение, получаем $\varphi_3 = \varphi_4 \pm \sqrt{1 + \varphi_4^2}$, причем $|\varphi_3| \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_3 = \varphi_4 - \varepsilon_4 \sqrt{1 + \varphi_4^2}, \quad \varepsilon_4 = \text{sign}(\varphi_4). \quad (30)$$

§ 4. Геодезические индуцированной субримановой метрики на Вселенной Дефриза

Теорема 1. В случае 1 нормальные геодезические рассматриваемой задачи с началом $(0, 1, 0, 0)$ имеют одну из двух форм

1а) $\gamma(t) = (0, 1, \mp 2t, \pm t)$;

1б) $\gamma(t) = (0, e^{\varphi_2 t}, -2\varphi_3 t, (\varphi_3/2\varphi_2)(e^{2\varphi_2 t} - 1))$, $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (11) и (16).

Теорема 2. В случае 2 нормальные геодезические рассматриваемой задачи с началом $(0, 1, 0, 0)$ имеют вид

$$y(t) = \frac{\cosh(ac)}{\cosh(a(t+c))}, \quad a = \sqrt{1 - \varphi_3^2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pm a}{\cosh(ac)}; \quad (31)$$

$$x(t) = \pm \cosh(ac)(\tanh(a(t+c)) - \tanh(ac)), \quad \varphi_2 = -a \tanh(ac); \quad (32)$$

$$u(t) = -2\varphi_3 t, \quad v(t) = \frac{\varphi_3 \cosh^2(ac)}{a}(\tanh(a(t+c)) - \tanh(ac)). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (17) и второго равенства в (11)

$$(\ln y)'(t) = \frac{y'}{y}(t) = \psi_2(t) = -a \tanh(a(t+c)), \quad a = \sqrt{1 - \varphi_3^2},$$

откуда следует (31). Из (31), (18) и первого равенства в (11) следует (32); (33) вытекает из (31) и последних двух формул в (11).

Следствие 4. Геодезические из теорем 1(b) и 2 при $\varphi_3 = 0$ дают все геодезические в плоскости Лобачевского L^2 :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

с началом $(0, 1, 0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Сначала докажем, что если $\varphi_3 = 0$, то указанные геодезические — геодезические в плоскости Лобачевского.

Утверждение о геодезической (b) хорошо известно.

Если $\varphi_3 = 0$, то

$$a = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pm 1}{\cosh(c)}, \quad \varphi_2 = -\tanh(c);$$

$$y(t) = \frac{\cosh(c)}{\cosh(t+c)} = \frac{1}{\cosh t + \tanh(c) \sinh t} = \frac{1}{\cosh t - \varphi_2 \sinh t};$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \cosh(c)(\tanh(t+c) - \tanh(c)) = \frac{\pm \cosh(c) \sinh t}{\cosh(t+c) \cosh(c)} \\ &= \frac{\varphi_1 \sinh t}{\cosh t - \varphi_2 \sinh t}. \end{aligned}$$

Полученные равенства для $y(t)$ и $x(t)$ совпадают при взаимной перемене их ролей с формулами для $x(t)$ и $y_1(t)$ в (26) для $n = 2$ из [7], где были найдены геодезические пространств Лобачевского как некоммутативных групп Ли (не допускающих левоинвариантных субримановых метрик) с левоинвариантной римановой метрикой. Заметим, что при $n = 2$ это единственная связная некоммутативная двумерная группа Ли, изоморфная подгруппе $G_2 := \{u = v = 0\}$ группы Ли G_4 .

II. Легко вычислить, что для полученных выражений $y(t)$ и $x(t)$

$$y'(0) = \varphi_2, \quad x'(0) = \varphi_1, \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

Теорема 3. *Никакой нетривиальный отрезок строго аномальной экстремали $\gamma(t) = (t, 1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, не является кратчайшей. Следовательно, строго аномальная экстремаль — не геодезическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — горизонтальная прямая $y = 1$ в плоскости L^2 . Поэтому, как хорошо известно, концы каждого ее нетривиального отрезка (параметризованного длиной дуги t !) можно соединить более короткой, чем отрезок, кратчайшей в L^2 . На основании следствия 4 эта кратчайшая — левый сдвиг по подгруппе $G_2 \subset G_4$ некоторого отрезка геодезической из следствия 4.

3, 4. На основании (11) и четвертого уравнения в (12)

$$y(t) = \sqrt{\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}}; \quad (34)$$

$$x(t) = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} \int_0^t \psi_4(\tau) d\tau := \frac{\varphi_1}{\varphi_4} I_1(t); \quad (35)$$

$$u(t) = -2 \left((\varphi_3 - \varphi_4)t + \int_0^t \psi_4(\tau) d\tau \right); \quad (36)$$

$$v(t) = \frac{1}{\varphi_4} \int_0^t \psi_4(\tau)(\psi_4(\tau) + \varphi_3 - \varphi_4) d\tau := \frac{1}{\varphi_4} (I_2(t) + (\varphi_3 - \varphi_4)I_1(t)). \quad (37)$$

I. Случай $A > 0$:

$$I_1(t) = -\operatorname{arctg} \frac{\exp(-2\sqrt{A}(t+c)) - b}{\sqrt{A}} + \operatorname{arctg} \frac{\exp(-2\sqrt{A}c) - b}{\sqrt{A}}. \quad (38)$$

Применяем интеграл 2.13.6 из [12] для I_2 к функции (26):

$$I_2(t) = bI_1(t) + \sqrt{A} \left(\frac{A - b\xi}{\xi^2 + A} - \frac{A - b\xi_0}{\xi_0^2 + A} \right), \quad (39)$$

где $\xi = \exp(-2\sqrt{A}(t+c)) - b$, $\xi_0 = \exp(-2\sqrt{A}c) - b$.

II. Случай $A < 0$. Применяем интегралы 5.12.5 и 5.12.1 из [12]:

$$J_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c)) - a}{\sqrt{-A}} - \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}c) - a}{\sqrt{-A}}, \quad (40)$$

$$J_2(t) = bJ_1(t) - \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t+c))}{2(b - a \sin(2\sqrt{-A}(t+c)))} + \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{2(b - a \sin(2\sqrt{-A}c))}. \quad (41)$$

В случае 3 эти интегралы имеют вид

$$J_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c)) - 1}{\sqrt{-A}} - \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}c) - 1}{\sqrt{-A}}, \quad (42)$$

$$J_2(t) = bJ_1(t) - \frac{\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t+c))}{2(b - \sin(2\sqrt{-A}(t+c)))} + \frac{\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{2(b - \sin(2\sqrt{-A}c))}. \quad (43)$$

В формулах (40) и (42) используется непрерывная ветвь $\operatorname{arctg}(\cdot)$, принимающая значения в интервале $(-\pi/2 + z\pi, \pi/2 + z\pi)$, на соответствующем интервале непрерывности функции $b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c))$; $z \in \mathbb{Z}$ выбирается с учетом непрерывности и нормировки $J_1(0) = 0$.

III, IV. Случай $A = 0$:

$$K_1(t) = \pm \operatorname{arctg}(2a(t+c)) \mp \operatorname{arctg}(2ac). \quad (44)$$

Здесь верхний знак соответствует формуле (28), нижний знак — формуле (29). Применяем интеграл 2.9.7 из [12]:

$$K_2(t) = a(\operatorname{arctg}(2a(t+c)) - \operatorname{arctg}(2ac)) + \frac{2a^2(t+c)}{1+(2a(t+c))^2} - \frac{2a^2(c)}{1+(2ac)^2}. \quad (45)$$

В случае 3 эти интегралы имеют вид

$$K_1(t) = \pm \operatorname{arctg}(2(t+c)) \mp \operatorname{arctg}(2c), \quad (46)$$

$$K_2(t) = \operatorname{arctg}(2(t+c)) - \operatorname{arctg}(2c) + \frac{2(t+c)}{1+(2(t+c))^2} - \frac{2c}{1+(2c)^2}. \quad (47)$$

В случаях $A < 0$ и $A = 0$ надо в равенствах (35), (36), (37) заменить I_1 , I_2 соответственно на J_1 , J_2 и K_1 , K_2 .

4(а). Здесь $\psi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv \varphi_1$, $\psi_3(t) \equiv \varphi_3$, где φ_1 , φ_3 — произвольные ненулевые числа такие, что $\varphi_1^2 + \varphi_3^2 = 1$. Вследствие (11)

$$\gamma(t) = (\varphi_1 t, 1, -2\varphi_3 t, \varphi_3 t). \quad (48)$$

Предложение 2. Геодезические, являющиеся 1-параметрическими подгруппами, образуют множество, состоящее из двух подмножеств, диффеоморфных бесконечным двумерным конусам с вершинами в единице группы. Эти два подмножества пересекаются по общей образующей, 1-параметрической подгруппе $\exp(te_3) = (0, 1, -2t, t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Одно из этих подмножеств составляют геодезические из теоремы 1, другое — геодезические (48) вместе с их предельной геодезической $\exp(te_3)$.

К большому сожалению пришлось отказаться от формулировки теоремы о геодезических в случаях 3 и 4, потому что даже со ссылками на полученные формулы она была бы очень громоздкой.

Теорема 4. Пространство (G_4, d) метрически полно. Как следствие, все геодезические продолжимы на всю ось параметра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Геодезические — решения систем ОДУ (11), (12) с начальными данными (13) и законом сохранения (14). Поэтому достаточно доказать метрическую полноту пространства (G_4, d) .

Вследствие теоремы Рашевского — Чжоу метрическая топология пространства (G_4, d) совпадает с естественной топологией многообразия G_4 . Ясно, что наша субриманова структура на G_4 индуцируется левоинвариантной римановой структурой на G_4 с ортонормальным базисом левоинвариантных векторных полей (X_1, X_2, X_3, X_4) . Если d_1 — соответствующая левоинвариантная риманова метрика, то $d_1 \leq d$. Пространство (G_4, d_1) метрически полное, так как известно, что всякая левоинвариантная риманова метрика на связной группе Ли полна. Следовательно, и (G_4, d) метрически полное.

Благодарность. Автор благодарит И. А. Зубареву за помощь в работе и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Defrise L. Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les espaces lorentziens. Bruxelles: Thèse, Université Libre de Bruxelles, 1969.
2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt Ed. Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.
3. Podolský J. Exact non-singular waves in the anti-de Sitter Universe // General Relativity and Gravitation. 2001. V. 33, N 6. P. 1093–1113.
4. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
5. Berestovskii V. N., Zubareva I. A. Geodesics and isometry group of Defrise Universe as a Lie group with left-invariant Lorentz metric // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 3. P. 1001–1014.
6. Берестовский В. Н. О тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля Вселенной Деффриза // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 818–827.
7. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышев. сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 43–64.
8. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. 1963. № 1. С. 114–123.
9. Винберг Э. Б., Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли. 3. М.: ВИНТИ, 1990. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 41).
10. Liu W., Sussmann H. Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions. Mem. Am. Math. Soc. 1995. V. 118, N 564.
11. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.
12. Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 25 февраля 2026 г.

После доработки 19 июня 2026 г.

Принята к публикации 20 июля 2026 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

vberestov@inbox.ru

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С КРИТИЧЕСКИМ РОСТОМ
ПРАВОЙ ЧАСТИ В ЛИПШИЦЕВЫХ
ОБЛАСТЯХ НА МНОГООБРАЗИИ
Д. В. Быстров

Аннотация. Рассматривается задача Неймана в области на многообразии для уравнения с оператором p -Лапласа в главной части и с критическим ростом правой части. Даны точные достаточные условия существования решения с наименьшей энергией при требовании от области только локальной выпуклости, а также доказана теорема существования на сфере. Ранее подобные результаты были известны для областей с гладкой или пустой границей.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.507

Ключевые слова: квазилинейные уравнения на многообразии, задача Неймана, критический показатель, p -лапласиан, липшицева область, выпуклые области.

1. Введение

Пусть (M, g) — замкнутое n -мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — область на M со строго липшицевой границей.

В работе изучается вопрос о существовании решения с наименьшей энергией задачи Неймана

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1)$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$ — оператор p -Лапласа, $1 < p < n$ и $p^* = \frac{np}{n-p}$ — критический показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Функционал энергии для задачи (1) имеет вид

$$\mathbf{E}_\Omega[u] := \frac{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)}} = \frac{\left(\int_\Omega |Du|^p + \int_\Omega |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_\Omega |u|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}}, \quad u \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Несложно видеть, что критические точки функционала (2) являются (после подходящей перенормировки) слабыми решениями задачи (1). В частности, если достигается инфимум

$$\lambda(p, \Omega) := \inf_{v \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathbf{E}_\Omega[v], \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН) и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

то задача (1) имеет слабое положительное решение (ср., например, [1, лемма 1.1]), которое будем называть *решением с наименьшей энергией*. Однако вложение $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$ некомпактно и потому вопрос о достижимости инфимума $\lambda(p, \Omega)$ нетривиален.

Хорошо известно, что если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то инфимум на финитных функциях

$$\inf_{v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|v\|_{L_{p^*}(\Omega)}^p}$$

не достигается, не зависит от Ω и равен $\frac{1}{K(n,p)^p}$, где

$$K(n,p) = \sup_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)}}{\|Dv\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}} = \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} k(n,p), \quad (4)$$

а

$$k(n,p) = \sup_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr \right)^{\frac{1}{p^*}}}{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v'(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}}} = n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B} \left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'} + 1 \right)^{-\frac{1}{n}}$$

— точная константа в неравенстве Блисса [2]. Здесь и далее $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный к p показатель, а $\mathcal{B}$ — бета-функция Эйлера. Отметим, что константа $K(n,p)$ в (4) достигается только на нефинитных радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := (\varepsilon + r^{p'})^{1-\frac{n}{p}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Очевидно, что $u(x) \equiv 1$ является решением задачи (1), однако, как показано в [3, предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.

Решения с наименьшей энергией задачи (1) при $p = 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) изучались в [4, 5]. Было показано, что такое решение существует в любой области с границей класса $\mathcal{C}^2$.

Результат [4, 5] был обобщен в работе [6], где получено, что решение с наименьшей энергией задачи (1) для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ существует при $1 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$. В этой же работе показано, что условие на гладкость границы существенно: если Ω — многогранник в $\mathbb{R}^n$ и $1 < p < n$, то в растянутой области

$$\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$$

при достаточно больших $R > 0$ решения с наименьшей энергией задачи (1) не существует.

Более того, в работе [6] также рассматривался случай, когда Ω само является многообразием без края, т. е. $\Omega = M$. Было получено, что если $n \geq 5$ и на Ω есть точка с положительной скалярной кривизной, то решение с наименьшей энергией задачи (1) существует при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$.

Стоит также отметить, что если $n \geq 2$, $1 < p < n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область со строго липшицевой границей, то решение с наименьшей энергией в Ω_R всегда существует для достаточно малого $R > 0$ (ср. [3, теорема 1.1]).

В настоящей работе будем изучать существование решения с наименьшей энергией задачи (1) в области Ω без условия гладкости $\partial\Omega$, накладывая вместо этого условие локальной выпуклости (см. определение 1.1).

Введем некоторые обозначения. Через $T_y M$ обозначим касательное пространство к M в точке y .

Для $y \in M$ и $r > 0$ будем обозначать геодезические шары и сферы как

$$B_r(y) := \{x \in M : \text{dist}_g(x, y) < r\}, \quad S_r(y) := \{x \in M : \text{dist}_g(x, y) = r\}.$$

Для евклидовых шаров в пространстве размерности n будем использовать обозначение $\mathbb{B}_r^n(y)$ и будем опускать в обозначениях y , если $y = 0$, и r , если $r = 1$.

Мы всегда считаем, что радиус r достаточно мал, так что экспоненциальное отображение $\exp_y : T_y M \supset \mathbb{B}_r^n \rightarrow B_r(y)$ является диффеоморфизмом. Для $x \in B_r(y)$ введем обозначение для прообраза $x_y = \exp_y^{-1}(x) \in T_y M$ и нормальные координаты как декартовы координаты x_y в $T_y M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем говорить, что Ω локально выпукло, если для любой точки $y \in \partial\Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что множество

$$\mathbb{V}_\delta(y) := \exp_y^{-1}(B_\delta(y) \cap \Omega) \subset T_y M$$

выпукло.

В дальнейшем всегда считаем, что Ω локально выпукло. Также везде будем считать, что $\partial\Omega \neq \emptyset$, поскольку, как замечено выше, случай $\partial\Omega = \emptyset$ был рассмотрен в работе [6].

Теперь можно сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1.1. Пусть $n \geq 5$. Пусть Ω — локально выпуклая область на сфере $\mathbb{S}_R^n$. Тогда существует $\beta = \beta(\Omega) > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум $\lambda(p, \Omega)$ достигается.

Следующая теорема показывает, что результат теоремы 1.1 является точным. Пусть $\Omega = \mathbb{S}_{R,+}^n$ — полусфера радиуса R .

Теорема 1.2. Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$ не достигается.

Через Vol_g или просто через $|\cdot|_n$ будем обозначать меру объема на (M, g) . Известно (см., например, [7]), что при интегрировании функции в малой окрестности точки $y \in M$ форма объема имеет вид

$$d\text{Vol}_g = \left(1 - \frac{1}{6}(\text{Ric}_y)_{ij}x^i x^j + o(|x|^2)\right) dx, \quad (6)$$

где Ric_y — тензор Риччи в точке y .

Запись $o_\rho(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Все положительные константы, значение которых для нас несущественно, обозначаются буквой C . Зависимость этих констант от параметров отмечается в скобках.

Опишем структуру данной статьи. В разд. 2 выводятся некоторые свойства локально выпуклых областей на многообразии. В разд. 3 выводится достаточное условие достижимости инфимума в (3). В разд. 4 доказывается основной результат — теорема 1.1, а также сформулировано ее обобщение на случай более общего многообразия M . В разд. 5 доказывается теорема 1.2, а также точность результата из [6, теорема 4.1].

2. Локально выпуклые области

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Телесным углом* Ω в точке $y \in \overline{\Omega}$ будем называть величину

$$\alpha(y) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|S_r(y) \cap \Omega|_{n-1}}{r^{n-1}}. \quad (7)$$

Очевидно, что для $y \in \Omega$ имеем $\alpha(y) = \omega_{n-1}$. Покажем, что предел (7) определен и для любой точки $y \in \partial\Omega$. Из формулы (6) видно, что

$$\alpha(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \mathbb{V}_\delta(y)|_{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \mathbb{S}^{n-1} \cap \frac{1}{r} \mathbb{V}_\delta(y) \right|_{n-1}. \quad (8)$$

Касательный конус к множеству $\mathbb{V}_\delta(y)$ в начале координат существует в силу выпуклости этого множества и может быть определен как

$$\mathbb{K}(y) := \bigcup_{r>0} \frac{1}{r} \mathbb{V}_\delta(y).$$

Поэтому, пользуясь непрерывностью снизу меры Лебега, получаем, что предел в (8) достигается и

$$\alpha(y) = |\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)|_{n-1}. \quad (9)$$

Несложно видеть, что для локально выпуклых Ω и $y \in \partial\Omega$ имеем $\alpha(y) \leq \frac{\omega_{n-1}}{2}$. А если $y \in \partial\Omega$ и y — точка гладкости $\partial\Omega$, то $\alpha(y) = \frac{\omega_{n-1}}{2}$.

Определим теперь следующую величину:

$$\alpha_\Omega := \inf_{y \in \partial\Omega} \alpha(y). \quad (10)$$

В [8, лемма 6.1] показано, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, то инфимум в (10) достигается. Для удобства читателя приведем другое наглядное доказательство и обобщим его на случай локально выпуклой области на многообразии.

Легко видеть, что достижимость α_Ω вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Функция $\alpha : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, т. е. для любого $y \in \partial\Omega$*

$$\alpha(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y, x \in \partial\Omega} \alpha(x). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму сначала для случая, когда Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Мы утверждаем, что

$$\alpha(y) = -\omega_{n-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q = \int_{\partial\Omega} \frac{(q - y, \vec{n}_q)}{|q - y|^n} dS_q,$$

где

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \end{cases}$$

— фундаментальное решение оператора $-\Delta$. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \Delta \mathcal{E}(y - q) dq = \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q + \int_{\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q \\ &= -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{(q - y, \vec{n}_q)}{|q - y|^n} dS_q + \frac{|\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}{|\mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q$ сходится в смысле главного значения к $\alpha(y)$. Но он сходится и в обычном смысле по теореме о монотонной сходимости ввиду неотрицательности интегранта:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)}(q) dS_q = \alpha(y),$$

где χ_S обозначает характеристическую функцию множества S .

Полунепрерывность снизу для α следует из леммы Фату:

$$\alpha(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q \leq \liminf_{x \rightarrow y} \int_{\partial\Omega} \frac{(q-x, \vec{n}_q)}{|q-x|^n} dS_q = \liminf_{x \rightarrow y} \alpha(x).$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда Ω не обязательно плоское. Фиксируем $y \in \partial\Omega$. Пусть $x \in B_r(y) \cap \partial\Omega$. Через $\tilde{\alpha}(x_y)$ обозначим телесный угол в точке x_y на $\partial\mathbb{V}_r(y) \subset T_y M$. Из доказанного выше следует, что

$$\tilde{\alpha}(0) \leq \liminf_{x_y \rightarrow 0, x_y \in \partial\mathbb{V}_r(y)} \tilde{\alpha}(x_y).$$

По формуле (9) имеем $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(y)$, поэтому достаточно показать, что если x и y близки, то телесный угол $\alpha(x)$ для Ω мало отличается от телесного угла $\tilde{\alpha}(x_y)$ для $\mathbb{V}_r(y)$.

Пользуясь, например, [9, 12.6.1], можно разложить компоненты метрического тензора в нормальных координатах следующим образом:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2).$$

Поэтому для всех $x \in B_r(y)$ и всех $\xi \in T_x M$ имеем в нормальных координатах

$$(1 - Cr^2)\xi^i \xi^i \leq g_{ij} \xi^i \xi^j \leq (1 + Cr^2)\xi^i \xi^i.$$

Отсюда получаем, что отношение телесного угла касательного конуса $\mathbb{K}(x)$ и касательного конуса в x_y для $\mathbb{V}_r(y)$ равно $1 + O(r^2)$, значит, $\tilde{\alpha}(x_y) = (1 + O(r^2)) \cdot \alpha(x)$.

Возьмем $x_k \in \partial\Omega$, $x_k \rightarrow y$. С какого-то момента x_k лежат в $B_r(y)$, поэтому можно определить $(x_k)_y$, причем $(x_k)_y \rightarrow 0$. Имеем

$$\alpha(y) = \tilde{\alpha}(0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}((x_k)_y) = (1 + O(r^2)) \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha(x_k).$$

Ввиду того, что r можно взять сколь угодно малым, получаем (11). $\square$

Лемма 2.2. Пусть $y \in \partial\Omega$ и $\varepsilon > 0$. Для любого достаточно малого $\rho_0 > 0$ существуют $0 < \rho_1 < \rho_0$ и ограниченная выпуклая область $\mathbb{U} \subset T_y M$ такие, что

$$\mathbb{V}_{\rho_1}(y) \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{V}_{\rho_0}(y) \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(y) - \varepsilon.$$

PROOF. Положим $\mathbb{W} = \mathbb{V}_{\rho_0}(y)$ и отождествим точку y с началом координат в $T_y M$. Через $\alpha_{\mathbb{W}}(z)$ обозначим телесный угол $\mathbb{W}$ в точке $z \in \partial\mathbb{W}$. Согласно (9) имеем $\alpha_{\mathbb{W}}(0) = \alpha(y)$. Из евклидовой части доказательства леммы 2.1 следует, что функция $\alpha_{\mathbb{W}}$ полунепрерывна снизу. Поэтому существует $r \in (0, \rho_0)$ такое, что $\alpha_{\mathbb{W}}(z) \geq \alpha(y) - \varepsilon$ для всех $z \in \partial\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_r^n$.

Воспользуемся стандартным локальным сглаживанием границы выпуклого тела. Оставляя $\mathbb{W}$ неизменным в достаточно малой окрестности нуля и сглаживая его границу вне этой окрестности, можно построить ограниченную выпуклую область $\mathbb{U}$ и число $\rho_1 \in (0, r)$ так, что

$$\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_{\rho_1}^n \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{W} \cap \mathbb{B}_r^n,$$

причем для каждой негладкой точки $z \in \partial\mathbb{U}$ области $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ совпадают в некоторой окрестности точки z . Такое сглаживание получается, например, локальной регуляризацией выпуклой определяющей функции с помощью регуляризованного максимума и гладкой строго выпуклой срезающей функции, причем параметры регуляризации выбираются так, чтобы исходное тело не изменялось в $\mathbb{B}_{\rho_1}^n$, а новая часть границы была гладкой и лежала в $\mathbb{B}_r^n$.

Если точка $z \in \partial\mathbb{U}$ не является гладкой, то в силу выбора r справедливы соотношения $\alpha_{\mathbb{U}}(z) = \alpha_{\mathbb{W}}(z) \geq \alpha(y) - \varepsilon$. В гладкой точке $z \in \partial\mathbb{U}$ имеем $\alpha_{\mathbb{U}}(z) = \omega_{n-1}/2 \geq \alpha(y)$. Таким образом, $\alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(y) - \varepsilon$. Наконец, из $\rho_1 < \rho_0$ следует $\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_{\rho_1}^n = \mathbb{V}_{\rho_1}(y)$. $\square$

3. Достаточное условие достижимости инфимума в (3)

Ключевой в этом разделе является теорема 3.1, которая дает достаточное условие достижимости инфимума в (3). Для ее доказательства сначала введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{G}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, представляющей собой объединение двух многообразий Γ_0 и Γ_1 , где Γ_0 имеет положительную $(n-1)$ -мерную меру Хаусдорфа. Изопериметрическая константа $\mathbb{G}$ относительно Γ_1 (см. [10]) определяется как

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \sup_{\mathbb{E}} \frac{|\mathbb{E}|^{1-1/n}}{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})},$$

где супремум берется по всем измеримым подмножествам $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, для которых $\partial\mathbb{E} \cap \Gamma_0$ не содержит множеств положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, а $P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})$ обозначает периметр $\mathbb{E}$ относительно $\mathbb{G}$ (см. [10, 11])

$$P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{E}} \operatorname{div} \psi \, dx \right| : \psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{G})]^n, |\psi| \leq 1 \right\}.$$

В дальнейшем всегда для $\mathbb{V}_\rho(y)$ будем считать, что $\Gamma_0 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \cap \mathbb{S}_\rho^{n-1}$ и $\Gamma_1 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \setminus \mathbb{S}_\rho^{n-1}$.

Для измеримой функции u , определенной в $\mathbb{G}$, определим функцию распределения

$$\mu(t) = |\{x \in \mathbb{G} : |u(x)| > t\}|_n, \quad t \geq 0,$$

и монотонную перестановку

$$u^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\}.$$

Пусть $(r, \nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, $\nu_i \in [0, \pi]$ для $1 \leq i \leq n-2$ и $\nu_{n-1} \in [0, 2\pi]$. Следуя [12], для угла $\beta \in [0, 2\pi]$ и радиуса $R > 0$ определим сектор

$$\Sigma(\beta, R) = \{x \in \mathbb{B}_R^n : \nu_i \in [0, \pi], \nu_{n-1} \in [0, \beta]\}.$$

Через $\mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})$ обозначим сектор $\Sigma(\beta, R)$, имеющий ту же меру, что и $\mathbb{G}$. Для функции u определим β -симметризацию как

$$\mathcal{C}_\beta u(x) := u^*(|\Sigma(\beta, |x|)|_n), \quad x \in \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G}).$$

Для удобства обозначим $\widehat{\beta} = |\overline{\Sigma(\beta, 1)} \cap \mathbb{S}^{n-1}|_{n-1} = \frac{\beta}{2\pi} \omega_{n-1}$. В работе [12] было доказано равенство

$$\|u\|_{q, \mathbb{G}} = \|\mathcal{C}_\beta u\|_{q, \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})} \quad \forall q \geq 1,$$

а также следующее утверждение [12, утверждение 1.2].

Предложение 3.1. Пусть $p \geq 1$ и β определено из равенства $Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \widehat{\beta}^{-\frac{1}{n}} n^{-\frac{n-1}{n}}$. Тогда

$$\|Du\|_{p, \mathbb{G}} \geq \|D\mathcal{C}_\beta u\|_{p, \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})}$$

для всех $u \in W_p^1(\mathbb{G})$ таких, что $u|_{\Gamma_0} = 0$.

Важным понятием в изучении изопериметрических неравенств является изопериметрический профиль

$$I_{\mathbb{G}}(\nu) := \inf\{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) : \mathbb{E} \subset \mathbb{G}, |\mathbb{E}|_n = \nu\}.$$

В работе [13] было показано, что изопериметрический профиль выпуклого конуса $\mathbb{K}$ с телесным углом $\alpha_{\mathbb{K}}$ имеет вид

$$I_{\mathbb{K}}(\nu) = \alpha_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

В статье [8] изучались свойства $I_{\mathbb{G}}$ для случая, когда $\mathbb{G}$ — произвольная выпуклая область. В частности, в [8, теорема 6.6] был получен следующий результат.

Предложение 3.2. Если $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, то

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{I_{\mathbb{G}}(\nu)}{\alpha_{\mathbb{G}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}} = 1$$

(напомним, что величина $\alpha_{\mathbb{G}}$ определена в (10)).

Теперь мы готовы доказать основное утверждение этого раздела.

Теорема 3.1. Пусть инфимум в (3) удовлетворяет условию

$$\lambda(p, \Omega) < \frac{(\alpha_{\Omega}/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{K(n, p)}. \quad (12)$$

Тогда этот инфимум достигается.

Доказательство. Рассмотрим нормированную в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующую последовательность $\{v_k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_p^1(\Omega)$. Можно также считать, что $|v_k|^{p^*} \xrightarrow{*} \mu$ и $|Dv_k|^p \xrightarrow{*} \tilde{\mu}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Согласно теореме Лионса [14, ч. 1]¹⁾; см. также [12, лемма 2.2]), имеем

$$\mu = |v|^{p^*} + \sum_j c_j \delta(x - x_j), \quad \tilde{\mu} \geq |Dv|^p + \lambda^p(p, \Omega) \sum_j c_j^{p/p^*} \delta(x - x_j),$$

где $\{x_j\}$ — не более чем счетный набор точек в $\overline{\Omega}$, c_j — положительные константы.

¹⁾В [14] рассматривались области в $\mathbb{R}^n$, но рассуждения проходят и для многообразия.

Поскольку $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность, дословно повторяя доказательство [12, теорема 2.2], получим альтернативу: либо функция v реализует минимум в соответствующей задаче (при этом множество $\{x_j\}$ пусто), либо $v = 0$ (при этом набор $\{x_j\}$ состоит из одной точки x_0 и $c_0 = 1$).

Покажем, что в условиях нашей теоремы второй случай невозможен. Для этого модифицируем схему доказательства [12, следствие 2.1]. Предположим, что

$$|v_k|^{p^*} \xrightarrow{*} \delta(x - x_0), \quad |Dv_k|^p \xrightarrow{*} \lambda^p(p, \Omega) \delta(x - x_0).$$

Домножим v_k на гладкую срезку:

$$v_k^\rho(x) := v_k(x) \varphi\left(\frac{1}{\rho} \text{dist}_g(x, x_0)\right), \quad x \in \Omega, \quad \rho > 0,$$

где

$$0 \leq \varphi(r) \leq 1; \quad \varphi(r) = 1 \text{ при } r \leq \frac{1}{2}; \quad \varphi(r) = 0 \text{ при } r \geq 1. \quad (13)$$

Тогда для любого $\rho > 0$ имеем

$$\lim_k \int_{\Omega} |v_k^\rho|^{p^*} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_k \int_{\Omega} |Dv_k^\rho|^p = \lambda^p(p, \Omega).$$

Для каждого $\rho > 0$ подберем $k = k(\rho)$ так, что при $\rho \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} |v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*} = 1 + o_\rho(1) \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} |Dv_{k(\rho)}^\rho|^p = \lambda^p(p, \Omega)(1 + o_\rho(1)). \quad (14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любого $\rho < \rho_0$

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon) \frac{\left(\int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} |Dv_{k(\rho)}^\rho|^p\right)^{1/p}}{\left(\int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} |v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*}\right)^{1/p^*}} \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{\left(\int_{\mathbb{V}_\rho(x_0)} |Dv_{k(\rho)}^\rho(\exp_{x_0}(x))|^p dx\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{V}_\rho(x_0)} |v_{k(\rho)}^\rho(\exp_{x_0}(x))|^{p^*} dx\right)^{1/p^*}} \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \inf_{\substack{v \in W_p^1(\mathbb{V}_\rho(x_0)), \\ v|_{\Gamma_0} = 0, v \neq 0}} \frac{\|Dv\|_{p, \mathbb{V}_\rho(x_0)}}{\|v\|_{p^*, \mathbb{V}_\rho(x_0)}} \quad (15) \end{aligned}$$

(здесь использованы формулы (14) и (6)). Более того, инфимум в правой части (15) можно брать по гладким ненулевым функциям на $\mathbb{V}_\rho(x_0)$, которые обращаются в нуль на Γ_0 .

Если $x_0 \notin \partial\Omega$, то $\mathbb{V}_\rho(x_0) = \mathbb{B}_\rho^n(x_0)$ и можно сделать стандартную симметризацию Шварца, получая

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon)^2 \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} \inf_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v'(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr\right)^{\frac{1}{p^*}}} \\ &= (1 - \varepsilon)^2 \omega_{n-1}^{\frac{1}{n-1}} k(n, p)^{-1} = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{K(n, p)}, \end{aligned}$$

что при достаточно малом ε противоречит (12), поскольку $\alpha_\Omega < \omega_{n-1}$.

Пусть теперь $x_0 \in \partial\Omega$. При необходимости уменьшая ρ_0 , согласно лемме 2.2 можно выбрать $\rho_1 < \rho_0$ и ограниченную выпуклую область $\mathbb{U}$ так, что

$$\mathbb{V}_{\rho_1}(x_0) \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{V}_{\rho_0}(x_0) \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(x_0) - \varepsilon.$$

В силу предложения 3.2 можно выбрать $\nu_0 > 0$ так, что для всех $0 < \nu < \nu_0$ выполняются неравенства

$$I_{\mathbb{U}}(\nu) \geq (\alpha_{\mathbb{U}} - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}} \geq (\alpha(x_0) - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}} \geq (\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

Возьмем $\rho < \rho_1$ настолько малым, что $|\mathbb{V}_{\rho}(x_0)|_n < \nu_0$. Несложно видеть, что для множеств $\mathbb{E}$ из определения $Q(\Gamma_1, \mathbb{V}_{\rho}(x_0))$ периметры $P_{\mathbb{V}_{\rho}(x_0)}(\mathbb{E})$ и $P_{\mathbb{U}}(\mathbb{E})$ совпадают, поэтому

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{V}_{\rho}(x_0))^{-1} \geq \inf_{\mathbb{E} \subset \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \frac{P_{\mathbb{U}}(\mathbb{E})}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq \inf_{\mathbb{E} \subset \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \frac{I_{\mathbb{U}}(|\mathbb{E}|)}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq (\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Пользуясь предложением 3.1, можно утверждать, что существует β такое, что $\widehat{\beta} \geq \alpha_{\Omega} - 2\varepsilon$ и для всех $u \in W_p^1(\mathbb{V}_{\rho}(x_0))$ таких, что $u|_{\Gamma_0} = 0$, имеем

$$\|Du\|_{p, \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \geq \|D\mathcal{C}_{\beta}u\|_{p, \mathcal{C}_{\beta}(\mathbb{V}_{\rho}(x_0))}.$$

Проведя β -симметризацию, можно продолжить неравенство (15), как и в случае $x_0 \notin \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon)^2 \widehat{\beta}^{\frac{1}{n}} \inf_{v \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^{\infty} r^{n-1} |v'(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^{\infty} r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr \right)^{\frac{1}{p^*}}} = \\ &= (1 - \varepsilon)^2 \widehat{\beta}^{\frac{1}{n}} k(n, p)^{-1} \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{(\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} K(n, p)}, \end{aligned}$$

что при достаточно малом ε противоречит условию теоремы. $\square$

4. Теорема существования решения и некоторые обобщения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $y \in \partial\Omega$ такая, что $\alpha(y) = \alpha_{\Omega}$. Введем функцию

$$u_{\varepsilon}(x) := u_{\varepsilon}(r) := \varphi\left(\frac{r}{\rho}\right) w_{\varepsilon}(r),$$

где $r := \text{dist}_g(x, y)$, w_{ε} определена в (5), а φ определена в (13).

Определим «разницу» между касательным конусом $\mathbb{K}(y)$ и областью Ω :

$$\Gamma_{\rho} = (\mathbb{K}(y) \cap \mathbb{B}_{\rho}^n) \setminus \mathbb{V}_{\rho}(y).$$

Для краткости обозначим $\mathbf{g}(x) = \sqrt{|\det\{g_{ij}\}|}$. Формула (6) означает, что

$$\mathbf{g}(x) = 1 - \frac{1}{6}(\text{Ric}_y)_{ij} x^i x^j + o(|x|^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (16)$$

Тогда для функции f с носителем в $B_{\rho}(y)$ справедлива формула

$$\int_{\Omega} f d\text{Vol}_g = I_1(f) - I_2(f) := \int_{\mathbb{K}(y) \cap \mathbb{B}_{\rho}^n} \mathbf{g}(x) f(\exp_y x) dx - \int_{\Gamma_{\rho}} \mathbf{g}(x) f(\exp_y x) dx.$$

Если функция f радиальна относительно y , то интеграл $I_1(f)$ расписывается как

$$I_1(f) = \int_0^\rho f(r) \left(\alpha_\Omega r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{6} \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega + o(r^{n+1}) \right) dr.$$

Возьмем в качестве f функции u_ε^p , $u_\varepsilon^{p^*}$, $|\nabla u_\varepsilon|^p$. Поскольку в случае сферы

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega = \frac{\alpha_\Omega}{n} \mathcal{R}_g, \quad (17)$$

где $\mathcal{R}_g = n(n-1)R^{-2}$ — скалярная кривизна сферы, можно воспользоваться полученными в [6, § 2] оценками²⁾:

$$I_1(|\nabla u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - E_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} + C \rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C \ln \varepsilon^{-1} + C \rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+2}{3}; \end{cases}$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^{p^*}) \geq D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - D_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} - C \rho^{-\frac{n}{p-1}},$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}, & \text{если } 1 < p < \sqrt{n}; \\ C(1 + |\ln \rho| + \ln \varepsilon^{-1}), & \text{если } p = \sqrt{n}; \\ C, & \text{если } p > \sqrt{n}; \end{cases}$$

где

$$E_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'} + 1, \frac{n}{p} - 1 \right), \quad (18)$$

$$E_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'} + 1, \frac{n+2}{p} - 3 \right), \quad (19)$$

$$D_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'} \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} \right), \quad (20)$$

$$D_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'} \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 2 \right). \quad (21)$$

Из этих оценок аналогично доказательству [6, теорема 4.1] получаем для $2 < p < \frac{n+2}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} &\leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} + \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} + o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}}) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями выводим

$$\frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} = A \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathbf{g}(x)}{(\varepsilon + |x|^{p'})^n} dx, \quad \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} = \frac{A}{p-1} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathbf{g}(x)|x|^{p'}}{(\varepsilon + |x|^{p'})^n} dx,$$

где $A = \frac{p(n-p)}{\alpha(y)n(p-1)\mathcal{B}(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p})} > 0$.

²⁾ Все коэффициенты в формулах (18)–(21) отличаются от полученных в [6] множителем $\frac{\alpha_\Omega}{\omega_{n-1}}$.

Обозначим $\gamma_\rho = \mathbb{S}^{n-1} \cap \frac{1}{\rho}\overline{\Gamma_\rho}$. Поскольку $\mathbb{V}_\rho(y)$ выпукло, в сферических координатах имеем для некоторого $r(\omega) \geq 0$

$$\Gamma_\rho = \{(r, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \gamma_\rho : r(\omega) < r < \rho\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \\ &= A \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho r \mathbf{g}(r\omega) \left(\frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} - \frac{1}{p-1} \frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} \right) dr dS_\omega. \end{aligned}$$

Из равенства

$$\frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} = (p-1) \frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} - \frac{p-1}{n-1} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} \right)$$

закключаем для $\tilde{A} = \frac{A}{n-1}$, что

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho r \mathbf{g}(r\omega) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} \right) dr dS_\omega \\ &= \frac{\tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \rho^n}{(\varepsilon + \rho^{p'})^{n-1}} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(\rho\omega) dS_\omega - \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(r(\omega)\omega) \frac{r(\omega)^n}{(\varepsilon + r(\omega)^{p'})^{n-1}} dS_\omega \\ &\quad - \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho \frac{d}{dr} (r \mathbf{g}(r\omega)) \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} dr dS_\omega. \quad (23) \end{aligned}$$

Заметим, что из стандартного C^1 -разложения плотности объема в нормальных координатах равномерно по $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ следует

$$\mathbf{g}(r\omega) = 1 + O(r^2), \quad \frac{d}{dr} \mathbf{g}(r\omega) = O(r).$$

Поэтому при $r \in (r(\omega), \rho)$ и достаточно малом ρ

$$\frac{d}{dr} (r \mathbf{g}(r\omega)) = \mathbf{g}(r\omega) + r \frac{d}{dr} \mathbf{g}(r\omega) = 1 + O(\rho^2) > 0.$$

Поэтому все слагаемые в правой части (23), кроме первого, неположительны и

$$\frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \leq \frac{\tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \rho^n}{(\varepsilon + \rho^{p'})^{n-1}} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(\rho\omega) dS_\omega \leq C(\rho) \varepsilon^{\frac{n}{p}-1}.$$

Подставим это неравенство в (22). Поскольку при $2 < p < \frac{n+2}{3}$ имеем $\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}})$, получаем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 + \left(\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right].$$

В [6] показано, что $\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} < 0$. Поэтому, выбрав достаточно малые ρ и ε , имеем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} < \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} = \frac{(\alpha_\Omega/\omega_{n-1})^{\frac{p}{n}}}{K(n, p)^p},$$

что дает (12). Аналогично неравенство (12) верно для $p = \frac{n+2}{3}$, а из соображений непрерывности — и при $p < \frac{n+2}{3} + \beta$ для некоторого $\beta > 0$.

Применение теоремы 3.1 завершает доказательство. $\square$

Сформулируем аналогичную теорему для многообразия M общего вида.

Теорема 4.1. Пусть $n \geq 5$. Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область, а точка $y \in \partial\Omega$ такова, что $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Предположим, что тензор Риччи в точке y удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega > 0. \quad (24)$$

Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы повторяет доказательство теоремы 1.1 без существенных изменений, поскольку все предварительные результаты из разд. 2, 3 доказаны для произвольного M . Отметим только, что интеграл из (24) в доказательстве теоремы 1.1 значительно упрощается по формуле (17).

Следствие 4.1. Пусть $n \geq 5$ и для любой точки $x \in M$ выполнено

$$\text{Ric}_x \geq 0, \quad \text{Ric}_x \neq 0.$$

Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Из условия $\text{Ric}_y \neq 0$ получаем, что ядро $\text{Ker}(\text{Ric}_y)$ имеет размерность не больше $n-1$. Отсюда легко выводим (24). $\square$

Следствие 4.2. Пусть $n \geq 5$, M является границей некоторой выпуклой области в $\mathbb{R}^{n+1}$ и в каждой точке M хотя бы одна секционная кривизна строго положительна. Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

5. Теорема несуществования

В этом разделе для упрощения обозначений будем писать B_ρ вместо $B_\rho(x_0)$, если x_0 — северный полюс сферы $\mathbb{S}_R^n$. Также положим $r = \text{dist}_g(x, x_0)$.

Лемма 5.1. $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n) = 2^{\frac{1}{n}} \lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$. Более того, инфимумы $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ и $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$ достигаются или не достигаются одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [15, гл. 2, § 3.2] показано, что на сфере «сферическая шапочка» $B_\rho(y)$ является множеством с минимальным периметром при заданном объеме. Отсюда следует (см. [16, ч. II]; см. также [17, приложение С]), что при сферической симметризации функционал энергии (2) не возрастает.

Поэтому если $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$, то все v_k можно считать «радиальными» (зависящими только от расстояния до заданной точки y).

С другой стороны, в [15, гл. 3, § 7.1] показано, что на полусфере также есть относительное изопериметрическое неравенство, которое достигается на половинках «сферических шапочек» $B_\rho(y) \cap \mathbb{S}_{R,+}^n$, где $y \in \partial \mathbb{S}_{R,+}^n$. Аналогично получаем, что если $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$, то все v_k можно считать «радиальными».

С помощью четного отражения функции из полусферы на всю сферу можно видеть, что для «радиальной» функции v справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[v] = 2^{\frac{1}{n}} \mathbf{E}_{\mathbb{S}_{R,+}^n}[v],$$

что и доказывает лемму. $\square$

Докажем аналог теоремы 1.2 для сферы.

Теорема 5.1. Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается.

Нам понадобится следующий результат [6, теорема 3.2].

Предложение 5.1. Пусть $\Omega = B_\rho \subset \mathbb{S}^n$ — «сферическая шапочка». Для любого $\beta > 0$ существует $\rho_* > 0$ такое, что инфимум

$$\inf_{\mathring{W}_p^1(B_{\rho_*})} \frac{\|Du\|_{p, B_{\rho_*}}}{\|u\|_{p^*, B_{\rho_*}}}$$

не достигается при $p \geq \frac{n+2}{3} + \beta$.

Следствие 5.1. Для $p > \frac{n+2}{3}$ существует $\rho_* > 0$ такое, что

$$\inf_{u \in \mathring{W}_p^1(B_{\rho_*})} \frac{\|Du\|_{p, B_{\rho_*}}}{\|u\|_{p^*, B_{\rho_*}}} \geq \frac{1}{K(n, p)}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [6, предложение 1.1] следует, что если неравенство (25) не выполнено, то инфимум достигается, что противоречит предложению 5.1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Способ доказательства аналогичен доказательству [6, теорема 7.2].

Предположим, что значения R , при которых инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ достигается, образуют неограниченную последовательность. Обозначим последовательность минимизирующих функций через $\{u_R\}$.

Поскольку $\mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[u_R] = \mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[|u_R|]$, можно считать, что $u_R \geq 0$. Расписывая необходимое условие для минимума функционала энергии, получим, что u_R является слабым суперрешением уравнения $-\Delta_p u + u^{p-1} = 0$, т. е.

$$\int_{\mathbb{S}_R^n} |Du_R|^{p-2} \langle Du_R, Dh \rangle + \int_{\mathbb{S}_R^n} u_R^{p-1} h \geq 0 \quad \forall h \in W_p^1(\mathbb{S}_R^n) : h \geq 0.$$

Значит, воспользовавшись неравенством Гарнака (см. [18, теорема 1.2]), можем утверждать, что $u_R > 0$ на $\mathbb{S}_R^n$.

Рассмотрим в $\mathbb{S}^n$ функции

$$v_R(x) := C(R)u_R(Rx),$$

где $C(R)$ подбирается так, чтобы $\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} = 1$. Тогда v_R удовлетворяет интегральному тождеству (здесь и далее $\lambda_R := \lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$)

$$\int_{\mathbb{S}^n} |Dv_R|^{p-2} \langle Dv_R, Dh \rangle + R^p \int_{\mathbb{S}^n} v_R^{p-1} h = \lambda_R^p \int_{\mathbb{S}^n} v_R^{p^*-1} h \quad \forall h \in W_p^1(\mathbb{S}^n). \quad (26)$$

В частности, подставив $h = v_R$ в (26), получим

$$\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + R^p \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p = \lambda_R^p. \quad (27)$$

Для функций $w_\varepsilon(r)$, определенных в (5), имеет место следующее равенство (см., например, оценки, полученные в [6, § 2]):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{S}_R^n} |Dw_\varepsilon|^p + \int_{\mathbb{S}_R^n} |w_\varepsilon|^p}{\|w_\varepsilon\|_{p^*, \mathbb{S}_R^n}^p} = \frac{1}{K(n, p)^p}.$$

Поэтому

$$\lambda_R^p \leq \frac{1}{K(n, p)^p}. \quad (28)$$

Из (27) сразу следует, что $\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \rightarrow 0$.

Действуя, как в [12, теорема 2.2], получаем (возможно, переходя к подпоследовательности), что для некоторого $x_0 \in \mathbb{S}^n$ имеет место сходимость $|v_R|^{p^*} \xrightarrow{*} \delta(x - x_0)$ в пространстве мер на $\mathbb{S}^n$. Не умаляя общности, можем считать x_0 северным полюсом сферы. Тогда

$$\forall \rho > 0 \quad \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Поскольку сферическая симметризация не увеличивает значение функционала энергии, мы можем считать, что v_R — невозрастающие функции одной переменной r . Поэтому из (29) для любого $\rho > 0$ следует

$$\sup_{\mathbb{S}^n \setminus B_\rho} v_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (30)$$

Положим теперь $\varphi_1(r) := \varphi(\frac{r}{2\rho})$, где φ определено в (13). Из следствия 5.1 вытекает, что для $\rho < \frac{\rho_*}{2}$

$$\|\varphi_1 v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} \leq K(n, p) \|D(\varphi_1 v_R)\|_{p, \mathbb{S}^n}.$$

Отсюда, используя оценку

$$|D(fg)|^p \leq |fDg|^p + C(|Dfg|^p + |Dfg| \cdot |fDg|^{p-1})$$

и условие $\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^{p^*} &\leq \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^p \\ &\leq K(n, p)^p \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + C[\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p-1}]. \end{aligned}$$

Выражая $\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p$ из (27), с учетом (28) выводим

$$R^p K(n, p)^p \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p \leq 1 - \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^{p^*} + C[\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p-1}],$$

откуда, поделив на $\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}^p$, имеем

$$R^p K(n, p)^p \leq \frac{\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p^*}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p} + C \left(\frac{\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^{p-1} + C. \quad (31)$$

В силу (30)

$$\frac{\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p^*}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p} \leq \sup_{\mathbb{S}^n \setminus B_\rho} v_R^{p^*-p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (32)$$

Положим $\eta(x) := \eta(r) := 1 - \varphi(\frac{r}{\rho})$. Для оценки второго слагаемого в правой части (31) подставим $h = \eta^p v_R$ в (26). Получим

$$\begin{aligned} \lambda_R^p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^{p^*} &= \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2} \langle D\eta, Dv_R \rangle + R^p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^p \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2} \langle D\eta, Dv_R \rangle. \end{aligned}$$

С учетом (28) имеем

$$\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p \leq C (\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \| \eta Dv_R \|_{p, \mathbb{S}^n}^{p-1} + \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_{\rho/2}}^{p^*}),$$

откуда ввиду (32)

$$\left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^p \leq C \left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^{p-1} + o(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\frac{\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \leq \frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \leq C.$$

Поэтому из (31) получаем неравенство

$$R^p K(n, p)^p \leq C,$$

которое приводит к противоречию при больших R . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [19, теорема 8] показано, что для $n \geq 2$ на сфере $\mathbb{S}^n$ при $1 < p < 2$ выполнено так называемое неравенство Соболева с точной константой

$$\|v\|_{p^*, \mathbb{S}^n}^p \leq K^p(n, p) \|Dv\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + C(p) \|v\|_{p, \mathbb{S}^n}^p, \quad v \in W_p^1(\mathbb{S}^n), \quad (33)$$

с некоторым $C(p) > 0$. При $n \geq 3$ и $p = 2$ этот результат верен для произвольного многообразия без края (см. [20]). Как было замечено в [6], из (33) следует, что при больших R инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается.

Таким образом, ограничение $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ с $\beta = \beta(M) > 0$ из [6, теорема 4.1] точно с обеих сторон.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Объединяя результат теоремы 5.1 и замечание 5.1, получаем, что для $n \in \{2, 3, 4\}$ и $1 < p < n$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается, если R достаточно велико.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Непосредственно вытекает из теоремы 5.1 и леммы 5.1. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Аналогично замечанию 5.1 ограничение $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ с $\beta = \beta(\Omega) > 0$ в теореме 1.1 точно с обеих сторон.

Благодарности. Я благодарен А. И. Назарову за постановку задачи и внимание к работе и С. В. Иванову за полезные советы. Я также признателен анонимному рецензенту за замечания, которые способствовали улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров Д. В., Назаров А. И. Задача Робена для квазилинейных уравнений с критическим ростом правой части // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2024. Т. 536. С. 126–139.
2. Bliss G. A. An integral inequality // J. London Math. Soc. 1930. V. 5. P. 40–46.
3. Назаров А. И., Щеглова А. П. О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы математического анализа. Нелинейные задачи и теория функций. 2004. Т. 27. С. 109–136.
4. Adimurthi, Mancini G. The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity // Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi. Sci. Norm. Super. di Pisa Quaderni. 1991. P. 9–25.
5. Wang X. J. Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // J. Differ. Equ. 1991. V. 93, N 2. P. 283–310.
6. Демьянов А. В., Назаров А. И. О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 5. С. 105–140.
7. Druet O. Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds // J. Funct. Anal. 1998. V. 159. P. 217–242.
8. Ritor M., Vernadakis E. Isoperimetric inequalities in Euclidean convex bodies // Trans. Am. Math. Soc. 2015. V. 367, N 7. P. 4983–5014.
9. Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию. СПб: Наука, 1994.
10. Pacella F., Tricarico M. Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1985–86. V. 34. P. 75–94.
11. Fleming W. H., Rishel R. An integral formula for total gradient variation // Arch. Math. 1960. V. 11. P. 218–222.
12. Lions P.-L., Pacella F., Tricarico M. Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions // Indiana Univ. Math. J. 1988. V. 37, N 2. P. 301–324.
13. Lions P.-L., Pacella F. Isoperimetric inequalities for convex cones // Proc. Am. Math. Soc. 1990. V. 109, N 2. P. 477–485.
14. Lions P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 1, 2 // Rev. Mat. Iberoam. 1985. V. 1, N 1, 2. P. 145–201, 45–121.
15. Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.
16. Kawohl B. Rearrangements and convexity of level sets in PDE. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1985.
17. Поля Г., Серё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
18. Trudinger N. S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.
19. Aubin T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev // J. Differ. Geom. 1976. V. 11. P. 573–598.
20. Hebey E., Vaugon M. Meilleures constantes dans le théorème d’inclusion de Sobolev // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1996. V. 13, N 1. P. 57–93.

Поступила в редакцию 10 января 2026 г.

После доработки 21 июня 2026 г.

Принята к публикации 22 июня 2026 г.

Быстров Данил Владимирович (ORCID 0009-0003-8326-4633)
 Санкт-Петербургский государственный университет,
 математико-механический факультет,
 Университетская набережная, 7–9, Санкт-Петербург 199034,
 Университетский проспект, 28, Санкт-Петербург, Старый Петергоф 198504;
 Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
 Набережная реки Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191011
 danil.bystrov@gmail.com

УДК 517.444

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ НА ГРУППЕ H_{red}^n

Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова

Аннотация. Исследуется задача о структуре решений одного класса уравнений свертки на редуцированной группе Гейзенберга, а также ее локальные аналоги. Рассматривается случай, когда свертыватель в уравнении имеет компактный носитель и инвариантен относительно унитарной группы. Для широкого класса таких свертывателей получено разложение произвольного распределения, удовлетворяющего соответствующему уравнению свертки, в ряд по его элементарным решениям.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.508

Ключевые слова: периодичность в среднем, скрученная (twisted) свертка, группа Гейзенберга, сферические гармоники.

Посвящается нашему учителю, профессору
Роальду Михайловичу Тригубу,
в честь его 90-летия

§ 1. Введение

В негармоническом анализе Фурье весьма важную роль играет следующая проблема (см., например, [1, § 4; 2]).

Проблема 1. Пусть T — ненулевое распределение с компактным носителем на вещественной оси $\mathbb{R}$. Требуется выяснить возможность представления произвольного решения $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ уравнения свертки

$$f * T = 0 \tag{1}$$

рядом по элементарным решениям этого уравнения, т. е. функциям вида

$$e^{i\lambda t} p_{k-1}(t), \tag{2}$$

где λ — нуль преобразования Фурье распределения T , k — порядок нуля λ , $p_{k-1}(t)$ — алгебраический многочлен степени $k-1$.

Проблема 1 включает в себя классические задачи о решении обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разложении периодических функций в тригонометрический ряд Фурье, вопрос об общем виде решений линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными

Исследование Вит. В. Волчкова проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FREM-2026-0004 и тема № FRRE-2026-0015). Исследование Н. П. Волчковой проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FRRE-2026-0015).

коэффициентами, изучение структуры решений некоторых типов интегродифференциальных уравнений и др. (см. [3, 4]). Следуя Дельсарту [5], функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению (1), называют *периодическими в среднем* функциями на $\mathbb{R}$ относительно свертывателя T .

Один из общих результатов для периодических в среднем функций на $\mathbb{R}$ был получен Л. Шварцем [6]. Он показал, что всякое решение $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ уравнения (1) имеет спектральное разложение по экспоненциальным полиномам вида (2), которое суммируемо к f методом Абеля, после подходящего объединения в группы членов этого разложения. Эренпрайс [7, § 3] обнаружил, что для обратимых распределений T абелево суммирование в теореме Л. Шварца можно опустить, а Эренпрайс — Мальявен [8] и Беренштейн — Тейлор [1, теорема 5] полностью охарактеризовали те обратимые свертыватели T , для которых и группировка слагаемых в ней не является необходимой. Некоторые локальные аналоги указанных результатов были установлены А. Ф. Леонтьевым [9–11] и В. В. Волчковым [12, 13].

Проблема 1 допускает различные обобщения и модификации. Так, скажем, можно рассматривать ее аналоги для уравнений свертки в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$, уравнений свертки на симметрических пространствах и в других случаях. Эти аспекты теории периодических в среднем функций частично отражены в обзорах и книгах [12–15]. Отметим, что к указанным направлениям исследований относятся фундаментальный принцип Эренпрайса — Паламодова о представлении решений произвольной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ интегралом по множеству экспоненциально-полиномиальных решений, обобщения фундаментального принципа на системы сверточных уравнений, теоремы о разложении периодических в среднем функций на сферически симметричных областях двухточечно-однородных пространств в ряды Фурье — Лапласа с радиальными коэффициентами специального вида и др. Полученные результаты нашли разнообразное применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, комплексном анализе, теории аппроксимации, теории лакунарных рядов и теории интегрально-геометрических преобразований типа Радона и Помпейю (см. [12–15]).

В работах [16–18] было начато изучение периодических в среднем функций на некоторых локально компактных группах. Дальнейшее развитие данного направления инициировалось в [19, § 4; 20, § 5; 21, § 4; 22, § 5]. Однако, несмотря на прошедшие с тех пор почти сорок лет, на текущий момент в указанной области остается много нерешенных вопросов даже для конкретных классических случаев. В частности, представляют интерес аналоги проблемы 1 для групп Гейзенберга (см., например, [19, § 4]).

Данная работа посвящена исследованию этой задачи, а наш основной результат состоит в следующем (см. теорему 2 и следствие 1 в § 4 ниже). Изучается пространство решений уравнения свертки $F * \mathcal{T} = 0$ (или $\mathcal{T} * F = 0$) на редуцированной группе Гейзенберга H_{red}^n , где $\mathcal{T}$ — заданное распределение на H_{red}^n с компактным носителем, инвариантное относительно унитарной группы $\mathcal{U}(n)$. Для широкого класса свертывателей $\mathcal{T}$ получено описание решений F в виде ряда Фурье специального вида

$$F = \sum_{m,p,q} \mathcal{P}_m^{p,q} F, \quad (3)$$

компоненты $\mathcal{P}_m^{p,q} F$ которого представляются по корневым векторам лапласиана

Гейзенберга, удовлетворяющим тому же уравнению свертки:

$$\mathcal{P}_m^{p,q} F = \sum_{\lambda} X_{\lambda,m}^{p,q}. \quad (4)$$

Индекс m в (3) отвечает за степень гармоник на единичной окружности, а индексы p, q — за гармоники бистепени (p, q) на единичной сфере в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. В разложении (4) суммирование производится по нулям соответствующего преобразования Фурье распределения $\mathcal{T}$. При этом для сходимости найденного разложения нет необходимости в упомянутой выше группировке слагаемых и процедуре абелева суммирования. В этом смысле установленный результат аналогичен указанным теоремам Эренпрайса — Мальявена [8], Беренштейна — Тейлора [1] и В. В. Волчкова [12, часть 3, § 2.4].

Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$. В случае $n = 1$ требуются незначительные изменения, связанные с заменой гармоник бистепени (p, q) на обычные экспоненты.

§ 2. Основные обозначения

На протяжении статьи будут использоваться следующие преимущественно стандартные обозначения (см. [23–26]):

1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; i — мнимая единица; $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера; $\binom{N}{M}$ — биномиальные коэффициенты; $\binom{N}{M}_{\lambda}$ — биномиальные коэффициенты, зависящие от $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\binom{N}{M}_{\lambda} = \binom{N}{M}, \quad \text{если } \lambda \neq 0, \quad \text{и} \quad \binom{N}{M}_0 = \binom{2N}{2M};$$

Γ — гамма-функция; $P_s^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби, удовлетворяющие условию $P_s^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$; J_{ν} — функция Бесселя первого рода порядка ν ; $\mathbf{j}_{\nu}$ — нормированная функция Бесселя:

$$\mathbf{j}_{\nu}(t) = 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) J_{\nu}(t) t^{-\nu};$$

${}_1F_1(a; b; t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера; $w^{(N)}$ — производные четной целой функции $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$w^{(N)}(\lambda) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N w(\lambda) = \begin{cases} w^{(N)}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ w^{(2N)}(0), & \lambda = 0; \end{cases}$$

Id — тождественный оператор;

2) $C(\mathcal{M})$ — пространство непрерывных комплекснозначных функций на вещественно аналитическом многообразии $\mathcal{M}$; $C^k(\mathcal{M})$ — k раз непрерывно дифференцируемые функции на $\mathcal{M}$ со значениями в $\mathbb{C}$; $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = C^{\infty}(\mathcal{M})$; $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — функции из $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ с компактными носителями; $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ — пространство распределений на $\mathcal{M}$ с обычной топологией; функция $f \in C(\mathcal{M})$ отождествляется с распределением

$$\varphi \rightarrow \int_{\mathcal{M}} f \varphi dv, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (5)$$

(dv — гладкая положительная плотность на $\mathcal{M}$); $\langle f, \varphi \rangle$ — значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$; $\bar{f}$ — комплексное сопряжение к $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$:

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M});$$

$\text{supp } f$ — носитель распределения f ; $\mathcal{E}'(\mathcal{M})$ — распределения на $\mathcal{M}$ с компактными носителями; $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ — класс всех четных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$; $r(T) = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } T \subset [-\varrho, \varrho]\}$, где $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$;

3) $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство; $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$; $z \cdot \bar{w}$ — эрмитово скалярное произведение векторов $z, w \in \mathbb{C}^n$ и $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ — соответствующая ему норма; ρ, σ — полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ($\rho = |z|$, $\sigma = |z|^{-1}z$); $d\mathbf{m}$ — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$;

B_R — открытый шар радиуса $R \in (0, +\infty]$ в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле (для $\mathcal{M} = B_R$ в качестве плотности $d\nu$ в (5) используется мера $d\mathbf{m}$); $\bar{B}_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq r\}$ ($r \in [0, +\infty)$);

$f(\bar{z})$ — отражение распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$:

$$\langle f(\bar{z}), \varphi \rangle = \langle f, \varphi(\bar{z}) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R); \quad (6)$$

$f(az)$ — растяжение с коэффициентом $a > 0$ распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$:

$$\langle f(az), \varphi \rangle = a^{-2n} \langle f, \varphi(a^{-1}z) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_{R/a}); \quad (7)$$

$\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R) = \mathcal{D}'_{\mathbb{H}}(B_R) \cap \mathcal{E}'(B_R)$, где $\mathcal{D}'_{\mathbb{H}}(B_R)$ — класс радиальных распределений на B_R ; $r(T)$ — радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель распределения $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$;

D_j и $\bar{D}_j$ — операторы дифференцирования по переменным z_j и $\bar{z}_j$ соответственно;

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n (z_j D_j + \bar{z}_j \bar{D}_j) \text{ — дифференциальный оператор Эйлера;}$$

$$\mathbf{C} = i \sum_{j=1}^n (z_j D_j - \bar{z}_j \bar{D}_j); \quad \Delta = 4 \sum_{j=1}^n D_j \bar{D}_j \text{ — оператор Лапласа в } \mathbb{C}^n;$$

$$\mathcal{L}_m = -\Delta - im\mathbf{C} + \frac{m^2|z|^2}{4} \text{Id}, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ — скрученный (twisted) лапласиан в } \mathbb{C}^n; \quad (8)$$

$$\mathbf{L} = |z|^2 \Delta - \mathbf{E}^2 + (2 - 2n)\mathbf{E} \text{ — «угловая» часть оператора } \Delta$$

(см. лемму 2 ниже);

$H^{p,q}$ — пространство всех гармонических однородных многочленов на $\mathbb{C}^n$, имеющих полную степень p по переменным $z_1, \dots, z_n$ и полную степень q по переменным $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ ($p, q \in \mathbb{Z}_+$); $d(p, q)$ — размерность пространства $H^{p,q}$:

$$d(p, q) = \frac{(p+n-2)!(q+n-2)!(p+q+n-1)}{p!q!(n-1)!(n-2)!} \quad (9)$$

(см. [27]);

4) $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ с поверхностной мерой $d\omega$; ω_{2n-1} — площадь $\mathbb{S}^{2n-1}$; $\mathcal{H}^{p,q}$ — подпространство в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1}, d\omega)$, состоящее из сужений элементов $H^{p,q}$ на $\mathbb{S}^{2n-1}$;

$\{S_l^{p,q}\}_{l=1}^{d(p,q)}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{p,q}$, $S_1^{0,0} = \omega_{2n-1}^{-1/2}$;

Δ_0 — оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathbb{S}^{2n-1}$; $\lambda_{p,q} = (p+q)(2-2n-p-q)$ — собственное значение оператора Δ_0 , соответствующее собственной функции $S_l^{p,q}$:

$$\Delta_0(S_l^{p,q}) = \lambda_{p,q} S_l^{p,q} \quad (10)$$

(см. [25, гл. 9, § 5, п. 1]);

$\mathbb{S} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$ — мультипликативная группа окружности с инвариантным интегрированием, определяемым соотношением

$$\int_{\mathbb{S}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta, \quad f \in C(\mathbb{S});$$

$\mathbf{d}_{\mathbb{S}} = i\tau \frac{\partial}{\partial \tau}$ — оператор дифференцирования на $\mathbb{S}$ по угловой координате; (11)

5) $\mathcal{U}(n)$ — группа всех линейных преобразований $\mathbb{C}^n$, сохраняющих эрмитово скалярное произведение (унитарная группа); $\{a_{i,j}(U)\}_{i,j=1}^n$ — матрица оператора $U \in \mathcal{U}(n)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$; dU — мера Хаара на $\mathcal{U}(n)$, нормированная условием

$$\int_{\mathcal{U}(n)} dU = 1;$$

$T(U)$ — квазирегулярное представление группы $\mathcal{U}(n)$, задаваемое на функциях $f \in L^2(\mathbb{S}^{2n-1}, d\omega)$ соотношением

$$(T(U)f)(\xi) = f(U^{-1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{2n-1}, \quad U \in \mathcal{U}(n);$$

$T^{p,q}(U)$ — сужение представления $T(U)$ на $\mathcal{U}(n)$ -инвариантное подпространство $\mathcal{H}^{p,q}$; $\{t_{k,l}^{p,q}(U)\}_{k,l=1}^{d(p,q)}$ — матрица (унитарная) представления $T^{p,q}(U)$ в базисе $\{S_l^{p,q}\}_{l=1}^{d(p,q)}$:

$$S_l^{p,q}(U^{-1}\sigma) = \sum_{k=1}^{d(p,q)} t_{k,l}^{p,q}(U) S_k^{p,q}(\sigma), \quad t_{k,l}^{p,q}(U^{-1}) = \overline{t_{l,k}^{p,q}(U)}; \quad (12)$$

$\chi^{p,q}(U)$ — характер представления $T^{p,q}(U)$;

6) $G = H_{\text{ред}}^n$ — редуцированная группа Гейзенберга, представляющая собой декартово произведение $\mathbb{C}^n \times \mathbb{S}$ с законом умножения

$$(z, \tau)(w, \eta) = (z + w, \tau\eta e^{\frac{i}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})}), \quad (13)$$

единицей $(0, 1)$ и операцией взятия обратного элемента $(z, \tau)^{-1} = (-z, \bar{\tau})$ (G является нильпотентной группой Ли степени два); $dg = dm(z)d\tau$ — мера Хаара на G ;

$C_R = B_R \times \mathbb{S}$, $R \in (0, +\infty]$ (для $\mathcal{M} = C_R$ в качестве плотности dv в (5) используется мера dg); $\check{\mathcal{T}}$ — отражение распределения $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(C_R)$:

$$\langle \check{\mathcal{T}}, \Phi \rangle = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g^{-1}) \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R);$$

$\mathcal{E}'_{\natural}(C_R)$ — совокупность всех радиальных (по z) распределений в $\mathcal{E}'(C_R)$, т. е. распределений $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'(C_R)$ таких, что

$$\langle \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle \mathcal{T}(z, \tau), \Phi(Uz, \tau) \rangle \quad \text{для всех } U \in \mathcal{U}(n), \quad \Phi \in \mathcal{E}(C_R);$$

$r(\mathcal{T}) = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } \mathcal{T} \subset C_{\varrho}\}$, где $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\natural}(C_R)$;

$$L_G = -\Delta + \mathbf{d}_{\mathbb{S}} \mathbf{C} - \frac{|z|^2}{4} \mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 \quad \text{— лапласиан Гейзенберга.} \quad (14)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Некоторые формулы для операторов $\mathbf{d}_S$, $\mathbf{L}$, Δ_0 , L_G и $\mathcal{L}_m$.

Лемма 1. Пусть $f_1, f_2 \in C^k(\mathbb{S})$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\int_{\mathbb{S}} f_1(\tau) (\mathbf{d}_S^k f_2)(\tau) d\tau = (-1)^k \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S^k f_1)(\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (15)$$

$$\int_{\mathbb{S}} f_1(\tau) \tau^{-m} d\tau = \frac{1}{(im)^k} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S^k f_1)(\tau) \tau^{-m} d\tau, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (11) и формулу интегрирования по частям, индукцией по k получаем (15). Полагая в (15)

$$f_2(\tau) = \frac{\tau^{-m}}{(-im)^k},$$

приходим к (16).

Лемма 2. Пусть $f \in C^2(B_R)$. Тогда

$$(\mathbf{L}f)(\rho\sigma) = \Delta_0(f(\rho\sigma)), \quad \rho \in (0, R), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие оператора Δ на функцию f можно записать в виде

$$(\Delta f)(\rho\sigma) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (f(\rho\sigma)) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_0(f(\rho\sigma))$$

(см., например, [25, гл. 9, § 5, п. 1]). Кроме того,

$$(\mathbf{E}f)(\rho\sigma) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (f(\rho\sigma)), \quad (\mathbf{E}^2 f)(\rho\sigma) = \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (f(\rho\sigma)).$$

Из этих равенств и определения оператора $\mathbf{L}$ следует соотношение (17).

Лемма 3. Пусть $F_1, F_2 \in C^2(G)$ и по крайней мере одна из этих функций имеет компактный носитель. Тогда

$$\int_G F_1(g) (L_G F_2)(g) dg = \int_G (L_G F_1)(g) F_2(g) dg. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства $dg = dm(z) d\tau$ и симметрии оператора Δ имеем

$$-\int_G F_1(g) (\Delta F_2)(g) dg = -\int_G (\Delta F_1)(g) F_2(g) dg. \quad (19)$$

Далее, используя (15) при $k = 1$, антисимметричность $\mathbf{C}$ и его перестановочность с $\mathbf{d}_S$, получаем

$$\begin{aligned} \int_G F_1(g) (\mathbf{d}_S \mathbf{C} F_2)(g) dg &= - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S F_1)(z, \tau) (\mathbf{C} F_2)(z, \tau) d\tau dm(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{C}^n} (\mathbf{C} \mathbf{d}_S F_1)(z, \tau) F_2(z, \tau) dm(z) d\tau = \int_G (\mathbf{d}_S \mathbf{C} F_1)(g) F_2(g) dg. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично формула (15) при $k = 2$ влечет равенство

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} \frac{|z|^2}{4} F_1(z, \tau) (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 F_2)(z, \tau) d\mathbf{m}(z) d\tau \\ = - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} \frac{|z|^2}{4} (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 F_1)(z, \tau) F_2(z, \tau) d\mathbf{m}(z) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Складывая (19)–(21) и учитывая (14), приходим к (18).

Доказательство леммы 3 показывает, что операторы $\mathcal{L}_m$ и L_G действуют на распределения по формулам

$$\langle \mathcal{L}_m f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad (22)$$

$$\langle L_G F, \Phi \rangle = \langle F, L_G \Phi \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad F \in \mathcal{D}'(C_R). \quad (23)$$

Установим связь между $\mathcal{L}_m$ и L_G . Положим

$$\begin{aligned} \langle \Pi_m f, \Phi \rangle &= \left\langle f(z), \int_{\mathbb{S}} \Phi(z, \tau) \tau^m d\tau \right\rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \\ \langle \pi_m F, \varphi \rangle &= \langle F, \Pi_{-m} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad F \in \mathcal{D}'(C_R). \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда $\Pi_m f \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\pi_m F \in \mathcal{D}'(B_R)$ и имеют место равенства

$$\langle \Pi_m f, \Phi \rangle = \langle f, \pi_{-m} \Phi \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad (25)$$

$$(\Pi_m f)(z, \tau) = f(z) \tau^m, \quad f \in C(B_R), \quad (26)$$

$$(\pi_m F)(z) = \int_{\mathbb{S}} F(z, \tau) \tau^{-m} d\tau, \quad F \in C(C_R), \quad (27)$$

$$\pi_m \Pi_k = \delta_{m,k} \text{Id}. \quad (28)$$

Лемма 4. Операторы L_G и $\mathcal{L}_m$ связаны соотношениями

$$\pi_{-m} L_G = \mathcal{L}_m \pi_{-m}, \quad L_G \Pi_m = \Pi_m \mathcal{L}_{-m}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\Phi \in \mathcal{D}(C_R)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$. Поскольку $\mathbf{d}_{\mathbb{S}}(\tau^m) = im\tau^m$, в силу (8), (14) и (26) получаем $L_G \Pi_m \varphi = \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \varphi$. Поэтому (см. (22)–(24))

$$\begin{aligned} \langle \pi_{-m} L_G F, \varphi \rangle &= \langle L_G F, \Pi_m \varphi \rangle = \langle F, L_G \Pi_m \varphi \rangle = \langle F, \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle \\ &= \langle \pi_{-m} F, \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}_m \pi_{-m} F, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

что доказывает первое равенство в (29). Пусть теперь $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Из (23), (25), (22) и (30) имеем

$$\begin{aligned} \langle L_G \Pi_m f, \Phi \rangle &= \langle \Pi_m f, L_G \Phi \rangle = \langle f, \pi_{-m} L_G \Phi \rangle \\ &= \langle f, \mathcal{L}_m \pi_{-m} \Phi \rangle = \langle \mathcal{L}_{-m} f, \pi_{-m} \Phi \rangle = \langle \Pi_m \mathcal{L}_{-m} f, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует второе равенство в (29).

Лемма 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Тогда

$$(\mathcal{L}_m f)(z) = m \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \quad (31)$$

$$(\mathcal{L}_{-m} f)(z) = m \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}) = m \mathcal{L}_{-1}(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z). \quad (32)$$

Доказательство. Для $f \in C^2(B_R)$ утверждение леммы проверяется непосредственным вычислением с помощью (8) и цепного правила (см. [24, гл. 1, § 1.3.3]). Предположим теперь, что $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Учитывая сказанное выше и (22), (7), для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_m f, \varphi \rangle &= m \langle f, \mathcal{L}_1(\varphi(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}) \rangle \\ &= m \langle f, \mathcal{L}_{-1}(\varphi(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z) \rangle = m^{1-n} \langle f(m^{-1/2}z), \mathcal{L}_{-1}(\varphi(m^{-1/2}z)) \rangle \\ &= m^{1-n} \langle \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z)), \varphi(m^{-1/2}z) \rangle = m \langle \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует (31). Равенство (32) доказывается аналогично.

Далее нам потребуются некоторые специальные функции. Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $(z, \tau) \in G$ положим

$$\mathfrak{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z, \tau) = E_{\lambda, N, -m}^{p, q, l}(z) \tau^m, \quad \mathcal{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z, \tau) = E_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z) \tau^m, \quad (33)$$

где

$$E_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z) = \begin{cases} \varphi_{\lambda, N}^{p, q}(\sqrt{m}\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m > 0, \\ \varphi_{\lambda, N}^{q, p}(\sqrt{|m|}\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m < 0, \\ \psi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m = 0, \end{cases} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) &= \sqrt{\omega_{2n-1}} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N \left({}_1F_1 \left(p + \frac{n - \lambda^2}{2}; n + p + q; \frac{\rho^2}{2} \right) \right) \rho^{p+q} e^{-\frac{\rho^2}{4}}, \\ \psi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) &= \sqrt{\omega_{2n-1}} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N (\mathbf{j}_{n+p+q-1}(\lambda\rho)) \rho^{p+q}. \end{aligned} \quad (35)$$

Лемма 6. Имеют место равенства

$$(\mathcal{L}_m - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 \text{Id})^{N+1} E_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0, \quad (36)$$

$$(L_G - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 \text{Id})^{N+1} \mathfrak{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0, \quad (37)$$

$$(L_G + (2m(p - q) - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2) \text{Id})^{N+1} \mathcal{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0. \quad (38)$$

Доказательство. Из (8) следует, что

$$(\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{-m} - 2m(p - q) \text{Id})f = 0, \quad \text{если } f \text{ имеет вид } f(z) = h(\rho) S_l^{p, q}(\sigma). \quad (39)$$

Поэтому формулы (9.30), (12.35) в [13, гл. 9, 12] и их доказательства показывают, что

$$(\mathcal{L}_j - \lambda^2 \text{Id})^{N+1} E_{\lambda, N, j}^{p, q, l} = 0 \quad \text{при } j = 0, \pm 1.$$

Преобразуя левую часть этого равенства по формуле бинома и учитывая (31), (32), приходим к (36). Аналогично, используя (29), (28), (39) и (36), получаем (37) и (38).

3.2. Ряды Фурье на B_R и C_R . Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$. Для произвольных $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ и $m \in \mathbb{Z}$ положим

$$\langle \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}z) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R),$$

$$\langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi \rangle = \left\langle F(z, \tau), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}z, \tau\eta) \eta^m d\eta dU \right\rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R).$$

Тогда $\pi^{p,q,l} f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $\mathcal{P}_m^{p,q,l} F \in \mathcal{D}'(C_R)$ и имеют место равенства

$$(\pi^{p,q,l} f)(z) = d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} f(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU, \quad f \in C(B_R), \quad (40)$$

$$\langle \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \langle f, \overline{\pi^{p,q,l} \varphi} \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad (41)$$

$$(\mathcal{P}_m^{p,q,l} F)(z, \tau) = d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} F(Uz, \tau\eta) \eta^{-m} d\eta dU, \quad F \in C(C_R), \quad (42)$$

$$\langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} \rangle, \quad F \in \mathcal{D}'(C_R), \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R). \quad (43)$$

Далее нам потребуются некоторые соотношения для операторов

$$\pi^{p,q,l} : \mathcal{D}'(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'(B_R) \text{ и } \mathcal{P}_m^{p,q,l} : \mathcal{D}'(C_R) \rightarrow \mathcal{D}'(C_R).$$

Лемма 7. Для любых $k, l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ имеет место равенство

$$\pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} = \delta_{k,l} \pi^{p,q,k}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что

$$d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU = \delta_{k,l} t_{k,k}^{p,q}(V). \quad (45)$$

Действительно, учитывая (12) и используя равенство

$$t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) = \sum_{j=1}^{d(p,q)} t_{k,j}^{p,q}(V) t_{j,k}^{p,q}(U^{-1})$$

(см. [25, гл. 1, § 1, п. 2, формула (4)]), получаем

$$\int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU = \sum_{j=1}^{d(p,q)} t_{k,j}^{p,q}(V) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \overline{t_{k,j}^{p,q}(U)} dU.$$

Отсюда и из соотношений ортогональности для матричных элементов (см. [25, гл. 1, § 4, п. 3, формулы (2), (3)]) следует (45).

Далее, пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$. Тогда (см. (41))

$$\langle \pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \langle f, \overline{\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \varphi} \rangle. \quad (46)$$

Используя (40), свойство инвариантности меры Хаара относительно сдвигов и теорему Фубини, находим

$$(\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi})(z) = (d(p,q))^2 \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \overline{\varphi}(Vz) dV.$$

Это соотношение и формулы (45), (40) влекут равенство

$$\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi} = \delta_{k,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi}.$$

Отсюда и из (46), (41) получаем

$$\langle \pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \delta_{k,l} \langle f, \overline{\pi^{p,q,k} \overline{\varphi}} \rangle = \delta_{k,l} \langle \pi^{p,q,k} f, \varphi \rangle,$$

что и требовалось.

Лемма 8. Операторы $\mathcal{P}_m^{p,q,l}$ и $\pi^{p,q,l}$ связаны соотношением

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l} = \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\Phi \in \mathcal{D}(C_R)$. Тогда (см. (25), (41), (24), (27))

$$\begin{aligned} \langle \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m F, \Phi \rangle &= \langle \pi^{p,q,l} \Pi_m F, \Pi_m \Phi \rangle = \langle \Pi_m F, \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle \\ &= \langle F, \Pi_m \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle = \langle F, \Pi_m \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle = \langle F, \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Далее, используя (26), (40), (27) и (42), получаем

$$\begin{aligned} (\Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi)(z, \tau) &= d(p,q) \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} (\Pi_m \Phi)(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p,q) \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \overline{\Phi}(Uz, \eta) \eta^{-m} d\eta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p,q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \overline{\Phi}(Uz, \tau\eta) \eta^{-m} d\eta t_{l,l}^{p,q}(U) dU = (\mathcal{P}_m^{p,q,l} \overline{\Phi})(z, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда и из (48), (43) следует формула (47).

Положим

$$\pi^{p,q} = \sum_{l=1}^{d(p,q)} \pi^{p,q,l}, \quad \mathcal{P}_m^{p,q} = \sum_{l=1}^{d(p,q)} \mathcal{P}_m^{p,q,l}. \quad (49)$$

Лемма 9. Пусть $f \in C(B_R)$. Тогда

$$(\pi^{p,q} f)(z) = \frac{d(p,q)}{\omega_{2n-1}} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) Q^{p,q}(\sigma \cdot \overline{\xi}) d\omega(\xi), \quad z \in B_R, \quad (50)$$

где

$$Q^{p,q}(te^{i\theta}) = t^{|p-q|} e^{i(p-q)\theta} P_{\min\{p,q\}}^{(n-2, |p-q|)}(2t^2 - 1), \quad t \in [-1, 1], \quad e^{i\theta} \in \mathbb{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (40) и [28, лемма 1] имеем

$$(\pi^{p,q,l} f)(z) = S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi) \quad (51)$$

при всех $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Отсюда и из (49) получаем

$$(\pi^{p,q}f)(z) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) \sum_{l=1}^{d(p,q)} S_l^{p,q}(\sigma) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi).$$

Используя это представление и равенство

$$\sum_{l=1}^{d(p,q)} S_l^{p,q}(\sigma) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} = \frac{d(p,q)Q^{p,q}(\sigma \cdot \bar{\xi})}{\omega_{2n-1}}$$

(см. [29, формулы (4.1), (4.4), (4.5)]), приходим к (50).

Лемма 10. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Тогда

$$\pi^{p,q}(f(\bar{z}))(\bar{z}) = (\pi^{q,p}f)(z). \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in C(B_R)$ формула (52) следует из (50) и равенства

$$Q^{p,q}(te^{-i\theta}) = Q^{q,p}(te^{i\theta}).$$

В общем случае отсюда и из (6), (41), (49) имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi^{p,q}(f(\bar{z}))(\bar{z}), \varphi \rangle &= \langle \pi^{p,q}(f(\bar{z})), \varphi(\bar{z}) \rangle = \langle f(\bar{z}), \overline{\pi^{p,q}(\varphi(\bar{z}))} \rangle \\ &= \langle f, \overline{\pi^{p,q}(\overline{\varphi(\bar{z})})}(\bar{z}) \rangle = \langle f, \overline{\pi^{q,p}(\overline{\varphi})} \rangle = \langle \pi^{q,p}f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R). \end{aligned}$$

Тем самым равенство (52) установлено для $f \in \mathcal{D}'(B_R)$.

Лемма 11. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}(B_R)$, $\Phi \in \mathcal{E}(C_R)$, $p + q + |m| > 0$ и $A, B \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$(\pi^{p,q}\varphi)(z) = \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} (\mathbf{L}^A \varphi)(Uz) \chi^{p,q}(U) dU \quad \text{при } p + q \geq 1 \quad (53)$$

и

$$(\mathcal{P}_m^{p,q}\Phi)(z, \tau) = \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} \chi^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B)\Phi)(Uz, \eta) \eta^{-m} d\eta dU, \quad (54)$$

где дифференциальные операторы $\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B)$ определяются равенствами:

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = d(p, q) \lambda_{p,q}^{-A} (im)^{-B} \mathbf{L}^A \mathbf{d}_S^B, \quad \text{если } p + q \geq 1, \quad m \neq 0,$$

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = d(p, q) \lambda_{p,q}^{-A} \mathbf{L}^A, \quad \text{если } p + q \geq 1, \quad m = 0,$$

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = (im)^{-B} \mathbf{d}_S^B, \quad \text{если } p = q = 0, \quad m \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p + q \geq 1$. Учитывая (10), симметричность оператора Δ_0 , (17) и (51), находим

$$\begin{aligned} (\pi^{p,q,l}\varphi)(z) &= \lambda_{p,q}^{-A} S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \varphi(\rho\xi) \Delta_0^A(\overline{S_l^{p,q}(\xi)}) d\omega(\xi) \\ &= \lambda_{p,q}^{-A} S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} (\mathbf{L}^A \varphi)(\rho\xi) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi) \end{aligned}$$

$$= \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} (\mathbf{L}^A \varphi)(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU,$$

откуда в силу (49) получаем (53). Далее, если $m \neq 0$, то по лемме 1

$$(\pi_m \Phi)(z) = \frac{1}{(im)^B} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^B \Phi)(z, \eta) \eta^{-m} d\eta. \quad (55)$$

Равенства (53), (55), (49) и (47) влекут (54) при $p+q \geq 1$, $m \neq 0$. Случаи $p+q \geq 1$, $m = 0$ и $p = q = 0$, $m \neq 0$ рассматриваются аналогично с использованием равенств

$$(\pi_0 \Phi)(z) = \int_{\mathbb{S}} \Phi(z, \eta) d\eta, \quad (\pi^{0,0} \varphi)(z) = \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(Uz) dU$$

(см. (27), (40), (49) и (12)).

Лемма 12. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$. Тогда

$$f \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \pi^{p,q} f, \quad F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}, p,q \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_m^{p,q} F, \quad (56)$$

где ряды сходятся безусловно в указанных пространствах.

Доказательство. Из (40), (49) видно, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ носители всех функций $\pi^{p,q} \varphi$ содержатся в $\overline{B}_r$, где $r = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } \varphi \subset B_{\varrho}\}$. Оценим модуль производных $D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi$ на B_R , где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ и $\{k_{\mu}\}_{\mu=1}^{\alpha}, \{j_{\nu}\}_{\nu=1}^{\beta}$ — произвольные наборы, состоящие из натуральных чисел, не превосходящих n (здесь, как обычно, произведение операторов с нулевым числом множителей определяется как тождественный оператор). Используя (53) и цепное правило (см. [24, гл. 1, § 1.3.3]), для любого $A \in \mathbb{Z}_+$ и $p+q \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & (D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z) \\ &= \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha}=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{\beta}=1}^n \int_{\mathcal{U}(n)} a_{l_1, k_1}(U) \dots a_{l_{\alpha}, k_{\alpha}}(U) \overline{a_{i_1, j_1}(U)} \dots \overline{a_{i_{\beta}, j_{\beta}}(U)} \\ & \quad \cdot (D_{l_1} \dots D_{l_{\alpha}} \overline{D}_{i_1} \dots \overline{D}_{i_{\beta}} \mathbf{L}^A \varphi)(Uz) \chi^{p,q}(U) dU. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$d(p, q) \leq (p+q+n-1)^{2n-3}, \quad |a_{i,j}(U)| \leq 1, \quad \int_{\mathcal{U}(n)} |\chi^{p,q}(U)| dU \leq 1$$

(см. (9) и [25, гл. 1, § 4, п. 7, формула (9)]), получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in B_R} |(D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z)| \\ & \leq \frac{(p+q+n-1)^{2n-3}}{(p+q)^{2A}} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha}=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{\beta}=1}^n \sup_{z \in B_R} |(D_{l_1} \dots D_{l_{\alpha}} \overline{D}_{i_1} \dots \overline{D}_{i_{\beta}} \mathbf{L}^A \varphi)(z)|. \end{aligned}$$

В силу произвольности A отсюда следует, что

$$\sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \sup_{z \in B_R} |(D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z)| < +\infty.$$

Это рассуждение, равенства (41), (49) и [24, гл. 12, теорема 12.3.3] влекут требуемую сходимость первого ряда из (56). Для второго ряда доказательство проводится аналогично (см. (54), (49), (47)).

3.3. Свертки и преобразования Фурье. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Скрученная (twisted) m -свертка $f \star^m T$ распределений $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$ является функционалом в $\mathcal{D}'(B_{R-r(T)})$, действующим по правилу

$$\langle f \star^m T, \varphi \rangle = \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)}) \quad (57)$$

(см. [13, гл. 12, § 12.1; 26, гл. 1, § 1.2]).

Свертки $F \star \mathcal{T}$ и $\mathcal{T} \star F$ распределений $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(C_R)$ определяются как распределения в $\mathcal{D}'(C_{R-r(\mathcal{T})})$ следующим образом:

$$\langle F \star \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle F(\mathbf{g}), \langle \mathcal{T}(g), \Phi(\mathbf{g}g) \rangle \rangle, \quad \langle \mathcal{T} \star F, \Phi \rangle = \langle F(\mathbf{g}), \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g\mathbf{g}) \rangle \rangle,$$

где $\Phi \in \mathcal{D}(C_{R-r(\mathcal{T})})$. Основные свойства свертки на группах содержатся в [30, гл. 2, § 5, п. 1; 31, гл. 5]. В частности, $\Phi \star \mathcal{T}$ и $\mathcal{T} \star \Phi$ являются гладкими функциями вида

$$(\Phi \star \mathcal{T})(\mathbf{g}) = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(\mathbf{g}g^{-1}) \rangle, \quad (\mathcal{T} \star \Phi)(\mathbf{g}) = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g^{-1}\mathbf{g}) \rangle. \quad (58)$$

При этом

$$\langle F \star \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle F, \Phi \star \overset{\vee}{\mathcal{T}} \rangle, \quad \langle \mathcal{T} \star F, \Phi \rangle = \langle F, \overset{\vee}{\mathcal{T}} \star \Phi \rangle. \quad (59)$$

Лемма 13. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$. Тогда

$$(f \star^m T)(z) = m^{-n} (f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \quad (60)$$

$$(f \star^{-m} T)(z) = (f(\bar{z}) \star^m T)(\bar{z}), \quad (61)$$

$$(f \star^{-m} T)(z) = m^{-n} (f(m^{-1/2}\bar{z}) \star^1 T(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}). \quad (62)$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)})$ имеем (см. (57), (7))

$$\begin{aligned} \langle (f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \varphi \rangle &= m^{-n} \langle f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z), \varphi(m^{-1/2}z) \rangle \\ &= m^{-n} \langle f(m^{-1/2}z), \langle T(m^{-1/2}w), \varphi(m^{-1/2}(z+w)) e^{\frac{i}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(m^{-1/2}z), \langle T(w), \varphi(m^{-1/2}z+w) e^{\frac{im^{1/2}}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= m^n \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle = m^n \langle f \star^m T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

что доказывает (60). Далее, используя (6), (57) и радиальность распределения T , получаем

$$\begin{aligned} \langle (f(\bar{z}) \star^m T)(\bar{z}), \varphi \rangle &= \langle f(\bar{z}) \star^m T, \varphi(\bar{z}) \rangle = \langle f(\bar{z}), \langle T(w), \varphi(\bar{z} + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot \bar{w})} \rangle \rangle = \langle f(z), \langle T(\bar{w}), \varphi(z + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot w)} \rangle \rangle = \langle f \star^{-m} T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (61), которое вместе с (60) влечет (62).

Лемма 14. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_h(B_R)$. Тогда

$$\pi^{p,q,l}(f \star^m T) = (\pi^{p,q,l} f) \star^m T \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)})$ имеем (см. (41), (40), (12), (57))

$$\begin{aligned} \langle \pi^{p,q,l}(f \star^m T), \varphi \rangle &= \langle f \star^m T, \overline{\pi^{p,q,l} \varphi} \rangle \\ &= \left\langle f(z), \left\langle T(w), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}(z+w)) t_{l,l}^{p,q}(U) dU e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Аналогично, используя (57), (41), (40), (12) и радиальность распределения T , получаем

$$\begin{aligned} \langle (\pi^{p,q,l} f) \star^m T, \varphi \rangle &= \langle (\pi^{p,q,l} f)(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \langle T(w), \varphi(U^{-1}z+w) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \bar{w})} \rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle T(w), \varphi(U^{-1}(z+w)) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \overline{(U^{-1}w)})} \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle f(z), \left\langle T(w), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}(z+w)) t_{l,l}^{p,q}(U) dU e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая установленные соотношения, приходим к (63).

Лемма 15. Если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_h(C_R)$, то

$$\pi_m(F * \mathcal{T}) = (\pi_m F) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}) \quad \text{и} \quad \pi_m(\mathcal{T} * F) = (\pi_m F) \star^m (\pi_m \mathcal{T}) \quad (64)$$

в $B_{R-r(\mathcal{T})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(\mathcal{T})})$. В силу (24), (26) и (58) имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi_m(F * \mathcal{T}), \varphi \rangle &= \langle F * \mathcal{T}, \Pi_{-m} \varphi \rangle \\ &= \langle F(z, \tau), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} (\tau \eta)^{-m} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что

$$r(\pi_m \mathcal{T}) \leq r(\mathcal{T}), \quad (65)$$

и используя (57), (24), находим

$$\begin{aligned} \langle (\pi_m F) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}), \varphi \rangle &= \langle (\pi_m F)(z), \langle (\pi_m \mathcal{T})(w), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle (\pi_m F)(z), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \eta^{-m} \rangle \rangle \\ &= \langle F(z, \tau), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} (\tau \eta)^{-m} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая равенства выше, получаем первую формулу в (64). Вторая формула в (64) доказывается аналогично.

Лемма 16. Если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_b(C_R)$, то

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}) = (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) * \mathcal{T} = \Pi_m((\pi^{p,q,l} \pi_m F)^{-m} (\pi_m \mathcal{T})) \quad (66)$$

и

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\mathcal{T} * F) = \mathcal{T} * (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) = \Pi_m((\pi^{p,q,l} \pi_m F)^m (\pi_m \mathcal{T})) \quad (67)$$

в $C_{R-r}(\mathcal{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(C_{R-r}(\mathcal{T}))$, $\mathcal{S} = \mathcal{T}^\vee$. Тогда (см. (43), (59))

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}), \Phi \rangle &= \langle F * \mathcal{T}, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi * \mathcal{S}} \rangle, \\ \langle (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) * \mathcal{T}, \Phi \rangle &= \langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi * \mathcal{S} \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\Phi * \mathcal{S})} \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S}$ и $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\Phi * \mathcal{S})}$ с использованием (58), (42), (13) и радиальности распределения $\mathcal{S}(z, \tau)$ по переменной z . Имеем

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S})(z, \tau) &= \langle \mathcal{S}(w, \eta), \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi}((z, \tau)(w, \eta)^{-1}) \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}(w, \eta), \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi}(z - w, \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \zeta \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \zeta^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), d(p, q) (\bar{\tau} \eta)^m e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \varkappa) \varkappa^m d\varkappa t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\Phi * \mathcal{S})}(z, \tau) &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} (\Phi * \mathcal{S})(U^{-1}z, \zeta) (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \langle \mathcal{S}(w, \eta), \Phi((U^{-1}z, \zeta)(w, \eta)^{-1}) \rangle (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \langle \mathcal{S}(w, \eta), \Phi(U^{-1}z - w, \zeta \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \bar{w})}) \rangle (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \zeta \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), (\bar{\tau} \eta)^m e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \varkappa) \varkappa^m d\varkappa \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU. \end{aligned}$$

Тем самым $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S} = \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\Phi * \mathcal{S})}$, что влечет первое равенство в (66). Теперь в силу (47) и (64) получаем

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}) = \Pi_m \pi^{p,q,l} \pi_m(F * \mathcal{T}) = \Pi_m \pi^{p,q,l}((\pi_m F)^{-m} (\pi_m \mathcal{T})).$$

Отсюда и из (63) следует второе равенство в (66). Формула (67) доказывается аналогично.

Преобразование Фурье — Лапласа распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ является целой функцией $\widehat{T}$, заданной равенством

$$\widehat{T}(\lambda) = \langle T(t), e^{-i\lambda t} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Определим необходимые нам аналоги этого преобразования.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(G)$. Для $m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$(\mathcal{F}_m T)(\lambda) = \langle T, E_{\lambda,0,m}^{0,0,1} \rangle, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) = \langle \mathcal{T}, \mathfrak{E}_{\lambda,0,-m}^{0,0,1} \rangle. \quad (68)$$

Отметим, что

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m} = \mathcal{F}_m \pi_m \mathcal{T} = \mathcal{F}_{-m} \pi_m \mathcal{T} \quad (69)$$

(см. (24), (26), (33) и (34)).

Лемма 17. Пусть $j \in \{0, 1\}$. Для того чтобы четная целая функция w являлась преобразованием $\mathcal{F}_j$ от распределения из $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$ с носителем в $\overline{B}_r$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых констант c_1 и c_2 имело место неравенство

$$|w(\lambda)| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{c_2} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является частным случаем теорем 9.2 и 12.2 в [13].

Из леммы 17 и теоремы Винера — Пэли — Шварца для преобразования Фурье — Лапласа (см. [32, теорема 7.3.1]) следует существование и единственность биекций Λ_0 , Λ_1 , действующих из $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$, таких, что

$$\widehat{\Lambda_j T} = \mathcal{F}_j T, \quad r(\Lambda_j T) = r(T), \quad T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n), \quad j = 0, 1. \quad (70)$$

Лемма 18. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и

$$\mathcal{L}_m f = (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 f \quad \text{в } B_R$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$f \overset{m}{\star} T = (\mathcal{F}_m T)(\lambda) f \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ это утверждение установлено в [13, гл. 12, предложение 12.13]. Поскольку

$$\mathcal{F}_1(T(|m|^{-1/2}z)) = |m|^n \mathcal{F}_m T, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (72)$$

(см. (68), (7)), отсюда и из лемм 5, 13 получаем (71) для $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Наконец, случай $m = 0$ сводится к известной теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца $\Delta f = -\lambda^2 f$ (см. (8) и [12, часть 1, гл. 7, формула (7.10)]).

Лемма 19. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \mathcal{P}_m^{p,q}(\mathcal{D}'(C_R))$ и $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(C_R)$.

(1) Если $L_G F = (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 F$ в C_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$F \star \mathcal{T} = \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) F \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}. \quad (73)$$

(2) Если $L_G F = ((|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 + 2m(q-p))F$ в C_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\mathcal{T} \star F = \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) F \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим первое утверждение. По условию существует распределение $F_1 \in \mathcal{D}'(C_R)$ такое, что $F = \mathcal{P}_m^{p,q} F_1$. Отсюда и из (49), (66) имеем

$$F * \mathcal{T} = \Pi_m((\pi^{p,q} \pi_m F_1) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T})) \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}. \quad (74)$$

Далее, в силу (28), (29), (49) и (47) получаем в шаре B_R равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-m} \pi^{p,q} \pi_m F_1 &= \pi_m \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \pi^{p,q} \pi_m F_1 = \pi_m L_G \Pi_m \pi^{p,q} \pi_m F_1 = \pi_m L_G F \\ &= (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi_m F = (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi_m \Pi_m \pi^{p,q} \pi_m F_1 = (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi^{p,q} \pi_m F_1. \end{aligned}$$

Тогда (см. лемму 18 и (69))

$$\begin{aligned} (\pi^{p,q} \pi_m F_1) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}) &= (\mathcal{F}_{-m} \pi_m \mathcal{T})(\lambda) \pi^{p,q} \pi_m F_1 \\ &= \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) \pi^{p,q} \pi_m F_1 \quad \text{в } B_{R-r(\pi_m \mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Теперь (73) следует из (74), (49), (47) и (65).

Второе утверждение доказывается аналогично с использованием (67) и (39).

Лемма 20. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_b(G)$. Тогда

$$E_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \star^m T = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda (\mathcal{F}_m T)^{\langle M \rangle}(\lambda) E_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}, \quad (75)$$

$$\mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l} * \mathcal{T} = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}^{\langle M \rangle}(\lambda) \mathfrak{E}_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}, \quad (76)$$

$$\mathcal{T} * \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l} = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}^{\langle M \rangle}(\lambda) \mathcal{E}_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}. \quad (77)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (36) и леммы 18 следует, что

$$E_{\lambda,0,m}^{p,q,l} \star^m T = (\mathcal{F}_m T)(\lambda) E_{\lambda,0,m}^{p,q,l}.$$

Дифференцируя это равенство по переменной λ с использованием правила Лейбница и учитывая (34), приходим к (75). Далее, в силу (49), (33), (47), (28) и (51) имеем

$$\mathcal{P}_m^{p,q}(\mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}) = \mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad \mathcal{P}_m^{p,q}(\mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}) = \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}.$$

Поэтому, повторяя рассуждение выше, с помощью (37), (38) и леммы 19 получаем формулы (76), (77).

§ 4. Описание решений уравнений свертки

Пусть $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ненулевая целая функция, $\mathcal{Z}(w)$ — множество всех ее нулей, $\mathfrak{P} = \widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$ — алгебра Шварца целых функций экспоненциального типа, растущих не быстрее многочлена на вещественной оси. Изучение проблемы 1 и ее аналогов тесно связано с классом ненулевых функций $w \in \mathfrak{P}$, у которых $\mathcal{Z}(w) \neq \emptyset$ и для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(w)$ выполнены оценки

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leq c_1 \ln(2 + |\lambda|), \quad |w^{(m_\lambda)}(\lambda)| \geq (2 + |\lambda|)^{m_\lambda - c_2}, \quad (78)$$

где c_1, c_2 — положительные константы, зависящие только от w , и $m_\lambda = m_\lambda(w)$ — кратность нуля λ функции w (см. [12, часть 3, § 1.1; 13, гл. 8, § 8.1]). Множество, состоящее из всех таких функций и ненулевых констант, обозначим буквой

3. Отметим, что первое условие из (78) возникает, в частности, при определении гиперболических распределений (см. [20, § 5]), а второе условие отвечает за отсутствие быстро сближающихся нулей у w . Класс $\mathfrak{Z}$ является достаточно широким.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$T(t) = \begin{cases} (r+t)^\alpha (r-t)^\beta h(t), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geq r, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta \in (-1, +\infty)$, $h \in C^\infty[-r, r]$ и $h^{(\mu)}(-r)h^{(\nu)}(r) \neq 0$ при некоторых $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\widehat{T} \in \mathfrak{Z}$ (см. [13, гл. 8, § 8.1]).

При рассмотрении четной целой функции w вместо $\mathcal{Z}(w)$ и $m_\lambda(w)$ удобно использовать множество

$$\mathcal{Z}^+(w) = \{\lambda \in \mathcal{Z}(w) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0, i\lambda \notin (0, +\infty)\}$$

и соответственно кратность $\mathbf{m}_\lambda(w)$, совпадающую с $m_\lambda(w)$, если $\lambda \in \mathcal{Z}^+(w) \setminus \{0\}$, и равную $m_0(w)/2$, если $\lambda = 0 \in \mathcal{Z}^+(w)$.

Пусть $\mathcal{Z}^+(w) \neq \emptyset$ и $\mathcal{A}$ — функция на $\mathcal{Z}^+(w)$ со значениями в топологическом векторном пространстве X . Будем писать

$$\mathcal{B} \stackrel{X}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(w)} \mathcal{A}(\lambda), \quad (79)$$

если

$$\mathcal{B} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_j \in \mathcal{Z}^+(w), |\lambda_j| < N} \mathcal{A}(\lambda_j),$$

где сходимость понимается в пространстве X и $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — точки множества $\mathcal{Z}^+(w)$, занумерованные в порядке неубывания модулей (для точек с равными модулями нумерация выбирается произвольно). Если $\mathcal{Z}^+(w) = \emptyset$, то выражение в правой части (79) считается равным нулю.

Положим

$$\mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n) = \{T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{C}^n) : \mathcal{F}_m T \in \mathfrak{Z}\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{N}(G) = \{\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_h(G) \setminus \{0\} : \mathfrak{F}_{\mathcal{T},s} \in \mathfrak{Z} \text{ для всех } s \in \operatorname{spec} \mathcal{T}\},$$

где

$$\operatorname{spec} \mathcal{T} = \{s \in \mathbb{Z} : \pi_s \mathcal{T} \neq 0\}.$$

Из (70) и (72) следует, что $\mathfrak{N}_0(\mathbb{C}^n) = \Lambda_0^{-1}(\mathfrak{N}_h(\mathbb{R}))$, а при $m \neq 0$

$$T \in \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow T(|m|^{-1/2}z) \in \Lambda_1^{-1}(\mathfrak{N}_h(\mathbb{R})), \quad (80)$$

где $\mathfrak{N}_h(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{E}'_h(\mathbb{R}) : \widehat{T} \in \mathfrak{Z}\}$. Отметим также, что $\Pi_m(\mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)) \subset \mathfrak{N}(G)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$ (см. (69), (28)).

Если $T \in \mathcal{E}'_h(B_R) \cap \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)$, то решения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ уравнения $f \star^m T = 0$ можно описать следующим образом.

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $0 < R \leq \infty$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_h(B_R) \cap \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)$. Тогда для того чтобы

$$f \star^m T = 0 \quad \text{в } B_{R-r(T)}, \quad (81)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ имело место равенство

$$\pi^{p,q,l} f \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_m T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_m T)-1} c_{\lambda,N,m}^{p,q,l} E_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad (82)$$

где $c_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность в теореме следует из (75), (56) и (49). Установим необходимость. При $m = 1$ требуемое утверждение содержится в [13, теорема 17.8 (ii)], поскольку: 1) множество $\mathcal{Z}_T$, величина $n(\lambda, T)$ и функция $\varphi_{\lambda,\eta,p,q,l}$ из формулировки указанной теоремы соотносятся с нашими обозначениями следующим образом:

$$\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_1 T), \quad n(\lambda, T) = \mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_1 T) - 1, \quad \varphi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z) = E_{\lambda,\eta,1}^{p,q,l}(z);$$

2) класс $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$, используемый в теореме 17.8(ii) из [13], включает в себя класс $\mathfrak{N}_1(\mathbb{C}^n)$, определенный ранее (см. [12, часть 3, гл. 1, формулы (1.16)–(1.18); 13, формула (8.6) и предложение 8.2]).

Далее, пусть $m > 1$ и распределение $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ удовлетворяет (81). Тогда (см. (60))

$$f(m^{-1/2}z) \star T(m^{-1/2}z) = 0 \quad \text{в } B_{\sqrt{m}(R-r(T))}.$$

При этом $T(m^{-1/2}z) \in \mathfrak{N}_1(\mathbb{C}^n)$ в силу равенства (72). Используя установленный результат при $m = 1$, легко проверяемое соотношение

$$(\pi^{p,q,l} f)(m^{-1/2}z) = \pi^{p,q,l}(f(m^{-1/2}z))(z),$$

а также (72), (34), получаем (82) в случае $m > 1$.

Пусть теперь $m < 0$ и выполнено условие (81). Фиксируем $p, q \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Поскольку

$$f(\bar{z}) \stackrel{-m}{\star} T = 0 \quad \text{в } B_{R-r(T)}$$

(см. (61)), то из (49), (52) и (34) по доказанному выше имеем

$$(\pi^{p,q} f)(\bar{z}) = \pi^{q,p}(f(\bar{z}))(z)$$

$$\stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_{-m} T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_{-m} T)-1} \sum_{k=1}^{d(q,p)} \gamma_{\lambda,N,m}^{q,p,k} S_k^{q,p}(\sigma) \varphi_{\lambda,N}^{q,p}(\sqrt{-m}\rho),$$

где $\gamma_{\lambda,N,m}^{q,p,k} \in \mathbb{C}$. Учитывая, что $\mathcal{F}_{-m} = \mathcal{F}_m$ и $S_k^{q,p}(\bar{\sigma}) \in \mathcal{H}^{p,q}$, отсюда получаем

$$(\pi^{p,q} f)(z) \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_m T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_m T)-1} \sum_{j=1}^{d(p,q)} c_{\lambda,N,m}^{p,q,j} S_j^{p,q}(\sigma) \varphi_{\lambda,N}^{q,p}(\sqrt{-m}\rho),$$

где $c_{\lambda,N,m}^{p,q,j} \in \mathbb{C}$. Действуя на обе части этого разложения оператором $\pi^{p,q,l}$ и используя (49), (44), (40), (51), (34), приходим к (82) в случае $m < 0$.

Наконец, если $m = 0$, то (57) является обычной евклидовой сверткой, а $\mathcal{F}_m T$ совпадает со сферическим преобразованием распределения T в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. (68), (34), (35) и [12, часть 1, гл. 6, формула (6.14)]). Поэтому разложение (82) при $m = 0$ непосредственно следует из (63), (34), (35) и [12, часть 3, гл. 2, теорема 2.4].

Перейдем теперь к описанию классов

$$\mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R) = \{F \in \mathcal{D}'(C_R) : F * \mathcal{T} = 0 \text{ в } C_{R-r(\mathcal{T})}\}$$

и

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R) = \{F \in \mathcal{D}'(C_R) : \mathcal{T} * F = 0 \text{ в } C_{R-r(\mathcal{T})}\},$$

где $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R) \cap \mathfrak{N}(G)$.

Теорема 2. Пусть $0 < R \leq \infty$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R) \cap \mathfrak{N}(G)$ и

$$r(\mathcal{T}) = r(\pi_m \mathcal{T}) \quad \text{для любого } m \in \text{спес } \mathcal{T}. \quad (83)$$

Тогда $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ (соответственно $F \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$) в том и только том случае, когда

$$\mathcal{D}_m^{p,q,l} F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}, \quad (84)$$

для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ (соответственно когда

$$\mathcal{D}_m^{p,q,l} F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} b_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad b_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}, \quad (85)$$

для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай класса $\mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$. Пусть $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ и $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Тогда из (83) и (64) имеем

$$(\pi_m F)^{-m} \star (\pi_m \mathcal{T}) = 0 \quad \text{в } B_{R-r(\pi_m \mathcal{T})}.$$

При этом $\pi_m \mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(B_R) \cap \mathfrak{N}_{-m}(\mathbb{C}^n)$ (см. (69)). Отсюда по теореме 1

$$\pi^{p,q,l} \pi_m F \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} E_{\lambda,N,-m}^{p,q,l}, \quad a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором Π_m и используя (47), (33) и (26), приходим к (84). Обратно, если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$ и для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ справедливо разложение (84), то $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ в силу (76), (66), (56) и (49).

Для класса $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ доказательство проводится аналогично (см. (64), (67), (77)).

Следствие 1. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{N}(G)$. Тогда для того чтобы $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(G)$ (соответственно $F \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(G)$), необходимо и достаточно, чтобы для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ и $R = \infty$ имело место разложение (84) (соответственно разложение (85)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(G)$, то $(\pi_m F)^{-m} \star (\pi_m \mathcal{T}) = 0$ на $\mathbb{C}^n$ для любого $m \in \text{спес } \mathcal{T}$ (см. (64)). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, приходим к требуемому результату.

В заключение отметим, что при $0 < R < \infty$ условие (83) в теореме 2, вообще говоря, опустить нельзя. Действительно, пусть $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{T} = \Pi_k \delta + \Pi_{k+1} u, \quad F = \Pi_k v,$$

где δ — дельта-функция в нуле на $\mathbb{C}^n$, распределение $u \in \mathfrak{N}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ таково, что $r(u) = \varrho \in (0, R)$ (см. (80), (70) и пример 1), v — ненулевая радиальная непрерывная функция на B_R , равная нулю в $B_{R-\varrho}$. Тогда $r(\mathcal{T}) = \varrho$ и $\mathcal{T} \in \mathfrak{N}(G)$ в силу соотношений

$$\text{спес } \mathcal{T} = \{k, k+1\}, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},k} = 1 \in \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},k+1} = \mathcal{F}_{k+1}u \in \mathfrak{Z}$$

(см. (28), (69)). Используя радиальность функции v и (42), (66), (28), (40), заключаем, что $F = \mathcal{P}_k^{0,0,1}F$ и $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$. Однако для указанных F и $\mathcal{T}$ разложение (84) при $m = k$, $p = q = 0$, $l = 1$ приводит к противоречивому равенству $v \equiv 0$ в B_R , поскольку $\mathcal{L}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},k}) = \emptyset$.

Благодарность. Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и замечания, позволившие устранить неточности и улучшить первоначальный вариант статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. V. 33. P. 109–143.
2. Berenstein C. A., Taylor B. A. Mean-periodic functions // Int. J. Math. Math. Sci. 1980. V. 3, N 2. P. 199–235.
3. Леонтьев А. Ф. Дифференциально-разностные уравнения // Мат. сб. 1949. Т. 24, № 2. С. 347–374.
4. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, № 5. С. 99–141.
5. Delsarte J. Les fonctions 'moyenne-périodiques' // J. Math. Pures Appl. 1935. V. 14, N 1–4. P. 403–453.
6. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 857–929.
7. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division. IV // Am. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
8. Ehrenpreis L., Malliavin P. Invertible operators and interpolation in AU-spaces // J. Math. Pures Appl. 1974. V. 53. P. 165–182.
9. Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 2. С. 269–328.
10. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
11. Леонтьев А. Ф. Представление функций рядами экспонент. Уфа: Диалог, 2017.
12. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
13. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl. London Limited, 2009.
14. Беренштейн К. А., Струппа Д. К. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111.
15. Паламонов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 72. С. 5–134.
16. Ehrenpreis L., Mautner F. I. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. II // Trans. Am. Math. Soc. 1957. V. 84. P. 1–55.
17. Bagchi S. Ch., Sitaram A. Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups // Pacific J. Math. 1979. V. 84, N 2. P. 241–250.
18. Weit Y. On Schwartz's theorem for the motion group // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1980. V. 30, N 1. P. 91–107.
19. Кучмент П. А. Сферическое представление решений инвариантных дифференциальных уравнений на римановом симметрическом пространстве некомпактного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 6. С. 1260–1273.

20. Berenstein C. A., Gay R. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
21. Berenstein C. A. Spectral synthesis on symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.
22. Scott D., Sitaram A. Some remarks on the Pompeiu problem for groups // Proc. Am. Math. Soc. 1988. V. 104, N 4. P. 1261–1266.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. I, II. М.: Наука, 1973.
24. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
25. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
26. Thangavelu S. Lectures on Hermite and Laguerre expansions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
27. Smith R. T. The spherical representations of groups transitive on $\mathbb{S}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1975. V. 24, N 4. P. 307–325.
28. Волчков Вит. В. О функциях с нулевыми шаровыми средними на комплексных гиперболических пространствах // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 4. С. 504–512.
29. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
30. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
31. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
32. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 18 января 2026 г.

После доработки 7 июня 2026 г.

Принята к публикации 8 июня 2026 г.

Волчков Виталий Владимирович (ORCID 0000-0003-4274-0034)

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 283048
danil.bystrov@gmail.com

Волчкова Наталья Петровна (ORCID 0000-0001-6193-2782)

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001;
Донецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк 283000
volna936@gmail.com

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРЫ n СОГЛАСОВАННЫХ СКОБОК ЛИ

В. Ю. Губарев, Ч. Чжан

Аннотация. Изучается (мультипликативная) универсальная обертывающая алгебра в смысле В. Гинзбурга и М. Капранова $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ набора n согласованных скобок Ли. При помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры $U(\mathfrak{g})$. Найдена асимптотика скорости роста алгебры $U(\mathfrak{g})$ при $n, \dim \mathfrak{g} \gg 1$.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.509

Ключевые слова: универсальная мультипликативная обертывающая алгебра, алгебра Ли согласованных скобок, скорость роста, базис Гребнера — Ширшова.

Введение

Алгебра $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, [\cdot, \cdot]_2 \rangle$ над полем $\mathbb{k}$ принадлежит многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, если $\alpha[\cdot, \cdot]_1 + \beta[\cdot, \cdot]_2$ есть скобка Ли для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Аналогично определяется многообразие Lie_n алгебр $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, \dots, [\cdot, \cdot]_n \rangle$ n согласованных скобок Ли. Свободные алгебры в многообразии Lie_2 исследовались в работах [1–3]. Кожулевость операды, соответствующей многообразию Lie_2 , была показана в [4].

В 1994 г. В. Гинзбург и М. Капранов [5] определили так называемую (мультипликативную) универсальную обертывающую ассоциативную алгебру $U(A)$ данной алгебры A . Ключевое свойство такой обертывающей заключается в том, что категория модулей над A и категория левых модулей над $U(A)$ эквивалентны.

В 2022 г. А. Хорошкин активно исследовал [6] универсальную мультипликативную обертывающую алгебру в смысле Гинзбурга и Капранова, получив ее явное задание в терминах порождающих и соотношений. Там же А. Хорошкин установил, что универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$, принадлежащей многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, удовлетворяет свойству Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Последнее означает, в частности, что базис $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ не зависит от обеих скобок Ли, заданных на $\mathfrak{g}$. В работе 2022 г. [7] В. Ю. Губарев при помощи техники базисов Гребнера — Ширшова нашел базис алгебры $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ и вычислил ее скорость роста как $m + 1$, где $m = \dim \mathfrak{g}$.

В работе при помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ для произвольного n . Обозначим $m = \dim \mathfrak{g}$. При помощи частично коммутативных алгебр показано, что при $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ асимптотически равна $\alpha n m$, где $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$, а $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода.

В данной работе считаем, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

Основные сведения о базисах Гребнера — Ширшова

Пусть X непусто, порядок $\leq$, заданный на множестве X^* всех слов в алфавите X , называется *мономиальным*, если из $u \leq v$ следует $wu \leq wv$ и $uw \leq vw$ для любого $w \in X^*$.

Пусть $(X, \leq)$ вполне упорядочено. Зададим на X^* порядок следующим образом: $u = x_1 \dots x_n < v = y_1 \dots y_m$, если и только если $n < m$ или $n = m$ и найдется i такое, что $x_i < y_i$, а $x_j = y_j$ для всех $j < i$. Полученный порядок называется порядком deg-lex , и он мономиален.

Зафиксируем некоторое множество X и мономиальный порядок $\leq$ на множестве X^* такой, что $(X^*, \leq)$ является вполне упорядоченным множеством.

Через $\text{As}(X)$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру, порожденную множеством X . Пусть $f \in \text{As}(X)$ — ассоциативный некоммутативный многочлен от X , $f \neq 0$. Обозначим через $\bar{f} \in X^*$ старшее слово многочлена f — самое большое $u \in X^*$, входящее в f с ненулевым коэффициентом. Многочлен f называется *унитарным*, если старшее слово $\bar{f}$ входит в него с коэффициентом, равным единице.

Свойство мономиальности порядка обеспечивает равенство $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \in X^*$ для любых ненулевых $f, g \in \text{As}(X)$.

Пусть $S \subset \text{As}(X)$ — некоторое множество унитарных многочленов. Слово $u \in X^*$ называется *редуцированным относительно S* , если u нельзя представить в виде $u = u_1 \bar{f} u_2$ ни для каких $u_1, u_2 \in X^*$, $f \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, причем $\omega = \bar{f} = u_1 \bar{g} u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in X^*$. Тогда многочлен $h = f - u_1 g u_2$ называется *композицией включения многочленов f и g* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, $\omega \in X^*$ — такое слово, что $\omega = \bar{f}u = v\bar{g}$ для некоторых слов $u, v \in X^*$, причем длина ω строго меньше суммы длин $\bar{f}$ и $\bar{g}$. Последнее условие означает, что подслова $\bar{f}$ и $\bar{g}$ пересекаются, а именно, непустое начало слова $\bar{g}$ совпадает с окончанием слова $\bar{f}$. *Композицией пересечения f и g* называется многочлен $h = fu - vg$.

Как видно из определений, с каждой композицией связано некоторое слово $\omega \in X^*$, которое равно большему старшему слову для композиций включения и «объединению» старших слов для композиций пересечения. Чтобы подчеркнуть связь слова ω с той или иной композицией многочленов f и g , используется следующее обозначение: $h = (f, g)_\omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$ и $\omega \in X^*$ — некоторое слово. Многочлен h называется *тривиальным относительно (S, ω)* , если $h = \sum \lambda_i u_i f_i v_i$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$, $f_i \in S$, $u_i, v_i \in X^*$, причем $u_i \bar{f}_i v_i < \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Множество S называется *базисом Гребнера — Ширшова* в $\text{As}(X)$, если любая композиция $(f, g)_\omega$ для $f, g \in S$ тривиальна относительно (S, ω) .

Будем использовать стандартное обозначение $\text{As}(X \mid S)$ копредставления для алгебры $A \cong \text{As}(X)/(S)$.

Теорема 1. Пусть S — некоторое множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(C1) S является базисом Гребнера — Ширшова;

(C2) если $0 \neq f \in (S)$, то слово $\bar{f}$ не является редуцированным относительно S ;

(C3) образы редуцированных относительно S слов при естественном гомоморфизме $\text{As}(X) \rightarrow \text{As}(X \mid S)$ образуют базис алгебры $\text{As}(X \mid S)$ как векторного пространства.

Базис $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Пусть X — базис алгебры $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок Ли, через $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ обозначим попарно не пересекающиеся множества, каждое из которых биективно X . Согласно следствию 2.11 из статьи [6] мультипликативная универсальная обертывающая ассоциативная алгебра данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок задается как $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(i)} + [x, y]_i = 0$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} + ([x, y]_i)^{(j)} + ([x, y]_j)^{(i)} = 0, i < j$.

В [6] для случая $n = 2$ было установлено свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта: существует такая фильтрация на $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$, что $\text{gr } U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}) \cong U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0$ есть векторное пространство $\mathfrak{g}$ с тривиальными скобками $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$. Наша ближайшая цель — установить свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта для произвольного n . Свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта означает, что для алгебры $\mathfrak{g}$ с n согласованными скобками Ли и ее универсальной обертывающей алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ можно найти такую подходящую фильтрацию, что ее градуированная алгебра изоморфна $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0$ представляет собой векторное пространство $\mathfrak{g}$ с n тривиальными скобками Ли.

Мы не будем давать в силу его громоздкости строгого определения операды [5]. Тем не менее попытаемся пояснить суть этого понятия.

Набор линейных пространств $\{\mathcal{C}(n)\}_{n \geq 1}$ над полем $\mathbb{k}$ и множество линейных отображений (правило композиции)

$$\text{Comp}^\pi: \mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(m_n) \rightarrow \mathcal{C}(m),$$

где $\pi = (m_1, \dots, m_n)$ есть n -разбиение числа m , называется *операдой*, если для правила композиции выполнены естественные аналоги ассоциативности и наличия нейтрального элемента. Мы также полагаем, что есть согласованное с правилом композиции действие группы S_n на пространствах $\mathcal{C}(n)$.

Операда $\mathcal{P}$ называется *бинарной*, если она порождена пространством операций $E = \mathcal{P}(2)$, и *квадратичной*, если все соотношения между операциями из $\mathcal{P}(2)$ задаются действием S_2 на $\mathcal{P}(2)$ и определяющими соотношениями R пространства $\mathcal{P}(3)$. Именно, пространство полилинейных термов степени 3 будем отождествлять с $E(3) = \mathbb{k}S_3 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (E \otimes E)$, $\mathcal{P}(3) = E(3)/R$, действие (12) на $E \otimes E$ определяется как $\text{id} \otimes (12)$. Полученную операду будем обозначать через $\mathcal{P}(E, R)$.

Для бинарной квадратичной операды $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ кожух-двойственная операда $\mathcal{P}^!$ определяется как $\mathcal{P}(E^\vee, R^\perp)$, где $E^\vee$ — дуальное пространство к пространству E , снабженное знакопеременным действием группы S_2 , а $R^\perp$ — подпространство в $E^\vee(3) \cong E(3)^\vee$, ортогональное к R .

Алгебра A называется *градуированной*, если $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$, где A_i является подпространством в A для любого натурального i и при этом $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$. Напомним, что по каждой коммутативной (ассоциативной) градуированной алгебре $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ можно задать симметрическую операд $\mathcal{O}_A$, пространство $\mathcal{O}_A(n)$ n -арных операций еоторого изоморфно A_{n-1} , действие S_n берется тривиальным, а правила композиции определяются при помощи умножения в алгебре A так:

$$\circ_i: \mathcal{O}_A(m) \otimes \mathcal{O}_A(n) = A_{m-1} \otimes A_{n-1} \rightarrow A_{m+n-2} = \mathcal{O}_A(m+n-1).$$

Предложение. Имеется изоморфизм операд $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]} \simeq \text{Lie}_n^!$.

Доказательство. Для того чтобы доказать это утверждение, необходимо и достаточно (см. следствие 2.2.9 из [5]) установить, что $D \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольных алгебр $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}$ и $B \in \text{Lie}_n$. Поскольку алгебра $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является свободной в классе $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}$ -алгебр, достаточно проверить условие $A \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольной алгебры $B \in \text{Lie}_n$. Обозначим $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}(2) = L(x_1, \dots, x_n)$ и $\text{Lie}_n(2) = L(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Ясно, что операция $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \mu_i$ в $(A \otimes B)(2)$ антикоммутирует, поскольку $(x_i \otimes \mu_i)^{(12)} = x_i^{(12)} \otimes \mu_i^{(12)} = x_i \otimes (-\mu_i)$. Нам нужно проверить выполнение тождества Якоби для ξ :

$$1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в левой части выражения, получаем при x_i^2 выражение

$$1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i),$$

которое равно нулю из-за выполнения тождества Якоби для операции μ_i в $B \in \text{Lie}_n$. При $x_i x_j$, $i \neq j$, получаем выражение

$$\begin{aligned} & - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) + 1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) \\ & - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) + 1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j), \end{aligned}$$

равное нулю из-за выполнения тождества Якоби для операций $\mu_i, \mu_j, \mu_i + \mu_j$ в $B \in \text{Lie}_n$. $\square$

Перед тем как установить важное свойство мультипликативной универсальной обертывающей от алгебры набора согласованных скобок Ли, приведем необходимые сведения. Градуированная ассоциативная алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ называется *кожулевой* [8], если 1) A_0 полупроста и 2) A_0 , рассматриваемая как левый A -модуль, допускает градуированную проективную резольвенту

$$\dots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \twoheadrightarrow A_0,$$

при этом каждый из градуированных модулей P^i порождается своей i -й компонентой, т. е. $P^i = AP_i^i$.

Следствие 1. Пусть $n \geq 1$. Для пары $(U_{\text{Lie}_n}, \text{Lie}_n)$ выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Доказательство. Известно, что алгебра многочленов $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ кожулева (здесь $A_0 \cong \mathbb{K}$). Согласно теореме 5.3 из [9] кожулевість алгебры A влечет кожулевість операды $\mathcal{O}_A$. По теореме 4.1 из [6] (см. также обсуждение в примере 4.6 из [6]) выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта. $\square$

Алгебру $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок Ли будем обозначать через $\mathfrak{g}_0$, если все n скобок на ней тривиальны. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай алгебры $\mathfrak{g}_0$. Полагаем, что множество X вполне упорядочено. Тогда $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)} y^{(i)} = y^{(i)} x^{(i)}$, $x > y$,
- 2) $x^{(i)} y^{(j)} - y^{(j)} x^{(i)} + x^{(j)} y^{(i)} - y^{(i)} x^{(j)} = 0$, $x > y$, $i < j$.

Продолжаем порядок с множества X на множество $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ так: $x^{(i)} > y^{(j)}$, если $i < j$ или $i = j$ и $x > y$. На слова из $\text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \rangle$ данный порядок распространяем по правилу deg-lex.

Теорема 2. Соотношения S образуют базис Гребнера — Ширшова алгебры $U_{\text{Lie}_n}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим возможные композиции соотношений. Ясно, что композиция вида $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$, где $x > y > z$, тривиальна.

1) $x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)} &\xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(i)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(i)} \\
 &\quad - (y^{(j)}x^{(i)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)}) + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(x^{(j)}y^{(i)} + x^{(i)}y^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)}x^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)}) + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad \quad - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)} \equiv y^{(i)}x^{(i)}z^{(j)} \pmod{(S, \omega)}.
 \end{aligned}$$

2) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)} &\xrightarrow{(2)} y^{(j)}x^{(i)}z^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - (x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)}) + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}) \\
 &\quad \xrightarrow{(1)(2)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + (z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) \\
 &\rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
 &\quad \quad + z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
 &\quad \quad + x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(j)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(j)}.
 \end{aligned}$$

3) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$, где $x > y > z$, $i < j < k$. С одной стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& \underline{x^{(i)}y^{(j)}}z^{(k)} \xrightarrow{(2)} y^{(j)}\underline{x^{(i)}z^{(k)}} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} y^{(j)}(\underline{z^{(k)}x^{(i)}} - x^{(k)}z^{(i)} + z^{(i)}x^{(k)}) - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}\underline{x^{(j)}z^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \quad - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + \underline{y^{(i)}z^{(j)}x^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad - x^{(j)}\underline{y^{(i)}z^{(k)}} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)} \\
& \quad + \underline{x^{(j)}y^{(k)}z^{(i)}} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} \\
& \quad - \underline{x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)}} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} \\
& \quad + \underline{y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)}} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} \\
& \quad - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \\
& \quad + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)} - \underline{x^{(i)}y^{(k)}z^{(j)}} + \underline{x^{(i)}z^{(j)}y^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} \underline{x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)}} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}y^{(i)}z^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} \\
& \quad + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}\underline{x^{(j)}y^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}\underline{x^{(i)}y^{(j)}} - x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} - y^{(k)}\underline{x^{(i)}z^{(j)}} + x^{(k)}\underline{y^{(i)}z^{(j)}} \\
& \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} - z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} \\
& \quad - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}\underline{x^{(i)}y^{(k)}} \\
& \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} \\
& \quad - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} \\
& \quad + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)}.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что в обеих ветвях редукции получены одни и те же выражения. Тем самым мы проверили тривиальность всех композиций и S является базисом Гребнера — Ширшова. $\square$

Следствие 2. В качестве базиса алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$ берем редуцированные относительно S слова, т. е. слова, не содержащие в качестве подслов $x^{(i)}y^{(i)}$, $x > y$, и $x^{(i)}y^{(j)}$, $x > y$, $i < j$, для $x, y \in X$.

Скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Экспоненциальная скорость роста $\rho(A)$ ассоциативной алгебры A относительно порождающего множества X вычисляется как

$$\rho(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

где $a_n = \dim V_n$, V_n — линейная оболочка слов длины n в алфавите X .

Вопрос. Пусть $\mathfrak{g} \in \text{Lie}_n$, $\dim \mathfrak{g} = m$. Чему равна скорость роста $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}))$ относительно порождающего множества $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ при $|X| = m$?

Покажем, как можно переформулировать вопрос в терминах более просто задаваемой ассоциативной алгебры.

Рассмотрим алгебру $V_{n,m} = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid T \rangle$, где T состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}$, $x > y$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} = y^{(j)}x^{(i)}$, $x > y$, $i < j$.

Это так называемая частично коммутативная алгебра, т. е. ассоциативная алгебра, получающаяся факторизацией свободной ассоциативной алгебры по множеству соотношений коммутирования, выполненных для определенных пар порождающих элементов. В работе 1969 г. [10] Картье и Фоата ввели понятие частично коммутативного моноида. Пусть задан простой граф $G(V, E)$, тогда *частично коммутативный моноид* $M(G)$ определяется через копредставление следующим образом: $M\langle V \mid v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E \rangle$, т. е. как фактор свободного моноида $M\langle V \rangle$ по отношению эквивалентности, порожденной множеством $\{v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E\}$. Позднее изучались частично коммутативные ассоциативные алгебры [11], частично коммутативные алгебры Ли [12] и другие подобные структуры. Частично коммутативную ассоциативную алгебру, построенную по графу G , будем обозначать через $\text{As}(G)$.

Легко проверить, что соотношения T образуют базис Гребнера — Ширшова и поэтому множество редуцированных относительно соотношений S и T слов совпадает. Отсюда $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})) = \rho(V_{n,m})$.

Введем простой конечный граф G так: вершины G соответствуют порождающим $x^{(i)}$, а ребро между двумя вершинами проводится, если и только если перестановочность соответствующих этим вершинам порождающих входит в T . Известно [13], что $\rho(\text{As}(G)) = \beta(G)$, где $\beta(G)$ — наибольший по модулю вещественный корень многочлена

$$PC(G, x) = x^{t_0} - c_1(G)x^{t_0-1} + c_2(G)x^{t_0-2} + \dots + (-1)^{t_0-1}c_{t_0-1}x + (-1)^{t_0}c_{t_0}(G),$$

где c_i обозначает количество клик размера i в графе G ($c_0 := 1$), а t_0 — размер максимальной клики в G .

Поскольку мы работаем с очень конкретным графом G , мы сможем явно посчитать все коэффициенты $c_i(G)$.

Всего в графе G вершин $mn = C_m^1 C_n^1$, ребер, возникающих из первых соотношений — $C_m^2 C_n^1$, а из вторых — $C_m^2 C_n^2$, здесь C_m^2 отвечает за выбор подходящих x, y из алфавита X , а C_n^2 отвечает за выбор пары индексов (i, j) .

Для произвольного $1 \leq k \leq m$ сперва выбираем k букв $x_1, \dots, x_k \in X$, далее выбираем C_n^s способами s -элементное подмножество $Z \subset \{0, \dots, n-1\}$. Теперь

для каждого Z мы C_{k-1}^{s-1} способами расставляем перегородки, что соответствует тому, как мы распределяем элементы Z по индексам $i_1, \dots, i_k$. Тем самым

$$c_k = C_m^k (C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k).$$

Комбинаторно легко увидеть, что

$$C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Отметим, что m — размер максимальной клики рассматриваемого графа. Из предыдущих выводов получаем

$$\begin{aligned} PC(G, x) &= x^m - C_m^1 C_n^1 x^{m-1} + C_m^2 C_{n+1}^2 x^{m-2} + \dots + (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k} \\ &\quad + \dots (-1)^m C_{n+m-1}^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k}. \end{aligned}$$

При помощи **WolframAlpha** мы приближенно вычислили $\beta(G)$ для малых значений n, m :

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4.73	6.45	8.16	9.87	11.58	13.29	15.00	16.71	18.42	20.12
4	6.45	8.87	11.29	13.70	16.11	18.52	20.93	23.33	25.74	28.15
5	8.16	11.29	14.40	17.51	20.62	23.72	26.83	29.93	33.03	36.14
6	9.87	13.70	17.51	21.32	25.12	28.92	32.72	36.52	40.31	44.11
7	11.58	16.11	20.62	25.12	29.62	34.11	38.60	43.10	47.59	52.08
8	13.29	18.52	23.72	28.92	34.12	39.30	44.49	49.67	54.85	60.04
9	15.00	20.93	26.83	32.72	38.60	44.49	50.36	56.24	62.12	68.00
10	16.71	23.33	29.93	36.52	43.10	49.67	56.24	62.81	69.38	75.95
11	18.42	25.74	33.03	40.31	47.59	54.85	62.12	69.38	76.65	83.91

Для поиска асимптотики $\beta(G)$ нам понадобится следующая

Лемма. Если $m \geq n$, то

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство многочленов сводится после раскрытия скобок и подсчета коэффициентов при x^{m-k} к проверке комбинаторного равенства

$$\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} = C_{n+k-1}^k C_m^k. \quad (1)$$

Первый множитель выбираем из первой скобки $(x-1)^{m-n+1}$ с коэффициентом $(-1)^s C_{m-n+1}^{m-n+1-s} = (-1)^s C_{m-n+1}^s$. Из второй скобки $x^{n-1-(k-s)}$ приходит с коэффициентом $(-1)^{k-s} C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s}$. Перемножая $(-1)^s$ и $(-1)^{k-s}$, получаем $(-1)^k$.

Рассмотрим случай $k < n$. Левую часть (1) можно представить как

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} \\ &= C_{m+k}^k C_{n-1}^k {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1), \quad (2) \end{aligned}$$

где ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$ обозначает обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i (c)_i}{(d)_i (e)_i} \cdot \frac{z^i}{i!},$$

здесь

$$(x)_i = \frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ x(x+1) \dots (x+i-1), & i > 0, \end{cases}$$

обозначает символ Похгаммера.

Известная теорема Заальшутца (1890) гласит, что

$${}_3F_2(a, b, -N; c, 1+a+b-c-N; 1) = \frac{(c-a)_N (c-b)_N}{(c)_N (c-a-b)_N}.$$

Тем самым в формуле (2) переписываем

$$\begin{aligned} {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1) &= \frac{(-k-n+1)_k (-m)_k}{(-m-k)_k (-n+1)_k} \\ &= \frac{(-k-n+1) \dots (-n) \cdot (-m) \dots (-m+k-1)}{(-m-k) \dots (-m-1) \cdot (-n+1) \dots (-n+k)} \\ &= \frac{(k+n-1) \dots (n) \cdot (m) \dots (m-k+1)}{(m+k) \dots (m+1) \cdot (n-1) \dots (n-k)} \\ &= \frac{(C_{n+k-1}^k \cdot k!) \cdot (C_m^k \cdot k!)}{(C_{m+k}^k \cdot k!) \cdot (C_{n-1}^k \cdot k!)} = \frac{C_{n+k-1}^k C_m^k}{C_{m+k}^k C_{n-1}^k}, \end{aligned}$$

что и дает после домножения на $C_{m+k}^k C_{n-1}^k$ правую часть (1).

Рассмотрим случай $k \geq n$. Легко видеть, что $C_{n-1}^{k-s} = 0$ при всех $s = 0, \dots, k-n$. Поэтому совершим в левой части (1) замену индекса $j = s - (k - n + 1)$; тогда левая часть (1) примет вид

$$L = \sum_{j=0}^{n-1} C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{m+n-j-1}^{n-j-1} C_{n-1}^j.$$

Заметим, что при $k = m$ получаем $L = C_{m+n-1}^{n-1}$, что совпадает с правой частью (1). Поэтому можно считать, что $k < m$. Теперь введем $\tilde{k} = n - 1$, $\tilde{n} = k + 1$. Для этих параметров равенство (1) уже доказано; запишем его:

$$\sum_{j=0}^{\tilde{k}} C_{m-\tilde{n}+1}^j C_{m+\tilde{k}-j}^{\tilde{k}-j} C_{\tilde{n}-1}^{\tilde{k}-j} = C_{\tilde{n}+\tilde{k}-1}^{\tilde{k}} C_m^{\tilde{k}}.$$

Подставляя новые параметры в правую часть последнего равенства, получаем $C_{n+k-1}^{n-1} C_m^{n-1}$; отсюда его правая часть отличается от правой части (1) только вторым сомножителем. Введем $\Delta = C_m^k / C_m^{n-1}$. Умножим последнее равенство на Δ и внесем его под знак суммы в левой части. Подставляя выражения для $\tilde{n}$ и $\tilde{k}$, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta C_{m-k}^j C_{m+n-1-j}^{n-1-j} C_k^{n-1-j} = C_{n+k-1}^k C_m^k.$$

При $j > m - k$ обе части следующего равенства равны нулю, поэтому достаточно рассмотреть $0 \leq j \leq m - k$. Распишем

$$\begin{aligned} \Delta C_{m-k}^j C_k^{n-1-j} &= \frac{(n-1)!(m-n+1)!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(m-k)!}{j!(m-k-j)!} \cdot \frac{k!}{(n-1-j)!(k-n+1+j)!} \\ &= \frac{(n-1)!(m-n+1)!}{j!(m-k-j)!(n-1-j)!(k-n+1+j)!} = C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в левую часть последнего равенства, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{m+n-1-j}^{n-1-j} C_{n-1}^j = C_{n+k-1}^k C_m^k,$$

при этом левая часть равенства полностью совпадает с L . $\square$

Перед тем как вывести асимптотику $\beta(G)$, напомним определение функции Бесселя первого рода: $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2/4)^k}{k!k!}$.

Ниже будем использовать следующие математические знаки: $\gg$ — «много больше», $\ll$ — «много меньше», $\sim$ — «асимптотически эквивалентны».

Теорема 3. При $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $\beta(G) = \alpha mn + o(mn)$, где $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша цель — показать, что α удовлетворяет следующему соотношению:

$$0 = \alpha^m - \frac{\alpha^{m-1}}{1!1!} + \frac{\alpha^{m-2}}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha^{m-k}}{k!k!} + \dots \quad (3)$$

Его наибольший корень равен $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, где q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$.

СЛУЧАЙ 1: $n - 1 \geq m$. Докажем сперва локально равномерную сходимость последовательности функций

$$P_{n,m}(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} y^k$$

к предельной функции

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} y^k$$

на $\mathbb{C}$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Обозначим модуль коэффициента при y^k через $a_k(n, m)$. Тогда

$$a_k(n, m) = \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} = \frac{1}{(k!)^2} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m} \right) \right] \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{n} \right) \right].$$

Зафиксируем индекс k . Легко видеть, что выполняется поточечная сходимость коэффициентов:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} a_k(n, m) = \frac{1}{(k!)^2}.$$

Для доказательства локально равномерной сходимости зафиксируем произвольный компакт

$$K_R = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| \leq R\},$$

где $R > 0$. Нам необходимо найти не зависящую от n и m мажоранту для общего члена ряда.

Используя неравенство $1 + x \leq e^x$ и условие $k \leq m < n$, оцениваем

$$(k!)^2 a_k(n, m) \leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{n}\right) \leq \prod_{j=0}^{k-1} e^{j/n} = e^{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} j} = e^{\frac{k(k-1)}{2n}} \leq e^{k/2}.$$

Отсюда

$$\left| (-1)^k \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} y^k \right| \leq \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}.$$

Обозначим

$$D_k = \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}.$$

Из того, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_{k+1}}{D_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(R\sqrt{e})^{k+1} (k!)^2}{((k+1)!)^2 (R\sqrt{e})^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R\sqrt{e}}{(k+1)^2} = 0,$$

по признаку Даламбера ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}$$

абсолютно сходится для любого фиксированного $R > 0$.

Согласно признаку Вейерштрасса из сходимости мажорирующего числового ряда следует равномерная сходимость функционального ряда на компакте K_R . В силу произвольности выбора R последовательность $P_{n,m}(y)$ сходится локально равномерно на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ к функции $f(y)$.

Положим $N = mn$ и $K = |E(G)|$. Согласно утверждению 7.1 из [14] при $K \leq N^2/4$ выполнено

$$\beta(G) \geq \frac{N + \sqrt{N^2 - 4K}}{2} \geq \frac{N}{2}.$$

С другой стороны, очевидно, что $\beta(G) \leq N$. Следовательно, для $y_{n,m} = N/\beta(G(m, n))$ имеем $y_{n,m} \in [1, 2]$. По определению

$$PC(G, x) = x^m P_{n,m}(N/x).$$

Поэтому число $y_{n,m} = N/\beta(G(m, n))$ является нулем многочлена $P_{n,m}$. На отрезке $[1, 2]$ предельная функция $f(y) = J_0(2\sqrt{y})$ имеет единственный нуль $q_0^2/4$. Из локально равномерной сходимости $P_{n,m} \rightarrow f$ и теоремы Гурвица следует $y_{n,m} \rightarrow q_0^2/4$. Тем самым

$$\frac{\beta(G(m, n))}{mn} = \frac{1}{y_{n,m}} \rightarrow \frac{4}{q_0^2}.$$

СЛУЧАЙ 2: $m \geq n$. По лемме выполнено

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x),$$

и мы приходим к случаю 1. Следовательно,

$$\beta(G(m, n)) = \beta(G(n-1, m+1)) \sim \alpha(n-1)(m+1) \sim \alpha n m.$$

Тем самым теорема доказана. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят П. С. Колесникова и рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bershtein M., Dotsenko V., Khoroshkin A. Quadratic algebras related to the biHamiltonian operad // Int. Math. Res. Not. 2007. V. 2007, ram 122. 30 pp.
2. D'León R. G. On the free Lie algebra with multiple brackets // Adv. Appl. Math. 2016. V. 79. P. 37–97.
3. Liu F. Combinatorial bases for multilinear parts of free algebras with two compatible brackets // J. Algebra. 2010. V. 323, N 1. P. 132–166.
4. Dotsenko V., Khoroshkin A. Gröbner bases for operads // Duke Math. J. 2010. V. 153, N 2. P. 363–396.
5. Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N 1. P. 203–272.
6. Khoroshkin A. PBW property for associative universal enveloping algebras over an operad // Int. Math. Res. Not. 2022. V. 2022, N 4. P. 3106–3143.
7. Gubarev V. Universal enveloping algebra of a pair of compatible Lie brackets // Intern. J. Algebra Comput. 2022. V. 32, N 7. P. 1335–1344.
8. Beilinson A., Ginzburg V., Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory // J. Am. Math. Soc. 1996. V. 9. P. 473–527.
9. Dotsenko V., Khoroshkin A. Quillen homology for operads via Gröbner bases // Documenta Math. 2013. V. 18. P. 707–747.
10. Cartier P., Foata D. Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. Berlin: Springer-Verl., 1969. (Lecture Notes Math.; V. 85).
11. Kim K., Makar-Limanov L., Neggers J., Roush F. Graph algebras // J. Algebra. 1980. V. 64, N 1. P. 46–51.
12. Duchamp G., Krob D. The free partially commutative Lie algebra: Bases and ranks // Adv. Math. 1992. V. 95. P. 92–126.
13. Fisher D. C., Solow A. E. Dependence polynomials // Discrete Math. 1990. V. 82. P. 251–258.
14. Gubarev V. PC-polynomial of graph. 2018. 118 p. arXiv:1808.03932.

Поступила в редакцию 7 июля 2025 г.

После доработки 13 декабря 2025 г.

Принята к публикации 20 декабря 2025 г.

Чжан Чжэн

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

2268663734@qq.com

Губарев Всеволод Юрьевич (ORCID 0000-0002-7839-5714)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

wsewolod89@gmail.com

УДК 519.682.1+519.683+519.7+519.1

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ И ПРЕФИКСНАЯ ПЕРЕЗАПИСЬ. ЧАСТЬ III: РЕКУРРЕНТНОСТЬ

А. Е. Гутман

Аннотация. Для произвольной префиксной перезаписывающей системы описаны алгоритмы распознавания рекуррентных слов и проверки их существования, предложен новый конечный базис рекуррентности, а также выяснены условия существования слабо рекуррентных слов и установлена связь таких слов с бесконечными цепями слабой перезаписи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.510

Ключевые слова: префиксная перезапись, полутуэвская система, информационная система, объектно-ориентированная система данных.

Эта статья продолжает запланированную серию публикаций, посвященную анонсированному в [1] и начатому в [2] систематическому исследованию префиксной перезаписи как инструмента для представления и анализа объектно-ориентированных систем данных.

Центральным предметом исследования является механизм перезаписи префиксов слов конечного алфавита $\mathbb{A}$ посредством произвольной функции $\rightarrow$, определенной на некотором конечном подмножестве $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{A}^+$ и действующей в $\mathbb{A}^+$.

Функцию перезаписи можно считать системой явных определений, трактуя соотношение $X \rightarrow Y$ как явное определение « X — это Y », а перезапись $X \rightarrow Y$ префикса X в слове XS — как определение «деталь XS объекта X — это YS ». Система определений порождает соответствующее отношение концептуальной зависимости между определяемыми понятиями: если определение слова X явно или неявно задействует Y , то понятие X концептуально зависит от Y . Корректность системы определений предполагает отсутствие циклов в концептуальной схеме. Если при последовательном применении определений к понятию X возникает «порочный круг» и на каком-то шаге вновь появляется сам объект X или его деталь XS , то X нельзя считать корректно определенным. В случае детерминированной перезаписывающей системы, когда перезаписи подлежат лишь самые длинные префиксы, такое слово X называется *рекуррентным*, а в общем случае префиксной перезаписи — *слабо рекуррентным*.

Сходное применение префиксной перезаписи к формализации программных модулей встречается в работах о представлении полуавтоматов каноническими словами. В частности, в [3] исследуются условия, при которых в соответствующих системах префиксной перезаписи отсутствуют бесконечные цепи.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

Материал статьи распределен по четырем параграфам. Параграф 1 содержит основные определения и обозначения, связанные с префиксной перезаписью. В параграфе 2 сформулированы некоторые результаты предшествующих работ, используемые в дальнейшем изложении. Параграф 3 посвящен исследованию свойств рекуррентных слов и, в частности, содержит описание алгоритмов, проверяющих рекуррентность данного слова и наличие рекуррентных слов для данной функции перезаписи. В том же параграфе описан базис рекуррентности, существенно меньший по числу элементов, чем единственный известный до сих пор конечный базис. В параграфе 4 введены понятия слабой перезаписи и слабой рекуррентности, получен критерий отсутствия слабо рекуррентных слов и доказано, что наличие бесконечной цепи слабой перезаписи влечет существование слабо рекуррентного слова.

§ 1. Определения и обозначения

1.1. На протяжении всей статьи $\mathbb{A}$ — непустой конечный алфавит, $\mathbb{A}^*$ (соответственно, $\mathbb{A}^+$) — множество всех (соответственно, всех непустых) слов над $\mathbb{A}$. Элементы $\mathbb{A}$ называются *буквами* и традиционно отождествляются с соответствующими однобуквенными словами. В приводимых ниже примерах в роли элементов $\mathbb{A}$ используются символы ω , X , Y , A , B .

Длина слова X обозначается через $|X|$. Для $X \in \mathbb{A}^+$ и $n \geq 0$ символом X^n обозначается соединение $XX \cdots X$, составленное из n вхождений слова X ; при этом X^0 полагается равным пустому слову $\emptyset$.

Для краткости будем в дальнейшем говорить «слово» вместо «непустое слово над $\mathbb{A}$ », а элементы $\mathbb{A}^*$ будем называть *строками*.

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Упорядоченные кортежи и последовательности записываются с использованием угловых скобок: $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2. Слово X будем называть *префиксом* слова $Y \in \mathbb{A}^+$ и писать $X \sqsubseteq Y$ или $Y \supseteq X$, если $X \in \mathbb{A}^+$ и $Y = XS$ для некоторой строки $S \in \mathbb{A}^*$. Суффикс S слова $Y = XS$, определяемый префиксом $X \sqsubseteq Y$, условимся записывать в виде $\frac{Y}{X}$. Таким образом, $\frac{XS}{X} = S$ и $X \frac{Y}{X} = Y$ при $X \sqsubseteq Y$. Если $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{A}^+$ и $|X| \geq n$, то символом $X|_n$ обозначается префикс слова X , имеющий длину n .

1.3. Если строка S оканчивается на T , то начальный фрагмент строки S , полученный из S удалением суффикса T , будет обозначаться через S/T . Таким образом, $(RT)/T = R$ для любых $R, T \in \mathbb{A}^*$.

1.4. Если символ $\rightsquigarrow$ обозначает какое-либо бинарное отношение, то символом $\overset{+}{\rightsquigarrow}$ обозначается транзитивное замыкание отношения $\rightsquigarrow$. Таким образом, запись $x \overset{+}{\rightsquigarrow} y$ означает, что $x = z_0 \rightsquigarrow z_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow z_n = y$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $z_0, z_1, \dots, z_n$.

1.5. *Функцией перезаписи* назовем произвольную функцию $\rightarrow$, определенную на конечном непустом подмножестве $\mathbb{A}^+$ и действующую в $\mathbb{A}^+$. Такую функцию $\rightarrow$ условимся считать бинарным отношением на $\mathbb{A}^+$ (т.е. подмножеством $\mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$) и использовать инфиксную запись $X \rightarrow Y$ вместо принадлежности $\langle X, Y \rangle \in \rightarrow$ или равенства $\rightarrow(X) = Y$.

В дальнейшем, давая определения и формулируя утверждения, по умолчанию считаем фиксированной произвольную функцию перезаписи $\rightarrow$, относительно которой интерпретируются вводимые понятия, а также используемые термины и обозначения.

1.6. Непустое конечное подмножество $\mathbb{A}^+$, являющееся областью определения рассматриваемой функции перезаписи $\rightarrow$, обозначим символом $\mathbb{E}$. Элементы множества $\mathbb{E}$ будем называть *явными словами*. Определим число μ как длину самого длинного явного слова:

$$\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}.$$

Множество всех букв, встречающихся в явных словах, назовем *явным алфавитом* и обозначим символом $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{E}} := \min\{A \subseteq \mathbb{A} : \mathbb{E} \subseteq A^+\}.$$

Слово $S \in \mathbb{A}^+$ назовем *явным дополнением* слова X , если $XS \in \mathbb{E}$.

Будем говорить, что слово E является *явным префиксом* слова X , если $E \subseteq X$ и $E \in \mathbb{E}$. В случае, когда X имеет явный префикс, условимся обозначать символом $\mathbb{E}(X)$ самый длинный явный префикс слова X . (В [2] вместо $\mathbb{E}(X)$ используется обозначение $\text{lep}(X)$.)

1.7. Значение функции $\rightarrow$ на явном слове $E \in \mathbb{E}$ будем обозначать символом E' и называть *явной перезаписью* слова E . Таким образом, $E \rightarrow E'$ для всех $E \in \mathbb{E}$. Слово X назовем *перезаписываемым*, если X имеет хотя бы один явный префикс. Для перезаписываемого слова X рассмотрим его самый длинный явный префикс $\mathbb{E}(X)$, определим соответствующий суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X = \mathbb{E}(X)S$, и введем обозначение

$$X' := \mathbb{E}(X)'S.$$

Слово X' назовем *перезаписью* слова X .

1.8. Определим бинарное отношение $\Rightarrow$ на $\mathbb{A}^+$, полагая $X \Rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда слово X перезаписываемо и $X' = Y$. Ясно, что из $X \rightarrow Y$ следует $X \Rightarrow Y$. Формулу $X \Rightarrow Y$ можно прочитывать как « X перезаписывается в Y », а формулу $X \rightarrow Y$ можно снабдить прочтением « X явно перезаписывается в Y ».

1.9. Для всех целых $n \geq 0$ определим множества $\mathbb{W}_n$ n -кратно перезаписываемых слов и n -кратные перезаписи $X^{(n)}$ слов $X \in \mathbb{W}_n$ посредством следующей совместной рекурсии:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_0 &:= \mathbb{A}^+, \\ X^{(0)} &:= X \text{ для } X \in \mathbb{W}_0; \\ \mathbb{W}_n &:= \{X \in \mathbb{W}_{n-1} : X^{(n-1)} \text{ перезаписываемо}\}, \quad n \geq 1, \\ X^{(n)} &:= (X^{(n-1)})' \text{ для } X \in \mathbb{W}_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathbb{W}_{\infty} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{W}_n, \quad \mathbb{W}_{\text{fin}} := \mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{W}_{\infty}.$$

Элементы множеств $\mathbb{W}_{\infty}$ и $\mathbb{W}_{\text{fin}}$ будем называть соответственно *бесконечно перезаписываемыми* и *конечно перезаписываемыми* словами. Для данного слова X максимальную (конечную или бесконечную) последовательность вида

$$\langle X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots \rangle$$

назовем *последовательностью перезаписи* слова X . Таким образом, слово конечно перезаписываемо тогда и только тогда, когда оно имеет конечную последовательность перезаписи.

§ 2. Предварительные результаты

Для последующего использования приведем без доказательств некоторые результаты, установленные в [2] и частично анонсированные ранее в [1].

2.1. Предложение [2, 2.1, 2.2]. Пусть $X \in \mathbb{A}^+$, $\alpha \in \mathbb{A}$ и $S \in \mathbb{A}^*$.

- (а) Если $X\alpha \notin \mathbb{E}$, то условия $X \in \mathbb{W}_1$ и $X\alpha \in \mathbb{W}_1$ равносильны, и при выполнении любого из них имеет место равенство $(X\alpha)' = X'\alpha$.
- (б) Если X не имеет явных дополнений, то условия $X \in \mathbb{W}_1$ и $XS \in \mathbb{W}_1$ равносильны, и при выполнении любого из них имеет место равенство $(XS)' = X'S$, т. е. $XS \Rightarrow X'S$.

2.2. Лемма [2, 2.3]. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{W}_n$, $|X^{(1)}|, \dots, |X^{(n)}| \geq |X|$, и пусть $Y \in \mathbb{A}^+$ и $S \in \mathbb{A}^*$ таковы, что $X = YS$ и $|Y| \geq \mu$. Тогда $Y \in \mathbb{W}_i$, $X^{(i)} = Y^{(i)}S$ и $|Y^{(i)}| \geq \mu$ для всех $i = 0, \dots, n$.

2.3. Лемма [2, 2.4]. Для всякой последовательности натуральных чисел $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что для любых $n, i \in \mathbb{N}$ из $n \geq n_i$ следует $x_n \geq x_{n_i}$.

2.4. Теорема [1, 5.1; 2, 3.1]. Слово X является бесконечно перезаписываемым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух взаимоисключающих условий:

- (а) существуют целые числа $n \geq 0$ и $r > 0$ такие, что $X^{(n)} = X^{(n+r)}$;
- (б) существуют целые числа $n \geq 0$ и $r > 0$ такие, что

$$\mu \leq |X^{(n)}| \leq |X^{(n+1)}|, \dots, |X^{(n+r)}|, \\ X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \quad X^{(n)} \downarrow_\mu = X^{(n+r)} \downarrow_\mu.$$

2.5. Пусть $\mathcal{P}$ — некоторое множество «параметров», элементы которого допустимы в качестве входных данных алгоритмов. Рассматривая какое-либо подмножество $C \subseteq \mathbb{A}^+ \times \mathcal{P}$, будем записывать включение $\langle Y, p \rangle \in C$ в виде $C(Y, p)$ и называть его «условием». Условие $C(Y, p)$ называется *циклически разрешимым* (см. [2, 3.3]), если существует алгоритм, который для любых входных данных $Y \in \mathbb{A}^+$, $R, S \in \mathbb{A}^*$ и $p \in \mathcal{P}$ проверяет соотношение $(\exists t \in \mathbb{N}) C(YR^tS, p)$. Всякое циклически разрешимое условие является разрешимым, а обратная импликация в общем случае не имеет места (см. [2, 3.4]).

Теорема [1, 5.3; 2, 3.5, 3.6]. Если $C(Y, p)$ — циклически разрешимое условие, то существует алгоритм, который для данной функции перезаписи, данного слова X и данного параметра $p \in \mathcal{P}$ проверяет наличие слова Y , удовлетворяющего условиям $X \xrightarrow{+} Y$ и $C(Y, p)$.

2.6. Следствие [1, 5.4; 2, 3.7]. Существует алгоритм, который для данной функции перезаписи и данного слова X проверяет, является ли слово X конечно перезаписываемым.

2.7. Теорема [1, 2.12; 2, 3.8]. Если $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{W}_{\text{fin}}$, то $\mathbb{W}_{\text{fin}} = \mathbb{A}^+$. Иначе говоря, если все явные слова конечно перезаписываемы, то конечно перезаписываемыми являются все слова.

2.8. Следствие [1, 5.4; 2, 3.9]. Существует алгоритм, который для данной функции перезаписи проверяет, являются ли все слова конечно перезаписываемыми.

§ 3. Рекуррентность

Слово X называется *рекуррентным*, если $X \stackrel{+}{\Rightarrow} XS$ для некоторой строки S , т. е. существуют такие $n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{A}^*$, что $X \in \mathbb{W}_n$ и $X^{(n)} = XS$.

Подобная цикличность традиционно рассматривается и в общей теории перезаписывающих систем, где редукции вида $X \stackrel{+}{\rightarrow} RXS$ называются петлями. Связь петель с существованием бесконечных последовательностей перезаписи исследуется, например, в [4].

Основная цель этого параграфа — описание алгоритмов распознавания рекуррентных слов и проверки их существования для данной функции перезаписи. Алгоритмические вопросы для других вариантов префиксной перезаписи рассматриваются, например, в [5].

3.1. Теорема. *Существует алгоритм, который для данной функции перезаписи и данного слова X проверяет, является ли слово X рекуррентным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как легко видеть, условие

$$C(Y, X) := Y \supseteq X$$

циклически разрешимо (см. п. 2.5). Действительно, при $R = \emptyset$ соотношение $(\exists m \in \mathbb{N}) C(YR^mS, X)$ равносильно $YS \supseteq X$ и проверяется непосредственно, а в случае $R \neq \emptyset$ его можно проверить простым перебором значений m от 1 до целой части $\frac{|X|}{|R|} + 1$, не говоря уже о возможности более эффективной проверки. Поэтому соответствующая специализация алгоритма, упомянутого в теореме 2.5, проверяет, является ли данное слово X рекуррентным. $\square$

3.2. Теорема. *Если все префиксы явных слов нерекуррентны, то все слова нерекуррентны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.¹ Для краткости обозначим символом $\mathcal{R}$ множество всех рекуррентных слов, а символом $\mathcal{P}$ — множество всех префиксов явных слов. Предположим, что $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, и, используя индукцию, докажем, что для всех $m \in \mathbb{N}$ множество $\mathcal{R}$ не содержит слов длины m .

Однобуквенное слово не может принадлежать $\mathcal{R}$, поскольку в противном случае оно, будучи перезаписываемым, совпало бы со своим единственным явным префиксом и тем самым оказалось бы элементом $\mathcal{R} \cap \mathcal{P}$.

Предположим теперь, что $\mathcal{R}$ не содержит слов длины m , рассмотрим слово $X \in \mathcal{R}$ длины $m + 1$ и получим противоречие.

Рекуррентность X означает существование $n \in \mathbb{N}$ и $S \in \mathbb{A}^*$ таких, что $X \in \mathbb{W}_n$ и

$$X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)} = X^{(0)}S. \quad (1)$$

Сразу заметим, что $X^{(0)} \notin \mathcal{P}$ и $X^{(n)} \notin \mathcal{P}$. (Первое соотношение следует из условия $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = \emptyset$, а второе вытекает из первого в силу равенства $X^{(n)} = X^{(0)}S$.)

Покажем, что $X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)} \notin \mathcal{P}$. Действительно, допустив противное, положим j равным наименьшему из номеров $i \in \{1, \dots, n-1\}$, для которых $X^{(i)} \in \mathcal{P}$. Поскольку $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(j-1)} \notin \mathcal{P}$, по предложению 2.1(b) имеем

$$X^{(0)}S \Rightarrow X^{(1)}S \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(j)}S$$

и, в частности, $(X^{(0)}S)^{(j)} = X^{(j)}S$. С другой стороны,

$$(X^{(j)})^{(n)} = X^{(j+n)} = (X^{(n)})^{(j)} = (X^{(0)}S)^{(j)} = X^{(j)}S,$$

т. е. $X^{(j)} \in \mathcal{R}$ вопреки условию $\mathcal{R} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

¹Схема этого доказательства была предложена моделью GPT-5.6 Sol.

Итак, $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n-1)}$ не принадлежат $\mathcal{P}$. В частности, эти слова не являются явными и поэтому отличны от своих самых длинных явных префиксов. Следовательно, каждая перезапись в цепи (1) оставляет неизменной по крайней мере последнюю букву слова, а значит, все слова $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ оканчиваются на одну и ту же букву. Таким образом,

$$X^{(0)} = Y_0 \alpha, \quad X^{(1)} = Y_1 \alpha, \quad \dots, \quad X^{(n)} = Y_n \alpha$$

для некоторых $Y_0, \dots, Y_n \in \mathbb{A}^+$ и $\alpha \in \mathbb{A}$. При этом $|Y_0| = |X^{(0)}| - 1 = m$. Покажем, что $Y_0 \in \mathcal{R}$ вопреки индукционному предположению.

Для каждого $i = 0, \dots, n-1$ перезаписываемое слово $Y_i \alpha = X^{(i)}$ не является явным, откуда согласно предложению 2.1(а) следует, что $Y_i \in \mathbb{W}_1$ и

$$Y_i' \alpha = (Y_i \alpha)' = (X^{(i)})' = X^{(i+1)} = Y_{i+1} \alpha,$$

и поэтому $Y_i' = Y_{i+1}$. Таким образом, $Y_0 \Rightarrow Y_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow Y_n$ и, в частности,

$$Y_0 \stackrel{+}{\Rightarrow} Y_n.$$

Если $S = \emptyset$, то $Y_n \alpha = X^{(n)} = X^{(0)} S = X^{(0)} = Y_0 \alpha$, откуда $Y_n = Y_0$ и тем самым $Y_0 \in \mathcal{R}$.

Пусть теперь $S \neq \emptyset$. Поскольку слово $X^{(0)} S = X^{(n)} = Y_n \alpha$ оканчивается буквой α , строка S также оканчивается буквой α , а значит,

$$S = T \alpha$$

для некоторой строки $T \in \mathbb{A}^*$. Тогда

$$Y_n \alpha = X^{(n)} = X^{(0)} S = X^{(0)} T \alpha = Y_0 \alpha T \alpha,$$

откуда $Y_n = Y_0 \alpha T$ и тем самым вновь $Y_0 \in \mathcal{R}$. $\square$

3.3. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 2.9].

Следствие. Если все перезаписываемые слова $X \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}^+$ длины $|X| \leq \mu$ не рекуррентны, то все слова не рекуррентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следствия вытекает из теоремы 3.2, поскольку всякий префикс явного слова принадлежит $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}^+$ и имеет длину не более μ , причем непerezаписываемые префиксы заведомо не рекуррентны. $\square$

3.4. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 2.13].

Теорема. Если нет рекуррентных слов, то все слова конечно перезаписываемы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все слова не рекуррентны. Рассуждая от противного, допустим, что существует бесконечно перезаписываемое слово X . По теореме 2.4 слово X удовлетворяет одному из условий 2.4(а), (b).

Если выполнено условие 2.4(а), т.е. $X^{(n)} = X^{(n+r)}$ для некоторых $n \geq 0$ и $r > 0$, то слово $X^{(n)}$ рекуррентно.

В случае 2.4(b) имеются такие $n \geq 0$ и $r > 0$, что $|X^{(n+1)}|, \dots, |X^{(n+r)}| \geq |X^{(n)}| \geq \mu$ и $X^{(n)} \upharpoonright_{\mu} = X^{(n+r)} \upharpoonright_{\mu}$. Рассмотрим слово Y и строки S и T , для которых $|Y| = \mu$, $X^{(n)} = YS$ и $X^{(n+r)} = YT$. Применяя лемму 2.2 к $X^{(n)}$ и r (в роли X и n), заключаем, что $X^{(n+i)} = Y^{(i)} S$ и $|Y^{(i)}| \geq \mu$ для всех $i = 0, \dots, r$. В частности, $YT = X^{(n+r)} = Y^{(r)} S$ и $|Y^{(r)}| \geq \mu$. Поскольку $|Y| = \mu \leq |Y^{(r)}|$, из равенства $YT = Y^{(r)} S$ следует, что $Y \subseteq Y^{(r)}$, а значит, слово Y рекуррентно. $\square$

3.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Импликация, обратная утверждению теоремы 3.4, в общем случае не имеет места. Например, каждая из описанных ниже функций перезаписи (а)–(с) обеспечивает конечную перезаписываемость любого слова (см. теорему 2.7), но допускает наличие рекуррентных слов:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & X \rightarrow XA, & \text{(b)} & X \rightarrow Y, \\ & XA \rightarrow \omega; & & XA \rightarrow \omega, \\ & & & Y \rightarrow XA; \\ \text{(c)} & X \rightarrow \omega, & & X \rightarrow \omega, \\ & XA \rightarrow YAB, & & XA \rightarrow YAB, \\ & Y \rightarrow X, & & Y \rightarrow X, \\ & YAB \rightarrow \omega. & & YAB \rightarrow \omega. \end{array}$$

Действительно, в первых двух случаях $X \xrightarrow{\pm} XA$, а в третьем случае $YA \xrightarrow{\pm} YAB$.

3.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $B(\rightarrow)$ — множество слов, определяемое некоторым условием, зависящим от функции перезаписи $\rightarrow$. Назовем $B(\rightarrow)$ *базисом рекуррентности*, если для произвольной функции перезаписи $\rightarrow$ из нерекуррентности слов, принадлежащих $B(\rightarrow)$, следует полное отсутствие рекуррентных слов. Согласно теореме 3.2 множество

$$\mathcal{B}(\rightarrow) := \{X \in \mathbb{A}^+ : X \subseteq E \text{ для некоторого } E \in \mathbb{E}\} \quad (2)$$

всех префиксов явных слов служит базисом рекуррентности.²

До сих пор единственным известным примером конечного базиса рекуррентности было приведенное в [1, 2.10] множество $\{X \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}^+ : |X| \leq \mu\}$, которое содержит базис $\mathcal{B}(\rightarrow)$ и в общем случае значительно превосходит его по количеству элементов.

Как показывает пример 3.5(с), множество явных слов не является базисом рекуррентности даже в классе функций, обеспечивающих конечную перезаписываемость всех слов. Базисом рекуррентности не является и множество собственных префиксов явных слов. Действительно, для функции перезаписи $\{X \rightarrow Y, YA \rightarrow XA\}$ имеются рекуррентные слова (например, $XA \Rightarrow YA \rightarrow XA$ и $YA \rightarrow XA \Rightarrow YA$), хотя слово Y нерекуррентно.

3.7. Теорема. Существует алгоритм, который для данной функции перезаписи проверяет наличие рекуррентных слов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря теореме 3.2 по данной функции перезаписи $\rightarrow$ можно алгоритмически определить конечный базис рекуррентности $\mathcal{B}(\rightarrow)$ (см. (2)). Для проверки наличия рекуррентных слов остается применить алгоритм 3.1 ко всем элементам такого базиса.

Другой возможный подход не использует алгоритм 3.1 и основывается на теореме 3.4, согласно которой при отсутствии рекуррентных слов все слова являются конечно перезаписываемыми. Сначала с помощью алгоритма 2.8 можно выяснить, существуют ли бесконечно перезаписываемые слова. Если такие слова существуют, то по теореме 3.4 существует и рекуррентное слово. (Более того, из доказательства теоремы 3.4 видно, как в этом случае можно алгоритмически найти пример рекуррентного слова.) В противном случае достаточно построить для всякого слова $X \in \mathcal{B}(\rightarrow)$ его заведомо конечную последовательность перезаписи, проверяя условие $X \subseteq X^{(n)}$ на каждом шаге $n \geq 1$. Такая процедура может оказаться эффективнее применения к X алгоритма 3.1. $\square$

²В [1, 2.10] сказано, что множество всех префиксов явных слов не может служить базисом рекуррентности. Это ошибка: в том утверждении пропущено слово «собственных».

§ 4. Слабая рекуррентность

Далее рассматривается ослабленный вариант отношения перезаписи, допускающий замену произвольных префиксов, и изучается соответствующее ему понятие рекуррентности. Как покажут дальнейшие исследования, слабая перезапись и слабая рекуррентность тесно связаны с понятиями концептуальной зависимости и непротиворечивости. Основная задача этого параграфа состоит в выяснении условий существования слабо рекуррентных слов и связи таких слов с бесконечными цепями слабой перезаписи.

4.1. Для $X, Y \in \mathbb{A}^+$ и $E \in \mathbb{E}$ будем писать $X \xrightarrow{E}_w Y$, если $E \subseteq X$ и $Y = E' \frac{X}{E}$ или, что то же самое, $X = ES$ и $Y = E'S$ для некоторого $S \in \mathbb{A}^*$.

Введем в рассмотрение бинарное отношение $\Rightarrow_w$ на $\mathbb{A}^+$, полагая $X \Rightarrow_w Y$ тогда и только тогда, когда $X \xrightarrow{E}_w Y$ для некоторого $E \in \mathbb{E}$. Таким образом, отношение $\Rightarrow_w$ представляет собой перезапись, которая соответствует функции $\rightarrow$, рассматриваемой как обычная префиксная перезаписывающая система, а не как система перезаписи самых длинных префиксов. Ясно, что из $X \Rightarrow Y$ следует $X \Rightarrow_w Y$, поскольку $X \Rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда X перезаписываемо и $X \xrightarrow{\mathbb{E}(X)}_w Y$. Отношение $\Rightarrow_w$ назовем *слабой перезаписью* и условимся прочитывать формулу $X \xrightarrow{\pm}_w Y$ как « X слабо перезаписывается в Y ».

4.2. Слово X назовем *слабо рекуррентным*, если $X \xrightarrow{\pm}_w XS$ для некоторой строки S . Очевидно, всякое рекуррентное слово является слабо рекуррентным.

4.3. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 2.6(3), (4)].

Теорема. Если среди явных слов нет слабо рекуррентных, то ни одно слово не является слабо рекуррентным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что явные слова не являются слабо рекуррентными, но вопреки доказываемому утверждению существует слабо рекуррентное слово X_0 . Тогда

$$X_0 \xrightarrow{E_1}_w X_1 \xrightarrow{E_2}_w \dots \xrightarrow{E_n}_w X_n = X_0 S$$

для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $X_0, X_1, \dots, X_n \in \mathbb{A}^+$, $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{E}$ и $S \in \mathbb{A}^*$. По определению 4.1 каждое звено $X_{i-1} \xrightarrow{E_i}_w X_i$ имеет вид $E_i S_i \Rightarrow_w E'_i S_i$, где $S_i \in \mathbb{A}^*$. Таким образом, имеются строки $S_1, \dots, S_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$E'_i S_i = E_{i+1} S_{i+1} \text{ для всех } i = 1, \dots, n-1,$$

$$E'_n S_n = (E_1 S_1) S.$$

Пусть $m \in \{1, \dots, n\}$ — такой номер, что

$$|S_m| = \min\{|S_1|, \dots, |S_n|\}.$$

Получим противоречие, доказав, что строка $S_m S$ оканчивается на S_m и

$$E_m \xrightarrow{\pm}_w E_m((S_m S)/S_m),$$

а значит, явное слово E_m оказывается слабо рекуррентным.

В приводимых ниже выкладках используются соотношения $E_i T \Rightarrow_w E'_i T$, имеющие место для любых строк T , а также тождества

$$(E_i S_i)/S_m = E_i(S_i/S_m), \quad ((E_i S_i)S)/S_m = E_i((S_i S)/S_m),$$

справедливые благодаря неравенствам $|S_m| \leq |S_i|$ в тех случаях, когда имеет смысл хотя бы одна из частей соответствующего тождества.

В случае $1 = m = n$ имеем

$$E_1 \Rightarrow_w E'_1 = (E'_1 S_1)/S_1 = ((E_1 S_1)S)/S_1 = E_1((S_1 S)/S_1).$$

В случае $1 = m < n$ имеем

$$\begin{aligned} E_1 \Rightarrow_w E'_1 &= (E'_1 S_1)/S_1 \\ &= (E_2 S_2)/S_1 = E_2(S_2/S_1) \\ \Rightarrow_w E'_2(S_2/S_1) &= (E'_2 S_2)/S_1 \\ &= (E_3 S_3)/S_1 = E_3(S_3/S_1) \\ \Rightarrow_w E'_3(S_3/S_1) &= (E'_3 S_3)/S_1 \\ &= (E_4 S_4)/S_1 = E_4(S_4/S_1) \\ &\dots \\ \Rightarrow_w E'_n(S_n/S_1) &= (E'_n S_n)/S_1 \\ &= ((E_1 S_1)S)/S_1 = E_1((S_1 S)/S_1). \end{aligned}$$

В случае $1 < m = n$ имеем

$$\begin{aligned} E_n \Rightarrow_w E'_n &= (E'_n S_n)/S_n \\ &= ((E_1 S_1)S)/S_n = E_1((S_1 S)/S_n) \\ \Rightarrow_w E'_1((S_1 S)/S_n) &= ((E'_1 S_1)S)/S_n \\ &= ((E_2 S_2)S)/S_n = E_2((S_2 S)/S_n) \\ \Rightarrow_w E'_2((S_2 S)/S_n) &= ((E'_2 S_2)S)/S_n \\ &= ((E_3 S_3)S)/S_n = E_3((S_3 S)/S_n) \\ &\dots \\ \Rightarrow_w E'_{n-1}((S_{n-1} S)/S_n) &= ((E'_{n-1} S_{n-1})S)/S_n \\ &= ((E_n S_n)S)/S_n = E_n((S_n S)/S_n). \end{aligned}$$

В случае $1 < m < n$ имеем

$$\begin{aligned} E_m \Rightarrow_w E'_m &= (E'_m S_m)/S_m \\ &= (E_{m+1} S_{m+1})/S_m = E_{m+1}(S_{m+1}/S_m) \\ \Rightarrow_w E'_{m+1}(S_{m+1}/S_m) &= (E'_{m+1} S_{m+1})/S_m \\ &= (E_{m+2} S_{m+2})/S_m = E_{m+2}(S_{m+2}/S_m) \\ \Rightarrow_w E'_{m+2}(S_{m+2}/S_m) &= (E'_{m+2} S_{m+2})/S_m \\ &= (E_{m+3} S_{m+3})/S_m = E_{m+3}(S_{m+3}/S_m) \\ &\dots \\ \Rightarrow_w E'_n(S_n/S_m) &= (E'_n S_n)/S_m \\ &= ((E_1 S_1)S)/S_m = E_1((S_1 S)/S_m) \\ \Rightarrow_w E'_1((S_1 S)/S_m) &= ((E'_1 S_1)S)/S_m \\ &= ((E_2 S_2)S)/S_m = E_2((S_2 S)/S_m) \\ \Rightarrow_w E'_2((S_2 S)/S_m) &= ((E'_2 S_2)S)/S_m \\ &= ((E_3 S_3)S)/S_m = E_3((S_3 S)/S_m) \\ &\dots \\ \Rightarrow_w E'_{m-1}((S_{m-1} S)/S_m) &= ((E'_{m-1} S_{m-1})S)/S_m \\ &= ((E_m S_m)S)/S_m = E_m((S_m S)/S_m). \end{aligned}$$

Таким образом, в каждом случае явное слово E_m оказывается слабо рекуррентным. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

4.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку рекуррентность влечет слабую рекуррентность, из теоремы 4.3 следует, что отсутствие слабо рекуррентных явных слов влечет отсутствие рекуррентных слов. Обратная импликация в общем случае не имеет места даже при дополнительном предположении конечной перезаписываемости всех слов. Например, для каждой из описанных ниже функций перезаписи (а) и (b) все слова являются конечно перезаписываемыми и нереккуррентными (см. теоремы 3.2 и 3.4), но имеются слабо рекуррентные слова:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \begin{array}{l} X \rightarrow \omega, \\ XA \rightarrow YA, \\ Y \rightarrow X, \\ YA \rightarrow \omega; \end{array} & \text{(b)} & \begin{array}{l} X \rightarrow \omega, \\ XA \rightarrow YAB, \\ Y \rightarrow X, \\ YA \rightarrow \omega, \\ YAB \rightarrow \omega. \end{array} \end{array}$$

Действительно, в первом случае $XA \Rightarrow_w YA \Rightarrow_w XA$, а во втором — $YA \Rightarrow_w XA \Rightarrow_w YAB$.

4.5. Лемма. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $X_0, Y_0, X_1, \dots, X_n \in \mathbb{A}^+$, $E_1, \dots, E_n \in \mathbb{E}$, $S \in \mathbb{A}^*$, и пусть

$$\begin{aligned} X_0 &= Y_0 S, \quad |Y_0| \geq \mu, \\ X_0 &\xRightarrow{E_1}_w X_1 \xRightarrow{E_2}_w \dots \xRightarrow{E_n}_w X_n, \\ |X_0| &\leq |X_1|, \dots, |X_n|. \end{aligned} \quad (3)$$

(а) Существуют такие слова $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbb{A}^+$, что

$$Y_0 \xRightarrow{E_1}_w Y_1 \xRightarrow{E_2}_w \dots \xRightarrow{E_n}_w Y_n. \quad (4)$$

(b) Слова $Y_1, \dots, Y_n$ однозначно определяются соотношением (4) и для всех $i = 1, \dots, n$ удовлетворяют условиям

$$X_i = Y_i S, \quad |Y_i| \geq \mu. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (b) Единственность последовательности $Y_1, \dots, Y_n$, удовлетворяющей условию (4), очевидна, поскольку это условие означает, что

$$Y_1 = E'_1 \frac{Y_0}{E_1}, \quad Y_2 = E'_2 \frac{Y_1}{E_2}, \quad \dots, \quad Y_n = E'_n \frac{Y_{n-1}}{E_n}.$$

Соотношения (5) для всех $i = 0, 1, \dots, n$ легко установить индукцией: база индукции при $i = 0$ содержится в условиях леммы, а на индукционном шаге для $i > 0$ имеем

$$X_i = E'_i \frac{X_{i-1}}{E_i} = E'_i \frac{Y_{i-1} S}{E_i} = E'_i \frac{Y_{i-1}}{E_i} S = Y_i S$$

и, кроме того,

$$|Y_i| + |S| = |Y_i S| = |X_i| \geq |X_0| = |Y_0 S| = |Y_0| + |S| \geq \mu + |S|,$$

откуда $|Y_i| \geq \mu$.

(а) Докажем утверждение индукцией по n . Сначала заметим, что оно справедливо в случае $n = 1$. Действительно, при $n = 1$ из условий леммы следует, что $E_1 \subseteq X_0 = Y_0 S$ и $|E_1| \leq \mu \leq |Y_0|$, откуда $E_1 \subseteq Y_0$, а значит, $Y_0 \xRightarrow{E_1}_w Y_1$ для $Y_1 := E'_1 \frac{Y_0}{E_1}$.

Допустим, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ утверждение (а) справедливо в условиях леммы при $n = m$, и докажем, что оно сохраняет силу при $n = m + 1$. Пусть $X_0, Y_0, X_1, \dots, X_{m+1}, E_1, \dots, E_{m+1}$ и S удовлетворяют условиям (3) при $n = m + 1$. Тогда $X_0, Y_0, X_1, \dots, X_m, E_1, \dots, E_m$ и S удовлетворяют условиям (3) при $n = m$, а значит, по предположению индукции имеются слова $Y_1, \dots, Y_m$, удовлетворяющие (4). При этом $X_m = Y_m S$ и $|Y_m| \geq \mu$ согласно доказанному выше утверждению (b). Поскольку $E_{m+1} \subseteq X_m = Y_m S$ и $|E_{m+1}| \leq \mu \leq |Y_m|$, имеем $E_{m+1} \subseteq Y_m$, а значит, $Y_m \xRightarrow{E_{m+1}}_w Y_{m+1}$ для $Y_{m+1} := E'_{m+1} \frac{Y_m}{E_{m+1}}$. $\square$

4.6. Лемма. Пусть слово X_0 , последовательность слов $\langle X_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ и последовательность явных слов $\langle E_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ таковы, что

$$X_0 \xRightarrow{E_1}_w X_1 \xRightarrow{E_2}_w \dots \xRightarrow{E_i}_w X_i \xRightarrow{E_{i+1}}_w X_{i+1} \xRightarrow{E_{i+2}}_w \dots,$$

причем слова $X_0, X_1, X_2, \dots$ попарно различны.

(a) Существуют $n, m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$\mu \leq |X_n| \leq |X_{n+1}|, \dots, |X_{n+m}|, \quad X_n \upharpoonright_\mu = X_{n+m} \upharpoonright_\mu. \quad (6)$$

(b) Если $n, m \in \mathbb{N}$ удовлетворяют условиям (6) и $Y_0 := X_n \upharpoonright_\mu$, то найдутся такие слова $Y_1, \dots, Y_m$ и S , что

$$Y_0 \xRightarrow{E_{n+1}}_w Y_1 \xRightarrow{E_{n+2}}_w \dots \xRightarrow{E_{n+m}}_w Y_m = Y_0 S.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X_0, \langle X_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ и $\langle E_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ удовлетворяют условиям леммы.

(a) Прежде всего заметим, что существует число $n_0 \in \mathbb{N}$, для которого

$$|X_n| \geq \mu \quad \text{при всех } n \geq n_0. \quad (7)$$

Действительно, если такого числа n_0 нет, то имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $|X_{n_i}| < \mu$ для всех $i \in \mathbb{N}$, а тогда слова X_{n_i} не могут быть попарно различными, так как множество $\{X \in \mathbb{A}^+ : |X| < \mu\}$ конечно.

Согласно лемме 2.3 существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что для любых $n, i \in \mathbb{N}$

$$\text{из } n \geq n_i \text{ следует } |X_n| \geq |X_{n_i}|. \quad (8)$$

Без ограничения общности можно считать, что $n_1 \geq n_0$. Тогда в силу (7) имеем

$$|X_{n_i}| \geq \mu \quad \text{для всех } i \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

Поскольку множество слов длины μ конечно, слова $X_{n_i} \upharpoonright_\mu$ не могут быть попарно различными. Следовательно, найдутся такие числа $i < j$, что $X_{n_i} \upharpoonright_\mu = X_{n_j} \upharpoonright_\mu$. Положим $n := n_i$ и $m := n_j - n_i$. Тогда $X_n \upharpoonright_\mu = X_{n+m} \upharpoonright_\mu$, причем благодаря соотношениям (8) и (9) справедливы неравенства

$$\mu \leq |X_n| \leq |X_{n+1}|, \dots, |X_{n+m}|.$$

(b) Рассмотрим произвольные $n, m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условиям (6), и положим $Y_0 := X_n \upharpoonright_\mu = X_{n+m} \upharpoonright_\mu$, $T := \frac{X_n}{Y_0}$ и $R := \frac{X_{n+m}}{Y_0}$. Таким образом, $|Y_0| = \mu$, $X_n = Y_0 T$ и $X_{n+m} = Y_0 R$.

Применяя лемму 4.5 к словам X_n и Y_0 (в роли X_0 и Y_0), строке T (в роли S), словам $X_{n+1}, \dots, X_{n+m}$ (в роли $X_1, \dots, X_n$) и явным словам $E_{n+1}, \dots, E_{n+m}$ (в роли $E_1, \dots, E_n$), заключаем, что имеются слова $Y_1, \dots, Y_m$, для которых

$$Y_0 \xRightarrow{E_{n+1}}_w Y_1 \xRightarrow{E_{n+2}}_w \dots \xRightarrow{E_{n+m}}_w Y_m,$$

причем $X_{n+i} = Y_i T$ и $|Y_i| \geq \mu$ при всех $i = 1, \dots, m$. В частности, $Y_m T = X_{n+m} = Y_0 R$ и $|Y_m| \geq \mu$. С другой стороны, $|Y_0| = \mu$, а значит, $Y_0 \subseteq Y_m$, т. е.

$$Y_m = Y_0 S$$

для некоторой строки S . Остается заметить, что $S \neq \emptyset$, так как в противном случае $X_n = Y_0 T = Y_m T = X_{n+m}$. $\square$

4.7. Теорема. Если существуют слова $X_1, X_2, X_3, \dots$, образующие бесконечную цепь $X_1 \Rightarrow_w X_2 \Rightarrow_w X_3 \Rightarrow_w \dots$, то существует слабо рекуррентное слово.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X_n = X_m$ для некоторых $n < m$, то слово X_n слабо рекуррентно по определению. Если же слова $X_1, X_2, X_3, \dots$ попарно различны, то существование слабо рекуррентного слова вытекает из леммы 4.6. $\square$

4.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Отметим, что для общих систем перезаписи строк бесконечная редукция не обязана сопровождаться петлевым поведением (см. [4]). Теорема 4.7 показывает, что для рассматриваемой слабой префиксной перезаписи ситуация существенно жестче: наличие бесконечной цепи всегда влечет существование петли.

Теорема 4.7 окажется полезной, в частности, при обосновании алгоритма проверки существования слабо рекуррентных слов (см. [1, алгоритм 5.10]). Отсутствие слабо рекуррентных слов тесно связано с концептуальной непротиворечивостью рассматриваемой системы префиксной перезаписи (см. [1, теорема 2.6]). Соответствующему детальному исследованию будет посвящена очередная работа в рамках запланированной серии публикаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е. Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть I: Обзор и основные результаты // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 3. С. 392–413.
2. Гутман А. Е. Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть II: Эффективный анализ перезаписи // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 4. С. 616–625.
3. Brzozowski J. A., Jürgensen H. Representation of semiautomata by canonical words and equivalences // Internat. J. Found. Comput. Sci. 2005. V. 16, N 5. P. 831–850.
4. Geser A., Zantema H. Non-looping string rewriting // RAIRO Theor. Inform. Appl. 1999. V. 33, N 3. P. 279–301.
5. Lohrey M., Petersen H. Complexity results for prefix grammars // RAIRO Theor. Inform. Appl. 2005. V. 39, N 2. P. 391–401.

Поступила в редакцию 15 июля 2026 г.

После доработки 15 июля 2026 г.

Принята к публикации 3 августа 2026 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

gutman@math.nsc.ru

УДК 517.518

ПРИМЕР ЛИПШИЦЕВА ГРАФИКА ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП ЭНГЕЛЯ И ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для липшицевых отображений-графиков, определенных на группе Энгеля, установлен явный вид субриманова дифференциала и выведен явный вид формулы площади. Приведен пример нетривиального отображения групп Энгеля, график которого является липшицевым во внутреннем смысле отображением трехступенчатых групп Карно.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.511

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, группа Энгеля, трехступенчатая группа Карно.

В недавней статье [1] исследовался вопрос, при каких условиях график, построенный по произвольному отображению групп Энгеля, является липшицевым относительно внутренних (согласованных с субримановой структурой) расстояний. Условия на отображения, в частности, на их дифференциальные свойства, были установлены в явном виде. Кроме того, в [1] приводились примеры, когда графики строились по двум отображениям, фактически зависящим от горизонтальных координат. Сам по себе вопрос существования липшицевых во внутреннем смысле отображений является достаточно трудоемкой задачей; кроме того, условия, установленные в критерии липшицевости графика, являются довольно жесткими и могут привести к системам дифференциальных уравнений, разрешимых только на подмногообразиях области определения, когда часть переменных связана определенными соотношениями, а не на всей группе. Особый интерес представляет случай, когда, во-первых, у отображений, по которым строится график, есть зависимость и от негоризонтальных координат и, во-вторых, когда поля на образе и прообразе отображения не коммутируют. Мы приводим несложный пример такого отображения и структуры. Кроме того, на базе результатов [1] для общего случая липшицевых графиков, построенных по отображениям групп Энгеля, выведен явный вид формулы площади. Отметим, что несмотря на то, что группа Энгеля является модельным случаем трехступенчатой группы Карно и имеет относительно «простую» структуру, ее свойства широко применяются при решении задач субримановой геометрии и связанных с ними прикладных вопросов (см., например, [2] и ссылки на литературу). С другой стороны, классы отображений-графиков неголономных структур исследуется достаточно интенсивно [3–14] в связи с перспективностью применения к практическим задачам [15–17] и др.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

© 2026 Карманова М. Б.

1. Основные определения

Напомним базовые определения, которые потребуются в ходе решения задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [18]. Трехступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде

$$V = \bigoplus_{k=1}^3 V_k, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad [V_1, V_3] = \{0\}.$$

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$. Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_k , $k = 1, 2, 3$.

Группа Энгеля является важным частным случаем трехступенчатой группы Карно (см., например, [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа Энгеля — это четырехмерная группа Карно, где $V_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$, $V_2 = \text{span}\{X_3\}$, $V_3 = \text{span}\{X_4\}$. Кроме того, верно

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Групповая операция на трехступенчатых группах Карно определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа вида (1.1): если поля X и Y — линейные комбинации базисных полей с постоянными коэффициентами, $x = \exp(X)(\mathbf{0})$, $y = \exp(Y)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp(Y)(x) = \exp(Z)(\mathbf{0})$, где

$$Z = X + Y + 1/2 \cdot [X, Y] + 1/12 \cdot ([X - Y], [X, Y]). \quad (1.1)$$

Нам также потребуется следующее свойство базисных полей на группах Карно (см., например, [18]):

$$[X_i, X_j] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k, \quad (1.2)$$

где c_{ijk} постоянны.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см., например, [19]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=3} w_j^2\right)^{\frac{1}{6}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_2(x, y),$$

где $\tilde{d}_2$ — квазиметрика на $\tilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 3.

Напомним основной результат [1], где описывается критерий липшицевости отображения-графика. Сначала перечислим условия, при которых решается задача, и приведем необходимые термины и факты теории.

Предположение 5. Пусть $\hat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатая группа Карно с базисными векторными полями $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_8$, которые образуют алгебру Ли $\hat{V} = \bigoplus_{k=1}^3 \hat{V}_k$, где $\hat{V}_1 = \text{span}\{\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_4\}$, $\hat{V}_2 = \text{span}\{\hat{X}_5, \hat{X}_6\}$, $\hat{V}_3 = \text{span}\{\hat{X}_7, \hat{X}_8\}$, причем

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_5, [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = \hat{X}_6, [\hat{X}_1, \hat{X}_5] = \hat{X}_7, [\hat{X}_3, \hat{X}_6] = \hat{X}_8,$$

и, кроме того, $[\hat{X}_2, \hat{X}_5] = [\hat{X}_4, \hat{X}_6] = 0$.

Для остальных коммутаторов полей верны соотношения

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{l: \deg \hat{X}_l = \deg \hat{X}_i + \deg \hat{X}_j} c_{ijl} \hat{X}_l.$$

Тогда поля $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_5, \hat{X}_7$ определяют структуру алгебры Ли группы Энгеля $\mathbb{G}$, а поля $\hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{X}_6, \hat{X}_8$ — структуру алгебры Ли группы Энгеля $\tilde{\mathbb{G}}$. Будем также считать, что $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам групп $\mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{0}}$ соответственно в единице $\hat{\mathbf{0}}$ группы $\hat{\mathbb{G}}$.

Для удобства восприятия текста и согласованности номеров полей, координат элементов и координатных функций у отображений, введем

ОБОЗНАЧЕНИЕ 6. Положим $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{5\}$, $I_3 = \{7\}$ и $\tilde{I}_1 = \{3, 4\}$, $\tilde{I}_2 = \{6\}$, $\tilde{I}_3 = \{8\}$.

Так как $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \hat{\mathbb{G}}$, то для $x \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ положим

$$x = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in I_i} x_k \hat{X}_k \right) (\hat{\mathbf{0}})$$

и

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(x) \hat{X}_k \right) (\hat{\mathbf{0}}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функции φ_k будем называть *координатными функциями* отображения $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Если $k \in \tilde{I}_1$, то такие координатные функции будем называть *горизонтальными*.

Напомним определение отображения-графика на группе Карно для исследуемого случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $u \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Значение *отображения-графика* $\varphi_{\Gamma}(u)$ совпадает с элементом

$$\varphi_{\Gamma}(u) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(u) \hat{X}_k \right) (u).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 9. Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — группы Энгеля, $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $u, w \in \mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\{\varphi_u^k(w)\}$, где

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_u^k(w) \hat{X}_k\right)(\varphi(u)).$$

Явный вид таких координат играет важную роль в исследовании свойства липшицевости графиков и вывода свойств отображений, по которым эти графики строятся. Из (1.1) и (1.2) следует, что $\varphi_u^k(w) = \varphi_k(w) - \varphi_k(u)$ для $k \in \tilde{I}_1$. Если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)).$$

При $k = 8 \in \tilde{I}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) = & \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)) \\ & - \frac{1}{12}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Для формулировки базового утверждения нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 ([20], см. также [21]). Функция $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является *hc-дифференцируемой*, или *субриманово дифференцируемой*, в точке $x \in \mathbb{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k X_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim V_1} a_i(x) y_i = f(x) + \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - f(x) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(d_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется *hc-дифференциалом*, или *субримановым дифференциалом*, или *горизонтальным градиентом* функции f в точке x .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 11. Для $k \in \tilde{I}_1$ положим

$$\nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle = \sum_{l:l \in I_1} \varphi_{kl}(u) w_l.$$

Сформулируем основные утверждения критерия липшицевости [1] графика, которые будут применены в настоящем исследовании.

Теорема 12. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 5 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(w),$$

где $\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(\mathbf{0})$, является локально липшицевым относительно d_2 и $\hat{d}_2$ с hc-дифференцируемыми горизонтальными координатными функциями тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции φ_j локально липшицевы во внутреннем смысле и h -дифференцируемы всюду, если $j \in \tilde{I}_1$.
2. Верно

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек $u \in \mathbb{G}$.

3. Для $k = 6 \in \tilde{I}_2$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_5|$, а при $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$ выполняется $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_7|^{2/3}$ для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

4. Верно

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \tilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) &= c_{167} \varphi_6(u) = c_{267} \varphi_6(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) \\ &= \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0 \end{aligned}$$

для всех точек $u \in \mathbb{G}$.

5. Для $k = 8 \in \tilde{I}_3$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в точке u дважды, ее первый дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j,$$

второй дифференциал равен

$$\begin{aligned} &\sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \varphi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \varphi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l. \end{aligned}$$

Если же $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$, то $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. В точках вида $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$ отображение $\varphi_u^8(w)$ дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен $-\sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u)$, и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

6. Выполнено условие о скоростях сходимости к нулю разностей отображений и их дифференциалов; см. подробности в [1, теорема 12].

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Для вывода формулы площади и для построения примера явный вид условия 6 не потребуется, поэтому оно здесь полностью не приводится. Кроме того, так как в примере мы будем строить гладкое отображение, для

которого условие 6 выполнено всегда, то в нем также нет необходимости. Отметим, что условие 6 выполнено для всех отображений $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$, координатные функции которых принадлежат классу C^3 .

2. Площадь поверхностей-графиков

В данном разделе выведем формулу для липшицевых поверхностей-графиков, где график построен по отображению, удовлетворяющему условиям теоремы 12. В частности, опишем структуру *hc*-дифференциала, который является субримановым аналогом дифференциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 ([20]; см. также [21]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\xi : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$. Отображение ξ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widehat{d}_2(\xi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\xi(x)$.

Следующий результат установлен Пансю в [20] для открытых множеств и С. К. Водопьяновым (см. также, например, [21]) для измеримых множеств. Сформулируем его для нашего случая.

Теорема 15. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатые группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество и $\xi : D \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно *hc-дифференцируемо почти всюду*. Кроме того, матрица $\widehat{D}\xi$ в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widehat{X}_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$ состоит из «диагональных» $(\dim \widehat{V}_k \times \dim V_k)$ -блоков, а остальные элементы нулевые, $k = 1, 2, 3$.

Здесь $\widehat{V} = \bigoplus_{j=1}^3 \widehat{V}_j$ — алгебра Ли векторных полей на $\widehat{\mathbb{G}}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 16. Здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из $\widehat{V}_k$, а номер столбца — полям из V_k , $k = 1, 2, 3$. Таким образом, размер этих блоков равен $\dim \widehat{V}_k \times \dim V_k$, $k = 1, 2, 3$.

Так как речь идет о субримановой площади, введем понятие соответствующих мер на прообразе и образе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Значение *субримановой меры* для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^3 \omega_{\dim V_k} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где $\nu = \sum_{k=1}^3 k \dim V_k$ — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 , ω_m обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Если же $B = \varphi_\Gamma(A) \subset \widehat{\mathbb{G}}$ — образ измеримого множества при липшицевом отображении-графике, то значение $\mathcal{H}^\nu(B)$ определяется аналогично с той разницей, что шары покрытия берутся относительно $\widehat{d}_2$.

Несмотря на нестандартное определение (добавлено условие принадлежности центров шаров покрытия измеряемому множеству), функция множества

$\mathcal{H}^\nu$ является мерой и на образе, и на прообразе. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств (см. схему доказательства, например, в [22]).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 18. Для $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$ положим

$$\varphi_u^H(w) = \exp(\varphi_3(w) \hat{X}_3 + \varphi_4(w) \hat{X}_4)(\varphi(u)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Фактически для фиксированного $u \in \mathbb{G}$ в условиях обозначения 18 $\varphi_u^H(w)$ является отображением двумерной поверхности на поверхность размерности не выше двух.

Теорема 20. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 5, а $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ удовлетворяет условиям теоремы 12, т. е. построенное по нему отображение-график φ_Γ является липшицевым во внутреннем смысле. Пусть $u \in \mathbb{G}$ — точка hc -дифференцируемости φ_Γ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_i(w)$, $i \in \tilde{I}_1$, является дифференцируемой в точке u и значение ее дифференциала в точке $u \in \mathbb{G}$ на элементе w совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_i$. Кроме того, отображение $\varphi_u^H(w)$ также является дифференцируемым в таких точках полями $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$, а матрица его дифференциала совпадает с блоком матрицы hc -дифференциала φ_Γ , лежащим на пересечении 3 и 4 строк и 1 и 2 столбцов.
2. Если $i \in \tilde{I}_2$ и $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ является дифференцируемой в точке u и значение $\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u} \cdot w_5$ совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_6$.
3. Если $i \in \tilde{I}_3$ и $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ является дифференцируемой в точке u и значение $\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u} \cdot w_7$ совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_8$.

Кроме того, субриманов дифференциал φ_Γ в точках, где он существует, имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ D\varphi_u^H(u) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где E_2 — единичная матрица размера 2,

$$D\varphi_u^H(u) = \begin{pmatrix} \varphi_{31}(u) & \varphi_{32}(u) \\ \varphi_{41}(u) & \varphi_{42}(u) \end{pmatrix}$$

и для φ_Γ справедлива формула площади

$$\int_A \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u) d\mathcal{H}^\nu(u) = \mathcal{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u)$ совпадает со значением

$$\sqrt{\det(E_2 + (D\varphi_u^H)^*(u)D\varphi_u^H(u)) \cdot (1 + (\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u})^2) \cdot (1 + (\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u})^2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений о структуре hc -дифференциала применим выведенные в [1] координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Пусть $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\hat{N}} s_k \hat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u))$. Тогда из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \tilde{I}_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то $d_2(u, w)$ сравнимо с расстоянием между этими точками, посчитанным относительно римановой метрики. Поэтому первое утверждение вытекает из определения 10 и (2.2). Кроме того, из hc -дифференцируемости φ_Γ следует классическая дифференцируемость отображения $w \mapsto \varphi_u^H(w)$ в точке u , если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. Из доказанного получаем, что первый блок матрицы субриманова дифференциала φ_Γ размера 4×2 равен

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ D\varphi_u^H(u) \end{pmatrix}.$$

Установим второе утверждение. Имеем

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5 + o(d_2(u, w)^2),$$

или

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} - o(d_2(u, w)^2) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5,$$

где правая часть не зависит от всех координат за исключением w_5 . Положим $w_1 = w_2 = w_7 = 0$. Тогда, во-первых, $d_2(u, w)^2 = |w_5|^2$ и, во-вторых,

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + o(d_2(u, w)^2) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5,$$

откуда следует дифференцируемость отображения $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ в точке u , если $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, где значение $\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u}$ равно $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65}$.

Третье утверждение о дифференцируемости s_8 и равенстве $\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u}$ значению $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{87}$ доказывается аналогично.

Таким образом, доказаны три утверждения о дифференциальных свойствах φ и установлена структура (2.1) субриманова дифференциала отображения-графика.

Так как отображение-график является липшицевым во внутреннем смысле отображением, то для него справедлива формула площади (см., например, [23, 22]), которая с учетом установленных результатов имеет вид

$$\int_A \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u) d\mathcal{H}^\nu(u) = \mathcal{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u)$ совпадает со значением

$$\sqrt{\det(E_2 + (D\varphi_u^H)^*(u)D\varphi_u^H(u)) \cdot (1 + (\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u})^2) \cdot (1 + (\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u})^2)}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Выведенная в теореме 20 формула площади имеет явный вид в терминах производных координатных функций определяющего график отображения вдоль базисных векторных полей. Если в [23, 22] установлен общий вид формулы площади для отображений групп Карно, то результат данной теоремы можно рассматривать как уточнение результатов этих работ для специфических классов отображений. В отличие от формул, установленных, например, в [14], необходимости введения новых объектов, не всегда вычисляемых явно, в исследуемом случае не возникает.

3. Пример отображения

Приведем пример отображения, график которого липшицев во внутреннем смысле и которое зависит не только от горизонтальных координат. Напомним, что в [1] описывались примеры, когда функции зависят только от горизонтальных переменных.

Рассмотрим точки $u, w \in \mathbb{G}$ такие, что $w = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in I_i} w_k \hat{X}_k\right)(u)$. Для анализа свойств напомним выведенные в [1] координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$, где $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\hat{N}} s_k \hat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u))$. Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \tilde{I}_1. \end{cases}$$

Если $k = 5 \in I_2$, то $s_5 = w_5$. Аналогично если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk6}, \quad (3.1)$$

причем если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u и ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь случаи I_3 и $\tilde{I}_3$. Для $k = 7 \in I_3$ имеем $s_7 = w_7$. Для координаты s_8 имеем

$$\begin{aligned} s_8 &= \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 \\ \text{или } i \in \tilde{I}_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8} (\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 \\ \text{или } i \in \tilde{I}_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8} \varphi_i(u) \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} \varphi_3(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} (\varphi_3(w) + \varphi_3(u)) \varphi_i(w) w_j \\ &+ \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j68} (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) w_j w_i \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} \varphi_i(u) w_j \varphi_3(w) + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)) c_{j68}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $\varphi_u^8(w)$ должно быть дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u). \quad (3.4)$$

Если $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$, то

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \quad (3.5)$$

является первым дифференциалом, а

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ & - \sum_{j,l \in I_1} \varphi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ & - \sum_{j,l \in I_1} \varphi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l \quad (3.6) \end{aligned}$$

является вторым дифференциалом отображения $w \xrightarrow{\varphi_u^8} \varphi_u^8(w)$ в точке u по w_1, w_2 .

Таким образом, для составления уравнений используем ограничения, описанные в выражениях (3.2), (3.4) и (3.5); кроме того, для проверки нужно будет убедиться, что выражение (3.1) не превосходит $O(d_2(u, w)^2)$, а (3.3) не превосходит $O(d_2(u, w)^3)$. Кроме того, уравнения должны быть согласованы по коммутаторам векторных полей и должны быть согласованы условия (3.5) и (3.6).

Заметим, что для отображений $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$, которые зависят не только от горизонтальных переменных, также справедливо доказанное в [1] утверждение о равенстве классов производных, доказательство которого проводится дословно.

Лемма 22. Если отображение $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ таково, что построенный по нему график является локально липшицевым во внутреннем смысле отображением, горизонтальные координатные функции которого h -дифференцируемы всюду, то должно выполняться соотношение

$$\widehat{X}_j \varphi_4(u) \varphi_3(u) (c_{4l6} + c_{l68}) = \widehat{X}_j \varphi_3(u) \varphi_4(u) (c_{4l6} + c_{l68})$$

для всех $j, l = 1, 2$.

Замечание 23. В работе [1] в описании структур 1.1 и 1.2.1 есть ссылка на частный случай леммы 22, в условиях которой говорится о зависимости только от горизонтальных производных, тогда как в описании самих структур о характере зависимости не уточняется. Тем не менее в силу леммы 22 условия которой подразумевают зависимость не только от горизонтальных производных (в общем случае), высказывание в описании структур 1.1 и 1.2.1 остается корректным.

Опишем структуру трехступенчатой группы Карно, на которой будет принимать значения отображение-график. Для существования структуры нужно,

чтобы выполнялось тождество Якоби, которое в терминах структурных констант из (1.2) для горизонтальных полей имеет вид

$$\begin{cases} c_{235} + c_{236}c_{167} - c_{136}c_{267} + c_{357} = 0, \\ c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{245} + c_{246}c_{167} - c_{146}c_{267} + c_{457} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать подкласс структур 1 из [1], когда $c_{167} = c_{267} = 0$. Кроме того, положим $c_{135} = c_{235} = c_{236} = 0$, а также $\varphi_4 \equiv 0$. При этих предположениях выводим $c_{357} = 0$ и $c_{457} = -c_{245}$. Тогда, во-первых, выполнены условия леммы 22 и, во-вторых,

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0, \end{cases}$$

а с учетом $c_{135} = c_{235} = c_{236} = 0$ верно

$$\begin{cases} -c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Убедимся, что константы, удовлетворяющие системе (3.7), существуют. Положим

$$c_{168} = x, \quad c_{458} = y, \quad c_{268} = z, \quad c_{358} = t$$

и исследуем разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} t = c_{136}z, \\ y = c_{146}z - c_{246}x, \\ x = c_{145}t + c_{146}, \\ z = c_{245}t + c_{246}, \end{cases}$$

которая сводится к системе

$$\begin{cases} t = c_{136}z, \\ y = c_{146}z - c_{246}(c_{145}c_{136}z + c_{146}), \\ x = c_{145}c_{136}z + c_{146}, \\ z = c_{245}c_{136}z + c_{246}. \end{cases}$$

Решения существуют, если либо $c_{245}c_{136} \neq 1$, либо одновременно $c_{245}c_{136} = 1$ и $c_{246} = 0$.

Перейдем к построению примера. Сначала запишем выражения для координатных функций φ_3 , φ_6 и φ_8 отображения φ . Имеем

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u)$$

и

$$\varphi_u^8(w) = \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)),$$

т. е.

$$\varphi_8(w) - \varphi_8(u) = \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\varphi_6(w) - \varphi_6(u)\varphi_3(w)),$$

поэтому для всех i из I_1 , I_2 и I_3 верно

$$\widehat{X}_i\varphi_8(w)|_{w=u} = \widehat{X}_i\varphi_u^8(w)|_{w=u} + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_i\varphi_6(w)|_{w=u} - \varphi_6(u)\widehat{X}_i\varphi_3(w)|_{w=u}).$$

Составим систему уравнений, исходя из описания, полученного в теореме 12. Для искомых функций φ_3 , φ_6 и φ_8 должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}c_{136}(\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_1\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_5\varphi_8(u) = c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_5\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u)). \end{cases}$$

С учетом двух первых уравнений и того, что

$$\widehat{X}_5\varphi_6 = \widehat{X}_1\widehat{X}_2\varphi_6 - \widehat{X}_2\widehat{X}_1\varphi_6 = c_{136}\widehat{X}_2\varphi_3,$$

система упрощается до вида

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_5\varphi_8(u) = c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u)). \end{cases}$$

Заметим, что так как $c_{358} = c_{268}c_{136}$ и

$$\widehat{X}_5\varphi_u^8(w) = [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_u^8(w),$$

то должно выполняться

$$\begin{aligned} \widehat{X}_5\varphi_8(u) &= [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_8(u) = \widehat{X}_1\left(-c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)\right) \\ &\quad - \widehat{X}_2\left(-c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)\right) \\ &= c_{268}c_{136}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_3(u) \\ &= c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u), \end{aligned}$$

что является тождеством. Таким образом, пятое уравнение данной системы является следствием первых четырех.

Получаем систему

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)). \end{cases} \quad (3.8)$$

Будем считать, что $c_{136} \neq 0$. Стандартными рассуждениями проверяем, что система согласована, и выводим, что таким уравнениям удовлетворяет набор функций

$$\begin{cases} \varphi_3 = -b/c_{136}, \\ \varphi_6 = bu_1 + c, \\ \varphi_8 = -c_{268}bu_5 - c_{268}(bu_1/2 + c)u_2 - c_{168}(bu_1^2/2 + cu_1) + a, \end{cases}$$

где b, c, a — произвольные константы.

Заметим также, что

$$\widehat{X}_1(-c_{j68}\varphi_6(u)) = -c_{j68}\widehat{X}_1\varphi_6(u) = c_{136}c_{j68}\varphi_3(u) = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{1k6}c_{j68}\varphi_k(u)$$

и

$$\widehat{X}_2(-c_{j68}\varphi_6(u)) = -c_{j68}\widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0 = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{2k6}c_{j68}\varphi_k(u),$$

если $j = 1, 2$, т. е. все горизонтальные производные горизонтальных компонент дифференциала функции $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ совпадают с горизонтальными компонентами второго дифференциала.

Выпишем теперь компоненты отображения-графика φ_Γ , построенного по отображению

$$u \mapsto \varphi(u) = \exp(\varphi_3(u)\widehat{X}_3 + \varphi_6(u)\widehat{X}_6 + \varphi_8(u)\widehat{X}_8)(\widehat{\mathbf{0}}),$$

и проверим липшицевость для координат (3.1) и (3.3). Для

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widehat{N}} s_k \widehat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k\right)(u),$$

имеем $s_k = w_k$ для $k = 1, 2, 5, 7$. Если $k = 3, 4$, то $s_k = 0$. Далее,

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} = bw_1 + \frac{2}{2}w_1 \cdot (-b/c_{136})c_{136} = 0.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} s_8 = \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1} w_j c_{jis}(\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i=3, j=5 \\ \text{или } i=6, j \in I_1}} w_j c_{jis} \varphi_i(u) \\ + \frac{1}{12} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} \varphi_3(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} (\varphi_3(w) + \varphi_3(u)) \varphi_i(w) w_j \\ + \frac{1}{4} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} \varphi_i(u) w_j \varphi_3(w). \end{aligned}$$

С учетом того, что координата точки w при $\widehat{X}_5$ равна $u_5 + w_5 + \frac{1}{2}(u_1 w_2 - u_2 w_1)$ в силу (1.1), выводим, что $s_8 = 0$. Таким образом, $s_3 = s_4 = s_6 = s_8 = 0$. Следовательно, график отображения φ будет липшицев во внутреннем смысле.

При этом, во-первых, есть зависимость координатной функции φ_8 от негоризонтальной координаты u_5 при $c_{268}b \neq 0$ и, во-вторых, есть нетривиальные коммутаторы полей на образе и прообразе.

Кроме того, из (2.1) и теоремы 20 следует, что построенный по найденному отображению φ график сохраняет меру множества, так как якобиан равен единице.

Положим $W = w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2 + w_5\hat{X}_5 + w_7\hat{X}_7$ и $V(u) = \varphi_3(u)\hat{X}_3 + \varphi_6(u)\hat{X}_6 + \varphi_8(u)\hat{X}_8$. Заметим, что в данном случае $\varphi_\Gamma(w) = \exp(W)(\varphi_\Gamma(u))$ для любых u и w из области определения отображения. Следовательно, при фиксации точки u выводим, что

$$\exp(-W)\exp(V(w))\exp(W)(u) = \exp(V(u))(u),$$

т. е. $\exp(-W)\exp(V(w))\exp(W)(\mathbf{0}) = u_0$, где u_0 — некоторый постоянный элемент, откуда следует вид построенного отображения в терминах экспоненциальных отображений, тогда как его график является сдвигом на некоторый постоянный элемент. Полученный вид решения системы (3.8) связан с ограничениями, возникающими из условий совместимости такой системы, которые являются следствием вида коммутаторов входящих в нее векторных полей, а также неравенства нулю констант, соответствующих коммутаторам полей из прообраза и образа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманова М. Б. Графики отображений групп Энгеля и критерий их внутренней липшицевости // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 4. С. 650–673.
2. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
3. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
4. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
5. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
6. Fomenko A. T. (ed.) Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993 (Adv. Soviet Mathematics; V. 15).
7. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
8. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. Reine Angew. Mathematik. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
9. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
10. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81. P. 251–295.
11. Garofalo N., Pauls S. D. The Bernstein problem in the Heisenberg group. 2005. arXiv:math/0209065v2.
12. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.
13. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301. P. 1369–1406.
14. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. [Электронный ресурс] arXiv:2311.06638v2 [math.MG]. 2026.
15. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the rototranslation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2006. V. 3. P. 145–161.

16. Hladky R. K., Pauls S. D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vis. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
17. Petitot J. Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
18. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
19. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
20. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
21. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
22. Карманова М. Б. Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.
23. Карманова М. Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

Поступила в редакцию 31 июля 2026 г.

После доработки 11 августа 2026 г.

Принята к публикации 11 августа 2026 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

УДК 512.54:517.986.6

ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОДНОМЕРНЫЕ КОГОМОЛОГИИ ОРЛИЧА

Я. А. Копылов

Аннотация. Обсуждается связь одномерных ℓ^Φ -когомологий бесконечной конечно порожденной группы, где Φ — N -функция, вместе с дополнительной N -функцией удовлетворяющей условию удвоения, и трансляционно инвариантных линейных функционалов на факторпространстве пространства Φ -Дирихле конечных функций по константам.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.512

Ключевые слова: конечно порожденная группа, пространство Орлича, когомологии, трансляционно инвариантный линейный функционал.

Введение

Пусть G — локально компактная хаусдорфова топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство вещественных функций на G , инвариантное относительно левых сдвигов. Для $g \in G$ и $f \in E$ положим $(\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, $x \in G$. Линейный функционал $\varkappa$ на E называется *трансляционно инвариантным*, если $\varkappa(\lambda_G(g)f) = \varkappa(f)$ для любых $g \in G$ и $f \in E$. Интересным является вопрос о существовании разрывных трансляционно инвариантных линейных функционалов на E .

Трансляционно инвариантные линейные функционалы в различных функциональных пространствах и, в частности, в пространствах L^p , на локально компактных топологических группах изучались различными авторами (см., например, [1–4]). В [5] рассматривались вопросы о существовании нетривиальных трансляционно инвариантных линейных функционалов на пространствах Орлича на локально компактных группах.

В [4] Палс установил связь между одномерными L_p -когомологиями бесконечной конечно порожденной группы G и трансляционно инвариантными линейными функционалами на факторпространстве $D^p(G)/\mathbb{R}$, где $D^p(G)$ — пространство p -Дирихле конечных функций на G .

В настоящей работе некоторые из результатов [4] обобщаются на пространства Орлича $\ell^\Phi(G)$, где Φ — N -функция, которая вместе с дополнительной N -функцией удовлетворяет условию удвоения (для малых значений переменной).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF–2026–0026).

§ 1. N -функции и пространства Орлича

Напомним некоторые понятия теории (дискретных) пространств Орлича, необходимые для дальнейшей работы. Далее X — счетное множество, наделенное считающей мерой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется N -функцией, если

- (i) Φ четна и выпукла;
- (ii) $\Phi(x) = 0 \iff x = 0$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$.

N -функция Ψ , дополнительная к N -функции Φ , задается формулой

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что если Ψ — дополнительная N -функция к Φ , то Φ — дополнительная N -функция к Ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что N -функция Φ удовлетворяет Δ_2 -условию (или условию удвоения) для малых x , и пишут $\Phi \in \Delta_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$, $K > 2$ такие, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ для $0 \leq x \leq x_0$, и говорят, что функция Φ удовлетворяет ∇_2 -условию для малых x , и пишут $\Phi \in \nabla_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$ и $c > 1$ такие, что $\Phi(x) \leq \frac{1}{2c}\Phi(cx)$ для $0 \leq x \leq x_0$.

Если указанные неравенства выполнены для всех $x \geq 0$, то говорят, что Φ принадлежит Δ_2 (соответственно Φ принадлежит ∇_2).

Как хорошо известно, N -функция Φ принадлежит $\Delta_2(0)$ тогда и только тогда, когда дополнительная N -функция Ψ принадлежит $\nabla_2(0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное пространство

$$\ell^\Phi(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in X} \Phi(af(x)) < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}$$

называется пространством Орлича $\ell^\Phi(X)$.

Как известно, если $\Phi \in \Delta_2(0)$, то

$$\ell^\Phi(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in X} \Phi(f(x)) < \infty \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Калибровочной нормой (или нормой Люксембурга) функции $f \in \ell^\Phi(X)$ называется

$$\|f\|_{(\Phi)} := \|f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} := \inf \left\{ k > 0 : \sum_{x \in X} \Phi\left(\frac{f(x)}{k}\right) \leq 1 \right\}.$$

Неравенство Гёльдера. Если Φ и Ψ — дополнительные друг к другу N -функции, $f \in \ell^\Phi(X)$, $g \in \ell^\Psi(X)$, то $fg \in \ell^1(X)$ и

$$\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_{(\Phi)}\|g\|_{(\Psi)}.$$

**§ 2. ℓ^Φ -когомологии, Φ -гармонические
функции и трансляционно
инвариантные линейные функционалы**

Пусть G — локально компактная топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство вещественных функций на G , инвариантное относительно левых сдвигов. Следуя [4], обозначим символом $\text{Diff}(E)$ линейную оболочку множества $\{\lambda_G(g)f - f : f \in E, g \in G\}$.

Всюду далее предполагается, что G — бесконечная конечно порожденная группа с симметричным порождающим множеством S . Все рассматриваемые ниже пространства вещественны.

Если Φ — N -функция, то определено пространство Орлича $\ell^\Phi(G)$, как и выше, снабженное калибровочной нормой $\|\cdot\|_{(\Phi)}$.

Всюду ниже предполагается, что $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$.

Пусть $\mathcal{F}(G, \mathbb{R})$ — множество всех вещественных функций на G . Следуя [6], определим пространство Φ -Дирихле конечных функций на G следующим образом:

$$\begin{aligned} D^\Phi(G) &= \{f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}) \mid \lambda_G(x)f - f \in \ell^\Phi(G) \text{ для всех } x \in G\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}) \mid \lambda_G(s)f - f \in \ell^\Phi(G) \text{ для всех } s \in S\}. \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{D}^\Phi(G) = D^\Phi(G)/\mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{D}^\Phi(G)$ банахово относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \sum_{s \in S} \|\lambda_G(s)f - f\|_{(\Phi)}.$$

Из определения следует, что выполнены вложения

$$\text{Diff}(\ell^\Phi(G)) \subset \text{Diff}(\mathcal{D}^\Phi(G)) \subset \ell^\Phi(G) \subset \mathcal{D}^\Phi(G).$$

Если A — подмножество нормированного пространства X , то везде символом $(\overline{A})_X$ обозначено замыкание A в X .

Как известно, для счетного множества X со считающей мерой из совпадения двух N -функций Φ_1 и Φ_2 в окрестности нуля следует, что $\ell^{\Phi_1}(X)$ и $\ell^{\Phi_2}(X)$ совпадают как множества, а соответствующие нормы Люксембурга эквивалентны. Нетрудно видеть также, что любую функцию класса $\Delta_2(0)$ можно изменить вне некоторой окрестности нуля таким образом, чтобы полученная функция была N -функцией класса Δ_2 . Тем самым в утверждениях, где для общих пространств с мерой требуется выполнение для N -функции Φ условия Δ_2 (соответственно ∇_2), для пространств со считающей мерой всегда достаточно требовать, чтобы $\Phi \in \Delta_2(0)$ (соответственно $\Phi \in \nabla_2(0)$). Это же справедливо для доказательств в [5]. Учитывая это замечание, получаем следующую дискретную версию теорем 2 и 3 для конечно порожденной бесконечной группы.

Теорема 2.1. Пусть G — конечно порожденная бесконечная группа, Φ — N -функция. Справедливы следующие утверждения.

1) Пусть G аменабельна, $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Тогда на пространстве $\ell^\Phi(G)$ имеются разрывные ТИЛФ.

2) Пусть G неаманабельна, $\Phi \in \nabla_2(0)$. Тогда на $\ell^\Phi(G)$ нет ненулевых ТИЛФ.

Следующая лемма играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 2.2. $\overline{(\text{Diff}(\mathcal{D}^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \ell^\Phi(G)$. По лемме 1 работы [5], примененной с учетом замечания перед теоремой 2.1, существует последовательность $\{f_n\}$ в $\text{Diff}(\ell^\Phi(G))$, сходящаяся к f по ℓ^Φ -норме. Тогда для $s \in S$ имеем

$$\begin{aligned} \|(\lambda_G(s))(f - f_n) - (f - f_n)\|_{(\Phi)} \\ \leq \|(\lambda_G(s))(f - f_n)\|_{(\Phi)} + \|f - f_n\|_{(\Phi)} = 2\|f - f_n\|_{(\Phi)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\|f - f_n\|_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда $f \in \overline{(\text{Diff}(\ell^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. Следовательно, $\ell^\Phi(G) \subset \overline{(\text{Diff}(\ell^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. $\square$

Как известно (см. [6]), пространство $\mathcal{D}^\Phi(G)/\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$ совпадает с редуцированными одномерными ℓ^Φ -когомологиями $\overline{H}_\Phi^1(G)$ группы G , т. е. редуцированными одномерными групповыми когомологиями G с коэффициентами в G -модуле $\ell^\Phi(G)$. Таким образом, $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$.

Рассмотрим вопрос существования непрерывных трансляционно инвариантных линейных функционалов на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$;

(ii) Единственным непрерывным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ является нулевой.

Если группа G неамenable, то эти утверждения также эквивалентны следующему утверждению.

(iii) Нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\iff$ (ii) Если $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$. Из теоремы Хана — Банаха следует, что существует ненулевой непрерывный линейный функционал T на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ такой, что $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \subset \text{Ker } T$. Функционал T трансляционно инвариантен по лемме 2.2.

Обратно, если T — непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$, то $T(f) = 0$ для всех $f \in \overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. Следовательно, если существует ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал $\mathcal{D}^\Phi(G)$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$.

Предположим теперь, что группа G неамenable.

Заметим также, что если $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \mathcal{D}^\Phi(G)$. Известно, что $\ell^\Phi(G)$ замкнуто в $\mathcal{D}^\Phi(G)$ тогда и только тогда, когда G неамenable (см. [6, предложение 2.2] или [7, теорема 3.2]). По теореме 2.1(2) так как G неамenable, то нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\ell^\Phi(G)$. Следовательно, нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$, если G неамenable и $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$. $\square$

Пусть $f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R})$ и $g \in G$. Для непрерывно дифференцируемой N -функции Φ положим

$$\Delta_\Phi f(g) = \sum_{s \in S} \Phi'(f(s^{-1}g) - f(g)).$$

Будем называть функцию f Φ -гармонической, если $f \in D^\Phi(G)$ и $\Delta_\Phi f(g) = 0$ для всех $g \in G$. Обозначим множество Φ -гармонических функций на G символом $HD^\Phi(G)$. Все постоянные функции принадлежат $HD^\Phi(G)$. Φ -гармонические функции на группах и графах рассматривались, например, в [6, 8, 9].

Теорема 2.4. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (i) $HD^\Phi(G) = \mathbb{R}$.
- (ii) Единственным непрерывным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ является нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3.7 работы [6] вытекает, что $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$ тогда и только тогда, когда единственными Φ -гармоническими функциями на G являются постоянные функции. Результат теперь следует из теоремы 2.3. $\square$

В случае, когда Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ и $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$ (что эквивалентно $HD^\Phi(G) \neq \mathbb{R}$), нетрудно явно построить ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

Пусть $f, h \in \mathcal{D}^\Phi(G)$. Положим

$$\langle \Delta_\Phi h, f \rangle = \sum_{g \in G} \sum_{s \in S} \Phi'(h(s^{-1}g) - h(g))(f(s^{-1}g) - f(g)). \quad (1)$$

Сумма в (1) определена в силу неравенства Гёльдера для пространств Орлича, поскольку, как известно (см., например, [6, предложение 1.9]), для N -функции Φ класса $\Delta_2(0)$ и функции $a \in \ell^\Phi(G)$ функция $\Phi'(|a|)$ (а вместе с ней и $\Phi'(a)$ в силу нечетности Φ') принадлежит пространству ℓ^Ψ , где Ψ — дополнительная к Φ N -функция.

Следующее утверждение содержится в [6, лемма 3.5].

Предложение 2.5. Пусть Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Если $h \in HD^\Phi(G)/\mathbb{R}$ и $f \in (\overline{\ell^\Phi(G)})_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$, то $\langle \Delta_\Phi h, f \rangle = 0$.

Следовательно, в случае ненулевого $h \in HD^\Phi(G)/\mathbb{R}$ выражение $\langle \Delta_\Phi h, \cdot \rangle$ определяет ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$. В самом деле, так как $\lambda_G(x)f - f \in \ell^\Phi(G)$ при всех $x \in G$, то $\langle \Delta_\Phi h, \lambda_G(x)f - f \rangle = 0$ и тем самым $\langle \Delta_\Phi h, \lambda_G(x)f \rangle = \langle \Delta_\Phi h, f \rangle$ при всех $x \in G$, т. е. рассматриваемый функционал трансляционно инвариантен. Докажем, что он ненулевой. Рассмотрим выражение

$$\langle \Delta_\Phi h, h \rangle = \sum_{g \in G} \sum_{s \in S} \Phi'(h(s^{-1}g) - h(g))(h(s^{-1}g) - h(g)). \quad (2)$$

Так как дифференцируемая функция Φ четна и строго выпукла, то ее производная Φ' строго возрастает и потому $x\Phi'(x) > 0$ при $x \neq 0$. Значит, все слагаемые в правой части (2) неотрицательны, причем слагаемое, соответствующее паре (g, s) , равно нулю тогда и только тогда, когда $h(s^{-1}g) - h(g) = 0$. Так как S порождает группу G , а функция h непостоянна, то хотя бы одно из слагаемых положительно. Стало быть, $\langle \Delta_\Phi h, h \rangle > 0$.

Для аменабельной группы справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.6. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Если G — аменабельная группа, то существует разрывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in \overline{(\ell^\Phi(G))_{\mathcal{D}^\Phi(G)}} \setminus \ell^\Phi(G)$. Такой элемент существует, поскольку $\ell^\Phi(G)$ не замкнуто в $\mathcal{D}^\Phi(G)$, когда G аменабельна. Пусть Σ — базис Гамеля для $\ell^\Phi(G)$ и Ξ — базис Гамеля для $\mathcal{D}^\Phi(G)$, содержащий Σ и h . Значит, существует линейный функционал T на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ такой, что $T(h) \neq 0$ и $T(f) = 0$ для всех $f \in \ell^\Phi(G)$. Таким образом, функционал T трансляционно инвариантен. Он разрывен по лемме 2.2. $\square$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение статьи и очень полезные замечания, которые способствовали улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Woodward G. S. Translation-invariant linear forms on $C_0(G)$, $C(G)$, $L^p(G)$ for noncompact groups // J. Func. Anal. 1974. V. 16, N 2. P. 205–220.
2. Willis G. A. Translation invariant functionals on $L^p(G)$ when G is not amenable // J. Aust. Math. Soc., Ser. A. 1986. V. 41, N 2. P. 237–250.
3. Willis G. A. Continuity of translation invariant linear functionals on $C_0(G)$ for certain locally compact groups G // Monatsh. Math. 1988. V. 105, N 2. P. 161–164.
4. Puls M. J. Graphs of bounded degree and the p -harmonic boundary // Pacif. J. Math. 2010. V. 248, N 2. P. 429–452.
5. Копылов Я. А. Трансляционно инвариантные линейные функционалы в пространствах Орлича на локально компактных группах // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 901–908.
6. Копылов Я. А., Паненко Р. А. Φ -гармонические функции на дискретных группах и первые ℓ^Φ -когомологии // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1104–1117.
7. Kopylov Ya. A. The first Orlicz cohomology of general discrete groups // J. Math. Sci., New York. 2024. V. 281, N 5. P. 692–705.
8. Паненко Р. А. Φ -гармонические функции на графах // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1–9.
9. Kopylov Ya., Sequeira E. On asymptotic and continuous group Orlicz cohomology // Ann. Inst. Fourier. 2025. V. 75, N 5. P. 1855–1898.

Поступила в редакцию 13 мая 2026 г.

После доработки 7 августа 2026 г.

Принята к публикации 7 августа 2026 г.

Копылов Ярослав Анатольевич (ORCID 0000-0002-0343-4424)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
yakor@math.nsc.ru

УДК 512.7

О ЧИСЛЕ НЕПРИВОДИМЫХ
КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ
ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2
НА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ ФАНО ОСНОВНОЙ СЕРИИ

А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов,
С. А. Тихомиров

Аннотация. Д. А. Васильев и А. С. Тихомиров в 2024 г. построили новую бесконечную серию неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на трехмерных рациональных многообразиях Фано основной серии, описали общие пучки в этих компонентах, а также предъявили формулы для нахождения размерностей данных компонент. Первый класс Черна пучков в этих компонентах может быть четным либо нечетным, а второй и третий классы Черна представляют собой многочлены специального вида от трех переменных. Кроме того, ими были получены оценки сверху для выражений, содержащих третий класс Черна таких пучков. В настоящей работе доказана единственность компонент модулей пучков с такими значениями классов Черна в этой серии и уточнены указанные оценки.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.513

Ключевые слова: полустабильный пучок, рефлексивный пучок, классы Черна, пространство модулей.

Введение

Актуальными проблемами современной алгебраической геометрии являются исследование различных свойств пучков, их компонент в пространствах модулей, построение и изучение серий данных компонент на $\mathbb{P}^3$ (см., например, [1–3]). Вместе с тем в работе [4] Д. А. Васильевым и А. С. Тихомировым было предложено расширить данное исследование на все рациональные трехмерные многообразия Фано основной серии. Как известно, помимо проективного пространства $X_1 = \mathbb{P}^3$ таких многообразий имеется еще три, а именно, трехмерная квадрика X_2 , полное пересечение X_4 двух квадрик в пространстве $\mathbb{P}^5$ и сечение X_5 грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в пространство $\mathbb{P}^9$ подпространством $\mathbb{P}^6$ (см., например, [5, 6]).

Среди результатов, полученных для таких многообразий, отличных от $\mathbb{P}^3$, отметим построение бесконечных серий инстантонных расслоений в статьях [7–9]. Кроме того, в работе [10] были получены результаты, касающиеся числа неприводимых компонент схемы модулей стабильных расслоений ранга 2 на

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2026-1314).

© 2026 Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.

произвольном трехмерном проективном многообразии. А именно, было доказано, что при фиксированном значении первого класса Черна c_1 расслоения число таких компонент не ограничено с ростом степени c_2 , где c_2 — второй класс Черна расслоения.

Вернемся к работе [4], в которой была построена новая бесконечная серия неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на трехмерных рациональных многообразиях Фано основной серии, описаны общие пучки¹⁾ в этих компонентах, в том числе доказана их рефлексивность, найдены их классы Черна (см. формулы (2) и (3)), а также предъявлены формулы для нахождения размерностей данных компонент.

Интересным вопросом является получение ограничений на третий класс Черна c_3 пучков на таких многообразиях. Одним из первых, кто обратил внимание на важность данного вопроса, был Хартсхорн, получивший в статье [11] оценки вида $c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2$ при $c_1 = 0$ и $c_3 \leq c_2^2$ при $c_1 = -1$ для фиксированных первого и второго классов Черна c_1 и c_2 когерентных пучков на $\mathbb{P}^3$.

В работе [12] Шмидт, исследуя свойства тилт-стабильности в производной категории $D^b(\mathbb{P}^3)$, доказал, что оценки Хартсхорна верны для всех полустабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, и дал явное описание их пространства модулей для $-1 \leq c_1 \leq 0$, $c_2 > 0$ и максимального c_3 . В качестве следствия он получил, что эти пространства являются неприводимыми рациональными и, за исключением одного случая, гладкими проективными многообразиями. В статье [13] Шмидт обобщил вышеуказанные результаты на случай пучков всех рангов от 0 до 4 на $\mathbb{P}^3$. Также для пучков, классы S -эквивалентности которых составляют компоненты упомянутой выше серии, в работе [4] были получены оценки сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна данных пучков, где H — класс гиперплоского сечения.

Настоящая работа посвящена изучению теоретико-числовых вопросов, связанных с компонентами данной серии. Основным результатом работы является теорема 1, в которой мы доказываем единственность компонент модулей пучков, имеющих указанные значения классов Черна, в вышеупомянутой серии. В теореме 2 мы устанавливаем оценки снизу и сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна данных пучков. При этом оценки сверху уточняют оценки, ранее полученные Д. А. Васильевым и А. С. Тихомировым.

§ 1. Компоненты пространств модулей полустабильных пучков

Напомним, что $X_1 = \mathbb{P}^3$ — проективное пространство, X_2 — трехмерная квадрака, X_4 — полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ и X_5 — сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в $\mathbb{P}^9$ подпространством $\mathbb{P}^6$. Как было указано во введении, в работе [4] была построена бесконечная серия неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на многообразиях X_1 , X_2 , X_4 и X_5 . Приведем ее конструкцию, описанную в [4, п. 4.1]. На $X \in \{X_1, X_2, X_4, X_5\}$ рассмотрим расширение вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-n)^{\oplus 2} \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S(m) \rightarrow 0, \quad S \in |\mathcal{O}_X(k)|, \quad k \geq 1, \quad n = \lceil k/2 \rceil, \quad m + n < 0. \quad (1)$$

¹⁾Здесь под общим пучком в плоском неприводимом семействе пучков на X с базой $\mathcal{B}$ понимаются пучки, отвечающие точкам в $\mathcal{B}$, принадлежащим плотному открытому подмножеству в $\mathcal{B}$.

Пучок E из этого расширения имеет ранг 2, и при четном k получаем

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = \left(\frac{k^2}{4} - km\right) H^2, \quad c_3(E) = k \left(\frac{k}{2} - m\right)^2 H^3. \quad (2)$$

При нечетном k соответственно будем иметь

$$c_1(E) = -H, \quad c_2(E) = \left(\frac{(k-1)^2}{4} - km\right) H^2, \quad c_3(E) = k \left(\frac{k-1}{2} - m\right)^2 H^3, \quad (3)$$

где, как известно (см., например, [4, формулы (2.1)]),

$$H^2 = iL, \quad H^3 = i, \quad H \cdot L = 1, \quad X = X_i, \quad i = 1, 2, 4, 5,$$

а $H^4(X, \mathbb{Z}) \ni L$ — класс прямой, понимаемой как проективная прямая в пространстве $\mathbb{P}^{2+i} \supset X_i = X$ при $i = 1, 2$ и в пространстве $\mathbb{P}^{1+i} \supset X_i = X$ при $i = 4, 5$.

Обозначим через $M_X(v)$ схему модулей Гизекера — Маруямы полустабильных пучков на X с характером Черна $v = \text{ch}(E)$, определяемым из (1) (см. также [4, п. 2]). Рассмотрим семейство

$$M_{k,m,n} = \{[E] \in M_X(v) : E \text{ является стабильным по Гизекеру расширением (1)}\}.$$

В [4, теорема 4.2] было доказано, что семейство $M_{k,m,n}$ является плотным открытым подмножеством неприводимой рациональной компоненты в схеме модулей $M_X(v)$, при этом $M_{k,m,n}$ является тонким пространством модулей, и рефлексивные пучки составляют в нем плотное открытое множество. Далее мы покажем, что компоненты данной серии обладают свойством единственности в указанной схеме модулей Гизекера — Маруямы.

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Для произвольных вещественных чисел $a > 0$ и $b > 0$ система уравнений

$$-\frac{k^2}{4} + kl = a, \quad kl^2 = b \quad (4)$$

имеет решение (k, l) с условием $0 < k < l$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{a^3}{b^2} < \frac{27}{64}. \quad (5)$$

При выполнении условия (5) такое решение (k, l) единственно и дается формулами

$$k = 2t_* \sqrt{\frac{a}{4t_* - t_*^2}}, \quad l = 2\sqrt{\frac{a}{4t_* - t_*^2}}, \quad (6)$$

где t_* — корень уравнения

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{a^3}{b^2}$$

на интервале $0 < t < 1$.

Доказательство. Положим $t = k/l$. Условие $0 < k < l$ означает, что $0 < t < 1$. Из (4) следует, что $f(t) = a^3/b^2$, где

$$f(t) = \frac{t(4-t)^3}{64}.$$

Поскольку

$$f'(t) = \frac{(1-t)(4-t)^2}{16} > 0$$

при $0 < t < 1$, функция $f(t)$ строго возрастает на интервале $0 < t < 1$. Следовательно, на указанном интервале $f(t) < f(1) = 27/64$. Таким образом, условие (5) необходимо для того, чтобы система (4) имела решения (k, l) указанного вида.

Предположим теперь, что условие (5) выполнено. Тогда уравнение $f(t) = a^3/b^2$ имеет единственный корень t_* на интервале $0 < t < 1$, при этом система (4) равносильна системе

$$k = t_* l, \quad -\frac{k^2}{4} + kl = a.$$

Легко видеть, что последняя имеет единственное решение (k, l) в положительных числах, которое дается формулами (6). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При дополнительном требовании целочисленности неизвестных k и l условие (5) по-прежнему останется необходимым, но перестанет быть достаточным для существования решений (k, l) указанного вида, поскольку число t_* уже может оказаться иррациональным (или, в случае рационального t_* , значения выражений в правых частях формул (6) не окажутся целочисленными).

Всюду далее считаем, что параметры k и m удовлетворяют следующим условиям:

$$k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m + \lceil k/2 \rceil < 0.$$

В частности, отсюда вытекает, что $m < 0$. Если k четно, то $\lceil k/2 \rceil = k/2$, так что неравенство $m + \lceil k/2 \rceil < 0$ равносильно неравенству

$$k < -2m. \quad (7)$$

Если же k нечетно, то $\lceil k/2 \rceil = (k+1)/2$ и неравенство $m + \lceil k/2 \rceil < 0$ равносильно неравенству

$$k < -2m - 1. \quad (8)$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. В рассматриваемой бесконечной серии неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков E ранга 2 на многообразиях Фано основной серии, получаемых из расширения (1), для любого набора классов Черна c_1 , c_2 и c_3 , удовлетворяющего равенствам (2) либо равенствам (3), в схеме модулей $M_X(v)$ имеется не более одной компоненты, состоящей из классов S -эквивалентности таких пучков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае четного k нужно убедиться, что система уравнений

$$\frac{k^2}{4} - km = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad k \left(\frac{k}{2} - m \right)^2 = \frac{c_3(E)}{H^3} \quad (9)$$

имеет не более одного решения (k, m) , удовлетворяющего условию (7). Для доказательства положим

$$l = \frac{k}{2} - m, \quad a = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad b = \frac{c_3(E)}{H^3}. \quad (10)$$

Тогда, во-первых, условие (7) переписывается в виде $k < l$ и, во-вторых, как нетрудно проверить, система (9) превращается в систему (4). Остается сослаться на лемму, учитывая при этом дополнительное требование целочисленности k и l .

В случае нечетного k рассуждения аналогичны. Здесь требуется доказать, что система уравнений

$$\frac{(k-1)^2}{4} - km = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad k \left(\frac{k-1}{2} - m \right)^2 = \frac{c_3(E)}{H^3} \quad (11)$$

имеет не более одного решения (k, m) , удовлетворяющего условию (8). Для доказательства теперь положим

$$l = \frac{k-1}{2} - m, \quad a = \frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4}, \quad b = \frac{c_3(E)}{H^3}. \quad (12)$$

Условие (8) снова оказывается равносильным условию $k < l$, и наше утверждение опять непосредственно вытекает из леммы, поскольку система (11) становится системой (4). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенное доказательство теоремы 1 позволяет избежать перебора отдельных случаев в зависимости от того, какое именно трехмерное рациональное многообразие Фано основной серии рассматривается.

Проиллюстрируем теорему 1 на следующих примерах.

ПРИМЕР 1. Выясним, возможны ли значения

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = 7H^2, \quad c_3(E) = 32H^3.$$

Здесь k предполагается четным. Имеем $a = 7$ и $b = 32$, так что $a^3/b^2 = 343/1024 < 27/64$. Уравнение

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{343}{1024}$$

имеет рациональный корень $t_* = 1/2$ на интервале $0 < t < 1$. Далее по формулам (6) находим $k = 2$ и $l = 4$. Следовательно (см. первую формулу в (10)), $m = k/2 - l = -3$ и, таким образом, искомая пара $(k, m) = (2, -3)$ найдена.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим аналогичную задачу для значений

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = 14H^2, \quad c_3(E) = 81H^3.$$

Здесь k также четно, $a = 14$ и $b = 81$. Имеем $a^3/b^2 = 2744/6561 < 27/64$. Уравнение

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{2744}{6561}$$

также имеет рациональный корень $t_* = 8/9$ на интервале $0 < t < 1$. Но теперь по формулам (6) получим $k = 4$ и $l = 9/2$. Поскольку значение l оказалось нецелым, искомым пар (k, m) не существует.

§ 2. Об оценках выражений, содержащих третьи классы Черна пучков

В [4, замечание 4.1] получены следующие оценки сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна пучков ранга 2 на многообразиях Фано основной серии, где H — класс гиперплоского сечения:

$$\frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{4}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2 \quad (13)$$

в случае четного k , а также

$$\frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{4k}{(k-1)^2} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2 \quad (14)$$

в случае нечетного $k \geq 3$.

В настоящем разделе мы уточняем данные оценки. А именно, справедлива

Теорема 2. Для второго и третьего классов Черна пучков, получаемых из расширения (1),

(i) в случае четного k справедливы оценки

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^{3/2} < \frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{16}{9k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2;$$

(ii) в случае нечетного k верны оценки

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4} \right)^{3/2} < \frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{16}{9k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4} \right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Действительно, в обозначениях (10) левое неравенство сводится к необходимому условию (5). Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\frac{kb}{a^2} = g(t) = \frac{16}{(4-t)^2},$$

где $t = k/l$. Поскольку $g(t)$ возрастает на интервале $0 < t < 1$, имеем

$$g(t) < g(1) = \frac{16}{9},$$

что и доказывает правое неравенство.

(ii) Здесь рассуждения полностью аналогичны, но вместо (10) следует использовать (12). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $k = 1$ в работе [4] приведена отдельная точная формула

$$\frac{c_3(E)}{H^3} = \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2.$$

Легко убедиться, что оценки из теоремы 2 улучшают полученные в [4] оценки (13) в случае четного k и оценки (14) в случае нечетного $k \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку $g(t) > g(0) = 1$, для случая четного k имеет место альтернативная нижняя оценка:

$$\frac{c_3(E)}{H^3} > \frac{1}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^{3/2} > \frac{1}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2$$

при $t > 108/283$, поэтому для таких t эта новая оценка будет хуже указанной в теореме 2. Аналогичное замечание справедливо и для случая нечетного k .

Благодарность. Авторы признательны рецензентам за ценные советы и замечания, позволившие улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А. Серии компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 60–72.
2. Ланских И. Ю., Тихомиров А. С. Модули полустабильных пучков ранга три с особенностями смешанной размерности на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 73–87.
3. Comaschi G., Jardim M., Martinez C., Mu D. Instanton sheaves: the next frontier // São Paulo J. Math. Sci. 2024. V. 18. P. 639–675.
4. Васильев Д. А., Тихомиров А. С. Модули полустабильных пучков ранга два на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 10. С. 3–57.
5. Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 3. С. 516–562.
6. Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. G. Fano varieties // Algebraic geometry V. Encyclopaedia Math. Sci. Berlin: Springer, 1999. V. 47. P. 1–247.
7. Costa L., Miró-Roig R. M. Monads and instanton bundles on smooth hyperquadrics // Math. Nachr. 2009. V. 282, N 2. P. 169–179.
8. Kuznetsov A. Instanton bundles on Fano threefolds // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10, N 4. P. 1198–1231.
9. Faenzi D. Even and odd instanton bundles on Fano threefolds of Picard number one // Manuscripta Math. 2014. V. 144, N 1–2. P. 199–239.
10. Ballico E., Miró-Roig R. M. A lower bound for the number of components of the moduli schemes of stable rank 2 vector bundles on projective 3-folds // Proc. Am. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2557–2560.
11. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
12. Schmidt B. Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space // Mat. Contemp. 2020. V. 47. P. 228–270.
13. Schmidt B. Sheaves of low rank in three-dimensional projective space // Eur. J. Math. 2023. V. 9, N 4. Article no 103. 71 pp.

Поступила в редакцию 19 февраля 2026 г.

После доработки 30 марта 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Кытманов Алексей Александрович (ORCID 0000-0003-3325-099X)
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
kytmanov@mirea.ru

Осипов Николай Николаевич (ORCID 0000-0002-8894-609X)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nnosipov@gmail.com

Тихомиров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-7409-8464)
Ярославский гос. педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
ул. Республиканская, 108, Ярославль 150000
satikhomirov@mail.ru

УДК 512.54

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОРЯДКА 3

Б. Ли, Ч. Сюй, Б. Е. Дураков,
А. С. Мамонтов

Аннотация. Пусть D — класс сопряженных элементов порядка 3 в группе, причем любые два элемента из D порождают гомоморфный образ $SL(2, 3)$, $SL(2, 5)$ либо экстраспециальную группу периода 3 и порядка 27. Основное внимание в работе уделяется описанию групп, порожденных тремя элементами из D , два из которых коммутируют.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.514

Ключевые слова: локально конечная группа, класс сопряженных элементов порядка 3.

1. Введение

В теории конечных групп есть целый ряд замечательных результатов, где описываются подгруппы, порожденные классом сопряженности C , исходя из ограничений на подгруппы, порожденные двумя элементами из C . Например, теорема Бэра — Сузуки гласит, что класс сопряженности C в конечной группе порождает нильпотентную подгруппу, если любые два элемента из C порождают нильпотентную подгруппу. Вообще говоря, интересно, какие из подобных результатов о конечных группах можно распространить на более широкие классы групп. Другими словами, какие из условий на подгруппы, порожденные двумя элементами из C , являются хорошими условиями конечности, например, обеспечивают локальную конечность группы $\langle C \rangle$. Так, известно, что группы 3-транспозиций являются локально конечными [1]. А вот в теореме Бэра — Сузуки нельзя так просто отказаться от условия конечности группы: см. обсуждение в работе [2].

Более конкретно, статья посвящена развитию следующей программы исследований в этом направлении.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. Будем говорить, что G является $\mathfrak{M}$ -группой, если G порождается классом D сопряженных элементов порядка 3 таким, что любая пара элементов из D порождает подгруппу, являющуюся гомоморфным образом некоторой группы из $\mathfrak{M}$. Например, знакопеременная группа $A_n = \langle (1, 2, 3)^{A_n} \rangle$ является $\mathfrak{M}_0 = \{3^2, A_4, A_5\}$ -группой, поскольку она порождается тройными циклами и два различных тройных цикла либо не имеют

The research was supported by NNSF of P. R. China (Grant 12371021). The last author was supported by the Mathematical center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2025-348 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

общих элементов и коммутируют, либо содержат два общих элемента и порождают A_4 , либо содержат один общий элемент и порождают A_5 . Отметим, что если G является $\mathfrak{M}$ -группой, то любой ее гомоморфный образ также является $\mathfrak{M}$ -группой.

Для $\mathfrak{M}_1 = \{3^2, SL_2(3)\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{3^2, SL_2(3), A_5\}$ конечные $\mathfrak{M}_i$ -группы изучались в работах [3, 4] соответственно. Одной из мотиваций было наблюдение о том, что группа Конвея, являющаяся группой автоморфизмов 24-мерной решетки Лича, оказывается $\mathfrak{M}_3 = \{3^2, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группой [3].

Приведем еще несколько интересных серий примеров. Группа $PSL_n(3)$ является $\{3^{1+2}, SL_2(3)\}$ -группой (см. пример 1). В группе 3-транспозиций симплектического типа класс элементов порядка 3, инвертируемых 3-транспозициями, порождает $\mathfrak{M}_2$ -группу (см. пример 2).

В связи с этим интересно ввести класс групп $\mathfrak{M}_4 = \{3^{1+2}, SL_2(3), SL_2(5)\}$, который содержит все рассматриваемые выше классы. Нас интересует

Вопрос i. Является ли $\mathfrak{M}_i$ -группа локально конечной ($i = 0, \dots, 4$)?

Для $i = 0$ положительный ответ на вопрос получен в работе [5]. Для $i = 3, 4$ интересно также получить описание конечных $\mathfrak{M}_i$ -групп. Также отметим, что в [6] описаны $\{3, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группы.

Цель настоящей работы — начать систематическое изучение этих групп. В работе описываются подгруппы, порожденные тремя элементами x, y, z из D для самого общего класса $\mathfrak{M}_4$ -групп при условиях $xy = yx$ и $y \notin \langle x, z \rangle$ в зависимости от изоморфного типа группы $\langle x, z \rangle$. В некотором смысле мы надеемся таким образом охватить большой объем единообразной, но необходимой технической работы. В дальнейшем предполагается продолжать рассмотрение более частных случаев, используя эти наработки.

2. Обозначения и примеры

Цель данного раздела — описать нужные нам свойства подгрупп из $\mathfrak{M}_i$ и ввести обозначения. Большинство утверждений данного раздела хорошо известны, поэтому доказательства часто опускаются.

Будем использовать следующие обозначения для групп: p^n — элементарная абелева группа порядка p^n ; S_n, A_n — симметрическая и знакопеременная группы подстановок степени n соответственно.

Пусть a и b — элементы некоторой группы G . Будем писать:

$a \equiv b$, если порядки элементов a и b равны;

$[a, b]$ для обозначения коммутатора $a^{-1}b^{-1}ab$ элементов a и b ;

$a \sim b$, если выполнены соотношения $aba = bab$ и $a^3 = b^3 = 1$;

$a \square b$, если $a^3 = b^3 = (ab)^5 = (a^b a)^2 = 1$;

$a \triangle b$, если $ababa = babab$; $ab^{-1}ab^{-1}a = b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$ и $a^3 = b^3 = 1$;

$a \sharp b$, если $a^3 = b^3 = (ab)^3 = (ab^{-1})^3 = 1$.

Говоря о вычислениях, мы подразумеваем вычисления в GAP [7] по алгоритму перечисления смежных классов. Для группы G , заданной набором порождающих и определяющих соотношений, и ее подгруппы H алгоритм, закончив работу, возвращает индекс $|G : H|$, в частности, доказывает в этом случае его конечность, а также подстановочное представление группы G с ядром $\text{core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Далее $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_4 = \{3^{1+2}, SL_2(3), SL_2(5)\}$. Известные свойства групп из $\mathfrak{M}$ перечислены в следующих трех леммах.

Лемма 1. Пусть $K = \langle a, b \mid a \sim b \rangle$. Тогда $K \simeq SL_2(3)$. Центр $Z(K) = \langle (ab^{-1})^2 \rangle$ имеет порядок 2 и $K/Z(K) \simeq A_4$. В группе K два класса сопряженных элементов порядка 3: $C = \{a, b, a^b, b^a\}$ и C^{-1} . Если a и b — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(3)$, то либо $a \sim b$, либо $a \sim b^{-1}$.

Действительно, матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из $SL_2(3)$ удовлетворяют соотношениям $a \sim b$ и $(ab^{-1})^2 = -E$. Следовательно, группа $SL_2(3)$ является гомоморфным образом K . Вычисления показывают, что порядок K равен 24. Таким образом, $K \simeq SL_2(3)$. Остальные утверждения леммы проверяются вычислениями в матрицах.

Лемма 2. Пусть $K = \langle a, b \mid a \triangle b \rangle$. Тогда $K \simeq SL_2(5)$. Центр $Z(K) = \langle (ab)^5 \rangle$ имеет порядок 2 и $K/Z(K) \simeq A_5$. В группе K все 20 элементов порядка 3 сопряжены: это $a, b, x_1 = a^b, x_2 = b^a, x_3 = a^{ba}, x_4 = a^{ba^2}, x_5 = a^{b^2a}, x_6 = a^{b^2a^2}, x_7 = a^{bab}, x_8 = a^{b^2}$ и обратные к ним. Если a и b — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(5)$, то $a \triangle b$. Если a и b — элементы порядка 3, порождающие A_5 , то $a \square b$; и наоборот, группа $\langle a, b \mid a \square b \rangle$ изоморфна A_5 .

Действительно, матрицы

$$a = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

из $SL_2(5)$ удовлетворяют соотношениям $a \triangle b$. Далее можно рассуждать так же, как при доказательстве леммы 1. Также эти матрицы удовлетворяют соотношению $a^{-1} \sim a^b$, т. е. справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $a \triangle b$, то $a^{-1} \sim a^b$ и $\langle a, a^b \rangle \simeq SL_2(3)$.

Следующее утверждение хорошо известно

Лемма 3. Пусть $K = \langle u, v \mid u \sharp v \rangle$. Тогда $K \simeq 3^{1+2}$ — экстраспециальная группа периода 3 и порядка 3^3 : центр $Z(K) = \langle [u, v] \rangle$ имеет порядок 3 и $K/Z(K)$ — абелева группа. Наоборот, если u и v — не коммутирующие элементы из K , то они порождают K и $u \sharp v$.

Приведем примеры, где вводятся обозначения и описываются некоторые $\mathfrak{M}$ -группы.

ПРИМЕР 1. $PSL_n(3)$ является $\{3^{1+2}, SL_2(3)\}$ -группой. Точнее, две трансвекции в $PSL_n(3)$ порождают подгруппу, являющуюся гомоморфным образом группы 3^{1+2} либо изоморфную группе $SL_2(3)$.

Действительно, пусть V — соответствующее пространство, а $t = t_1$ и t_2 — две трансвекции, порождающие различные циклические подгруппы. По определению это означает, что $[V, t]$ одномерно и содержится в $C_V(t)$. С точностью до перестановки имеет место один из следующих случаев:

- 1) $[V, t_1] \subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \subseteq C_V(t_1)$; тогда $\langle t_1, t_2 \rangle \simeq 3^2$;
- 2) $[V, t_1] \not\subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \not\subseteq C_V(t_1)$; тогда $\langle t_1, t_2 \rangle$ содержится в $SL([V, t_1] \oplus [V, t_2]) \simeq SL_2(3)$;
- 3) $[V, t_1] \subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \not\subseteq C_V(t_1)$; тогда $[t_1, t_2]$ тоже трансвекция, поэтому в этом случае $\langle t_1, t_2 \rangle \simeq 3^{1+2}$.

ПРИМЕР 2. Заметим, что если G является группой 3-транспозиций типа S_4 [8] (также говорят, что она имеет симплектический тип), т. е. транспозиции не порождают $3^2 : 2$ или $3^{1+2} : 2$, то любая пара элементов порядка 3 из

G , инвертируемых 3-транспозициями, либо коммутирует, либо порождает подгруппу, изоморфную A_4 , A_5 или $SL_2(3)$. Действительно, пусть x и y — такие элементы порядка 3, обозначим через $a, b = ax$, c и $d = ay$ соответственно пары 3-транспозиций, которые их инвертируют. По лемме 2.6 из [8] группа $\langle a, b, c, d \rangle$ — это либо S_5 , либо фактор $W^*(D_4)$. В этих группах некоммутирующие x и y порождают A_4 , A_5 или $SL_2(3)$.

ПРИМЕР 3. $3^{1+2} : SL_2(3)$.

Пусть u и v порождают группу 3^{1+2} , как в лемме 3, и $w = [u, v]$. Тогда любой элемент группы $\langle u, v \rangle$ записывается единственным образом в виде слова $u^\alpha v^\beta w^\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \pm 1\}$.

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрицы, порождающие $SL_2(3)$. Определим действие $\langle x, z \rangle$ на $\langle u, v \rangle$ следующим образом: $u^x = u$, $v^x = u^{-1}v$, $u^z = uvw$, $v^z = v$, так, что на элементарной абелевой 3-группе $\langle u, v \rangle / \langle w \rangle$ действие согласуется с действием соответствующих матриц на векторном пространстве над полем из трех элементов. Получившееся расширение является $\mathfrak{M}$ -группой, которую обозначим через $3^{1+2} : SL_2(3)$. Отметим, что элемент w порождает центр этой группы.

ПРИМЕР 4. $2^4 : SL_2(5)$.

Пусть V — подстановочный модуль над полем из двух элементов для группы A_5 . Разложим его в сумму $V = U \oplus W$ “all one” и “sum zero” модулей соответственно. Обозначим через $\varphi : SL_2(5) \rightarrow A_5$ факторизацию по центру. Пусть элементы y, z порядка 3, порождающие $SL_2(5)$, действуют на W как подстановки $\varphi(y) = (1, 2, 3)$ и $\varphi(z) = (2, 4, 5)$, а центр $SL_2(5)$ действует на W тривиально. Обозначим соответствующее расширение W посредством $SL_2(5)$ через $2^4 : SL_2(5)$ и зададим эту группу определяющими соотношениями. Пусть u, y, z — порождающие элементы. Положим

$$R(u, y, z) = \{u^3, y^3, z^3, y \triangle z, u \triangle y, u \sim z, (uz^y)^2, uz^y i^{y-1} i^{yz^{-1}}\},$$

где $i = (uz^{-1})^2$ — центральная инволюция из $\langle u, z \rangle \simeq SL_2(3)$, при факторизации по 2-радикалу u^{-1} и z^y склеиваются: поэтому предпоследнее соотношение выражает то, что uz^y является инволюцией (которая окажется в 2-радикале), а последнее соотношение показывает, как эта инволюция выражается через естественные порождающие 2-радикала.

ПРИМЕР 5. В этом примере $\mathfrak{M}$ -группы задаются порождающими и определяющими соотношениями. Приводимые свойства легко проверяются вычислениями. Пусть $U = \langle a, b, c \mid a \sim c \sim b, a \square b, a \square b^c, a \square c^b \rangle$; $V = \langle a, b, c \mid b \sim a \square c, [b, c] \rangle$. Группы U и V являются расширениями 2-групп посредством $U_4(2)$ и A_6 соответственно, при этом $O_2(U)$ — центральное произведение трех кватернионных групп порядка 8, $|O_2(V)| = 2^6$.

Пусть $K_{768} = \langle x, y, z \mid y^z \sim x \sim y \sim z \sim x \sim z^y \rangle$. Представление $K = K_{768}$ по подгруппе $\langle x \rangle$ является точным подстановочным представлением на 256 смежных классах, $|Z(K)| = 2^4$. Для любой подгруппы H в K , изоморфной $SL_2(3)$, центр H содержится в центре K . Группа $K/Z(K)$ является расширением элементарной абелевой 2-группы порядка 2^4 посредством группы порядка 3, которая действует на 2-радикале без нетривиальных неподвижных точек.

Символ G_i обозначает для $i = 2, 3$ расширение группы порядка i^{11} посредством $SL_2(5)$, как указано в доказательстве леммы 8.

3. Предварительные результаты

Доказательство п. 1 следующей леммы содержит подробности, которые далее при аналогичных рассуждениях опускаются.

Лемма 4. Пусть $G = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y, x\sharp y^z, x\Delta y^{z^{-1}} \rangle$. Тогда G является $\mathfrak{M}$ -группой, $Z(G) \simeq 3$, $G/Z(G) \simeq 3^8 : (2.A_7)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим точное подстановочное представление для G . Вычисления показывают, что $|G : \langle x, z \rangle| = 2 \cdot 3^{10} \cdot 7$ и $|G : \langle x, x^z, y \rangle| = 3^5 \cdot 7$. Перечисляя смежные классы по $\langle x, z \rangle$ и $\langle x, x^z, y \rangle$, строим два подстановочных представления B_1 и B_2 группы G соответственно, при этом

$$|G : \langle x, z \rangle| \cdot |\langle x, z \rangle| = |B_1| = |B_2|,$$

поэтому оба эти представления точные. Вычислениями в подстановках проверяется, что B_2 является $\mathfrak{M}$ -группой. Действуя B_2 на x^{B_2} , получаем точное представление C для группы $B_2/Z(B_2)$ на 5670 точках. При этом $Z(B_2) \simeq 3$ и $C \simeq 3^8 : (2.A_7)$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. $G/[x, y^z] \simeq 2.A_7$ является $\{3^2, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группой.

Лемма 5. Пусть $G = \langle x, y, z \rangle$ — $\mathfrak{M}$ -группа, $x, y, z \in D$ и $\langle x, y \rangle \simeq \langle y, z \rangle \simeq A_4$. Тогда либо G изоморфна A_4 или A_5 , либо $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя, если необходимо, x и z на обратные, можно считать, что $x \sim y \sim z$ и выполнены соотношения множества $R = \{y^3, (xy)^2, (yz)^2\}$. Группа $\langle x, y, z \mid R \cup \{x\Delta z\} \rangle$ изоморфна $SL_2(5) : A_5$. В частности, группа $\langle x, y^z \rangle$ является гомоморфным образом $SL_2(5) : A_4$, лежащим в $\mathfrak{M}$, т. е. изоморфна A_4 или A_5 . Поэтому если в G выполнено соотношение $x\Delta z$, то выполнено и соотношение $x\Box z$, а сама группа G изоморфна A_5 .

Группа $\langle x, y, z \mid R \cup \{x\sharp z\} \rangle$ изоморфна $3^3 : (2^2 : 3)$, при этом $\langle y, y^{zx} \rangle$ не является фактором группы из $\mathfrak{M}$. Поэтому если в $\mathfrak{M}$ -группе G выполнено соотношение $x\sharp z$, то выполнено и соотношение $x = z$, а сама группа G изоморфна A_4 .

Лемма доказана.

Следующая лемма проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 6. Пусть

$$G = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y, y\Delta x^z, x\Delta y^z \rangle.$$

Тогда

$$G/\text{core}_G(\langle x, y, x^z, y^z \rangle) \simeq K = 4^6 : O_5(3).$$

Группа K в лемме задана представлением на 288 точках и является $\mathfrak{M}$ -группой.

В следующей лемме описывается «склейка» двух подгрупп $2^4 : SL_2(5)$ с общей подгруппой $SL_2(5)$. В частности, лемма показывает, что в некоторых ситуациях подобное рассмотрение «амальгам» может быть полезным. Этот подход планируется использовать для более полного изучения группы G из прошлой леммы в дальнейшем. Напомним обозначение для набора соотношений из примера 4, задающего группу $2^4 : SL_2(5)$:

$$R(u, y, z) = \{u^3, y^3, z^3, y\Delta z, u\Delta y, u \sim z, (uz^y)^2, uz^y i^{y^{-1}} i^{yz^{-1}}\},$$

где $i = (uz^{-1})^2$.

Лемма 7. Пусть $G = \langle u, y, z, v \rangle$ — $\mathfrak{M}$ -группа, $u, v, y \neq z \in D$ и выполнены соотношения $R(u, y, z)$ и $R(v, y, z)$. Тогда G конечна и является расширением $\{2, 3\}$ -группы посредством A_5 либо фактором центрального расширения $2.U_4(2)$. При этом если элементы $a, b \in D \cap G$ порождают подгруппу, изоморфную $SL_2(5)$, то $Z(\langle a, b \rangle) \subseteq Z(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппы $\langle u, y, z \rangle$ и $\langle v, y, z \rangle$ являются гомоморфными образами $2^4 : SL_2(5)$, поэтому $(uy)^5 = (yz)^5 = (vy)^5 \in Z(G)$. Действительно, $(yz)^5$ является центральным элементом $\langle y, z \rangle$ по лемме 2, а по примеру 4 центральный элемент $(uy)^5$ из $\langle y, u \rangle$ равен $(yz)^5$, а значит, перестановочен с u, y, z ; в силу симметрии он перестановочен с v . Центральный фактор $G/\langle (yz)^5 \rangle$ является гомоморфным образом

$$K(*, \circ, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \langle u, v, y, z \mid R(u, y, z) \cup R(v, y, z), u \square y \square v, u * v^{\varepsilon_1}, u \circ (z^v)^{\varepsilon_2} \rangle,$$

где $*, \circ \in \{\Delta, \sharp, \sim\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Вычисления показывают, что индекс $|K(*, \circ, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \langle u, y, z \rangle|$ тривиален за исключением трех различных случаев, описанных ниже. Группа $K(\sim, \Delta, -1, \pm 1)$ изоморфна $U_4(2)$. Пусть $K_1 = K(\sim, \sim, 1, 1)$. Тогда $Z(K_1) = \langle (uyzv)^5 \rangle$ порядка 2 и

$$K_1/Z(K_1) \simeq (\langle \langle uv^{-1} \rangle \rangle \times \langle \langle (uz^{-1})^2 \rangle \rangle) : A_5$$

— расширение прямого произведения двух естественных модулей порядка 2^4 посредством A_5 . Пусть $K_2 = K(\sharp, \sim, \pm 1, 1)$. В группе K_2 образы u и v порождают подгруппу, изоморфную 3^{1+2} ; нормальное замыкание образа $i = [u, v]$ порождает элементарную абелеву группу порядка 3^5 , фактор по которой изоморфен $\langle u, y, z \rangle \simeq 2^4 : A_5$. Остальные утверждения леммы проверяются непосредственными вычислениями в группах K_i . Лемма доказана.

В заключение этого раздела приведем две леммы, которые дополняют описание 3-порожденных подгрупп, приводимое в теореме из следующего раздела.

Следующую лемму удобно проверять вычислениями, перебирая все возможности для соотношений между выделенными элементами. Входные данные для вычислений собраны в форме таблиц.

Лемма 8. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $G = \langle x, y, z \rangle$ и $z \notin \langle x, y \rangle \simeq \langle y, z \rangle \simeq \langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$. Тогда G является гомоморфным образом одной из следующих групп: K_{768} , $(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$, $U_3(3)$, $2.HJ$, $L_3(3)$, G_2 , G_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя, если необходимо, порождающие x, y, z на обратные, можно считать, что выполнены соотношения одного из следующих двух случаев:

$$1. R_1 := \{x \sim y \sim z \sim x\}.$$

Опишем шаги проверки, результаты которой представлены в табл. 1.

Таблица 1. Случай соотношений R_1

$x \sim y^z$	$x \sim z^y$	K_{768}
$x \sim y^z$	$(xz^y)^3, (x^{-1}z^y)^3$	$(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$
$x^{-1} \sim y^z$	$x^{-1} \sim z^y$	$U_3(3)$
$x \square y^z$	$x \square z^y$	$2.HJ$
$(xy^z)^3, (x^{-1}y^z)^3$	$x \sim z^y$	$(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$

Рассмотрим группу, заданную порождающими x, y, z и определяющими соотношениями R_1 . Рассмотрим факторы этой группы по всем различным наборам соотношений между двумя парами D -элементов: x, y^z и x, z^y . Перечисляя

смежные классы в системе GAP [7] по подгруппе $H = \langle x, y \rangle$, вычислим индексы $|G : H|$, в частности, таким образом исключим те наборы соотношений, которые невозможны. Далее строится подстановочное представление группы G на смежных классах по H . Сравнение порядков показывает, что во всех случаях (за исключением K_{768} , когда необходимо рассматривать $H = \langle x \rangle$) это представление оказывается точным. Последнее позволяет установить строение группы G . Нетривиальные результаты вычислений приведены в табл. 1.

Например, группа $\langle x, y, z \mid R_1 \cup \{x\Delta y^z, x\Delta z^y\} \rangle$ изоморфна центральному расширению $2.HJ$ спорадической группы Холла — Янко.

Таблица 2. Случай соотношений R_2

$z^{\pm 1} \sim x^y$	$y^{-1} \sim z^{y x z}$	$U_3(3)$
$z \square x^y$	$y \sim z^{y x z}$	G_2
$z \square x^y$	$(y z^{y x z})^3, (y^{-1} z^{y x z})^3$	G_3
$(z x^y)^3, (z^{-1} x^y)^3$	$y \sim z^{y x z}$	$L_3(3)$

2. $R_2 := \{x \sim y \sim z^{-1} \sim x^{-1}\}$.

Действуем аналогичным образом, приводя результаты в табл. 2. Опишем строение групп G_i , возникающих в этом случае. Группа G_i является расширением нормальной i -подгруппы порядка i^{11} посредством $SL_2(5)$, $i = 2, 3$. При этом центр группы G_i является элементарной абелевой группой порядка 2^4 и 3^3 соответственно и порождается элементами $\langle (xyz)^5, (xyz^{-1})^5, (xy^{-1}z)^5, (x^{-1}yz)^5 \rangle$. При этом $G_3/Z(G_3)$ является расширением элементарной абелевой группы порядка 3^8 посредством $SL_2(5)$; $G_2/Z(G_2) \simeq (2^4) : (2^4 : A_5)$.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $G = \langle x, y, z \rangle$, $z \notin \langle x, y \rangle \simeq \langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Тогда G является расширением 3-группы порядка, не превосходящего 3^5 , посредством $SL_2(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G является гомоморфным образом одной из групп

$$K(i, j) = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, y \sim x \sim z, (yz)^3, (yz^{-1})^3, w_i(x, y^z), w_j(x, z^y) \rangle.$$

Вычисления показывают, что $K(i, j)$ либо не содержит подгрупп, изоморфных $SL_2(3)$, либо удовлетворяет заключению леммы.

Лемма доказана.

4. 3-Порожденные подгруппы

Далее в этом разделе x, y, z лежат в классе D из определения $\mathfrak{M}$ -группы, причем $xy = yx$. Также будем считать, что элементы x, y, z различны, более того, $y \notin \langle x, z \rangle$. Нашей целью является доказательство следующей теоремы, где описывается группа $\langle x, y, z \rangle$.

Теорема. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $y \notin \langle x, z \rangle$, $G = \langle x, y, z \rangle$, $xy = yx$.

0. Если $[x, z] = 1$, то $G \simeq 3 \times \langle y, z \rangle$.

1. Если $\langle x, z \rangle \simeq A_4$, то $G \simeq A_6$ или $G \simeq 3 \times A_4$.

2. Если $\langle x, z \rangle \simeq A_5$, то G является фактором одной из групп U, V, A_6, A_7 .

3. Если $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$, то либо G изоморфна $3^{1+2} : SL_2(3)$, $3 \times (3^2 : SL_2(3))$, либо $G/Z(G)$ — фактор $i^8 : SL_2(9)$, где $i \in \{2, 3\}$.

4. Если $\langle x, z \rangle \simeq 3^{1+2}$, то G является фактором одной из групп выше либо фактором $3^4 : SL_2(5)$, либо 3-группой порядка, делящего 3^6 .

5. Если $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(5)$, то G является фактором одной из групп выше либо центральным расширением группы S порядка, делящего 3, посредством факторов одной из групп $3^8 : (2.A_7)$ или $3^4 : SL_2(5)$, либо $y\Delta x^z, x\Delta y^z$ и $G/\text{core}_G(\langle x, y, x^z, y^z \rangle) \simeq 4^6 : O_5(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в разборе случаев из теоремы и разбито на соответствующие шаги. Нулевое утверждение очевидно.

1. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq A_4$. Рассмотрим группу

$$K = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^2 \rangle,$$

заданную соотношениями из утверждения. Ее подгруппа $\langle x, z \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, z \mid x^3, z^3, (xz)^2 \rangle \simeq A_4$. Следовательно, G является гомоморфным образом K .

Отметим, что подстановки $x = (1, 2, 3)$, $y = (4, 5, 6)$ и $z = (2, 4, 3)$ удовлетворяют определяющим соотношениям группы K и порождают A_6 , при этом $\langle y, z \rangle \simeq A_5$. В частности, K имеет гомоморфный образ, изоморфный A_6 . Вычислениями в подстановках проверяется, что A_6 действительно является $\mathfrak{M}$ -группой.

Осталось доказать, что любой фактор K , являющийся $\mathfrak{M}$ -группой, изоморфен A_6 , если $[y, z] \neq 1$ и $y \notin \langle x, z \rangle$. Если же $yz = zy$, то, очевидно, $G \simeq 3 \times A_4$ удовлетворяет заключению теоремы. Рассмотрим все возможности для подгруппы $\langle y, z \rangle$.

Если $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$, то $|yz| = 3$. Фактор группы K по соотношению $(yz)^3 = 1$ изоморфен $A_4 \times A_4$. Однако в этом факторе у подгруппы $\langle y, z \rangle \simeq 3 \times A_4$ нет гомоморфных образов, изоморфных 3^{1+2} ; противоречие.

Аналогично, если $\langle y, z \rangle$ является $\{SL_2(3)\}$ -группой, то либо $(yz)^4 = 1$, либо $(y^{-1}z)^4 = 1$. Фактор K по каждому из этих соотношений изоморфен $A_4 \times A_6$ и порождается образами элементов y и z . Значит, в соответствующей $\mathfrak{M}$ -группе G выполнено $\langle y, z \rangle \simeq A_4$ и $y \in \langle x, z \rangle$; противоречие.

Наконец, фактор K по соотношению $y\Delta z$ изоморфен A_6 , что и требовалось.

2. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq A_5$. Из замечания 1 и леммы 2 следует, что $\langle x, x^z \rangle \simeq A_4$, и по доказанному либо $[x^z, y] = 1$, либо $\langle x, x^z, y \rangle \simeq A_6$, в последнем случае $\langle y, x^z \rangle \simeq A_5$. Аналогично $\langle x, x^{z^{-1}} \rangle \simeq A_4$, поэтому либо $[x^{z^{-1}}, y] = 1$, либо $\langle x, x^{z^{-1}}, y \rangle \simeq A_6$.

Пусть снова

$$K = \{x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], x\Box z\}$$

— группа, заданная соотношениями из утверждения. Рассмотрим следующие факторы группы K по дополнительным соотношениям: $K/\langle [x^z, y], (yz)^3 \rangle \simeq GL_2(4)$ не является $\mathfrak{M}$ -группой, а $K/\langle [x^z, y], (yz)^4 \rangle$ тривиальна. Таким образом, если $[x^z, y] = 1$ или $[x^{z^{-1}}, y] = 1$, то

$$G \simeq K/\langle [x^z, y], yzyzyz = zyzyzy \rangle \simeq A_7.$$

Пусть далее $x^z, x^{z^{-1}} \notin C_D(y)$. Тогда, как отмечалось выше, $\langle y, x^z \rangle \simeq \langle y, x^{z^{-1}} \rangle \simeq A_5$. Поэтому G является гомоморфным образом группы

$$F = K/\langle y\Box x^z, y\Box x^{z^{-1}} \rangle.$$

При этом

$$F/\langle (yz)^3 \rangle \simeq A_6, \quad F/\langle (yz)^4 \rangle \simeq V, \quad F/\langle yzyzyz = zyzyzy \rangle \simeq U.$$

3. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$. Поскольку условия теоремы не меняются при замене z на z^{-1} , то по лемме 1 можно считать $x \sim z$.

Пусть сначала $\langle z, y \rangle \simeq SL_2(3)$. Заменяя, если необходимо, y на y^{-1} , по лемме 1 можно считать, что $z \sim y$. Тогда G является гомоморфным образом группы

$$K = \{x, y, z \mid [x, y], x \sim z \sim y\} \simeq 3^{1+2} : SL_2(3).$$

В терминах примера 3 изоморфизмом служит отображение:

$$x, z \mapsto x, z, \quad xy^{-1} \mapsto u, \quad u^{-1}u^z(xyz)^{-4} \mapsto v,$$

в частности, $(xyz)^4 \mapsto [u, v]$ — порождающий центра.

По доказанному можно считать, что $\langle y, z \rangle \notin \{3^2, A_4, A_5, SL_2(3)\}$. Рассмотрим две оставшиеся возможности.

Пусть сначала $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Подгруппа $H = \langle x, z, z^y \rangle$ является нормальной в G подгруппой индекса ≤ 3 , в которой $x \sim z^y$. По доказанному H является гомоморфным образом $3^{1+2} : SL_2(3)$. При этом $(xzz^y)^y = xz^{-1}$, поэтому по лемме 1 элемент xzz^y имеет порядок 4, а значит, H без центра. Следовательно, в этом случае $G \simeq 3 \times (3^2 : SL_2(3))$.

Пусть теперь $y \triangle z$. Тогда G — гомоморфный образ группы

$$A = \{x, y, z \mid [x, y], x \sim z \triangle y\}.$$

Рассмотрим $B = \langle x, y, y^z \rangle$ — подгруппу в A . Перечисляя смежные классы A по B , получим подстановочное представление (возможно, не точное) C , являющееся расширением 2-группы порядка 2^{11} посредством $SL_2(9)$. При этом C не является $\mathfrak{M}$ -группой, поскольку для соответствующих элементов в C выполнено $|\langle x, w \rangle| = 192$ при $w = y^{zxz^{-1}yz^{-1}xyz^{-1}xz}$. Вычисления показывают, что индекс подгруппы $\langle y, z \rangle$ в фактор-группах $A/\langle x \triangle w \rangle$ и $A/\langle x \sim w^{-1} \rangle$ равен 1.

Рассмотрим случай, когда $x \sim w$ в G . Пусть $\bar{A} = A/\langle x \sim w \rangle$. Перечисление смежных классов $\bar{A}$ по $\langle y, z \rangle$ дает подстановочное представление E этой группы. Это представление точно, поскольку

$$|\bar{A}| = |\bar{A} : \langle y, z \rangle| \cdot |\langle y, z \rangle| = 2^{16} \cdot 120 = |E|.$$

Вычислениями в подстановках получаем, что подгруппа $\langle x, x^i \rangle$ имеет порядок $2^5 \cdot 3$ в E , где $i = (yz)^5$ — центральная инволюция из $\langle y, z \rangle$. Поскольку G является гомоморфным образом E , то в G подгруппа $\langle x, x^i \rangle$ не изоморфна $3^2, 3^{1+2}, A_5$ или $SL_2(5)$. Рассмотрим оставшиеся возможности. Поскольку при $x = x^i$ выполнено соотношение $x \sim x^i$ и группа $\bar{A}/\langle x^{-1} \sim x^i \rangle$ тривиальна, то можно считать $x \sim x^i$ и G — гомоморфный образ группы $\bar{\bar{A}} = \bar{A}/\langle x \sim x^i \rangle$, для которой $F := E/\langle x \sim x^i \rangle$ является точным подстановочным представлением. Вычислениями в подстановках проверяется, что F является $\mathfrak{M}$ -группой и $Z(F)$ — циклическая группа порядка 4. Действуя F при помощи сопряжения на x^F , получим точное подстановочное представление I группы $\bar{\bar{A}}/Z(\bar{\bar{A}})$ на 640 точках. Вычисления в подстановках позволяют теперь явно установить строение группы. Таким образом, в этом случае G является гомоморфным образом группы $\bar{\bar{A}}$, при этом $\bar{\bar{A}}/Z(\bar{\bar{A}}) \simeq I \simeq 2^8 : SL_2(9)$.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $x\sharp w$ в G . Пусть $\tilde{A} := A/\langle x\sharp w \rangle$. Действуем по аналогии с предыдущим случаем. Пусть $i = (yz)^5$. Индекс подгруппы $\langle y, z \rangle$ в группах $\tilde{A}/\langle x\Delta x^i \rangle$ и $\tilde{A}/\langle x^{-1} \sim x^i \rangle$ равен 1. Перечисление смежных классов $\tilde{A}/\langle x \sim x^i \rangle$ дает точное подстановочное представление, доказывающее изоморфизм $\tilde{A} \simeq 2^5.A_6$, причем в этой фактор-группе $x = w$. В частности, $x \sim w$, а этот случай рассмотрен выше.

Рассмотрим $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}/\langle x\sharp x^i \rangle$. Перечисление смежных классов $\tilde{\tilde{A}}$ по $\langle y, z \rangle$ дает точное подстановочное представление J этой группы. Вычислениями в подстановках проверяется, что J является $\mathfrak{M}$ -группой и $Z(J) \simeq 3^3$. Действуя J при помощи сопряжения на x^J получим точное представление K группы $\tilde{\tilde{A}}/Z(\tilde{\tilde{A}})$ на 3240 точках. Вычисления в подстановках позволяют явно установить строение группы. Таким образом, в этом случае G является гомоморфным образом группы $\tilde{\tilde{A}}$, при этом $\tilde{\tilde{A}}/Z(\tilde{\tilde{A}}) \simeq K \simeq 3^8 : SL_2(9)$.

4. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Группа

$$\langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^3, (x^{-1}z)^3, (yz)^3, (yz^{-1})^3 \rangle$$

имеет порядок 3^6 , поэтому далее по модулю доказанного можно считать, что $y\Delta z$.

Можно считать, что группа G имеет гомоморфный образ $3 \times SL_2(5)$, в котором образы x и y^z порождают 3^2 . Поэтому можно считать, что $\langle x, y^z \rangle$ является гомоморфным образом 3^{1+2} . Тогда группа $\langle x, y, z \rangle$, в свою очередь, является гомоморфным образом группы

$$K = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^3, (x^{-1}z)^3, y\Delta z, (xy^z)^3 \rangle,$$

изоморфной $3^4 : SL_2(5)$.

5. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(5)$.

По лемме 2 и по модулю доказанного можно считать, что в G выполнены соотношения $x\Delta z\Delta y$. Обозначим $A = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y \rangle$. Тогда по замечанию 1 выполнены соотношения $x \sim z_1 = (x^z)^{-1}$, $y \sim z_2 = (y^z)^{-1}$ и, кроме того, $[z_1, z_2] = 1$. По п. 3 подгруппы $\langle x, y, z_i \rangle$ конечны и известны. Естественно действовать по аналогии с доказательством п. 3.

Предположим, что в G выполнено соотношение $x\sharp y^z$ и $A_\sharp = A/\langle x\sharp y^z \rangle$. Вычисления показывают, что группы $A_\sharp/\langle x^{\pm 1} \sim y^{z^{-1}} \rangle$ и $A_\sharp/\langle x\sharp y^{z^{-1}} \rangle$ тривиальны. Следовательно, по лемме 4 G является центральным расширением группы S порядка, делящего 3, посредством фактора группы $3^8 : (2.A_7)$ и выполнено заключение теоремы.

В силу симметрии далее можно считать, что соотношения $x\sharp y^z$ и $y\sharp x^z$ в G не выполняются. Тогда по п. 3 либо порождающие подгруппы $H = \langle x, y, z_1 \rangle$ удовлетворяют соотношениям $R_1 = \{x \sim z_1 \sim y\}$, либо $y\Delta z_1$.

Рассмотрим сначала случай, когда в G выполнены соотношения R_1 . Пусть $B_1 = A/R_1$ и $x_1 = y^z$. Вычисления показывают, что группы $B_1/\langle x \sim x_1 \rangle$ и $B_1/\langle x\Delta x_1 \rangle$ тривиальны. Поэтому в G выполнено соотношение $x \sim x_1^{-1}$. Пусть $C = B_1/\langle x \sim x_1^{-1} \rangle$. Перечисляя смежные классы C по $\langle x, z \rangle$, получаем точное подстановочное представление E группы C , которое является $\mathfrak{M}$ -группой. Таким образом, G является фактором E ,

$$Z(E) \simeq 3, \quad E/Z(E) \simeq 3^4 : SL_2(5).$$

Таким образом, можно считать, что выполнено $y\Delta z_1$ и в силу симметрии выполнено $x\Delta z_2$. Теперь заключение теоремы следует из леммы 6.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cuypers H., Hall J. I. The 3-transposition groups with trivial center // J. Algebra. 1995. V. 178, N 1. P. 149–193.
2. Цзюпин Т., Ян Н., Мамонтов А. С. Теорема Бэра — Сузуки для групп 3-периода 1 // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 3. С. 400–407.
3. Aschbacher M., Hall M. Groups generated by a class of elements of order 3 // J. Algebra. 1973. V. 24, N 3. P. 591–612.
4. Stellmacher B. Einfache Gruppen, die von einer Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei erzeugt werden // J. Algebra. 1974. V. 30, N 1-3. P. 320–354.
5. Мазуров В. Д. Характеризация знакопеременных групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 54–69.
6. Максименко А. А., Мамонтов А. С. Локальная конечность некоторых групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 631–644.
7. GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.16.0; 2026. (www.gap-system.org)
8. Созутов А. И. О группах типа Σ_4 , порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 140–149.

Поступила в редакцию 17 ноября 2025 г.

После доработки 3 мая 2026 г.

Принята к публикации 31 мая 2026 г.

Ли Баоцзюнь (ORCID 0000-0003-0355-7827)
School of Mathematics and statistics,
Nantong University, Nantong 226019, China,
libj@ntu.edu.cn

Сюй Чжиянь
School of Mathematics and statistics,
Nantong University, Nantong 226019, China
2396887139@qq.com

Дураков Борис Евгеньевич (ORCID 0000-0001-6353-6484)
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79, Красноярск 660041
durakov96@gmail.com

Мамонтов Андрей Сергеевич (ORCID 0000-0002-0324-5287)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mamontov@math.nsc.ru

УТОЧНЕННЫЙ ПРИНЦИП БОЛЬШИХ
УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ЛОМАНЫХ,
ПОСТРОЕННЫХ ПО СУММАМ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. В. Логачев

Аннотация. Получен принцип больших уклонений для траекторий ломаных, построенных по суммам независимых случайных величин, заданных в пространстве гёльдеровских функций с гёльдеровой метрикой. Также найдены простые условия на моменты случайных величин, при которых удастся получить такого рода теоремы. В силу того, что гёльдерова метрика сильнее чем равномерная, полученный результат уточняет хорошо известные ранее теоремы, связанные с принципом больших уклонений для траекторий таких ломаных, заданных в пространстве непрерывных функций с равномерной метрикой.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.515

Ключевые слова: случайное блуждание, принцип больших уклонений, функционал уклонений, пространство гёльдеровских функций, гёльдерова метрика.

1. Введение, основной результат

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Нас будет интересовать предельное поведение в области больших уклонений траекторий случайной ломаной $s_n(t)$, $t \in [0, 1]$, с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n,$$

где $S_k := \sum_{r=1}^k X_r$, $S_0 := 0$, т. е.

$$s_n(t) := X_k \left(t - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{S_{k-1}}{n}, \quad t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad 1 \leq k \leq n.$$

Отметим, что траектории случайного процесса s_n по определению при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 удовлетворяют условию Липшица.

Для удобства читателя напомним основные определения, которые будут использоваться далее.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2026-0030.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность случайных элементов η_n *экспоненциально плотна* (э.п.) в метрическом пространстве (м.п.) $(\mathbb{X}, \rho_X)$ с нормирующей функцией (н.ф.) $\psi(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$, если для любого $C > 0$ найдется компакт $K_C \subseteq \mathbb{X}$ такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C,$$

где $\overline{K_C}$ — дополнение к множеству K_C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность случайных элементов η_n *удовлетворяет принципу больших уклонений* (п.б.у.) в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_X)$ с функционалом уклонений (ф.у.) $I = I(f) : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$ и н.ф. $\psi(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$ выполнены неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq -I([B]), \quad (1.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \geq -I((B)), \quad (1.2)$$

где $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ — борелевская σ -алгебра подмножеств м.п. $\mathbb{X}$, $[B]$ и (B) замыкание и внутренность множества B соответственно, $I(B) = \inf_{x \in B} I(x)$, $I(\emptyset) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если, кроме того, для любого $c \geq 0$ множество $\{x \in \mathbb{X} : I(x) \leq c\}$ компактно, то ф.у. называется *хорошим* (good rate function, см., например, [1, 2]) или *плотным* (tight rate function, см., например, [3]). Далее в этой работе будем использовать термин *плотный*.

Будем обозначать через $\mathbb{C}_0[0, 1]$ пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$. Определим в этом пространстве норму и равномерную метрику

$$\|f\| := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, \quad \rho(f, g) := \|f - g\|, \quad f, g \in \mathbb{C}_0[0, 1].$$

Сделаем обзор результатов, связанных с рассматриваемой тематикой. В работах [4, 5] (см. также [6, гл. 4, теорема 4.4.2; 1, гл. 5, теорема 5.1.2; 2, пример 1.6; 7, теорема 2.4]) был получен п.б.у. для последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_0[0, 1], \rho)$ при выполнении условия Крамера $[\mathbf{C}_\infty]$, т. е. когда для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E} e^{\lambda |X_1|} < \infty. \quad (1.3)$$

Далее в цикле работ [7–9] было показано, что если выполнено более слабое условие Крамера $[\mathbf{C}_0]$: найдется $\lambda > 0$ такое, что выполнено неравенство (1.3), то, вообще говоря, не получится доказать классический п.б.у. для последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_0[0, 1], \rho)$. В этом случае исследователи рассматривают траектории последовательности случайных процессов s_n либо в неполном пространстве функций без разрывов второго рода с топологией типа Скорохода и им удается получить только расширенный п.б.у. (более подробно см. работы [7–9]), либо рассматривают траектории в пространстве $\mathbb{BV}[0, 1]$ функций ограниченной полной вариации на отрезке $[0, 1]$ с метрикой

$$\rho_*(f, g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt + |f(1) - g(1)|, \quad f, g \in \mathbb{BV}[0, 1],$$

и получают в таком м.п. стандартный п.б.у. (более подробно см. работу [10]).

При этом остается открытым вопрос о возможности получения более точной асимптотики больших уклонений для случаев, когда с.в. X_1 удовлетворяет более сильному показательному моментному условию, чем условие Крамера $[C_\infty]$. Ответу на этот вопрос и посвящена данная работа. Далее приведены простые моментные условия, при выполнении которых удастся получить п.б.у. для траекторий последовательности s_n в пространствах гёльдеровских функций с гёльдеровской метрикой. Такая метрика является более сильной, чем равномерная при любом показателе Гёльдера $\alpha \in (0, 1)$ (см. формулу (1.6)). Благодаря этому факту увеличивается класс множеств, для которых оценка сверху (1.1) совпадает с оценкой снизу (1.2) (см. примеры после формулировки теоремы 1).

Введем необходимые нам моментные условия. Будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\kappa,0}]$ (здесь $\kappa > 1$ — фиксированная константа), если найдется константа $\lambda > 0$ такая, что

$$Ee^{\lambda|X|^\kappa} < \infty. \quad (1.4)$$

Если неравенство (1.4) выполнено для любого $\lambda > 0$, то будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\kappa,\infty}]$.

В случае, когда условие $[CL_{\kappa,\infty}]$ выполнено для всех $\kappa > 1$, будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\infty,\infty}]$.

Легко видеть, что приведенные выше показательные моментные условия удовлетворяют следующему соотношению:

$$[CL_{\infty,\infty}] \Rightarrow [CL_{\kappa,\infty}] \Rightarrow [CL_{\kappa,0}] \Rightarrow [CL_{r,\infty}] \Rightarrow [CL_{r,0}] \Rightarrow [C_\infty] \Rightarrow [C_0],$$

где $1 < r < \kappa$.

Для фиксированного $\alpha \in [0, 1)$ обозначим через $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ подпространство функций $f \in \mathbb{C}_0[0, 1]$ таких, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ 0 < |t-s| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} = 0. \quad (1.5)$$

Определим в пространстве $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ гёльдерову норму и метрику

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}, \quad \rho_\alpha(f, g) := \|f - g\|_\alpha, \quad f, g \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1].$$

Отметим, что м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ является польским (см., например, [11]).

Легко видеть, что

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} \geq \sup_{t \in (0, 1]} \frac{|f(t) - f(0)|}{|t - 0|^\alpha} \geq \sup_{t \in [0, 1]} \frac{|f(t) - 0|}{1} \geq \|f\|. \quad (1.6)$$

Таким образом, метрика ρ_α является более сильной чем метрика ρ . При этом в силу того, что ρ_α и ρ — метрики, а не псевдометрики, будет выполнено соотношение

$$\|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

Отметим, что м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ является замкнутым подпространством м.п. $(\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , т. е.

$$\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0, 1] := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0, 1] : \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Однако решение задач, связанных с асимптотикой больших уклонений в м.п. $(\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, затруднительно ввиду его несепарабельности.

Также обратим внимание на тот факт, что бессмысленно рассматривать пространство $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$ с показателем $\alpha = 1$, так как в силу условия (1.5) такое пространство будет содержать только функцию $f \equiv 0$, что не дает возможности получить содержательные результаты в области больших уклонений.

Положим $A(a) := \ln \mathbf{E} e^{aX_1}$, $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda(x) := \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - A(a))$ и определим функционал

$$I(f) := \begin{cases} \int_0^1 \Lambda(f'(s)) ds, & \text{если } f \in \mathbb{AC}_0[0,1], \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{AC}_0[0,1], \end{cases}$$

где $\mathbb{AC}_0[0,1]$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. (0) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$.

Тогда

(0.1) ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_0[0,1], \rho)$;

(0.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|} = \infty$;

(0.3) последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_0[0,1], \rho)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(1) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$, где $\kappa > 1$.

Тогда

(1.1) для любого $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(1.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^\kappa} = \infty$ для любого $r < \kappa$;

(1.3) для любого $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(2) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$, где $\kappa > 1$.

Тогда

(2.1) для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{\kappa-1}{\kappa}$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(2.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^\kappa} = \infty$;

(2.3) для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{\kappa-1}{\kappa}$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(3) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$.

Тогда

(3.1) для любого $0 \leq \alpha < 1$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(3.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^r} = \infty$ для любого $r \in \mathbb{R}$;

(3.3) для любого $0 \leq \alpha < 1$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

Отметим, что, в частности, теорема 1 дает дополнительную информацию о свойствах функционала I , который удастся выписать в явном виде лишь в редких случаях. Например, пусть известно, что с.в. X_1 удовлетворяет условию (1), (2) или (3), а $\alpha \in (0,1)$ удовлетворяет условиям (1.1), (2.1), (3.1) соответственно. Тогда можно утверждать, что для функции $f(t) = t^\alpha$ выполнено равенство $I(f) = \infty$.

Действительно, в этом случае из формул (1.2), (2.2), (3.2) соответственно следует, что при достаточно больших $x > 0$ выполнено неравенство $\Lambda(x) \geq x^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Поэтому для достаточно малого $\delta > 0$ будем иметь

$$I(f) = \int_0^1 \Lambda(f'(s)) ds = \int_0^1 \Lambda(\alpha s^{\alpha-1}) ds \geq \int_0^\delta \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{s} ds = \infty.$$

Приведем теперь несколько примеров, которые сравнивают п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ при различных значениях $0 \leq \alpha < 1$.

ПРИМЕР 1. Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$ для некоторого $\kappa > 1$. Зафиксируем α и $\tilde{\alpha}$ так, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq \tilde{\alpha} < \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$, и рассмотрим множество $B = \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$. Используя п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ (т. е. утверждение (1.3) теоремы 1) и тот факт, что множество B совпадает со всем пространством $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$, будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) = 0.$$

Если же использовать п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0, 1], \rho_{\tilde{\alpha}})$, то получим тривиальные оценки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in [B]) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in \mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0, 1]) = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (B)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in \emptyset) = -\infty,$$

где $[B]$ и (B) — замыкание и внутренность множества B в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0, 1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ соответственно.

Рассмотрим более сложный пример.

ПРИМЕР 2. Пусть с.в. X_1 такая, что $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$; $\tilde{X}_1 \sim N(0, 1)$. Легко видеть, что в этом случае с.в. $X_1, \tilde{X}_1$ удовлетворяют условиям $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$, $[\mathbf{CL}_{2,0}]$ соответственно. Поэтому нормированная сумма s_n независимых копий с.в. X_1 удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ для любого $0 \leq \alpha < 1$ (см. утверждение (3.3) теоремы 1); нормированная сумма $\tilde{s}_n$ независимых копий с.в. $\tilde{X}_1$ удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0, 1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ для любого $0 \leq \tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$ (см. утверждение (1.3) теоремы 1). Так как $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}\tilde{X}_1 = 0$, в обоих случаях соответствующие функционалы уклонений I и $\tilde{I}$ обращаются в нуль на функции, тождественно равной нулю.

Зафиксируем $0 \leq \tilde{\alpha} < \frac{1}{2} < \alpha < 1$. Рассмотрим множество

$$B := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0, 1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < l \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\},$$

где константа $l > 0$ и фиксированные положительные константы a, b, m, p удовлетворяют неравенствам

$$b > a, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{b-a}{am-bp} < \alpha.$$

Из леммы 5 (см. разд. 3) следует, что

$$\inf_{f \in B \cap C_{0,\alpha}[0,1]} \|f\|_\alpha > 0, \quad \inf_{f \in B \cap C_{0,\tilde{\alpha}}[0,1]} \|f\|_{\tilde{\alpha}} = 0.$$

Поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in [B]_\alpha) < 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\tilde{s}_n \in [B]_{\tilde{\alpha}}) \leq 0,$$

где $[B]_\alpha$, $[B]_{\tilde{\alpha}}$ — замыкания множества B в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, $(C_{0,\tilde{\alpha}}[0,1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ соответственно, т. е. для последовательности s_n оценка сверху в п.б.у. на множестве B нетривиальна, а для последовательности $\tilde{s}_n$ тривиальна.

Таким образом, оба примера показывают, что чем больше значение $0 \leq \alpha < 1$, для которого удастся получить п.б.у., тем богаче класс множеств с нетривиальными оценками в п.б.у. Также отметим, что множество B типа приведенного в примере 2, рассматривалось ранее в работе [12].

В заключение этого раздела сделаем краткий обзор результатов, в которых изучались большие уклонения в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$. В [12] был получен п.б.у. и доказан закон повторного логарифма в форме Штрассена для винеровского процесса в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$; работы [13, 14] посвящены п.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$; в работе [15] был получен п.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений Маккина–Власова в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, а также доказан закон повторного логарифма в форме Штрассена; в статье [16] изучались большие уклонения для дробных винеровских процессов заданных в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где допустимые значения α зависят от показателя Херста.

Оставшаяся часть работы состоит из двух разделов, содержащих доказательство основного результата и вспомогательные утверждения соответственно.

2. Доказательство основного результата

Сформулируем и докажем две важные леммы, которые являются основным инструментом доказательства теоремы 1.

Лемма 1. Пусть выполнены условия

(1) последовательность случайных элементов η_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_\mathbb{X})$ с н.ф. $\psi(n)$ и полунепрерывным снизу ф.у. J ;

(2) последовательность случайных элементов $\eta_n \in \mathbb{Y}$ п.н. и является э.п. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$ с н.ф. $\psi(n)$, где $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ и $\rho_\mathbb{Y}(f, g) \geq \rho_\mathbb{X}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{Y}$.

Тогда последовательность случайных элементов η_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$ с н.ф. $\psi(n)$ и плотным ф.у. J .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в формулировке леммы 1 изначально не требуется, чтобы ф.у. J был плотным, требуется только чтобы последовательность η_n удовлетворяла п.б.у. (т. е. должны выполняться неравенства (1.1), (1.2)). В этом случае ф.у. J всегда имеет полунепрерывную снизу модификацию (см., например, [2, замечание 3.1]). Также заметим, что в условиях леммы 1 нет никаких требований, касающихся полноты и сепарабельности м.п. $(\mathbb{X}, \rho_\mathbb{X})$ и $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $J(f) = \infty$, если $f \notin \mathbb{Y}$. Для этого достаточно показать, что для таких f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_\mathbb{X}(\eta_n, f) < \varepsilon) = -\infty. \quad (2.1)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \leq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon, \eta_n \in K_C) + \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}), \quad (2.2)$$

где K_C — компакт в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C.$$

Используя утверждение (ii) леммы 3 (см. разд. 3) и тот факт, что $f \notin K_C$, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon, \eta_n \in K_C) = 0. \quad (2.3)$$

Из формул (2.2), (2.3) следует, что для любого $C > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C.$$

Предельный переход $C \rightarrow \infty$ завершает доказательство формулы (2.1).

Пусть теперь $f \in \mathbb{Y}$. Применяя условие $\rho_{\mathbb{Y}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{X}}(f, g)$, п.б.у. для η_n в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и полунепрерывность снизу функционала J , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) \leq \varepsilon) \\ &\leq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \leq \varepsilon\}) = -J(f). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Осталось показать, что для $f \in \mathbb{Y}$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \geq -J(f). \quad (2.5)$$

Если $J(f) = \infty$, то очевидно, что неравенство (2.5) выполнено.

Пусть $J(f) < \infty$. Из утверждения (i) леммы 3 (см. разд. 3) следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $C > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \\ &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) \geq \varepsilon) \\ &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) \geq \varepsilon, \eta_n \in K_C) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \\ &= \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя формулу (2.6), п.б.у. для η_n в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и выбирая $C = 2J(f) + 1$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln (\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C})) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \left(\ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) + \ln \left(1 - \frac{\mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C})}{\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon))} \right) \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) \geq -J(f). \end{aligned}$$

Неравенство (2.5) доказано.

Из неравенств (2.1), (2.4), (2.5) следует, что выполнен слабый п.б.у. (см., например, [2, замечание 3.1,с)). Используя этот факт, э.п. последовательности η_n в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ и [3, теорема 2.19] (см. также [2, абзац перед леммой 3.5]), получаем п.б.у. для последовательности η_n в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ с н.ф. $\psi(n)$ и плотным ф.у. J . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что если в формулировке леммы 1 условие (2) заменить условием

(2') последовательность случайных элементов η_n является э.п. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ с н.ф. $\psi(n)$, где $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ и $\rho_{\mathbb{X}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{Y}}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{X}$, то утверждение этой леммы будет простым следствием из "contraction principle" (см., например, [1, теорема 4.2.1]).

Лемма 2. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ траектория случайного процесса η_n принадлежит пространству $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ с вероятностью 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq \delta}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon \right) = -\infty. \quad (2.7)$$

Тогда последовательность η_n э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ с нормирующей функцией $\psi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$g_n(\delta, \varepsilon) := \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq \delta}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon \right).$$

Из (2.7) и леммы 6 (см. разд. 3) или леммы 7 работы [17] следует, что для любых $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся $N(Q, \varepsilon) < \infty$ и $\delta(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \geq N(Q, \varepsilon)$, $h \in (0, \delta(\varepsilon, Q))$ выполняется

$$g_n(h, \varepsilon) \leq -Q; \quad (2.8)$$

так как $\eta_n \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ п.н. для любого фиксированного n , то для любого $1 \leq n < N(Q, \varepsilon)$ будем иметь

$$\lim_{h \downarrow 0} g_n(h, \varepsilon) = -\infty. \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) следует, что можно выбрать такое $\tilde{\delta}(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$, что для всех $h \in (0, \tilde{\delta}(\varepsilon, Q))$ неравенство (2.8) будет справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. для всех $h \in (0, \tilde{\delta}(\varepsilon, Q))$ имеет место неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(h, \varepsilon) \leq -Q. \quad (2.10)$$

Покажем, что из неравенства (2.10) следует э.п. последовательности η_n . Рассмотрим последовательность $\varepsilon_r \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Из (2.10) следует, что для любых $C > 0$ и $\varepsilon_r \in (0, 1)$ найдется $h_r > 0$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(h_r, \varepsilon_r) \leq -rC. \quad (2.11)$$

Из неравенства (2.11) следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq h_r}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon_r\right) = e^{\psi(n)g_n(h_r, \varepsilon_r)} \leq e^{-Cr\psi(n)}. \quad (2.12)$$

Для определенной выше последовательности (ε_r, h_r) обозначим через K_C множество функций $f \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ таких, что для любого $r \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq h_r}} \frac{|f(v) - f(u)|}{|v - u|^\alpha} \leq \varepsilon_r.$$

Используя аналог теоремы Арцела — Асколи для пространства $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ (см. разд. 3, теорема 2) и учитывая тот факт, что множество K_C замкнутое в этом пространстве, можем заключить, что K_C — компакт в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$.

Применяя неравенство (2.12), получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \notin K_C) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \left(\sum_{r=1}^{\infty} e^{-Cr\psi(n)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \left(\frac{e^{-C\psi(n)}}{1 - e^{-C\psi(n)}} \right) = -C. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение (0) не является новым. Оно приведено для удобства читателя по двум причинам: во-первых, мы будем использовать этот результат для доказательства утверждений (1.3), (2.3), и (3.3); во-вторых, для того, чтобы было понятнее, чем результат текущей работы отличается от ранее полученных результатов, связанных с рассматриваемой тематикой. Утверждения (0.1), (0.3) следуют из теоремы 2.4 работы [7] (см. также [6, гл. 4, теорема 4.4.2]); результат (0.2) содержится, например, в [6, гл. 1, утверждение Л6)].

Докажем утверждение (1.2). Из условия $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$ и леммы 4 следует, что найдется $l > 0$ такое, что для всех $a \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{aX_1} \leq 2 \exp\{b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + l\}, \quad (2.13)$$

где $b_\kappa = \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

Рассмотрим случай, когда $x \rightarrow \infty$. Используя формулу (2.13) и тот факт, что если для всех $a \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $A(a) \leq g(a)$, то для преобразований Лежандра от функций A и g справедливы обратные неравенства (см., например, [18, разд. 3.3]), для $x \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - A(a)) \geq \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - \tilde{l} - b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}) \\ &= \sup_{a \geq 0} (ax - \tilde{l} - b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}) = \sup_{a \geq 0} (ax - \tilde{l} - b_\kappa a^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}), \quad (2.14) \end{aligned}$$

где $\tilde{l} := l + \ln 2$.

Применяя неравенство (2.14) и стандартные методы дифференциального исчисления, получаем для $x \geq 0$

$$\Lambda(x) \geq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa b_\kappa} \right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) x^\kappa - \tilde{l}. \quad (2.15)$$

Откуда следует утверждение (1.2) для случая, когда $x \rightarrow \infty$. Случай $x \rightarrow -\infty$ рассматривается аналогичным образом.

Докажем утверждение (2.2). Из условия $[\mathbf{CL}_{\kappa, \infty}]$ и следствия 1 вытекает, что для любого $\gamma > 0$ найдется $l_\gamma > 0$ такое, что для всех $a \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{aX_1} \leq 2 \exp\{\gamma|a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + l_\gamma\}. \quad (2.16)$$

Поэтому, используя неравенство (2.16) и приведенные выше рассуждения, получим для любого фиксированного $\gamma > 0$ и достаточно больших $x \geq 0$

$$\Lambda(x) \geq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right) x^\kappa - \tilde{l}_\gamma \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right) x^\kappa,$$

где $\tilde{l}_\gamma := l_\gamma + \ln 2$.

Следовательно, для любого $\gamma > 0$ будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{x^\kappa} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right).$$

Предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ завершает доказательство утверждения (2.2) для случая, когда $x \rightarrow \infty$. Случай $x \rightarrow -\infty$ рассматривается аналогичным образом.

Если выполнено условие $[\mathbf{CL}_{\infty, \infty}]$, то неравенство (2.15) выполнено для любого $\kappa > 1$. Следовательно справедливо утверждение (3.2).

Далее будем использовать следующий план доказательства: вначале с помощью леммы 2 докажем, что случайная последовательность s_n э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0, \alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ (для α , соответствующих утверждениям (1.3), (2.3), (3.3)); затем, применяя лемму 1 и утверждение (0.3), получим соответствующие случаям (1.3), (2.3), (3.3) п.б.у.

Перейдем к доказательству э.п. последовательности s_n . Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1)$ и оценим сверху

$$\mathbf{P}_{n, \varepsilon, \delta} := \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v-u| \leq \delta}} \frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right).$$

Пусть $u, v \in [0, 1]$. Легко видеть, что если $0 < |v-u| \leq \frac{1}{n}$, то

$$\frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \cdot |v-u|}{|v-u|^\alpha} = |v-u|^{1-\alpha} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|; \quad (2.17)$$

если для некоторого $2 \leq r < n$ выполнено неравенство $\frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}$, то

$$|s_n(v) - s_n(u)| \leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|). \quad (2.18)$$

Используя формулы (2.17), (2.18) и тот факт, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены, получаем для достаточно малых $\delta \in (0, 1)$ и достаточно больших n

$$\mathbf{P}_{n, \varepsilon, \delta} \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{r=1}^{[\delta n]+1} \left\{ \sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ \frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}}} \frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right\} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \leq \mathbf{P}\left(\sup_{\substack{u,v \in [0,1]: \\ 0 < |v-u| \leq \frac{1}{n}}} |v-u|^{1-\alpha} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \varepsilon\right) \\
& + \mathbf{P}\left(\bigcup_{r=2}^{[\delta n]+1} \left\{ \sup_{\substack{u,v \in [0,1]: \\ \frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}}} \frac{\frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|)}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right\}\right) \\
& \leq \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > n^{1-\alpha} \varepsilon\right) + \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|) > (r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \\
& \leq n \mathbf{P}(|X_1| > n^{1-\alpha} \varepsilon) + n \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{1+r} |X_k| > (r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \\
& =: n \mathbf{P}_1 + n \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}_r, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

здесь и далее $[a] := \max\{b \in \mathbb{Z} : b \leq a\}$.

Применяя лемму 4 (см. разд. 3), неравенство Чебышева и тот факт, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаковы распределены, для любых достаточно малых $\delta \in (0, 1)$, $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$ и всех достаточно больших $C > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &= \mathbf{P}\left(C \sum_{k=1}^{1+r} |X_k| > C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E} \exp\left\{C \sum_{k=1}^{1+r} |X_k|\right\}}{\exp\{C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\}} \\
&= \frac{(\mathbf{E} \exp\{C|X_1|\})^{1+r}}{\exp\{C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\}} \leq \exp\{(r+1)(b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \ln 2) - C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\} \\
&\leq \exp\left\{2r(b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \ln 2) - Cr^\alpha \left(1 - \frac{1}{r}\right)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right\} \\
&\leq \exp\left\{4rb_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{Cr^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon}{2}\right\}, \quad (2.20)
\end{aligned}$$

где, напомним, $b_\kappa = \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

Рассмотрим случай, когда $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$. Выберем

$$C = \frac{1}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \left(\frac{n}{r}\right)^\alpha.$$

Используя формулу (2.20), для любых $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$, $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$, достаточно малых $0 < \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{32b_\kappa}\right)^{\frac{\kappa}{(1-\alpha)\kappa-1}}$ и $n > \frac{1}{\delta}$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &\leq \exp\left\{\frac{4rb_\kappa}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} - \left(\frac{n}{r}\right)^\alpha \frac{r^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{4r^{1-\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}}}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{4([\delta n] + 1)^{1-\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}}}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp \left\{ 4 \left(\delta + \frac{1}{n} \right)^{1 - \frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa-1}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \\
&\leq \exp \left\{ 4(2\delta)^{1 - \frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa-1}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \leq \exp \left\{ 8b_\kappa n - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \\
&\leq \exp \left\{ 8b_\kappa n - \left(\frac{n\varepsilon}{4\frac{\varepsilon}{32b_\kappa}} + \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right) \right\} \leq \exp \left\{ - \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Полностью аналогичными рассуждениями, которые мы опускаем, можно получить такую же оценку сверху для $\mathbf{P}_1$.

Из формул (2.19), (2.21) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_{n,\varepsilon,\delta} &\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(n^2 \exp \left\{ - \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \right) \\
&= - \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} = -\infty. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Применяя формулу (2.22) и лемму 2, завершаем доказательство э.п. последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ в случае, когда $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$.

Пусть теперь $\alpha = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$. В этом случае можно выбрать любое фиксированное $\lambda > 0$. Положим

$$C = \left(\frac{n}{r} \right)^\alpha \frac{C_1}{\varepsilon} = \left(\frac{n}{r} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{C_1}{\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{16^{\kappa-1} C_1}{\varepsilon^\kappa},$$

где константа $C_1 > 0$.

Из формулы (2.20) следует, что для любых $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$, достаточно малых $\delta > 0$ и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &\leq \exp \left\{ 4b_\kappa n \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{C_1 n}{2} \right\} \\
&= \exp \left\{ 4 \left(16^{\kappa-1} \frac{C_1}{\varepsilon^\kappa} \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} n \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{C_1 n}{2} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{C_1 n}{4} - \frac{C_1 n}{2} \right\} = \exp \left\{ - \frac{C_1 n}{4} \right\}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Оценка сверху для $\mathbf{P}_1$ получается аналогичным образом.

Используя формулы (2.19), (2.23), для любых $\varepsilon > 0$, $C_1 > 0$ получаем

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_{n,\varepsilon,\delta} \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(n^2 \exp \left\{ - \frac{C_1 n}{4} \right\} \right) = - \frac{C_1}{4}.$$

Делая предельный переход $C_1 \rightarrow \infty$ и применяя лемму 2, завершаем доказательство э.п. последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ для случая, когда $\alpha = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$.

В случае, когда случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$, приведенные выше рассуждения верны для любого $\alpha \in [0,1)$. Следовательно, в этом случае последовательность s_n является э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ для любого $\alpha \in [0,1)$.

Теперь, когда э.п. последовательности s_n доказана для всех случаев (1)–(3), осталось применить утверждение (0.3) и лемму 1 и тем самым завершить доказательство утверждений (1.3), (2.3), (3.3).

Утверждения (1.1), (2.1), (3.1) являются следствиями полученных п.б.у. (см., например, [1, лемма 1.2.18]). $\square$

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3. Пусть м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ удовлетворяют условиям

- (1) $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$;
- (2) $\rho_{\mathbb{Y}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{X}}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{Y}$.

Тогда

(i) для любой фиксированной функции $f \in \mathbb{Y}$, фиксированного множества K , которое компактно в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ и фиксированной константы $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\mathcal{H} := \{g \in \mathbb{Y} : \rho_{\mathbb{Y}}(g, f) \geq \varepsilon\} \cap K \subseteq \{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \geq \delta(\varepsilon)\}; \quad (3.1)$$

(ii) для любой фиксированной функции $f \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$, фиксированного множества K , которое компактно в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$K \subseteq \{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \geq \delta\}.$$

Доказательство. Докажем утверждение (i). Если $\mathcal{H} = \emptyset$, то очевидно, что формула (3.1) верна для любого $\delta(\varepsilon) > 0$.

Пусть $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Используем метод доказательства от противного. Допустим, что утверждение леммы неверно, тогда найдется последовательность элементов $g_m \in \mathcal{H}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{X}}(g_m, f) = 0. \quad (3.2)$$

В силу того, что K — компакт, а множество $\{g : \rho_{\mathbb{Y}}(g, f) \geq \varepsilon\}$ замкнутое, множество $\mathcal{H}$ также будет компактом. Следовательно найдутся подпоследовательность m_r и элемент $\tilde{g} \in \mathcal{H}$ такие, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{Y}}(g_{m_r}, \tilde{g}) = 0.$$

Так как $\rho_{\mathbb{Y}}(g_{m_r}, \tilde{g}) \geq \rho_{\mathbb{X}}(g_{m_r}, \tilde{g})$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{X}}(g_{m_r}, \tilde{g}) = 0.$$

Элемент $\tilde{g}$ принадлежит $\mathcal{H}$, а следовательно, $\tilde{g} \neq f$, что противоречит равенству (3.2).

Докажем утверждение (ii). В силу неравенства $\rho_{\mathbb{Y}}(g_1, g_2) \geq \rho_{\mathbb{X}}(g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in \mathbb{Y}$, множество K также будет компактом в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$. Поэтому в силу того, что $f \notin K$, имеем

$$\inf_{g \in K} \rho_{\mathbb{X}}(g, f) > 0. \quad \square$$

Лемма 4. Пусть $h := \mathbf{E}e^{\lambda|X|^\kappa} < \infty$, где $\lambda > 0$, $\kappa > 1$ — фиксированные константы. Тогда для всех достаточно больших $C > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{C|X|} \leq 2 \exp\{b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\},$$

где $b_\kappa := \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для всех достаточно больших $C > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{C|X|} &= \int_0^\infty e^{Ct} dF(t) = \int_0^{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} e^{Ct} dF(t) + \int_{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}^\infty e^{Ct-\lambda t^\kappa} e^{\lambda t^\kappa} dF(t) \\ &\leq \exp\left\{\frac{C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\lambda^{\frac{1}{\kappa-1}}}\right\} \int_0^{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} dF(t) + \int_{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}^\infty e^{\lambda t^\kappa} dF(t) \\ &\leq \exp\left\{\frac{C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\lambda^{\frac{1}{\kappa-1}}}\right\} + h \leq 2 \exp\left\{b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right\}, \end{aligned}$$

здесь $F(t)$ — функция распределения случайной величины $|X|$. $\square$

Следствие 1. Если случайная величина X удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$, то для любого фиксированного $\gamma > 0$ найдется C_γ такое, что для всех $C \geq C_\gamma$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{C|X|} \leq 2 \exp\left\{\gamma C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right\}.$$

Лемма 5. Пусть $0 \leq \tilde{\alpha} < \alpha < 1$ и для положительных констант a, b, m, p выполнены неравенства

$$b > a, \quad \tilde{\alpha} < \frac{b-a}{am-bp} < \alpha. \quad (3.3)$$

Тогда

- (1) $\inf_{f \in B \cap \mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]} \|f\|_\alpha > 0$,
- (2) $\inf_{f \in B \cap \mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1]} \|f\|_{\tilde{\alpha}} = 0$, где

$$B := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0,1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < l \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\}, \quad l > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что если $u \in B$, то $v := c \cdot u \in B'$, где $c = l^{\frac{a}{am-bp}}$,

$$B' := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0,1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\}.$$

Поэтому далее, не теряя общности, будем полагать, что $l = 1$.

Докажем утверждение (1). Будем использовать метод доказательства от противного. Предположим, что это утверждение леммы 5 неверно. Тогда найдется последовательность функций $f_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\alpha = 0.$$

В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| \leq \varepsilon, \quad (3.4)$$

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq |t - s|^\alpha, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \quad (3.5)$$

Положим $|f_n|_{\max} := \max_{t \in [0,1]} |f_n(t)|$,

$$\mu_k := \mu \left(\left\{ t \in [0,1] : |f_n(t)| \in \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k}, \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}} \right] \right\} \right),$$

где μ — мера Лебега, $k \in \mathbb{N}$.

Используя тот факт, что $\frac{b}{a} > 1$, получаем

$$\left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^p}{2^{kp}} \mu_k \right)^{\frac{b}{a}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k^{\frac{b}{a}}. \quad (3.6)$$

Обозначим $t_k := \min \{ t \in [0,1] : |f_n(t)| = \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}} \}$, $k \in \mathbb{N}$. Так как функция $|f_n|$ стартует из нуля, то из неравенства (3.5) следует, что для всех $t \in (t_k - (\frac{|f_n|_{\max}}{2^k})^{\frac{1}{\alpha}}, t_k]$ и $n \geq n_\varepsilon$ выполнено соотношение $|f_n(t)| \in (\frac{|f_n|_{\max}}{2^k}, \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}}]$. Поэтому для $n \geq n_\varepsilon$ будем иметь

$$\mu_k \geq \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Применяя неравенства (3.6), (3.7), для $n \geq n_\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k \mu_k^{\frac{b}{a}-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k} \right)^{\frac{b-a}{a\alpha}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a} + \frac{b-a}{a\alpha}}}{2^{\frac{kpb}{a} + \frac{k(b-a)}{a\alpha}}} \mu_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Положим $c := \frac{pb}{a} + \frac{b-a}{a\alpha}$. Из неравенств (3.3) следует, что

$$c < \frac{pb}{a} + \frac{am - bp}{a} = m. \quad (3.9)$$

Используя формулы (3.4), (3.8), (3.9) и определение множества B , для любых $\varepsilon \in (0, 2^{-\frac{c}{m-c}}]$, $n \geq n_\varepsilon$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(s)|^m ds &> \left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} \geq \frac{1}{2^c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^c}{2^{c(k-1)}} \mu_k \\ &\geq \frac{1}{2^c |f_n|_{\max}^{m-c}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^m}{2^{m(k-1)}} \mu_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^m}{2^{m(k-1)}} \mu_k \geq \int_0^1 |f_n(s)|^m ds. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (1).

Докажем утверждение (2). Положим $h := \frac{1}{2}(\frac{b-a}{am-bp} + \tilde{\alpha})$ и определим последовательность функций

$$g_n(t) := \begin{cases} t^h, & \text{если } t \in [0, \beta_n], \\ (2\beta_n - t)^h, & \text{если } t \in (\beta_n, 2\beta_n], \\ 0, & \text{если } t \in (2\beta_n, 1], \end{cases}$$

где последовательность β_n такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |g_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} &= \left(2 \int_0^{\beta_n} s^{hp} ds \right)^{\frac{b}{a}} = \left(\frac{2}{1+hp} \beta_n^{1+hp} \right)^{\frac{b}{a}} = \left(\frac{2}{1+hp} \right)^{\frac{b}{a}} \beta_n^{\frac{b+hp b}{a}}, \\ \int_0^1 |g_n(s)|^m ds &= 2 \int_0^{\beta_n} s^{hm} ds = \frac{2}{1+hm} \beta_n^{1+hm}. \end{aligned}$$

Используя условие (3.3), сравним степени у β_n :

$$\begin{aligned} \frac{b+hp b}{a} - 1 - hm &= \frac{b}{a} + \frac{b-a}{2a(am-bp)}pb + \frac{\tilde{\alpha}bp}{2a} - 1 - \frac{b-a}{2(am-bp)}m - \frac{m\tilde{\alpha}}{2} \\ &= \frac{b-a}{2a} - \tilde{\alpha} \frac{ma-bp}{2a} > \frac{b-a}{2a} - \frac{b-a}{ma-bp} \frac{ma-bp}{2a} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{b+hp b}{a} > 1 + hm$, а следовательно, в силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ при всех достаточно больших n будем иметь $g_n \in B$. Осталось заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\tilde{\alpha}} = 0$. $\square$

Для удобства читателя приведем лемму 2.3 статьи [17] и теорему 1.1 работы [13] (аналог теоремы Арцела — Асколи для пространства $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$).

Лемма 6. Пусть последовательность функций $g_n(\delta, \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям:

(1) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(\delta, \varepsilon) = -\infty;$$

(2) для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $h \in (0, \delta)$

$$g_n(\delta, \varepsilon) \geq g_n(h, \varepsilon).$$

Тогда для любых $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся $N(Q, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $\delta(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \geq N(Q, \varepsilon)$, $h \in (0, \delta(\varepsilon, Q))$ выполняется

$$g_n(h, \varepsilon) \leq -Q.$$

Теорема 2. Множество функций $K \subseteq (\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда

(1) $\sup_{f \in K} \|f\| < \infty$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_{f \in K} \sup_{\substack{s, t \in [0,1], \\ 0 < |t-s| \leq \delta(\varepsilon)}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В формулировке теоремы 2 в силу того, что все функции пространства $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$ стартуют из нуля, условие (1) следует из условия (2). Мы записали эту теорему в приведенном выше виде, следуя работе [13], в ней рассматривалось пространство функций, удовлетворяющих условию (1.5), которые стартуют из произвольной точки.

Благодарности. Автор благодарит анонимного рецензента за ценные советы по улучшению изложения и устранению неточностей. В частности, именно благодаря рецензенту в работу был добавлен пример 2, исправлены формулировка и доказательство леммы 2 и расширен литературный обзор. Также автор благодарит А. А. Могульского, который обратил внимание на важность утверждений (1.2)–(3.2) теоремы 1 (в первоначальном варианте работы этих утверждений не было).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. New York: Springer-Verl., 1998.
2. Feng J., Kurtz T. G. Large deviations for stochastic processes. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2006.
3. Rassoul-Agha F., Seppäläinen T. A course on large deviations with an introduction to Gibbs measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2015.
4. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
5. Могульский А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 309–323.
6. Borovkov A. A. Asymptotic analysis of random walks: Light-tailed distributions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.
7. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. I // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 4. С. 627–655.
8. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. II // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Т. 57, № 1. С. 3–34.
9. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. III // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58, № 1. С. 37–52.
10. Vysotsky V. Contraction principle for trajectories of random walks and Cramér's theorem for kernel-weighted sums // ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2021. V. 18, N 2. P. 1103–1125.
11. Ciesielski Z. On the isomorphisms of the spaces H_α and m // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1960. V. 8, N 4. P. 217–222.
12. Baldi P., Ben Arous G., Kerkycharian G. Large deviations and the Strassen theorem in Hölder norm // Stochastic Processes and their Applications. 1992. V. 42, N 1. P. 271–180.
13. Hu Y.-J. A large deviation principle for small perturbations of random evolution equations in Hölder norm // Stochastic Processes and their Applications. 1997. V. 68, N 1. P. 83–99.
14. Mellouk M. A large-deviation principle for random evolution equations // Bernoulli. 2000. V. 6, N 6. P. 977–999.
15. Reis G.D., Salkeld W., Tugaut J. Freidlin–Wentzell LDP in path space for McKean–Vlasov equations and the functional iterated logarithm law // Ann. Appl. Probab. 2019. V. 29, N 3. P. 1487–1540.
16. Friz P., Victoir N. Large deviation principle for enhanced Gaussian processes // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 2007. V. 43, N 6. P. 775–785.
17. Logachov A. V., Mogulskii A. A. Exponential tightness for integral-type functionals of centered independent differently distributed random variables // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 1. P. 273–284.

-
18. Borwein J. M., Lewis A. S. Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples. New York: Springer-Verl., 2006.

Поступила в редакцию 18 сентября 2025 г.

После доработки 30 марта 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Логачев Артем Васильевич (ORCID 0000-0002-0605-8831)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

omboldovskaya@mail.ru

О СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ
СО СПЕЦИФИЧЕСКИМ
АЛГОРИТМОМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ
В. И. Лотов

Аннотация. Изучаются свойства траекторий случайного блуждания с независимыми слагаемыми, у которого распределение скачков меняется между F_1 и F_2 в соответствии со следующим правилом. Распределение F_1 с положительным математическим ожиданием сохраняется до момента первого достижения траекторией множества $(-\infty, -a)$, $a \geq 0$, после чего происходит переключение на блуждание с отрицательным сносом, соответствующим распределению F_2 . Это продолжается до момента первого достижения траекторией горизонтальной границы на уровне $b \geq 0$, после чего распределение скачков вновь переключается на F_1 , и так далее. В работе приводятся оценки для вероятностей конечности моментов переключений и для вероятности равенства бесконечности супремума траектории, а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. В общем случае найдены двойные преобразования над совместными распределениями моментов переключений и положений процесса в эти моменты, а также получены асимптотические представления для них при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2 .

DOI 10.33048/smzh.2026.67.516

Ключевые слова: случайное блуждание с переключениями, моменты остановки, экстремумы траектории.

Памяти академика А. А. Боровкова

1. Введение. Оценки сверху

Рассматриваемые в работе случайные блуждания с переключениями обычно относят к разряду осциллирующих, т. е. таких, у которых распределение скачков траектории меняется при достижении некоторых регулирующих уровней. Например, это может происходить вследствие желания ограничить в некоторой степени выход траектории выше какого-то уровня или даже выход за пределы полосы, регулируя тем самым движение траектории в обоих направлениях. Свойства осциллирующих случайных блужданий с различными механизмами переключений изучались во многих работах (см., например, [1–4] и литературу там). Интерес к исследованиям таких случайных блужданий возникает при построении различных стохастических моделей, в том числе в теории систем обслуживания и теории управления запасами.

Обычно в большинстве известных конструкций механизм переключений способствует перенаправлению траектории вниз, если она забралась слишком

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0030).

высоко, либо наоборот, переключение стимулирует движение вверх, чтобы ограничить сползание вниз. В настоящей работе рассматривается весьма специфический механизм переключений. Если траектория с положительным сносом впервые ушла ниже горизонтальной границы на уровне $-a \leq 0$, то с этого момента она далее движется с отрицательным сносом. Если же после этого траектория в какой-то момент достигнет множества $[b, \infty)$, $b \geq 0$, то снос опять меняется на положительный, и так далее. Тем самым механизм переключений в некотором смысле отслеживает возможности скорейшего ухода траектории в одном из двух направлений. Оказывается, подобная конструкция представляет интерес в исследованиях моделей стохастического градиентного спуска в одномерных ландшафтах [5], что в свое время явилось стимулом к написанию работы автора [6]. Отметим, что ряд асимптотических результатов для случайных блужданий с такого сорта специфическими переключениями содержится в недавних работах [7, 8].

В [6] предполагалось, что $a = b = 0$. Настоящая работа продолжает и расширяет исследования [6] в более общей ситуации.

Итак, пусть имеются две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n^+, n \geq 1\}$ и $\{\xi_n^-, n \geq 1\}$ такие, что

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < x) = F_1(x), \quad \mathbf{P}(\xi_1^- < x) = F_2(x), \quad \mathbf{E} \xi_1^+ > 0, \quad \mathbf{E} \xi_1^- < 0,$$

при этом $\mathbf{P}(\xi_1^+ < 0) > 0$, $\mathbf{P}(\xi_1^- > 0) > 0$. Обозначим частичные суммы этих последовательностей через

$$S_n^\pm = \xi_1^\pm + \dots + \xi_n^\pm, \quad n \geq 1, \quad S_0^\pm = 0,$$

и введем случайное блуждание $\{X_n, n \geq 0\}$ следующим образом.

Пусть $X_0 = 0$, и для $1 \leq n \leq \eta_1^-$ положим $X_n = S_n^+$, где

$$\eta_1^- = \eta_1^-(a) = \inf \{n \geq 1 : S_n^+ < -a\}, \quad a \geq 0.$$

При этом полагаем всегда $\inf \emptyset = \infty$. Ясно, что $\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) < 1$ вследствие положительности сноса последовательности S_n^+ . После достижения момента η_1^- на событии $\{\eta_1^- < \infty\}$ скачки процесса X_n будем выбирать из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-, n \geq 1\}$. Если $\eta_1^- = k$ и $X_k = x$, $x < -a$, то при $k < n \leq \eta_2^+$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^-,$$

где

$$\eta_2^+ = k + \inf \{n \geq 1 : x + S_n^- \geq b\}, \quad b \geq 0.$$

Далее на траекториях, удовлетворяющих условию $\{\eta_2^+ < \infty\}$, процесс X_n вновь эволюционирует скачками с положительным средним, выбираемым из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^+, n \geq 1\}$. Если $\eta_2^+ = k$ и $X_k = x$, $x \geq b$, то для $\eta_2^+ < n \leq \eta_3^-$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^+,$$

где

$$\eta_3^- = k + \inf \{n \geq 1 : x + S_n^+ < -a\},$$

и так далее. Таким образом, получаем последовательность моментов переключения

$$\eta_0^+ = 0, \quad \eta_{2k-1}^- = \inf \{j > \eta_{2k-2}^+ : X_j < -a\},$$

$$\eta_{2k}^+ = \inf\{j > \eta_{2k-1}^- : X_j \geq b\}, \quad k \geq 1.$$

Введем события $A_k^\pm = \{\eta_k^\pm < \infty\}$. Ясно, что $A_1^- \supset A_2^+ \supset A_3^- \supset \dots$.

Положим

$$\overline{X} = \sup\{X_n, n \geq 0\}, \quad \underline{X} = \inf\{X_n, n \geq 0\}.$$

В работе приводятся оценки для вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$, $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$ и $\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty)$ (теоремы 1, 2 и их следствия), а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. Найдены двойные преобразования над совместными распределениями пар $(\eta_k^\pm, X_{\eta_k^\pm})$ (теоремы 3, 4), а также получены асимптотические представления для них при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2 (теорема 5 и ее следствие).

Положим

$$\overline{S} = \sup\{S_n^-, n \geq 0\}, \quad \underline{S} = \inf\{S_n^+, n \geq 0\}.$$

Эти случайные величины конечны с вероятностью 1, свойства их распределений весьма подробно изложены в [9, гл. 12].

Пусть также

$$p_1(x) = \mathbf{P}(\underline{S} < -x), \quad p_2(x) = \mathbf{P}(\overline{S} \geq x).$$

Теорема 1. При всех $k \geq 1$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}(A_{2k}^+) \leq p_1(a)p_1^{k-1}(a+b)p_2^k(a+b), \quad \mathbf{P}(A_{2k-1}^-) \leq p_1(a)p_1^{k-1}(a+b)p_2^{k-1}(a+b). \quad (1)$$

Доказательство. Если $\eta_1^- < \infty$, то до момента η_1^- скачки блуждания $\{X_n\}$ совпадают по распределению с ξ_1^+ и $\mathbf{P}(A_1^-) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = p_1(a)$.

Для траекторий, удовлетворяющих условию $\eta_{2k-1}^- < \infty$, $k \geq 1$, будем фиксировать значение $X_{\eta_{2k-1}^-} = -x < -a$ и далее рассматривать последующую часть траектории X_n , стартующую в момент времени η_{2k-1}^- с точки $-x$. Скачки этой части траектории до момента η_{2k}^+ не зависят от предыстории при фиксации положения в момент η_{2k-1}^- и будут иметь одинаковое распределение с ξ_1^- . Не ограничивая общности, эти скачки будем выбирать из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-\}$. Пусть $\tilde{S}_i$ — сумма первых i членов этой вероятностной копии, $S_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(-x + \sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b, X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b+x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty). \quad (2) \end{aligned}$$

Далее это выражение будем анализировать в разных условиях. Во-первых, в подынтегральном выражении при $x > a$ можно использовать оценку

$$\mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b+x) \leq \mathbf{P}(\overline{S} \geq a+b),$$

что дает нам неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &\leq \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\bar{S} \geq a + b) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= p_2(a + b) \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

В частности,

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq p_1(a)p_2(a + b). \quad (3)$$

Аналогично получаем при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(x + \inf_{i \geq 0} \tilde{S}_i < -a) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty), \quad (4) \end{aligned}$$

откуда сразу же следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &\leq \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - b) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= p_1(a + b) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty), \quad (5) \end{aligned}$$

где $\tilde{S}_i$ обозначает сумму первых i случайных величин из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^+\}$. Из (3) и (5) при $k = 1$ получаем

$$\mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) \leq p_1(a)p_1(a + b)p_2(a + b), \quad \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty) \leq p_1(a)p_1(a + b)p_2^2(a + b),$$

и так далее. Тем самым завершается доказательство теоремы 1.

Неравенства (1) ранее установлены в [6] при $a = b = 0$. Там же обсуждались возможности нахождения величин $p_1(0)$, $p_2(0)$ в точном виде и проведено их вычисление в случае экспоненциальных хвостов распределений случайных величин $\xi_1^\pm$.

Следствие 1. *Имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}, \\ \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &= 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}, \\ \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &\leq 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a + b)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}. \end{aligned}$$

Доказательство. В теореме 1 установлено, в частности, что $\mathbf{P}(A_k^\pm) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что множество траекторий, имеющих бесконечное число переключений, имеет нулевую вероятность. Перечисляя теперь траектории с конечным количеством переключений, для которых $\bar{X} = +\infty$ и для которых $\underline{X} = -\infty$, приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty, \eta_5^- = \infty) + \dots, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ = \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty, \eta_4^+ = \infty) + \dots \quad (7)$$

Действительно, если рассматривать целиком траекторию случайного блуждания $\{S_n^+, n \geq 0\}$, то хорошо известно, что $\mathbf{P}(\sup\{S_n^+, n \geq 0\} = \infty) = 1$. Рассмотрим теперь событие $\{\eta_1^- = \infty\}$. На нем траектории процесса X_n совпадают с траекториями случайного блуждания $\{S_n^+\}$, которые никогда не опускаются ниже прямой на уровне $-a$. Разумеется, супремум каждой такой траектории по-прежнему равен бесконечности, но вероятностная мера этого пучка траекторий уже меньше единицы:

$$\mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) = 1 - \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = 1 - p_1(a) < 1.$$

Далее рассмотрим событие $\{\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$. Оно содержит траектории процесса X_n , которые впервые достигли уровня $-a$ в момент времени η_1^- , затем, поменяв распределение скачков, в момент времени η_2^+ впервые достигли уровня $b \geq 0$, после чего уже не опускались ниже уровня $-a$. Таким образом, оставшаяся часть траектории процесса X_n после момента времени η_2^+ является траекторией случайного блуждания с положительным сносом, супремум которой равен бесконечности. И это происходит на событии $\{\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$, которое совпадает с $\{\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$ в силу свойства $A_1^- \supset A_2^+$. Рассмотрение дальнейших слагаемых в (6) происходит аналогично.

Точно так же в правой части формулы (7) происходит перебор пучков траекторий, которые после очередного попадания в множество $(-\infty, -a)$ начинают блуждать с отрицательным сносом и больше никогда не достигают уровня $b \geq 0$; это означает, что каждый раз инфимум оставшейся части траектории равняется минус бесконечности.

Отметим, что события $\{\bar{X} = +\infty\}$ и $\{\underline{X} = -\infty\}$ несовместны и $\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) + \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = 1$.

Из теоремы 1 и (7) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) + \dots \\ &\leq p_1(a) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b) = \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}.$$

Одновременно из теоремы 1 и (6) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &\leq \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty) + \dots \\ &\leq 1 - p_1(a) + p_1(a)p_2(a+b) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b) \\ &= 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a+b)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Если $a > 0$ и $b > 0$, то можно предложить другие оценки для $\mathbf{P}(A_k^\pm)$. Для этого обозначим $\varphi^\pm(\lambda) = \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1^\pm\}$, и предположим, что выполнены следующие условия крамеровского типа:

$$\varphi^-(C) < \infty \quad \text{для некоторого } C > 0, \quad \varphi^-(C) > 1; \quad (8)$$

$$\varphi^+(c) < \infty \quad \text{для некоторого } c < 0, \quad \varphi^+(c) > 1. \quad (9)$$

Функции φ^- и φ^+ выпуклы вниз соответственно на промежутках $[0, C]$ и $[c, 0]$, и уравнения $\varphi^\pm(\lambda) = 1$ имеют ненулевые вещественные решения $-\mu$ и ν такие, что

$$\varphi^-(\nu) = 1, \quad \varphi^+(-\mu) = 1, \quad \text{при этом} \quad 0 < \nu < C, \quad 0 < \mu < -c.$$

Известно [10, теорема 16], что при $x \geq 0$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}(\overline{S} \geq x) \leq e^{-\nu x}, \quad \text{если выполнено условие (8),}$$

$$\mathbf{P}(\underline{S} \leq -x) \leq e^{-\mu x}, \quad \text{если выполнено условие (9).}$$

Итак, пусть выполнено (8). Тогда правую часть равенства (2) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b + x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &\leq \int_{(a, \infty)} e^{-\nu(b+x)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &\leq e^{-\nu(a+b)} \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) = e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Аналогично при выполнении условия (9) из (4) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &\leq \int_b^\infty e^{-\mu(a+x)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &\leq e^{-(\mu+\nu)(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Добавим еще, что

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) \leq e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq e^{-(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a},$$

и так далее. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и выполнены условия (8) и (9), тогда для всех $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) \leq e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a}, \quad \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Используя эти неравенства, можно переписать оценки, полученные ранее в следствии 1.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \exp\{-\mu a\} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(k-1)(\mu + \nu)(a+b)\} \\ &= \frac{\exp\{-\mu a\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}, \\ \mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) &= 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{\exp\{-\mu a\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}, \\ \mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) &\leq 1 - p_1(a) + \exp\{-\mu a - \nu(a+b)\} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(k-1)(\mu + \nu)(a+b)\} \\ &= 1 - p_1(a) + \frac{\exp\{-\mu a - \nu(a+b)\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}. \end{aligned}$$

2. Точные формулы

Изучение распределений граничных функционалов для случайных блужданий с прямолинейными горизонтальными границами обычно приводит к нахождению решений в точном виде только в известных частных ситуациях. Однако нахождение в явном виде преобразований Лапласа — Стилтеса искомых распределений оказывается доступным в значительно более широких классах задач. В связи с этим в данном разделе сначала будем интересоваться преобразованиями Лапласа — Стилтеса совместных распределений пар $(\eta_k^\pm, X_{\eta_k^\pm})$.

Введем двойные преобразования над распределениями этих векторов:

$$\begin{aligned} U_k(z, \lambda) &:= \mathbf{E}(z^{\eta_k^-} \exp\{\lambda X_{\eta_k^-}\}; \eta_k^- < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{(-\infty, -a)} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\eta_k^- = n, X_{\eta_k^-} \in dy), \\ V_k(z, \lambda) &:= \mathbf{E}(z^{\eta_k^+} \exp\{\lambda X_{\eta_k^+}\}; \eta_k^+ < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\eta_k^+ = n, X_{\eta_k^+} \in dy), \end{aligned}$$

здесь $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Ниже будут введены два оператора, назовем их **A** и **B**, которые действуют на множестве введенных двойных преобразований и с помощью которых будут получены рекуррентные соотношения вида

$$U_{2k+1}(z, \lambda) = (\mathbf{A}V_{2k})(z, \lambda), \quad V_{2k}(z, \lambda) = (\mathbf{B}U_{2k-1})(z, \lambda), \quad k \geq 1. \quad (10)$$

Перейдем к введению этих операторов. Для этого потребуется использовать теорему 1 из [11], формулировка которой требует введения дополнительных обозначений и подробного описания.

Итак, в этой теореме рассматривается произвольное случайное блуждание

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и пусть $\tau \geq 0$ — произвольный момент остановки для этого блуждания, возможно, несобственный. Предположим, что известно двойное преобразование над распределением пары случайных величин (τ, S_τ) :

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\tau = n, S_n \in dy), \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0. \quad (11)$$

Если $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$, то в этом случае $g(z, \lambda) \equiv e(z, \lambda) \equiv 1$. На событии $\{\tau < \infty\}$ вводятся случайные величины

$$\tau_+(b) = \inf\{n \geq \tau : S_n \geq b\}, \quad \tau_-(a) = \inf\{n \geq \tau : S_n < -a\}.$$

Особенностью этих величин является то, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки τ . Возникает вопрос: как выразить двойные преобразования над распределениями векторов $(\tau_-(a), S_{\tau_-(a)})$, $(\tau_+(b), S_{\tau_+(b)})$ через $g(z, \lambda)$. Теорема 1 в [11] утверждает, что

$$\mathbf{E}(z^{\tau_-(a)} \exp\{\lambda S_{\tau_-(a)}\}; \tau_-(a) < \infty) = (Ag)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$\mathbf{E}(z^{\tau_+(b)} \exp\{\lambda S_{\tau_+(b)}\}; \tau_+(b) < \infty) = (Bg)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0.$$

Участвующие здесь операторы A и B определяются ниже следующим образом. Пусть

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}, \quad \eta_- = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \quad \chi_{\pm} = S_{\eta_{\pm}}$$

соответственно первые лестничные моменты и лестничные высоты для случайного блуждания S_n , и пусть для $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$r_-(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-} \exp\{\lambda \chi_- \}; \eta_- < \infty), \quad (12)$$

$$r_+(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+} \exp\{\lambda \chi_+ \}; \eta_+ < \infty), \quad (13)$$

— компоненты известной факторизации [9, гл. 12]

$$1 - z\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1\} = r_-(z, \lambda)r_+(z, \lambda).$$

Условимся обозначать через Π множество функций f , имеющих вид

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dF(y)| < \infty.$$

Здесь F — произвольная функция с конечной полной вариацией. Наконец, введем операторы A и B следующим образом. Для всякой функции $f \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$(Af)(z, \lambda) = r_-(z, \lambda)[r_-^{-1}(z, \lambda)f(\lambda)]^{(-\infty, -a)}, \quad a > 0,$$

$$(Bf)(z, \lambda) = r_+(z, \lambda)[r_+^{-1}(z, \lambda)f(\lambda)]^{[b, \infty)}, \quad b > 0,$$

где принято обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y) \right]^D = \int_D e^{\lambda y} dF(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Функция f в этом определении может также зависеть от z . Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z , но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Стоящие в квадратных скобках функции $r_{\pm}^{-1}(z, \lambda)$ по переменной λ также принадлежат Π для $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$, это известно из [9, гл. 12].

Итак, выбирая в качестве f введенную в (11) функцию g , получим утверждение теоремы 1 из [11]. Если же в этой теореме с самого начала $\mathbf{P}(S_\tau \geq b) = 1$, то, очевидно, будем иметь в этом случае $(Bg)(z, \lambda) \equiv g(z, \lambda)$.

Хорошо известно, что движение траектории случайного блуждания вверх к горизонтальной границе осуществляется, шаг за шагом, независимыми случайными скачками, одинаково распределенными с первой лестничной высотой χ_+ , а промежутки времени между этими скачками независимы и одинаково распределены с первым лестничным моментом η_+ . Поэтому вполне естественным является тот факт, что двойное преобразование над распределением пары случайных величин $(\tau_+(b), S_{\tau_+(b)})$ выражается через двойное преобразование над лестничной парой (η_+, χ_+) , которое почти совпадает с соответствующей компонентой факторизации.

Отметим важную особенность приведенной теоремы. Распределение скачков случайного блуждания до момента τ может быть произвольным и никак не влияет на результат, используется только знание функции g . Участвующие в определении операторов A и B компоненты факторизации определяются скачками блуждания S_n после момента τ , распределения скачков блуждания после момента τ не обязаны совпадать с распределениями скачков до τ .

Обратимся к первому из соотношений (10). Для его обоснования применим теорему 1 из [11], положив $\tau = \eta_{2k}^+$ и напомним, что после момента η_{2k}^+ до момента η_{2k+1}^- приращения процесса X_n распределены одинаково с ξ_1^+ . Поэтому берем независимую вероятностную копию последовательности $\{\xi_n^+\}$, строим по ней последовательные суммы и для использования в формуле (12) в качестве η_- берем номер первой отрицательной суммы из них, а χ_- будет равно величине этой суммы. Оператор A в этой ситуации будем обозначать через $\mathbf{A}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_-(z, \lambda)$ будем обозначать просто $r(z, \lambda)$, для краткости опуская индекс. При рассмотрении второго соотношения в (10) роль момента остановки τ выполняет $\tau = \eta_{2k-1}^-$, и дальнейшие скачки процесса X_n распределены одинаково с ξ_1^- . Поэтому в формуле (13) в качестве η_+ берем номер первой неотрицательной суммы, построенной по независимой вероятностной копии последовательности ξ_n^- , а χ_+ полагаем равным величине этой суммы. Оператор B в этой ситуации будем обозначать через $\mathbf{B}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_+(z, \lambda)$ для краткости будем обозначать просто $R(z, \lambda)$.

Таким образом, применение теоремы 1 из [11] влечет справедливость соотношений (10), в которых операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задаются формулами

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = r(z, \lambda)[r^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, -a)}, \quad a > 0,$$

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = R(z, \lambda)[R^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}, \quad b > 0.$$

Получаем теперь из (10)

$$U_1(z, \lambda) = (\mathbf{A}e)(z, \lambda), \quad V_2(z, \lambda) = (\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda), \quad U_3(z, \lambda) = (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda),$$

и так далее. В итоге устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 3. При $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ для всех $a > 0$, $b > 0$ и $k \geq 1$ имеют место соотношения

$$U_{2k-1}(z, \lambda) = (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda), \quad V_{2k}(z, \lambda) = ((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda), \quad (14)$$

в которых степени операторов понимаются как суперпозиции.

После нахождения двойных преобразований возникает вопрос об их обращении. В общем случае формулы (14) трудны для вычисления в явном виде. При использовании операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ хотелось бы иметь явные выражения компонент факторизации $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$ через характеристики исходных распределений F_1 и F_2 , однако это доступно далеко не всегда. Классы распределений, для которых это удастся сделать, обсуждаются в [6]. Ниже продемонстрируем вычисление величин (14) при выполнении условий

$$\mathbf{P}(\xi_1^- \geq t) = q \exp\{-\alpha t\}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < t) = r \exp\{\beta t\}, \quad t < 0, \quad \beta > 0. \quad (16)$$

Эта ситуация подробно рассмотрена в [3]. Функция $\varphi^+(\lambda)$ конечна при $-\beta < \lambda \leq 0$, $\varphi^-(\lambda)$ определена при $0 \leq \lambda < \alpha$. Обе функции выпуклы вниз, поэтому с учетом требований $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$ нетрудно видеть, что при $0 < z \leq 1$ уравнение $1 - z\varphi^+(\lambda) = 0$ имеет единственный отрицательный корень. Обозначим его через $\lambda(z)$, и обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1 - z\varphi^-(\lambda) = 0$. Ясно, что условие (15) влечет введенное ранее условие (8), условие (16) влечет (9). Во введенных ранее обозначениях $\lambda(1) = -\mu$, $\Lambda(1) = \nu$. В [3] показано, что при выполнении условий (15) и (16) функции $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$ имеют весьма простую форму:

$$r(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta}, \quad R(z, \lambda) = \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha}.$$

Более того, там же показано, что если функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} g(\lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & r(z, \lambda) [r^{-1}(z, \lambda) g(\lambda)]^{(-\infty, -a)} \\ &= r(z, \lambda) \left[\left(1 + (\lambda(z) + \beta) \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda - \lambda(z))y} dy \right) g(\lambda) \right]^{(-\infty, -a)} \\ &= \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta} (\lambda(z) + \beta) \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \int_0^\infty e^{-\lambda(z)(y-t)} dG(t) dy = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} g(\lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}. \end{aligned}$$

Если же функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где также полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = R(z, \lambda) [R^{-1}(z, \lambda) g(\lambda)]^{(b, \infty)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha} \left[\left(1 + (\alpha - \Lambda(z)) \int_0^\infty e^{(\lambda - \Lambda(z))y} dy \right) g(\lambda) \right]^{[b, \infty)} \\
&= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha} (\alpha - \Lambda(z)) \int_b^\infty e^{\lambda y} \int_{-\infty}^0 e^{-\Lambda(z)(y-t)} dG(t) dy = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} g(\Lambda(z)) e^{(\lambda - \Lambda(z))b}.
\end{aligned}$$

Эти утверждения позволяют вычислить

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} e^{(\lambda(z) - \lambda)a}, \\
(\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))a} e^{(\lambda - \Lambda(z))b}, \\
(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \cdot \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(a+b)} e^{(\lambda(z) - \lambda)a}, \\
((\mathbf{B}\mathbf{A})^2 e)(z, \lambda) &= \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} \cdot \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(2a+b)} e^{(\lambda - \Lambda(z))b},
\end{aligned}$$

и так далее, т. е.

$$(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{ka+(k-1)b}(z) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} \quad (17)$$

для всех $k \geq 1$, где $d(z) = e^{\lambda(z) - \Lambda(z)}$ и

$$\delta_1(z) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta}, \quad \delta_2(z) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha}.$$

Для $0 < z < 1$ выполняется $-\beta < \lambda(z) < 0$ и $0 < \Lambda(z) < \alpha$; поэтому $|\delta_i(z)| < 1$, $i = 1, 2$.

Далее,

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^2 e)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^2(z) \delta_2^2(z) d^{2(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Продолжая эти вычисления, убеждаемся, что

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^k(z) \delta_2^k(z) d^{k(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Таким образом, получена

Теорема 4. Пусть выполнены условия (15) и (16). Тогда при $0 < z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ для всех $a > 0$, $b > 0$ и $k \geq 1$ имеют место соотношения

$$U_{2k-1}(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^{k-1}(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{(k-1)(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a},$$

$$V_{2k}(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{ka+(k-1)b}(z) e^{(\lambda - \Lambda(z))b}.$$

Следствие 3. В условиях теоремы 4

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k-1}^-}\}; \eta_{2k-1}^- < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} U_{2k-1}(z, \lambda) \\ &= \frac{\beta - \mu}{\lambda + \beta} \delta_1^{k-1} \delta_2^{k-1} d^{(k-1)(a+b)} e^{-(\mu+\lambda)a}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} V_{2k}(z, \lambda) = \frac{\nu - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k \delta_2^{k-1} d^{ka+(k-1)b} e^{(\lambda-\nu)b},$$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) = \frac{\beta - \mu}{\beta} \delta_1^{k-1} \delta_2^{k-1} d^{(k-1)(a+b)} e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \frac{\alpha - \nu}{\alpha} \delta_1^k \delta_2^{k-1} d^{ka+(k-1)b} e^{-\nu b},$$

где обозначено

$$\delta_1 = \delta_1(1) = \frac{\beta - \mu}{\nu + \beta}, \quad \delta_2 = \delta_2(1) = \frac{\alpha - \nu}{\mu + \alpha}, \quad d = e^{-(\mu+\nu)}.$$

Замечание 1. Отметим, что результаты следствия 3 можно получить и без теоремы 4. Действительно, при одновременном выполнении условий (15) и (16) абсолютные значения всех перескоков блуждания $\{X_n, n \geq 1\}$ в моменты $\eta_k^\pm$ имеют условные экспоненциальные распределения и не зависят от моментов достижения уровня, а именно: при $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} + a \in dy \mid \eta_{2k-1}^- < \infty) = \beta e^{\beta y} dy, \quad y < 0,$$

$$\mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dy \mid \eta_{2k}^+ < \infty) = \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad y > 0.$$

Кроме того, известно, что если выполнено (15), то с вероятностью 1 конечен супремум $\bar{S}$ траектории блуждания $\{S_n^-\}$ и

$$\mathbf{P}(\bar{S} = 0) = \frac{\nu}{\alpha},$$

$$\mathbf{P}(\bar{S} \in dx) = \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \nu e^{-\nu x} dx, \quad x > 0,$$

см. [9, гл. 12, пример 5.1]. Здесь, напомним, ν — единственный положительный корень уравнения $\varphi^-(\lambda) = 1$, $0 < \nu < \alpha$. Аналогично, если выполнено (16), то

$$\mathbf{P}(\underline{S} = 0) = \frac{\mu}{\beta},$$

$$\mathbf{P}(\underline{S} \in dx) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \mu e^{\mu x} dx, \quad \text{если } x < 0,$$

здесь $\varphi^+(-\mu) = 1$.

Вычисляя в точном виде правую часть (2), получаем для $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \int_{-\infty}^{-a} \mathbf{P}(\bar{S} \geq b - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} + a \in dx + a \mid \eta_{2k-1}^- < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \int_{-\infty}^0 e^{-\nu(b-y+a)} \beta e^{\beta y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) = \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\beta e^{-\nu(a+b)}}{\beta + \nu} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu a}.$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\beta e^{-\mu a - \nu(a+b)}}{\beta + \nu}.$$

Для правой части (4) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b | \eta_{2k}^+ < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \int_0^\infty e^{-\mu(a+b+y)} \alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \frac{\alpha e^{-\mu(a+b)}}{\alpha + \mu} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \mu)(\beta + \nu)} e^{-(\mu+\nu)(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Приведенные соотношения полностью определяют значения вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$ при всех $k \geq 1$.

Кроме того, при выполнении условий (15) и (16) легко вычисляются все слагаемые в формуле (6) для подсчета $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$, поскольку, действуя, как и в (4), получаем при всех $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, \eta_{2k+1}^- = \infty) &= \int_b^\infty (1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -x - a)) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b | \eta_{2k}^+ < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu(a+b+y)}\right) \alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \frac{\alpha}{\alpha + \mu} e^{-\mu(a+b)}\right) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо условий (15) и (16) можно рассмотреть более общую ситуацию, в которой плотность распределения F_1 на отрицательной полуоси равна линейной комбинации экспонент с постоянными коэффициентами, и одновременно плотность распределения F_2 на положительной полуоси также равна линейной комбинации экспонент. В этих условиях участвующие в определении операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ функции

$$r(z, \lambda), \quad r^{-1}(z, \lambda), \quad R(z, \lambda), \quad R^{-1}(z, \lambda) \quad (18)$$

будут рациональными, они выражаются через показатели экспонент в плотностях и через корни уравнений $1 - z\varphi^\pm(\lambda) = 0$ (которые еще надо найти). Соответствующие объяснения приведены в [6]. Разложение рациональных функций (18) на простые дроби делает доступным в этой ситуации нахождение точных формул для выражений вида $(\mathbf{A}g)(z, \lambda)$ и $(\mathbf{B}g)(z, \lambda)$, однако дальнейшее вычисление суперпозиций вида $((\mathbf{B}\mathbf{A})^k g)(z, \lambda)$ при больших k окажется чрезвычайно громоздким процессом.

3. Асимптотические представления функций $U_k(z, \lambda)$ и $V_k(z, \lambda)$ при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$

Как уже отмечалось, нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Демонстрацией этого факта являются теорема 4 и ее следствие. В граничных задачах для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений (или хотя бы их преобразований Лапласа — Стильтеса) в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассматривать схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания, и такие работы имеются. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено большое число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными неограниченно удаляющимися горизонтальными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А. А. Боровковым [12] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Этому направлению будем следовать в данном разделе, пользуясь разработанными в [13] асимптотическими представлениями для введенных выше операторов **A** и **B**.

В этом разделе всюду будем предполагать, что при некоторых $c_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, выполнено условие (A) крамеровского типа, состоящее из следующих трех пунктов:

- 1) $|\varphi^-(\lambda)| < \infty$ для $-c_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_2$, $\varphi^-(c_2) > 1$;
- 2) $|\varphi^+(\lambda)| < \infty$ для $-c_3 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_4$, $\varphi^+(-c_3) > 1$;
- 3) распределения случайных величин $\xi_1^\pm$ содержат абсолютно непрерывные компоненты.

Напомним, что $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$. Как и в теореме 4, в этих условиях, но уже для вещественных значений z , достаточно близких к единице, т. е. для $1 - \delta \leq z \leq 1$ при некотором $\delta > 0$, уравнение $1 - z\varphi^+(\lambda) = 0$ имеет единственный отрицательный корень, обозначим его через $\lambda(z)$. Также обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1 - z\varphi^-(\lambda) = 0$ и по-прежнему сохраним обозначения $\lambda(1) = -\mu$, $\Lambda(1) = \nu$.

В [13] доказаны две леммы, которые в обозначениях нашей работы имеют следующий вид.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g , имеющей вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_0^\infty |dG(y)| < \infty,$$

при $1 - \delta \leq z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda \geq -\mu$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z) - \lambda)a} g(\lambda(z)) + r(z, \lambda) \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_z(y),$$

в котором $u_z(\lambda) = r(z, \lambda)((\lambda - \lambda(z))r'(z, \lambda(z)))^{-1}$ и равномерно по z

$$\int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| = O(e^{-(\mu+\varepsilon)a}) \int_0^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $[b, \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| = O(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}) \int_b^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g , имеющей вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_{-\infty}^0 |dG(y)| < \infty,$$

при $1 - \delta \leq z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \nu$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = v_z(\lambda)e^{(\lambda - \Lambda(z))b}g(\Lambda(z)) + R(z, \lambda) \int_b^{\infty} e^{\lambda y} d\varphi_z(y),$$

в котором $v_z(\lambda) = R(z, \lambda)((\lambda - \Lambda(z))R'(z, \Lambda(z)))^{-1}$ и равномерно по z

$$\int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| = O(e^{-(\nu+\varepsilon)b}) \int_{-\infty}^0 |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $(-\infty, -a)$, то

$$\int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| = O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \int_{-\infty}^{-a} |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty.$$

Замечание 3. В дальнейшем потребуется рассматривать значения величин $(\mathbf{A}g)(z, \Lambda(z))$ и $(\mathbf{B}g)(z, \lambda(z))$. Для них остаточные члены в леммах 1 и 2 будут иметь следующий вид (здесь буквой C обозначены некоторые константы):

$$\begin{aligned} \left| r(z, \Lambda(z)) \int_{-\infty}^{-a} e^{\Lambda(z)y} d\theta_z(y) \right| &\leq C e^{-\Lambda(z)a} \int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| \\ &= O(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a}) \int_0^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| R(z, \lambda(z)) \int_b^{\infty} e^{\lambda(z)y} d\varphi_z(y) \right| &\leq C e^{\lambda(z)b} \int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| \\ &= O(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b}) \int_{-\infty}^0 |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

с заменой величин $O(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a})$ и $O(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b})$ соответственно на величины $O(e^{-\Lambda(z)a-(\mu+\varepsilon)(a+b)})$ и $O(e^{(\lambda(z)b-(\nu+\varepsilon)(a+b)})$ в упомянутых выше случаях, касающихся носителей функции G .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вернемся к соотношениям (14). В этих формулах каждое применение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеет вид $(\mathbf{A}g)(z, \lambda)$ или $(\mathbf{B}g)(z, \lambda)$, где в силу теоремы 1 из [11] функция $g = g(z, \lambda)$ в каждом случае есть двойное преобразование Лапласа — Стильтеса над двумерным распределением момента первого достижения некоторого уровня и положения в этот момент. По этой причине каждый раз выполняется

$$g(z, \lambda) = \int e^{\lambda y} dG_z(y), \quad \int |dG_z(y)| \leq 1.$$

Более того, для всякого $k \geq 1$ в силу (14) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda) &= U_{2k-1}(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^{\eta_{2k-1}^-} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k-1}^-}\}; \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- = n, X_{\eta_{2k-1}^-} \in dy) \end{aligned}$$

и в представлении

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

будем иметь равномерно по z

$$\|G_z\| := \int_{-\infty}^{-a} |dG_z(y)| = \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- = n, X_{\eta_{2k-1}^-} \in dy) \right\| \leq \mathbf{P}(A_{2k-1}^-).$$

Напомним, что ранее обозначено $\mathbf{P}(A_k^\pm) = \mathbf{P}(\eta_k^\pm < \infty)$. Далее, по тем же соображениям при всех $k \geq 1$

$$((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ = n, X_{\eta_{2k}^+} \in dy),$$

и в представлении

$$((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

выполняется равномерно по z

$$\|G_z\| = \int_b^{\infty} |dG_z(y)| = \left\| \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ = n, X_{\eta_{2k}^+} \in dy) \right\| \leq \mathbf{P}(A_{2k}^+).$$

Отметим, что двустороннее условие Крамэра (A) влечет одновременное выполнение ранее введенных односторонних условий (8) и (9), поэтому ниже будем пользоваться экспоненциальными оценками теоремы 2 для вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$ в приведенных оценках для $\|G_z\|$.

Теорема 5. Пусть выполнено условие (A). Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ равномерно по $1 - \delta < z < 1$ выполняется

$$\mathbf{E}(z^{\eta_1^-} \exp\{\lambda X_{\eta_1^-}\}; \eta_1^- < \infty) = (\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \quad (19)$$

и для $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^{\eta_{2k}^+} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) &= ((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^{\eta_{2k+1}^-} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k+1}^-}\}; \eta_{2k+1}^- < \infty) &= (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) \\ &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \end{aligned} \quad (21)$$

где для краткости обозначено $h_1(z) = u_z(\Lambda(z))$, $h_2(z) = v_z(\lambda(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимые ниже рассуждения основываются на применении лемм 1 и 2, а также оценок, содержащихся в замечаниях 3 и 4. Отметим также, что в силу известных свойств компонент факторизации абсолютные значения функций $r(z, \lambda)$, $R(z, \lambda)$, $u_z(\lambda)$ и $v_z(\lambda)$ ограничены равномерно по z каждая в своей области аналитичности по переменной λ .

Воспользуемся методом математической индукции. Соотношение (19) сразу следует из леммы 1:

$$(\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} + O(e^{-(\mu+\varepsilon)a}) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).$$

Далее, применяя лемму 2 и оценки, сформулированные в замечаниях 3 и 4, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} (u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a})) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1^-) O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a-\nu b}) + O(e^{-\mu a-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})). \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого $k \geq 1$ выполнено (20). Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} \\ &\quad \times (v_z(\lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a}))) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_{2k}^+) O(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} \\ &\quad + O(e^{-\mu a-k(\mu+\nu)(a+b)-\varepsilon a}) + e^{-\nu(a+b)-\mu a} e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)} O(e^{-(\mu+\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})). \end{aligned}$$

В частности, из установленного выше равенства (20) при $k = 1$ следует справедливость (21) при $k = 1$. Пусть теперь выполнено (21) для произвольного $k \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} ((\mathbf{B}\mathbf{A})^{k+1} e)(z, \lambda) &= (\mathbf{B}(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e))(z, \lambda) = v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} \\ &\quad \times (u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a}))) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_{2k+1}^-) O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_z(\lambda) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))k(a+b)} \\
&+ O(e^{-\varepsilon a - (k+1)(\mu+\nu)a - k(\mu+\nu)b}) + e^{-k(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a} O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\
&= v_z(\lambda) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} h_1^{k+1}(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(k+1)a + kb} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).
\end{aligned}$$

Таким образом, представления (20) и (21) выполняются для всех $k \geq 1$. Теорема доказана.

Отметим, что при дополнительном выполнении условий (15) и (16) остаточные члены в формулах (19)–(21) исчезают.

По-видимому, утверждения теоремы 5 сохраняются в силе, если вместо двусторонних условий Крамера в (A) ограничиться односторонними при соблюдении требований $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$, как это происходило в теореме 4. Однако доказательство теоремы 5 использует леммы 1 и 2 из [13], где предполагалось именно выполнение двусторонних условий. Разумеется, значения величин $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$ определяются распределениями случайных величин на обоих полуосях.

Обращение по переменной z полученных главных членов асимптотики функций $((\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda)$ и $(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda)$ является весьма сложной задачей и в данной работе производиться не будет. Более доступной выглядит возможность обращения по пространственной переменной λ , хотя для этого потребуются дополнительные сведения о факторизационных компонентах $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$.

Следствие 4. Пусть выполнено условие (A), тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_1^-}\}; \eta_1^- < \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_1(\lambda) e^{-(\mu+\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \quad a \rightarrow \infty,$$

и для $k \geq 1$ при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ выполняется

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} ((\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda) \\
&= v_1(\lambda) e^{(\lambda-\nu)b} h_1^k(1) h_2^{k-1}(1) e^{-(\mu+\nu)(ka+(k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k+1}^-}\}; \eta_{2k+1}^- < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda) \\
&= u_1(\lambda) e^{-(\mu+\lambda)a} h_1^k(1) h_2^k(1) e^{-(\mu+\nu)k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).
\end{aligned}$$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение текста и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогозин Б. А., Фосс С. Г. Возвратность осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 23, № 1. С. 161–169.
2. Keilson J., Servi L. D. Oscillating random walk models for GI/G/1/1 vacation systems with Bernoulli schedules // J. Appl. Probab. 1986. V. 23, N 3. P. 790–802.
3. Лотов В. И. Об осциллирующих случайных блужданиях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 869–880.
4. Ким Д. К., Лотов В. И. Асимптотика стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1112–1129.
5. Dudukalov D., Logachov A., Lotov V., Prasolov T., Prokopenko E., Tarasenko A. Convergence, sticking and escape: Stochastic dynamics near critical points in SGD. ArXiv.2505.18535.
6. Лотов В. И. Об одной модели осциллирующего случайного блуждания // Мат. заметки. 2026. Т. 119, № 5. С. 721–731.

7. Ветрова Е. Л. Асимптотика вероятностей больших уклонений для простого осциллирующего случайного блуждания // *Фундамент. и прикл. математика*. 2020. Т. 23, № 1. С. 89–94.
8. Peigné M., Pham C., Vo T. D. A local limit theorem for lattice oscillating random walks. Arxiv.2509.15647.
9. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
10. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
11. Лотов В. И. Об одном подходе в двуграничных задачах // *Статистика и управление случайными процессами*. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
12. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // *Сиб. мат. журн.* 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
13. Лотов В. И. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40, № 5. С. 1095–1108.

Поступила в редакцию 8 апреля 2026 г.

После доработки 13 апреля 2026 г.

Принята к публикации 13 апреля 2026 г.

Лотов Владимир Иванович (ORCID 0000-0002-3556-2033)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru

УДК 517.956.2

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Чечкина

Аннотация. Рассматривается задача Зарембы для дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами. Найдена оценка спектральной функции.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.517

Ключевые слова: задача Зарембы, эллиптический оператор, спектральная функция.

1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке спектральной функции для дивергентного эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами однородной задачи Зарембы, рассматриваемой в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Напомним, что область D называется *строго липшицевой*, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0 , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0 .

Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_2^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_2^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_2^1(D)$

$$\|v\|_{W_2^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^2 dx + \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенства Фридрихса

$$\int_D |v|^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx. \quad (1)$$

Приведем необходимое и достаточное условие на множество $F \subset \partial D$, гарантирующее выполнение неравенства (1). Для этого нам потребуется понятие емкости.

Обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что строго липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Введем понятие емкости $\mathcal{C}_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}_d}$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ следующим равенством:

$$\mathcal{C}_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи (см. [1, разд. 14.1.2]) и комментариев к результатам главы 14 монографии [1] следует, что для функций $v \in W_2^1(D, F)$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{C}_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим спектральную задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \lambda u, \quad u|_F = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma} \Big|_G = 0 \quad (3)$$

с собственными функциями, нормированными равенством

$$\int_D u^2 dx = 1. \quad (4)$$

Здесь $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

$$\alpha |\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \alpha^{-1} |\eta|^2, \quad \alpha > 0,$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in D$; $G = \partial D \setminus F$, а

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i,$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂D .

Под *решением* задачи (3) понимается ненулевая функция $u \in W_2^1(D, F)$ для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \lambda \int_D u \varphi dx,$$

выполненное на пробных функциях $\varphi \in W_2^1(D, F)$. Те значения λ , для которых существуют собственные функции, называются *собственными значениями*.

Поскольку оператор задачи является самосопряженным в $W_2^1(D, F)$ и положительным, при сделанных выше предположениях относительно области D задача (3) имеет полную ортонормированную систему обобщенных собственных функций. Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Оценкам собственных функций задачи Дирихле для равномерно эллиптических операторов посвящены многочисленные исследования (см. [2–7]). В частности, в работе В. А. Ильина и И. А. Шишмарева [5] показано, что если область

и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие, то для классической собственной функции $u_k(x)$, отвечающей собственному значению λ_k , имеет место оценка

$$\max_{x \in \overline{D}} |u_k(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda_k^{\frac{n}{4}}.$$

В. Я. Якубовым показано, что оценка для обобщенной собственной функции

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda^{\frac{n}{4}}$$

является точной. Аналогичные оценки для задачи Зарембы установлены в [8].

Рассмотрим спектральную функцию

$$e_\lambda(x, x') = \sum_{\lambda_j < \lambda} u_j(x) u_j(x'),$$

где u_j — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_j . Нашей целью является оценка максимума модуля данной функции.

Классические оценки максимума модуля спектральной функции и асимптотические формулы для спектральной функции эллиптических операторов восходят к работам [9, 10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказываемая в настоящей работе оценка спектральной функции будет впоследствии использоваться для получения асимптотики «считающей» функции, которая определяется как число собственных значений (с учетом кратности), меньших данного $\lambda > 0$. Для наших дальнейших целей достаточно «грубой» оценки спектральной функции. Отметим, что асимптотика считающей функции для задачи Дирихле впервые установлена в [11].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Теорема. Если выполнено условие (2), то в предположении (4) для собственных функций задачи (3) справедлива оценка

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C_1 \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad n > 2, \quad (5)$$

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C_2 \lambda^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \kappa > 1, \quad n = 2. \quad (6)$$

с константами $C_1 = C(n, \alpha, D, F)$ и $C_2 = C(\alpha, D, F)$, не зависящими от $x, x' \in D$, где α — константа эллиптичности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка (6) в теореме верна для каждого фиксированного κ , а константа C_2 зависит от этого κ .

Как отмечалось выше, для функций из пространства $W_2^1(D, F)$ выполнено неравенство Фридрихса (1), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (2), влекущее неравенство Фридрихса (1).

2. Доказательство основного результата

Пусть E_λ — спектральный проектор, другими словами, интегральный оператор с симметричным ядром $e_\lambda(x, x')$:

$$(E_\lambda f)(x) = \int_D e_\lambda(x, x') f(x') dx', \quad f \in L_2(D). \quad (7)$$

Пусть $(\mathcal{L})^l u = \lambda^l u$, где u — собственная функция, отвечающая собственному значению λ , а $(\mathcal{L})^l$ — суперпозиция операторов $\underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \dots \circ \mathcal{L}}_l$, тогда положим

$$u_l = (\mathcal{L})^l (E_\lambda f), \quad l = 0, 1, \dots \quad (8)$$

По определению $\mathcal{L}u_l = u_{l+1}$, поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_D u_{l+1} \varphi dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F).$$

Положим

$$u_{l,m} = \begin{cases} u_l, & |u_l| \leq m, \\ -m, & u_l < -m, \\ m, & u_l > m. \end{cases}$$

Выберем пробную функцию $\varphi = u_{l,m}|u_{l,m}|^\beta$, $\beta \geq 0$, которая является допустимой. Применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получим

$$(\beta + 1) \int_D |u_{l,m}|^\beta |\nabla u_{l,m}|^2 dx \leq \tilde{C}(\alpha) \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l,m}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}.$$

Сначала предположим, что $n > 2$.

Из условия (2) следует неравенство Соболева (см. [1, разд. 14.1.2])

$$\left(\int_D |\varphi|^{2\kappa} dx \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \leq qC_0 \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \kappa = \frac{n}{n-2},$$

которое будем применять. Здесь

$$C_0 = C(n, D, F). \quad (9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_D |u_{l,m}|^{\kappa(\beta+2)} dx \right)^{\frac{1}{\kappa(\beta+2)}} \\ & \leq \left(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left(\int_D |u_{l,m}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$C(\alpha) = C_0 \tilde{C}(\alpha). \quad (11)$$

Переходя в (10) к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_D |u_l|^{\kappa(\beta+2)} dx \right)^{\frac{1}{\kappa(\beta+2)}} \\ & \leq \left(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left(\int_D |u_l|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на итерационном методе Мозера. Для получения рекуррентного соотношения положим в (12) $\beta = 2\kappa^j - 2$, $j = 0, 1, \dots$. Обозначим

$$\chi_j = 2\kappa^j, \quad a_j = \left(\frac{C(\alpha)\chi_j^2}{4(\chi_j - 1)} \right)^{\frac{1}{\chi_j}}, \quad \Phi_{l,j} = \left(\int_D |u_l|^{\chi_j} dx \right)^{\frac{1}{\chi_j}}.$$

Тогда (12) запишется в виде

$$\Phi_{l,j+1} \leq a_j (\Phi_{l+1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{l,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (13)$$

В частности, для $l = 0$ имеем

$$\Phi_{0,j+1} \leq a_j (\Phi_{1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{0,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (14)$$

Проитерируем (14), пользуясь (13). Для этого заметим, что сумма степеней множителей в правой части (13) равна 1. Поэтому после каждой итерации в (14) будут появляться множители $a_{j-1}, a_{j-2}, \dots$. В результате найдем, что

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=k}^j a_l \prod_{i=0}^{j-k+1} (\Phi_{i,k})^{\gamma_{ij}^k}, \quad k = 0, 1, \dots, j.$$

Основную роль это неравенство играет при $k = 0$:

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=0}^j a_l \prod_{i=0}^{j+1} (\Phi_{i,0})^{\gamma_{ij}^0}. \quad (15)$$

Показатели степени γ_{ij}^k могут быть получены как коэффициенты многочлена

$$F_{kj}(x) = \prod_{i=k}^j \left(1 - \frac{1}{\chi_i} + \frac{x}{\chi_i} \right) = \sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k x^i.$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k = F_{kj}(1) = 1, \quad (16)$$

а также

$$\sum_{i=0}^{j-k+1} i \gamma_{ij}^k = F'_{kj}(1) = \sum_{i=k}^j \frac{1}{\chi_i}. \quad (17)$$

Далее нам понадобится тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa^i} = \frac{\kappa}{2(\kappa-1)} = \frac{n}{4}, \quad (18)$$

а также следствие тождества

$$\sum_{j=0}^{\infty} j x^j = x(1-x)^{-2}$$

вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} j \kappa^{-j} = \frac{\kappa}{2(\kappa-1)^2} = \frac{n(n-2)}{8}. \quad (19)$$

В силу неравенства $x^2/(2x-1) \leq 2x$ при $x \geq 1$, из определения a_j получаем $a_j \leq (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j}$. Отсюда, используя соотношения (18), (19), приходим к оценке

$$\prod_{j=0}^{\infty} a_j \leq \prod_{j=0}^{\infty} (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j} = ((2C(\alpha))^{\varkappa-1}\varkappa)^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)^2}} := C(n, \alpha, F) < \infty. \quad (20)$$

Поскольку $\Phi_{i,0} \leq \lambda^i \Phi_{0,0}$, ввиду (15) и (20) получаем

$$\Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha, F) \lambda^{\theta_j} (\Phi_{0,0})^{\mu_j},$$

где

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{j+1} i \gamma_{ij}^0, \quad \mu_j = \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{ij}^0.$$

В силу (16)–(18) имеем

$$\mu_j = 1, \quad \theta_j = \sum_{i=0}^j \frac{1}{\chi_i} \leq \frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)} = \frac{n}{4}.$$

Окончательно выводим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \Phi_{0,0}. \quad (21)$$

Поскольку $\Phi_{0,0} = \|u_0\|_{L_2(D)}$ (см. (8)) и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u_0|, \quad \text{где } u_0 = E_\lambda f,$$

с учетом величины $\varkappa$ получаем оценку

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |E_\lambda f| \leq C \lambda^{\frac{n}{4}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \quad (22)$$

Заметим, что $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \leq \|f\|_{L_2(D)}$. Значит, из (7) и (22) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{n}{4}}. \quad (23)$$

Выбирая в (22) $f = e_\lambda(x, \cdot)$, ввиду равенства $E_\lambda f = e_\lambda(x, \cdot)$ выводим искомое соотношение (5). Действительно,

$$|e_\lambda(x, x')| \leq |(E_\lambda e_\lambda(x, \cdot))(x')| \leq C \lambda^{\frac{n}{4}} \|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C_1 \lambda^{\frac{n}{2}}.$$

Напомним, что в силу (9) и (11) имеем

$$C_1 = C(n, \alpha, D, F),$$

что доказывает теорему в случае $n > 2$.

Теперь рассмотрим случай $n = 2$.

В этом случае применяем неравенство Соболева вида

$$\left(\int_D |\varphi|^{2\kappa} dx \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \leq C_0 \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \kappa > 1,$$

где (см. [1, разд. 14.1.2])

$$C_0 = C(D, F). \quad (24)$$

Рассуждая аналогично случаю $n > 2$, приходим опять к оценке (21). Следовательно, имеем

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |E_\lambda f| \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}.$$

Отсюда, как и выше при $n > 2$, получим оценку, аналогичную (23), вида

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}},$$

в силу которой выводим соотношение (6). Действительно,

$$|e_\lambda(x, x')| \leq |(E_\lambda e_\lambda(x, \cdot))(x')| \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C_2 \lambda^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Здесь в силу (11), учитывая (24), имеем

$$C_2 = C(\alpha, D, F),$$

что и доказывает теорему при $n = 2$.

Благодарность. Работа посвящается юбилею Геннадия Владимировича Демиденко и вдохновлена участием автора в конференции в Новосибирске осенью 2025 г. с ее атмосферой научного поиска и плодотворными дискуссиями, которые были бы невозможны без деятельного участия, энтузиазма и поддержки Геннадия Владимировича.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maz'ya V. Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2011.
2. Смолицкий Х. Л. Оценки производных фундаментальных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 205–208.
3. Эйдус Д. М. Оценки модуля собственных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 973–974.
4. Эйдус Д. М. Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 6. С. 796–798.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. 1960. Т. 24, № 6. С. 883–896.
6. Якубов В. Я. Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора // Докл. АН. 1993. Т. 331, № 3. С. 286–287.
7. Якубов В. Я. Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов // Функцион. анализ и его прил. 1999. Т. 33, № 2. С. 58–67.
8. Чечкина А. Г. Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка // Сириус. Мат. журн. 2025. Т. 1, № 3. С. 15–26.
9. Avakumović V. G. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Z. 1956. V. 65. P. 327–344.
10. Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator // Acta Math. 1968. V. 121. P. 193–218.
11. Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (miteiner Anwendung auf die Theorie Hohlraumstrahlung) // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 441–449.

Поступила в редакцию 26 января 2026 г.

После доработки 5 июня 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Чечкина Александра Григорьевна (ORCID 0000-0002-8529-9296)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
chechkina@gmail.com

КУБИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ
СИСТЕМЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ
КЛАССА C^1 НА ПЛОСКОМ 2-ТОРЕ
В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Рассматривается двумерная гамильтонова динамическая система с потенциалом, периодическим относительно некоторой решетки. Если система обладает интегралом F , являющимся многочленом третьей степени по импульсам с коэффициентами, периодическими относительно той же решетки, то она также обладает линейным по импульсам интегралом G , а F выражается через G и гамильтониан H . В случае целочисленной решетки этот результат был ранее получен М. Л. Бялым, а в случае произвольной решетки и аналитического потенциала — Н. В. Денисовой и В. В. Козловым. В настоящей работе это утверждение доказывается в случае произвольной решетки для потенциала класса C^1 . Доказательство значительно усложняется.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.518

Ключевые слова: гамильтонова динамическая система, полиномиальный интеграл, периодичность относительно решетки.

1. Постановка задачи
и формулировка основного результата

Рассматривается двумерная гамильтонова динамическая система. В качестве гамильтоновых переменных мы используем $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Предполагается, что гамильтониан имеет вид

$$H(x, y) = H_2 + V(x), \quad H_2 = (y_1^2 + y_2^2)/2. \quad (1.1)$$

При этом H_2 именуется *кинетической энергией*, а $V(x)$ — *потенциалом*.

Функция $F(x, y)$ называется *интегралом* гамильтоновой системы (1.1), если она удовлетворяет уравнению $\{H, F\} = 0$, где

$$\{H, F\} = y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} \quad (1.2)$$

— скобка Пуассона.

Решетка $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ есть дискретная подгруппа ранга 2 аддитивной группы $\mathbb{R}^2$. Говорим, что функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ Γ -периодична, если $f(x + k) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и всех $k \in \Gamma$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0026.

Предполагаем, что потенциал $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ является действительной Γ -периодической функцией относительно некоторой заданной решетки Γ . Нас интересует случай, когда динамическая система (1.1) обладает интегралом F , являющимся многочленом степени $n \geq 1$ по скоростям (y_1, y_2) . Если такой интеграл представить в виде $F = F_+ + F_-$, где F_+ (F_-) — четный (нечетный) многочлен по скоростям, то, как видно из (1.2), F_+ и F_- также являются интегралами. Поэтому достаточно рассматривать полиномиальные интегралы вида $F = F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \dots + F_j$ — однородный многочлен степени j по (y_1, y_2) . Коэффициенты этих многочленов предполагаются Γ -периодическими функциями, принадлежащими $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Следует сказать пару слов о геометрической значимости рассматриваемой задачи. Гамильтонова механика тесно связана с симплектической геометрией, а ее связи с римановой геометрией весьма эпизодичны. Но для системы (1.1) очевидна роль евклидовой метрики $dx_1^2 + dx_2^2$. Напомню, что двумерное риманово многообразие (M^2, g) называется *плоским*, если его гауссова кривизна тождественно равна нулю. Плоское двумерное риманово многообразие, диффеоморфное тору, изометрично $(\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$ для некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Поэтому система (1.1) с Γ -периодическим потенциалом $V(x)$ описывает движение материальной частицы в плоском торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$ под действием силы $-\nabla V$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. Пусть потенциал $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ действителен, не постоянен и Γ -периодичен относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что гамильтонова динамическая система (1.1) обладает кубическим интегралом

$$F = a_0(x_1, x_2)y_1^3 + a_1(x_1, x_2)y_1^2y_2 + a_2(x_1, x_2)y_1y_2^2 + a_3(x_1, x_2)y_2^3 + b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2, \quad (1.3)$$

с Γ -периодическими коэффициентами, принадлежащими $C^1(\mathbb{R}^2)$, причем старшая часть $F_3 = a_0y_1^3 + a_1y_1^2y_2 + a_2y_1y_2^2 + a_3y_2^3$ не равна тождественно нулю. Тогда эта система обладает также линейным интегралом с постоянными коэффициентами

$$G = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (c_1 = \text{const}, c_2 = \text{const})$$

и F выражается через G и H , т. е. существуют такие постоянные C_1, C_2, C_3 , что

$$F = C_1G^3 + C_2HG + C_3G. \quad (1.4)$$

Спектр потенциала лежит на прямой, проходящей через начало координат.

Последняя фраза в этой формулировке будет пояснена позже.

В случае целочисленной решетки $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ этот результат принадлежит М. Л. Бялому [1]. Для произвольной решетки теорема 1.1 доказана Н. В. Денисовой и В. В. Козловым в [2] при важном дополнительном условии: потенциал $V(x)$ является действительно-аналитической функцией. Правда, это условие не упомянуто в формулировке теоремы 2 из [2], но во введении сказано (цитирую): «В настоящей работе рассматривается задача о полиномиальных интегралах n -й степени с кинетической энергией общего вида и произвольным аналитическим потенциалом.» Аналитичность потенциала существенно используется в доказательстве, приведенном в [2]. Следует также сказать, что Н. В. Денисова и В. В. Козлов почему-то не любят термин «решетка», используют это слово крайне редко, предпочитая говорить о «кинетической энергии, являющейся

положительно определенной квадратичной формой $(ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2)/2$ с постоянными коэффициентами a, b, c . Тем не менее, после замены координат они приходят к (1.1) (см. формулу (2.2) в [2]) и основная часть их статьи состоит в исследовании поставленной задачи.

Изложим вкратце схему доказательства теоремы 1.1, обращая внимание на общность и различия между нашим подходом и методами работ [1, 2].

Легко доказывается, что коэффициенты a_j многочлена (1.3) постоянны. Анализируя уравнение $\{H, F\} = 0$ посредством представления функций V, b_0, b_1 их рядами Фурье, М. Л. Бялый приходит к уравнению

$$\sum_{j,k=1}^3 \alpha_{jk} f_j(m_j x + n_j y) f'_k(m_k x + n_k y) + \sum_{j=1}^3 \beta_j f'_j(m_j x + n_j y) = 0, \quad (1.5)$$

где $f_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) — некоторые 2π -периодические функции, (m_j, n_j) — целые числа, для которых $\rho_j = n_j/m_j$ являются корнями кубического уравнения

$$a_1 \rho^3 + (3a_0 - 2a_2) \rho^2 + (3a_3 - 2a_1) \rho + a_2 = 0, \quad (1.6)$$

постоянные коэффициенты α_{jk} выражаются явными формулами через a_j, ρ_j и, наконец, $\beta_j = \hat{b}_{0,0} m_j + \hat{b}_{1,0} n_j$. Доказательство теоремы 1.1 сводится к доказательству утверждения: не существует решения (f_1, f_2, f_3) уравнения (1.5) с непостоянными периодическими функциями $f_j(t)$. После линейной замены независимых переменных в ряде Фурье левой части уравнения (1.5) выделяются слагаемые, не зависящие от одной из переменных, и затем используются некоторые соотношения между коэффициентами α_{jk}, β_j уравнения (1.5), вытекающие из явных формул, выражающих эти коэффициенты через корни характеристического уравнения (1.6).

Н. В. Денисова и В. В. Козлов также получают некоторый аналог уравнения (1.5) [2, уравнение (4.9)] относительно трех периодических функций, но, в отличие от М. Л. Бялого, периоды этих функций могут быть различны. К сожалению, Н. В. Денисова и В. В. Козлов не обсуждают это обстоятельство, в силу чего у меня остаются вопросы и сомнения по поводу приведенного в [2] доказательства. Зафиксировав критическую точку x_2^0 функции $f_2(x_2)$, они ограничиваются лишь исследованием уравнения

$$f'_1(\sqrt{3}x_1 + x_2^0)(-f_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2^0) + c_0) + f'_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2^0)(f_1(\sqrt{3}x_1 + x_2^0) + c_1) = 0,$$

вытекающего из [2, уравнение (4.9)]. Посредством элементарных манипуляций из этого уравнения извлекается следствие $g_1(x_1)g_3(x_1) = c = \text{const}$, где функции g_1 и g_3 выражаются явными формулами через f_1 и f_3 . Затем следуют малопонятные рассуждения, доказывающие, что $c = 0$ (у меня остается сомнение в справедливости этого утверждения). Доказательство завершается фразой (цитирую): «Так как в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то либо g_1 , либо g_3 тождественно равны нулю.»

Ниже мы получим следующий вариант уравнения (1.5):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{\delta} f'_1(x_1)[f_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2) - f_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2) - c_0] \\ & + p_2 f'_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)[2f_1(x_1) - 2f_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2) - c_0 - c_1] \\ & + q_2 f'_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)[2f_1(x_1) - 2f_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2) + c_0 - c_1] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

с некоторыми постоянными c_0 и c_1 . Здесь $f_j(t)$ — 2π -периодические функции, (p_1, p_2) и (q_1, q_2) — две пары взаимно простых целых чисел и β, δ — некоторые постоянные, определяющие геометрию решетки. В отличие от [1, 2] мы исследуем уравнение (1.7), преобразуя его с сохранением полной информации на каждом шаге. Представляя левую часть уравнения ее рядом Фурье и приравнявая коэффициенты Фурье к нулю, приходим к бесконечной системе квадратных уравнений (уравнение (7.9) ниже) относительно коэффициентов Фурье $\hat{f}_{j,n}$ функций f_j . Доказательство завершается применением следующего утверждения, играющего решающую роль в нашем подходе.

Теорема 1.2 (о трех последовательностях). Пусть три последовательности комплексных чисел $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ образуют решение системы

$$X_{n_1}Y_{n_2} - X_{n_1+n_2}Z_{n_2} + Y_{n_1+n_2}Z_{-n_1} = 0 \quad (n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, n_1 + n_2 \neq 0). \quad (1.8)$$

Предположим также, что эти последовательности удовлетворяют условию четности

$$X_{-n} = \overline{X_n}, \quad Y_{-n} = \overline{Y_n}, \quad Z_{-n} = \overline{Z_n} \quad (1.9)$$

и условию убывания

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (|X_n| + |Y_n| + |Z_n|) < \infty. \quad (1.10)$$

Тогда это решение одномерно, т. е. справедливо одно из следующих трех утверждений: (1) $X_n = Y_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (2) $X_n = Z_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (3) $Y_n = Z_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство этой теоремы приведено в [3].

Настоящая работа возникла в значительной степени под влиянием статьи [2]. В частности, все приводимые в разд. 4 утверждения принадлежат Н. В. Денисовой и В. В. Козлову. Тем не менее мы приводим полные доказательства по двум причинам. Во первых, они доказывают предложение 4.1 для интеграла произвольной степени n , а мы лишь для $n = 3$; при этом доказательство значительно упрощается. Но главная причина состоит в следующем. При доказательстве предложений 4.1–4.3 в [2] используются некоторые вспомогательные утверждения, приводимые без доказательства со ссылкой на книги [4, 5], но я не нашел эти утверждения в указанных книгах. К счастью, оказывается, что доказательства всех вспомогательных утверждений получаются «сами собой» по ходу доказательства предложений 4.1–4.3. Надеюсь, выбранный мною стиль изложения облегчит заинтересованному читателю понимание сути дела. За исключением теоремы 1.2, настоящая статья самодостаточна, т. е. не отсылает читателя к другим источникам за доказательствами. В частности, знакомство с [1, 2] также не предполагается, хотя настоящая работа выросла из этих статей.

Мы не обсуждаем довольно долгую историю вопроса. Такое обсуждение и обширная библиография приведены в [2, 6].

2. Ряд Фурье Γ -периодической функции

Для решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ двойственная решетка определяется равенством

$$\Gamma' = \{k \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 m_1 + k_2 m_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ для всех } m \in \Gamma\}.$$

Любая Γ -периодическая функция $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ представима своим рядом Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k \in \Gamma'} \hat{f}_k e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (2.1)$$

Множество тех узлов $k \in \Gamma'$ решетки Γ' , для которых $\widehat{f}_k \neq 0$, называется *спектром* функции f . Γ -периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ можно трактовать как функцию на торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$, т. е. $f \in C^1(\mathbb{T}^2)$. В частности, нулевой коэффициент Фурье есть среднее значение функции:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{\sigma} \int_{\mathbb{T}^2} f d\sigma, \quad (2.2)$$

где $d\sigma = dx_1 dx_2$ — форма площади на торе и σ — площадь тора.

Мы рассматриваем гамильтонову динамическую систему с гамильтонианом вида (1.1), где потенциал $V(x_1, x_2)$ Γ -периодичен относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, и ставим задачу изучения кубических интегралов вида (1.3) для этой системы. Прежде всего отметим, что поставленная задача инвариантна относительно поворотов решетки Γ вокруг начала координат и гомотетий решетки Γ относительно начала координат. Изменив точку зрения, ту же инвариантность можно выразить фразой: наша задача инвариантна относительно преобразований независимых переменных $(x, y) = (x_1, x_2; y_1, y_2)$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mu A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu^{-1} A \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где μ — положительная постоянная и A — ортогональная 2×2 -матрица. В настоящей работе мы придерживаемся второй точки зрения, т. е. решетка Γ (а следовательно, и двойственная решетка Γ') будет зафиксирована, в то время как в процессе доказательства теоремы 1.1 нам придется неоднократно использовать замены переменных вида (2.3).

Легко убедиться, что линейная по скоростям функция $F_1 = b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2$ при замене (2.3) преобразуется по правилу

$$F_1 = b'_0(x'_1, x'_2)y'_1 + b'_1(x'_1, x'_2)y'_2, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mu A \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

При замене (2.3) ряд Фурье (2.1) немного видоизменяется:

$$f(x'_1, x'_2) = \sum_{k \in \Gamma'} \widehat{f}_k e^{i(k'_1 x'_1 + k'_2 x'_2)}, \quad \text{где} \quad k' = \mu A^{-1} k.$$

3. Основные дифференциальные уравнения. $F\Gamma'$ -прямые

Пусть (1.3) — кубический интеграл гамильтоновой системы (1.1). Подставляя выражение (1.3) в уравнение $\{H, F\} = 0$ и используя (1.2), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_0}{\partial x_1} y_1^4 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_0}{\partial x_2} \right) y_1^3 y_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) y_1^2 y_2^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right) y_1 y_2^3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} y_2^4 \\ & + \left(\frac{\partial b_0}{\partial x_1} - 3a_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_1^2 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_0}{\partial x_2} - 2a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 2a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_1 y_2 \\ & + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 3a_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_2^2 - b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку это уравнение выполняется тождественно по $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, из него следуют дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial a_0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_0}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial x_1} - 3a_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial b_0}{\partial x_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} - 2a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 2a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 3a_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \quad (3.3)$$

Напомним, что функции $a_j \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) Γ -периодичны; в частности, они ограничены. С учетом этого обстоятельства из (3.1) следует, что эти функции постоянны. Действительно, первое уравнение системы (3.1) означает, что a_0 не зависит от x_1 , т. е. $a_0 = a_0(x_2)$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы (3.1), получаем $a'_0(x_2) + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0$. Отсюда $a_1(x_1, x_2) = c_1(x_2) - a'_0(x_2)x_1$ с некоторой функцией $c_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Поскольку a_1 ограничена, отсюда следует $a'_0 = 0$, т. е. функция a_0 постоянна. Теперь система (3.1) упрощается до следующей:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0.$$

Повторяя те же аргументы, убеждаемся, что функции a_1, a_2, a_3 также постоянны.

Займемся линейными уравнениями (3.2). Без ограничения общности можно считать, что среднее значение потенциала по тору равно нулю, поскольку прибавление постоянной к функции V не меняет уравнения (3.2), (3.3). В силу (2.2) это означает, что нулевой коэффициент Фурье функции V равен нулю. Таким образом, ряд Фурье потенциала имеет вид

$$V(x_1, x_2) = \sum_{k \in \Gamma' \setminus \{0\}} \hat{V}_k e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (3.4)$$

Что касается функций b_0 и b_1 , мы не можем априори считать их нулевыми коэффициенты Фурье равными нулю, поскольку они участвуют в уравнении (3.3). Таким образом,

$$b_j(x_1, x_2) = \hat{b}_{j,0} + \sum_{k \in \Gamma' \setminus \{0\}} \hat{b}_{j,k} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad (j = 0, 1). \quad (3.5)$$

Если условие $V, b_j \in C^1(\mathbb{R}^2)$ усилить до $V, b_j \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ ($\alpha > 0$), то ряды Фурье (3.4), (3.5) можно почленно дифференцировать в классическом смысле. Впрочем, можно обойтись без этого усиления, если производные $\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$ трактовать как функции из $L^2(\mathbb{T}^2)$, что вполне достаточно для наших целей. То же верно для произведений $b_j \frac{\partial V}{\partial x_i}$, участвующих в (3.3). Это стандартное обоснование наших действий с рядами Фурье будет в дальнейшем опускаться ради краткости.

Дифференцируем равенства (3.4), (3.5) и подставляем производные в уравнения (3.2). Приравнявая затем к нулю коэффициенты Фурье левых частей полученных уравнений, для каждого узла $k = (k_1, k_2) \neq (0, 0)$ решетки Γ' получаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} -k_1 \hat{b}_{0,k} + (3a_0 k_1 + a_1 k_2) \hat{V}_k &= 0, \\ -k_2 \hat{b}_{0,k} - k_1 \hat{b}_{1,k} + (2a_1 k_1 + 2a_2 k_2) \hat{V}_k &= 0, \\ -k_2 \hat{b}_{1,k} + (a_2 k_1 + 3a_3 k_2) \hat{V}_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда прежде всего следует: если $\widehat{V}_k = 0$ для некоторого $0 \neq k \in \Gamma'$, то и $\widehat{b}_{0,k} = \widehat{b}_{1,k} = 0$. Приравнявая определитель системы (3.6) к нулю, получаем

$$a_2 k_1^3 + (3a_3 - 2a_1)k_1^2 k_2 + (3a_0 - 2a_2)k_1 k_2^2 + a_1 k_2^3 = 0. \quad (3.7)$$

Следовательно, отношение $\rho = k_2/k_1$ является корнем *характеристического уравнения* (1.6), если $V_k \neq 0$. Подчеркнем, что не исключается случай бесконечного корня $\rho = \infty$ уравнения (1.6), который имеет место при $a_1 = 0$; в этом случае $(k_1, k_2) = (0, 1)$ является решением уравнения (3.7).

Полученный результат можно выразить в терминах так называемых спектральных прямых потенциала V . Пусть $L_{(1,\rho)} = \{(k_1, k_2) = t(1, \rho) \mid t \in \mathbb{R}\}$ — прямая в плоскости переменных (k_1, k_2) , проходящая через начало координат с направляющим вектором $(1, \rho)$. Говорим, что $L_{(1,\rho)}$ является $F\Gamma'$ -прямой, если $L_{(1,\rho)} \cap (\Gamma' \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ и ρ является корнем характеристического уравнения (1.6). Присоединим ось ординат $L_{(0,1)} = \{(k_1, k_2) = (0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ к числу $F\Gamma'$ -прямых, если $L_{(0,1)} \cap (\Gamma' \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ и уравнение (1.6) имеет бесконечный корень. Название « $F\Gamma'$ -прямая» объясняется тем, что в нем участвуют коэффициенты многочлена F и решетка Γ' . Пусть M — число $F\Gamma'$ -прямых. Тогда $M \leq 3$, поскольку кубическое уравнение (1.6) имеет не более трех различных действительных корней. Для произвольного многочлена F вполне может оказаться $M = 0$. Но в условиях теоремы 1.1 $M \geq 1$, поскольку $\widehat{V}_k \neq 0$ хотя бы для одного $0 \neq k \in \Gamma'$. Пусть $L_1, \dots, L_M$ — все $F\Gamma'$ -прямые. Обозначим через $\text{Sp}(V) = \{k \in \Gamma' \mid \widehat{V}_k \neq 0\}$ спектр потенциала. Напомним, что $0 \notin \text{Sp}(V)$. Тогда

$$\text{Sp}(V) \subset \bigcup_{m=1}^M (L_m \cap (\Gamma' \setminus \{0\})).$$

Говорим, что $F\Gamma'$ -прямая L_m является *спектральной прямой* потенциала, если $L_m \cap (\text{Sp}(V) \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Последнее утверждение теоремы 1.1 эквивалентно следующему: потенциал имеет лишь одну спектральную прямую.

Для каждой из $F\Gamma'$ -прямых L_m выберем одну из двух ближайших к началу координат точек из $L_m \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, обозначив ее (k_1^m, k_2^m) . Тогда $L_m \cap \Gamma' = \{(nk_1^m, nk_2^m) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и ряд Фурье (3.4) приобретает вид

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)} e^{in(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)}. \quad (3.8)$$

Введя 2π -периодические функции

$$f_m(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)} e^{int} \quad (m = 1, \dots, M), \quad (3.9)$$

запишем (3.8) в виде

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2).$$

Отметим, что $f_m \equiv 0$, если $L_m \cap \text{Sp}(V) = \emptyset$. Мы можем написать эту формулу в виде

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2), \quad (3.10)$$

считая, что $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ при $M = 1$ или $f_3 \equiv 0$ при $M = 2$.

Как отмечено выше, коэффициенты Фурье $\widehat{b}_{0,k}$ и $\widehat{b}_{1,k}$ могут быть отличны от нуля лишь для тех $0 \neq k \in \Gamma'$, для которых $\widehat{V}_k \neq 0$. Полагая $k = (nk_1^m, nk_2^m)$ в (3.6), имеем для $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ систему

$$\begin{aligned} k_1^m \widehat{b}_{0,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (3a_0 k_1^m + a_1 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}, \\ k_2^m \widehat{b}_{0,(nk_1^m, nk_2^m)} + k_1^m \widehat{b}_{1,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (2a_1 k_1^m + 2a_2 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}, \\ k_2^m \widehat{b}_{1,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (a_2 k_1^m + 3a_3 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}. \end{aligned}$$

Решение этой системы может быть записано в виде $\widehat{b}_{j,(nk_1^m, nk_2^m)} = \alpha_{jm} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{0,m} &= \begin{cases} 3a_0 + a_1 k_2^m / k_1^m, & \text{если } k_1^m \neq 0, \\ 2a_2, & \text{если } k_1^m = 0; \end{cases} \\ \alpha_{1,m} &= \begin{cases} a_2 k_1^m / k_2^m + 3a_3, & \text{если } k_2^m \neq 0, \\ 2a_1, & \text{если } k_2^m = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда с помощью (3.5) и (3.9) вытекает представление

$$b_j(x_1, x_2) = \widehat{b}_{j,0} + \sum_{m=1}^3 \alpha_{jm} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) \quad (j = 0, 1). \quad (3.12)$$

4. Спектральные прямые потенциала

Лемма 4.1. Если непостоянная периодическая функция $f(t)$ класса C^1 удовлетворяет $(\alpha f(t) + \beta) f'(t) = 0$ с постоянными α и β , то $\alpha = \beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываем от противного. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Поскольку f — непостоянная функция, найдется такое t_0 , что $f'(t_0) \neq 0$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $f'(t) \neq 0$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Теперь из $(\alpha f(t) + \beta) f'(t) = 0$ следует, что $\alpha f(t) + \beta = 0$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, т. е. $f(t) = -\beta/\alpha = \text{const}$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Следовательно, $f'(t_0) = 0$, что противоречит предположению. Итак, $\alpha = 0$ и уравнение приобретает вид $\beta f'(t) = 0$. Поскольку f не постоянна, отсюда следует $\beta = 0$. $\square$

Предложение 4.1. Если в условиях теоремы 1.1 подвергнуть независимые переменные преобразованию вида (2.3) так, чтобы после преобразования ось абсцисс $k_2 = 0$ стала спектральной прямой потенциала, то после этого преобразования коэффициенты многочлена (1.3) будут удовлетворять $a_0 = a_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали, что коэффициенты a_j многочлена (1.3) постоянны. Пусть $L_1, \dots, L_M$ ($1 \leq M \leq 3$) — все $F\Gamma'$ -прямые. Упорядочим их так, чтобы на прямой L_1 была хоть одна точка спектра потенциала. Подвергнем независимые переменные преобразованию вида (2.3) так, чтобы после преобразования L_1 совпала с осью абсцисс и $(1, 0)$ была бы ближайшей к началу координат точкой из $L_1 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$. Теперь на оси абсцисс имеется хотя бы одна отличная от начала координат точка спектра функции V , т. е. существует такое $k_1 \neq 0$, что $(k_1, 0) \in \Gamma'$ и $\widehat{V}_{(k_1, 0)} \neq 0$. Разумеется, уравнения (3.6) останутся справедливыми после преобразования координат. Полагая $k = (k_1, 0)$ в последнем из уравнений (3.6), имеем $a_2 k_1 \widehat{V}_{(k_1, 0)} = 0$. Следовательно, $a_2 = 0$. Ввиду этого уравнение (3.7) принимает вид

$$(3a_3 - 2a_1) k_1^2 k_2 + 3a_0 k_1 k_2^2 + a_1 k_2^3 = 0.$$

В частности,

$$(3a_3 - 2a_1)k_1^2 + 3a_0k_1k_2 + a_1k_2^2 = 0, \quad \text{если } k_2 \neq 0. \quad (4.1)$$

Формула (3.10) теперь принимает вид

$$V(x_1, x_2) = f_1(x_1) + \sum_{m=2}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2), \quad (4.2)$$

причем функция f_1 не постоянна и $k_2^2 \neq 0, k_2^3 \neq 0$. Поэтому в силу (4.1)

$$(3a_3 - 2a_1)(k_1^m)^2 + 3a_0k_1^m k_2^m + a_1(k_2^m)^2 = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.3)$$

В формулах (3.12) надо положить $(k_1^1, k_2^1) = (1, 0)$ и $k_2^m \neq 0$ ($2 \leq m \leq M$). С учетом равенства $a_2 = 0$ формулы (3.11), (3.12) дают

$$b_1(x_1, x_2) = 2a_1 f_1(x_1) + 3a_3 \sum_{m=2}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{1,0}, \quad (4.4)$$

$$b_0(x_1, x_2) = 3a_0 f_1(x_1) + \sum_{k_1^m \neq 0} \left(3a_0 + a_1 \frac{k_2^m}{k_1^m} \right) f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{0,0}.$$

Здесь $\sum_{k_1^m \neq 0}$ означает суммирование по тем $2 \leq m \leq 3$, для которых $k_1^m \neq 0$ (условившись, что $k_1^m \neq 0$, если $f_m \equiv 0$). Согласно (4.3)

$$3a_0 + a_1 \frac{k_2^m}{k_1^m} = (2a_1 - 3a_3) \frac{k_1^m}{k_2^m}.$$

Поэтому последняя формула упрощается до следующей:

$$b_0(x_1, x_2) = 3a_0 f_1(x_1) + (2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{0,0}. \quad (4.5)$$

Из (4.2) и (4.4) следует равенство

$$b_1 = 3a_3 V + (2a_1 - 3a_3) f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}. \quad (4.6)$$

Дифференцируя равенство (4.2), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1'(x_1) + \sum_{m=2}^3 k_1^m f_m'(k_1^m x_1 + k_2^m x_2).$$

Напомним, что $k_2^m \neq 0$ при $m \geq 2$. Поскольку

$$f_m'(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) = \frac{1}{k_2^m} \frac{\partial (f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2))}{\partial x_2},$$

предыдущая формула может быть записана в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1'(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) \right). \quad (4.7)$$

Теперь обратимся к уравнению (3.3), которое пока не использовалось. Подставив выражения (4.5)–(4.7) для функций $b_0, b_1, \frac{\partial V}{\partial x_1}$ в уравнение (3.3), получим

$$\begin{aligned} & \left(3a_0 f_1(x_1) + (2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \widehat{b}_{0,0} \right) \left(f_1'(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) \right) \\ & + (3a_3 V + (2a_1 - 3a_3) f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}) \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Ради краткости аргументы функций V и f_m здесь не указаны, но подразумевается, что $V = V(x_1, x_2)$ и $f_m = f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)$. Раскрыв скобки, запишем это уравнение так:

$$\begin{aligned} & 3a_0 f_1(x_1) f_1'(x_1) + 3a_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_1(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) + (2a_1 - 3a_3) f_1'(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \\ & + \frac{1}{2} (2a_1 - 3a_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right)^2 \right) + \widehat{b}_{0,0} f_1'(x_1) + \widehat{b}_{0,0} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) \\ & + \frac{3a_3}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_2} + (2a_1 - 3a_3) \frac{\partial(f_1(x_1)V)}{\partial x_2} + \widehat{b}_{1,0} \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно также записать в виде

$$[(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0}) f_1'(x_1)] + (2a_1 - 3a_3) f_1'(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{3a_3}{2} V^2 + ((2a_1 - 3a_3) f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}) V \\ & + (3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0}) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \frac{1}{2} (2a_1 - 3a_3) \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right)^2. \end{aligned}$$

Все участвующие в уравнении (4.8) функции Γ -периодичны и могут рассматриваться в качестве функций на торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$. Обозначив через κ среднее значение функции $(2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m$ по тору (см. (2.2)), запишем уравнение (4.8) в виде

$$[(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0} + \kappa) f_1'(x_1)] + f_1'(x_1) \left((2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m - \kappa \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0. \quad (4.9)$$

К уравнению (4.9) применимы изящные аргументы М. Л. Бялого [1], заключающиеся в следующем. Разложим левую часть уравнения (4.9) в ряд Фурье вида (2.1) и в этом ряду проследим слагаемые вида $se^{i\nu x_1}$ ($c = \text{const}$), не зависящие от x_2 (случай $\nu = 0$ не исключается). Ряд Фурье функции в квадратных скобках полностью состоит из таких гармоник, а последние два слагаемых не содержат таких гармоник. Поэтому из (4.9) следует, что $(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0} + \kappa) f_1'(x_1) = 0$. Применяя лемму 4.1, получаем $a_0 = 0$. $\square$

Предложение 4.2. Если в условиях теоремы 1.1 потенциал имеет две различные спектральные прямые, то они пересекаются друг с другом под углом $\pi/3$. Если при этом независимые переменные подвергнуть преобразованию вида (2.3) так, чтобы одна из двух спектральных прямых стала горизонтальной, то после преобразования коэффициенты многочлена (1.3) будут удовлетворять $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 + 3a_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_1 и L_2 — спектральные прямые потенциала, пересекающиеся под углом φ . Согласно предложению 4.1 после соответствующего преобразования независимых переменных прямая L_1 становится горизонтальной и $a_0 = a_2 = 0$. Старшая часть многочлена (1.3) имеет вид $F_3 = a_1 y_1^2 y_2 + a_3 y_2^3$. Теперь подвергнем независимые переменные преобразованию вида (2.3), где A — матрица поворота от L_2 до L_1 , т. е.

$$y_1 = \mu(y'_1 \cos \varphi - y'_2 \sin \varphi), \quad y_2 = \mu(y'_1 \sin \varphi + y'_2 \cos \varphi) \quad (0 < \mu = \text{const}).$$

При этом $\sin \varphi \neq 0$, поскольку прямые L_1 и L_2 различны. Простыми вычислениями убеждаемся, что после преобразования

$$F_3 = a'_0 (y'_1)^3 + a'_1 (y'_1)^2 y'_2 + a'_2 y'_1 (y'_2)^2 + a'_3 (y'_2)^3,$$

где

$$\begin{aligned} a'_0 &= \mu^3 \sin \varphi (a_1 \cos^2 \varphi + a_3 \sin^2 \varphi), \\ a'_1 &= \mu^3 \cos \varphi (a_1 (-2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + 3a_3 \sin^2 \varphi), \\ a'_2 &= \mu^3 \sin \varphi (a_1 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) + 3a_3 \cos^2 \varphi), \\ a'_3 &= \mu^3 \cos \varphi (a_1 \sin^2 \varphi + a_3 \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (4.10)$$

После этого преобразования L_2 становится горизонтальной прямой. Согласно тому же предложению 4.1 $a'_0 = a'_2 = 0$, т. е. угол φ должен быть таким, что

$$a_1 \cos^2 \varphi + a_3 \sin^2 \varphi = 0, \quad a_1 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) + 3a_3 \cos^2 \varphi = 0. \quad (4.11)$$

Если рассматривать (4.11) как систему линейных уравнений относительно (a_1, a_3) , то ее определитель должен равняться нулю, поскольку $(a_1, a_3) \neq (0, 0)$. Приравняв определитель к нулю, приходим к уравнению

$$3 \cos^4 \varphi + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi = 0. \quad (4.12)$$

При этом важно отметить, что $\cos \varphi \neq 0$. Действительно, в противном случае $a'_1 = a'_3 = 0$, как видно из (4.10). Вместе с $a'_0 = a'_2 = 0$ это означает, что $F_3 = 0$, что противоречит условию теоремы 1.1. Итак, уравнение (4.12) может быть записано в виде $\text{tg}^4 \varphi - 2 \text{tg}^2 \varphi - 3 = 0$. Отсюда $\text{tg} \varphi = \pm \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = \pm \pi/3$. Подставляя $\sin \varphi = \pm \sqrt{3}/2$, $\cos \varphi = 1/2$ в первое уравнение системы (4.11), получаем $a_1 + 3a_3 = 0$. $\square$

Все наши уравнения существенно упрощаются с помощью предложения 4.2. Во-первых, многочлен (1.3) можно умножить на любую ненулевую постоянную. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 0$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Многочлен (1.3) теперь имеет вид

$$F = -3y_1 y_2^2 + y_2^3 + b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2.$$

Характеристическое уравнение (1.6) упрощается до $\rho^3 - 3\rho = 0$, корни которого $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \sqrt{3}$, $\rho_3 = -\sqrt{3}$. Поэтому в формуле (4.2)

$$k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2, \quad k_3^2 = -\sqrt{3}k_1^2 \quad (k_2^2 \neq 0, k_3^2 \neq 0).$$

Напомним, что (k_1^2, k_2^2) — одна из двух ближайших к началу координат точек, принадлежащих $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$. Без ограничения общности можно считать, что $k_2^2 > 0$. Аналогично можно считать, что $k_2^3 > 0$. Предыдущая формула уточняется до

$$k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2, \quad k_2^3 = -\sqrt{3}k_1^3 \quad (k_1^2 > 0, k_1^3 < 0). \quad (4.13)$$

Это уточнение будет использовано в следующем разделе.

Из (4.2) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1' + k_1^2 f_2' + k_1^3 f_3', \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2^2 f_2' + k_2^3 f_3'.$$

Формулы (4.4), (4.5) принимают вид

$$b_0 = 3\sqrt{3}(-f_2 + f_3 + \sqrt{3}\widehat{b}_{0,0}/9), \quad b_1 = 3(-2f_1 + f_2 + f_3 + \widehat{b}_{1,0}/3). \quad (4.14)$$

Ради краткости аргументы здесь не указаны, но подразумевается, что $f_1 = f_1(x_1)$, $f_2 = f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2)$, $f_3 = f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2)$. Подставляя эти выражения в уравнение (3.3), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{3}f_2 + \sqrt{3}f_3 + \frac{1}{3}\widehat{b}_{0,0} \right) (f_1' + k_1^2 f_2' + k_1^3 f_3') \\ & + \left(-2f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{3}\widehat{b}_{1,0} \right) (k_2^2 f_2' + k_2^3 f_3') = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок происходят существенные сокращения (с помощью (4.13)) и уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}f_1' \left(f_2 - f_3 - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} \right) + k_2^2 f_2' \left(2f_1 - 2f_3 - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3} \right) \\ & + k_2^3 f_3' \left(2f_1 - 2f_2 + \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3} \right) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Предложение 4.3. В условиях теоремы 1.1 потенциал не может иметь ровно двух спектральных прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вопреки утверждению, что имеются ровно две спектральные прямые потенциала. Как выше отмечалось, это означает, что функция f_2 не постоянна, в то время как $f_3 \equiv 0$ (или наоборот). Рассматриваем первый из этих случаев (второй рассматривается так же). Уравнение (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}f_1'(x_1) \left(f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} \right) \\ & + k_2^2 f_2'(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) \left(2f_1(x_1) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция f_1 периодична и не постоянна, найдутся такие x_1^0 и x_1^1 , что $f_1'(x_1^0) = f_1'(x_1^1) = 0$, но $f_1(x_1^0) \neq f_1(x_1^1)$. Полагая $x_1 = x_1^j$ в последнем уравнении, имеем

$$f_2'(k_1^2 x_1^j + k_2^2 x_2) \left(2f_1(x_1^j) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3} \right) = 0 \quad (j = 0, 1).$$

Хотя бы одно из чисел $2f_1(x_1^0) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}$ и $2f_1(x_1^1) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}$ отлично от нуля. Поэтому из предыдущей формулы следует, что $f_2' \equiv 0$, т. е. функция f_2 постоянна; противоречие. $\square$

5. Три спектральные прямые потенциала

Далее предполагаем, что потенциал имеет 3 различные спектральные прямые L_j ($j = 1, 2, 3$), надо из этого предположения получить противоречие. Применив предложение 4.2, считаем, что L_1 — ось абсцисс, а L_2 и L_3 — прямые с направляющими векторами $(1, \sqrt{3})$ и $(1, -\sqrt{3})$ соответственно. Справедливы формулы (4.2) и (4.14), а также уравнение (4.15), в которых f_j ($j = 1, 2, 3$) — непостоянные 2π -периодические функции. Напомню также, что $(1, 0)$, (k_1^2, k_2^2) , (k_1^3, k_2^3) — ближайшие к началу координат точки, принадлежащие $L_1 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, $L_3 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$ соответственно.

Покажем, что решетка Γ' обладает базисом вида

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (\beta, \delta) \quad (\beta \in [0, 1), \delta > 0). \quad (5.1)$$

Действительно, пусть $e'_1 = (e'_1, e'_2)$, $e'_2 = (e'_2, e'_3)$ — какой-нибудь базис решетки Γ' . Представим вектор e_1 в виде $e_1 = n_1 e'_1 + n_2 e'_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$). Тогда $(n_1, n_2) \neq 0$ и целые числа (n_1, n_2) взаимно просты, поскольку e_1 — ближайшая к началу координат точка из $L_1 \cap \Gamma'$, отличная от начала координат. Существует такая пара целых чисел (l_1, l_2) , что $n_1 l_2 - n_2 l_1 = 1$. Матрица $A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ принадлежит $SL(2, \mathbb{Z})$ и, следовательно, пара векторов $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$ является базисом решетки Γ' . Пусть $e_2 = (\beta, \delta)$, тогда $\delta \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta > 0$, поскольку $(e_1, -e_2)$ — также базис решетки Γ' . Вместе с базисом (e_1, e_2) пара векторов $(e_1, n e_1 + e_2)$ также является базисом решетки Γ' для любого целого n . Поскольку $n e_1 + e_2 = (\beta + n, \delta)$, можно выбрать такое целое n , что $\beta + n \in [0, 1)$. Тем самым мы установили существование базиса решетки Γ' вида (5.1).

Напомним, что $(k_1^2, k_2^2) = (k_1^2, \sqrt{3}k_1^2)$ — ближайшая к началу координат точка, принадлежащая $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$ и такая, что $k_1^2 > 0$, см. (4.13). Это означает существование пары взаимно простых целых чисел (p_1, p_2) таких, что $(k_1^2, k_2^2) = p_1(1, 0) + p_2(\beta, \delta)$, т. е.

$$k_1^2 = p_1 + p_2\beta, \quad k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2 = p_2\delta \quad (p_2 > 0). \quad (5.2)$$

Точно так же устанавливаем существование пары взаимно простых целых чисел (q_1, q_2) таких, что

$$k_1^3 = q_1 + q_2\beta, \quad k_2^3 = -\sqrt{3}k_1^3 = q_2\delta \quad (q_2 > 0). \quad (5.3)$$

Из (5.2), (5.3) следуют равенства $-\beta + \delta/\sqrt{3} = p_1/p_2$, $-\beta - \delta/\sqrt{3} = q_1/q_2$. Решая эту систему, имеем

$$\beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{q_1}{q_2} \right), \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{p_1}{p_2} - \frac{q_1}{q_2} \right). \quad (5.4)$$

Равенства (5.4) позволяют исключить β и δ из всех наших формул. Теперь решетка Γ' определяется двумя парами $(p_1, p_2 > 0)$ и $(q_1, q_2 > 0)$ взаимно простых целых чисел. Но эти пары должны удовлетворять некоторым неравенствам. Действительно, условия $\delta > 0$ и $\beta \in [0, 1)$ означают, что

$$d = p_1 q_2 - p_2 q_1 > 0, \quad -2p_2 q_2 < p_1 q_2 + p_2 q_1 \leq 0. \quad (5.5)$$

Это эквивалентно системе неравенств

$$p_2 > 0, \quad q_2 > 0, \quad q_1 < 0, \quad \max \left\{ \frac{q_1}{q_2} p_2, - \left(2 + \frac{q_1}{q_2} \right) p_2 \right\} < p_1 \leq - \frac{q_1}{q_2} p_2. \quad (5.6)$$

Легко убедиться в справедливости обратного утверждения: если две пары взаимно простых целых чисел (p_1, p_2) и (q_1, q_2) удовлетворяют (5.6), то определенные равенствами (5.4) числа (β, δ) удовлетворяют $\beta \in [0, 1), \delta > 0$.

Воспроизведем уравнение (4.15) в подробной записи

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} f'_1(x_1) (f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) - f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) - \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3})) \\ & + k_2^2 f'_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) (2f_1(x_1) - 2f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) - \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3}) - \hat{b}_{1,0}/3) \\ & + k_2^3 f'_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) (2f_1(x_1) - 2f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) + \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3}) - \hat{b}_{1,0}/3) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения (5.2), (5.3) и вводя обозначения $c_0 = \hat{b}_{0,0}/3\sqrt{3}$, $c_1 = \hat{b}_{1,0}/3$, приходим к уравнению (1.7).

6. Анализ уравнения (1.7)

Напомним, что $f_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) — 2π -периодические функции с нулевыми средними значениями по периоду. Представим их рядами Фурье

$$f_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{j,n} e^{int}, \quad f'_j(t) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \hat{f}_{j,n} e^{int},$$

причем $\hat{f}_{j,0} = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Подставляем эти выражения в уравнение (1.7):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{1,k} e^{ikx_1} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{2,\ell} e^{i\ell((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} - \hat{f}_{3,\ell} e^{i\ell((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)}] \\ & + p_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{2,k} e^{ik((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{1,\ell} e^{i\ell x_1} - \hat{f}_{3,\ell} e^{i\ell((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)}] \\ & + q_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{3,k} e^{ik((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{1,\ell} e^{i\ell x_1} - \hat{f}_{2,\ell} e^{i\ell((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)}] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \hat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \hat{f}_{2,n} e^{in((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\ & \quad \left. + q_2 (c_1 - c_0) \hat{f}_{3,n} e^{in((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right] = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок это уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \hat{f}_{1,k} \hat{f}_{2,\ell} e^{i((k+p_1\ell+\beta p_2\ell)x_1 + \delta p_2 \ell x_2)} \\ & - \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \hat{f}_{1,k} \hat{f}_{3,\ell} e^{i((k+q_1\ell+\beta q_2\ell)x_1 + \delta q_2 \ell x_2)} \\ & + \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} p_2 k \hat{f}_{2,k} \hat{f}_{1,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + \ell)x_1 + \delta p_2 k x_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} p_2 k \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + (\delta p_2 k + \delta q_2 \ell)x_2)} \\
& + \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} q_2 k \widehat{f}_{3,k} \widehat{f}_{1,\ell} e^{i((q_1 k + \beta q_2 k + \ell)x_1 + \delta q_2 k x_2)} \\
& - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} q_2 k \widehat{f}_{3,k} \widehat{f}_{2,\ell} e^{i((q_1 k + \beta q_2 k + p_1 \ell + \beta p_2 \ell)x_1 + (\delta q_2 k + \delta p_2 \ell)x_2)} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \widehat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,n} e^{in((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\
& \quad \left. + q_2 (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,n} e^{in((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Это уравнение можно немного упростить. Действительно, переставим переменные суммирования k и ℓ в первой сумме, после чего объединим 1-ю и 3-ю суммы. Аналогично объединим 2-ю и 5-ю суммы, а также 4-ю и 6-ю суммы. Полученное уравнение можно записать в виде

$$A_{12} + A_{13} + A_{23} + B = 0, \quad (6.1)$$

где

$$A_{12} = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} \left(p_2 k + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \ell \right) \widehat{f}_{1,\ell} \widehat{f}_{2,k} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + \ell)x_1 + \delta p_2 k x_2)}, \quad (6.2)$$

$$A_{13} = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\delta} k + q_2 \ell \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + \delta q_2 \ell x_2)}, \quad (6.3)$$

$$A_{23} = - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} (p_2 k + q_2 \ell) \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + (\delta p_2 k + \delta q_2 \ell)x_2)}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
B = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \widehat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,n} e^{in((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\
\left. + q_2 (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,n} e^{in((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right]. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Представим левую часть уравнения (6.1) в качестве ряда Фурье по переменной δx_2 , коэффициенты которого зависят от x_1 . Для этого преобразуем формулы (6.2)–(6.4).

В формуле (6.2) сменим обозначение переменных суммирования согласно равенствам $k = m$, $\ell = k$:

$$A_{12} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(p_2 m + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,m} e^{i(p_1 m + \beta p_2 m + k)x_1} \right) e^{i(p_2 m)(\delta x_2)}.$$

В формуле (6.3) сменим обозначение переменной суммирования согласно $\ell = m$:

$$A_{13} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\delta} k + q_2 m \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,m} e^{i(k + q_1 m + \beta q_2 m)x_1} \right) e^{i(q_2 m)(\delta x_2)},$$

Введя обозначение $\widehat{f}_{j,[a]} = \widehat{f}_{j,a}$, если $a \in \mathbb{Z}$; $\widehat{f}_{j,[a]} = 0$, если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, две предыдущие формулы запишем в виде

$$A_{12} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(\beta n + p_1 n/p_2 + k)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}, \quad (6.6)$$

$$A_{13} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(\beta n + q_1 n/q_2 + k)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}. \quad (6.7)$$

Формулу (6.4) запишем в виде

$$A_{23} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} n \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(\beta n + p_1 k + q_1 \ell)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}. \quad (6.8)$$

Здесь и далее $\sum_{p_2 k + q_2 \ell = n}$ означает суммирование по тем $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, которые удовлетворяют $p_2 k + q_2 \ell = n$.

Наконец, формулу (6.5) записываем в виде

$$\begin{aligned} B = & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \widehat{f}_{1,k} e^{ikx_1} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n ((c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{in(p_1/p_2 + \beta)x_1} + (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{in(q_1/q_2 + \beta)x_1}) e^{in(\delta x_2)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Подставляя (6.6)–(6.9) в (6.1), приходим к уравнению вида

$$\sum_n C_n(x_1) e^{in(\delta x_2)} = 0.$$

Поскольку функции $e^{in(\delta x_2)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) линейно независимы, отсюда следует, что

$$c_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \widehat{f}_{1,k} e^{ikx_1} = 0, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(\beta n + p_1 n/p_2 + k)x_1} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(\beta n + q_1 n/q_2 + k)x_1} - n \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(\beta n + p_1 k + q_1 \ell)x_1} \\ & - \frac{n}{2} (((c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{in(p_1/p_2 + \beta)x_1} + (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{in(q_1/q_2 + \beta)x_1}) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Разумеется, из (6.10) следует, что $c_0 \widehat{f}_{1,k} = 0$ ($0 \neq k \in \mathbb{Z}$). Напомним, что $\widehat{f}_{1,k} \neq 0$ хотя бы для одного $k \neq 0$ согласно предположению. Поэтому из последней формулы вытекает, что $\widehat{b}_{0,0} = 3\sqrt{3}c_0 = 0$. Теперь докажем, что постоянная c_1 в (6.11) также равна нулю. Для этого вспомним, что наша задача инвариантна относительно поворота плоскости на угол $\pi/3$ вокруг начала координат. Следовательно, уравнение (6.11) инвариантно относительно замены (2.3), где

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на $\pi/3$. При этом преобразовании линейная форма $b_0 y_1 + b_1 y_2$ преобразуется по правилу (2.4). В частности, нулевые коэффициенты Фурье функций b_0, b_1 преобразуются так:

$$\widehat{b}_{0,0} = \frac{\mu}{2}(\widehat{b}'_{0,0} - \sqrt{3}\widehat{b}'_{1,0}), \quad \widehat{b}_{1,0} = \frac{\mu}{2}(\sqrt{3}\widehat{b}'_{0,0} + \widehat{b}'_{1,0}) \quad (\mu > 0).$$

В этих формулах $\widehat{b}_{0,0} = 0$ и $\widehat{b}'_{0,0} = 0$, как мы установили. Следовательно, $\widehat{b}_{1,0} = 0$.

Итак, $c_0 = c_1 = 0$. Умножив уравнение (6.11) на $e^{-in\beta x_1}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 n/p_2 + k)x} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(q_1 n/q_2 + k)x} \\ - n \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 k + q_1 \ell)x} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что β здесь не участвует. Исключим также δ из этого уравнения, для чего используем целое положительное число d , определенное в (5.5). Как следует из (5.4), $\frac{\sqrt{3}}{2\delta} = \frac{p_2 q_2}{d}$. Подставляя это значение, приводим предыдущее уравнение к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 n/p_2 + k)x} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(q_1 n/q_2 + k)x} \\ - dn \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 k + q_1 \ell)x} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}). \quad (6.12) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.7) с двумя независимыми переменными (x_1, x_2) сведено к системе уравнений (6.12) с одной независимой переменной x .

7. Анализ системы (6.12)

В уравнении (6.12) сделаем замену $x = p_2 q_2 y$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 q_2 n + p_2 q_2 k)y} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(p_2 q_1 n + p_2 q_2 k)y} \\ - dn \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell)y} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}). \quad (7.1) \end{aligned}$$

Преобразуем каждую из сумм, участвующих в этом уравнении. В первой сумме меняем переменную суммирования по формуле $k = \frac{m}{p_2 q_2} - \frac{p_1 n}{p_2}$ или $m = p_1 q_2 n + p_2 q_2 k$. Разумеется, суммирование будет выполняться лишь по тем $m \in \mathbb{Z}$,

для которых определяемое последним равенством k является целым. Результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 q_2 n + p_2 q_2 k)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m/(p_2 q_2) - p_1 n/p_2]} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Аналогично преобразуется вторая сумма из (7.1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(p_2 q_1 n + p_2 q_2 k)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m/(p_2 q_2) - q_1 n/q_2]} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Теперь разберемся с третьей суммой в (7.1). Эта сумма содержит слагаемое с гармоникой e^{imy} тогда и только тогда, когда существуют такие $k, \ell \in \mathbb{Z}$, что

$$p_2 k + q_2 \ell = n, \quad p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell = m. \quad (7.4)$$

Эта система имеет единственное решение $k = \frac{m - p_2 q_1 n}{dp_2}$, $\ell = \frac{p_1 q_2 n - m}{dq_2}$. Правда, это решение далеко не всегда является целым. Результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{2,[m - p_2 q_1 n]/(dp_2)} \widehat{f}_{3,[p_1 q_2 n - m]/(dq_2)} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подставляем выражения (7.2)–(7.5) в (7.1), приходим к уравнению вида $\sum_m C_{mn} e^{imy} = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m - p_1 q_2 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} \\ + ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m - p_2 q_1 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} \\ - dn \widehat{f}_{2,[m - p_2 q_1 n]/(dp_2)} \widehat{f}_{3,[p_1 q_2 n - m]/(dq_2)} = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Третье слагаемое в левой части уравнения (7.6) равно нулю, если $m - p_1 q_2 n$ не делится на dq_2 или $m - p_2 q_1 n$ не делится на dp_2 . Таким образом, справедливо утверждение

$$\begin{aligned} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m - p_1 q_2 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} \\ + ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m - p_2 q_1 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} = 0, \end{aligned}$$

если $(m - p_1 q_2 n)$ не делится на dq_2 или $(m - p_2 q_1 n)$ не делится на dp_2 . (7.7)

Уравнение (7.6) можно существенно упростить. Для этого сменим целочисленные параметры (m, n) по формулам

$$m = p_2 q_2 (p_1 k + q_1 \ell), \quad n = p_2 k + q_2 \ell. \quad (7.8)$$

Все участвующие в (7.6) индексы выражаем через (k, ℓ) с помощью (7.8) и (5.5):

$$(m - p_1 q_2 n)/(p_2 q_2) = -d\ell/p_2, \quad n/p_2 = (p_2 k + q_2 \ell)/p_2, \quad (m - p_2 q_1 n)/(p_2 q_2) = dk/q_2,$$

$$n/q_2 = (p_2k + q_2\ell)/q_2, \quad (m - p_2q_1n)/(dp_2) = k, \quad (p_1q_2n - m)/(dq_2) = \ell.$$

Коэффициенты этого уравнения также выражаем через (k, ℓ) :

$$m + (d - p_1q_2)n = dp_2k, \quad (d + p_2q_1)n - m = dq_2\ell, \quad dn = d(p_2k + q_2\ell).$$

Подставляя эти значения в (7.6), приходим к уравнению

$$p_2k\widehat{f}_{1,[-d\ell/p_2]}\widehat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]} + q_2\ell\widehat{f}_{1,[dk/q_2]}\widehat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]} - (p_2k + q_2\ell)\widehat{f}_{2,k}\widehat{f}_{3,\ell} = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}). \quad (7.9)$$

Подчеркнем, что система уравнений (7.7), (7.9) по-прежнему содержит полную информацию о нашей задаче.

Поскольку $\widehat{f}_{1,0} = \widehat{f}_{2,0} = \widehat{f}_{3,0} = 0$, уравнение (7.9) выполняется тривиальным образом, если $k = 0$ или $\ell = 0$ или $p_2k + q_2\ell = 0$. Если же каждое из этих трех чисел отлично от нуля, то уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\widehat{f}_{1,[-d\ell/p_2]}}{q_2\ell} \frac{\widehat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]}}{p_2k + q_2\ell} + \frac{\widehat{f}_{1,[dk/q_2]}}{p_2k} \frac{\widehat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]}}{p_2k + q_2\ell} - \frac{\widehat{f}_{2,k}}{p_2k} \frac{\widehat{f}_{3,\ell}}{q_2\ell} = 0.$$

Это также можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{f}_{1,[-dq_2\ell/(p_2q_2)]}}{-q_2\ell} \frac{\widehat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]}}{p_2k + q_2\ell} - \frac{\widehat{f}_{1,[dp_2k/(p_2q_2)]}}{p_2k} \frac{\widehat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]}}{p_2k + q_2\ell} \\ + \frac{\widehat{f}_{2,[p_2k/p_2]}}{p_2k} \frac{\widehat{f}_{3,[q_2\ell/q_2]}}{q_2\ell} = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

для $k, \ell \in \mathbb{Z}; k \neq 0, \ell \neq 0, p_2k + q_2\ell \neq 0$.

Введя обозначения (i — мнимая единица)

$$X_n = \frac{i\widehat{f}_{1,[dn/(p_2q_2)]}}{n}, \quad Y_n = \frac{i\widehat{f}_{2,[n/p_2]}}{n}, \quad Z_n = \frac{i\widehat{f}_{3,[n/q_2]}}{n} \quad (0 \neq n \in \mathbb{Z}), \quad (7.11)$$

запишем уравнение (7.10) в виде

$$X_{-q_2\ell}Y_{p_2k+q_2\ell} - X_{p_2k}Z_{p_2k+q_2\ell} + Y_{p_2k}Z_{q_2\ell} = 0. \quad (7.12)$$

Если обозначить

$$n_1 = -q_2\ell, \quad n_2 = p_2k + q_2\ell, \quad (7.13)$$

то $n_1 + n_2 = p_2k$ и уравнение (7.12) примет вид

$$X_{n_1}Y_{n_2} - X_{n_1+n_2}Z_{n_2} + Y_{n_1+n_2}Z_{-n_1} = 0. \quad (7.14)$$

Это совпадает с уравнением (1.8) из теоремы о трех последовательностях. Но непосредственно применять эту теорему мы пока не можем, поскольку далеко не все целые n_1 и n_2 представимы в виде (7.13), для этого необходимо и достаточно, чтобы n_1 делилось на q_2 и $n_1 + n_2$ делилось на p_2 . Для возможности применения теоремы 1.2 мы должны установить, что (7.14) выполняется также для таких n_1, n_2 , что n_1 не делится на q_2 или $n_1 + n_2$ не делится на p_2 . Подставляем выражения (7.11) в уравнение (7.14), приходим к необходимости доказательства утверждения:

$$(n_1 + n_2)\widehat{f}_{1,[dn_1/(p_2q_2)]}\widehat{f}_{2,[n_2/p_2]} - n_1\widehat{f}_{1,[d(n_1+n_2)/(p_2q_2)]}\widehat{f}_{3,[n_2/q_2]} = 0, \\ \text{если } (n_1 \text{ не делится на } q_2) \text{ или } (n_1 + n_2 \text{ не делится на } p_2). \quad (7.15)$$

Покажем, что (7.15) вытекает из (7.7). Для этого в (7.7) полагаем $m = dn_1 + p_1q_2n_2$, $n = n_2$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} m - p_1q_2n &= dn_1, \quad m - p_2q_1n = d(n_1 + n_2), \quad n/p_2 = n_2/p_2, \quad n/q_2 = n_2/q_2, \\ m + (d - p_1q_2)n &= d(n_1 + n_2), \quad (d + p_2q_1)n - m = -dn_1. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (7.7), приходим в точности к (7.15), включая вторые строки утверждений (7.7) и (7.15). Тем самым доказано основное условие (1.8) теоремы 1.2. Поскольку функции f_j ($j = 1, 2, 3$) действительны, их коэффициенты Фурье удовлетворяют $\widehat{f}_{j,-n} = \overline{\widehat{f}_{j,n}}$. Отсюда с помощью (7.11) вытекает справедливость условия четности (1.9) (мнимая единица включена в формулы (7.11) с этой целью). Наконец, условие убывания (1.10) обеспечивается тем, что $f_j \in C^1(\mathbb{R})$, поскольку $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Применяя теорему 1.2, приходим к утверждению ($Y_n = 0 \forall n$) или ($Z_n = 0 \forall n$). В силу (7.11) отсюда следует, что ($\widehat{f}_{2,[n/p_2]} = 0 \forall n$) или ($\widehat{f}_{3,[n/q_2]} = 0 \forall n$). Поскольку здесь n произвольно, это утверждение усиливается до ($\widehat{f}_{2,n} = 0 \forall n$) или ($\widehat{f}_{3,n} = 0 \forall n$). Это противоречит предположению: для каждого $j = 1, 2, 3$ существует такое n_j , что $\widehat{f}_{j,n_j} \neq 0$.

Полученное противоречие показывает, что потенциал не может иметь трех спектральных прямых. Вместе с предложением 4.3 это означает, что потенциал имеет ровно одну спектральную прямую. Выберем независимые переменные так, чтобы эта прямая стала горизонтальной. Согласно предложению 4.1 $a_0 = a_2 = 0$ и $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ в (4.2), т. е. $V = f_1(x_1)$. Следовательно,

$$F = a_1y_1^2y_2 + a_3y_2^3 + b_0y_1 + b_1y_2, \quad H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1).$$

Поскольку H не зависит от x_2 , функция $G = y_2$ является линейным интегралом нашей динамической системы. Формулы (4.4), (4.5) упрощаются до следующих: $b_0 = \widehat{b}_{0,0}$, $b_1 = 2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}$. Если эти значения подставить в уравнение (3.3), то получим $\widehat{b}_{0,0}f_1'(x_1) = 0$. Отсюда следует $\widehat{b}_{0,0} = 0$, поскольку функция f_1 не постоянна. Таким образом,

$$F = a_1y_1^2y_2 + a_3y_2^3 + (2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0})y_2, \quad H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1), \quad G = y_2. \quad (7.16)$$

Теперь мы можем доказать справедливость утверждения (1.4) теоремы 1.1. Подставляя выражения (7.16) в (1.4), приходим к уравнению

$$a_1y_1^2 + a_3y_2^2 + 2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0} = C_1y_2^2 + C_2((y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1)) + C_3.$$

Это уравнение удовлетворяется постоянными $C_1 = a_3 - a_1$, $C_2 = 2a_1$, $C_3 = \widehat{b}_{1,0}$. Это завершает доказательство теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (7.11) условие убывания (1.10) выполняется, если

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|n|} (|\widehat{f}_{1,n}| + |\widehat{f}_{2,n}| + |\widehat{f}_{3,n}|) < \infty. \quad (7.17)$$

Это наводит на мысль, что условие $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ теоремы 1.1 может быть ослаблено. Достаточно потребовать, чтобы потенциал был Γ -периодическим распределением (обобщенной функцией), удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям регулярности. Все дифференциальные уравнения следует трактовать в смысле теории распределений. Видимо, самым трудным пунктом этого плана является поиск условия, гарантирующего существование распределений $b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1}$ и

$b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2}$, участвующих в (3.3); возможно, это условие придется формулировать в терминах волнового фронта распределения V . Модифицировав таким образом доказательство, надо на распределение V наложить условие, обеспечивающее выполнение (7.17). В настоящей статье эта возможность не реализована. Но в дальнейшем к этому плану можно вернуться, если появится необходимость такого обобщения.

Благодарность. Автор благодарен Михаилу Бялому за возможность ознакомиться с рукописью его работы, в которой доказательства изложены подробнее, чем в краткой заметке [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсу первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функцион. анализ. 1987. Т. 21, № 4. С. 64–65.
2. Денисова Н. В., Козлов В. В. Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 43–63.
3. Sharafutdinov V. A. Killing tensor fields of third rank on a two-dimensional Riemannian torus // J. Math. Research. 2022. V. 14, N 1. P. 1–29.
4. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. 1.
5. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
6. Козлов В. В. Дискретные симметрии уравнений динамики с полиномиальными интегралами высших степеней // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. Т. 87, № 5. С. 124–139.

Поступила в редакцию 3 июня 2026 г.

После доработки 11 августа 2026 г.

Принята к публикации 11 августа 2026 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович (ORCID 0000-0003-4269-5085)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

sharafut@list.ru

УДК 519.713.2+512.563

ВЫЧИСЛИМЫЕ ИЗОМОРФИЗМЫ ОТНОСИТЕЛЬНО РЕГУЛЯРНЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

И. Н. Шиманогов, М. Н. Вялый

Аннотация. Рассматривается класс булевых алгебр, образуемых пересечениями регулярных языков с заданным языком. В случае, когда такая алгебра изоморфна алгебре регулярных языков, доказывается существование изоморфизма, вычислимого с использованием оракулов для задачи регулярной реализуемости и бесконечной регулярной реализуемости. Данный результат дает существование вычислимого изоморфизма булевых алгебр регулярных языков над алфавитом из одной буквы и из двух букв. Также строится нижняя оценка сложности этой задачи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.519

Ключевые слова: задачи регулярной реализуемости, булевы алгебры, относительно регулярные алгебры, вычислительная сложность, регулярные языки.

1. Введение

Регулярные языки являются одним из ключевых объектов теории формальных языков. Важным классом алгоритмических задач является проверка существования в фиксированном языке слова, удовлетворяющего некоторому регулярному условию. Данные задачи называются задачами регулярной реализуемости и были введены М. Н. Вялым в [1]. Формальная постановка задачи следующая. Рассмотрим произвольный язык L , входом является регулярный язык R , заданный, например, некоторым автоматом. Необходимо проверить непустоту пересечения входа R и фиксированного языка L .

Задачи регулярной реализуемости для контекстно-свободных языков активно изучались под названием «задачи контекстно-свободной достижимости», см., например [2, 3]. В [4] изучаются приложения этой задачи к теории тонких сводимостей. Разрешимость задач регулярной реализуемости доказана для широкого круга графовых задач [5–7], а также для задач, связанных с целочисленным программированием [8].

В данной статье мы работаем со следующим алгебраическим обобщением задачи регулярной реализуемости. По любому языку L можно построить булеву алгебру, состоящую из всевозможных пересечений регулярных языков с L и операциями объединения, пересечения и дополнения до L . Данные булевы алгебры называются *относительно регулярными алгебрами*. Оказывается, что класс алгебр такого вида весьма широк: для любой счетной атомной булевой алгебры существует изоморфная ей относительно регулярная алгебра [9].

Исследование второго автора финансировалось в рамках госзадания FFNG-2024-0003.

При этом существует естественный гомоморфизм алгебры регулярных языков на относительно регулярную алгебру языка L : $\varphi(R) = R \cap L$. Таким образом, задача регулярной реализуемости является задачей проверки того, что данный элемент алгебры (регулярный язык) не лежит в ядре этого гомоморфизма.

Данная работа посвящена случаю, когда относительно регулярная алгебра изоморфна алгебре регулярных языков. Оказывается, что подобный случай охватывает относительно регулярные алгебры довольно широкого класса языков, в том числе и все те, которые порождаются контекстно-свободными языками. В работе показывается, что при условии разрешимости задач регулярной реализуемости и бесконечной регулярной реализуемости данный изоморфизм оказывается вычислимым.

Полученный результат применим к изоморфизму между булевыми алгебрами регулярных языков над алфавитом из одной и двух букв. Для этого случая дается нижняя оценка на вычислительную сложность.

2. Формальные языки

Напомним определения и сформулируем теоремы теории формальных языков, которые будут использоваться в данной работе. Далее будем называть *натуральными* числами целые неотрицательные числа и обозначать множество таких чисел символом $\mathbb{N}$. *Языком* будем называть множество слов в конечном алфавите. Так как свойства языков зависят только от размера алфавита, то, без ограничения общности и если не оговорено иное, считаем, что алфавит из n букв состоит из первых n натуральных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дан алфавит Σ мощности n . Назовем *отображением Парика* функцию $\Phi : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}^n$, которая сопоставляет каждому слову вектор, i -я компонента которого равна количеству вхождений i -й буквы в слово.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Линейным множеством* будем называть подмножество $\mathbb{N}^n$, состоящее из всех элементов вида $b + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$, где b и a_i — фиксированные векторы из $\mathbb{N}^n$, а α_i — произвольные натуральные числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Полулинейным множеством* будем называть конечное объединение линейных множеств и пустое множество.

Теорема 1 [10, теорема 10.35]. Пусть дан контекстно-свободный язык L . Тогда образ Парика $\Phi(L)$ полулинеен.

Лемма 1 [10, теорема 2.27]. Язык L в однобуквенном алфавите регулярен тогда и только тогда, когда $\Phi(L)$ полулинеен. При этом линейные множества в $\mathbb{N}$ — это в точности арифметические прогрессии.

Лемма 2 [10, задача 9.24]. Пересечение контекстно-свободного языка и регулярного языка — контекстно-свободный язык.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Функцией роста языка* $L \subseteq \Sigma^*$ называется

$$\gamma(n) = |L \cap \Sigma^n|.$$

Теорема 2 [11, доказательство теоремы 1.1]. Пусть L — контекстно-свободный язык с функцией роста γ . Тогда верно одно из двух:

- (1) существуют слова $w_1, \dots, w_n$, такие, что $L \subseteq w_1^* \dots w_n^*$;

(2) существуют такие бесконечная арифметическая прогрессия P и числа $r > 1$, n_0 , что $\gamma(n) \geq r^n$ для всех $n \in P$, $n \geq n_0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [11] сформулирован другой результат (теорема 1.1), который буквально неверен: в п. 2 утверждается, что $\gamma(n) \geq r^n$ для всех $n \geq n_0$. Доказательство теоремы 1.1 в [11] корректно для *кумулятивной функции роста* — количеству слов из языка, длины которых не превосходят n . Однако из этого доказательства следует и нужный нам факт — теорема 2. В [11] доказано, что если не выполняется п. 1 теоремы, то существуют такие слова x, y, u, v, w , для которых $|x| = |y|$ и все слова $W(x, y)wW^R(u, v)$ принадлежат L . Здесь $W(x, y)$ обозначает слово, которое получается из слова W в двухбуквенном алфавите подстановкой вместо первого символа x , а вместо второго — y ; W^R обозначает записанное в обратном порядке слово W ; а $W^R(u, v)$ обозначает слово, которое получается из W^R подстановкой вместо первого символа u , а вместо второго — v . Более того, для слов W одинаковой длины все слова вида $W(x, y)wW^R(u, v)$ попарно различны. Выбирая сбалансированные слова W длины $2k$ (с одинаковым количеством 0 и 1), получаем, что $\gamma(n) \geq \binom{2k}{k}$ для $n \in P = \{|w| + k(|x| + |y| + |u| + |v|) : k \in \mathbb{N}\}$, откуда и следует п. 2 теоремы 2.

Зачастую, например в [5–7, 12], при рассмотрении задач регулярной реализуемости входом считается описание некоторого НКА. Однако мы в дальнейшем будем считать, что на вход подается описание ДКА словом в двоичном алфавите. Точный вид такого описания неважен, требуется лишь, чтобы по описанию возможно было моделировать работу ДКА за полиномиальное время. Язык, распознаваемый автоматом A , будем обозначать через $\mathcal{L}(A)$, а описание автомата A — через $\langle A \rangle$. Далее будем считать, что все ДКА являются полными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем *задачей регулярной реализуемости* для языка L следующий язык:

$$\text{DRR}_L = \{\langle A \rangle \mid |L \cap \mathcal{L}(A)| \neq 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Назовем *задачей бесконечной регулярной реализуемости* для языка L следующий язык:

$$\text{DRR}_L^\infty = \{\langle A \rangle \mid |L \cap \mathcal{L}(A)| = \infty\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Зададим морфизм $i(0) = 1, i(1) = 0$. Рассмотрим следующую последовательность слов в алфавите $\{0, 1\}$: $T_1 = 0, T_{k+1} = T_k i(T_k)$. Заметим, что каждое следующее слово включает предыдущее как префикс. Последовательностью *Туэ — Морса* будем называть такое бесконечное слово T , что первые его 2^k символов равны слову T_k . Будем обозначать первые n символов последовательности Туэ — Морса через $T(n)$.

Лемма 3 [13, гл. 2.5]. Не существует такого непустого слова w , что www является подсловом последовательности Туэ — Морса.

Лемма 4 [13, гл. 2.5]. На i -м месте в последовательности Туэ — Морса стоит 1 тогда и только тогда, когда количество единиц в двоичном представлении числа i нечетно (будем считать, что нумерация индексов позиций начинается с 0). Отсюда следует, что $T(n)$ вычислимо на логарифмической по n памяти.

Далее используем стандартное определение вычислимости на памяти $s(n)$ и классов $\text{SPACE}(s(n))$ (см., например, [14, определение 4.1]). Через $\text{Logspace} =$

$\text{SPACE}(\log n)$ обозначаем класс языков, разрешимых на логарифмической памяти.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Сводимость языка M к языку L на логарифмической памяти — это m -сводимость, в которой сводящая функция вычислима на логарифмической памяти. Если M сводится к L на логарифмической памяти и L сводится к M на логарифмической памяти, то будем писать $M \equiv_l L$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 [14, гл. 3.4]. Будем говорить, что функция *принадлежит классу* $\text{DTime}(f(n))^L$, если она вычислима за время $O(f(n))$ на детерминированной машине Тьюринга с оракулом L .

3. Булевы алгебры

Перечислим основные факты и определения теории булевых алгебр, которые понадобятся в ходе доказательств.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Будем обозначать булеву алгебру регулярных языков над алфавитом из n букв через $\mathbf{REG}_n$. Если количество букв не играет роли, то нижний индекс будем опускать.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. Будем называть *относительно регулярной алгеброй* для языка L (и обозначать через $\mathbf{REG}_L$) булеву алгебру, образованную пересечениями регулярных языков с L . Операциями в ней являются объединение, пересечение и дополнение до L .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Будем говорить, что элемент булевой алгебры a *меньше или равен* чем b и обозначать это через $a \leq b$, если существует элемент c такой, что $b \wedge c = a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем называть ненулевой элемент a *атомом*, если верно следующее:

$$b \leq a \rightarrow (b = 0) \text{ или } (b = a).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Алгебру A будем называть *безатомной*, если в ней нет атомов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Алгебру A будем называть *атомной*, если для любого ненулевого $a \in A$ существует такой атом $b \in A$, что $b \leq a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16. Пусть A — булева алгебра. Множество $I \subset A$ называется *идеалом*, если I содержит 0, для каждого элемента i из I все меньшие i элементы также содержатся в I , а также I замкнуто относительно операции $\vee$. Идеал индуцирует отношение эквивалентности на булевой алгебре:

$$x \sim_I y \iff (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x) \in I.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Идеалом Фреше $F(A)$ булевой алгебры A называется идеал, состоящий из всех конечных дизъюнкций ее атомов (и нуля).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18. Будем обозначать фактор булевой алгебры A по идеалу I через A/I . Отдельно введем обозначение $A' = A/F(A)$.

Лемма 5 [15, предложение 1.5.2]. Пусть A и B — счетные атомные булевы алгебры. Если A' изоморфна B' , то A изоморфна B .

Заметим, что относительно регулярные алгебры всегда являются счетными и атомными. Будем обозначать через $[R]_L$ класс эквивалентности языка R в

факторе $\mathbf{REG}_L$ по идеалу Фреше. Если L ясно из контекста, то нижний индекс будем опускать. При этом

$$[R]_L = [K]_L \iff |(R \cap L) \Delta (K \cap L)| < \infty.$$

Более того, справедливы следующие утверждения.

Теорема 3 [9, теорема 3]. *Для любой счетной атомной алгебры существует изоморфная ей относительно регулярная алгебра.*

Лемма 6 [16, предложение 12]. $\mathbf{REG}'$ является безатомной алгеброй.

Лемма 7 [15, предложение 1.5.1]. *Любые две безатомные счетные алгебры изоморфны.*

Лемма 8 [15, гл. 1.4]. *Если булева алгебра конечна, то в ней 2^n элементов для некоторого $n \in \mathbb{N}$. При этом для каждого натурального n существует единственная с точностью до изоморфизма булева алгебра с 2^n элементами.*

Лемма 9 [15, гл. 1.4]. *Рассмотрим подалгебру булевой алгебры, порожденную n элементами. Тогда количество элементов в ней не превышает 2^{2^n} . При этом если эти элементы ненулевые и не пересекаются, а в объединении дают единицу, то они являются ее атомами и тогда количество элементов в ней равно 2^n . Любой элемент подалгебры, порожденной конечным количеством элементов, является конечным объединением атомов.*

4. Примеры относительно регулярных алгебр

Лемма 10. *Если L — бесконечный язык, то $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$ равносильно тому, что для любого регулярного языка R из $|R \cap L| = \infty$ следует существование такого регулярного языка K , что:*

- (1) $K \subset R$,
- (2) $|(R - K) \cap L| = \infty$,
- (3) $|K \cap L| = \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фактор $\mathbf{REG}$ по идеалу Фреше — это безатомная алгебра по лемме 6. В силу леммы 5 и леммы 7 $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$ равносильно тому, что $\mathbf{REG}'_L$ безатомная. Указанные в лемме условия проверяют, что для любого элемента в факторе по идеалу Фреше найдется меньший его ненулевой элемент. Действительно, рассмотрим произвольный регулярный R . Для того чтобы $[R]$ в $\mathbf{REG}'_L$ не оказался атомом, необходимо найти меньший его ненулевой элемент. Первое условие проверяет, что $[K]$ меньше или равен $[R]$, второе — что $[R] \neq [K]$, третье — что $[K] \neq [\emptyset]$.

Теорема 4. *Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — такой бесконечный язык, что для любого регулярного языка R из $|R \cap L| = \infty$ следует, что $\Phi(L \cap R)$ содержит бесконечное линейное множество. Тогда $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В доказательстве будем пользоваться леммой 10. Пусть $|R \cap L| = \infty$ для регулярного языка R . Тогда по условию теоремы $P \subseteq \Phi(L \cap R)$, где $P = b + \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i$ — бесконечное линейное множество. Хотя бы одна из координат хотя бы одного вектора a_i строго положительна. Пусть $a_j^s > 0$ (номера координат в верхнем индексе). Положим $W = \{w \mid \Phi(w)^s \equiv b^s \pmod{2a_j^s}\}$. Это

такие слова, у которых s -я координата вектора Парика совпадает с s -й координатой вектора $b + 2\alpha a_j$, $\alpha \in \mathbb{N}$. Обозначим $Q = R \cap W$. Этот язык регулярен как пересечение двух регулярных языков.

Заметим, что Q удовлетворяет всем трем условиям леммы 10:

- (1) $Q \subset R$;
- (2) $Q \cap L$ содержит бесконечное множество слов, векторы Парика которых имеют вид $b + 2\alpha a_j$, $\alpha \in \mathbb{N}$;
- (3) $(R - Q) \cap L$ содержит бесконечное множество слов, векторы Парика которых имеют вид $b + (2\alpha + 1)a_j$, $\alpha \in \mathbb{N}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия теоремы 4 выполняются, если $\Phi(L \cap R)$ полулинейное для любого регулярного языка R . В частности, из теорем 1, 4 и леммы 2 следует, что для любого бесконечного контекстно-свободного языка L выполняется $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$.

Лемма 11. Пусть $L = \{0^n 1^n 2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Язык L не является контекстно-свободным, но $L \in \mathbf{Logspace}$. При этом $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$. Для этого воспользуемся теоремой 4. Покажем, что язык $U = \{0^n \mid 0^n 1^n 2^n \in R\}$ является регулярным для любого регулярного R . Из этого следует, что $\Phi(L \cap R)$ полулинейно.

Итак, пусть язык R распознается ДКА $A = (Q, s, F, \delta)$. Построим НКА $\hat{A} = (\hat{Q}, \hat{s}, \hat{F}, \hat{\delta})$ для языка U :

- $\hat{Q} = \{\hat{s}\} + Q^5$;
- $\hat{F} = \{(q_1, q_1, q_2, q_2, f) \mid q_1, q_2 \in Q, f \in F\}$;
- $\hat{\delta}(\hat{s}, \varepsilon) = \{(s, q_1, q_1, q_2, q_2) \mid q_1, q_2 \in Q\}$;
- $\hat{\delta}((x, q_1, y, q_2, z), 0) = \{(\delta(x, 0), q_1, \delta(y, 1), q_2, \delta(z, 2))\}$;

$\hat{A}$ принимает слово 0^n тогда и только тогда, когда

$$\delta(s, 0^n) = q_1, \quad \delta(q_1, 1^n) = q_2, \quad \delta(q_2, 2^n) = q_f, \quad q_f \in F.$$

Это равносильно тому, что $0^n 1^n 2^n \in R$.

Лемма 12. Пусть $L = \{0^{n!} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Язык L не является контекстно-свободным, но $L \in \mathbf{Logspace}$. При этом $\mathbf{REG}_L \not\simeq \mathbf{REG}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что фактор $\mathbf{REG}_L$ по идеалу Фреше состоит из двух элементов. Рассмотрим произвольный бесконечный унарный регулярный язык R . Он является конечным объединением арифметических прогрессий. Рассмотрим конкретную прогрессию $P = \{kn + b \mid n \in \mathbb{N}\}$. Если $k = 0$, то она конечна. Если $b \equiv 0 \pmod{k}$, то P содержит все кратные k за исключением конечного множества. Поскольку $m! \equiv 0 \pmod{k}$ при $m \geq k$, то в данном случае P включает в себя все факториалы за исключением конечного множества. Если $b \not\equiv 0 \pmod{k}$, то все элементы P не равны нулю по модулю k . Значит, в P попадает конечное количество факториалов.

Мы получили, что либо $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\} \setminus P$ конечно, либо $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\} \cap P$ конечно. Значит, и для произвольного регулярного языка R в унарном алфавите это верно. Получаем, что фактор $\mathbf{REG}_L$ по идеалу Фреше состоит из двух элементов.

Теорема 5. Рассмотрим произвольный нетривиальный язык L в алфавите из двух букв, т. е. $L \neq \emptyset$ и $\bar{L} \neq \emptyset$. Тогда существует такой язык $\hat{L}$, что $\hat{L} \equiv_l L$, и при этом $\mathbf{REG}_{\hat{L}} \simeq \mathbf{REG}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующие обозначения:

- i — морфизм из определения 7 (т. е. $i(0) = 1, i(1) = 0$);
- $\psi(w) = wT(|w|)0^{|w|^2-2|w|}$ при $|w| > 2$, $\psi(w) = w$ при $|w| \leq 2$;
- $h(w) = \psi(w)i(\psi(w))$;
- Σ^n — множество всех двоичных слов длины n ;
- P^n — множество двоичных слов длины n , в которых одинаково количество нулей и единиц;
- B^n — пересечение P^n с объединением всех языков вида $w_1^*w_2^*\dots w_t^*$, где $\sum_{i=1}^t |w_i| \leq \log n$;
- $H^n = \{h(w) \mid |h(w)| = n\}$;
- $H_L^n = \{h(w) \mid w \notin L, |h(w)| = n\}$;
- $\hat{L}^n = P^n - (B^n \cup H_L^n)$;
- для каждого из введенных классов языков A^n обозначим $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A^n$;

и в другую сторону: для языка A обозначаем $A^n = \{w \in A \mid |w| = n\}$.

Заметим, что H^n и B^n вложены в P^n и, начиная с некоторого n , множества H^n и B^n не пересекаются. Действительно, предположим противное: $h(w) \in w_1^*w_2^*\dots w_t^*$, где $\sum_{i=1}^t |w_i| \leq \log n$. Заметим, что $h(w)$ содержит начало последовательности Туэ — Морса длины $|w| = \sqrt{n/2}$. Если пересечение под слова $T(|w|)$ с некоторым блоком w_i^* длиннее $3|w_i|$, то внутри последовательности Туэ — Морса возникает куб некоторого циклического сдвига слова w_i , что противоречит лемме 3. Отсюда получаем неравенство

$$\sqrt{n/2} \leq 3 \sum_{i=1}^t |w_i| \leq 3 \log n,$$

которое не выполняется при достаточно больших n .

Для начала докажем, что $\mathbf{REG}_{\hat{L}} \simeq \mathbf{REG}$. В доказательстве будем пользоваться теоремой 4. Так как $\hat{L}^n \subset P^n$, то $\Phi(\hat{L}) \subseteq \{\alpha \overrightarrow{(1,1)} \mid \alpha \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим некоторый регулярный R . Пусть $\tilde{R} = P \cap R$. Язык $\tilde{R}$ контекстно-свободный, поэтому по теореме 2 либо существуют такие слова $w_1, \dots, w_t$, что $\tilde{R} \subset w_1^* \dots w_t^*$, и тогда $\hat{L} \cap R$ конечно, так как $\tilde{R}^n \subset B^n$, начиная с некоторого n ; либо функция роста языка $\tilde{R}$ экспоненциальна на некоторой бесконечной арифметической прогрессии длин E , состоящей только из четных длин (исходя из определения, P^n непусто только для четных n). В последнем случае покажем, что $\hat{L}^n \cap \tilde{R}^n \neq \emptyset$ при достаточно больших $n \in E$. Отсюда следует, что

$$\Phi(\hat{L} \cap R) = \Phi(\hat{L} \cap \tilde{R}) \supseteq \{(n/2, n/2) \mid n \in E, n \geq n_0\}$$

и $\mathbf{REG}_{\hat{L}} \simeq \mathbf{REG}$ по теореме 4.

Оценим размеры описанных выше множеств при достаточно больших n . Всего слов в P^n столько, сколько есть способов разместить $\frac{n}{2}$ единиц в слове длины n , т. е. $\binom{n}{\frac{n}{2}} = 2^{n-o(n)}$. Языков вида $w_1^*w_2^*\dots w_t^*$, где $\sum_{i=1}^t |w_i| \leq \log n$, не больше, чем количество разбиений слов длины $\log n$ на непустые под слова, что не больше $2^{\log n} 2^{\log n} = n^2$. Количество слов каждого такого языка в B^n не больше $n^t \leq n^{\log n}$. Поэтому $|B^n| \leq n^2 2^{\log^2 n} = 2^{o(n)}$. В H^n слов не больше, чем

различных прообразов h , т. е. $2^{\sqrt{\frac{n}{2}}} = 2^{o(n)}$. Получаем, что в $P^n - \hat{L}^n \subseteq B^n \cup H^n$ количество слов равно $2^{o(n)}$. С другой стороны, для достаточно больших $n \in E$ количество слов длины n в языке $\tilde{R}$ не меньше $2^{\rho n}$, $\rho > 0$. Поэтому $\hat{L}^n \cap \tilde{R}^n \neq \emptyset$ при достаточно больших $n \in E$. Как объяснялось выше, отсюда следует применимость теоремы 4.

Теперь построим указанные сводимости. Введенная ранее функция h задает сводимость L к $\hat{L}$ на словах достаточно большой длины. Для остального (конечного) множества слов сводящую функцию определяем произвольно с соблюдением условия сводимости, это не влияет на оценку вычислительной сложности сводящей функции. Арифметические операции, как и последовательность Туэ — Морса (см. лемму 4), вычислимы на логарифмической памяти, поэтому h также вычислима на логарифмической памяти. Обратная сводимость устроена сложнее. Будем строить функцию f , сводящую $\hat{L}$ к L . Пусть $Y \in L$ и $N \notin L$ — два фиксированных слова. Определим $f(x)$ следующим образом.

- Если $x \notin P$ (что проверяется на логарифмической памяти), то $f(x) = N$.
- Если $x \in B$, то $f(x) = N$.

Принадлежность B равносильна тому, что $x \in B^{|x|}$. Будем последовательно проверять, имеет ли x вид $w_1^* \dots w_t^*$ для конкретных $w_1, \dots, w_t$. Как было указано раньше, количество различных наборов w_i для $B^{|x|}$ полиномиально по $|x|$. Тогда для хранения номера проверяемого в конкретный момент набора слов достаточно логарифмической по $|x|$ памяти. По конкретному набору слов можно построить НКА, проверяющий слово на принадлежность $w_1^* \dots w_t^*$ со следующими свойствами: количество состояний в нем линейно по суммарной длине слов w_i и количество переходов из каждого состояния не более двух. Таким образом, для хранения данного НКА достаточно логарифмической памяти. Принятие слова таким НКА проверяется следующим образом. Нужно хранить список состояний НКА, достижимых к данному шагу работы, и последовательно обновлять его при чтении входа. Хранить данный список можно в виде битовой маски: двоичного слова длины, равной количеству состояний, в котором 1 отмечает те состояния, которые достижимы из начального за k шагов. Обновление такого списка возможно на логарифмической памяти. Последовательно читая символы x , поддерживаем множество достижимых состояний НКА; после обработки всех символов проверяем, содержит ли это множество принимающее состояние.

Если $x \in H$, то $f(x)$ — это первые $\sqrt{\frac{n}{2}}$ символов x для достаточно длинных слов. На конечном множестве слов малой длины сводящая функция определяется произвольно с соблюдением условия сводимости.

Если $x \in P - B - H$, то $f(x) = Y$.

Следствие 1. Существует неразрешимый (и даже не арифметичный) язык L , для которого $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$.

5. Вычислимость изоморфизмов относительно регулярных алгебр

Будем считать, что каждый элемент $P \in \mathbf{REG}_L$ задается (не единственным образом) таким автоматом M , что $\mathcal{L}(M) \cap L = P$. Таким образом, для перечисления всех элементов алгебры можно просто перечислять все автоматы. Аналогичным образом задаются и факторы по идеалу Фреше для данных ал-

гебр: так как элементы данной алгебры — это классы эквивалентности языков, то каждый элемент Q задается таким автоматом M , что $\mathcal{L}(M) \cap L$ лежит в классе Q . Доказательства следующих фактов, по сути, являются конструктивизацией частных случаев критерия Вoota (см. [15]).

Теорема 6. Пусть $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$ и $\mathbf{DRR}_L^\infty$ разрешим. Тогда существует вычислимый изоморфизм f алгебр $\mathbf{REG}'_L$ и $\mathbf{REG}'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для начала зафиксируем такие перечисления (с повторениями) $A_1, A_2, \dots$ элементов $\mathbf{REG}'_L$ и $B_1, B_2, \dots$ элементов $\mathbf{REG}'$, в которых все ДКА перечисляются по возрастанию количества состояний в них.

Построение f проводится по индукции, так что каждый раз его область определения расширяется и является некоторой конечной подалгеброй. При этом должно выполняться условие: на шаге индукции под номером $2t + 1$ подалгебра включает в себя элемент A_t , а на шаге индукции под номером $2t + 2$ образ подалгебры включает в себя элемент B_t . Таким образом, получив автомат из n состояний на вход, необходимое количество шагов индукции не превышает количество автоматов, которые имеют не более n состояний.

После каждого шага построенный изоморфизм f_t хранится следующим образом: атомы подалгебры в $\mathbf{REG}'_L$ и значения f_t на них.

База индукции: для начала фиксируем $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(L) = \Sigma^*$.

Нечетный шаг индукции ($2t + 1$): пусть мы уже имеем некоторую конечную подалгебру в $\mathbf{REG}'_L$ и знаем набор ее атомов $a_1, \dots, a_l$, которые задаются автоматами $M_1, \dots, M_l$. Построим элементы $\hat{a}_{2i} = a_i \cap A_t$, $\hat{a}_{2i+1} = a_i \cap \overline{A_t}$. Это кандидаты в атомы расширенной подалгебры. Такое построение вычислимо, так как по двум автоматам P_1 и P_2 можно алгоритмически построить автомат P_3 , такой, что $\mathcal{L}(P_3) = \mathcal{L}(P_1) \cap \mathcal{L}(P_2)$.

Заметим, что получившиеся элементы попарно не пересекаются, за исключением двух следующих случаев.

1. Некоторые из них могут задавать тот же элемент в алгебре, что и пустое множество, для них образ уже определен. Это эквивалентно конечности пересечения с L , что можно проверить с помощью оракула бесконечной регулярной реализуемости.

2. Некоторые из них могут задавать тот же элемент, что и исходный a_i , для них образ также уже определен. Равносильно, симметрическая разность получившегося элемента и a_i имеет конечное пересечение с L , что также можно проверить с помощью оракула бесконечной регулярной реализуемости.

Для остальных элементов найдем такой $\hat{b}_{2i}$, что $0 < \hat{b}_{2i} < f_t(a_i)$, и доопределим $\hat{b}_{2i+1} = f_t(a_i) - \hat{b}_{2i}$. Укажем конкретную процедуру поиска такого элемента. Так как оба фактора безатомные, то искомым элемент всегда существует. Для его построения в образе $f_t(a_i)$ найдем такой бесконечный регулярный подязык, что его дополнение до $f_t(a_i)$ тоже бесконечно. Для этого можно, например, найти, какие прогрессии образуют длины слов в $f_t(a_i)$ и взять пересечение $f_t(a_i)$ с языком слов, длины которых принадлежат собственной бесконечной подпрогрессии. После этого мы задаем образы так: $f(\hat{a}_i) = \hat{b}_i$. Шаг индукции завершен.

Четный шаг индукции ($2t + 2$): в этот раз построим элементы $\hat{b}_{2i} = b_i \cap B_t$, $\hat{b}_{2i+1} = b_i \cap \overline{B_t}$, аналогично проверив на совпадение нового элемента с исходным или с нулем алгебры. В данном случае для этого достаточно проверить,

что автоматы, представляющие $\widehat{b}_{2i}$ и $b_i - \widehat{b}_{2i}$, задают бесконечные языки. Если совпадения нет, ищем такой $\widehat{a}_{2i}$, что $0 < \widehat{a}_{2i} < f_t^{-1}(b_i) = a_i$, и доопределяем $\widehat{a}_{2i+1} = f_t^{-1}(b_i) - \widehat{a}_{2i}$. Построение такого набора вычислимо. Действительно, пусть элемент a_i имеет автомат-представителя M_i . Подходящий элемент точно существует, так как $\mathbf{REG}'_L$ безатомная. Поэтому его можно найти, перебирая все автоматы и проверяя для каждого автомата P следующие условия: $\mathcal{L}(P) \cap \mathcal{L}(M_i) \cap L$ бесконечен и $\overline{\mathcal{L}(P)} \cap \mathcal{L}(M_i) \cap L$ бесконечен. Это возможно с использованием оракула бесконечной регулярной реализуемости. После этого полагаем $f(\widehat{a}_{2i}) = \widehat{b}_{2i}$, $f(\widehat{a}_{2i+1}) = \widehat{b}_{2i+1}$.

Так как графики функций f_t — расширяющиеся множества, и за два шага индукции туда попадает в прообраз очередной A_t , а в образ B_t , то объединение f_t и даст искомый изоморфизм.

Отметим, что так как на четных шагах определяется прообраз очередного элемента из $\mathbf{REG}'$, то обратное отображение также вычислимо.

Теорема 7. Пусть $\mathbf{REG}_L \simeq \mathbf{REG}$ для некоторого языка $L \subset \Sigma^*$, а $\mathbf{DRR}_L$ и $\mathbf{DRR}_L^\infty$ разрешимы. Тогда существует вычислимый изоморфизм $f : \mathbf{REG}_L \rightarrow \mathbf{REG}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Общая идея данного доказательства совпадает с доказательством теоремы 6. При построении изоморфизма f будем считать, что по теореме 6 уже построен изоморфизм g факторов по идеалам Фреше. Изоморфизм f поднимает изоморфизм g на алгебру, т. е. $[f(x)] = g([x])$.

Определим функцию $\mathbf{DRR}_L^C(R)$ на регулярных языках как $|L \cap R|$, если пересечение $L \cap R$ конечно, и как ∞ , если пересечение бесконечно. Эта функция вычислима с оракулами $\mathbf{DRR}_L$ и $\mathbf{DRR}_L^\infty$. Для начала вычислим $\mathbf{DRR}_L^\infty(R)$, если $L \cap R$ бесконечно, то $\mathbf{DRR}_L^C(R) = \infty$. Затем вычислим $\mathbf{DRR}_L(R)$, если $L \cap R = \emptyset$, то $\mathbf{DRR}_L^C(R) = 0$. Иначе $0 < \mathbf{DRR}_L^C(R) < \infty$. Будем проверять все слова по порядку, постепенно строя пересечение L с R . Для проверки $w \in L \cap R$ проверяем $w \in R$ обычным алгоритмом проверки принадлежности слова регулярному языку и проверяем $w \in L$ вызовом оракула $\mathbf{DRR}_L(\{w\})$. После обнаружения очередного слова из $L \cap R$ проверяем совпадение $L \cap R$ и (конечного) языка W уже найденных слов из $R \cap L$. Для этого вычисляем $\mathbf{DRR}_L(R - W)$. Если $L \cap (R - W) = \emptyset$, то $W = R \cap L$ и $\mathbf{DRR}_L^C(R) = |W|$.

Зафиксируем такие перечисления $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ элементов $\mathbf{REG}_L$ и $B_1, B_2, B_3, B_4, \dots$ элементов $\mathbf{REG}$, в которых все ДКА перечисляются по возрастанию количества состояний в них.

Построение функции f будет происходить по индукции, аналогичной индукции в теореме 6.

Опишем нечетный шаг индукции. Пусть уже построена конечная подалгебра в $\mathbf{REG}_L$ и известен набор ее атомов $a_1, \dots, a_n$. При этом должны быть выполнены условия (инварианты цикла) $\mathbf{DRR}_L^C(a_i) = \mathbf{DRR}_\Sigma^C(b_i)$, где $b_i = f(a_i)$, и $[b_i] = [g(a_i)]$ в $\mathbf{REG}'$. Заметим, что для базы индукции ($f(\emptyset) = \emptyset, f(\Sigma^*) = \Sigma^*$) эти условия выполняются. Построим элементы $\widehat{a}_{2i} = a_i \cap A_t, \widehat{a}_{2i+1} = a_i \cap \overline{A_t}$. Это кандидаты в атомы расширенной подалгебры. Так как мы считаем, что оба элемента задаются автоматами, то такое построение вычислимо.

Заметим, что получившиеся элементы попарно не пересекаются, за исключением двух следующих случаев.

1. Некоторые из них могут задавать тот же элемент в алгебре, что и пустое

множество, для них образ уже определен. Это эквивалентно пустоте пересечения с L , что возможно проверить с помощью оракула регулярной реализуемости.

2. Некоторые из них могут задавать тот же элемент, что и исходный a_i , для них образ тоже уже определен. Равносильно, симметрическая разность получившегося элемента и a_i не пересекается с L , что возможно проверить с помощью оракула регулярной реализуемости.

Для остальных i укажем конкретную процедуру поиска $\hat{b}_{2i}$. Для начала вычислим $g(\hat{a}_{2i})$, $\text{DRR}_L^C(\hat{a}_{2i})$ и $\text{DRR}_L^C(a_i - \hat{a}_{2i})$. Рассмотрим несколько случаев:

1) $\text{DRR}_L^C(\hat{a}_{2i}) = m < \infty$, тогда в качестве $\hat{b}_{2i}$ выберем дизъюнкцию m атомов, лежащих под $f(a_i)$, что возможно в силу инварианта цикла, выполняющегося на предыдущем шаге;

2) $\text{DRR}_L^C(a_i - \hat{a}_{2i}) = m < \infty$, тогда в качестве $\hat{b}_{2i}$ выберем дополнение в $f(a_i)$ к дизъюнкции m атомов, лежащих под $f(a_i)$, что возможно в силу инварианта цикла, выполняющегося на предыдущем шаге;

3) иначе в качестве $\hat{b}_{2i}$ выберем $g(\hat{a}_{2i}) \wedge f(a_i)$.

В каждом случае инварианты цикла сохраняются. В частности, в третьем случае это следует из равенств

$$[\hat{b}_{2i}] = [g(\hat{a}_{2i}) \wedge f(a_i)] = g(\hat{a}_{2i}) \wedge g(a_i) = g(\hat{a}_{2i} \wedge a_i) = g(\hat{a}_{2i}).$$

В первых двух случаях сохранение инварианта прямо следует из правила выбора $\hat{b}_{2i}$.

Опишем, как можно вычислимо выбрать соответствующие подмножества атомов. Пусть $\hat{a}_{2i}$ имеет конечное пересечение с L . Надо выбрать m различных слов в языке (детерминированного) автомата M_i , задающего $b_i = f(a_i)$. Для этого достаточно построить (например, обходом в ширину) m различных путей из стартового состояния в финальное в графе этого автомата. Таким путям соответствуют слова из $\mathcal{L}(M_i)$.

После выбора $\hat{b}_{2i}$ полагаем $\hat{b}_{2i+1} = f(a_i) - \hat{b}_{2i} = b_i - \hat{b}_{2i}$.

На четном шаге индукции процедура аналогична, отдельно подчеркнем вычислимость построения. Необходимо найти m слов в пересечении некоторого регулярного языка и L . Это, конечно, вычислимо с оракулом DRR_L : достаточно перебирать слова из регулярного языка и проверять вхождение в L вызовом оракула $\text{DRR}_L(\{w\})$.

Отдельный интерес представляет исследование изоморфизмов между булевыми алгебрами регулярных языков над алфавитами разной мощности. Как можно заметить, предыдущие результаты доказывают существование вычислимого изоморфизма между алгебрами регулярных языков в алфавитах из двух букв и из одной буквы. Теперь дадим нижнюю оценку на сложность данного изоморфизма.

Теорема 8. *Любой вычислимый изоморфизм из REG_2 в REG_1 имеет сложность $\Omega(2^{\frac{n}{2}})$, где n — количество состояний автомата, поданного на вход.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слова из двух букв длины $m \geq 2$ в алфавите $\{0, 1\}$. Всего таких слов 2^m . По каждому слову w построим следующий автомат A_w :

- $Q = \{q_s\} \cup \{x \in \mathbb{N} \mid x < m\} \cup \{T\}$;

- $q_s \notin \{0, \dots, m-1, R\}$;
- $F = \{0\}$;
- $\delta(q_s, w_0) = 1$;
- $\delta(x, a) = x + 1 \bmod m$ если $w[x] = a$;
- $\delta(T, 0) = \delta(T, 1) = T$;
- все остальные переходы ведут в состояние T .

Легко видеть, что $\mathcal{L}(A_w) = w^+ = ww^*$. Заметим, что языки таких автоматов не пересекаются. Действительно, пусть $v, w \in \{0, 1\}^m$ и $u \in v^+ \cap w^+$. Тогда $u = v^k = w^k$, $k > 0$, а значит, $v = w$. Породим языками данных автоматов и дополнением к объединению всех таких языков подалгебру C в $\mathbf{REG}_2$. По лемме 9 в ней $2^m + 1$ атомов и 2^{2^m+1} элементов. При этом все атомы кроме одного задаются автоматами с $m + 2$ состояниями.

Теперь оценим количество непересекающихся унарных регулярных языков, задаваемых автоматами с не более чем n состояниями. Их не больше, чем непересекающихся арифметических прогрессий с разностью, не превосходящей n , а таких не более чем $O(n^2)$.

Любой изоморфизм должен переводить подалгебру в подалгебру, а атомы подалгебры — в атомы ее образа. Рассмотрим атомы образа C , отвечающие языкам $\mathcal{L}(A_w)$. Их 2^m штук, они не пересекаются, но тогда количество состояний, которыми задается хотя бы один из них $\Omega(2^{\frac{n}{2}})$, где $n = m + 2$ — количество состояний автомата A_w . Заметим, что время работы алгоритма вычисления изоморфизма не меньше длины выдаваемого описания автомата, а длина стандартного описания автомата оценивается снизу числом его состояний. Отсюда получаем нижнюю оценку на время работы алгоритма вычисления изоморфизма, указанную в теореме.

Благодарности. Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и предложения, существенно улучшившие содержание работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vyalyi M. On models of a nondeterministic computation // Lecture Notes in Computer Science. 2009. V. 5675. P. 334–345.
2. Bouajjani A., Esparza J., Maler O. Reachability analysis of pushdown automata: Application to model-checking // Lecture Notes in Computer Science. 1997. V. 1243. P. 135–150.
3. Chistikov D., Majumdar R., Schepper P. Subcubic certificates for CFL reachability // Proc. ACM Program. Lang. 2022. V. 6. Article 41. 29 pp.
4. Koutris P., Deep S. The fine-grained complexity of CFL reachability // Proc. ACM Program. Lang. 2023. V. 7. Article 59. 27 pp.
5. Wolf P. From decidability to undecidability by considering regular sets of instances // Theoretical Computer Sci. 2022. V. 899. P. 25–38.
6. Wolf P., Fernau H. Regular Intersection emptiness of graph problems: Finding a needle in a haystack of graphs with the help of automata // 2020. V. 29. <https://arxiv.org/abs/2003.05826>.
7. Diekert V., Fernau H., Wolf P. Properties of graphs specified by a regular language // Acta Informatica. 2022. V. 59. P. 357–385.
8. Wolf P. On the decidability of finding a positive ILP-instance in a regular set of ILP-instances // Acta Informatica. 2022. V. 59. P. 505–519.
9. Шиманогов И. Н., Вялый М. Н. Классификация относительно регулярных алгебр // Тр. МФТИ. 2024. Т. 16, № 4. С. 128–134.
10. Голубенко Д. А., Саватеев Ю. В. Языки, автоматы и грамматики. М.: МЦНМО, 2023.
11. Bridson M. R., Gilman R. H. Context-free languages of sub-exponential growth // J. Computer System Sci. 2002. V. 64, N 2. P. 308–310.
12. Anderson T., Loftus J., Rampersad N., Santean N., Shallit J. Detecting palindromes, patterns and borders in regular languages // Information and Computation. 2009. V. 207. P. 1096–1118.

13. Shallit J. A second course in formal languages and automata theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2008.
14. Arora S., Barak B. Computational complexity: A modern approach. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2009.
15. Гончаров С. С. Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
16. Selivanov V., Kononov A. Boolean algebras of regular languages // Developments in language theory. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. P. 386–396. (Lecture Notes in Computer Sci.; V. 6795)

Поступила в редакцию 10 декабря 2025 г.

После доработки 18 июня 2026 г.

Принята к публикации 24 июня 2026 г.

Шиманогов Игорь Николаевич (ORCID 0009-0003-9450-7119)

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
ул. Керченская, 1А, корп. 1, Москва 117303
shimanogov.in@phystech.edu

Вялый Михаил Николаевич (ORCID 0000-0001-9822-1060)

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
ул. Керченская, 1А, корп. 1, Москва 117303;
Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» Российской академии наук,
ул. Вавилова, 44, корп. 2, Москва 119333;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
Покровский б-р., 11, Москва 109028
vyalyi@gmail.com

Валерий Владимирович Обуховский

(27.04.1947–02.02.2026)

Валерий Владимирович Обуховский родился 27 апреля 1947 г. в Риге, Латвия. В 1950 г. вместе с родителями переехал в Воронеж. Его отец, Владимир Семенович, был инженером-строителем. Он внес немалый вклад в восстановление разрушенного войной города. В 1962 г. В. В. Обуховский поступил в математический класс первого набора средней школы № 58, которую окончил в 1965 г. с серебряной медалью. Огромное влияние на Валерия Владимировича оказало то обстоятельство, что он (как и Ю. И. Сапронов, М. И. Каменский, В. И. Овчинников, В. П. Орлов, Н. А. Бобылев, А. В. Покровский и многие другие) был учеником легендарного «Дабриса» — выдающегося педагога Давида Борисовича Сморгонского, воспитавшего целые поколения воронежских математиков.

В том же 1965 г. В. В. Обуховский поступил на математико-механический факультет Воронежского госуниверситета. К учебе в ВГУ он всегда относился с большим интересом, хотя многое из того, что изучали на первых курсах, было ему уже известно из школы.

Первое соприкосновение со студенческой научной работой у Валерия Владимировича произошло уже на первом курсе, когда он с небольшой группой студентов под руководством Бориса Николаевича Садовского принялся изучать математическую логику по книге С. К. Клини «Введение в метаматематику». Однако вскоре его интересы сместились в несколько иную сторону.

Молодой, талантливый и очень энергичный профессор математического факультета ВГУ Юрий Григорьевич Борисович как раз в это время начал собирать студентов-энтузиастов для изучения современной, очень интересной и интенсивно развивающейся отрасли математики — топологии. Вот к этой группе и примкнул студент второго курса Обуховский. Одна из задач, поставленных Юрием Григорьевичем участникам семинара по топологии, касалась размерности множеств рациональных векторов в некоторых пространствах последовательностей. Она была успешно решена небольшим студенческим коллективом, в который входили, помимо В. В. Обуховского, Б. Д. Гельман и Ю. И. Сапронов, и эти результаты были опубликованы в 1967 г. (см. [1]).

Вскоре профессор Борисович обратил внимание участников семинара на работу американского математика И. Гликсберга, в которой было дано обобщение классической теоремы А. Н. Тихонова о неподвижной точке отображений в локально выпуклых пространствах на случай многозначных отображений, т. е. соответствий, сопоставляющих каждой точке некоторое множество. Задача была сформулирована следующим образом: нельзя ли определить для таких отображений вращение векторного поля — топологическую характеристику, основательно изучавшуюся (и по сей день используемую) в Воронежской математической школе. За эту задачу активно взялись, помимо Валерия Владимировича, Б. Д. Гельман и Э. М. Мухамадиев. Валерий Владимирович всегда с удовольствием вспоминал те бесконечные вечерние пешие круги вдоль Театральной и Алексеевской вокруг квартиры Ю. Г. Борисовича, когда в долгих дискуссиях с Юрием Григорьевичем обосновывалось это понятие. Задача была успешно решена и результатом этой деятельности явились новые публикации (см. [2, 3]). Надо сказать, что эта работа не сразу получила повсеместное признание в Воронеже, раздавались и голоса скептиков по поводу возможных

приложений разработанной теории. Это теперь, когда многозначный анализ распространил свое влияние очень широко и является одной из наиболее активно развиваемых областей современной математики во многих странах, легко указать на его естественные приложения к оптимальным стратегиям в теории игр, к равновесным ценам в математической экономике, к оптимизации негладких функций (даже целая наука появилась — негладкий анализ), к нахождению оптимальных траекторий управляемых систем, к дифференциальным уравнениям с разрывной правой частью да и ко многому другому. А тогда ...

Тогда пришлось отправиться в библиотеки, изучать литературу, читать реферативные журналы, сопоставлять полученные результаты с работами других ученых, определять направления дальнейшей деятельности.

В 1970 г. В. В. Обуховский окончил математический факультет Воронежского государственного университета и начал работу ассистентом кафедры алгебры и топологических методов анализа ВГУ, одновременно обучаясь в заочной аспирантуре под руководством профессора Ю. Г. Борисовича. Работа преподавателем сразу пришлась ему по душе (первые педагогические опыты относились, впрочем, еще к пятому курсу). «За такое удовольствие еще и деньги платят», — удивлялся Валерий Владимирович. В круг обязанностей молодого ассистента, помимо занятий по линейной алгебре, спецкурсов и работы с дипломниками, входило и чтение лекций по высшей математике биологам. Последние так досаждали своими вопросами о том, зачем им нужна математика, что пришлось действительно разобраться в этом вопросе, результатом чего явилось выпущенное впоследствии совместно с А. И. Фурменко пособие — «Введение в математические методы в биологии» (см. [4]).

В те годы в Воронеже, начиная с пионерских работ Б. Н. Садовского, интенсивно исследовались отображения нового типа — уплотняющие операторы и их приложения к различным задачам теории дифференциальных уравнений. В русле этого направления лежала и новая работа В. В. Обуховского, в которой было введено вращение уплотняющих многозначных векторных полей (см. [5]).

Во время обучения в аспирантуре В. В. Обуховский работает над применением операторных методов к эквивариантным многозначным отображениям, к задачам математической экономики, к точкам покоя обобщенных динамических систем. Изучая литературу в библиотеке им. В. И. Ленина в Москве, он обращает внимание на то, сколь интенсивно цитируется и используется в целом ряде работ некая загадочная лемма А. Ф. Филиппова. Знакомство с этим замечательным утверждением открыло связь между дифференциальными включениями (уравнениями с многозначной правой частью) и управляемыми системами с обратной связью. Результатом этого явилась статья по периодическим режимам в управляемых системах и дифференциальных включениях (см. [6]), а в дальнейшем — и многочисленные работы по математической теории управления.

В апреле 1975 г. В. В. Обуховский успешно защитил в Воронежском государственном университете кандидатскую диссертацию на тему «Уравнения с многозначными операторами и некоторые их приложения».

Незадолго до этого, обратив внимание на интенсивную деятельность в Воронеже по исследованию многозначных отображений, к Ю. Г. Борисовичу, Б. Д. Гельману и В. В. Обуховскому обращается известный математик Анатолий Дмитриевич Мышкис с предложением написать книгу по теории многозначных отображений и дифференциальных включений.

Профессор А. Д. Мышкис с давних пор являлся одним из пионеров и энтузиастов этого направления. Его предложение было очень живо воспринято, и вскоре работа закипела. Основная идея заключалась в том, чтобы сделать введение в начавшую интенсивно развиваться область «для инженеров», т. е. для лиц с не слишком основательной математической подготовкой и в то же время ориентированных на приложения. Книга и ее варианты обсуждались даже в таких экзотических местах, как домик Ю. Г. Борисовича в университетском лагере на Веневитиновском кордоне. Рукопись книги через некоторое время была готова, однако ее издание затянулось по независящим от авторов причинам. Лишь в 1986 г. книгу удалось выпустить в Издательстве Воронежского государственного университета (см. [7]). Почти через 20 лет В. В. Обуховский и Б. Д. Гельман подготовили ее новое, существенно расширенное, дополненное и «осовремененное» издание, вышедшее в 2005 г. в издательстве URSS, Москва; в 2011 г. увидело свет ее 2-е издание, в 2016 г. — и 3-е издание, а в 2020 г. вышла ее англоязычная версия в издательстве World Scientific (см. [8]).

К концу семидесятых годов объем полученных в Воронеже результатов по теории многозначных отображений достиг такого уровня, что решено было написать для журнала «Успехи математических наук» обзорную статью, посвященную теории топологических инвариантов и неподвижным точкам многозначных отображений. Такой обзор, немалую часть которого составили полученные В. В. Обуховским результаты, появился в 1980 г. (см. [9]). Эта работа, переведенная вскоре на английский язык, была достаточно высоко оценена специалистами, ссылки на нее весьма часты и по сей день.

Однако размер, хотя и довольно значительный, обзорной статьи в журнале не мог вместить всей информации по теории многозначных отображений, имевшейся к тому времени у авторов. Много лет сведения о работах, в которых в той или иной степени изучались или применялись многозначные отображения, собирались А. Д. Мышкисом. Аналогичную информацию накапливал и Валерий Владимирович, который с середины семидесятых годов становится активным референтом РЖ «Математика», а также “Mathematical Reviews” и “Zentralblatt für Mathematik”. Поэтому было охотно принято предложение Всесоюзного Института научной и технической информации (ВИНИТИ) о подготовке подробного обзора по многозначным отображениям и их приложениям для известной серии «Итоги науки и техники». Получив в свое распоряжение библиографию от А. Д. Мышкиса, В. В. Обуховский решил проверить ее и дополнить, изучив с этой целью с самого начала буквально все (!) тома РЖ «Математика» и “Mathematical Reviews”, имевшиеся в библиотеке Воронежского университета. Несколько раз приходилось выезжать и в библиотеки Москвы в поисках других источников. Это была огромная работа, растянувшаяся на много месяцев. Разделы теории многозначных отображений, которые при этом охватывались, были весьма обширны: это и общая теория, включая свойства непрерывности и операций над отображениями, теория сечений и аппроксимаций, измеримые многозначные отображения и многозначный интеграл, теория топологической степени и других инвариантов, неподвижные точки, теория дифференциальных включений и, конечно же, многочисленные приложения. Для каждой вновь найденной работы заполнялась специальная карточка, в которую, помимо библиографического описания, включались также основные сведения о содержании и проводилась классификация. Ныне, когда доступна хорошая база данных и достаточно ввести в поисковик несколько ключевых слов, такую информацию

можно собрать за несколько минут, очень трудно представить себе, сколько надо было затратить усилий, чтобы собрать «вручную» сведения о 1254 работах, включенных в библиографию обзора.

Работа над обзором оказалась не только трудной, но и очень увлекательной, поэтому, когда авторы представили свою рукопись в редакцию, оказалось, что они далеко вышли за отведенные им лимиты. Пришлось из уже готовой рукописи изымать целую большую главу, посвященную приложениям.

Сделанная работа понравилась и заказчику, и широким кругам математиков, проявлявшим в те годы всё больший интерес к этой интенсивно развивающейся области математики. Поэтому в течение последовавшего десятилетия предложения о написании обзорных работ поступали от ВИНТИ неоднократно. В результате появилась еще целая серия обзоров, в которые вошли, конечно, и новые результаты В. В. Обуховского (см. [10–12]). Отметим, что в немалой степени благодаря стараниям Валерия Владимировича охват литературы в новых обзорах отличался прежней тщательностью (например, библиография одного из них содержит 1232 наименования).

С 1980 г. В. В. Обуховский переходит в Воронежский государственный педагогический институт, где работает сначала старшим преподавателем, а затем доцентом кафедры алгебры и геометрии. Здесь он читает лекции по многим дисциплинам, в том числе геометрию, алгебру, теорию чисел, теорию вероятностей, математическую логику (пригодилось давнишнее увлечение) и даже историю математики. С большой теплотой Валерий Владимирович вспоминает коллектив кафедры, включая заведующую Н. Ф. Неклюдову, и руководство института, которые с пониманием относились к его научной работе и всячески ее поддерживали.

Тем временем в сфере научных интересов В. В. Обуховского с конца восьмидесятых годов входит исследование полулинейных дифференциальных включений в банаховых пространствах. Внимание многих ученых к этому классу объектов связано с тем обстоятельством, что включения такого типа представляют удобную естественную модель для изучения управляемых процессов в системах, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Хорошо известно, что для дифференциальных уравнений в бесконечномерных банаховых пространствах одного лишь условия непрерывности правой части недостаточно для существования решений — нужны некоторые дополнительные условия, среди которых выделяется условие типа Садовского—Амброзетти, выраженное в терминах меры некомпактности Хаусдорфа. В применении к полулинейным дифференциальным включениям это условие приводит к тому, что многозначный интегральный оператор, неподвижные точки которого дают решения задачи Коши, оказывается уплотняющим относительно специальной меры некомпактности в банаховом пространстве непрерывных функций. Теория топологической степени уплотняющих многозначных отображений, разработанная В. В. Обуховским еще в первой половине семидесятых годов, наконец нашла важные и интересные приложения!

В очередной работе В. В. Обуховский показал, что условие Садовского — Амброзетти в случае управляемых систем выполнено при очень естественных условиях типа липшицевости правой части по фазовым переменным и компактности по управляющим параметрам. Там же была доказана теорема существования решения и описаны свойства решений. Попытка перенести эти методы на случай интегральных многозначных операторов, «отыскивающих»

периодические решения дифференциальных включений, сначала не удавалась, поскольку все наиболее известные типы интегральных операторов такого рода заведомо оказывались не уплотняющими. Работая над этой проблемой совместно с М. И. Каменским, они все же сумели отыскать в одной из старых статей Ю. Г. Борисовича интегральный оператор, который показался подходящим для указанной цели. Проверка подтвердила предположения, и периодическая задача для полулинейных дифференциальных включений параболического типа была исследована в новых работах В. В. Обуховского и М. И. Каменского.

Деятельность В. В. Обуховского в данном направлении получила поддержку со стороны профессоров М. А. Красносельского, Н. А. Бобылева, В. Б. Колмановского, академика Н. Н. Красовского и других ученых. Валерий Владимирович вспоминает, как ему пришлось рассказывать о своих результатах Марку Александровичу Красносельскому на кухне его квартиры в Москве, а Владимиру Борисовичу Колмановскому — во время долгих прогулок по улицам Флоренции, как после двухчасового доклада на семинаре Николая Николаевича Красовского в Екатеринбурге пришлось еще ехать домой к прикованному к инвалидному креслу А. И. Субботину и повторять всё заново . . .

Естественным завершением этого периода деятельности явилась успешная защита В. В. Обуховским докторской диссертации «Топологические методы в теории нелинейных управляемых систем» в Институте проблем управления РАН 14 октября 1993 г. в Москве. Помимо официальных оппонентов — В. И. Благодатских, В. Б. Колмановского, Н. А. Бобылева, на защите выступили М. А. Красносельский, А. Д. Мышкис, Ю. Г. Борисович, поддержавшие работу В. В. Обуховского. Мало кто еще, помимо Валерия Владимировича, может похвастать тем, что защищал диссертацию в условиях почти что военного положения и комендантского часа — защита происходила буквально спустя несколько дней после известных событий противостояния правительства и Верховного Совета. Еще одной характерной приметой того времени явилось следующее обстоятельство: диссертация была утверждена очень быстро, но Валерий Владимирович узнал об этом лишь в апреле следующего года, уже находясь в США. Оказалось, что за несколько недель, прошедших от защиты до утверждения диссертации, стоимость почтовых марок, наклеенных на оставленные в ВАКе открытки, возросла втрое в результате галопирующей инфляции, и прижимистые ваковские чиновники не стали отправлять сообщение.

В том же 1993 г. В. В. Обуховский предложил на конкурс программы «Фулбрайт» проект цикла лекций и исследовательской работы в США. Отбор был достаточно жесткий: победителей, одним из которых стал Валерий Владимирович, было всего 12 в Российской Федерации по всем областям знаний. С января по май 1994 г. В. В. Обуховский работает в Университете Рутгерс (штат Нью-Джерси, США), читая лекции и сотрудничая с такими учеными, как Р. Нуссбаум, В. Петришин, Г. Суссман, К. Куперберг. Очень интересной была поездка в г. Аубурн, штат Алабама, где В. В. Обуховский выступил на международной конференции по топологии и динамическим системам.

Еще ранее, в 1989–1990 гг. доклады В. В. Обуховского на международных конференциях в Русе (Болгария) и Бахотеке (Польша) привлекают внимание итальянских математиков П. Дзекка и П. Нистри, работавших в близких направлениях. За этим последовало приглашение посетить университет Флоренции, куда Валерий Владимирович впервые приехал в октябре 1991 г. Так началось многолетнее плодотворное сотрудничество В. В. Обуховского с ита-

льянскими математиками из Флоренции, Перуджи и Модены в области применения топологических методов в нелинейных задачах теории дифференциальных включений и управляемых систем. Валерий Владимирович работал во Флорентийском университете в качестве приглашенного профессора почти 30 лет.

Итоги этой работы в девяностые годы были подведены в монографии «Уплотняющие многозначные отображения и полулинейные дифференциальные включения в банаховом пространстве», написанной совместно с М. И. Каменским и П. Дзекка и вышедшей на английском языке в немецком издательстве Walter de Gruyter в 2001 г. (см. [13]).

Книга содержит систематическое введение в теорию топологической степени для многозначных отображений уплотняющего типа с выпуклыми и ациклическими значениями. Исследованы различные меры некомпактности в функциональных пространствах и полугруппы уплотняющего типа. С помощью развитых топологических методов последовательно изучены самые общие типы полулинейных дифференциальных включений в банаховом пространстве с различными видами многозначных нелинейностей, получены достаточные условия существования решений и исследованы топологические свойства интегральных воронок. Получены приложения к задачам оптимизации для нелинейных управляемых систем с обратной связью. В качестве примеров рассмотрены математические модели передаточной линии и гибридной системы с сухим трением. Большое внимание в книге уделено разработке двух подходов к периодической задаче для включений данного типа — метода многозначного интегрального оператора и метода многозначного оператора сдвига.

Говоря о международном признании работ В. В. Обуховского, нельзя не отметить, что в 1998 г. он получил очень престижный грант Министерства иностранных дел Италии, а в 2001 г. — грант Немецкого общества академических обменов (DAAD) для научной работы в Мюнхенском техническом университете. В 2007 г. он был приглашен для чтения лекций и научной работы в университет им. Николая Коперника в Торуне (Польша), в 2008 г. — в Ханойский педагогический университет (Вьетнам), в 2012 г. — в Университет г. Наньнин (КНР). Неоднократно Валерий Владимирович бывал в качестве приглашенного профессора в университетах Перуджи и Модены и Реджо-Эмилии (Италия). В университет им. Сун Ятсена на Тайване (г. Гаосюн) В. В. Обуховский приглашался ежегодно, с 2007 по 2019 гг.

Научные результаты Валерия Владимировича в сфере современного многозначного анализа и его приложений по праву стали классикой мировой науки, и он щедро делился своими идеями, в том числе с зарубежными коллегами, на многочисленных конгрессах, симпозиумах и международных научных конференциях во многих странах, в их числе: международные конгрессы математиков (Берлин, 1998; Пекин, 2002; Хайдарабад (Индия), 2010), Европейский конгресс математиков (Стокгольм, 2004), Всемирный конгресс по нелинейному анализу (Афины, 1996), конференции по методам нелинейного анализа (Канада, Уайтхорс, 1997; Эдмонтон, 1999), симпозиум по нелинейному анализу (Польша, Торунь, 1999), всемирный конгресс по прикладной математике и моделированию (Швейцария, Лозанна, 2000), международный конгресс по качественной теории дифференциальных уравнений (Италия, Сиена, 2000), международная конференция по нелинейным операторам (Румыния, Клуж-Напока, 2004), международные конференции по дифференциаль-

ным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 2002, 2005, 2017), международная конференция по теории управления и математическому моделированию (Ижевск, 2006), международные конференции «Общие проблемы управления и их приложения. Колмогоровские чтения» (Тамбов, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2018), международная школа-семинар «Нелинейный анализ и экстремальные задачи» (Иркутск, 2024) и многие другие. В. В. Обуховский был одним из организаторов и главных докладчиков первого Российско-Тайваньского симпозиума по оптимизации и оптимальному управлению (Гаосюн, 2009), а также Международной конференции по нелинейному и вариационному анализу IWNVA (Гаосюн, 2014, 2015, 2016, 2017). Он организовывал минисимпозиумы на международных конференциях по дифференциальным уравнениям EQUADIFF (Прага, 2013; Лион, 2015; Братислава, 2017).

В организации и работе международных научных конференций по нелинейному анализу и дифференциальным уравнениям, проводившихся в Воронеже в 2000 и 2005 годах, он принимал активное участие в качестве ученого секретаря, а в 2016 г. был председателем программного комитета молодежной международной научной конференции «Методы современного математического анализа и геометрии и их приложения», состоявшейся в Воронежском государственном педагогическом университете при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и при активном участии председателя организационного комитета конференции, академика РАН Анатолия Тимофеевича Фоменко. С этого момента конференция приобретает ежегодный характер и становится традиционной площадкой для обмена опытом и обсуждения современных математических проблем среди молодых ученых Москвы, Воронежа и других городов России.

В этих конференциях регулярно принимали участие ученики академика А. Т. Фоменко, а также аспиранты профессора Т. Н. Фоменко. В 2025 г. Международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», уже девятая по счету, была посвящена 80-летию академика А. Т. Фоменко.

С сентября 1998 г. В. В. Обуховский вновь работает на кафедре алгебры и топологических методов анализа Воронежского государственного университета в должности профессора. В ВГУ он читает лекции по теории чисел (по этому курсу выпущено пособие) и линейной алгебре, ведет спецкурсы по многозначному анализу, теории дифференциальных включений и другим актуальным проблемам. Руководит курсовыми и дипломными проектами, а также аспирантурой.

С 2010 по 2024 годы В. В. Обуховский был заведующим кафедрой алгебры и геометрии Воронежского государственного педагогического университета (а затем и кафедрой высшей математики). В этот период он руководил курсовыми и дипломными проектами, а также магистратурой и аспирантурой, читал лекции и спецкурсы студентам и магистрам.

Среди учеников В. В. Обуховского, защитивших в разные годы диссертации: С. В. Корнев (2004), И. Бенедетти (Италия) (2004), Х. Р. Ал-Хашеми (Ирак) (2006), А. Ю. Гликлик (2006), М. М. Басова (2007), А. Б. Гельман (2010), Н. В. Лой (Вьетнам) (2010), Г. Г. Петросян (2014), М. И. Аль Обаиди (Ирак) (2015), М. С. Сорока (2020). В 2015 г. успешно защитил докторскую диссертацию Н. В. Лой, а в 2017 г. — С. В. Корнев.

Дважды (в 2018 и 2021 годах) Валерий Владимирович выступал на математическом факультете МГУ официальным оппонентом на защитах кандидатских диссертаций аспирантов профессора факультета ВМК МГУ Т. Н. Фоменко. Тематика этих работ — теория неподвижных точек и совпадений многозначных отображений метрических пространств и упорядоченных множеств.

В. В. Обуховский являлся членом редколлегии международных журналов “*Discussiones Mathematicae / Differential Inclusions and Optimal Control*”, “*Fixed Point Theory. An International Journal on Fixed Point Theory, Computation and Applications*”, “*Differential Equations and Dynamical Systems*”, “*Applied Analysis and Optimization*”, “*Set-Valued Mathematics and Applications*”, “*Journal of Science, Hanoi National University of Education*”.

С 1996 г. он являлся научным руководителем грантов Российского фонда фундаментальных исследований, совместных грантов РФФИ-ННС Тайваня, а в 2017 г. научный коллектив, возглавляемый Валерием Владимировичем, стал победителем конкурсного отбора научных проектов, выполняемых научными коллективами образовательных организаций, подведомственных Министерству образования и науки Российской Федерации.

В круг научных интересов профессора В. В. Обуховского в последние годы входили исследование свойств множеств решений операторных включений, изучение дифференциальных включений с бесконечным запаздыванием, обобщенных краевых задач для дифференциальных и функционально-дифференциальных включений различного типа, развитие метода многозначных линейных операторов и его применение к дифференциальным включениям и управляемым системам, применение операторно-топологических методов к изучению вариационных неравенств с многозначными операторами и проблем управляемости для различных классов нелинейных систем. Совместно с М. И. Каменским, Г. Г. Петросяном и М. С. Сорокой проводились широкие исследования систем, описываемых дифференциальными включениями дробного порядка в банаховом пространстве. Особо следует отметить цикл работ с С. В. Корневым и Н. В. Лоем по развитию метода направляющих функций и его применению к исследованию колебательных процессов, асимптотического поведения траекторий и бифуркационных явлений.

Активная научная деятельность Валерия Владимировича, затрагивавшая многие разделы современной математики, неизменно привлекала интерес международных научных издательств. Отметим, например, что в 2013 г. в престижном международном научном издательстве Springer (Берлин) вышла на английском языке монография «Метод направляющих функций в задачах нелинейного анализа» (см. [14]), авторами которой, помимо профессора В. В. Обуховского, являются его ученики: доцент кафедры высшей математики С. В. Корнев, выпускник аспирантуры кафедры высшей математики ВГПУ доцент Нгуен Ван Лой (Вьетнам), а также профессор П. Дзекка (Италия). В 2017 г. в немецком издательстве Walter de Gruyter, также на английском языке, выпущена монография «Выпуклый и многозначный анализ» (см. [15]).

Активность В. В. Обуховского как ученого с мировым именем, с одной стороны, и его организаторские способности, с другой стороны, позволили кафедре высшей математики ВГПУ занять не только лидирующие позиции в университете, но и быть узнаваемой далеко за пределами России.

За плодотворную работу он неоднократно отмечался региональными и ведомственными наградами, среди них — Премия правительства Воронежской об-

ласти в области науки и образования (2014 г.), Почетная грамота Министерства образования и науки РФ (2016 г.), Знак отличия правительства Воронежской области «Почетный наставник Воронежской области» (2021 г.).

Научная деятельность Валерия Владимировича всегда тесно переплеталась с его педагогической деятельностью, и с первых дней научной работы проявились его любовь и умение увлекать наукой талантливую молодежь и окружающих его коллег. Полученный за годы контактов и совместной работы с В. В. Обуховским запас научного энтузиазма и оптимизма будет вдохновлять его учеников и соратников еще многие годы.

Сотрудники и выпускники многих поколений математического факультета ВГУ и физико-математического факультета ВГПУ помнят Валерия Владимировича не только как талантливого ученого и педагога, блестящего лектора и организатора, но и как человека высокопорядочного, интеллигентного, принципиального, беззаветно преданного науке и профессии.

До самых последних дней Валерий Владимирович активно работал и был полон энергии и творческих планов.

Светлая память о настоящем ученом, учителе и наставнике навсегда останется в сердцах каждого из нас. Спасибо судьбе за то, что свела нас с этим замечательным человеком.

И. Бенедетти, М. Ш. Бурлуцкая, А. В. Звягин, В. Г. Звягин, А. Б. Гельман, Б. Д. Гельман, Е. Н. Гетманова, А. Ю. Гликлих, Ю. Е. Гликлих, А. Г. Баскаков, Н. М. Близняков, М. И. Каменский, С. В. Корнев, В. А. Костин, Д. В. Костин, М. М. Кулманакова, Г. А. Курина, А. Б. Кущев, А. В. Лобода, Н. В. Лой, Л. Н. Ляхов, И. В. Михайлова, А. В. Обуховский, В. И. Овчинников, В. П. Орлов, Г. Г. Петросян, И. П. Половинкин, Е. М. Семенов, В. В. Смагин, М. С. Сорока, Л. В. Стенюхин, Е. Л. Ульянова, А. Т. Фоменко, Т. Н. Фоменко, А. И. Фурменко

ЛИТЕРАТУРА

1. Обуховский В. В., Гельман Б. Д., Сапронов Ю. И. О размерности некоторых множеств в бесконечномерных пространствах // Сборник работ студентов и аспирантов по математике. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1967. С. 17–24.
2. Обуховский В. В., Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мухамадиев Э. О вращении многозначных векторных полей // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187, № 5. С. 971–973.
3. Обуховский В. В., Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мухамадиев Э. О вращении многозначных векторных полей // Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1969. Т. 12. С. 69–84.
4. Обуховский В. В., Фурменко А. И. О биологической интерпретации основных понятий математического анализа. Воронеж: Изд-во ВГЛТИ, 1980.
5. Обуховский В. В. О некоторых принципах неподвижной точки для многозначных уплотняющих операторов // Труды математического факультета ВГУ. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1971. Т. 4. С. 70–79.
6. Обуховский В. В. Периодические решения управляемых систем // Труды математического факультета ВГУ. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1972. Т. 7. С. 68–76.
7. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений. Воронеж: Изд-во ВГУ, 1986.
8. Obukhovskii V., Gel'man B. Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Hackensack NJ: World Sci., 2020.
9. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Топологические методы в теории неподвижных точек многозначных отображений // Успехи мат. наук. 1980. Т. 35, № 1. С. 59–126.

-
10. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. Мнозначный анализ и операторные включения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1986. Т. 29. С. 151–211.
 11. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. О новых результатах в теории многозначных отображений. I. Топологические характеристики и разрешимость операторных включений // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. 1987. Т. 25. С. 123–197.
 12. Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В. О новых результатах в теории многозначных отображений. II. Анализ и приложения // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1991. Т. 29. С. 6–27.
 13. Kamenski M., Obukhovskii V., Zecca P. Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Series in Nonlinear Analysis and Applications 7. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001.
 14. Obukhovskii V., Zecca P., Loi N. V., Kornev S. Method of guiding functions in problems of nonlinear analysis. Lecture Notes in Math. 2076. Berlin: Springer-Verl., 2013.
 15. Arutyunov A. V., Obukhovskii V. Convex and set-valued analysis. Selected topics. Berlin: Walter de Gruyter, 2017.

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
the American Mathematical Society's $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 31.08.2026. Уч.-изд. л. 23,2. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 25.09.2026. Объем файла 2.85 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.