

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 67

4

2026

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, А. Е. Гутман

Редакторы:

В. Л. Береснев,	В. Д. Мазуров,
А. Ю. Веснин,	А. Е. Миронов,
Г. В. Демиденко,	Г. А. Михайлов,
Е. И. Зельманов,	А. Г. Мясников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин
А. А. Лаптев,	

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 67, № 4 (398) Июль—август, 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Билалов Б. Т., Садыгова С. Р., Сезер Й. Понятие t -базиса и применение к нётеровости одной банаховозначной краевой задачи с косо́й производной	569
Веснин А. Ю., Егоров А. А. Спектры нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников	581
Волков Ю. С., Жанлав Т., Мижиддорж Р.-О. Формулы квазиинтерполяции интегральными квадратическими сплайнами .	603
Гутман А. Е. Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть II: Эффективный анализ перезаписи	616
Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Савастеев Д. В. Метод Перрона в задаче Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве	626
Йи С., Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. σ -Проблема Кегеля — Виландта и TI -подгруппы конечных групп	641
Карманова М. Б. Графики отображений групп Энгеля и критерий их внутренней липшицевости	650
Кожанов А. И., Жигжитжапов Б. В. Вырождающиеся псевдопараболические уравнения третьего порядка	674
Нужин Я. Н. Ковровые кольца Ли, не инвариантные относительно ковровых подгрупп	683
Подвигин И. В., Рыжиков В. В. Полный диапазон скоростей сходимости средних Биркгофа для эргодических потоков	690
Романов В. Г. Обратная задача для уравнения Вестервельта	703

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2026

Ситник С. М., Скоромник О. В. Условия ограниченности и унитарности в пространствах Лебега для интегральных операторов со специальными функциями Лежандра в ядрах	712
Шапорина Е. А. Структура и автоморфизмы некоторых циклических расширений свободных групп	744

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

ПОНЯТИЕ t -БАЗИСА И ПРИМЕНЕНИЕ К НЁТЕРОВОСТИ ОДНОЙ БАНАХОВОЗНАЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Б. Т. Билалов, С. Р. Садыгова, Й. Сезер

Аннотация. Рассматривается понятие t -базиса, порожденного тензорным произведением банаховых пространств. Вводится понятие $*$ -гармонической банаховозначной (X -значной) функции, где рассматриваемое пространство X обладает инволюцией ($*$). Используя тот факт, что классическая система экспонент образует t -базис в бохнеровом пространстве X -значных функций, обладающем UMD-свойством, определяется класс Харди $*$ -гармонических в единичном круге функций. Рассматривается краевая задача с косою производной в этом классе и устанавливается критерий нётеровости и, в частности, разрешимости этой задачи. Приведены конкретные примеры.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.401

Ключевые слова: пространство Бохнера, X -значные гармонические функции, задача с косою производной, нётеровость.

1. Введение

В связи с приложениями в теории дифференциальных уравнений (в особенности в теории эволюционных уравнений) интерес к анализу в пространствах банаховозначных функций очень большой. В этом направлении сделаны большие успехи после того, как обобщены многие результаты гармонического анализа на банаховозначный случай, когда рассматриваемое пространство обладает так называемым UMD-свойством. Эти направления освещены в монографиях различных математиков (см. например, [1–4]). Отметим, что теория банаховозначных (в основном гильбертовозначных) дифференциальных уравнений от одной переменной с операторными коэффициентами по сравнению со случаем многих переменных достаточно хорошо развита (см., например, монографии [5–8] и др.). В последнее время число работ, посвященных банаховозначным эллиптическим уравнениям, возрос (см., например, [9–16] и библиографию в них).

В данной работе результаты, полученные в работах [16, 17], применяются к одной банаховозначной граничной задаче. А именно, рассматриваются понятие t -базиса в банаховом тензорном произведении и вопрос о t -базисности системы экспонент $\{e^{int}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ в пространстве Бохнера $L_p(J; X)$, $1 < p < +\infty$, на промежутке $J = [-\pi, \pi)$ в случае, когда X обладает UMD-свойством. Вводится $*$ -условие Коши — Римана, порожденное инволюцией ($*$) в X . Определяется

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Науки Азербайджана, грант No AEF-MGC-2024-2(50)-16/02/1-M-02.

класс X -значных гармонических в единичном круге на комплексной плоскости функций $h_p^{\mathbb{R}}(X)$. В этом классе рассматривается одна краевая задача с косою производной для уравнения Лапласа и дан критерий разрешимости этой задачи. Также устанавливается критерий нётеровости этой задачи. Скалярный случай полученных результатов ранее был рассмотрен в работе [18].

Следует отметить, что ранее обобщения условий Коши — Римана на банаховозначный случай были даны в монографиях [5, 6]. А именно, в монографии Дьедонне [5] (см. утверждение (9.10.2)) в случае одной комплексной переменной эти условия приобретают следующий вид. Пусть $A \subset C$ — открытое множество, $f(x; y) : A \rightarrow X$ — непрерывно дифференцируемое отображение на комплексное банахово пространство X . Тогда для того чтобы функция $g(x + iy) = f(x; y)$ была аналитической в A , необходимо и достаточно, чтобы в A выполнялось соотношение $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Аналогичное обобщение на случай комплексного аффинного пространства дано в монографии Л. Шварца [6] (см. с. 327). Обобщение на случай многих комплексных переменных (относительно скалярнозначных функций) дано в монографии [19].

Представленное в данной работе условие Коши — Римана носит иной характер, оно является непосредственным обобщением классического условия Коши — Римана. А именно, если в качестве B -пространства X взять $X = C$ и в C инволюцию определить как $\lambda^* = \bar{\lambda}$ — комплексное сопряжение, то $*$ -условия Коши — Римана превращаются в обычные условия Коши — Римана.

Рассмотренная задача продемонстрирует применения понятия t -базиса, введенного в работах [16, 17, 20]. Более того, при получении основных результатов используются современные средства анализа в банаховых пространствах, а также предложен абстрактный подход к определению гармонических функций.

2. Необходимые сведения

2.1. Обозначения. N — натуральные числа; $Z_+ = \{0\} \cup N$; Z — целые числа; R — действительные числа; C — комплексные числа; $\omega = \{z \in C : |z| < 1\}$; $\gamma = \{z \in C : |z| = 1\}$; $\bar{\omega} = \omega \cup \gamma$; $\omega^c = C \setminus \bar{\omega}$; H -пространство — гильбертово пространство; $(\bar{\cdot})$ — комплексное сопряжение; B -пространство — банахово пространство; $\mathcal{B}$ — множество всех банаховых пространств; $\|\cdot\|_X$ — норма в X ; $[X; Y]$ — B -пространство линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y ; $[X] = [X; X]$; X^* — сопряженное к X пространство; R_T — область значений оператора T ; $\text{Ker } T$ — ядро оператора T ; $\overline{M}$ — замыкание множества M ; $J \equiv [-\pi; \pi)$; δ_{ij} — символ Кронекера; p' — сопряженное к p число: $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$.

Через c будем обозначать постоянные (может быть, различные в разных местах). Будем считать, что все рассматриваемые B -пространства определены над полем C .

2.2. Понятие t -базиса. Пусть $X, Y, Z \in \mathcal{B}$ и $t : X \times Y \rightarrow Z$ — билинейное отображение, которое удовлетворяет условию

$$\exists \delta > 0 : \delta \|x\|_X \|y\|_Y \leq \|t(x; y)\|_Z \leq \delta^{-1} \|x\|_X \|y\|_Y \quad \forall (x; y) \in X \times Y.$$

Для простоты обозначений в дальнейшем примем $xy = t(x; y)$. Для множества $M \subset Y$ через $L_t[M]$ будем обозначать его t -оболочку, определенную соотношением

$$L_t[M] = \left\{ z \in Z : \exists \{(x_k; y_k)\}_{k=1}^{n_0} \subset X \times M \rightarrow z = \sum_{k=1}^{n_0} x_k y_k \right\}.$$

Систему $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ будем называть t -полной в Z , если $\overline{L_t[\{y_k\}_{k \in N}]}$ — Z (замыкание берется в Z).

Систему операторов $\{t_n\}_{n \in N} \subset [Z; X]$ будем называть t -биортогональной к системе $\{y_k\}_{k \in N} \subset Y$, если $t_n(xy_k) = \delta_{nk}x \ \forall x \in X$ для любых $n, k \in N$.

Систему $\{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ назовем t -базисом в Z , если произвольное $z \in Z$ имеет единственное разложение вида

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k,$$

где $\{x_k\}_{k \in N} \subset X$.

Тройку $(X; Y; Z)$ будем называть t_Y -инвариантной, если из

$$\{(x_k; \tilde{y}_k)\}_1^n \subset X \times Y : \sum_{k=1}^n x_k \tilde{y}_k = 0$$

следует

$$\sum_{k=1}^n v(\tilde{y}_k) x_k = 0 \quad \forall v \in Y^*.$$

Тройку $(X; Y; Z)$ назовем t -плотной, если $\overline{L[X \times Y]} = Z$ (замыкание берется в Z), где $L[M]$ — линейная оболочка M .

Справедлив следующий критерий t -базисности.

Теорема 2.1. Пусть тройка $(X; Y; Z)$ является t_Y -инвариантной и t -плотной. Система $\vec{y} \equiv \{y_k\}_{k \in N} \subset Y$ образует t -базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены следующие утверждения:

- (i) $\vec{y}$ t -полна в Z ;
- (ii) $\vec{y}$ имеет t -биортогональную систему $\{t_n\}_{n \in N} \subset [Z; X]$;
- (iii) проекторы

$$\{P_m\}_{m \in N} \subset [Z] : P_m(z) = \sum_{n=1}^m t_n(z) y_n, \quad z \in Z, \quad m \in N,$$

равномерно ограничены, т. е.

$$\sup_m \|P_m\|_{[Z]} < +\infty.$$

Более подробно с этими понятиями можно познакомиться в [16, 17, 20].

Рассмотрим случай, когда $X; Y \in \mathcal{B}$ и $X \overline{\otimes} Y = Z$ — банахово тензорное произведение. Билинейное отображение $t : X \times Y \rightarrow Z$ определим выражением $t(x; y) = x \otimes y$, где $x \otimes y$ — элементарное тензорное произведение элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Ясно, что тройка $(X; Y; Z)$ в этом случае является t_Y -инвариантной и t -плотной (см., например, [21]). Из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Пусть $X; Y \in \mathcal{B}$ и $Z = X \overline{\otimes} Y$. Система $\vec{y} \subset Y$ образует t -базис в Z тогда и только тогда, когда выполнены условия (i)–(iii) теоремы 2.1.

2.3. Пространство Бохнера $L_p(S; X)$. UMD-свойство. Пусть $(S; \mathcal{A}; \mu)$ — измеримое пространство с мерой μ . Как обычно, через $L_p(S; X)$, $1 \leq p < +\infty$, обозначим пространство Бохнера X -значных на S функций с нормой

$$\|f\|_{L_p(S; X)} = \left(\int_S \|f\|_X^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Напомним UMD-свойство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Говорят, что пространство $X \in \mathcal{B}$ обладает UMD-свойством, если для любого $p \in (1, \infty)$ существует константа $\beta \geq 0$ (зависящая только от p и X) такая, что если $(S; \mathcal{A}; \mu)$ — σ -конечное измеримое пространство (с мерой μ), $\{F_n\}_{n=0}^m$ — фильтрация и $\{f_n\}_{n=0}^m$ — конечные мартингалы в $L_p(S; X)$, то для любого $\{\varepsilon_n\} : |\varepsilon_n| = 1, n = \overline{1, m}$, выполнено

$$\left\| \sum_{n=1}^m \varepsilon_n df_n \right\|_{L_p(S; X)} \leq \beta \left\| \sum_{n=1}^m df_n \right\|_{L_p(S; X)},$$

где $df_n = f_n - f_{n-1}$.

Множество всех пространств, обладающих UMD-свойством, обозначим через UMD.

Более подробно с фактами, связанными с UMD-свойством, можно познакомиться в [1].

Для дальнейшего изложения примем следующее соглашение. отождествим единичную окружность γ и полуинтервал J отображением $e^{it} : J \rightarrow \gamma$. Аналогично пространству $L_p(J; X)$, порожденному мерой Лебега dx в J , сопоставляется бохнерово пространство $L_p(\gamma; X)$, порожденное мерой dl (dl — элемент длины γ) на γ . Отображение e^{it} позволяет отождествить также пространства $L_p(J; X)$ и $L_p(\gamma; X)$. Примем $L_p(X) =: L_p(J; X) \cong L_p(\gamma; X)$. Для функции $f : \omega \rightarrow X$ примем $f_r(t) = f(re^{it}), re^{it} \in \omega$.

Линейное пространство всех X -значных тригонометрических полиномов вида

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n a_k e^{ikt}$$

с коэффициентами $\{a_k\} \subset X$ обозначим через $P(X)$.

2.4. Мультипликатор. t -Рисс свойство. На $P(X)$ определим мультипликатор $m : P(X) \rightarrow L_p(X)$, полагая

$$(mP)(t) = \tilde{P}(t) = -i \sum_k \text{sign}(k) a_k e^{ikt},$$

где

$$P(t) = \sum_k a_k e^{ikt} \in P(X), \quad \text{sign}(k) = \begin{cases} 1, & k > 0, \\ 0, & k = 0, \\ -1, & k < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим следующее X -значное преобразование Гильберта:

$$(Hf)(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_R \frac{f(y)}{x-y} dy, \quad x \in R.$$

Хорошо известна следующая

Теорема 2.2 [1]. Пусть $X \in \mathcal{B}$, $p \in (1, \infty)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны: (1) $X \in \text{UMD}$; (2) $H \in [L_p(R; X)]$.

Также справедливо

Утверждение 2.1 [1]. Пусть $X \in \mathcal{B}$, $p \in (1, +\infty)$. Если $H \in [L_p(R; X)]$, то $m \in [L_p(X)]$.

Всюду в дальнейшем для $f \in L_1(X)$ примем

$$\hat{f}_k := t_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad k \in Z.$$

С использованием теоремы 2.2 и утверждения 2.1 в работе [22] доказана следующая

Теорема 2.3 [22]. Пусть $X \in \text{UMD}$, $p \in (1, +\infty)$. Тогда система экспонент $\mathcal{E} \equiv \{e^{int}\}_{n \in Z}$ образует t -базис в $L_p(X)$, т. е. любая $f \in L_p(X)$ имеет единственное разложение в $L_p(X)$ вида

$$f(t) = \sum_{n \in Z} \hat{f}_n e^{int}.$$

Более того, для любого $m \in Z$ t -Рисс проекторы

$$(R_m^+ f)(t) := f_+(t) := \sum_{n=m}^{+\infty} \hat{f}_n e^{int}, \quad (R_m^- f)(t) := f_-(t) := \sum_{n=-\infty}^{m-1} \hat{f}_n e^{int}$$

ограничены в $L_p(X)$, т. е. $R_m^\pm \in [L_p(X)]$.

2.5 $h_p(X)$ -класс гармонических функций. *-Сопряженные гармонические функции. В этой части будем предполагать, что $X \in \text{UMD}$, $p \in (1, +\infty)$. Пусть X снабжено инволюцией $(*)$, которая обладает следующими свойствами:

(i) $*$: $X \rightarrow X$ является сопряженно линейным биективным отображением X на X ;

(ii) $x^{**} = x$, $x \in X$;

(iii) $\|x^*\|_X = \|x\|_X$, $x \in X$.

Следуя [22], примем $X^R = \{x \in X : x^* = x\}$, и пусть $X^{iR} = \{ix : x \in X^R\}$.

Таким образом, произвольное $\varpi \in X$ имеет единственное представление в виде

$$\varpi = u + i\vartheta, \quad u, \vartheta \in X^R.$$

Примем обозначения $u = \text{Re}^* \varpi$, $\vartheta = \text{Im}^* \varpi$ и назовем u $*$ -действительной (ϑ — $*$ -мнимой) частью элемента ϖ . Тогда справедлива прямая сумма

$$X = X^R \dot{+} X^{iR} = X^R \dot{+} iX^R. \quad (2.1)$$

Пространство X с инволюцией « $*$ » будем обозначать через $(X; *)$. Далее нам понадобятся следующие пространства X -значных функций. Для $z \in \omega$ определим частные производные

$$\partial_x f(z) := \lim_{R \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad \partial_y f(z) := \lim_{R \ni h \rightarrow 0} \frac{f(z+ih) - f(z)}{h}.$$

Положим

$$C^1(\omega; X) = \{f : \omega \rightarrow X : \partial_x f, \partial_y f \in C(\omega; X)\},$$

где $C(\omega; X)$ — линейное пространство всех непрерывных функций $f : \omega \rightarrow X$. Аналогичным образом определяем

$$C^2(\omega; X) = \{f \in C^1(\omega; X) : \partial_{xx} f, \partial_{xy} f, \partial_{yy} f \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть

$$\Delta f(z) = \partial_{xx}f(z) + \partial_{yy}f(z),$$

где $z = x + iy$.

Введем следующий класс X -значных гармонических в ω функций:

$$H(\omega; X) = \{f \in C^2(\omega; X) : \Delta f(z) = 0, z \in \omega\}.$$

Прямая сумма (2.1) порождает прямую сумму

$$H(\omega; X) = H^R(\omega; X) \dot{+} iH^R(\omega; X),$$

где

$$H^R(\omega; X) = \{f \in H(\omega; X) : f(z) \in X^R, z \in \omega\}.$$

Для $z \in \omega$ определим комплексную производную:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

и введем в рассмотрение следующий класс X -значных аналитических в ω функций:

$$A(\omega; X) = \{f \in C(\omega; X) : f' \in C(\omega; X)\}.$$

Пусть $A^R(\omega; X) = \text{Re}^* A(\omega; X)$. Положим

$$A_0(\omega; X) = \{\varpi \in A(\omega; X) : (\text{Im}^* \varpi)(0) = 0\}.$$

В работе [22] установлена следующая

Лемма 2.1. Пусть $X \in \mathcal{B}$ снабжено инволюцией $(*)$. Тогда относительно классов гармонических функций $H(\omega; X)$ и аналитических функций $A(\omega; X)$ справедливы следующие утверждения:

- (1) имеет место прямая сумма $H(\omega; X) = H^R(\omega; X) \dot{+} iH^R(\omega; X)$, а также справедливо $A(\omega; X) \subset A^R(\omega; X) \dot{+} iA^R(\omega; X)$;
- (2) $A(\omega; X) \subset H(\omega; X)$ (собственное включение);
- (3) пусть $\varpi \in H(\omega; X)$, тогда $\varpi \in A(\omega; X) \rightarrow u = \text{Re}^* \varpi$ и $v = \text{Im}^* \varpi$ удовлетворяют $*$ -условию Коши — Римана

$$\partial_x u = \partial_y v, \quad \partial_x v = -\partial_y u;$$

- (4) $A^R(\omega; X) \equiv H^R(\omega; X)$;

- (5) линейные пространства $H^R(\omega; X)$ и $A_0(\omega; X)$ изоморфны и оператор $T = I + iI^*$ осуществляет соответствующий изоморфизм, где I — единичный в $H^R(\omega; X)$ оператор и

$$(I * u)(x; y) = \int_0^{(x; y)} -\partial_y u dx + \partial_x u dy, \quad (x; y) \in \omega, \quad u \in H^R(\omega; X).$$

Через K обозначим следующий X -значный интеграл типа Коши:

$$(Kf)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \omega.$$

Положим $L_p^+(X) = R^+(L_p(X))$, где $R^+ = R_0^+$ — t -Рисс проектор, и пусть

$$H_p(\omega; X) = \{F \in A(\omega; X) : \exists f \in L_p^+(X) \rightarrow F = Kf\}.$$

Исходя из класса $H_p(X)$, определим

$$h_p^R(X) = \operatorname{Re}^* H_p(X).$$

По результатам работы [22] относительно функции $f \in H_p(X)$ имеет место также представление в виде интеграла Пуассона — Бохнера

$$f(re^{it}) = (Pf^+)(re^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(t-s)f^+(s) ds, \quad re^{it} \in \omega, \quad (2.2)$$

где $P_r(t)$ — ядро Пуассона для единичного круга

$$P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos t + r^2},$$

$f^+ = \theta f$ — некасательные граничные значения функции f на γ и θ — соответствующий оператор следа. Норма в $H_p(X)$ определяется выражением

$$\|f\|_{H_p(X)} = \|\theta f\|_{L_p(X)},$$

и оператор $\theta \in [H_p(X); L_p^+(X)]$ является изометрическим изоморфизмом.

Из формулы (2.2) непосредственно получаем

$$u(re^{it}) = \operatorname{Re}^* f(re^{it}) = (P(\operatorname{Re}^* f^+))(re^{it}) = (Pu^+)(re^{it}),$$

где $u^+ = \theta u$. Как установлено в работе [22], оператор $\theta \in [h_p^R(X); L_p^R(X)]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, где $L_p^R(X) = \operatorname{Re}^* L_p(X)$. Положим

$$h_p(X) = h_p^R(X) + ih_p^R(X).$$

Очевидно, что $\theta \in [h_p(X); L_p(X)]$ тоже является изометрическим изоморфизмом, если принять

$$\|u\|_{h_p(X)} = \|\theta u\|_{L_p(X)}.$$

Тогда из теоремы 2.3 непосредственно получаем справедливость следующей леммы.

Лемма 2.2. Пусть $X \in UMD$, $p \in (1, \infty)$. Тогда система

$$\{1; r^n \cos nt; r^n \sin nt\}_{n \in N} \quad (2.3)$$

образует t -базис в $h_p^R(X)$ (также в $h_p(X)$). Более того, если для $u \in h_p^R(X)$ имеет место

$$u(re^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt) r^n, \quad (2.4)$$

то

$$u^+(e^{it}) = (\theta u)(e^{it}) = u_0^+ + \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ \cos nt + u_n^- \sin nt).$$

3. Основные результаты

3.1. Постановка задачи. Нётеровость. Прежде чем перейти к постановке задачи, введем в рассмотрение класс гармонических функций

$$h_p^{(1)}(X) = \{u \in h_p(X) : \theta(\partial_r u), \theta(\partial_\varphi u) \in L_p(X)\}$$

с нормой

$$\|u\|_{h_p^{(1)}(X)} = \|u\|_{h_p(X)} + \|\theta(\partial_r u)\|_{L_p(X)} + \|\theta(\partial_\varphi u)\|_{L_p(X)}.$$

Здесь θg для $g = \partial_r u$ или $g = \partial_\varphi u$ понимается как предел $\lim_{r \rightarrow 1-} g(r; \cdot)$ в $L_p(J; X)$, если такой предел существует. В классе $h_p^{(1)}(X)$ рассмотрим следующую задачу с косою производной:

$$\begin{aligned} \Delta_{r;\varphi} u &= \partial_{rr} u + \frac{1}{r} \partial_r u + \frac{1}{r^2} \partial_{\varphi\varphi} u = 0 \text{ в } \omega, \\ \cos \varphi \theta(\partial_r u) + \sin \varphi \theta(\partial_\varphi u) &= f(\varphi), \quad \varphi \in J, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $f \in L_p(X)$ — заданная функция и $\theta \in [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$ — оператор следа.

Рассмотрим оператор $T \in [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$, определенный выражением

$$(Tu)(\varphi) = \cos \varphi \theta(\partial_r u) + \sin \varphi \theta(\partial_\varphi u).$$

Найдем $\text{Ker } T$ (ядро) и R_T (область значений) этого оператора.

Итак, пусть $u \in h_p^{(1)}(X)$ и (2.4) есть разложение u по базису (2.3). Для удобства последующих вычислений представим это разложение в виде

$$u(r; \varphi) = u(re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n r^{|n|} e^{in\varphi},$$

где

$$a_n = \begin{cases} u_0^+, & n = 0, \\ \frac{1}{2}(u_n^+ - iu_n^-), & n > 0, \\ \frac{1}{2}(u_{|n|}^+ + iu_{|n|}^-), & n < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$\partial_r u = \sum_{n \neq 0} |n| a_n r^{|n|-1} e^{in\varphi}, \quad \partial_\varphi u = \sum_{n \neq 0} i n a_n r^{|n|} e^{in\varphi}.$$

Из леммы 2.2 непосредственно следует

$$\theta(\partial_r u) = \sum_{n \neq 0} |n| a_n e^{in\varphi}; \quad \theta(\partial_\varphi u) = \sum_{n \neq 0} i n a_n e^{in\varphi}.$$

Разложим функцию $f \in L_p(X)$ по t -базису $\mathcal{E}$:

$$f(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Учитывая граничные условия (3.1), получаем

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \sum_{n \neq 0} |n| a_n e^{in\varphi} + \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} \sum_{n \neq 0} i n a_n e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f) e^{in\varphi}.$$

Совершив соответствующие преобразования, имеем

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)a_{n-1}e^{in\varphi} - \sum_{n=-\infty}^{-2} (n+1)a_{n+1}e^{in\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t_n(f)e^{in\varphi}. \quad (3.2)$$

Из этого соотношения следует, что для разрешимости задачи (3.1) выполнение условий

$$t_{-1}(f) = t_0(f) = t_1(f) = 0 \quad (3.3)$$

является необходимым.

Коэффициент a_0 не входит в левую часть соотношения (3.2) и, значит, он остается произвольной постоянной из X . Для остальных коэффициентов $\{a_n\}$ получаем

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}t_{n+1}(f), & n \geq 1, \\ -\frac{1}{n}t_{n-1}(f), & n \leq -1. \end{cases}$$

В результате для решения $u \in h_p^{(1)}(X)$ задачи (3.1) имеем формальное представление

$$u(r; \varphi) = a_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{t_{n-1}(f)}{|n|} r^{|n|} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_{n+1}(f)}{n} r^n e^{in\varphi}. \quad (3.4)$$

Покажем, что (3.4) на самом деле является решением задачи (3.1). Совершенно очевидно, что $\Delta_{r;\varphi} u(r; \varphi) = 0 \quad \forall re^{i\varphi} \in \omega$. Покажем, что $u \in h_p^{(1)}(X)$.

Ясно, что $u(0; \varphi) = a_0 = \text{const}$. Следовательно, для $u(r; \varphi)$ имеем

$$u(r; \varphi) = \int_0^r \partial_\rho u(\rho; \varphi) d\rho + a_0.$$

Из этого представления следует, что если $\sup_{0 < \rho < 1} \|\partial_\rho u(\rho; \varphi)\|_{L_p(J; X)} < +\infty$, то $u \in h_p(X)$. Продифференцировав, из (3.4) получаем

$$\partial_r u = \sum_{n=-\infty}^{-1} t_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} t_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Положим

$$u_1(r; \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{-1} t_{n-1}(f) r^{|n|-1} e^{in\varphi}, \quad u_2(r; \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} t_{n+1}(f) r^{n-1} e^{in\varphi}.$$

Покажем, что $\theta(u_k) \in L_p(X)$, $k = 1, 2$. Достаточно доказать, что $\theta(u_2) \in L_p(X)$ (для u_1 доказательство аналогичное). Примем

$$u_2(r; \varphi) = e^{-i\varphi} r^{-2} \tilde{u}(r; \varphi),$$

где

$$\tilde{u}(r; \varphi) = \sum_{n=2}^{\infty} t_n(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Нетрудно заметить, что функция $u_2(r; \varphi)$ при $r \rightarrow +0$ стремится равномерно на γ к функции $t_2(f)e^{i\varphi}$. Поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{0 < r < 1} \|u_2(r; \cdot)\|_{L_p(J; X)} < +\infty \Leftrightarrow \sup_{0 < r < 1} \|\tilde{u}(r; \cdot)\|_{L_p(J; X)} < +\infty. \quad (3.5)$$

Очевидно, что $\tilde{u} \in A(X)$. С другой стороны, так как $f \in L_p(J; X)$, то из теоремы 2.3 следует, что $\tilde{u} \in H_p(X)$. Тогда из (3.5) непосредственно получаем, что $\theta(u_2) \in L_p(X)$. Также имеем

$$\partial_\varphi u = -i \sum_{n=-\infty}^{-1} t_{n-1}(f) r^{|n|} e^{in\varphi} + i \sum_{n=1}^{\infty} t_{n+1}(f) r^n e^{in\varphi}.$$

Из аналогичных соображений получаем $\partial_\varphi u \in h_p^R(X)$. В результате установлено, что $u \in h_p^{(1)}(X)$. Итак, справедлива следующая основная

Теорема 3.1. Пусть $X \in \text{UMD}$ снабжено инволюцией $(*)$ и $1 < p < +\infty$. Задача (3.1) разрешима в классе $h_p^{(1)}(X)$ для заданной функции $f \in L_p(X)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия t -ортогональности (3.3).

Рассмотрим вопрос о нётеровости оператора $T \in [h_p^{(1)}(X); L_p(X)]$. Подпространство $h_p^{(1)}(X)$, состоящее из X -значных постоянных функций, отождествим с X . Из соотношения (3.2) непосредственно вытекает, что $\text{Ker } T = X$. Следовательно, если $\dim X = \infty$, то оператор T не является нётеровым (в классическом смысле). Пусть $\dim X = r < +\infty$ и, значит, $\varkappa^+ = \dim \text{Ker } T = r$. С другой стороны, из условий t -ортогональности (3.3) и теоремы 3.1 следует, что фактор-пространство $L_p(X)/R_T$ и пространство $X^3 = X \times X \times X$ изоморфны. Действительно, рассмотрим оператор $\Phi : L_p(X) \rightarrow X^3$, $\Phi(f) = (t_{-1}(f), t_0(f), t_1(f))$. По теореме 3.1 имеем $R_T = \text{Ker } \Phi$. Оператор Φ сюръективен: для произвольных $x_{-1}, x_0, x_1 \in X$ достаточно взять $f(\varphi) = x_{-1}e^{-i\varphi} + x_0 + x_1e^{i\varphi}$. Следовательно, $L_p(X)/R_T \simeq X^3$. Тем самым $\dim(L_p(X)/R_T) = 3r$ и в результате индекс $\varkappa(T)$ оператора T равен $\varkappa(T) = \dim \text{Ker } T - \dim(L_p(X)/R_T) = -2r$. Подытожив вышеизложенное, приходим к справедливости следующей теоремы.

Теорема 3.2. Пусть $X \in \text{UMD}$ снабжено инволюцией $(*)$ и $1 < p < +\infty$. Тогда задача (3.1) нётерова (т. е. оператор $T \in [h_p^{(1)}(X), L_p(X)]$ нётеров) в том и только в том случае, если $\dim X = r < +\infty$. При этом если $r < +\infty$, то индекс $\varkappa(T)$ оператора T равен $\varkappa(T) = -2r$.

3.2. Примеры. Рассмотрим некоторые конкретные случаи относительно пространства X с инволюцией $(*)$.

I. $X \equiv C$. В этом случае в качестве инволюции $(*)$ возьмем комплексное сопряжение $(\bar{\cdot})$. Задача (3.1) относительно этого случая изучена в работе [18]. Так как $\dim C = 1$, то по теореме 3.2 задача (3.1) в $h_p^{(1)}(C)$ нётерова и ее индекс равен $\varkappa(T) = -2$.

II. $X \equiv L_q(S; d\mu)$, $1 < q < +\infty$. Здесь $L_q(S; d\mu)$ — лебегово пространство функций $f : S \rightarrow C$ на измеримом пространстве $(S; \mathcal{A}; \mu)$ с σ -конечной мерой μ с нормой

$$\|f\|_{L_q(S; d\mu)} = \left(\int_S |f|^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Положим $(f^*)(x) = \overline{f(x)}$, $x \in S$. Очевидно, что f^* является инволюцией в $L_q(S; d\mu)$. По утверждению 4.2.15 из [1, с. 291] $L_q(S; d\mu)$, $1 < q < +\infty$, обладает UMD-свойством. Следовательно, относительно таких пространств результаты теоремы 3.2 верны, т. е. соответствующий этому случаю оператор T не является нётеровым.

III. $X \equiv \sigma_q$ -классы Шаттена. $\sigma_q \subset [H]$ — класс компактных операторов, где H — некоторое сепарабельное H -пространство. Для полноты изложения определим этот класс. Пусть $\sigma_\infty \subset [H]$ — класс вполне непрерывных операторов. Собственные числа оператора $(T * T)^{\frac{1}{2}}$, где $T \in \sigma_\infty$, называются s -числами оператора T , и их обозначим через $\{s_i(T)\}$. Будем считать, что $\dots s_i \geq s_{i+1} \geq \dots \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Тогда

$$\sigma_q = \left\{ T \in \sigma_\infty : \sum_{i=1}^{\infty} s_i^q(T) < +\infty \right\}.$$

Относительно нормы

$$\|T\|_q = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{\infty} s_i^q(T) \right)^{\frac{1}{q}}, & 1 \leq q < +\infty, \\ s_1(T), & q = +\infty, \end{cases}$$

σ_q — B -пространство. Относительно классов σ_q и их свойств более подробно см., например, [21, 23, 24].

Определим в σ_q инволюцию $*(T) = T^*$. Из соотношения $s_i(T) = s_i(T^*)$ (см. например, [23]) непосредственно следует справедливость всех условий (i)–(iv) инволюции. Более того, из [1, с. 297, пример 4.2.21] следует, что $\sigma_q, 1 < q < +\infty$, обладает UMD-свойством. Таким образом, результаты теоремы 3.2 верны и относительно пространства Шаттена $X \equiv \sigma_q, 1 < q < +\infty$, т. е. и в этом случае оператор T не является нётеровым.

Благодарность. Авторы выражают благодарность рецензенту, замечания которого способствовали улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L. Analysis in Banach spaces. V I. Martingales and Littlewood–Paley theory. Cham: Springer, 2016.
2. Hytönen T., Neerven J., Veraar M., Weis L. Analysis in Banach spaces. V. II. Probabilistic methods and operator theory. Cham: Springer, 2017.
3. Arendt W., Batty C.J.K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Basel: Birkhäuser, 2011.
4. Kreuter M. Vector-valued elliptic boundary value problems on rough domains. Open Access Repositorium der Universität Ulm. Dissertation. 2019.
5. Дьедонне Ж. Основы современного анализа. М.: Мир, 1964.
6. Шварц Л. Анализ. М.: Мир, 1972. Т. II.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Физматлит, 1980.
8. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
9. Arendt W. Vector-valued holomorphic and harmonic functions // Concrete operators. 2016. V. 3, N 1. P. 68–76.
10. Amann H. Elliptic operators with infinite dimensional state space // J. Evol. Equ. 2001. V. 1, N 2. P. 143–188.
11. Arendt W., Nikolski N. Vector-valued holomorphic functions revisited // Math. Z. 2000. V. 234, N 4. P. 777–805.
12. Arendt W., Nikolski N. Addendum: Vector-valued holomorphic functions revisited // Math. Z. 2006. V. 252. P. 687–689.
13. Bonet J., Frerick L., Jordá E. Extension of vector-valued holomorphic and harmonic functions // Studia Math. 2007. V. 183, N 3. P. 225–248.
14. Kreuter M. The Perron solution for vector-valued equations // Positivity. 2020. V. 24, N 3. P. 729–752.

15. Katzourakis N. On a vector-valued generalisation of viscosity solutions for general PDE systems // Zeitschrift for Analysis und ihre Anwendungen. 2022. V. 41, N 1/2. P. 93–132.
16. Bilalov B. T., Sadigova S. R. The concept of t -basis and vector-valued Hardy classes // Turkish Math. 2025. V. 49, N 3. P. 261–286.
17. Bilalov B. T., Buyukarslan A., Nasibova N. P., Sadigova S. R. X -valued Smirnov classes and t -basicity of Faber polynomials // Results Math. 2025.V. 80,N 215. <https://doi.org/10.1007/s00025-025-02525-z>.
18. Sadigova S. R., Mamedov E. M., Nasibova N. P. On the index of a problem with an oblique derivative in weighted Sobolev space // Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics. 2024. V. 44, N 4. P. 122–138.
19. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.
20. Билалов Б.Т. Некоторые вопросы аппроксимации. Баку: Элм, 2016.
21. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014.
22. Bilalov B. T., Sadigova S. R., Sezer Y. $h_p(X)$ Class of X -valued harmonic functions and applications // Filomat. 2025.V. 39, N 35. 12593–12609. <https://doi.org/10.2298/FIL2535593B>.
23. Гохберг И. Ц. Крейн М. Г. Введение в теорию несамосопряженных линейных операторов. М.: Наука, 1982.
24. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 10 августа 2025 г.

После доработки 20 октября 2025 г.

Принята к публикации 7 ноября 2025 г.

Билалов Билал Тельман оглы (ORCID 0000-0003-0750-9339)

Технический университет Йылдыз,

ул. Давутпаша, Эсенлер Стамбул 34220, Турция;

Институт Математики

Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики,

ул. Б. Вахабзаде, 9, Баку AZ 1141, Азербайджан;

Азербайджанский университет архитектуры и строительства,

ул. Айна Султанова, 11, Баку Az1073, Азербайджан

b.bilalov@mail.ru

Садыгова Сабина Рагиб кызы (ORCID 0000-0003-4654-0494)

Институт математики

Министерства Науки и Образования Азербайджанской Республики,

ул. Б. Вахабзаде 9, Баку AZ 1141, Азербайджан

s.sadigovamail.ru

Сезер Йонджа Гувен Тургут кызы (ORCID 0000-0003-3072-8302)

Технический университет Йылдыз,

ул. Давутпаша, Эсенлер Стамбул 34220, Турция

ysezer@yildiz.edu.tr

СПЕКТРЫ НОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

Аннотация. Рассматриваются трехмерные гиперболические многогранники конечного объема с конечным числом вершин. Нормированным объемом многогранника называется отношение его объема к числу вершин. Если задано некоторое множество гиперболических многогранников, то ему можно сопоставить множество нормированных объемов входящих в него многогранников. Это множество будем называть спектром нормированных объемов рассматриваемого множества. Нас будут интересовать прямоугольные гиперболические многогранники. Для подмножества идеальных многогранников мы находим границы спектра нормированных объемов и доказываем их точность. Кроме того, показываем, что спектр делится на дискретную и всюду плотную части. Для подмножества компактных многогранников мы получаем оценки спектра нормированных объемов, доказываем точность верхней границы, а также устанавливаем числовые промежутки, на которых спектр дискретен и всюду плотен. Границы указанных числовых промежутков выражаются через объем правильного идеального гиперболического тетраэдра и объем правильного идеального гиперболического октаэдра.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.402

Ключевые слова: пространство Лобачевского, гиперболический многогранник, прямоугольный многогранник, объем многогранника.

1. Введение

Изучение объемов трехмерных гиперболических многообразий и гиперболических многогранников является важным направлением развития современной геометрии. Представляет интерес описание множеств объемов и их свойств для различных классов многогранников (см., например, [1, 2]). С одной стороны, можно зафиксировать комбинаторное строение многогранника и ставить вопрос о том, при каких двугранных углах многогранник (с конечными или идеальными вершинами) имеет максимальный объем. Например, в силу известного результата Милнора [3] наибольший объем гиперболического 3-симплекса достигается на правильном идеальном 3-симплексе, т. е. на таком, у которого все вершины являются идеальными, а все двугранные углы равны между собой и, следовательно, равны $\pi/3$. Аналогичный результат имеет место в n -мерном случае. Как показано в [4], наибольший объем гиперболического n -симплекса достигается на правильном идеальном n -симплексе. С другой стороны, можно зафиксировать двугранные углы и ставить вопрос о том, какой многогранник

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, а именно А. Ю. Веснин поддержан проектом No. FWNF-2026-0031, А. А. Егоров поддержан проектом No. FWNF-2026-0011.

имеет максимальный объем при заданном числе граней или вершин. Гиперболический многогранник называется прямоугольным, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. О построении трехмерных гиперболических многообразий, соответствующих подгруппам без кручения в группах отражений прямоугольных многогранников, см. [5]. Целью данной работы является исследование объемов прямоугольных многогранников, нормированных по числу вершин.

Следуя [6], для гиперболического многогранника $\mathcal{P}$ конечного объема $\text{vol}(\mathcal{P})$ с конечным числом вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ определим *нормированный объем* как величину $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторое множество гиперболических многогранников. Множество $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$ нормированных объемов многогранников из $\mathcal{R}$ будем называть *спектром нормированных объемов* $\mathcal{R}$.

Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников через число их граней были получены Аткинсоном в [7]. Список из 825 наименьших по объему компактных прямоугольных гиперболических многогранников привел Иноуэ в работе [8]. Список из 248 наименьших значений объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников приведен в [9].

Обозначим через $\mathcal{R}_{ideal}$ множество всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, а через $\mathcal{R}_{comp}$ — множество всех компактных прямоугольных гиперболических многогранников. В обоих случаях мы предполагаем, что многогранники имеют конечный объем и конечное число вершин.

Нормированные объемы этих множеств и их спектры описываются в следующих теоремах, где используемые константы с точностью до шести знаков имеют следующие значения: $v_{oct} = 3,663862$ и $v_{tet} = 1,014941$.

Теорема 1.1. Спектр нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}\}$ принадлежит отрезку $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$, где нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точная. Спектр является дискретным на промежутке $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{4}v_{oct})$ и всюду плотным на отрезке $[\frac{1}{4}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$.

Теорема 1.2. Спектр нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{comp}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}\}$ принадлежит промежутку $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{5}{8}v_{tet})$, где верхняя граница точная. На промежутке $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{1}{32}v_{oct})$ спектр является дискретным, а на отрезке $[\frac{5}{16}v_{tet}, \frac{5}{8}v_{tet}]$ — всюду плотным.

Поведение спектра $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ на отрезке $[\frac{1}{32}v_{oct}, \frac{5}{16}v_{tet}]$ пока остается невыясненным, см. вопрос 6.2.

Отметим связь полученных результатов с теорией гиперболических узлов и зацеплений. Для гиперболического зацепления $L \subset S^3$ рассмотрим объем дополнения к нему, снабженного полной метрикой постоянной отрицательной кривизны, и обозначим его через $\text{vol}(L)$. Пусть $c(L)$ — минимальное число перекрестков среди всех диаграмм зацепления L . В работе [10] Чампанеркар, Кофман и Парселл определили *плотность объема* зацепления следующим образом: $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/c(L)$. Известно, что $\text{vd}(L) \leq v_{oct}$. Последовательность зацеплений L_n таких, что $c(L_n) \rightarrow \infty$, называется *геометрически максимальной*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vd}(L_n) = v_{oct}$. Примеры геометрически максимальных последовательностей зацеплений построены в [10].

Впоследствии Бартон [11] показал, что множество плотностей объемов всех гиперболических зацеплений всюду плотно в отрезке $[0, v_{oct}]$. Адамс, Калдерон

и Майер показали в работе [12], что множество плотностей объемов гиперболических зацеплений в утолщенных поверхностях $S_g \times I$, где $g \geq 2$, всюду плотно в отрезке $[0, 2v_{\text{oct}}]$.

В работе [13] Квон и Тхам исследовали специальный класс гиперболических зацеплений, которые называются полностью аугментированными зацеплениями (в англоязычной литературе они называются *fully augmented links* или кратко *FAL*). Для них естественной мерой сложности является число аугментаций (их также называют вертикальными компонентами зацепления). Для данного класса Квон и Тхам определили плотность объема как отношение объема дополнения зацепления к числу его вертикальных компонент и показали, что множество плотностей лежит в отрезке $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$, причем обе границы точны. Кроме того, они установили, что спектр дискретен в $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$.

Между полностью аугментированными зацеплениями и идеальными прямоугольными многогранниками существует естественная геометрическая связь: дополнение каждого такого зацепления разбивается на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника [14–16] (об аналогичном разбиении дополнений к зацеплениям в утолщенном торе см. [17]). При этом объем зацепления равен удвоенному объему многогранника, а число вертикальных компонент зацепления связано с числом вершин многогранника. Следовательно, с использованием подходящей нормировки спектр плотностей объемов зацеплений можно вложить в спектр нормированных объемов многогранников. Однако класс идеальных прямоугольных многогранников существенно шире, чем подкласс многогранников, возникающий из аугментированных зацеплений, в связи с чем естественно возникает вопрос об описании спектра объемов класса всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 приводятся основные определения и свойства идеальных прямоугольных гиперболических многогранников. Разд. 3 посвящен компактным прямоугольным гиперболическим многогранникам, в частности, многогранникам Лёбелля. В разд. 4 и 5 приводятся доказательства теоремы 1.1 и теоремы 1.2 соответственно. В разделе 6 сравниваются полученные результаты для нормированных объемов идеальных и компактных прямоугольных многогранников с результатами Квон и Тхам о спектре плотности объемов аугментированных зацеплений. В заключение сформулированы некоторые открытые вопросы и одна гипотеза.

2. Идеальные прямоугольные многогранники

Абстрактным многогранником будем называть такой клеточный комплекс на S^2 , который можно реализовать как выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве. Согласно классической теореме Штейница (см., например [18, гл. 1]), реализуемость клеточного комплекса как выпуклого евклидова многогранника эквивалентна тому, что его одномерный скелет является 3-связным графом без петель и кратных ребер. Напомним, что граф называется k -связным, если он содержит по крайней мере $k + 1$ вершину и любые две его различные вершины можно соединить по крайней мере k независимыми путями. В силу теоремы Менгера — Уитни граф, содержащий по крайней мере $k + 1$ вершину, является k -связным тогда и только тогда, когда после удаления любых его $k - 1$ вершин (и инцидентных им ребер), получается связный граф. Обозначим через $E(P)$ множество ребер абстрактного многогранника P . Раз-

меткой абстрактного графа P будем называть отображение $\mathcal{E} : E(P) \rightarrow (0, \pi/2]$. Пару $(P, \mathcal{E})$ будем называть *размеченным абстрактным многогранником*. Будем говорить, что размеченный абстрактный многогранник *реализуется как гиперболический многогранник*, если имеется такой многогранник $\mathcal{P}$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, что существует сохраняющий разметку изоморфизм графов, переводящий одномерный скелет $\mathcal{P}^{(1)}$ с разметкой его ребер двугранными углами в размеченный абстрактный многогранник $(P, \mathcal{E})$. Ниже мы будем рассматривать такие многогранники в $\mathbb{H}^3$, у которых все двугранные углы равны $\pi/2$, и будем называть их *прямоугольными*. Вершина многогранника в $\mathbb{H}^3$ называется *идеальной*, если она лежит на абсолюте $\partial\mathbb{H}^3$. Подробнее о многогранниках в пространстве $\mathbb{H}^3$ см. [19].

Пусть G — плоский граф, а G^* — граф, двойственный к G . Простую замкнутую кривую, составленную из $k \geq 3$ ребер в G^* , будем называть *k-обходом*. *Призматическим k-обходом* будем называть такой k -обход γ , что никакие два ребра графа G , пересекающие γ , не имеют общей вершины.

Необходимые и достаточные условия реализации в $\mathbb{H}^3$ размеченного абстрактного многогранника конечного объема были получены в работах Е. М. Андреева [20, 21] (см. также [22]). Мы приведем результат для частного случая прямоугольных многогранников, следуя работе [7]. В этом случае необходимые и достаточные условия являются чисто комбинаторными.

Теорема 2.1. *Прямоугольный абстрактный многогранник $(P, \mathcal{E})$ реализуется как гиперболический многогранник, который обозначим через $\mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) P имеет не менее шести граней;
- (2) каждая вершина в P имеет валентность 3 или 4;
- (3) для каждой трех граней (F_i, F_j, F_k) в P таких, что $F_i \cap F_j$ и $F_j \cap F_k$ являются ребрами в P с различными концами, выполнено $F_i \cap F_k = \emptyset$;
- (4) P^* не имеет призматических 4-обходов.

При этом каждая 3-валентная вершина в P соответствует конечной вершине в $\mathcal{P}$, каждая 4-валентная вершина в P соответствует идеальной вершине в $\mathcal{P}$, и реализация единственна с точностью до изометрии.

Идеальным прямоугольным многогранником будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник, у которого все вершины являются идеальными. Идеальные прямоугольные многогранники естественным образом связаны с теорией узлов, поскольку дополнения к гиперболическим полностью аугментированным зацеплениям разбиваются на пары изометричных идеальных прямоугольных многогранников (см. [14–16]).

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$ обозначим через F число граней, через V число вершин, а через p_k — число k -угольных граней, где $k \geq 3$. Тогда $F = \sum_{k \geq 3} p_k$. Поскольку все вершины многогранника являются 4-валентными, из формулы Эйлера для многогранников следует, что $F = V + 2$, откуда

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k. \quad (1)$$

В частности, идеальным прямоугольным многогранником с наименьшим числом граней является октаэдр.

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство идеальных прямоугольных многогранников, обобщающих октаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

ПРИМЕР 2.1. Для $n \geq 3$ n -антипризмой $A(n)$ называется $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним n -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по n треугольников, у которого в каждой вершине сходится по четыре ребра. Диаграммы Шлегеля антипризм $A(3)$ и $A(4)$ приведены на рис. 1. В частности, $A(3)$ является октаэдром. Реализуемость прямоугольных антипризм как идеальных гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольную гиперболическую n -антипризму будем обозначать через $\mathcal{A}(n)$.

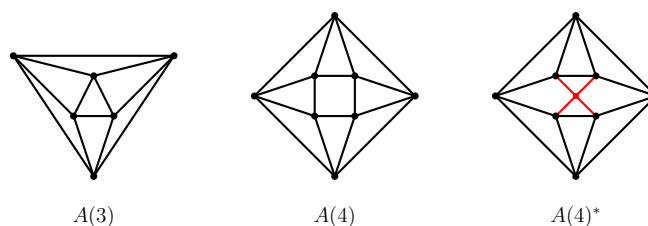


Рис. 1. Антипризмы $A(3)$ и $A(4)$, скрученная антипризма $A(4)^*$.

Следуя [23], определим операцию, которая называется *скручиванием ребер*. Операция состоит в следующем. Пусть P — абстрактный многогранник, у которого в некоторой грани имеются четыре различные 4-валентные вершины, образующие две пары смежных вершин, соединенных ребрами e_1 и e_2 . Применим преобразование в грани, состоящее в удалении ребер e_1 и e_2 , создании новой вершины v и соединении этой вершины ребрами с рассматриваемыми четырьмя вершинами. Многогранник, полученный в результате такого преобразования, обозначим через P^* . Будем говорить, что P^* получен из P *скручиванием ребер*. На рис. 2 указаны участвующие в скручивании ребра e_1 , e_2 и появившаяся новая вершина v с инцидентными ей ребрами.

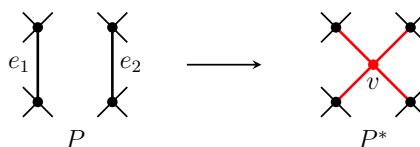


Рис. 2. Скручивание ребер e_1 и e_2 .

Из теоремы 2.1 следует, что если $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$, то $\mathcal{P}^* \in \mathcal{R}_{ideal}$. Следующий результат показывает, что любой многогранник из $\mathcal{R}_{ideal}$ является антипризмой или может быть получен из антипризмы с помощью конечного числа операций скручивания ребер.

Теорема 2.2 [23]. Класс многогранников $\mathcal{R}_{ideal}$ порождается антипризмами $\mathcal{A}(n)$, $n \geq 3$, и операциями скручивания ребер.

Традиционно объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляются с помощью функции Лобачевского $\Lambda(\theta)$, введенной Милнором [3],

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

Как показал Тёрстон [24], объем прямоугольной гиперболической n -антипризмы $\mathcal{A}(n)$, $n \geq 3$, выражается следующей формулой:

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) = 2n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right]. \quad (2)$$

Далее мы будем приводить все приближенные значения функции Лобачевского и объемы многогранников с точностью до шести знаков после запятой без указания отброшенных цифр многоточием. В частности, при $n = 3$ получаем объем идеального прямоугольного октаэдра:

$$v_{\text{oct}} = \text{vol}(\mathcal{A}(3)) = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663862.$$

Из формулы (2) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{A}(n))}{\text{ver}(\mathcal{A}(n))} = \frac{v_{\text{oct}}}{2}$.

На рис. 3 приведен граф, представляющий пять поколений многогранников, полученных из $\mathcal{A}(4)$ операциями скручивания ребер. Вершины графа соответствуют многогранникам $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{24}$, где $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}(4)$. Две вершины соединяются ребром, если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием скручивания ребер.

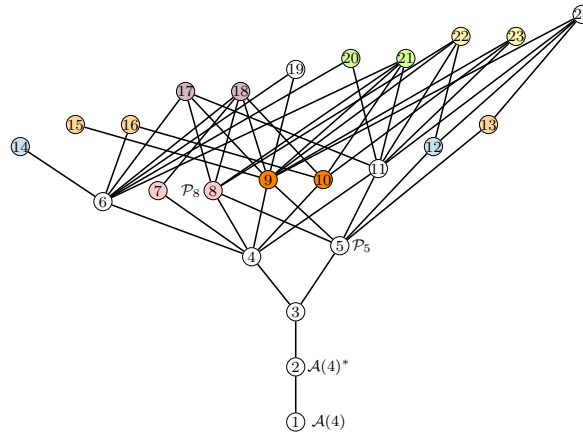


Рис. 3. Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{A}(4)$.

Отметим, что в рамках приближенных расчетов имеют место следующие равенства объемов:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{P}_7) &= \text{vol}(\mathcal{P}_8) = 10,991587; & \text{vol}(\mathcal{P}_9) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{10}) = 11,136296; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{12}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{14}) = 11,801747; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{13}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{15}) = \text{vol}(\mathcal{P}_{16}) = 12,046092; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{17}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{18}) = 12,276278; & \text{vol}(\mathcal{P}_{20}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{21}) = 12,611908; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{22}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{23}) = 12,883862. \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При операции скручивания ребер нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{A}(4)^*$. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{A}(4)^*) > \omega(\mathcal{A}(4))$, поскольку $\omega(\mathcal{A}(4)) = \frac{6,023046}{8} = 0,75288$, а $\omega(\mathcal{A}(4)^*) = \frac{7,327725}{9} = 0,814191$. Так как многогранник $\mathcal{A}(4)^*$ можно составить из двух экземпляров $\mathcal{A}(3)$, то $\text{vol}(\mathcal{A}(4)^*) = 2\text{vol}(\mathcal{A}(3))$. Объемы многогранников $\mathcal{A}(3)$ и

$\mathcal{A}(4)$ вычислены по формуле (2). Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников, отмеченных на рис. 3 как $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$. Диаграммы Шлегеля этих многогранников приведены на рис. 4. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{P}_5^*) < \omega(\mathcal{P}_5)$, поскольку $\omega(\mathcal{P}_5) = \frac{10,149416}{11} = 0,922674$, а $\omega(\mathcal{P}_5^*) = \omega(\mathcal{P}_8) = \frac{10,991587}{12} = 0,915965$. Объемы многогранников $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8$ были вычислены в работе [9].

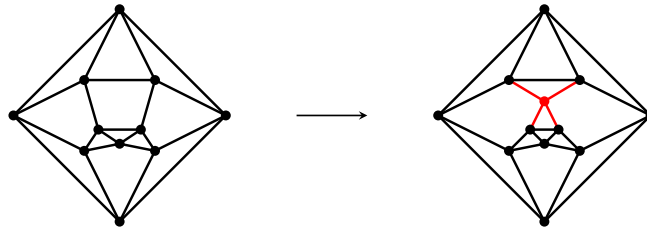


Рис. 4. Многогранники $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$.

Верхние и нижние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников через число вершин были получены Аткинсоном в [7].

Теорема 2.3 [7, теорема 2.2]. Если идеальный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ имеет $\text{ver}(\mathcal{P})$ вершин, то

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 2) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 4). \quad (4)$$

Оба неравенства превращаются в равенства для правильного идеального гиперболического октаэдра — единственного идеального прямоугольного многогранника с шестью вершинами. Более того, верхняя оценка асимптотически точна: существует последовательность идеальных прямоугольных многогранников $\{Q_i\}$ с $\text{ver}(Q_i) \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}.$$

Отметим, что в силу теоремы 2.1 в неравенстве (4) подразумевается, что $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$. В дальнейшем верхняя оценка из (4) была улучшена в [25] для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 8$, а в [26] — для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$.

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{ideal}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$, т. е. множество идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих n вершин. Объемы многогранников, принадлежащих множествам $\mathcal{R}_{ideal}^n$, где $6 \leq n \leq 21$, были вычислены в [9].

В табл. 1 для $6 \leq n \leq 21$ приведены следующие величины: число элементов $|\mathcal{R}_{ideal}^n|$ в множестве $\mathcal{R}_{ideal}^n$; число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)|$; минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ значения нормированных объемов.

3. Компактные прямоугольные многогранники

Компактным прямоугольным многогранником будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник, у которого все вершины являются конечными. В силу теоремы 2.1 все вершины компактного прямоугольного многогранника являются 3-валентными. Отметим (см., например [27, теорема 3.2]),

Таблица 1. Свойства нормированных объемов в идеальном случае

n	$ \mathcal{R}_{ideal}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$
6	1	1	0,610643	0,610643
7	0	0	-	-
8	1	1	0,752880	0,752880
9	1	1	0,814191	0,814191
10	2	2	0,813788	0,861241
11	2	2	0,880628	0,922674
12	9	7	0,845784	1,003841
13	11	7	0,907826	1,026982
14	37	17	0,864735	1,059477
15	79	31	0,920885	1,088771
16	249	79	0,876903	1,129321
17	671	172	0,927656	1,148432
18	2182	495	0,885188	1,180085
19	6692	1359	0,931280	1,204969
20	22131	4276	0,891085	1,229961
21	72405	13031	0,933202	1,248958

что каждая грань компактного прямоугольного многогранника является прямоугольным многоугольником и, следовательно, имеет не менее чем 5 сторон.

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}$ обозначим через F число его граней, V — число его вершин, и p_k — число его k -угольных граней, $k \geq 5$. Тогда $F = \sum_{k \geq 5} p_k$.

Из формулы Эйлера и 3-валентности вершин многогранника следует, что $2F = V + 4$, откуда

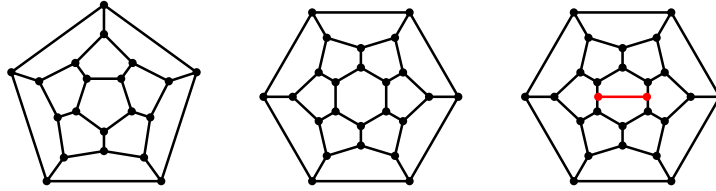
$$p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k. \quad (5)$$

В частности, компактным прямоугольным гиперболическим многогранником с наименьшим числом граней, а следовательно, и с наименьшим числом вершин, является додекаэдр.

Поскольку условия реализации абстрактного прямоугольного многогранника как компактного прямоугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$ впервые исследовались А. В. Погореловым [28], эти многогранники называют также *многогранниками Погорелова*. Информация о жизни и научных исследованиях Алексея Васильевича Погорелова изложена в статье [29], приуроченной к 100-летию со дня его рождения. Отметим, что многогранники фуллеренов являются многогранниками Погорелова. Корреляция объемов прямоугольных гиперболических фуллеренов с химическими свойствами фуллеренов обсуждается в работе [30].

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство компактных прямоугольных многогранников, обобщающих додекаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

ПРИМЕР 3.1 [31]. Для $n \geq 5$ *многогранником Лёбелля* $L(n)$ называется $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним n -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по n пятиугольников, у которого в каждой вершине сходится по три ребра. Диаграммы Шлегеля многогранников $L(5)$ и $L(6)$ приведены на рис. 5. В частности, $L(5)$ является додекаэдром. Реализуемость прямоугольных многогранников Лёбелля как гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольные гиперболические многогранники Лёбелля

Рис. 5. Додекаэдр $L(5)$, многогранник $L(6)$ и многогранник $L(6)^+$.

будем обозначать через $\mathcal{L}(n)$.

Как показано в [32], объем многогранника $\mathcal{L}(n)$, $n \geq 5$, выражается следующей формулой:

$$\text{vol}(\mathcal{L}(n)) = \frac{n}{2} \left[2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (6)$$

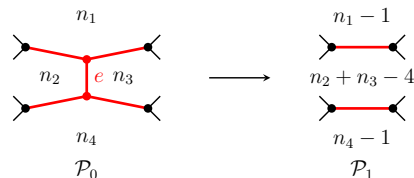
где

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right).$$

В частности, $\text{vol}(\mathcal{L}(5)) = 4,306210$ и $\text{vol}(\mathcal{L}(6)) = 6,023046$. Геометрические и арифметические свойства многогранников $\mathcal{L}(n)$ обсуждаются в работе [33]. О геометрических свойствах почти прямоугольных многогранников Лёбелля см. [34].

Следуя [27], определим две операции на множестве абстрактных многогранников: композицию и реберную хирургию. Пусть P_1 и P_2 — два абстрактных многогранника. Пусть F_1 — грань в P_1 , которая имеет столько же сторон, что и некоторая грань F_2 в P_2 . Определим новый абстрактный многогранник $P = P_1 \# P_2$ как результат комбинаторного объединения многогранников P_1 и P_2 вдоль граней F_1 и F_2 . Многогранник P будем называть *связной суммой*, или *композицией*, многогранников P_1 и P_2 . Как показано в [27, теорема 4.4], если многогранники P_1 и P_2 реализуются как компактные прямоугольные гиперболические, то P также реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. *Декомпозицией* будем называть операцию, обратную к композиции, т. е. разрезание многогранника P вдоль некоторого призматического k -обхода, $k \geq 5$, на два многогранника P_1 и P_2 , каждый из которых реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Как показано в [27, теорема 6.4], если компактный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ является композицией компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$.

Пусть F_1 и F_2 — две различные грани в компактном прямоугольном гиперболическом многограннике $\mathcal{P}$. Будем говорить, что F_1 и F_2 *соединены ребром*, если они не являются смежными и найдется ребро e в $\mathcal{P}$, соединяющее вершину v_1 на границе F_1 с вершиной v_2 на границе F_2 . Поскольку все вершины в $\mathcal{P}$ являются 3-валентными, то каждое ребро соединяет лишь одну пару граней. Ребро e будем называть *хорошим*, если e соединяет грани с числом сторон не менее 6, и *очень хорошим*, если оно дополнительно не является частью призматического 5-обхода. *Реберной хирургией* вдоль ребра e будем называть удаление e с соответствующим изменением числа вершин, ребер и граней (рис. 6). Как показано в [27, теоремы 7.1, 8.6], если $\mathcal{P}_0$ — компактный прямоугольный гиперболический многогранник, а $e \in \mathcal{P}_0$ — очень хорошее ребро, то многогранник

Рис. 6. Реберная хирургия вдоль ребра e .

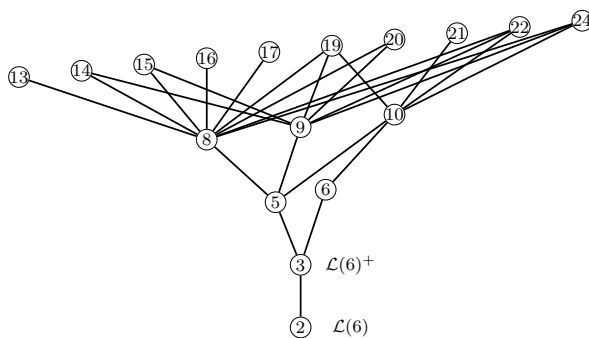
$\mathcal{P}_1$, полученный хирургией вдоль ребра e , также является компактным прямоугольным гиперболическим и при этом $\text{vol}(\mathcal{P}_0) > \text{vol}(\mathcal{P}_1)$.

Обратную операцию будем называть *добавлением ребра e* и обозначать полученный многогранник через $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{e\}$. На рис. 5 приведена диаграмма Шлегеля многогранника $L(6)^+$, полученного из $L(6)$ добавлением ребра.

Важная роль многогранников Лёбелля для описания структуры множества компактных прямоугольных гиперболических многогранников обусловлена следующей теоремой.

Теорема 3.1 [27, теорема 9.1]. Пусть $\mathcal{P}_0$ — компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность попарно не пересекающихся объединений компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ таких, что для $i = 1, \dots, k$ объединение $\mathcal{P}_i$ получено из $\mathcal{P}_{i-1}$ декомпозицией либо реберной хирургией, а $\mathcal{P}_k$ состоит из многогранников Лёбелля. Более того,

$$\text{vol}(\mathcal{P}_0) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_2) \geq \dots \geq \text{vol}(\mathcal{P}_k).$$

Рис. 7. Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{L}(6)$.

На рис. 7 представлен начальный подграф графа из работы [8], который иллюстрирует четыре поколения многогранников, полученных из $\mathcal{L}(6)$ операциями добавления ребра. Номера вершин соответствуют порядковым номерам многогранников в списке 825 первых многогранников из работы [8]. Две вершины соединяются ребром, если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием добавления ребра.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При операции добавления ребра нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара $\mathcal{L}(6)$ и $\mathcal{L}(6)^+$, см. рис. 5. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{L}(6)^+) > \omega(\mathcal{L}(6))$, поскольку $\omega(\mathcal{L}(6)) = \frac{6.023046}{24} = 0,250960$, а

$\omega(\mathcal{L}(6)^+) = \frac{6,967011}{26} = 0,267961$. Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$, см. рис. 8, где $\mathcal{Q}^+$ получен добавлением ребра, соединяющего ребра e_1 и e_2 многогранника $\mathcal{Q}$, имеющего 42 вершины. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{Q}) > \omega(\mathcal{Q}^+)$, поскольку $\omega(\mathcal{Q}) = \frac{12,713430}{42} = 0,302700$, а $\omega(\mathcal{Q}^+) = \frac{12,996118}{44} = 0,295366$.

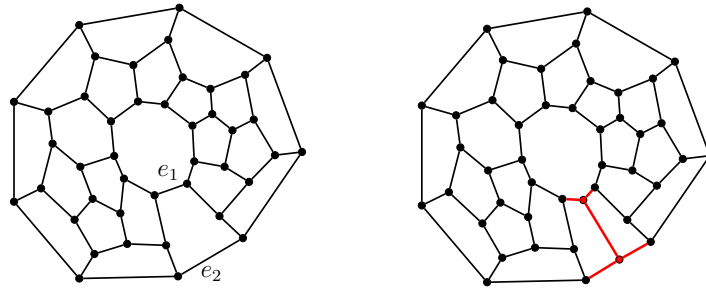


Рис. 8. Многогранники $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$.

Ниже мы будем использовать многогранники Лёбелля $\mathcal{L}(n)$ для построения новых компактных прямоугольных многогранников.

ПРИМЕР 3.2. Для целого $k \geq 1$ обозначим через $\mathcal{L}_k(n)$ многогранник с $2n(k+1)$ вершинами, построенный из k копий многогранника $\mathcal{L}(n)$ путем их последовательного склеивания вдоль n -угольных граней. В частности, $\mathcal{L}_1(n) = \mathcal{L}(n)$. В качестве примера на рис. 9 изображена развертка боковой поверхности многогранника $\mathcal{L}_3(6)$. Многогранники $\mathcal{L}_k(n)$ будем называть *башнями из многогранников Лёбелля*.

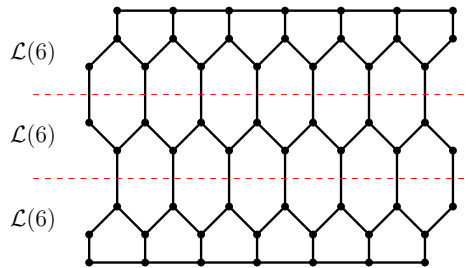


Рис. 9. Боковая поверхность многогранника $\mathcal{L}_3(6)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Многогранник $\mathcal{L}(n)$ имеет $2n$ изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к двум n -угольным граням. В силу построения башня $\mathcal{L}_k(n)$ имеет $2n$ таких же изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к верхней или нижней n -угольной грани башни.

В работе [35] было установлено следующее свойство.

Теорема 3.2 [35, теорема 3]. Для любого целого $k \geq 1$ для башен компактных прямоугольных гиперболических многогранников Лёбелля $\mathcal{L}_k(n)$ имеет место следующее свойство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{L}_k(n))}{\text{ver}(\mathcal{L}_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_{\text{tet}}}{8}, \quad (7)$$

Таблица 2. Плотность нормированных объемов в компактном случае

n	$ \mathcal{R}_{comp}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$
20	1	1	0,215310	0,215310
22	0	0	-	-
24	1	1	0,250960	0,250960
26	1	1	0,267961	0,267961
28	3	3	0,270116	0,285722
30	4	4	0,287080	0,298220
32	12	12	0,281845	0,311786
34	23	23	0,286201	0,323119
36	71	71	0,289334	0,335671
38	187	187	0,291020	0,345760
40	627	627	0,292711	0,355566
42	1970	1952	0,294115	0,364289
44	6833	6771	0,295366	0,372678
46	23384	23082	0,296473	0,380143

где $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$ — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра.

В частности, при $k = 1$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}(n)) = \frac{5}{16}v_{\text{tet}}$, а при $k \rightarrow \infty$ имеем $\lim_{k, n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}_k(n)) = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$.

Оценки объемов компактных прямоугольных многогранников были получены Аткинсоном [7].

Теорема 3.3 [7, теорема 2.3]. Если компактный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ имеет $\text{ver}(\mathcal{P})$ вершин, то

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{5v_{\text{tet}}}{8}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 10). \quad (8)$$

где $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$ — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра. При этом существует последовательность многогранников $\{R_i\} \in \mathcal{R}_{comp}$ с $\text{ver}(R_i)$ вершинами такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_i)}{\text{ver}(R_i)} = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$.

Как отмечено выше, минимальным по числу вершин компактным прямоугольным гиперболическим многогранником является додекаэдр. Таким образом, в формуле (8) подразумевается, что $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 20$. В дальнейшем верхняя оценка из (8) была улучшена в [25] для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$, а в [26] — для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 81$.

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{comp}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$, т. е. множество компактных прямоугольных многогранников, имеющих ровно n вершин. Поскольку одномерные скелеты многогранников из $\mathcal{R}_{comp}^n$ являются 3-валентными графами, число вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ четно. Для четных $20 \leq n \leq 46$ число элементов $|\mathcal{R}_{comp}^n|$ в множестве $\mathcal{R}_{comp}^n$, число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)|$, а также минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ значения нормированных объемов приведены в табл. 2.

4. Доказательство теоремы 1.1

Установим, что $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) \subset [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}})$, при этом нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точна. Из неравенства (4) следует

неравенство

$$\frac{v_{\text{oct}} \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 2}{4 \operatorname{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}} \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 4}{2 \operatorname{ver}(\mathcal{P})},$$

где $\omega(\mathcal{P}) = \operatorname{vol}(\mathcal{P}) / \operatorname{ver}(\mathcal{P})$ и $\operatorname{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$. Рассмотрим нижнюю оценку. Поскольку при $N \geq 6$ функция $f(N) = \frac{N-2}{N}$ монотонно возрастает, то $\min_{N \geq 6} f(N) =$

$f(6) = \frac{2}{3}$, откуда $\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$ и равенство достигается на октаэдре. Рассмотрим верхнюю оценку. При $N \geq 6$ функция $g(N) = \frac{N-4}{N}$ монотонно возрастает и стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$, следовательно, если $\operatorname{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$, то имеет место неравенство $\omega(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$. При этом, поскольку по теореме 2.3 верхняя оценка в неравенстве (4) является асимптотически точной, то существует последовательность многогранников, для которой нормированный объем стремится к $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$. Значит, верхняя граница спектра равна $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$, но она не достигается.

Покажем, что на промежутке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$ спектр является дискретным. В самом деле, для произвольного $\frac{1}{6}v_{\text{oct}} < C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ рассмотрим отрезок $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Предположим, что $\omega(\mathcal{P}) \in [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Тогда из нижней оценки в неравенстве (4) имеем

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ver}(\mathcal{P})}\right) \leq \omega(\mathcal{P}) \leq C.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \frac{2}{\operatorname{ver}(\mathcal{P})} \leq \frac{4C}{v_{\text{oct}}} \quad \text{и, далее,} \quad \operatorname{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{2v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 4C}.$$

В силу выбора C выражение в правой части неравенства положительно. Таким образом, число вершин $\operatorname{ver}(\mathcal{P})$ ограничено сверху величиной, зависящей только от C и константы v_{oct} .

Согласно теореме 2.1 идеальный прямоугольный гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 4-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом отрезке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$, где $C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$, содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на промежутке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$.

Теперь установим, что спектр нормированных объемов всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$. Для удобства изложения введем вспомогательные величины. Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ определим *модифицированное число вершин* $\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P})$ по формуле $\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P}) = \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 3$, а также определим *модифицированный нормированный объем* $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, полагая

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\operatorname{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P})}.$$

В силу равенства (1) каждый многогранник из $\mathcal{R}_{\text{ideal}}$ имеет не менее восьми треугольных граней. Хорошо известно (см., например, [36, предложение 2.5]), что в геометрии Лобачевского любые два идеальных треугольника изометричны друг другу. Это свойство позволяет корректно определить операцию *связной суммы*, т. е. склейки двух идеальных прямоугольных многогранников вдоль их треугольных граней. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$. Выберем треугольные грани $T_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $T_2 \subset \mathcal{P}_2$. Поскольку T_1 и T_2 изометричны, мы можем склеить $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вдоль этих граней. Обозначим полученный многогранник через $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$.

Лемма 4.1. При операции связной суммы идеальных прямоугольных многогранников вдоль треугольных граней объем ведет себя аддитивно:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

а число вершин изменяется следующим образом:

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3.$$

При этом многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ является идеальным прямоугольным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с T_1 и T_2 , попарно образуют плоские двугранные углы величины π и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно, $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ снова является прямоугольным многогранником. Поскольку двумерная грань склейки имеет нулевой трехмерный объем, выполняется равенство $\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$. При отождествлении граней склейки три идеальные вершины треугольника T_1 попарно отождествляются с тремя идеальными вершинами треугольника T_2 . Поскольку эти вершины лежат на абсолюте, после склейки остаются идеальными вершинами. Таким образом, 6 исходных вершин, соответствующих T_1 и T_2 , сливаются в 3 вершины, что приводит к формуле $\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3$. Лемма доказана.

Заметим, что при операции связной суммы модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) - 3 \\ &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) - 3) + (\text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Вычислим модифицированный нормированный объем связной суммы:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)} = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}. \quad (9)$$

Таким образом, величина $\widetilde{\omega}$ для связной суммы многогранников ведет себя как взвешенное среднее значений $\widetilde{\omega}$ слагаемых, где весами выступают модифицированные числа вершин.

Рассмотрим последовательность многогранников $\#_k \mathcal{P}$, полученную последовательным склеиванием $k \geq 1$ копий одного и того же многогранника $\mathcal{P}$. Очевидно, что $\widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P})$. Заметим, что

$$\omega(\#_k \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_k \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3} = \widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) \cdot \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3}.$$

Поскольку $\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) = k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, дробь справа стремится к 1. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Значит, чтобы аппроксимировать произвольное значение в $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть для многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ модифицированные объемы равны $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$. Без ограничения общности можем считать, что $A < B$. Покажем, как построить последовательность многогранников таких,

чтобы их нормированные объемы сходились к произвольному значению на интервале (A, B) . Обозначим через $\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2$ многогранник, полученный связной суммой k копий $\mathcal{P}_1$ и m копий $\mathcal{P}_2$ вдоль треугольных граней. Последовательно применяя формулу (9) получим

$$\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ выберем последовательности таких целых чисел $\{k_i\}$ и $\{m_i\}$, что $(k_i, m_i) = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{m_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{m_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений $\tilde{\omega}$ плотно в интервале между любыми двумя значениями $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$ и $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$.

Чтобы доказать плотность нормированных объемов на $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ воспользуемся идеальными прямоугольными n -антипризмами $\mathcal{A}(n)$. Используя формулу (2), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) \sim \frac{v_{\text{oct}}}{2}n.$$

При этом $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{A}(n)) = (2n + 2) - 3 = 2n - 1 \sim 2n$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\mathcal{A}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{v_{\text{oct}}}{2}n}{2n} = \frac{v_{\text{oct}}}{4}.$$

Таким образом, во-первых, найдется антипризма $\mathcal{A}(n)$ со значением $\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n))$, сколь угодно близким к $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$. Во-вторых, согласно теореме 2.3 существует последовательность многогранников $\{Q_i\}$, для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ и тем самым $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(Q_i) = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$.

Для сколь угодно малого ε выберем в качестве $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ многогранник $\mathcal{A}(n_\varepsilon)$, для которого $|\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n_\varepsilon)) - \frac{1}{4}v_{\text{oct}}| < \varepsilon$, а в качестве $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ выберем многогранник Q_{i_ε} из теоремы 2.3, для которого $|\frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \tilde{\omega}(Q_{i_\varepsilon})| < \varepsilon$. Применяя к многогранникам $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ и $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ те же рассуждения, что выше мы применяли к многогранникам $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, получаем, что нормированный объем всюду плотен на интервале $(\frac{1}{4}v_{\text{oct}} + \varepsilon, \frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \varepsilon)$. Таким образом, нормированный объем всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$. Доказательство теоремы 1.1 завершено.

5. Доказательство теоремы 1.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Покажем, что $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}) \subset [\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$. Разделив все части неравенства (8) на $\text{ver}(\mathcal{P})$, получим следующее неравенство для нормированного объема:

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 8}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10}{\text{ver}(\mathcal{P})}.$$

Как следует из формулы (5), минимальное число вершин для многогранника из $\mathcal{R}_{\text{comp}}$ равно 20. При $N \geq 20$ функция $h(N) = \frac{N-8}{N} = 1 - \frac{8}{N}$ монотонно

возрастает. Минимальные значения нормированных объемов многогранников из $\mathcal{R}_{comp}$ с числом вершин от 20 до 46 представлены в табл. 2. Подставляя $\text{ver}(\mathcal{P}) = 48$, получаем

$$\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{v_{\text{oct}}}{32} \cdot \frac{48 - 8}{48} = \frac{5}{192} v_{\text{oct}}.$$

Как видно из табл. 2, величина $\frac{5}{192} v_{\text{oct}}$ не превосходит минимальных значений нормированных объемов многогранников с числом вершин от 20 до 46, поэтому $\frac{5}{192} v_{\text{oct}}$ можно взять в качестве оценки на нижнюю границу спектра. Для верхней границы рассмотрим функцию $u(N) = \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \left(1 - \frac{10}{N}\right)$. Она стремится к $\frac{5v_{\text{tet}}}{8}$ при $N \rightarrow \infty$. Поскольку по теореме 3.3 верхняя оценка в (8) асимптотически точна, верхняя граница спектра равна $\frac{5}{8} v_{\text{tet}}$.

Покажем, что на промежутке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, \frac{1}{32} v_{\text{oct}}\right)$ спектр дискретный. В самом деле, для произвольного $\frac{5}{192} v_{\text{oct}} < C < \frac{v_{\text{oct}}}{32}$ рассмотрим отрезок $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$. Предположим, что $\omega(\mathcal{P}) \in \left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$. Тогда из нижней оценки в неравенстве (8) имеем

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32} \left(1 - \frac{8}{\text{ver}(\mathcal{P})}\right) \leq C \quad \text{и, далее,} \quad \text{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{8v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 32C}.$$

В силу выбора C выражение в правой части неравенства положительное. Таким образом, число вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ ограничено сверху величиной, зависящей только от C и константы v_{oct} .

Согласно теореме 2.1 компактный гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 3-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом отрезке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$ содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на промежутке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, \frac{1}{32} v_{\text{oct}}\right)$.

Покажем, что в отрезке $\left[\frac{5}{16} v_{\text{tet}}, \frac{5}{8} v_{\text{tet}}\right]$ спектр всюду плотен. Определим операцию *связной суммы* (склейки) двух многогранников из $\mathcal{R}_{comp}$ вдоль двух изометричных пятиугольных граней.

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}$ определим модифицированное число вершин $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) = \text{ver}(\mathcal{P}) - 10$, а также определим модифицированный нормализованный объем $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, полагая

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})}.$$

Связь между обычным нормированным объемом $\omega(\mathcal{P})$ и модифицированным $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ задается соотношением

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10} = \omega(\mathcal{P}) \cdot \frac{\text{ver}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10}.$$

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{comp}$. Предположим, что имеются изометричные друг другу пятиугольные грани $F_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $F_2 \subset \mathcal{P}_2$. Склеим многогранники $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вдоль этих граней и обозначим полученный многогранник через $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$. Данную операцию будем называть *связной суммой вдоль пятиугольных граней*.

Лемма 5.1. При операции связной суммы компактных прямоугольных многогранников вдоль пятиугольных граней объем ведет себя аддитивно:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

а число вершин изменяется следующим образом:

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10.$$

При этом многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ является компактным прямоугольным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с F_1 и F_2 , попарно образуют плоские двугранные углы величины π и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно, $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ снова является прямоугольным многогранником. В компактном прямоугольном многограннике все вершины 3-валентные. Каждая вершина склеиваемой грани образована пересечением самой этой грани и двух перпендикулярных ей смежных. При склейке грань уходит во внутренность, а две смежные грани гладко сливаются. Следовательно, точка их пересечения становится внутренней точкой ребра и перестает быть вершиной. Поскольку две склеиваемые пятиугольные грани содержат суммарно 10 вершин, все они при отождествлении исчезают из 1-скелета, что дает искомую формулу. Лемма доказана.

При этом модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10) - 10 = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2).$$

Следовательно, модифицированный нормированный объем связной суммы вдоль пятиугольных граней является взвешенным средним:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}. \quad (10)$$

Рассмотрим последовательное склеивание m копий одного и того же многогранника $\mathcal{P}$. Обозначим полученный многогранник символом $\#_m \mathcal{P}$. Тогда $\widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, так как это среднее одинаковых величин. Связь между обычным и модифицированным нормированным объемом описывается формулой

$$\omega(\#_m \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_m \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10} = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10}.$$

Поскольку $\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) = m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, дробь справа стремится к 1. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Это означает, что любое значение модифицированного нормированного объема $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ является предельной точкой для спектра обычных нормированных объемов ω . Таким образом, чтобы аппроксимировать произвольное значение в отрезке $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{8}]$ нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — два многогранника из $\mathcal{R}_{\text{comp}}$. Пусть $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$, где $A < B$. Рассмотрим многогранник $\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2$, являющийся связной суммой k копий $\mathcal{P}_1$ и ℓ копий $\mathcal{P}_2$ вдоль изометричных друг другу пятиугольных граней. Тогда

$$\widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ выберем последовательности таких целых чисел $\{k_i\}$ и $\{\ell_i\}$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{\ell_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{\ell_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений $\widetilde{\omega}$ плотно в интервале между любыми двумя значениями $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$.

Теперь перейдем к конкретным семействам многогранников. Для реализации связной суммы нам нужны многогранники с изометричными пятиугольными гранями. Рассмотрим многогранники Лёбелля $\mathcal{L}(n)$ и их башни $\mathcal{L}_k(n)$. При фиксированном n все боковые пятиугольные грани этих многогранников изометричны друг другу. Обозначим множество таких пятиугольных граней через $\mathcal{F}_n$. У многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ имеется по $2n$ попарно изометричных пятиугольных граней.

Более того, заметим, что если пара произвольных многогранников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имеет по p_1 и p_2 попарно изометричных пятиугольных граней из множества $\mathcal{F}_n$, то многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$, полученный связной суммой вдоль пары таких граней, имеет не менее $p_1 + p_2 - 12$ изометричных пятиугольных граней класса $\mathcal{F}_n$. Действительно, при склейке две грани $F_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $F_2 \subset \mathcal{P}_2$ уходят во внутренность многогранника. Кроме того, могут изменить свой комбинаторный тип (и тем самым перестать принадлежать классу $\mathcal{F}_n$) грани, инцидентные граням склейки — их ровно по 5 в каждом из многогранников. В худшем случае все эти 12 граней принадлежали $\mathcal{F}_n$ и были утрачены.

Далее будем полагать, что $n > 6$. Тогда после нескольких операций связной суммы, примененных к копиям многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ вдоль пятиугольных граней из множества $\mathcal{F}_n$, итоговый многогранник будет иметь не меньше пятиугольных граней класса $\mathcal{F}_n$, чем имеют $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$. Это позволяет повторять операцию связной суммы копий многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ любое требуемое количество раз.

В первую очередь отметим, что в силу формулы (7) концы интересующего нас отрезка $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$ можно получить как пределы последовательностей модифицированных объемов многогранников $\mathcal{L}(n)$ (устремляя n к бесконечности) и $\mathcal{L}_k(n)$ (устремляя n и k к бесконечности).

Для завершения доказательства заметим, что в силу формулы (7) для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа k_ε и n_ε такие, что

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{L}(n_\varepsilon)) \in \left[\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon \right], \quad \widetilde{\omega}(\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)) \in \left[\frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \right].$$

Таким образом, мы можем построить связные суммы многогранников $\mathcal{L}(n_\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)$ следующего вида:

$$\#_m \mathcal{L}(n_\varepsilon) \#_s \mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon),$$

и применить вышеописанную процедуру для аппроксимации любого числа в отрезке $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon]$. Доказательство теоремы 1.2 завершено.

6. Сравнение спектров и открытые вопросы

Как мы упоминали во введении, существует тесная связь между объемами полностью аугментированных зацеплений и объемами идеальных прямоугольных многогранников. Известно (см. [14–16]), что дополнение к любому полностью аугментированному гиперболическому зацеплению $L \subset S^3$ можно разрезать на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника $\mathcal{P}$. При этом выполняются соотношения

$$\text{vol}(L) = 2 \text{vol}(\mathcal{P}), \quad \text{ver}(\mathcal{P}) = 3a(L), \quad (11)$$

где $a(L)$ — число аугментаций (вертикальных компонент) зацепления.

Квон и Тхам [13] исследовали спектр плотности объема $\text{vd}(L)$ полностью аугментированного зацепления L , который определяется следующим образом: $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/a(L)$. Выразим эту величину через нормированный объем многогранника $\mathcal{P}$, соответствующего зацеплению L , воспользовавшись соотношениями (11):

$$\text{vd}(L) = \frac{2 \text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})/3} = 6 \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})} = 6\omega(\mathcal{P}).$$

В [13] показано, что спектр $\text{vd}(L)$ содержится в отрезке $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$, дискретен в $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$. Пересчитывая эти отрезки для $\omega(\mathcal{P})$ (делением на 6), получаем, что для подкласса многогранников, соответствующих полностью аугментированным зацеплениям, спектр лежит в отрезке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$, дискретен в $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{3}v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[\frac{1}{3}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$.

Сравнивая спектр $\Omega(\text{FAL})$ плотности объемов аугментированных зацеплений со спектром $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников, отметим следующие факты (рис. 10).

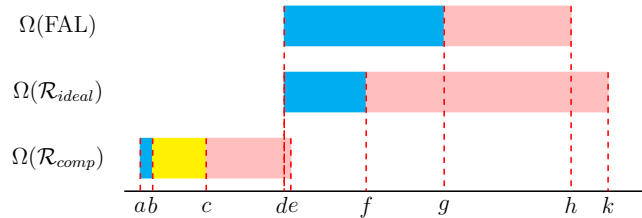


Рис. 10. Сравнение спектров нормированных объемов.

(1) Нижние границы спектров совпадают и равны $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$.

(2) Верхняя граница спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ равна $k = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$, что превосходит верхнюю границу $h = \frac{5}{3}v_{\text{tet}}$ спектра $\Omega(\text{FAL})$. Это различие объясняется тем, что класс всех идеальных прямоугольных многогранников существенно шире класса многогранников, возникающих из диаграмм зацеплений. Например, у многогранников, возникающих из зацеплений, каждая вершина инцидентна двум треугольникам, которые пересекаются ровно по этой вершине.

(3) Структуры спектров качественно совпадают: сначала идет дискретная часть, а затем всюду плотная часть. Переход от дискретной части к всюду плотной в случае $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ происходит при значении $f = \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$, в то время как для случая $\Omega(\text{FAL})$ при значении $g = \frac{1}{3}v_{\text{oct}}$.

(4) Как видно из доказательства теоремы 1.1 и табл. 1, единственным нормированным объемом из $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$, который попадает в плотную часть спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$, является $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643 \in [d, e)$, соответствующий октаэдру.

Соответствующие промежутки приведены на рис. 10, где указанные величины имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{192}v_{\text{oct}} = 0,068697, & b &= \frac{1}{32}v_{\text{oct}} = 0,114495, & c &= \frac{5}{16}v_{\text{tet}} = 0,317169, \\ d &= \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643, & e &= \frac{5}{8}v_{\text{tet}} = 0,634338, & f &= \frac{1}{4}v_{\text{oct}} = 0,915965, \\ g &= \frac{1}{3}v_{\text{oct}} = 1,221287, & h &= \frac{5}{3}v_{\text{tet}} = 1,691558, & k &= \frac{1}{2}v_{\text{oct}} = 1,831931. \end{aligned}$$

В цветной версии рис. 10 синим цветом отмечены области дискретной части спектра, розовым — области всюду плотной части спектра, а желтым — область, которая пока остается неисследованной.

В заключение сформулируем несколько открытых вопросов и одну гипотезу.

Вопрос 6.1. Какова точная нижняя граница спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников? Указанная в данной работе граница $a = \frac{5}{192}v_{\text{oct}}$ вытекает из формулы (8) и табл. 2, однако она не является точной.

Вопрос 6.2. Какова структура спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников в отрезке $[b, c] = [\frac{1}{32}v_{\text{oct}}, \frac{5}{16}v_{\text{tet}}]$?

Наша гипотеза состоит в следующем.

Гипотеза 6.1. Спектр $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников лежит в отрезке $[\frac{\text{vol } \mathcal{L}(5)}{20}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$, причем обе границы точны. Более того, спектр $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ дискретен в отрезке $[\frac{\text{vol } \mathcal{L}(5)}{20}, \frac{5}{16}v_{\text{tet}}]$ и всюду плотен в $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$.

Вопрос 6.3. Как устроен спектр нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников, допускающих как конечные, так и идеальные вершины? В [37] было показано, что наименьший объем в этом классе многогранников равен $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ и достигается на треугольной бипирамиде, имеющей две конечные и три идеальные вершины.

Сравнивая объем антипризмы $\mathcal{A}(4)$ и объем многогранника Лёбелля $\mathcal{L}(6)$, можно заметить, что с точностью до шести знаков после запятой оба объема равны 6,023046. Более того, объемы $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{L}(6)$, вычисленные с точностью до 50 знаков после запятой, снова совпадают и равны

$$6,02304602004718882363418931461679711549802902472249\dots$$

Верно ли, что имеет место равенство $\text{vol}(\mathcal{A}(4)) = \text{vol}(\mathcal{L}(6))$? Поскольку оба объема выражаются через функцию Лобачевского, этот вопрос сводится к вопросу о том, имеет ли место следующее равенство:

$$\begin{aligned} 3 \left[2\Lambda(\theta_6) + \Lambda\left(\theta_6 + \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\theta_6 - \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_6\right) \right] \\ = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\theta_6 = \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$? Заметим, что многогранник, составленный из двух идеальных прямоугольных антипризм $\mathcal{A}(4)$, известен как кубооктаэдр Q (см.,

например, рис. 3 в работе [37]). Формула для $\text{vol}(Q)$ была получена в [38, лемма 5.5] разбиением Q на идеальные тетраэдры. Из нее следует, что

$$4\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + 8\Lambda(\phi) - 3\Lambda(2\phi) + \frac{1}{2}\Lambda(4\phi) = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (13)$$

где $\phi = \arctan(\sqrt{2})$.

Вопрос 6.4. *Имеет ли место равенство (12)? В частности, следует ли оно из (13)?*

Благодарность. Авторы выражают признательность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belletti G. The maximum volume of hyperbolic polyhedra // Trans. Am. Math. Soc. 2021. V. 374, N 2. P. 1125–1153.
2. Costantino F., Gueritaud F., van der Veen R. On the volume conjecture for polyhedra // Geom. Dedicata. 2015. V. 179. P. 385–409.
3. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
4. Haagerup U., Munkholm H. Simplices of maximal volume in hyperbolic n -space // Acta Math. 1981. V. 147. P. 1–11.
5. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72, № 2. С. 147–190.
6. Vesnin A. Volumes and normalized volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia. 2010. V. 57. P. 159–169.
7. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
8. Inoue T. Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra // Experimental Math. 2022. V. 31, N 1. P. 165–183.
9. Vesnin A., Egorov A. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space // Chebyshevskii Sbornik. 2020. V. 21, N 2. P. 65–83.
10. Champanerkar A., Kofman I., Purcell J. S. Geometrically and diagrammatically maximal knots // J. London Math. Soc. 2016. V. 94, N 3. P. 883–908.
11. Burton S. D. The spectra of volume and determinant densities of links // Topology Appl. 2016. V. 211. P. 38–55.
12. Adams C., Calderon A., Mayer N. Generalized bipyramids and hyperbolic volumes of alternating k -uniform tiling links // Topology Appl. 2020. V. 271. 107045.
13. Kwon A., Tham Y. H. On the volume density spectrum of fully augmented links // J. Knot Theory Ramif. 2025. V. 34, N 05. 2550011.
14. Lackenby M. The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88. P. 204–224.
15. Purcell J. S. An introduction to fully augmented links // Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory, Contemp. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. V. 541. P. 205–220.
16. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 534–551.
17. Kwon A. Fully augmented links in the thickened torus // Algebraic & Geometric Topology. 2025. V. 25, N 3. P. 1411–1432.
18. Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.
19. Alekseevskij D. V., Vinberg E. B., Solodovnikov A. S. Geometry of spaces of constant curvature // Geometry II, Encyclopedia Math. Sci. Berlin: Springer-Verl., 1993. V. 29. P. 1–138.
20. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 256–260.
21. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.

22. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra // Ann. Inst. Fourier Grenoble. 2007. V. 57. P. 825–882.
23. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B. D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere // Discrete Mathematics. 2005. V. 305. P. 33–54.
24. Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds. Collected works of William P. Thurston with commentary. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2022. V. IV.
25. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2020. V. 52. P. 565–576.
26. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
27. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2008. V. 8. P. 1523–1565.
28. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
29. Борисенко А. А., Веснин А. Ю., Ивочкина Н. М. К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 171–193.
30. Egorov A., Vesnin A. On correlation of hyperbolic volumes of fullerenes with their properties // Comput. Math. Biophys. 2020. V. 8. P. 150–167.
31. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 50–53.
32. Веснин А. Ю. Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лёбелля // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 17–23.
33. Bogachev N., Douba S. Geometric and arithmetic properties of Löbell polyhedra // Algebr. Geom. Topol. 2025. V. 25, N 4. P. 2281–2295.
34. Buser P., Mednykh A., Vesnin A. Lambert cube and Löbell polyhedron revisited // Advances in Geometry. 2012. V. 12. P. 525–548.
35. Веснин А. Ю., Реповш Д. Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 12–18.
36. Futer D., Gueritaud F. From angled triangulations to hyperbolic structures // Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. P. 159–182. (Contemp. Math.; V. 541).
37. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 6. С. 1037–1056.
38. Adams C., Gomez-Raz F., Kang J., Krause L., Li G., Marple C., Tan Z. Hyperbolic handlebody complements in 3-manifolds // Topology Appl. 2026. V. 377. 109642.

Поступила в редакцию 6 апреля 2026 г.

После доработки 16 апреля 2026 г.

Принята к публикации 18 апреля 2026 г.

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-0001-7553-1269)
Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vesnin@math.nsc.ru, a.egorov2@ng.su.ru

ФОРМУЛЫ КВАЗИИНТЕРПОЛЯЦИИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ КВАДРАТИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ

Ю. С. Волков, Т. Жанлав, Р.-О. Мижиддорж

Аннотация. Рассматривается задача приближения функции по известным интегрально усредненным по промежуткам сетки значениям интегральными квадратическими сплайнами. Показано, что если решается задача интерполяции в среднем, то интегральный квадратический сплайн можно определять через интерполяционный кубический сплайн. Поскольку интерполяционный кубический сплайн достаточно хорошо изучен, то некоторые его свойства можно перенести на интегральный квадратический сплайн. Предложены формулы квазиинтерполяции интегральными квадратическими сплайнами. Задача локальной аппроксимации интегральными сплайнами впервые рассмотрена на произвольной неравномерной сетке. На равномерной сетке найдены все точки суперсходимости при интерполяции и квазиинтерполяции в среднем, т. е. точки, в которых повышается порядок приближения. Показано, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной обоих сплайнов приближает третью производную с четвертым порядком.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.403

Ключевые слова: интегральный квадратический сплайн, интерполяция в среднем, кубический сплайн, оценки погрешности приближения, точки суперсходимости, локальная аппроксимация.

Введение

В прикладных задачах, связанных с приближением функций, иногда вместо значений функции в узлах сетки известны лишь интегрально усредненные по промежутку значения или интегралы приближаемой функции (см., например, [1, 2]). В настоящее время для решения таких задач активно применяются сплайны. Первое применение сплайнов для подобных задач, по-видимому, было в 1972 г. для приближения гистограмм. Шёнберг [3] для восстановления исходной функции по известным гистограммам вместо условий интерполяции использовал условия совпадения гистограмм сплайна и приближаемой функции, что объясняет предложенный им термин *гистосплайны* для получившихся сплайнов. Позднее Ю. Н. Субботин рассмотрел задачу интерполяции интегрально усредненных значений и назвал эту задачу *интерполяцией в среднем* [4]. В последнее время сплайны, применяемые для приближения функций по заданным интегралам или интегрально усредненным значениям, стали называть *интегральными*. Такое название было предложено в работе [5], которая

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0005).

послужила толчком для изучения интегральных сплайнов, так как в этой работе было замечено, что на равномерной сетке кубический сплайн можно построить довольно просто путем решения трехдиагональной системы уравнений. Но про общий случай известно, что уже для кубических сплайнов задача интерполяции в среднем довольно сложна [6].

На произвольной неравномерной сетке достаточно подробно изучались из интегральных сплайнов лишь квадратические. В работе [7] установлены порядки приближения такими сплайнами в задаче интерполяции в среднем, в [8] найдены условия, обеспечивающие наследование свойств неотрицательности, монотонности и выпуклости при интерполяции в среднем. Вопрос выбора краевых условий рассмотрен в работе [9]. Отметим, что в работах [10, 11] для случая равномерной сетки исследованы точки суперсходимости и найдены точные оценки погрешности интерполяции в среднем.

В классических задачах приближения функций наряду с интерполяцией широко используются и показали свою эффективность методы локальной аппроксимации и квазиинтерполяции. Для построения сплайнов, решающих задачу аппроксимации функций, уже не требуется решать системы линейных уравнений. Получаемые локальные сплайны могут приближать требуемую функцию с теми же порядками, что и интерполяционные, поэтому в этом случае их и называют *квазиинтерполяционными*. Локальные методы приближения стали применяться и для интегральных сплайнов: для кубических сплайнов такие методы начали изучаться в работах [12–14], для сплайнов более высоких степеней — в [15, 16]. Монография [17] посвящена задачам аппроксимации интегральными сплайнами. Однако все такие работы по локальным интегральным сплайнам рассматривались только на равномерных сетках.

В данной работе мы показываем, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволяет перенести некоторые известные результаты о свойствах интерполяционных кубических сплайнов на интегральные квадратические сплайны. В частности, мы выписываем оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами для произвольной неравномерной сетки. Ранее были известны только результаты о порядках приближения [7]. Впервые рассмотрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. С помощью формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] мы выводим формулы локальной аппроксимации для интегральных квадратических сплайнов. Установлены оценки погрешности приближения полученным локальным интегральным квадратическим сплайном. Эти формулы являются формулами квазиинтерполяции и имеют наивысший третий порядок приближения, как и при интерполяции в среднем.

§ 1. Интерполяция в среднем

Пусть на отрезке $[a, b]$ числовой прямой на сетке

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

известны усредненные по интервалам сетки Δ значения некоторой функции $y(x)$:

$$Y_i = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} y(x) dx, \quad i = 0, 1, \dots, n-1,$$

где $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, \dots, n-1$. Требуется приблизить функцию $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ интегральным квадратическим сплайном. Интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн $S(x)$ является сплайном второй степени с узлами на сетке Δ гладкости $C^1[a, b]$ и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) dx = Y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (1)$$

Для однозначного определения сплайна $S(x)$ требуются дополнительные условия, которые мы возьмем в виде обычных условий интерполяции на концах отрезка:

$$S(a) = y(a), \quad S(b) = y(b). \quad (2)$$

Если краевые значения приближаемой функции неизвестны, то можно получить приближение этих значений с требуемым порядком точности путем комбинации нескольких крайних значений. Например, если Y_0 приближает значение $y(a)$ с первым порядком, то, как нетрудно установить, выражение

$$\frac{2h_0 + h_1}{h_0 + h_1} Y_0 - \frac{h_0}{h_0 + h_1} Y_1$$

приближает $y(a)$ уже со вторым порядком. В работе [10] получено выражение

$$\frac{1}{12}(25Y_0 - 23Y_1 + 13Y_2 - 3Y_3),$$

которое на равномерной сетке приближает $y(a)$ с четвертым порядком.

Рассмотрим кубический сплайн $s(x)$ с узлами на этой же сетке Δ , производная которого будет совпадать с интегральным квадратическим сплайном $S(x)$, т. е. $s'(x) = S(x)$. Ясно, что такой сплайн $s(x)$ определяется по $S(x)$ с точностью до константы. Если кубический сплайн $s(x)$ интерполирует некоторую функцию $f(x)$, т. е.

$$s(x_i) = f_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

где $f_i = f(x_i)$, с краевыми условиями $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$, то в соответствии с (1) имеем

$$\frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} S(x) dx = \frac{1}{h_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} s'(x) dx = \frac{s(x_{i+1}) - s(x_i)}{h_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} = Y_i,$$

при $i = 0, \dots, n-1$. Более того, можно считать, что выполняется условие $f'(x) = y(x)$.

Установленная связь между интерполяционным в среднем интегральным квадратическим сплайном и интерполяционным кубическим сплайном позволяет многие известные результаты для кубических сплайнов перенести на интегральные квадратические сплайны. Например, для интерполяционных кубических сплайнов разработаны эффективные методы построения (см. [19–23]).

В этом случае погрешность приближения функции $y(x)$ интегральным квадратическим сплайном $S(x)$ можно выразить через погрешность интерполяции функции $f(x)$ кубическим сплайном $s(x)$, а именно

$$S^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = s^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Поскольку оценки погрешности приближения интерполяционным кубическим сплайном хорошо известны, то сразу можно выписать оценки интерполяции в среднем интегральным квадратическим сплайном.

Теорема 1. Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^3[a, b]$, то

$$\|S^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \leq K_r \bar{h}^{3-r} \|y'''\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$K_0 = \frac{1}{24}, \quad K_1 = \frac{1}{6}, \quad K_2 = \frac{1}{2} \left(B + \frac{1}{B} \right),$$

причем константа K_0 неумлучшаема. Здесь

$$\bar{h} = \max_{0 \leq i \leq n-1} h_i, \quad B = \max_{0 \leq i \leq n-1} \frac{\bar{h}}{h_i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из оценок для кубических сплайнов с учетом равенства (3). Для $r = 0$ доказательство можно найти в [24], там же установлена неумлучшаемость константы K_0 . Оценка с константой K_1 установлена в [25], и, наконец, оценка для $r = 2$ приведена в [21]. Константа K_1 , по-видимому, не является точной, для случая равномерной сетки имеются точные константы K_1 и K_2 (см. [11, 26]).

Заметим, что ранее оценки погрешности интерполяции в среднем для интегральных квадратических сплайнов в случае произвольной неравномерной сетки установлены были лишь по порядку [7] только для $r = 0$. Точные константы в оценках известны лишь для равномерной сетки [11]. Также в работе [7] найдено, что на равномерной сетке интегральный квадратический сплайн в узлах приближает значения исходной функции с более высоким порядком. А в работе [10] найдены еще точки суперсходимости (середины интервалов) для сплайнов и вторых производных. Для равномерной сетки и периодических краевых условий продемонстрировано [11], что эти и ряд дополнительных результатов для интегральных квадратических сплайнов могут непосредственно быть получены из известных свойств кубических сплайнов. Конечно же теорема 2 из [11] справедлива и для случая краевых условий (2). Сформулируем теорему, которая следует из [21, теорема 3.8] с учетом равенства (3).

Теорема 2. Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^4[a, b]$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$S^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \varphi^{(r+1)}(t) h^{3-r} y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{24} t^2 (1-t)^2, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 2 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a, b]$. Действительно, так как

$$\varphi'(t) = \frac{1}{12} t(1-t)(1-2t), \quad \varphi''(t) = \frac{1}{12} (1-6t+6t^2), \quad \varphi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$S(x) = y(x) + O(h^4), \quad \text{если } x = x_i, \quad x = x_i + \frac{h}{2}, \quad (4)$$

$$S'(x) = y'(x) + O(h^3), \quad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \right) h, \quad (5)$$

$$S''(x) = y''(x) + O(h^2), \quad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \quad (6)$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (4) и (6), найденным в [10], как и в [11], есть еще по две точки суперсходимости (5) на каждом интервале для производной интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна.

Для периодического случая в [11] приведен еще один неожиданный результат (теорема 3), который также справедлив и для случая краевых условий (2), он следует из равенства (3) и из свойств интерполяционного кубического сплайна (см. [27]).

Теорема 3. Если интегральный квадратический сплайн $S(x)$ на равномерной сетке с шагом h интерполирует в среднем с краевыми условиями (2) функцию $y(x) \in C^7[a, b]$, то

$$\frac{S''(x_i + 0) - S''(x_i - 0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Отметим, что скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной приближает третью производную интерполируемой в среднем функции и на некоторых неравномерных сетках (см. [28]).

§ 2. Методы локальной аппроксимации

В некоторых задачах наиболее удобным оказывается представление сплайнов в базисе В-сплайнов. Расширим сетку Δ кратными дополнительными узлами x_{-1} , x_{-2} , x_{-3} и x_{n+1} , x_{n+2} , x_{n+3} так, что

$$x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0, \quad x_n = x_{n+1} = x_{n+2} = x_{n+3}.$$

Тогда

$$h_{-3} = h_{-2} = h_{-1} = 0, \quad h_n = h_{n+1} = h_{n+2} = 0.$$

Представим квадратический сплайн $S(x)$ в виде разложения

$$S(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \beta_k N_{k,3}(x) \quad (7)$$

по базису из В-сплайнов второй степени $N_{i,3}(x)$, $i = -2, \dots, n-1$. Здесь и ниже $N_{i,r}(x)$ — нормализованные В-сплайны степени $r-1$ (или порядка r) с носителями $[x_i, x_{i+r}]$ (см. [20, 21, 29]).

Как мы уже отмечали, если $S(x)$ — интерполирующий в среднем функцию $y(x)$ интегральный квадратический сплайн, то он является производной кубического сплайна $s(x)$, интерполирующего некоторую функцию $f(x)$, производная которой совпадает с $y(x)$. Если кубический сплайн $s(x)$ также представлен в виде разложения

$$s(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \alpha_k N_{k,4}(x) \quad (8)$$

по базису из В-сплайнов, но уже третьей степени $N_{i,4}(x)$, $i = -3, \dots, n-1$, то имеют место равенства

$$\beta_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i} (\alpha_i - \alpha_{i-1}), \quad i = -2, \dots, n-1.$$

Методы построения интерполяционных кубических сплайнов, т. е. нахождения коэффициентов разложения $\alpha_{-3}, \dots, \alpha_{n-1}$, хорошо известны. Эти коэффициенты находятся из трехдиагональной системы линейных уравнений (см. [30, 31]). Система уравнений для определяемых параметров $\beta_{-2}, \dots, \beta_{n-1}$ приведена в [8, 9] и имеет вид

$$\begin{cases} \beta_{-2} = y(a), \\ \lambda_i \beta_{i-2} + (1 + \mu_i + \lambda_{i+1}) \beta_{i-1} + \mu_{i+1} \beta_i = 3Y_i, & i = 0, \dots, n-1, \\ \beta_{n-1} = y(b), \end{cases} \quad (9)$$

здесь используется обозначение $\lambda_i = h_i / (h_{i-1} + h_i)$, $\mu_i = 1 - \lambda_i$, причем $\lambda_0 = 1$, $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$, $\mu_n = 1$.

Распространен и в некоторых задачах приближения функций очень эффективен подход, состоящий в том, что кубический сплайн, приближающий функцию, находится не из условий интерполяции, а задается явно, т. е. коэффициенты разложения (8) находятся не в результате решения системы линейных уравнений, а задаются явными формулами так, чтобы получить приемлемое качество приближения по точности или другим характеристикам. Это так называемые *методы локальной аппроксимации*, а если получается приближение с тем порядком, что и при интерполяции, то используется термин *квазиинтерполяция*.

Коэффициенты α_j интерполяционного сплайна (8) близки интерполируемым значениям, поэтому простейшим локальным методом приближения является такой, когда коэффициенты разложения α_j не находятся из системы уравнений (9), задаются в явном виде $\alpha_{i-2} = f_i$, $i = 0, \dots, n$ (два крайних коэффициента задаются из каких-либо дополнительных условий). В этом случае получаемый сплайн уже будет проходить не через заданные значения функции, а вблизи их. Такой кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с первым порядком, а на равномерной сетке — со вторым.

Аналогичные простейшие формулы можно получить и для интегральных сплайнов. Если положим

$$\begin{cases} \beta_{-2} = y(a), \\ \beta_{i-1} = Y_i, & i = 0, \dots, n-1, \\ \beta_{n-1} = y(b), \end{cases}$$

то интегральный сплайн (7) приближает искомую функцию $y(x)$ также с первым порядком. Здесь мы также считаем, что известны значения $y(a)$ и $y(b)$ и используем их для задания крайних коэффициентов. Первый порядок приближения следует из того, что интегрально усредненные значения Y_j с первым порядком приближают значения $y(x_j)$. Можно показать, что на равномерной сетке с шагом h такой локальный интегральный сплайн будет приближать с порядком $O(h^2)$.

Формулы локальной аппроксимации кубическим сплайном (или квазиинтерполяцией), точные на многочленах третьей степени, приведены в [21, с. 250]. В работе [18] установлены оценки погрешности приближения таким локальным кубическим сплайном, этот кубический сплайн приближает исходную функцию $f(x)$ с порядком $O(\bar{h}^4)$, т. е. является квазиинтерполяционным. Для интегрального квадратического сплайна формулы локальной аппроксимации максимального третьего порядка точности известны лишь для случая равномерной

сетки [32, 33]. Наша задача — получить формулы квазиинтерполяции для интегрального квадратического сплайна в случае произвольной неравномерной сетки.

В работе [18] рассмотрен локальный кубический сплайн

$$\widehat{s}(x) = \sum_{k=-3}^{n-1} \widehat{\alpha}_k N_{k,4}(x), \quad (10)$$

где коэффициенты $\widehat{\alpha}_i$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{-3} &= f_0, \\ \widehat{\alpha}_{-2} &= f_0 + \frac{h_0}{3} f'_0, \\ \widehat{\alpha}_{i-2} &= f_i + \frac{\lambda_i h_i}{3} \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}} - \frac{\mu_i h_{i-1}}{3} \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ \widehat{\alpha}_{n-2} &= f_n - \frac{h_{n-1}}{3} f'_n, \\ \widehat{\alpha}_{n-1} &= f_n. \end{aligned} \quad (11)$$

В формулах (11) коэффициенты у концов промежутка содержат значения f'_0 и f'_n производных приближаемой функции, как отмечается в [18], вместо этих значений можно использовать их приближенные значения, вычисляемые путем дифференцирования интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих соответственно значения f_0, f_1, f_2, f_3 и $f_{n-3}, f_{n-2}, f_{n-1}, f_n$.

Рассмотрим интегральный квадратический сплайн

$$\widehat{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \widehat{\beta}_k N_{k,3}(x), \quad (12)$$

связанный с кубическим сплайном (10), а именно $\widehat{S}(x) = \widehat{s}'(x)$, и приближающий интегрально усредненные значения функции $y(x) = f'(x)$. Тогда коэффициенты в представлении (12) будем определять по формулам

$$\widehat{\beta}_i = \frac{3}{x_{i+3} - x_i} (\widehat{\alpha}_i - \widehat{\alpha}_{i-1}), \quad i = -2, \dots, n-1,$$

подставив в которые выражения (11), получим

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{-2} &= y(a), \\ \widehat{\beta}_{-1} &= (1 + \mu_1 + \mu_1^2) Y_0 - \mu_1^2 Y_1 - \mu_1 y(a), \\ \widehat{\beta}_{i-1} &= \frac{-\lambda_i h_i Y_{i-1} + (\mu_i h_{i-1} + 3h_i + \lambda_{i+1} h_{i+1}) Y_i - \mu_{i+1} h_i Y_{i+1}}{h_{i-1} + h_i + h_{i+1}}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \widehat{\beta}_{n-2} &= (1 + \lambda_{n-1} + \lambda_{n-1}^2) Y_{n-1} - \lambda_{n-1}^2 Y_{n-2} - \lambda_{n-1} y(b), \\ \widehat{\beta}_{n-1} &= y(b). \end{aligned} \quad (13)$$

Ясно, что для сплайнов $\widehat{s}(x)$ и $\widehat{S}(x)$ выполняются равенства

$$\widehat{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \widehat{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2. \quad (14)$$

Тогда результаты об оценках погрешности приближения для кубического сплайна $\widehat{s}(x)$, установленные в [18, теорема 2], мы можем переформулировать для интегрального квадратического сплайна $\widehat{S}(x)$.

Теорема 4. Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна (12) определяются формулами (13) и $y(x) \in C^3[a, b]$, то

$$\|\hat{S}^{(r)} - y^{(r)}\|_\infty \leq \hat{K}_r \bar{h}^{3-r} \|y'''\|_\infty, \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\hat{K}_0 = \frac{13}{48}, \quad \hat{K}_1 = \frac{1}{3}, \quad \hat{K}_2 = \frac{1}{12} \max \left(11, 5B + \frac{6}{B} \right).$$

Теорема 4 показывает, что интегральный квадратический сплайн (12), коэффициенты которого задаются формулами (13), является квазиинтерполяционным, он приближает исходную функцию с тем же порядком, что и интерполяционный в среднем. Если значения приближаемой функции неизвестны, то, как отмечалось выше, их можно задать приближенно через заданные интегрально усредненные значения. Например, выражение

$$\frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2 \quad (15)$$

на равномерной сетке приближает значение $y(a)$ с третьим порядком. Подставим это выражение в (13) вместо $y(a)$ и аналогичное выражение

$$\frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1} \quad (16)$$

также в (13) вместо $y(b)$, тогда коэффициенты разложения по В-сплайнам

$$\tilde{S}(x) = \sum_{k=-2}^{n-1} \tilde{\beta}_k N_{k,3}(x) \quad (17)$$

будут иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{-2} &= \frac{11}{6}Y_0 - \frac{7}{6}Y_1 + \frac{1}{3}Y_2, \\ \tilde{\beta}_{-1} &= \frac{5}{6}Y_0 + \frac{1}{3}Y_1 - \frac{1}{6}Y_2, \\ \tilde{\beta}_{i-1} &= -\frac{1}{6}Y_{i-1} + \frac{4}{3}Y_i - \frac{1}{6}Y_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2, \\ \tilde{\beta}_{n-2} &= -\frac{1}{6}Y_{n-3} + \frac{1}{3}Y_{n-2} + \frac{5}{6}Y_{n-1}, \\ \tilde{\beta}_{n-1} &= \frac{1}{3}Y_{n-3} - \frac{7}{6}Y_{n-2} + \frac{11}{6}Y_{n-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

Для равномерной сетки интегральный сплайн (17) отличается от (12) только тем, что на левом конце отрезка $[a, b]$ изменяются коэффициенты $\tilde{\beta}_{-2}, \tilde{\beta}_{-1}$, так как значение $y(a)$ заменено выражением (15), а на правом конце — изменяются коэффициенты $\tilde{\beta}_{n-2}, \tilde{\beta}_{n-1}$, так как значение $y(b)$ заменено соответствующим аналогичным выражением (16).

Отметим, что для равномерной сетки формулы (18) выписаны в работах [32, 33] и там же установлен третий порядок приближения интегральным квадратическим сплайном, исследований на произвольной неравномерной сетке ранее не проводилось. Также в этих работах указано, что в узлах и серединах интервалов (точки суперсходимости) порядок приближения четвертый. Но опять же эти результаты и ряд дополнительных непосредственно следуют из известных свойств кубических сплайнов. Сформулируем теорему, которая с учетом равенства

$$\tilde{S}^{(r)}(x) - y^{(r)}(x) = \tilde{s}^{(r+1)}(x) - f^{(r+1)}(x), \quad r = 0, 1, 2,$$

следует из [34, теорема 5].

Теорема 5. Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна (17) на равномерной сетке с шагом h определяются формулами (18) и $y(x) \in C^4[a, b]$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 2, \dots, n-3$,

$$\tilde{S}^{(r)}(x) = y^{(r)}(x) - \psi^{(r+1)}(t)h^{3-r}y'''(x) + O(h^{4-r}), \quad r = 0, 1, 2,$$

где

$$\psi(t) = \frac{1}{24}t^2(1-t)^2 + \frac{1}{36}, \quad t = \frac{x - x_i}{h}.$$

Из теоремы 5 следуют результаты о повышении порядка аппроксимации производных в некоторых точках промежутка $[a, b]$. Действительно, так как

$$\psi'(t) = \frac{1}{12}t(1-t)(1-2t), \quad \psi''(t) = \frac{1}{12}(1-6t+6t^2), \quad \psi'''(t) = t - \frac{1}{2},$$

то

$$\tilde{S}(x) = y(x) + O(h^4), \quad \text{если } x = x_i, \quad x = x_i + \frac{h}{2}, \quad (19)$$

$$\tilde{S}'(x) = y'(x) + O(h^3), \quad \text{если } x = x_i + \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h, \quad (20)$$

$$\tilde{S}''(x) = y''(x) + O(h^2), \quad \text{если } x = x_i + \frac{h}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, дополнительно к точкам суперсходимости (19), найденным в [32, 33], есть еще точки суперсходимости (20) и (21) для первой и второй производных локального интегрального квадратического сплайна $\tilde{S}(x)$. Заметим, что точки суперсходимости для интерполяционного в среднем интегрального квадратического сплайна $S(x)$ и для квазиинтерполяционного интегрального квадратического сплайна $\tilde{S}(x)$ одинаковы.

Обратим внимание, что в отличие от теоремы 2 теорема 5 указывает точки суперсходимости только во внутренних интервалах, не охватывая по два крайних. Это связано с тем, что мы отказались от задания точных значений производных приближаемой функции на концах, заменили их приближенными значениями, что изменило представление сплайна на указанных крайних интервалах, не позволяя здесь указать точки повышения порядка приближения.

В заключение отметим, что в работе [35] установлено, что кубический локально аппроксимационный сплайн $\hat{s}(x)$ сохраняет свойство приближения скачком четвертой производной приближаемой функции. Тогда справедлива

Теорема 6. Если коэффициенты интегрального квадратического сплайна (17) на равномерной сетке с шагом h определяются формулами (18) и $y(x) \in C^7[a, b]$, то

$$\frac{\tilde{S}''(x_i + 0) - \tilde{S}''(x_i - 0)}{h} = y'''(x_i) + O(h^4), \quad i = 3, \dots, n-3.$$

Здесь также надо сделать оговорку. Как и в теореме 5, промежуток действия формул теоремы 6 уменьшается по сравнению с теоремой 3 за счет исключения по два крайних интервала у каждого конца отрезка по тем же причинам, что и выше.

§ 3. Численные эксперименты

Проведем численные эксперименты, демонстрирующие подтверждение теоретических результатов предыдущих параграфов, на примерах приближения тестовых функций, заданных интегрально усредненными значениями. В качестве тестовых выбраны функции

$$y_1(x) = \sin(3\pi x), \quad x \in [0, 1],$$

$$y_2(x) = x^4 + \log(x) + 5, \quad x \in [0.6, 1].$$

Мы вычисляем погрешности приближения функций и их производных двумя рассматриваемыми интегральными сплайнами $S(x)$ и $\tilde{S}(x)$ в точках, являющихся точками суперсходимости для первой производной. Для первой функции это будут точки

$$x_i^1 = x_i + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h,$$

а для второй —

$$x_i^2 = x_i + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)h.$$

В соответствии с условиями теоремы 2 погрешность вычисляется во всех точках x_i^1, x_i^2 на интервалах $i = 0, \dots, n-1$ и берется наибольшая погрешность. При проведении численных экспериментов, демонстрирующих результаты теоремы 5, погрешность в выбранных точках вычисляется только на интервалах $i = 2, \dots, n-3$.

Для вычисления значений интегральных квадратических сплайнов используем представление через коэффициенты В-сплайн разложения (см. [9])

$$S(x) = \lambda_i(1-t)^2\beta_{i-2} + [(\lambda_i t + \mu_i)(1-t) + t(\lambda_{i+1} + \mu_{i+1}(1-t))]\beta_{i-1} + \mu_{i+1}t^2\beta_i,$$

получаемое из (7). Коэффициенты находятся из системы уравнений (9). Вычисление значений квазиинтерполяционного сплайна $\tilde{S}(x)$ производится по аналогичной формуле, в которой коэффициенты $\{\beta_i\}$ заменены на $\{\tilde{\beta}_i\}$, задаваемые формулами (18).

В табл. 1–4 приведены результаты численных экспериментов и содержатся значения максимальных погрешностей аппроксимации в выбранных точках суперсходимости

$$E_j^{(r)} = E_j^{(r)}(n) = \max_{0 \leq i \leq n-1} |S^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j)|, \quad r = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

$$\tilde{E}_j^{(r)} = \tilde{E}_j^{(r)}(n) = \max_{2 \leq i \leq n-3} |\tilde{S}^{(r)}(x_i^j) - y_j^{(r)}(x_i^j)|, \quad r = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

и вычисленные порядки сходимости

$$\text{CO} = \log_2 \left| \frac{E_j^{(r)}(n)}{E_j^{(r)}(2n)} \right|, \quad \widetilde{\text{CO}} = \log_2 \left| \frac{\tilde{E}_j^{(r)}(n)}{\tilde{E}_j^{(r)}(2n)} \right|.$$

Заметим, что найденные в теоремах 2 и 5 точки симметрично расположены на каждом интервале, численные эксперименты при выборе симметричной серии точек в сравнении с рассмотренными приводят к тому же результату.

Таблица 1. Результаты расчетов по теореме 2 для функции $y_1(x)$

n	$E_1^{(0)}$	CO	$E_1^{(1)}$	CO	$E_1^{(2)}$	CO
10	1.74E-3		1.31E-1		3.21E+0	
20	1.11E-4	3.9	1.59E-2	3.0	8.18E-1	1.9
40	6.95E-6	4.0	1.98E-3	3.0	2.05E-1	2.0

Таблица 2. Результаты расчетов по теореме 2 для функции $y_2(x)$

n	$E_2^{(0)}$	CO	$E_2^{(1)}$	CO	$E_2^{(2)}$	CO
10	1.07E-7		2.15E-5		1.28E-3	
20	7.00E-9	3.9	2.78E-6	2.9	3.34E-4	1.9
40	4.66E-10	3.9	3.52E-7	2.9	8.93E-5	1.9

Таблица 3. Результаты расчетов по теореме 5 для функции $y_1(x)$

n	$\widetilde{E}_1^{(0)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(1)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_1^{(2)}$	$\widetilde{\text{CO}}$
10	1.53E-2		2.22E-1		1.35E+0	
20	1.21E-3	3.6	2.04E-2	3.4	7.00E-1	0.9
40	7.78E-5	3.9	2.14E-3	3.2	1.98E-1	1.8

Таблица 4. Результаты расчетов по теореме 5 для функции $y_2(x)$

n	$\widetilde{E}_2^{(0)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(1)}$	$\widetilde{\text{CO}}$	$\widetilde{E}_2^{(2)}$	$\widetilde{\text{CO}}$
10	8.46E-7		1.75E-5		8.47E-4	
20	6.52E-8	3.7	2.23E-6	2.9	2.65E-4	1.7
40	4.36E-9	3.9	2.83E-7	2.9	7.11E-5	1.9

Заключение

В данной работе мы показали, что интерполяционный в среднем интегральный квадратический сплайн неразрывно связан с классическим интерполяционным кубическим сплайном, что позволило сразу сформулировать результаты о точности приближения функций, заданных интегралами или интегрально усредненными значениями, интегральным квадратическим сплайном. Мы приводим оценки погрешности интерполяции в среднем с указанием констант, в том числе точных, что обобщает результаты работ [7, 10] с установленными порядками приближения. Впервые рассмотрена задача построения локального интегрального сплайна на произвольной неравномерной сетке. На основе формул локальной аппроксимации для кубических сплайнов [18] выведены квазиинтерполяционные формулы для интегральных квадратических сплайнов. Также получены оценки погрешности приближения полученными квазиинтерполя-

тами. Найдены все точки суперсходимости как для интерполяции в среднем, так и при квазиинтерполяции в среднем, отметим совпадение множеств таких точек. В случае квазиинтерполяции точки суперсходимости найдены только во внутренних интервалах сетки, исключая по два крайних интервала с обоих концов отрезка. Кроме того, установлено, что для обоих типов рассмотренных интегральных сплайнов скачок (отношение величины разрыва к величине шага сетки) второй производной сплайна приближает третью производную аппроксимируемой функции на равномерных сетках с четвертым порядком.

ЛИТЕРАТУРА

1. Epstein E. S. On obtaining daily climatological values from monthly means // J. Climate. 1991. V. 4, N 3. P. 365–368.
2. Ruiz-Arias J. A. Mean-preserving interpolation with splines for solar radiation modeling // Solar Energy. 2022. V. 248. P. 121–127.
3. Schoenberg I. J. Splines and histograms // Spline functions and approximation theory: Proc. / Sympos., Edmonton, 1972 / Eds. A. Meir, A. Sharma. Internat. Ser. Numer. Math., **21**. Basel: Birkhäuser, 1973. P. 277–327.
4. Субботин Ю. Н. Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.
5. Behforooz H. Approximation by integro cubic splines // Appl. Math. Comput. 2006. V. 175, N 1. P. 8–15.
6. Kirsiaed E., Oja P., Shah G. W. Cubic spline histopolation // Math. Model. Anal. 2017. V. 22, N 4. P. 514–527.
7. Wu J., Zhang X. Integro quadratic spline interpolation // Appl. Math. Modelling. 2015. V. 39, N 10–11. P. 2973–2980.
8. Волков Ю. С. Условия формосохранения при интерполяции в среднем квадратическими интегральными сплайнами // Тр. ИММ УрО РАН. 2022. Т. 28, № 4. С. 71–77.
9. Волков Ю. С., Жанлав Т., Мижиддорж Р.-О. О краевых условиях для квадратических интегральных сплайнов при интерполяции в среднем // Тр. ИММ УрО РАН. 2025. Т. 31, № 4. С. 95–105.
10. Lang F.-G., Xu X.-P. On the superconvergence of some quadratic integro-splines at the mid-knots of a uniform partition // Appl. Math. Comput. 2018. V. 338. P. 507–514.
11. Волков Ю. С. Оценки погрешности интерполяции в среднем интегральными квадратическими сплайнами и точки суперсходимости // Докл. АН. 2025. Т. 523. С. 31–34.
12. Zhanlav T., Mijiddorj R. The local integro cubic splines and their approximation properties // Appl. Math. Comput. 2010. V. 216, N 7. P. 2215–2219.
13. Zhanlav T., Mijiddorj R. Convexity and monotonicity properties of the local integro cubic spline // Appl. Math. Comput. 2017. V. 293, N 7. P. 131–137.
14. Zhanlav T., Mijiddorj R. A comparative analysis of local cubic splines // Comput. Appl. Math. 2018. V. 37, N 5. P. 5576–5586.
15. Zhanlav T., Mijiddorj R. On local integro quartic splines // Appl. Math. Comput. 2015. V. 269. P. 301–307.
16. Zhanlav T., Mijiddorj R., Behforooz H. Construction of local integro quintic splines // Commun. Numer. Anal. 2016. N 2. P. 167–179.
17. Zhanlav T., Mijiddorj R. Approximation by integro splines. Ulaanbaatar: Bit press, 2018.
18. Жанлав Т. О представлении интерполяционных кубических сплайнов через В-сплайны // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1981. Т. 87: Методы сплайн-функций. С. 3–10.
19. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. М.: Мир, 1972.
20. де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. М.: Радио и связь, 1985.
21. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
22. Волков Ю. С. Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Докл. АН. 2002. Т. 382, № 2. С. 155–157.
23. Волков Ю. С. Новый способ построения интерполяционных кубических сплайнов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 2. С. 231–241.

24. Hall C. A., Meyer W. W. Optimal error bounds for cubic spline interpolation // J. Approx. Theory. 1976. V. 16, N 2. P. 105–122.
25. Мирошниченко В. Л. О погрешности приближения кубическими интерполяционными сплайнами. I // Вычислительные системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1982. Т. 93: Методы сплайн-функций. С. 3–29.
26. Волков Ю. С., Субботин Ю. Н. 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн интерполяции // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.
27. Lucas T. R. Error bounds for interpolating cubic splines under various end conditions // SIAM J. Numer. Anal. 1974. V. 11, N 3. P. 569–584.
28. Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л. О приближении производных скачком интерполяционного сплайна // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 127–130.
29. Schumaker L. L. Spline functions: basic theory. New York: Wiley, 1981.
30. Волков Ю. С. О нахождении полного интерполяционного сплайна через В-сплайны // Сиб. электрон. мат. изв. 2008. Т. 5. С. 334–338.
31. Volkov Yu. S. Obtaining a banded system of equations in complete spline interpolation problem via B-spline basis // Cent. Europ. J. Math. 2012. V. 10, N 1. P. 352–356.
32. Wu J., Shan T., Zhu C. Integro quadratic spline quasi-interpolants // J. Syst. Sci. Math. Sci. 2018. V. 38, N 12. P. 1407–1416.
33. Wu J., Ge W., Zhang X. Integro spline quasi-interpolants and their super convergence // Comput. Appl. Math. 2020. V. 39, N 3. P. 239.
34. Желудев В. А. Локальная сплайн-аппроксимация на равномерной сетке // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 9. С. 1296–1310.
35. Волков Ю. С., Богданов В. В. О погрешности приближения простейшей локальной аппроксимацией сплайнами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1000–1008.

Поступила в редакцию 25 ноября 2025 г.

После доработки 1 апреля 2026 г.

Принята к публикации 5 апреля 2026 г.

Волков Юрий Степанович (ORCID 0000-0002-7298-8578)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
volkov@math.nsc.ru

Жанлав Тугал (ORCID 0000-0003-0743-5587)
Институт математики и цифровых технологий,
Монгольская академия наук,
пр. Мира, 54, Улан-Батор 13330, Монголия
tzhanlav@yahoo.com

Мижиддорж Ренчин-Очир (ORCID 0000-0002-4845-9019)
Могольский государственный университет образования,
Бага Тойруу, 54, Улан-Батор 14191, Монголия
mijiddorj@msue.edu.mn

УДК 519.682.1+519.683+519.7+519.1

ОБЪЕКТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ И ПРЕФИКСНАЯ ПЕРЕЗАПИСЬ. ЧАСТЬ II: ЭФФЕКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРЕЗАПИСИ

А. Е. Гутман

Аннотация. Для произвольной детерминированной префиксной перезаписывающей системы получен критерий бесконечной перезаписываемости слова, на основе которого разработана алгоритмическая процедура анализа последовательности перезаписи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.404

Ключевые слова: префиксная перезапись, полутуэвская система, информационная система, объектно-ориентированная система данных, лемма о накачке.

Введение

Эта статья является частью запланированной серии публикаций, реализующих анонсированное в [1] систематическое исследование префиксной перезаписи как инструмента для представления и анализа объектно-ориентированных систем данных.

В обзоре [1] центральным предметом исследования является детерминированная префиксная перезаписывающая система $\langle \rightarrow, \omega \rangle$, где действующая на множестве слов функция перезаписи $\rightarrow$ рассматривается в паре с некоторой выделенной буквой ω , называемой первичным объектом. Интерпретация соотношений $X \rightarrow A$ и $XY \rightarrow B$ как « X is A » и соответственно «the Y of X is B » позволяет использовать перезапись префиксов для определения и анализа понятий, характерных для объектно-ориентированных систем данных — таких как наследование классов и объектов, экземпляры классов, атрибуты классов и экземпляров, концептуальная зависимость и непротиворечивость, концептуальная схема, типы, подтипы и др. Поскольку настоящая работа затрагивает лишь те аспекты префиксной перезаписи, в которых первичный объект ω не участвует, рассмотрение ограничивается функцией перезаписи.

Материал статьи сгруппирован в трех параграфах. Параграф 1 содержит основные определения и обозначения, касающиеся функции перезаписи префиксов, в параграфе 2 приведены некоторые вспомогательные утверждения, а основной параграф 3 включает критерий бесконечной перезаписываемости слова, алгоритм поиска слова в последовательности перезаписи и эффективную процедуру проверки конечной перезаписываемости всех слов.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

§ 1. Определения и обозначения

1.1. На протяжении всей статьи $\mathbb{A}$ — непустой конечный алфавит, $\mathbb{A}^*$ (соответственно, $\mathbb{A}^+$) — множество всех (соответственно, всех непустых) слов над $\mathbb{A}$. Элементы $\mathbb{A}$ называются *буквами*. Буквы традиционно отождествляются с соответствующими однобуквенными словами. Длина слова X обозначается через $|X|$. Для $X \in \mathbb{A}^+$ и $n \geq 0$ символом X^n обозначается соединение $XX \cdots X$, составленное из n вхождений слова X ; при этом X^0 полагается равным пустому слову $\emptyset$.

Для краткости будем в дальнейшем говорить «слово» вместо «непустое слово над $\mathbb{A}$ ».

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Упорядоченные кортежи и последовательности условимся записывать с использованием угловых скобок: $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$, $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$.

1.2. Слово X будем называть *префиксом* слова $Y \in \mathbb{A}^+$ и писать $X \sqsubseteq Y$, если $X \in \mathbb{A}^+$ и $Y = XS$ для некоторого $S \in \mathbb{A}^*$. Суффикс S слова $Y = XS$, определяемый префиксом $X \sqsubseteq Y$, условимся обозначать символом $\frac{Y}{X}$. Таким образом,

$$\begin{aligned} X \frac{Y}{X} &= Y \quad \text{для любых } X, Y \in \mathbb{A}^+, X \sqsubseteq Y; \\ \frac{XS}{X} &= S \quad \text{для любых } X \in \mathbb{A}^+, S \in \mathbb{A}^*. \end{aligned}$$

Если $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{A}^+$ и $|X| \geq n$, то символом $X|_n$ обозначается префикс слова X , имеющий длину n .

1.3. *Функцией перезаписи* назовем произвольную функцию $\rightarrow$, определенную на некотором конечном непустом подмножестве $\mathbb{A}^+$ и действующую в $\mathbb{A}^+$. Функцию $\rightarrow$ условимся считать бинарным отношением на $\mathbb{A}^+$ (т. е. подмножеством $\rightarrow \subseteq \mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$) и использовать инфиксную запись $X \rightarrow Y$ вместо принадлежности $\langle X, Y \rangle \in \rightarrow$ или равенства $\rightarrow(X) = Y$.

В дальнейшем, давая определения и формулируя утверждения, по умолчанию считаем фиксированной произвольную функцию перезаписи $\rightarrow$, относительно которой интерпретируются вводимые понятия, а также используемые термины и обозначения.

1.4. Обозначим символом $\mathbb{E}$ непустое конечное подмножество $\mathbb{A}^+$, являющееся областью определения функции перезаписи $\rightarrow$. Элементы множества $\mathbb{E}$ условимся называть *явными словами*. Будем говорить, что слово E является *явным префиксом* слова X , если $E \sqsubseteq X$ и $E \in \mathbb{E}$. Слово $S \in \mathbb{A}^+$ назовем *явным дополнением* слова X , если $XS \in \mathbb{E}$. Кроме того, определим число μ как длину самого длинного явного слова:

$$\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}.$$

1.5. Значение функции $\rightarrow$ на явном слове $E \in \mathbb{E}$ будем обозначать символом E' и называть *явной перезаписью* слова E . Таким образом,

$$E \rightarrow E'$$

для всех $E \in \mathbb{E}$. Слово X назовем *перезаписываемым*, если X имеет хотя бы один явный префикс. Для перезаписываемого слова X рассмотрим его самый длинный явный префикс E , определим соответствующий суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X = ES$, и введем обозначение

$$X' := E'S.$$

Слово X' назовем *перезаписью* слова X . Самый длинный явный префикс перезаписываемого слова X условимся обозначать символом $\text{ler}(X)$. Таким образом, если $E = \text{ler}(X)$, то с учетом обозначений, введенных в 1.2, имеем

$$(E \frac{X}{E})' = E' \frac{X}{E}.$$

1.6. Введем в рассмотрение бинарное отношение $\Rightarrow$ на $\mathbb{A}^+$, полагая

$X \Rightarrow Y$ тогда и только тогда, когда X перезаписываемо и $X' = Y$.

Символами $\overset{*}{\Rightarrow}$ и $\overset{\pm}{\Rightarrow}$ обозначим соответственно рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$ и транзитивное замыкание отношения $\Rightarrow$. Таким образом, запись $x \overset{*}{\Rightarrow} y$ (соответственно, $x \overset{\pm}{\Rightarrow} y$) означает, что

$$x = z_0 \Rightarrow z_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow z_n = y$$

для некоторых $z_1, \dots, z_n$, где $n \geq 0$ (соответственно, $n \geq 1$). В частности, соотношение $x \overset{*}{\Rightarrow} y$ справедливо тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x \overset{\pm}{\Rightarrow} y$.

1.7. Для всех целых $n \geq 0$ определим множества $\mathbb{W}_n$ n -кратно перезаписываемых слов и n -е перезаписи $X^{(n)}$ слов $X \in \mathbb{W}_n$ посредством следующей совместной рекурсии:

$$\begin{aligned} \mathbb{W}_0 &:= \mathbb{A}^+, \\ X^{(0)} &:= X \text{ для } X \in \mathbb{W}_0; \\ \mathbb{W}_n &:= \{X \in \mathbb{W}_{n-1} : X^{(n-1)} \text{ перезаписываемо}\}, \quad n \geq 1, \\ X^{(n)} &:= (X^{(n-1)})' \text{ для } X \in \mathbb{W}_n, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Положим

$$\mathbb{W}_\infty := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}_n, \quad \mathbb{W}_{\text{fin}} := \mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{W}_\infty.$$

Слово $X^{(n)}$ назовем n -й *перезаписью* слова X . Таким образом, $\mathbb{W}_n$ представляет собой совокупность всех слов X , допускающих n -кратную перезапись, и для каждого слова $X \in \mathbb{W}_n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} X &= X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)}; \\ X &\overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n \geq 0, \\ X &\overset{\pm}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n > 0. \end{aligned}$$

Имеет место цепь включений

$$\mathbb{W}_0 \supseteq \mathbb{W}_1 \supseteq \mathbb{W}_2 \supseteq \dots \supseteq \mathbb{W}_n \supseteq \mathbb{W}_{n+1} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{W}_\infty.$$

Слова, принадлежащие множеству $\mathbb{W}_\infty$, назовем *бесконечно перезаписываемыми*, а остальные слова, т.е. элементы множества $\mathbb{W}_{\text{fin}}$, — *конечно перезаписываемыми*. Для данного слова X максимальную (конечную или бесконечную) последовательность вида

$$\langle X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots \rangle$$

будем называть *последовательностью перезаписи* слова X . Таким образом, слово X конечно (бесконечно) перезаписываемо тогда и только тогда, когда последовательность перезаписи слова X конечна (бесконечна).

§ 2. Вспомогательные утверждения

2.1. Предложение. Пусть $X \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$ и $\alpha \in \mathbb{A}$.

- (1) Если $X\alpha \notin \mathbb{E}$ и $X\alpha \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(X\alpha)' = X'\alpha$.
- (2) Если X не имеет явных дополнений и $XS \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(XS)' = X'S$.
- (3) Если $|X| \geq \mu$ и $XS \in \mathbb{W}_1$, то $X \in \mathbb{W}_1$ и $(XS)' = X'S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $S := \alpha$ в случае (1). В каждом из случаев (1) и (2) — когда $X\alpha \notin \mathbb{E}$ или когда X не имеет явных дополнений — выполняется следующее условие: всякий явный префикс $E \sqsubseteq XS$ является префиксом слова X и, в частности, удовлетворяет равенству

$$\frac{XS}{E} = \frac{X}{E}S.$$

Предположим теперь, что $XS \in \mathbb{W}_1$, и рассмотрим $E := \text{lep}(XS)$. Тогда E является префиксом X , а значит, $E = \text{lep}(X)$. Следовательно, $X \in \mathbb{W}_1$ и

$$(XS)' = \left(E \frac{XS}{E}\right)' = E' \frac{XS}{E} = E' \frac{X}{E}S = \left(E \frac{X}{E}\right)'S = X'S.$$

Утверждение (3) вытекает из (2), поскольку в случае $|X| \geq \mu$ слово X не имеет явных дополнений. $\square$

2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Всякое слово, имеющее перезаписываемый префикс, само является перезаписываемым. В частности, в условиях каждого из утверждений предложения 2.1 включения $X \in \mathbb{W}_1$ и $XS \in \mathbb{W}_1$ равносильны.

2.3. Лемма. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{W}_r$, $|X^{(1)}|, \dots, |X^{(r)}| \geq |X|$ и пусть $Y \in \mathbb{A}^+$ и $S \in \mathbb{A}^*$ таковы, что $X = YS$ и $|Y| \geq \mu$. Тогда

$$Y \in \mathbb{W}_i, X^{(i)} = Y^{(i)}S \text{ и } |Y^{(i)}| \geq \mu \quad (C_i)$$

для всех $i = 0, \dots, r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем справедливость (C_i) для всех $i = 0, \dots, r$, воспользовавшись индукцией по i . Утверждение (C_0) справедливо по условию леммы. Предположим, что (C_i) справедливо для некоторого $0 \leq i < r$, и установим (C_{i+1}) . Действительно, применяя предложение 2.1(3) для $Y^{(i)}$ в роли X , заключаем, что $Y^{(i)} \in \mathbb{W}_1$ (т.е. $Y \in \mathbb{W}_{i+1}$) и

$$X^{(i+1)} = (X^{(i)})' = (Y^{(i)}S)' = (Y^{(i)})'S = Y^{(i+1)}S.$$

Из полученного равенства следует, что

$$|Y^{(i+1)}| + |S| = |Y^{(i+1)}S| = |X^{(i+1)}| \geq |X| = |YS| = |Y| + |S| \geq \mu + |S|,$$

а значит, $|Y^{(i+1)}| \geq \mu$. $\square$

2.4. Лемма. Для всякой последовательности натуральных чисел $\langle x_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что для любых $n, i \in \mathbb{N}$ из $n \geq n_i$ следует $x_n \geq x_{n_i}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ можно определить рекурсивно, выбрав n_1 так, чтобы $x_{n_1} = \min\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, и затем для каждого $i \in \mathbb{N}$ выбирая $n_{i+1} > n_i$ так, чтобы $x_{n_{i+1}} = \min\{x_n : n > n_i\}$. $\square$

§ 3. Основные результаты

3.1. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 5.11].

Теорема. Слово X является бесконечно перезаписываемым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух взаимоисключающих условий:

- (а) существуют целые числа $n \geq 0$ и $r > 0$ такие, что $X^{(n)} = X^{(n+r)}$;
- (б) существуют целые числа $n \geq 0$ и $r > 0$ такие, что

$$\begin{aligned} \mu &\leq |X^{(n)}| \leq |X^{(n+1)}|, \dots, |X^{(n+r)}|, \\ X^{(n)} &\neq X^{(n+r)}, \quad X^{(n)} \upharpoonright_\mu = X^{(n+r)} \upharpoonright_\mu. \end{aligned}$$

В случае (а) последовательность перезаписи слова X начиная с n -го члена становится периодической с периодом длины r :

$$X \xRightarrow{*} \underbrace{X^{(n)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n+r-1)}}_{\text{период}} \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow \dots$$

В случае (б) рассмотрим представление $X^{(n)} = YS$, где $Y \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$ и $|Y| = \mu$, т. е. положим $Y := X^{(n)} \upharpoonright_\mu$ и $S := \frac{X^{(n)}}{Y}$. Тогда $Y \in \mathbb{W}_r$ и существует такое слово $R \in \mathbb{A}^+$, что $Y^{(r)} = YR$ и последовательность перезаписи слова X содержит подпоследовательность, образованную словами $X^{(n+mr)} = YR^m S$, $m \geq 0$, каждое из которых начинается регулярный «период роста» длины r :

$$\begin{aligned} X &\xRightarrow{*} X^{(n)} = YS \Rightarrow Y^{(1)}S \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r-1)}S \\ &\Rightarrow X^{(n+r)} = YRS \Rightarrow Y^{(1)}RS \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r-1)}RS \\ &\Rightarrow X^{(n+2r)} = YR^2S \Rightarrow Y^{(1)}R^2S \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^2S \\ &\Rightarrow \dots \\ &\Rightarrow X^{(n+mr)} = YR^mS \Rightarrow Y^{(1)}R^mS \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^mS \\ &\Rightarrow \dots \end{aligned}$$

В частности, $\{X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots\} = \{Y^{(j)}R^mS : 0 \leq j < r, m \geq 0\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $X \in \mathbb{W}_\infty$.

Предположим сначала, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ найдется число $m > n$ такое, что $|X^{(m)}| < \mu$. Покажем, что в этом случае выполнено условие (а). В рассматриваемом случае имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $|X^{(n_i)}| < \mu$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Поскольку множество $\{Y \in \mathbb{A}^+ : |Y| < \mu\}$ конечно, слова $X^{(n_i)}$, $i \in \mathbb{N}$, не могут быть попарно различными. Следовательно, найдутся числа $i < j$ такие, что $X^{(n_i)} = X^{(n_j)}$. Тогда, полагая $n = n_i$ и $r = n_j - n_i$, получаем $X^{(n)} = X^{(n+r)}$, и тем самым выполнено условие (а).

Пусть теперь существует число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $|X^{(n)}| \geq \mu$ для всех $n > n_0$. Покажем, что в этом случае выполнено одно из условий (а) или (б). Согласно лемме 2.4 имеется строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\langle n_i \rangle_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что

$$\text{из } n \geq n_i \text{ следует } |X^{(n)}| \geq |X^{(n_i)}| \quad (*)$$

для любых $n, i \in \mathbb{N}$. Не нарушая общности, можем считать, что $n_1 > n_0$. Тогда

$$|X^{(n_i)}| \geq \mu \text{ для всех } i \in \mathbb{N}. \quad (**)$$

Поскольку множество слов длины μ конечно, слова $X^{(n_i)}|_\mu$, $i \in \mathbb{N}$, не могут быть попарно различными. Следовательно, найдутся числа $i < j$ такие, что $X^{(n_i)}|_\mu = X^{(n_j)}|_\mu$. Положим $n = n_i$ и $r = n_j - n_i$. Тогда $X^{(n)}|_\mu = X^{(n+r)}|_\mu$. Кроме того, благодаря (*) и (**) имеем

$$\mu \leq |X^{(n)}| \leq |X^{(n+1)}|, \dots, |X^{(n+r)}|.$$

Таким образом, в случае $X^{(n)} = X^{(n+r)}$ выполнено условие (а), а в случае $X^{(n)} \neq X^{(n+r)}$ выполнено условие (б).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Из условия (а) с очевидностью следует, что $X \in \mathbb{W}_\infty$. Пусть выполнено условие (б). Тогда имеются целые числа $n \geq 0$ и $r > 0$, слово Y и кортежи $S, T \in \mathbb{A}^*$ такие, что

$$\begin{aligned} |X^{(n+1)}|, \dots, |X^{(n+r)}| &\geq |X^{(n)}|, \quad X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \\ |Y| &= \mu, \quad X^{(n)} = YS, \quad X^{(n+r)} = YT. \end{aligned}$$

Применяя лемму 2.3 к слову $X^{(n)}$ в роли X , заключаем, что $Y \in \mathbb{W}_r$ и

$$X^{(n+i)} = Y^{(i)}S \quad \text{и} \quad |Y^{(i)}| \geq \mu \quad \text{для всех} \quad i = 0, \dots, r.$$

В частности, $Y^{(r)}S = X^{(n+r)} = YT$ и $|Y^{(r)}| \geq \mu$. С другой стороны, $|Y| = \mu$, а значит, $Y^{(r)} = YR$ для некоторого кортежа $R \in \mathbb{A}^*$. При этом $R \neq \emptyset$, так как в противном случае

$$X^{(n)} = YS = Y^{(r)}S = X^{(n+r)}.$$

Учитывая неравенства $|Y^{(0)}|, \dots, |Y^{(r)}| \geq \mu$ и привлекая предложение 2.1(3), заключаем, что $(YZ)^{(i)} = Y^{(i)}Z$ для всех $Z \in \mathbb{A}^*$, $i = 0, \dots, r$. Следовательно, последовательность перезаписи слова X начиная с n -го члена имеет вид

$$\begin{aligned} X^{(n)} &= YS \Rightarrow Y^{(1)}S \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r)}S \\ &= YRS \Rightarrow Y^{(1)}RS \Rightarrow \dots \Rightarrow Y^{(r)}RS \\ &= YR^2S \Rightarrow \dots \Rightarrow YR^3S \Rightarrow \dots \Rightarrow YR^mS \Rightarrow \dots \end{aligned}$$

и тем самым $X \in \mathbb{W}_\infty$.

Остается заметить, что условия (а) и (б) взаимно исключают друг друга, так как в первом случае последовательность длин $|X^{(n)}|$ ограничена, а во втором случае (как показано выше) она стремится к бесконечности. $\square$

3.2. ЗАМЕЧАНИЕ. В заключительной формуле теоремы 3.1 возникает множество слов

$$\{Y^{(j)}R^mS : 0 \leq j < r, m \geq 0\},$$

которое внешне напоминает стандартную картину, лежащую в основе леммы о накачке для регулярных языков: достаточно длинное слово разлагается на части таким образом, что один из его фрагментов можно повторять произвольное число раз, сохраняя принадлежность соответствующему языку. В классической форме такая лемма восходит к работе М. О. Рабина и Д. Скотта [2], где она появляется как одно из базовых следствий теории конечных автоматов. Каноническое учебное изложение этой леммы, ее доказательства и типичные случаи применения можно найти, например, в монографиях [3, 4].

Теорема 3.1 не является непосредственным приложением леммы о накачке. Приведенное выше доказательство опирается не на стандартный автоматный аргумент с повторением состояния при чтении достаточно длинного слова, а на внутреннюю структуру рассматриваемой последовательности перезаписей слова. Тем не менее было бы интересно выяснить, не скрывается ли за этим внешним сходством более глубокая связь. В частности, естественно спросить, можно ли интерпретировать появление слов вида YR^mS в терминах некоторого автоматного или регулярного механизма и получить приведенное выше описание последовательности перезаписей как следствие подходящего варианта леммы о накачке. В настоящей работе этот вопрос не рассматривается.

3.3. Пусть $\mathcal{P}$ — какое-либо множество «конструктивных объектов» (т. е. множество, чьи элементы допустимы в качестве входных данных алгоритмов), и пусть $C(Y, p)$ — условие, которое может быть наложено на слова Y с дополнительными параметрами $p \in \mathcal{P}$. Формально можно считать, что C является подмножеством произведения $\mathbb{A}^+ \times \mathcal{P}$ и для всех $Y \in \mathbb{A}^+$ и $p \in \mathcal{P}$ выражение $C(Y, p)$ означает включение $\langle Y, p \rangle \in C$.

Условие $C(Y, p)$ называется *разрешимым*, если существует алгоритм, проверяющий соотношение $C(Y, p)$ для любых входных данных $Y \in \mathbb{A}^+$ и $p \in \mathcal{P}$. Условие $C(Y, p)$ назовем *циклически разрешимым*, если существует алгоритм, проверяющий следующее соотношение $C'(Y, R, S, p)$ для любых входных данных $Y \in \mathbb{A}^+$, $R, S \in \mathbb{A}^*$ и $p \in \mathcal{P}$:

$$C'(Y, R, S, p) \Leftrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}) C(YR^mS, p).$$

3.4. Предложение.

- (1) *Всякое циклически разрешимое условие является разрешимым.*
- (2) *Для любого непустого алфавита $\mathbb{A}$ существует условие $C(Y)$, $Y \in \mathbb{A}^+$, являющееся разрешимым, но не циклически разрешимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Соотношение $C(Y, p)$ равносильно $C'(Y, \emptyset, \emptyset, p)$.

- (2) Пусть D — рекурсивное подмножество $\mathbb{N}^2$, для которого множество

$$D' := \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N}) \langle n, m \rangle \in D\}$$

не является рекурсивным (см., например, [5, гл. 1, §6]).

Если в алфавите $\mathbb{A}$ есть две различные буквы α и β , рассмотрим условие

$$C(Y) \Leftrightarrow (\exists \langle n, m \rangle \in D) Y = \alpha^n \beta^m.$$

Из рекурсивности множества D непосредственно вытекает разрешимость $C(Y)$. С другой стороны, множество

$$\{n \in \mathbb{N} : C'(\alpha^n, \beta, \emptyset)\} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N}) C(\alpha^n \beta^m)\} = D'$$

не рекурсивно, а значит, условие $C(Y)$ не является циклически разрешимым.

В случае однобуквенного алфавита $\mathbb{A} = \{\alpha\}$ можно рассмотреть условие

$$C(Y) \Leftrightarrow (\exists \langle n, m \rangle \in D) Y = \alpha^{2^n(2m+1)},$$

для которого

$$\{n \in \mathbb{N} : C'(\alpha^{2^n}, \alpha^{2^{n+1}}, \emptyset)\} = \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N}) C(\alpha^{2^n(2m+1)})\} = D'. \quad \square$$

3.5. Пусть $C(Y, p)$ — произвольное циклически разрешимое условие.

Описываемый ниже алгоритм принимает на входе функцию перезаписи, произвольное слово X и параметр $p \in \mathcal{P}$ и возвращает сообщение о наличии или отсутствии слова Y , удовлетворяющего условиям $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$, дополняя ответ поясняющим фрагментом последовательности перезаписи слова X (см. [1, алгоритм 5.3]).

Алгоритм использует целочисленные переменные μ , n , i и r , переменные $R \in \mathbb{A}^+$ и $S \in \mathbb{A}^*$, а также два массива переменной длины, члены которых являются словами и обозначаются через X_i и Y_i .

Алгоритм. СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ТАКОЕ СЛОВО Y , ЧТО $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ И $C(Y, p)$?

- (1) Полагаем $\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}$, $n := 0$, $X_0 := X$.
- (2) Если выполнено условие $C(X_n, p)$, то завершаем работу с ответом
 - **Да**, слово $Y = X_n$ удовлетворяет условиям $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$:
 $X_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n$.
- (3) Если X_n не является перезаписываемым, то завершаем работу с ответом
 - **Нет**, не существует такого слова Y , что $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$:
 $X_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n$ — полная последовательность перезаписи.
- (4) Если $X_i = X_n$ для некоторого $0 \leq i < n$, то завершаем работу с ответом
 - **Нет**, не существует такого слова Y , что $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$:
 $X_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{X_i \Rightarrow \dots \Rightarrow X_{n-1}}_{\text{период}} \Rightarrow X_i \Rightarrow \dots$.
- (5) Если $n = 0$ или $|X_n| < \mu$, то переходим к (9).
 В противном случае полагаем $i := n - 1$.
- (6) Если $|X_i| < \mu$, то переходим к (9).
- (7) Если $X_i \upharpoonright_\mu = X_n \upharpoonright_\mu$ и $|X_i| \leq |X_{i+1}|, \dots, |X_n|$, то делаем следующее.
 - (а) Полагаем $r := n - i$, $Y_0 := X_i \upharpoonright_\mu$, $Y_1 := Y'_0, \dots, Y_r := Y'_{r-1}$ и определяем $S \in \mathbb{A}^*$, исходя из равенства $X_i = Y_0 S$.
 При этом окажется, что $Y_r = Y_0 R$ для некоторого слова R .
 - (б) Используя циклическую разрешимость условия $C(Y, p)$, выясняем, существуют ли $j \in \{1, \dots, r\}$ и $m \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие условию $C(Y_j R^m S, p)$.
 - (с) Если результат теста (б) положителен, то (исключительно для построения поясняющего фрагмента последовательности перезаписи слова X) продолжаем цикл вычислений $n := n + 1$, $X_n := X'_{n-1}$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $C(X_n, p)$, и завершаем работу с ответом
 - **Да**, слово $Y = X_n$ удовлетворяет условиям $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$:
 $X_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n$.
 Если же результат (б) отрицателен, то завершаем работу с ответом
 - **Нет**, не существует такого слова Y , что $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y, p)$:
 $X_0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \underbrace{X_i \Rightarrow \dots \Rightarrow X_{n-1}}_{\text{период роста}} \Rightarrow X_n \Rightarrow \dots$.
- (8) Если $i > 0$, то полагаем $i := i - 1$ и переходим к (6).
- (9) Полагаем $n := n + 1$, $X_n := X'_{n-1}$ и переходим к (2).

3.6. Предложение. Если $C(Y, p)$ — циклически разрешимое условие, то для любой функции перезаписи, любого слова X и любого параметра $p \in \mathcal{P}$ алгоритм 3.5 за конечное время возвращает правильный ответ на вопрос о существовании слова Y , удовлетворяющего условиям $X \xrightarrow{*} Y$ и $C(Y, p)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что при каждом прохождении этапа 3.5(9) значение X_n полагается равным n -й перезаписи слова X , а значит, последовательность $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ является начальным фрагментом последовательности перезаписи слова X .

Из сказанного выше с очевидностью следует, что на этапе 3.5(2) при выполнении условия $C(X_n, p)$ возвращается правильный ответ.

Если на этапе 3.5(3) слово X_n оказалось непerezаписываемым, то возвращаемый на этом этапе ответ является правильным, поскольку $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$ — полная последовательность перезаписи слова X и предшествующие прохождения этапа 3.5(2) не выявили выполнение условия $C(X_i, p)$ ни при одном $i = 0, \dots, n$.

Аналогичные соображения обосновывают правильность ответа, возвращаемого на этапе 3.5(4), поскольку равенство $X_i = X_n$ для некоторого $0 \leq i < n$ гарантирует, что в последовательности перезаписи слова X начиная с n -го члена будут встречаться лишь слова, принадлежащие множеству $\{X_{i+1}, \dots, X_n\}$.

Как легко видеть, этап 3.5(5) и идущий вслед за ним цикл 3.5(6)–(8) проверяют существование такого числа $0 \leq i < n$, что

$$\mu \leq |X^{(i)}| \leq |X^{(i+1)}|, \dots, |X^{(n)}|, \quad X^{(i)} \upharpoonright_\mu = X^{(n)} \upharpoonright_\mu.$$

Коль скоро работа алгоритма не завершилась на этапе 3.5(4), во время этой проверки имеют место неравенства $X^{(i)} \neq X^{(n)}$ для всех $0 \leq i < n$. Таким образом, этапы 3.5(5)–(8) проверяют условие 3.1 (b) для фрагмента $\langle X_0, \dots, X_n \rangle$. В случае положительного результата этой проверки существование упомянутого в 3.5(7)(a) слова R и правильность ответа, возвращаемого на этапе 3.5(7)(c), обосновываются теоремой 3.1, согласно которой

$$\{X^{(n+1)}, X^{(n+2)}, \dots\} = \{Y_j R^m S : 1 \leq j \leq r, m \in \mathbb{N}\}.$$

Остается заметить, что благодаря той же теореме 3.1 работа алгоритма непременно завершится на одном из этапов 3.5(2)–(4) или (7)(c). $\square$

3.7. Как легко видеть, для данной функции перезаписи $\rightarrow$ условие

$$\begin{aligned} C(Y, \rightarrow) &\Leftrightarrow Y \text{ не является перезаписываемым относительно } \rightarrow \\ &\Leftrightarrow Y \text{ не имеет явного префикса} \end{aligned}$$

циклически разрешимо. Поэтому алгоритм 3.5, специализированный для этого условия, проверяет конечную перезаписываемость данного слова. Ниже приведена упрощенная версия этой процедуры (см. [1, алгоритм 5.4]).

Алгоритм. Является ли слово X конечно перезаписываемым?

- Начинаем вычисление последовательности перезаписи $X^{(0)}, X^{(1)}, \dots$.
- Если возникает непerezаписываемое слово $X^{(i)}$, возвращаем **Да**.
- В противном случае согласно теореме 3.1 в последовательности встретится фрагмент $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots, X^{(n+r)} \rangle$, удовлетворяющий условию (a) или условию (b) теоремы 3.1. В этом случае возвращаем **Нет**.

3.8. Следующее утверждение анонсировано в [1, теорема 1.12].

Теорема. Если $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{W}_{\text{fin}}$, то $\mathbb{W}_{\text{fin}} = \mathbb{A}^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что все явные слова конечно перезаписываемы, и докажем конечную перезаписываемость любого слова X , воспользовавшись индукцией по длине $|X|$ слова X .

Пусть $|X| = 1$. Если $X \in \mathbb{E}$, то $X \in \mathbb{W}_{\text{fin}}$ по условию теоремы. Если же $X \notin \mathbb{E}$, то, будучи однобуквенным, слово X не имеет явных префиксов, а значит, не является перезаписываемым, т. е. принадлежит $\mathbb{A}^+ \setminus \mathbb{W}_1 \subset \mathbb{W}_{\text{fin}}$.

Пусть все слова длины l конечно перезаписываемы. Рассмотрим произвольное слово X длины $l + 1$ и допустим вопреки доказываемому, что X имеет бесконечную последовательность перезаписи

$$X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \dots \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow X^{(n+1)} \Rightarrow \dots$$

Тогда все слова $X^{(n)}$ бесконечно перезаписываемы, а значит, по условию теоремы не являются явными. Кроме того, $|X^{(n)}| \geq 2$ для всех $n \geq 0$ согласно доказанной выше базе индукции.

Для любого слова Y длины $|Y| \geq 2$ обозначим символом $[Y]$ префикс Y длины $|Y| - 1$.

Покажем, что $[X^{(n)}] \Rightarrow [X^{(n+1)}]$ для всякого $n \geq 0$. Действительно, пусть α — последняя буква слова $X^{(n)}$. Поскольку слово $X^{(n)} = [X^{(n)}]\alpha$ является неявным и перезаписываемым, согласно предложению 2.1(1) имеем $[X^{(n)}] \in \mathbb{W}_1$ и $([X^{(n)}]\alpha)' = [X^{(n)}]'\alpha$. Следовательно,

$$[X^{(n)}] \Rightarrow [X^{(n)}]' = [([X^{(n)}]\alpha)'] = [(X^{(n)})'] = [X^{(n+1)}].$$

Таким образом, последовательность перезаписи слова $[X]$, имеющего длину l , бесконечна: $[X^{(0)}] \Rightarrow [X^{(1)}] \Rightarrow \dots \Rightarrow [X^{(n)}] \Rightarrow [X^{(n+1)}] \Rightarrow \dots$. Полученное противоречие с предположением индукции завершает доказательство. $\square$

3.9. Поскольку множество $\mathbb{E}$ явных слов конечно, из теоремы 3.8 следует существование эффективной проверки конечной перезаписываемости всех слов относительно данной функции перезаписи: для такой проверки достаточно применить алгоритм 3.7 ко всем явным словам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е. Объектно-ориентированные данные и префиксная перезапись. Часть I: Обзор и основные результаты // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 3. С. 392–413.
2. Rabin M. O., Scott D. Finite automata and their decision problems // IBM J. Res. Dev. 1959. V. 3, N 2. P. 114–125.
3. Хопкрофт Дж., Мотвани Р., Ульман Дж. Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. Москва: Вильямс, 2015.
4. Пентус А. Е., Пентус М. Р. Математическая теория формальных языков. Москва: ИНТУИТ; Бином. Лаборатория знаний, 2006.
5. Барвайс Дж. Справочная книга по математической логике. Часть III: Теория рекурсии. Москва: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 28 мая 2026 г.

После доработки 28 мая 2026 г.

Принята к публикации 26 июня 2026 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

УДК 517.956.2

МЕТОД ПЕРРОНА В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МЯГКОГО ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Н. С. Даирбеков,
О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев

Аннотация. Доказывается разрешимость задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве путем модификации известного метода Перрона.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.405

Ключевые слова: стратифицированная мера, мягкий лапласиан, теорема о среднем, неравенство Харнака, теорема Харнака о сходимости.

Классический метод Перрона (см. [1], а также [2, 3]) дает элегантный способ доказательства разрешимости задачи Дирихле для классического уравнения Лапласа. В связи с его простотой специалисты постоянно расширяли сферу его применения, обобщая его на случаи более общих уравнений и краевых условий. В настоящее время наметился существенный интерес к так называемым уравнениям на стратифицированных множествах. Это довольно сильное обобщение классической теории дифференциальных уравнений в областях, а потому естественно оценить перспективы применения метода Перрона к эллиптическим уравнениям на таких множествах. Впервые попытка распространения этого метода на случай задачи Дирихле для стратифицированного лапласиана была предпринята в работе [4]. Однако удалось исследовать лишь случай двумерных стратифицированных множеств; до сих пор неясно, можно ли технику, примененную в [4], распространить на множества, содержащие страты произвольных размерностей. В данной работе, основанной на наших последних результатах [5, 6], метод Перрона обобщается на стратифицированные множества произвольной размерности. Мы рассматриваем, как и в [4], случай задачи Дирихле для так называемого мягкого лапласиана при дополнительном предположении, что «внутренние» страты являются плоскими.

§ 1. Основные понятия

Определение стратифицированного множества в данной работе (см. также [7, 8]) является адаптацией определения работы [9], приспособленной к нашим задачам. *Стратифицированным* мы называем связанное подмножество Ω пространства $\mathbb{R}^N$, составленное из конечного числа его попарно не пересекающихся

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект BR31714735).

связных гладких подмногообразий σ_{kj} — *страт*; в этом обозначении индекс k указывает размерность страты, а j служит для нумерации страт данной размерности. Множество всех страт в Ω обозначается через Σ . Запись вида $\sigma_{kj} \prec \sigma_{ml}$ (или $\sigma_{ml} \succ \sigma_{kj}$) означает, что $k < m$ и $\sigma_{kj} \subset \partial\sigma_{ml} = \bar{\sigma}_{ml} \setminus \sigma_{ml}$; в этом случае мы будем говорить, что страты *примыкают* друг к другу. В данной работе эти примыкания подчиняются следующим требованиям.

- Пересечение замыканий любой пары несовпадающих страт либо пусто, либо является объединением страт семейства Σ .
- Граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ каждой страты является объединением страт меньшей размерности из Σ .

В отличие от, например, работ [7, 8] других требований к примыканиям страт не предъявляется, поскольку в данной работе внутренние (см. ниже) страты в Ω предполагаются плоскими.

Для постановки задачи Дирихле множество Ω представляется в виде объединения двух подмножеств: Ω° и $\partial\Omega^\circ$ — аналогов обычной области и ее границы. В качестве Ω° мы возьмем связанное открытое подмножество Ω , составленное из страт в Σ , замыкание которого совпадает с Ω ; $\partial\Omega^\circ = \Omega \setminus \Omega^\circ$. Все топологические термины относятся к топологии на Ω , порожденной *внутренней метрикой*: расстояние между точками $d(X, Y)$ определяется как инфимум длин непрерывных кривых, соединяющих эти точки и лежащих в Ω . Нетрудно заметить, что эта же топология индуцирована стандартной топологией объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$. В этой топологии $\partial\Omega^\circ$ является топологической границей Ω° .

Основное предположение этой работы, касающееся страт, состоит в том, что *все страты имеют компактные замыкания, а внутренние страты — страты, являющиеся подмножествами Ω° — плоскими*. Последнее означает, что минимальное линейное многообразие $L \subset \mathbb{R}^N$, содержащее σ_{kj} , имеет размерность k . Для простоты мы будем вместо «страта является подмножеством Ω » говорить «страта в Ω ».

На каждой страте σ_{kj} определена мера Лебега μ^k , согласующаяся с римановой метрикой на σ_{kj} , наследуемой этой стратой из $\mathbb{R}^N$. Из этих мер мы сформируем «стратифицированную» меру μ на Ω следующим образом: для произвольного подмножества $\omega \subset \Omega$ полагаем

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \mu^k(\omega \cap \sigma_{kj}). \quad (1)$$

Ясно, что $\mu(\omega)$ определена только на таких ω , пересечения которых с каждой стратой σ_{kj} измеримы по мере μ^k . Нетрудно проверить, что такие множества образуют σ -алгебру, а интеграл Лебега измеримой по этой мере функции сводится к сумме

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \int_{\sigma_{kj}} f d\mu^k. \quad (2)$$

В прикладных задачах, моделируемых в виде уравнений на стратифицированных множествах, имеют дело с функциями, имеющими различные «физические» размерности на разных стратах. Уже сама мера, определенная формулой (1), может вызывать вопросы, поскольку слагаемые в ней имеют различные размерности, если интерпретировать меру Лебега μ^k как k -мерный объем. Во избежание двусмысленности можно считать, что в этой формуле вычисляется

интеграл от единицы, имеющей различную размерность D/M^k , где D — какая-нибудь фиксированная размерность. Например, если $D = \text{kg}$, то $\mu(\omega)$ равняется массе ω в килограммах. Теперь перейдем к определениям дивергенции и лапласиана на стратифицированном множестве.

Векторное поле $\vec{F}$ назовем *касательным* к Ω° , если его сужение на каждую страту $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ принадлежит касательному расслоению $T\sigma_{kj}$. Мы будем рассматривать касательные поля, непрерывно дифференцируемые на каждой страте; непрерывность таких полей в целом на Ω° не предполагается (при переходе со страты на страту могут происходить скачки значений, а при физической интерпретации еще и скачки размерности). В произвольной точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ дивергенция $\nabla \cdot \vec{F}(X)$ касательного векторного поля определяется формулой

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{\nu}_i \cdot \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i). \quad (3)$$

Здесь ∇_k — классическая k -мерная дивергенция на σ_{kj} как на римановом многообразии; эта часть дивергенции ∇ применяется к сужению поля $\vec{F}$ на эту страту. Во второй сумме $\vec{\nu}_i$ — нормаль к σ_{kj} в точке X , направленная внутрь σ_{k+1i} , а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ — предельное значение $\vec{F}(Y)$, когда точка $Y \in \sigma_{k+1i}$ стремится к X , оставаясь в σ_{k+1i} . Это как бы односторонние пределы поля $\vec{F}$ в точке X со стороны каждой $(k+1)$ -мерной страты, примыкающей к σ_{kj} , или продолжения по непрерывности в точку $X \in \partial\sigma_{k+1i}$ сужения поля на страту σ_{k+1i} . Поля, допускающие такие продолжения, составляют класс $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$. Можно показать (см. [10]), что введенное нами определение дивергенции является точным аналогом классического определения в том смысле, что эта стратифицированная дивергенция оказывается плотностью потока векторного поля по введенной выше стратифицированной мере.

Пусть теперь u — скалярная функция, определенная на Ω° . Через ∇u будем обозначать касательное векторное поле, составленное из обычных градиентов сужений u на страты из Ω° . Если это поле принадлежит классу $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$, а u непрерывна в целом на Ω° , то будем писать $u \in C^2(\Omega^\circ)$. Пусть далее p — *стратифицированная константа* — функция, принимающая на каждой страте постоянное значение. Тогда $p\nabla u$ принадлежит классу $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ и мы можем определить композицию $\nabla \cdot (p\nabla u)$. При $p \equiv 1$ так определенный оператор $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ называется *жестким лапласианом* — в этой работе он не рассматривается. Здесь мы рассмотрим другой крайний случай, когда $p = 1$ на так называемых *свободных стратах* — стратах, не являющихся граничными стратами других страт, а на остальных стратах $p = 0$. Соответствующий оператор называется *мягким лапласианом* и обозначается $\tilde{\Delta}$. Он наиболее близок по своим свойствам, как мы покажем в следующем пункте, к классическому лапласиану. Очевидно, на свободных стратах мягкий лапласиан совпадает с классическим лапласианом (оператором Лапласа — Бельтрами), поскольку второе слагаемое — сумма в (3), составляемая для $\vec{F} = p\nabla u$, — отсутствует. Если же страта $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ является граничной стратой для свободных $(k+1)$ -мерных страт, то будет отсутствовать первое слагаемое, а потому в этом случае имеем

$$\tilde{\Delta}u(X) = \sum_{\substack{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj} \\ \sigma_{k+1i} \text{ свободна}}} \vec{\nu}_i \cdot \nabla u(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i). \quad (4)$$

Наконец, в оставшихся стратах обе суммы оказываются пустыми; в этом случае мы полагаем по определению $\tilde{\Delta}u(X) = 0$ в каждой точке такой страты.

Для открытого множества $G \subset \Omega^\circ$ обозначим через $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(G)$ множество функций $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- u непрерывна на G ,
- для каждой свободной страты σ_{ni} сужение $u|_{G \cap \sigma_{ni}}$ дважды непрерывно дифференцируемо, а градиент ∇u этого сужения имеет непрерывное продолжение в каждую точку $X \in G \cap \sigma_{n-1j}$ любой внутренней страты σ_{n-1j} , примыкающей к σ_{ni} .

Функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической* на G , если $u \in \tilde{C}_{\text{loc}}^2(G)$ и u удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}u(X) = 0$$

для всех $X \in G$.

§ 2. Свойства гармонических функций

Мы начнем с аналога теоремы о среднем. Определим сферу $S_r(X_0)$ обычным образом как множество точек в Ω , удаленных от X_0 на расстояние r в терминах упомянутой выше внутренней метрики на Ω . Если при этом r не превосходит расстояния до всех страт, не содержащих X_0 в своем замыкании, то r назовем *допустимым радиусом*, а сферу $S_r(X_0)$ — *допустимой сферой*. На рис. 1 показано, как могут выглядеть стратифицированные шары, соответствующие этим сферам.

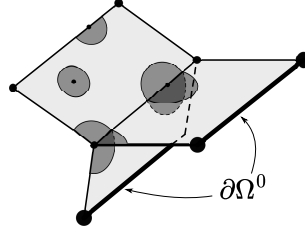


Рис. 1. Стратифицированные шары.

Пусть далее p — стратифицированная константа, фигурирующая в определении мягкого лапласиана.

Для $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимого $r > 0$ рассмотрим *среднее значение по сфере*:

$$M[S_r(X_0)]u = \frac{1}{|S_r(X_0)|_p} \int_{S_r(X_0)} pu \, d\mu_S,$$

где $|S_r(X_0)|_p = \int_{S_r(X_0)} p \, d\mu_S$, а p — стратифицированная константа, равная 1 на свободных стратах и 0 в остальных. Здесь μ_S — стратифицированная мера на сфере, которая рассматривается как стратифицированное множество; стратами сферы объявляются пересечения страт множества Ω с этой сферой. Аналогичное среднее $M[B_r(X_0)]u$ можно определить по допустимым шарам $B_r(X_0)$ и получить (см. [11]) следующее утверждение.

Теорема 1 (о среднем). Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, а u — гармоническая функция на Ω° . Тогда

$$M[S_r(X_0)]u = M[B_r(X_0)]u = u(X_0) \quad (5)$$

для сфер и соответственно шаров допустимого радиуса $r > 0$ с центрами X_0 , лежащими в Ω° .

Условие этой теоремы, касающееся размерности свободных страт, предполагается выполненным во всех дальнейших утверждениях, поскольку все они в той или иной степени опираются на сформулированное свойство средних.

В работе [10] приведена формула Пуассона для решения задачи Дирихле с мягким лапласианом в допустимых шарах $B \subset \Omega^\circ$ с центрами в стратах старшей и на единицу меньшей размерности; не приводя деталей, сформулируем это в виде теоремы о разрешимости.

Теорема 2. *Задача Дирихле для допустимого стратифицированного шара $B \subset \Omega^\circ$ с центром в страте максимальной или на единицу меньшей размерности однозначно разрешима для любой непрерывной граничной функции, заданной на соответствующей сфере.*

Как обычно, под решением задачи Дирихле в какой-либо области $U \subset \Omega^\circ$ понимается гармоническая функция класса $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(U) \cap C(\bar{U})$, принимающая предписанные значения на границе.

Опираясь на данное утверждение, теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3 (свойство среднего). *Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, а u — непрерывная функция на Ω° . Тогда u гармоническая тогда и только тогда, когда выполняется свойство среднего (5).*

В одну сторону — это в точности утверждение теоремы 1. В другую сторону достаточно заметить, что в стратах, размерность которых отстает от максимальной на две и более единиц, от u для гармоничности требуется лишь непрерывность; она есть в силу условий теоремы. В стратах большей размерности требуется проверять равенство $\tilde{\Delta}u = 0$, а его справедливость достаточно проверить на допустимых шарах с центрами в стратах максимальной или на единицу меньшей размерности. Здесь можно рассуждать по известной схеме, изложенной, например, в [2], поскольку по теореме 2 задача Дирихле разрешима в таких шарах. Она используется так. Поскольку u удовлетворяет равенству (5) на допустимых шарах, она достигает своих максимума и минимума на границе такого шара. Ее значения на границе этого шара используем как краевые для решения задачи Дирихле в нем, пусть v — соответствующее решение. Функция $u - v$ удовлетворяет равенству среднего, а потому достигает своих максимума и минимума на границе шара. Но она обращается в нуль на его границе, откуда следует, что u и v совпадают в шаре. Таким образом, u — гармоническая функция в шаре и $\tilde{\Delta}u = 0$ на этом шаре.

Следующее утверждение является точным аналогом классического неравенства Харнака. Его доказательство можно найти в работе [5].

Теорема 4 (неравенство Харнака). *Пусть Ω — стратифицированное множество, а K — произвольный компакт в Ω° . Тогда для каждой неотрицательной гармонической в Ω° функции u выполняется неравенство*

$$\sup_{X \in K} u(X) \leq C \inf_{X \in K} u(X)$$

с константой $C = C(K, \Omega^\circ)$, не зависящей от u .

Из неравенства Харнака очевидным образом (см., например, [2]) получается теорема Харнака о монотонной сходимости.

Теорема 5. Если неубывающая последовательность гармонических в некотором открытом подмножестве $G \subset \Omega^\circ$ функций сходится в некоторой точке X_0 , то она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset G$.

Опираясь на свойство среднего отсюда выводят, что предельная функция является гармонической. В силу специфики нашей теоремы о среднем мы имеем следующее утверждение.

Теорема 6. Если все свободные страты имеют одинаковую размерность, то предельная функция в условиях предыдущей теоремы является гармонической в G .

Казалось бы, у нас все готово для применения метода Перрона к разрешимости задачи Дирихле (нужно только дать определение субгармонической функции), однако имеется довольно существенное препятствие, связанное с ограниченным характером теоремы 2 (центры шаров должны лежать в стратах старшей и на единицу меньшей размерности). Эту проблему помогает преодолеть следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы о стирании особенностей. Оно верно лишь для так называемых усиленно прочных множеств. Мы называем стратифицированное множество Ω *усиленно прочным*, если все его свободные страты имеют одинаковую размерность n и для любой точки X_0 найдется допустимый шар, не теряющий связности при удалении из него точек, лежащих на стратах, размерность которых не превосходит $n - 2$.

Далее множество всех страт в Ω , размерность которых не превосходит $n - 2$, обозначается через Σ_{n-2} . Ясно, что число n — максимально возможная размерность страт в Ω ; его мы будем называть *размерностью стратифицированного множества*. Следующее утверждение является легким следствием теоремы, доказанной в [6].

Теорема 7 (о стирании особенностей). Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , а u — ограниченная гармоническая функция на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Тогда Σ_{n-2} является устранимым множеством в том смысле, что u можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Теперь мы переходим к описанию свойств субгармонических в смысле мягкого лапласиана функций.

§ 3. Свойства субгармонических функций

Всюду далее стратифицированное множество Ω предполагается усиленно прочным. Это, напомним, предполагает, в частности, что все свободные страты имеют одинаковую размерность n . Можно показать, что в этом случае неравенство $\tilde{\Delta}u \geq 0$, первоначально принимаемое за *определение субгармонической функции*, влечет, как и в случае обычного лапласиана, неравенство

$$u(X_0) \leq M[B_r(X_0)]u, \quad (6)$$

верное для всех $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимых шаров $B_r(X_0)$.

Это неравенство в предположении непрерывности функции u на Ω принимается за *второе определение субгармонической функции*, которое оказывается более удобным для реализации метода Перрона, чем первое. Множество субгармонических в Ω функций обозначим через $S(\Omega)$. Аналогично можно определить субгармоническую функцию в любой области из Ω° . Из этого определения немедленно следует, что субгармоническая функция не может иметь в Ω° точек

локального нетривиального максимума; точка X_0 называется *точкой локального нетривиального максимума функции u* , если вблизи нее $u(X) \leq u(X_0)$ и ни в какой ее окрестности u не является постоянной. Это утверждение можно считать аналогом сильного принципа максимума. Из него очевидным образом получаем такое следствие (слабый принцип максимума).

Лемма 1. Пусть $u \in C(\overline{G})$ — субгармоническая в области $G \subset \Omega^\circ$ функция, тогда

$$u(X_0) \leq \max_{X \in \partial G} u(X) \quad (7)$$

для любой точки $X_0 \in G$.

Пусть u — субгармоническая функция, а $B_r(X_0)$ — допустимый шар с центром $X_0 \in \Omega^\circ$ в страте максимальной или на единицу меньшей размерности. Обозначим через $u_{X_0,r}$ функцию, которая совпадает с u на $\Omega \setminus B_r(X_0)$, является гармонической в шаре $B_r(X_0)$ и непрерывна в целом на Ω . Такая функция — назовем ее *гармонической срезкой* функции u в рассматриваемом шаре — существует в силу теоремы 2. Из предыдущей леммы выводим главное свойство гармонических срезов.

Лемма 2. Пусть $u \in S(\Omega)$, тогда $u_{X_0,r} \in S(\Omega)$. При этом $u(X) \leq u_{X_0,r}(X)$ для всех $X \in \Omega$.

Доказательства этой и всех последующих лемм этого раздела аналогичны тем, которые в классической ситуации приведены в [2, 3], поэтому мы не останавливаемся на подробностях.

Лемма 3. Функция u является гармонической тогда и только тогда, когда $u, -u \in S(\Omega)$.

При доказательстве используется свойство среднего (теорема 3) и тот очевидный факт, что $u, -u \in S(\Omega)$ тогда и только тогда, когда u непрерывна и для допустимых шаров выполняется формула (5).

Лемма 4. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k \in S(\Omega)$. Тогда верхняя огибающая

$$u(X) = \max \{u_1(X), u_2(X), \dots, u_k(X)\}$$

также принадлежит $S(\Omega)$.

В следующем разделе нам потребуются также супергармонические функции; для их определения нужно знак неравенства в (6) направить в противоположную сторону или назвать супергармонической такую функцию u , что $-u \in S(\Omega)$.

§ 4. Метод Перрона в задаче Дирихле для мягкого лапласиана

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\tilde{\Delta}u = 0, \quad (8)$$

$$u|_{\partial\Omega^\circ} = f, \quad (9)$$

где f непрерывна на $\partial\Omega^\circ$. Под ее решением будем понимать гармоническую в Ω° функцию класса $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega)$. Разумеется, границу мы считаем непустой.

Следуя методу Перрона, введем класс $S_f = S_f(\Omega)$, состоящий из функций в $S(\Omega)$, принимающих на $\partial\Omega^\circ$ значения, не превосходящие предписанных условием (9); такие функции будем называть *субфункциями*. Назовем *решением Перрона* задачи (8), (9) верхнюю огибающую семейства S_f :

$$u(X) = \sup_{v \in S_f(\Omega)} v(X). \quad (10)$$

Заметим, что в силу принципа максимума (лемма 1) число, стоящее справа, не превосходит максимума граничной функции f , поэтому функция u ограничена на Ω сверху. Столь же просто показывается, что она ограничена снизу. Иными словами, функция u корректно определена.

Следующее утверждение является основным в данной работе.

Теорема 8. Пусть граница Ω° является регулярной, Ω усиленно прочным, а f — непрерывной на $\partial\Omega^\circ$ функцией. Тогда решение Перрона является решением задачи Дирихле (8), (9) в обычном смысле, т. е. является гармонической на Ω° функцией, непрерывной на Ω и принимающей предписанные значения на $\partial\Omega^\circ$.

Мы называем границу $\partial\Omega^\circ$ *регулярной*, если регулярной является каждая ее граничная точка.

Точка X_0 граничной страты меньшей, чем $n - 1$, размерности называется *регулярной граничной точкой*, если существует *барьер* в X_0 — супергармоническая функция, положительная на $\Omega \setminus \{X_0\}$ и обращающаяся в нуль в точке X_0 . Нетрудно показать, что, как и в классическом случае, достаточно построить *локальный барьер* — функцию, удовлетворяющую требуемым от барьера условиям в некоторой окрестности U точки X_0 ; из локального барьера на U легко строится барьер уже на всем Ω .

Точка X_0 граничной $(n - 1)$ -мерной страты σ_{n-1j} называется *регулярной граничной точкой*, если существуют *односторонние локальные барьеры* в X_0 в классическом смысле для каждой n -мерной страты σ_{ni} , примыкающей к σ_{n-1j} , т. е. функции, удовлетворяющие требуемым от барьера условиям в каждой связной компоненте пересечения $U \cap \sigma_{ni}$, содержащей точку X_0 в своем замыкании, для некоторой окрестности U точки X_0 . Поскольку внутри σ_{ni} стратифицированный лапласиан не отличается от классического, то и условия на барьер внутри такой связной компоненты тоже классические. Последний случай выделяется из-за того, что к $(n - 1)$ -мерной страте σ_{n-1j} могут примыкать несколько n -мерных страт, какие-то из которых возможно примыкают с двух сторон, и $(n - 1)$ -мерная страта может оказаться граничной, хотя все ее точки располагаются внутри Ω , если последнее рассматривать как обычное множество, а не как стратифицированное и «искусственным» образом разбитое на внутренность Ω° и границу $\partial\Omega^\circ$, как это описано выше. На рис. 2 таковой является страта σ_{11} .

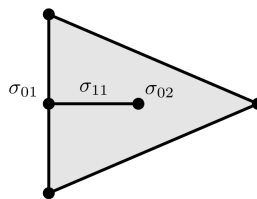


Рис. 2. «Внутренняя» граничная страта σ_{11} .

Проверку того, что решение u удовлетворяет граничным условиям в точках страты σ_{11} , достаточно провести по отдельности со стороны каждого из двух «берегов» двумерной страты, разделяемых стратой σ_{11} . Проще всего ввести «модифицированное» стратифицированное множество, сделав разрез вдоль σ_{11} и разделив σ_{11} на верхний и нижний берега разреза, имеющие общие граничные точки в вершинах. Иными словами, модифицированное стратифицированное множество получается пополнением множества $\Omega \setminus \sigma_{11}$ по его внутренней метрике. Тогда односторонние локальные барьеры в точках σ_{11} становятся локальными барьерами в соответствующих точках на берегах разреза для модифицированного стратифицированного множества, которые легко достроить до барьеров на всем этом множестве.

Аналогичным образом в общем случае односторонние локальные барьеры произвольной n -мерной страты в точках примыкающей к ней граничной $(n-1)$ -мерной страты σ_{n-1j} можно рассматривать как локальные барьеры модифицированного стратифицированного множества — пополнения $\Omega \setminus \sigma_{n-1j}$ по внутренней метрике последнего — и могут быть достроены до барьеров на нем.

Обоснование сформулированной теоремы в значительной степени следует образцам, приведенным в [2, 3], но содержит свою специфику: доказательство гармоничности проводится в три этапа. На первом этапе мы доказываем, что соотношение $\tilde{\Delta}u = 0$ выполняется на множестве $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$; эта часть доказательства проводится стандартно. Второй этап — проверка непрерывности u на Ω° — является следствием теоремы 7. Третий — непрерывность u на Ω и выполнение краевого условия на $\partial\Omega^\circ$ — опирается на регулярность границы. Несмотря на то, что некоторые части доказательства проводятся стандартно, мы проведем его во всех деталях ради замкнутости изложения. Мы следуем, главным образом, схеме доказательства, представленной в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Сначала покажем, что u гармонична на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Пусть X_0 — произвольная точка с центром в $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$, а $B_r(X_0)$ — допустимый шар. Из определения u посредством (10) следует существование такой последовательности $v_k \in S_f$, что $v_k(X_0) \rightarrow u(X_0)$ при $k \rightarrow \infty$; функции этой последовательности можно считать ограниченными снизу (в противном случае их нужно заменить на $\max\{v_k, m\}$, где m — минимум функции f). Из этой последовательности можно уже образовать неубывающую последовательность $\bar{v}_k = \max\{v_1, \dots, v_k\}$ функций, принадлежащих в силу леммы 4 множеству S_f и сходящуюся к $u(X_0)$ в точке X_0 , поскольку $v_k \leq \bar{v}_k \leq u$. Пусть теперь V_k — гармоническая срезка функции $\bar{v}_k$ в шаре $B_r(X_0)$. Очевидно, последовательность $\{V_k\}$ является неубывающей и в силу леммы 2 состоит из субгармонических функций семейства S_f . В точке X_0 эта последовательность по-прежнему сходится к $u(X_0)$. В силу теорем 5 и 6 последовательность $\{V_k\}$ сходится равномерно на любом шаре $B_\rho = B_\rho(X_0)$ при $\rho < r$ к некоторой гармонической в этом шаре функции $\bar{u}$. Если мы покажем, что $\bar{u} = u$ в B_ρ , то в силу произвольности X_0 , будет показана гармоничность u на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$.

Очевидно, $\bar{u} \leq u$. Предположим, что $\bar{u}(X^\circ) < u(X^\circ)$ в некоторой точке $X^\circ \in B_\rho$. Тогда существует такая функция $U \in S_f$, что $\bar{u}(X^\circ) < U(X^\circ)$. Переходя от функций V_k к $\bar{V}_k = \max\{U, V_k\}$, а затем — к их гармоническим срезкам $\tilde{V}_k$, получаем последовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $\tilde{u}$, гармонической в B_ρ , которая в точке X_0 по-прежнему равна $u(X_0)$, а в точке X° принимает значение больше $\bar{u}(X^\circ)$. Гармонические в B_ρ функции $\tilde{u}$ и $\bar{u}$ удовлетворяют условиям: $\tilde{u} \geq \bar{u}$ и $\tilde{u}(X_0) = \bar{u}(X_0)$. В силу принципа

максимума имеем $\tilde{u} = \bar{u}$ в B_ρ , что невозможно, так как $\tilde{u}(X^\circ) > \bar{u}(X^\circ)$. Полученное противоречие показывает, что u гармонична в B_ρ , а значит, и в $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Переходим ко второму этапу доказательства.

Второй этап доказательства сводится к констатации на основе теоремы 7 о стирании особенностей того, что функция u , будучи гармонической на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$, является гармонической в целом на Ω° , и мы можем приступить к третьему этапу.

Мы покажем, что u «непрерывным образом» удовлетворяет условию (9). Пусть $X_0 \in \partial\Omega^\circ$ лежит на граничной страте из Σ_{n-2} . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta > 0$, что при $X \in \partial\Omega^\circ$ и $d(X, X_0) < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$. Кроме того, для фиксированного барьера ψ — он существует в силу регулярности границы — можно выбрать $K > 0$ так, что на оставшейся части границы будет выполняться неравенство $K\psi(X) \geq 2M$, где M — максимум модуля граничной функции f . Ясно, что $f(X_0) - \varepsilon - K\psi(X)$ является субфункцией, поскольку на границе принимает значения, меньшие значений функции f . Аналогично $f(X_0) + \varepsilon + K\psi(X)$ является суперфункцией — супергармонической функцией, принимающей на границе значения, большие значений f . В силу принципа максимума для субгармонических функций получим на Ω

$$f(X_0) - \varepsilon - K\psi(X) \leq u(X) \leq f(X_0) + \varepsilon + K\psi(X),$$

откуда легко получаем

$$|u(X) - f(X_0)| \leq \varepsilon + K\psi(X)$$

для всех $X \in \Omega$, что с учетом свойств барьерных функций, завершает доказательство для случая $X_0 \in \Sigma_{n-2}$.

Если X_0 лежит на граничной страте σ_{n-1j} , то мы достроим односторонние локальные барьеры примыкающих n -мерных страт σ_{ni} до барьеров на модифицированном стратифицированном множестве (как это отмечено в комментариях ниже рис. 2) и, повторив рассуждения для каждого из полученных барьеров ψ , получим сходимость $u(X)$ к $f(X_0)$ при стремлении X к X_0 со стороны каждой страты σ_{ni} , если примыкание $\sigma_{ni} \succ \sigma_{n-1j}$ одностороннее, или со стороны каждого берега разреза страты σ_{ni} , если примыкание двустороннее. Поскольку это выполняется для всех $\sigma_{ni} \succ \sigma_{n-1j}$, то $u(X)$ стремится к $f(X_0)$ при стремлении X к X_0 во всем Ω . Теорема доказана.

§ 5. Построение барьеров

Предыдущая теорема носит несколько абстрактный характер, поскольку остается открытым вопрос об условиях регулярности граничных точек. Очевидно, например, что если размерность стратифицированного множества не меньше двух, а в границу включены только некоторые нульмерные страты, то соответствующая задача Дирихле, вообще говоря, не имеет решения. Это легко следует из теоремы о стирании особенностей; если функция гармонична и ограничена в окрестности такой изолированной граничной точки, то она однозначно продолжается в нее, а потому задавать произвольно граничное значение в этой точке невозможно. В классическом случае областей евклидова пространства вопрос решается емкостным критерием Винера, который тоже носит абстрактный характер, но найдены конкретные примеры, в которых он работает. Например,

он выполняется для граничных точек, удовлетворяющих условию внешнего шара или, более общо, условию внешнего конуса. Условие внешнего шара заведомо выполнено для областей с C^2 -гладкой границей, а условие внешнего конуса заведомо выполнено для точек липшицевых границ. В нашем случае все граничные страты считаются гладкими; как следствие точки граничных $(n-1)$ -мерных страт являются регулярными для n -мерного стратифицированного множества (т. е. размерность свободных страт равняется n).

В данной работе мы рассмотрим случай так называемой *прочной границы*, когда $\partial\Omega^\circ$ является замыканием объединения некоторого числа $(n-1)$ -мерных страт в предположении, что Ω является n -мерным усиленно прочным множеством. Пока мы здесь ограничиваемся случаем двумерного стратифицированного множества, поскольку в общем случае построение барьеров сталкивается с некоторыми трудностями.

Проблему представляет только построение локального барьера в точке X_0 , которая является точкой некоторой граничной нульмерной страты σ_{01} , которая, разумеется, сводится к этой точке: $\sigma_{01} = \{X_0\}$. Сначала мы рассмотрим случай, когда все страты, включая граничные, являются плоскими. Мы будем строить локальный барьер в точке X_0 в пределах некоторого допустимого шара $B_R = B_R(X_0)$.

Рассмотрим сферу $S_R(X_0)$ как стратифицированное множество, стратами которого являются ее пересечения со стратами Ω . Получившееся одномерное стратифицированное множество является метрическим графом, который мы обозначим через Γ . Его вершинами V_i являются точки пересечения одномерных страт $\sigma_{1i} \succ \sigma_{01}$ со сферой $S_R(X_0)$, а ребрами E_k — дуги больших окружностей, являющиеся пересечениями двумерных страт $\sigma_{2k} \succ \sigma_{01}$ с $S_R(X_0)$. Отметим, что ребра E_k , соответствующие двумерным стратам, имеющим двустороннее примыкание к σ_{1i} , являются петлями графа Γ . Мы рассматриваем полярные координаты (r, φ) для точек $\sigma_{2k} \cap B_R(X_0)$, считая полярный угол φ координатой на E_k , отсчитываемый естественным образом от 0 до максимального значения $\varphi_k \leq 2\pi$, если на E_k задана ориентация.

На рис. 3 показан фрагмент пересечения двумерного стратифицированного множества с шаром и соответствующий ему метрический граф.

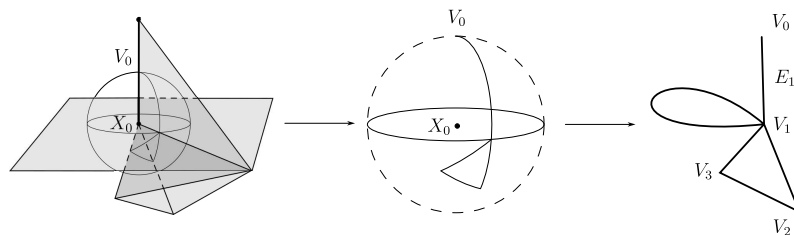


Рис. 3. Формирование метрического графа.

Так как граница Ω предполагается прочной, то найдется одномерная граничная страта, примыкающая к σ_{01} . Этой страте соответствует вершина графа Γ , которую мы обозначим через V_0 .

Ниже будет показано, что на графе Γ можно определить функцию $\lambda: \Gamma \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

- (i) λ непрерывна на Γ ,
- (ii) $\lambda(V_0) = 0$ и $\lambda(X) > 0$ при $X \neq V_0$,
- (iii) существует постоянная α такая, что $\lambda'' \leq \alpha < 0$ на ребрах графа Γ ,

- (iv) $\sum_{\nu_i} \frac{d\lambda}{d\nu_i} < 0$ во всех вершинах графа Γ , исключая V_0 ; суммируются производные по направлениям «от вершины» во все примыкающие к ней ребра E_i .

Последние два требования можно записать в виде $\tilde{\Delta}_\Gamma \lambda < 0$, где $\tilde{\Delta}_\Gamma$ — мягкий лапласиан на одномерном стратифицированном множестве Γ с одной граничной стратой V_0 . Весь набор требований (i)–(iv) в целом описывает (строго) супергармоническую на Γ функцию, являющуюся барьером в точке V_0 . С помощью этой функции мы получим локальный барьер в точке X_0 , полагая

$$\psi(X) = r^\varepsilon(1 + \lambda(\varphi)),$$

где (r, φ) — полярные координаты точки X , лежащей в какой-нибудь двумерной страт. Мы здесь буквой λ обозначаем и функцию точки, и функцию аргумента φ ; отмечаем это во избежание путаницы. Если же X меняется в пределах одномерной страты σ_{1j} , то функция ψ оказывается функцией только переменной r ; полярный угол оказывается фиксированным. Неоднозначность задания полярного угла в последнем случае никак не скажется на наших построениях.

Покажем, что ψ действительно является локальным барьером в окрестности $U = B_R$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Положительность ψ на $U \setminus \{X_0\}$ и равенство $\psi(X_0) = 0$ очевидны. Непрерывность ψ — следствие непрерывности λ . Остается проверить неравенство $\tilde{\Delta}\psi \leq 0$, которое, как указывалось выше, влечет супергармоничность ψ ; там (см. начало § 3), правда, обсуждалась субгармоничность функции, но это рассуждение легко переносится на супергармонические функции. На фрагментах двумерных страт в U (они являются свободными) мягкий лапласиан совпадает с классическим, поэтому в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \varepsilon^2 r^{\varepsilon-2} (1 + \lambda(\varphi)) + r^{\varepsilon-2} \lambda''(\varphi) \\ &\leq (2\varepsilon^2 + \alpha) r^{\varepsilon-2} \leq \frac{\alpha}{2} r^{\varepsilon-2} < 0 \end{aligned}$$

при достаточно малом ε .

На одномерных неграничных стратах σ_{1j} мягкий лапласиан выражается формулой (4), а из $\frac{\partial}{\partial \nu_i} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ следует $\frac{\partial \psi}{\partial \nu_i} = r^{\varepsilon-1} \frac{d\lambda}{d\varphi}$, и поэтому знак $\tilde{\Delta}\psi$ определяется суммой производных, фигурирующих в условии (iv).

Теперь остановимся на построении функции λ . Нам потребуются две функции θ и η , определенные на $[0, 2\pi]$ и обладающие следующими свойствами: θ — гладкая функция, возрастающая от нуля до единицы и удовлетворяющая (для некоторого β) неравенствам $\theta' \geq \beta > 0$, $\theta'' \leq -\beta$, а η — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$, $\eta'' \leq -\beta$.

Ранжируем вершины графа Γ следующим образом. Если существует путь, ведущий из V_0 в вершину V , состоящий из k ребер, то при условии, что остальные пути, ведущие из V_0 в V , состоят из не меньшего числа ребер, назовем k рангом вершины V .

На нулевом шаге, на петлях с вершиной V_0 (если таковые имеются и ориентированы произвольно) полагаем $\lambda(X) = \eta(\varphi)$, где φ — значение параметра, соответствующее X (точке V_0 соответствуют два значения, $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, но противоречия нет, так как $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$).

На первом шаге, на ребрах E_j , соединяющих V_0 с вершинами V_i первого ранга, положим $\lambda(X) = C_j \theta(\varphi)$, где положительные константы C_j подбираются

так, чтобы λ принимала постоянное значение λ_1 в вершинах первого ранга. Мы здесь считаем, что ребра E_j , примыкающие к V_0 , ориентированы в направлении от V_0 , а параметр φ меняется на E_j от нуля до φ_j (радианная мера, упомянутая выше). Теперь на каждом ребре E_j , являющемся петлей в вершине первого ранга или ребром, соединяющим две вершины V_i и V_k первого ранга (назовем его перемычкой), полагаем $\lambda(X) = \lambda_1 + D_j \eta(2\pi\varphi/\varphi_j)$ с некоторой положительной постоянной D_j ; напомним, что на концах отрезка $[0, 2\pi]$ функция η обращается в нуль, поэтому в вершине петли или на концах ребра-перемычки E_j (соответствующих значениям φ равным 0 и длине ребра φ_j) функция λ принимает значение λ_1 , что обеспечивает непрерывность λ на множестве, составленном из петель с вершиной V_0 ; ребер, соединяющих V_0 с вершинами первого ранга; петель в вершинах первого ранга; перемычек; а также самих вершин. При этом она удовлетворяет условиям (i)–(iii).

На втором шаге ребра, соединяющие вершины первого ранга с вершинами второго ранга, ориентируем в направлении от первых ко вторым и на них определяем значения функции λ , повторив конструкцию первого шага, но теперь нужно стартовать от значения λ_1 на вершинах первого ранга, а заканчивать значением λ_2 во всех вершинах второго ранга; т. е. на каждом таком ребре E_j должно быть $\lambda(X) = \lambda_1 + C_j \theta$ с подходящими C_j . Затем продолжаем λ на петли в вершинах второго ранга и на ребра-перемычки, соединяющие вершины второго ранга, полагая $\lambda(X) = \lambda_2 + D_j \eta(2\pi\varphi/\varphi_j)$ с некоторыми положительными D_j .

Ввиду конечности числа вершин в графе Γ этот процесс завершится через конечное число шагов, причем в силу усиленной прочности Ω все вершины графа будут ранжированы и мы получаем функцию λ на Γ .

Пока мы еще не обеспечили выполнения условия (iv), но это не составляет труда, если выбирать константы C_j на каждом шаге достаточно малыми относительно максимального значения соответствующих констант на предыдущем шаге, а все константы D_j затем выбрать достаточно малыми, чтобы удовлетворить условие (iv). При таком выборе отрицательный вклад от ребер, ведущих к вершинам предыдущего ранга, превосходит по модулю суммарный вклад ребер, ведущих к вершинам следующего ранга, петлей и перемычек.

Переходя к случаю «криволинейной границы», заметим, что если σ_{1j} является действительно криволинейной одномерной стратой, к которой примыкают две двумерные страты, то последние лежат в одной плоскости; в противном случае σ_{1j} не была бы криволинейной. В связи с этим геометрия стратифицированного множества в окрестности граничной нульмерной страты $\sigma_{0i} = \{X_0\}$ достаточно проста. Рис. 4 демонстрирует все особенности этой геометрии и способ ее «исправления» в пределах некоторого стратифицированного шара $B_R(X_0)$.

Каждая примыкающая к X_0 криволинейная страта, лежащая между двумя двумерными стратами, игнорируется при построении барьера, как будто вместо этой страты и двух двумерных страт, к ней примыкающих, рассматривается одна двумерная страта, из них составленная.

Если после этого останется двумерная страта, примыкающая к двум криволинейным граничным стратам $\sigma_{1j}, \sigma_{1k} \succ \{X_0\}$, или имеющая двустороннее примыкание к криволинейной граничной страте $\sigma_{1j} \succ \{X_0\}$, то других двумерных страт, примыкающих к X_0 уже не будет и мы строим локальный барьер в X_0 , как в классическом случае.

В противном случае каждую «тупиковую» двумерную страту с единствен-

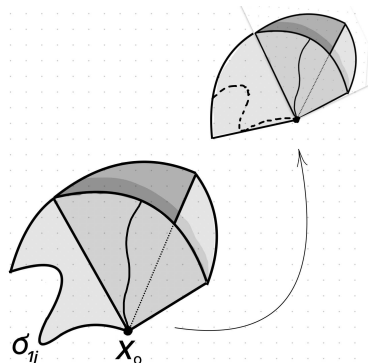


Рис. 4. Сведение к плоской границе.

ной, односторонне примыкающей к ней криволинейной граничной стратой $\sigma_{1j} \succ \{X_0\}$, мы погружаем в страту с прямолинейной границей, как это показано на рис. 4. Величина угла этой новой двумерной страты с вершиной в точке X_0 может доходить до 2π . Прямолинейная страта, заменяющая криволинейную страту σ_{1j} , включается в границу видоизмененного в пределах шара $B_R(X_0)$ исходного стратифицированного множества. Далее строится локальный барьер ψ по изложенной выше схеме, разработанной для случая, когда все граничные страты прямолинейны. Сужение ψ на исходное стратифицированное множество и является искомым локальным барьером в X_0 , поскольку это сужение наследует от ψ все необходимые для барьера свойства: при таком сужении сохраняются положительность, непрерывность в рассматриваемой граничной точке и требуемый знак мягкого лапласиана на внутренних стратах исходного множества. На искусственно добавленных частях видоизмененного множества дополнительных условий для исходной задачи не требуется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Perron O. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ // Math. Z. 1923. V. 18, N 1. P. 42–54.
2. Гилбарт Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
3. John F. Partial differential equations. New York: Springer-Verl., 1982.
4. Nicaise S., Penkin O. Poincaré–Perron’s method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 296, N 2. P. 504–520.
5. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Савастеев Д. В. Неравенство Харнака для гармонических функций на стратифицированном множестве // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 971–981.
6. Dairbekov N. S., Penkin O. M., Savasteev D. V. Removable singularities of harmonic functions on stratified sets // Symmetry. 2024. V. 16, N 4. 486. <https://doi.org/10.3390/sym16040486>
7. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 5. С. 149–158.
8. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Неравенство Пуанкаре и p -связность стратифицированного множества // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1291–1302.
9. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970.
10. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.
11. Ощепкова С. Н., Пенкин О. М. Теорема о среднем для эллиптического оператора на

стратифицированном множестве // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 3. С. 417–426.

Поступила в редакцию 13 августа 2025 г.

После доработки 28 апреля 2026 г.

Принята к публикации 30 мая 2026 г.

Даирбеков Нурлан Слямханович (ORCID 0000-0002-2725-7549)

Университет Нархоз,

ул. Жандосова, 55, Алматы 050035, Казахстан;

Институт математики и математического моделирования,

ул. Шевченко, 28, Алматы 050000, Казахстан

nurlan.dairbekov@gmail.com

Пенкин Олег Михайлович (ORCID 0000-0001-9547-7597)

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., 1, Воронеж 394006

o.m.penkin@gmail.com

Савастеев Денис Владимирович (ORCID 0000-0001-9547-7597)

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., 1, Воронеж 394006

savasteev@gmail.com

σ -ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ — ВИЛАНДТА И TI -ПОДГРУППЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел предлагается решение σ -проблемы Кегеля — Виландта в классе всех групп, у которых специальные множества подгрупп являются нижними полурешетками.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.406

Ключевые слова: конечная группа, σ -субнормальная подгруппа, TI -подгруппа, нижняя полурешетка, σ -проблема Кегеля — Виландта.

1. Введение

В работе рассматриваются только конечные группы.

Зафиксируем разбиение σ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся непустые подмножества σ_i , индексированные элементами некоторого множества индексов I , т. е. $\mathbb{P} = \bigcup_{i \in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset$ для всех $i \neq j$.

Элементы σ_i ($i \in I$) разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является σ -*примарной*, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется σ -*субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i , либо группа $H_i/\text{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ -примарной. Далее множество всех σ -субнормальных подгрупп группы G обозначается через $sn_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ -субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется σ -*полной*, если $G \in \bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$, т. е. G обладает по крайней мере одной σ_i -холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap_{i \in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначать через E_σ . Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и группы $G \in E_\pi$ мы пишем $H \leq_\pi G$ и называем подгруппу H π -*субнормальной*, если $H \cap S$ — π -холлова подгруппа из H для любой π -холловой подгруппы S группы G (в этом случае будем говорить, что π -холлова подгруппа S *редуцируется* в H).

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 12371021). Исследования второго и третьего авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф26РНФ-101).

Если подгруппа H является σ -субнормальной в σ -полной группе G , то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в «Коуровской тетради» [2] под номером 19.86 сформулирован следующий аналог известной гипотезы Кегеля — Виландта, который называется сегодня σ -проблемой Кегеля — Виландта.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ -субнормальной в G , если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любой компоненты $\sigma_i \in \sigma$?

Отметим, что для минимального разбиения σ в силу теоремы Силова любая группа является σ -полной. Поэтому в этом случае σ -проблема Кегеля — Виландта превращается в проблему Кегеля — Виландта, сформулированную в работах [3, 4]. Полное решение ее, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [5].

В настоящее время сложилось несколько подходов к решению σ -проблемы Кегеля — Виландта. Основной из них редуцирует проблему к рассмотрению σ -полных простых неабелевых групп. Подход базируется на теореме 1 из [6]: σ -проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение тогда и только тогда, когда она верна в классе всех простых неабелевых групп из E_σ . Такое направление инициировано работой [7].

Другой подход к исследованию σ -проблемы Кегеля — Виландта связан с изучением групп, обладающих специальными решеточными свойствами. Он отталкивается от того, что в любой группе G множество $sn_\sigma(G)$ всех ее σ -субнормальных подгрупп является подрешеткой решетки всех подгрупп группы G (см., например, [8]). В связи с этим естественно возникает задача исследования σ -проблемы Кегеля — Виландта в группе G при дополнительном предположении, что некоторые классы ее подгрупп обладают определенными решеточными свойствами.

Следуя [9], для E_π -группы G через $SN_\pi(G)$ обозначим множество всех ее подгрупп, в которые редуцируются все π -холловы подгруппы группы G . Понятно, что подгруппа H σ -полной группы G удовлетворяет условиям σ -проблемы Кегеля — Виландта тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SN_{\sigma_i}(G)$.

Напомним, что множество $\mathcal{L}$ подгрупп группы G является (по вложению):

- *нижней полурешеткой*, если из $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$ всегда следует, что $A \cap B \in \mathcal{L}$;
- *верхней полурешеткой*, если из $A \in \mathcal{L}$ и $B \in \mathcal{L}$ всегда следует, что $\langle A, B \rangle \in \mathcal{L}$;
- *решеткой*, если $\mathcal{L}$ является одновременно верхней и нижней полурешетками.

Первые результаты, относящиеся к решеточной постановке задачи, опубликованы в работе [10].

Теорема 1 [10, теорема 1]. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — σ -полная группа и $SN_{\sigma_i}(G)$ является верхней полурешеткой (по вложению) для любого $i \in I$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) группа G является σ -разрешимой;
- (2) подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \in \bigcap_{i \in I} SN_{\sigma_i}(G)$.

В данной работе исследуется случай, когда для любого $i \in I$ множество $SN_{\sigma_i}(G)$ всех σ_i -субнормальных подгрупп группы G является нижней полурешеткой (по вложению). При этом рассматривается даже более общая ситуация в контексте следующего определения.

Для $\pi \subseteq \mathbb{P}$ и $S \in \text{Hall}_\pi(G)$ пишем $H \leq_{\pi, S} G$ и называем подгруппу H (π, S) -субнормальной, если $H \cap S$ — π -холлова подгруппа из H . Пусть $SN_{\pi, S}(G)$ — множество всех (π, S) -субнормальных подгрупп группы G .

Одно из возможных направлений развития решеточного подхода к σ -проблеме Кегеля — Виландта связано со следующей гипотезой, которая интересна сама по себе.

Гипотеза 1. Любая простая неабелева группа не содержит собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Напомним, что подгруппа H группы G называется TI -подгруппой, если $H \cap H^x \in \{1, H\}$ для любого $x \in G$.

Прикладные возможности гипотезы 1 для анализа σ -проблемы Кегеля — Виландта отражает следующая теорема, доказательство которой — наша главная цель.

Теорема 2. Пусть σ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, причем $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$, и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$.

В последнем разделе работы обсуждается связь гипотезы 1 со строением групп с плотно вложенными подгруппами и приводятся две серии простых неабелевых групп, для которых гипотеза 1 справедлива.

2. Определения и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения. Терминологию и основные свойства σ -субнормальных подгрупп можно найти в [1].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π .

Подгруппа H называется π -холловой подгруппой группы G , если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π -холловых подгрупп группы G обозначается через $\text{Hall}_\pi(G)$.

Будем использовать также следующие обозначения:

- если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества всех простых чисел и n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$;
- $\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ σ -примарных холловых подгрупп группы G называется полным холловым множеством типа σ группы G [1], если выполняются следующие два условия:

- 1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \dots \cup \pi(S_k)$.

Лемма 1. Пусть $\pi \subseteq \mathbb{P}$, H и N — подгруппы группы G , причем $N \triangleleft G$. Если $S \in \text{Hall}_\pi(G)$, то справедливы следующие утверждения:

- (1) если $H \leq_{\pi, S} G$, то $H \cap N \leq_{\pi, S} G$ и $HN \leq_{\pi, S} G$;
- (2) если $H \leq_{\pi, S} G$, то $HN/N \leq_{\pi, SN/N} G/N$;
- (3) если $SN_{\pi, S}(G)$ — нижняя полурешетка и $H \leq_{\pi, S} G$, то $SN_{\pi, S \cap H}(H)$ — нижняя полурешетка; в частности, $SN_{\pi, S \cap HN}(HN)$ — нижняя полурешетка;
- (4) если $SN_{\pi, S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $SN_{\pi, SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Так как $H \cap N \triangleleft H$ и $H \leq_{\pi, S} G$, то по лемме 1 из [11] имеем $H \cap N \leq_{\pi, S} G$.

Так как $N \triangleleft G$, то $S \cap N \triangleleft S$ и $(S \cap H)(S \cap N)$ — подгруппа в $S \cap HN$. Кроме того, из равенства

$$|HN : (S \cap H)(S \cap N)| = ((|H|/|S \cap H|)(|N|/|S \cap N|))/(|H \cap N|/|S \cap (H \cap N)|)$$

следует, что индекс $|HN : (S \cap H)(S \cap N)|$ является π' -числом. Значит, индекс $|HN : (S \cap HN)|$ также является π' -числом. А так как $|S \cap HN|$ — π -число, то $HN \leq_{\pi, S} G$.

(2) Ввиду утверждения (1) $S \cap HN$ — π -холлова подгруппа в HN . Кроме того, по лемме 1 из [11] SN/N — π -холлова подгруппа в G/N . Теперь из равенства

$$SN/N \cap HN/N = (S \cap HN)N/N$$

следует, что $SN/N \cap HN/N$ — π -холлова подгруппа в HN/N .

(3) Пусть $H_1, H_2 \in SN_{\pi, S \cap H}(H)$. Тогда из $H \leq_{\pi, S} G$ следует, что $H_1 \cap (S \cap H) = H_1 \cap S$ — π -холлова подгруппа в H_1 . Аналогично показывается, что $H_2 \cap (S \cap H) = H_2 \cap S$ — π -холлова подгруппа в H_2 . По условию $(H_1 \cap H_2) \cap S$ — π -холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Отсюда следует, что и $(H_1 \cap H_2) \cap (S \cap H)$ — π -холлова подгруппа в $H_1 \cap H_2$. Следовательно, $H_1 \cap H_2 \in SN_{\pi, S \cap H}(H)$ и $SN_{\pi, S \cap H}(H)$ — нижняя полурешетка.

(4) Пусть $K/N \in SN_{\pi, SN/N}(G/N)$. Тогда $K/N \cap SN/N$ — π -холлова подгруппа в K/N . Ввиду тождества Дедекинда имеем $K \cap SN = (K \cap S)N$. Поэтому индекс $|K : (K \cap S)N|$ является π' -числом. С другой стороны, из $N \triangleleft G$ имеем $N \cap S \in \text{Hall}_\pi(N)$, а потому

$$|K : (K \cap S)| = |K : (K \cap S)N| \cdot |N : (N \cap S)|.$$

Таким образом, $|K : (K \cap S)|$ является π' -числом. А так как $K \cap S$ — π -группа, то $K \in SN_{\pi, S}(G)$.

Если $K_1/N, K_2/N \in SN_{\pi, SN/N}(G/N)$, то по доказанному выше $K_1, K_2 \in SN_{\pi, S}(G)$. Поскольку $SN_{\pi, S}(G)$ — нижняя полурешетка, то $K_1 \cap K_2 \in SN_{\pi, S}(G)$. Но тогда в силу утверждения (2) имеем

$$(K_1 \cap K_2)/N = K_1/N \cap K_2/N \in SN_{\pi, SN/N}(G/N).$$

Следовательно, $SN_{\pi, SN/N}(G/N)$ — нижняя полурешетка.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел, G — группа, являющаяся прямым произведением изоморфных

простых неабелевых групп. Если $K \in sn_\sigma(G)$, то либо группа G является σ -примарной, либо подгруппа K субнормальна в G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $K \in sn_\sigma(G)$, то существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i , либо группа $K_i / \text{Core}_{K_i}(K_{i-1})$ является σ -примарной.

Применим индукцию по n . Понятно, что при $n = 1$ это утверждение верно. Пусть $G = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где $t \geq 1$ и $N_1, N_2, \dots, N_t$ — изоморфные простые неабелевы группы.

Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в G , то $G / \text{Core}_G(K_{n-1})$ — σ_i -группа для некоторого $i \in I$. Но тогда из строения группы G следует, что она является σ_i -группой. Значит, подгруппа K_{n-1} нормальна в G . По индукции либо подгруппа K_{n-1} является σ_i -группой для некоторого $i \in I$, либо подгруппа K субнормальна в K_{n-1} . Если K_{n-1} является σ_i -группой для некоторого $i \in I$, то из строения G следует, что G также является σ_i -группой. Если же подгруппа K субнормальна в K_{n-1} , то из $K_{n-1} \triangleleft G$ следует, что K субнормальна в G .

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Кроме того, пусть $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна.

Если подгруппа H является σ -субнормальной в группе G , то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \in SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$.

Докажем обратное утверждение. Предположим, что это не так, и пусть G — группа наименьшего порядка, обладающая такими подгруппами, которые для любого $g \in G$ принадлежат множеству $\bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$, но не являются σ -субнормальными в G . Среди всех таких подгрупп группы G выберем подгруппу H , для которой сумма $|G| + |H|$ минимальна. Очевидно, группа G не является σ -примарной.

Пусть N — произвольная минимальная нормальная подгруппа группы G . Ввиду утверждения (4) леммы 1 множество $SN_{\sigma_i, S_i^g N/N}(G/N)$ является нижней полурешеткой для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Отсюда в силу выбора группы G подгруппа HN/N является σ -субнормальной в G/N . Но тогда ввиду леммы 2.6 из [1] HN является σ -субнормальной подгруппой группы G . Кроме того, подгруппа N не содержится в подгруппе H , в частности, $\text{Core}_G(H) = 1$.

Так как подгруппа HN является σ -субнормальной в G , то в силу леммы 2.6 из [1] имеем $HN \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Отметим также, что по утверждению (3) леммы 1 $SN_{\sigma_i, S_i^g \cap HN}(HN)$ — нижняя полурешетка для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. В частности, для любого $y \in HN$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$ множество $SN_{\sigma_i, (S_i \cap HN)^y}(HN)$ является нижней полурешеткой. Если $|HN| < |G|$, то в силу выбора группы G подгруппа H является σ -субнормальной в HN . Ввиду леммы 2.6 из [1] подгруппа H является σ -субнормальной подгруппой группы G , что противоречит ее выбору.

Таким образом, полагаем далее, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p -подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p . Так как группа G не является σ -примарной, то для некоторого $i \in I$ найдется такое множество σ_i , что $\sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset$ и $p \notin \sigma_i$. Тогда для каждого $g \in G$ подгруппа H содержит σ_i -холлову подгруппу S_i^g группы G , причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\langle S_i^g \mid g \in G \rangle \subseteq H$. Поскольку $1 \neq \langle S_i^g \mid g \in G \rangle \triangleleft G$, то $\text{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Рассмотрим два возможных случая.

СЛУЧАЙ 1. Пусть H не содержится в N . Тогда из $\text{Core}_G(H) = 1$ следует, что K — собственная подгруппа в N . В силу утверждения (1) леммы $1 \leq K \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Так как $|G| + |K| < |G| + |H|$, то $K \in \text{sn}_\sigma(G)$, а значит, $K \in \text{sn}_\sigma(N)$. По лемме 2 имеем, что либо подгруппа N является σ -примарной, либо подгруппа K субнормальна в N .

Если N является σ_i -группой для некоторого $i = 1, 2, \dots, k$, то из $G = HN$ и σ -примарности подгруппы N следует, что для всех $g \in G$ и любого $j \neq i$ из $\{1, 2, \dots, k\}$ подгруппа H содержит все сопряженные с S_j σ_j -холловы подгруппы группы G . Но тогда $\text{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Если K субнормальна в N , то из строения N следует, что K нормальна в N . Кроме того, $K = H \cap N \triangleleft H$. Поэтому $K \triangleleft \langle N, H \rangle = HN = G$. Если $K \neq 1$, то отсюда имеем, что $\text{Core}_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$. Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, k$ имеет место равенство $S_i = (N \cap S_i)(H \cap S_i)$, где $N \cap S_i$ — σ_i -холлова подгруппа из N , а $H \cap S_i$ — σ_i -холлова подгруппа из H . Отсюда $S_i N = (H \cap S_i)N$.

Так как $H \cap S_i^n \subseteq S_i^n \subseteq S_i N$ для любого $n \in N$, то

$$H \cap S_i^n \subseteq (H \cap S_i)N \cap H = (H \cap S_i)(N \cap H) = H \cap S_i.$$

По условию для любого $n \in N$ пересечение $H \cap S_i^n$ является σ_i -холловой подгруппой в H . Отсюда и из $H \cap S_i^n \subseteq H \cap S_i$ следует, что $H \cap S_i^n = H \cap S_i$.

Таким образом, $H \cap S_i \subseteq S_i^n$ для всех $n \in N$. При $A = H \cap S_i$ все сопряженные A^n , $n \in N$, лежат в S_i . Поэтому нормальное замыкание $\langle A^n \mid n \in N \rangle$ является σ_i -группой, нормальной в $AN = N(H \cap S_i) = S_i N$, откуда

$$H \cap S_i \subseteq O_{\sigma_i}(N(H \cap S_i)) = O_{\sigma_i}(S_i N).$$

Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i -группой. Последнее, как показано выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и σ_i -холлова подгруппа $H \cap S_i$ группы H централизует N . Так как это верно для всякого $i \in \{1, \dots, k\}$, то $G = N \times H$ и $H \triangleleft G$, что противоречит предположению.

СЛУЧАЙ 2. Пусть теперь H содержится в N . Тогда G является простой неабелевой группой.

Покажем, что подгруппа H простая. Предположим, что она содержит собственную нормальную подгруппу $L \neq 1$. Тогда $L \cap S_i^g = L \cap (H \cap S_i^g)$ является σ_i -холловой подгруппой в L . Следовательно, подгруппа L удовлетворяет условию теоремы. Так как $|G| + |L| < |G| + |H|$, то подгруппа L σ -субнормальна в G . Это означает, что существует цепь подгрупп

$$L = L_0 \subseteq L_1 \subseteq \dots \subseteq L_{n-1} \subseteq L_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа L_{i-1} нормальна в L_i , либо группа $L_i / \text{Core}_{L_i}(L_{i-1})$ σ -примарна. Отсюда и из простоты группы G следует,

что G является σ_i -группой для некоторого $i \in \{1, \dots, k\}$. Имеем противоречие с выбором группы G . Если $|H| = p$, то для компоненты σ_i , содержащей p , из условия $H \leq_{\sigma_i, S_i^g} G$ для всех $g \in G$ следует, что $H \subseteq S_i^g$ для всех $g \in G$, а это в простой не σ -примарной группе невозможно для $H \neq 1$. Следовательно, H — простая неабелева группа.

Покажем, что H — TI -подгруппа. Пусть x — элемент из G , не принадлежащий $N_G(H)$. Рассмотрим подгруппу $H \cap H^x$. Из условия теоремы следует, что $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Поэтому $H \cap H^x$ принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$. Кроме того, $|G| + |H \cap H^x| < |G| + |H|$. Ввиду выбора группы G отсюда имеем, что подгруппа $H \cap H^x$ σ -субнормальна в G . Тогда по лемме 2 либо G является σ -примарной группой, либо подгруппа $H \cap H^x$ субнормальна в G . Так как по условию группа G не является σ -примарной, то из простоты группы G имеем, что $H \cap H^x = 1$, т. е. H — TI -подгруппа. Таким образом, простая неабелева группа G содержит собственную простую неабелеву TI -подгруппу, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

4. Следствия теоремы 2 и замечания к гипотезе 1

Так как теорема 2 справедлива для фиксированного полного холлова множества типа σ группы G , то имеет место

Следствие 1. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если для любого $i \in I$ и любой σ_i -холловой подгруппы S_i группы $G \in E_\sigma$ множество $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ является нижней полурешеткой, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$.

В работе [12] отмечено, что если $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k\}$ и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G , то подгруппа H группы G принадлежит $SN_{\sigma_i, S_i}(G)$ для любого $i = 1, 2, \dots, k$ тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i=1}^k |HS_i| = |G| \cdot |H|^{k-1}.$$

С учетом этого имеем

Следствие 2. Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — некоторое разбиение множества всех простых чисел и $\{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ — полное холлово множество типа σ группы G . Если $SN_{\sigma_i, S_i^g}(G)$ является нижней полурешеткой (по вложению) для любого $g \in G$ и каждого $i = 1, 2, \dots, k$, а гипотеза 1 верна, то подгруппа H группы G является σ -субнормальной в G тогда и только тогда, когда

$$\prod_{i=1}^k |HS_i^g| = |G| \cdot |H|^{k-1}$$

для любого $g \in G$.

Подгруппа H конечной группы G называется *плотно вложенной*, если ее порядок четен, а порядок подгруппы $H \cap H^x$ нечетен для любого $x \in G \setminus N_G(H)$. Очевидно, простая неабелева TI -подгруппа H группы G является плотно вложенной. Поэтому из теоремы 1 работы [13], в частности, следует, что если G —

простая неабелева группа и H — ее простая неабелева TI -подгруппа, то силовская 2-подгруппа из H является абелевой. Следовательно (см., например, 4.126 из [14]), справедливо одно из следующих утверждений:

- $H \cong PSL_2(q)$, где $q \equiv 3, 5 \pmod{8}$;
- $H \cong PSL_2(2^n)$, где $n \geq 2$;
- $H \cong J_1$;
- $H \cong^2 G_2(3^n)$, где n нечетно и $n > 1$.

Из отмеченного следует, что группы Судзуки и группы Ри не содержат собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Действительно, если $G \cong^2 B_2(q)$, где $q = 2^{2n+1}$ и $n \geq 1$, то, как следует из [15], любая собственная простая неабелева подгруппа группы ${}^2B_2(q)$ изоморфна ${}^2B_2(q_0)$, где $q = q_0^t$, $q_0 > 2$ и t делит $2n+1$. Кроме того, силовские 2-подгруппы в группах Судзуки неабелевы. Поэтому группа ${}^2B_2(q)$ не содержит собственных простых неабелевых TI -подгрупп.

Пусть теперь $G \cong^2 G_2(q)$, где $q = 3^{2n+1}$ и $n \geq 1$. Информацию о строении групп Ри можно найти, например, в [16]. В группе ${}^2G_2(q)$ все инволюции сопряжены и централизатор инволюции, максимальный в ${}^2G_2(q)$, изоморфен $2 \times PSL_2(q)$. Пусть H — собственная простая неабелева подгруппа в G и τ — инволюция в H . Тогда $N_G(\langle \tau \rangle) = \langle \tau \rangle \times R \cong 2 \times PSL_2(q)$ содержится в $N_G(H)$. Так как $N_G(\langle \tau \rangle)$ является максимальной подгруппой в G , то $N_G(H) = N_G(\langle \tau \rangle)$. Так как $N_G(H) = N_G(\langle \tau \rangle) = C_G(\langle \tau \rangle)$, то $H \leq C_G(\langle \tau \rangle)$. Но $\tau \in H$, поэтому $\tau \in Z(H)$, что невозможно, поскольку H является простой неабелевой группой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
2. Нерешенные вопросы теории групп: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.
3. Kegel O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.
4. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Pure Math. 1980. V. 37. P. 161–173.
5. Kleidman P. B. A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. V. 133. P. 369–428.
6. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. σ -Проблема Кегеля — Виландта: редукция к простым группам // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 36–45.
7. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. О σ -субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.
8. Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н. О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
9. Ballester-Bolínches A., Ezquerro L. M. On join properties of Hall π -subgroups of finite π -soluble groups // J. Algebra. 1998. V. 204, N 2. P. 532–548.
10. Xu Zh., Yi X., Kamornikov S. F. On some aspects of the Kegel–Wielandt σ -problem // Ricerche di Matematica. 2024. V. 73, N 5. P. 2771–2778.
11. Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. 1956. V. 6, N 22. P. 286–304.
12. Ballester-Bolínches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V., Shemetkova O. L. An arithmetic criterion for σ -subnormality in finite groups // Monatsh. Math. 2025. V. 207. P. 231–239.
13. Махнев А. А. О плотно вложенных подгруппах конечных групп // Мат. сб. 1983. Т. 163, № 4. С. 523–532.
14. Горенштейн Д. Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.
15. Suzuki M. On a class of double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

16. Левчук В. М., Нужин Я. Н. О строении групп Ри // Алгебра и логика. 1985. Т. 24, № 1. С. 26–41.

Поступила в редакцию 2 октября 2025 г.

После доработки 22 января 2026 г.

Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Йи Сяолан (Yi Xiaolan) (ORCID 0000-0001-8603-5893)

Чжэцзянский политехнический университет (Zhejiang Sci-Tech University)

Ханчжоу 310018, Китай

yixiaolan2005@126.com

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины

ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь

sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич

Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»

пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь

vtutanov@gmail.com

ГРАФИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП ЭНГЕЛЯ И КРИТЕРИЙ ИХ ВНУТРЕННЕЙ ЛИПШИЦЕВОСТИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для классов отображений групп Энгеля установлен критерий о свойстве липшицевости в субримановом смысле построенных по ним графикам. Кроме того, получено полное описание трехступенчатых групп Карно специального вида, допускающих существование на них образов липшицевых во внутреннем смысле графиков. Приведено несколько примеров структур и отображений.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.407

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, группа Энгеля, трехступенчатая группа Карно.

В работе исследуется вопрос, при каких условиях график, построенный по произвольному отображению групп Энгеля, является липшицевым относительно внутренних, т. е. согласованных с субримановой структурой, расстояний. Несмотря на то, что группа Энгеля является модельным случаем трехступенчатой группы Карно и имеет относительно «простую» структуру, ее свойства широко применяются при решении задач субримановой геометрии и связанных с ними прикладных вопросов (см., например, [1] и ссылки на литературу). В [2, 3] вопросы липшицевости графиков исследовались на группах Гейзенберга и двухступенчатых группах Карно. Подчеркнем, что переход от групп глубины два к группам глубины три не является тривиальным из-за существенно усложняющейся структуры координатных функций отображений, которая влечет появление новых ограничений на отображение и на свойства образа отображения-графика. В частности, актуальным становится вопрос существования трехступенчатых групп Карно, на которых может принимать значения липшицево отображение-график.

В задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [4–7] и цитируемых источниках) локально представимы в виде графиков. Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [8–10]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [11–18] и др.). Специфическим свойством таких структур является то, что когда способ построения согласован с ними,

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

а отображение липшицево во внутреннем смысле, то сам график в общем случае липшицевым не является. Это продемонстрировано, например, в [19], когда график строился для модельного случая гладкой функции. По этой причине вывод аналогов дифференциальных и метрических свойств представляет собой отдельную задачу. Один из вариантов ее решения представлен в [20–22] и других работах автора. Ключевой идеей является локальное перестраивание структуры пространства-образа, чтобы сделать отображение-график «почти липшицевым», так как без преобразований аналоги субримановых метрических свойств не выводятся. Однако субриманова структура при таком подходе нарушается. По этой причине возникает естественный вопрос исследования существования и базовых свойств отображений-графиков, способ построения которых согласован с субримановой структурой и которые не требуют изменения неголономной структуры образа, т. е. которые являются (локально) липшицевыми относительно субримановых (квази)метрик. В частности, этот вопрос включает и описание классов отображений, гарантирующих липшицевость построенных по ним графиков.

В статье выведены необходимые и достаточные условия на отображения групп Энгеля и на структурные константы трехступенчатых групп Карно, на которых принимает значение соответствующее отображение-график, обеспечивающие внутреннюю липшицевость таких графиков. Кроме того, установлены условия существования трехступенчатых групп Карно, на которых липшицево отображение-график принимает значение, получены их описания и приведены примеры отображений и структур, обладающих полученными свойствами. Кроме того, найдено ключевое свойство структурных констант образа графика, когда липшицевыми могут быть только графики, построенные по константе.

1. Предварительные сведения

Прежде всего, приведем определения и факты, которые потребуются в аргументах статьи. Исследуемая в статье группа Энгеля является модельным примером трехступенчатой группы Карно, определение которой потребуется в общем виде, так как построенные отображения-графики принимают значения именно на классе трехступенчатых групп Карно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [23]. Трехступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде

$$V = \bigoplus_{k=1}^3 V_k, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad [V_1, V_3] = \{0\}.$$

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_k , $k = 1, 2, 3$.

Группа Энгеля является важным частным случаем трехступенчатой группы Карно (см., например, [1]). Далее будем исследовать классы графиков отображений этих групп и выводить свойства таких отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа Энгеля — это четырехмерная группа Карно, где $V_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$, $V_2 = \text{span}\{X_3\}$, $V_3 = \text{span}\{X_4\}$. Кроме того, верно

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Групповая операция на трехступенчатых группах Карно определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа вида (1.1): если поля X и Y — линейные комбинации базисных полей с постоянными коэффициентами, $x = \exp(X)(\mathbf{0})$, $y = \exp(Y)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp(Y)(x) = \exp(Z)(\mathbf{0})$, где

$$Z = X + Y + 1/2 \cdot [X, Y] + 1/12 \cdot ([X - Y], [X, Y]). \quad (1.1)$$

Так как для базисных полей на группах Карно справедливо соотношение (см., например, [23])

$$[X_i, X_j] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k, \quad (1.2)$$

где c_{ijk} постоянны, то коэффициенты при базисных полях в поле Z вычисляются однозначно через (1.1).

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см., например, [19]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=3} w_j^2\right)^{\frac{1}{6}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$, и $\varphi : E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_2(x, y),$$

где $\tilde{d}_2$ — квазиметрика на $\tilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 3.

Отображение φ *локально липшицево во внутреннем (субримановом) смысле*, если константа $L < \infty$ существует на компактных подмножествах E и зависит от этих компактных подмножеств.

Еще одно понятие, которое нам понадобится для формулировки и доказательства основного результата, — понятие субриманова аналога дифференцируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 ([24], см. также [25]). Функция $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является *hc-дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k X_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim V_1} a_i(x) y_i = f(x) + \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - f(x) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(d_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется *hc-дифференциалом*, или *горизонтальным градиентом функции f в точке x* .

2. Графики отображений групп Энгеля

Рассмотрим случай, когда график строится по отображению одной группы Энгеля в другую. Опишем условия и введем основные обозначения.

Предположение 6. Пусть $\widehat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатая группа Карно с базисными векторными полями $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_8$, которые образуют алгебру Ли $\widehat{V} = \bigoplus_{k=1}^3 \widehat{V}_k$, где $\widehat{V}_1 = \text{span}\{\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_4\}$, $\widehat{V}_2 = \text{span}\{\widehat{X}_5, \widehat{X}_6\}$, $\widehat{V}_3 = \text{span}\{\widehat{X}_7, \widehat{X}_8\}$, причем

$$[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = \widehat{X}_5, [\widehat{X}_3, \widehat{X}_4] = \widehat{X}_6, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_5] = \widehat{X}_7, [\widehat{X}_3, \widehat{X}_6] = \widehat{X}_8$$

и, кроме того, $[\widehat{X}_2, \widehat{X}_5] = [\widehat{X}_4, \widehat{X}_6] = 0$.

Для остальных коммутаторов полей верны соотношения

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = \sum_{l: \deg \widehat{X}_l = \deg \widehat{X}_i + \deg \widehat{X}_j} c_{ijl} \widehat{X}_l.$$

Тогда поля $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_5, \widehat{X}_7$ определяют структуру алгебры Ли группы Энгеля $\mathbb{G}$, а поля $\widehat{X}_3, \widehat{X}_4, \widehat{X}_6, \widehat{X}_8$ — структуру алгебры Ли группы Энгеля $\widetilde{\mathbb{G}}$. Будем также считать, что $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам групп $\mathbf{0}$ и $\widetilde{\mathbf{0}}$ соответственно в единице $\widehat{\mathbf{0}}$ группы $\widehat{\mathbb{G}}$.

Далее, для удобства восприятия текста и согласованности номеров полей, координат элементов и координатных функций у отображений, введем

ОБОЗНАЧЕНИЕ 7. Положим $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{5\}$, $I_3 = \{7\}$ и $\widetilde{I}_1 = \{3, 4\}$, $\widetilde{I}_2 = \{6\}$, $\widetilde{I}_3 = \{8\}$.

Далее будем рассматривать группы $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ как подмножества $\widehat{\mathbb{G}}$. Тогда для $x \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ положим

$$x = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} x_k \widehat{X}_k \right) (\widehat{\mathbf{0}})$$

и

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_k(x) \widehat{X}_k \right) (\widehat{\mathbf{0}}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функции φ_k , где $k \in \widetilde{I}_1$, будем называть *горизонтальными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $u \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$. Значение *отображения-графика* $\varphi_{\Gamma}(u)$ совпадает с элементом

$$\varphi_{\Gamma}(u) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_k(u) \widehat{X}_k \right) (u).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 10. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Энгеля, $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ и $u, w \in \mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\{\varphi_u^k(w)\}$, где

$$\varphi(w) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_u^k(w) \widehat{X}_k \right) (\varphi(u)).$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\varphi_u^k(w) = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) \quad \text{для } k \in \tilde{I}_1. \quad (2.1)$$

Если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \quad (2.2)$$

При $k = 8 \in \tilde{I}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) = & \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)) \\ & - \frac{1}{12}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем еще одно

ОБОЗНАЧЕНИЕ 11. В условиях обозначения 10 положим

$$\hat{\omega}_u^k(w) = \frac{\varphi_u^k(w) - \nabla_H \varphi_u^k(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)} = \frac{\varphi_u^k(w) - \nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)}$$

для $k = 3, 4$. Обозначим компоненты hc -дифференциала функции φ_k в точке $u \in \mathbb{G}$ символами $\phi_{kj}(u)$, $j = 1, 2$.

Положим еще

$$\omega_u^8(w) = \frac{\varphi_u^8(w) - D\varphi_u^8(u) \langle w \rangle - \frac{1}{2}D_2\varphi_u^8(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)^2}.$$

Теорема 12. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 6 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(w),$$

где $\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(\mathbf{0})$, является локально липшицевым (во внутреннем смысле) относительно d_2 и $\hat{d}_2$ с hc -дифференцируемыми горизонтальными координатными функциями тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции φ_j локально липшицевы во внутреннем смысле и hc -дифференцируемы всюду, если $j \in \tilde{I}_1$.

2. Верно

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек $u \in \mathbb{G}$.

3. Для $k = 6 \in \tilde{I}_2$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6} \quad (2.4)$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_5|$, а при $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$ выполняется $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_7|^{2/3}$ для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

4. Верно

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \tilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) &= c_{167} \varphi_6(u) = c_{267} \varphi_6(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) \\ &= \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0 \end{aligned}$$

для всех точек $u \in \mathbb{G}$.

5. Для $k = 8 \in \tilde{I}_3$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в точке u дважды, ее первый дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j, \quad (2.5)$$

второй дифференциал равен

$$\begin{aligned} &\sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Если же $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$, то $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. В точках вида $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$ отображение $\varphi_u^8(w)$ дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u), \quad (2.7)$$

и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

Кроме того, для некоторого $\widehat{L} < \infty$, зависящего от компактной окрестности, верно

$$\begin{aligned} \left| \omega_u^8(w) + \frac{\widehat{\omega}_u^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\omega}_u^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \right| \leq \widehat{L} d_2(u, w) \quad (2.8) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left| - \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^3(w^2)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_4(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\omega}_{w^2}^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right| \end{aligned}$$

$$+ \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \Big| \leq \widehat{L} d_2(u, w), \quad (2.9)$$

где

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k \right) (u), \quad w^1 = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u), \quad w^2 = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(w^1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Если функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ принадлежит классу C^3 по горизонтальным координатам, а функции φ_3 и φ_4 таковы, что они принадлежат классу C^2 по горизонтальным координатам и липшицевы в классическом смысле по всем остальным, то условия (2.8) и (2.9) будут выполняться всегда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Рассмотрим точки $u, w \in \mathbb{G}$ такие, что

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k \right) (u).$$

Вычислим в явном виде координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Положим

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp \left(\sum_{k=1}^8 s_k \widehat{X}_k \right) (\varphi_\Gamma(u)).$$

Из (1.1), (1.2) и (2.1) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \widetilde{I}_1. \end{cases}$$

Если $k = 5 \in I_2$, то

$$s_5 = w_5 + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk5}.$$

Аналогично, если $k = 6 \in \widetilde{I}_2$, то

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk6}.$$

Докажем необходимость. Пусть отображение-график φ_Γ липшицево. Тогда $|\varphi_k(w) - \varphi_k(u)| \leq L d_2(u, w)$ для $k \in \widetilde{I}_1$ и некоторого $L < \infty$. Если речь идет о локальной липшицевости, то $L < \infty$ зависит от компактной окрестности.

Далее, рассуждениями, аналогичными приведенным в [3], выводим, что если отображение-график липшицево, то

$$\sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0 \quad (2.10)$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек области определения и поэтому верно $s_5 = w_5$. Кроме того, из липшицевости отображения-графика, построенного по отображению φ , следует

$$\left| \varphi_u^6(w) + \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6} \right| = O(w_1^2 + w_2^2), \quad (2.11)$$

если $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$. Иными словами, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| = O(|w_5|)$, а при $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$ должно быть $|\varphi_u^6(w)| = O(|w_7|^{2/3})$.

Рассмотрим теперь случаи I_3 и $\widetilde{I}_3$. Для $k = 7 \in I_3$ имеем

$$\begin{aligned} s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \widetilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1}} c_{ji7} (\varphi_i(u) + \varphi_i(w)) w_j + \frac{1}{4} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(w) \varphi_i(u) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) \varphi_i(u) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, j \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{i \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im5} w_1 w_i (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(w) \varphi_i(u) w_j = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{k57} \varphi_k(w) \cdot \sum_{j \in I_1} w_j \sum_{i \in \widetilde{I}_1} c_{ij5} \varphi_i(u) = 0$$

в силу (2.10), если отображение-график липшицево. Тогда

$$\begin{aligned} s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \widetilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1}} c_{ji7} (\varphi_i(u) + \varphi_i(w)) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, j \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Пусть $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$. Тогда аналогично [3] выводим, что при условии липшицевости отображения-графика верно

$$\sum_{i \in \widetilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) = 0,$$

и поэтому

$$s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + \varphi_6(u)) w_j$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{i,j \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)).$$

Отметим, что в этой сумме слагаемые w_7 и

$$\sum_{i,j \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u))$$

не превосходят значение $d_2(u, w)$ в третьей степени в силу доказанного выше. Поэтому если φ_Γ липшицево, то сравнимое значение не должна превосходить величина

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + \varphi_6(u)) w_j + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)).$$

Такое выражение в силу (2.2) совпадает с

$$\frac{1}{6} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j \cdot \varphi_u^6(w) + \frac{1}{3} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + 2\varphi_6(u)) w_j \\ = \frac{1}{6} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j \cdot \varphi_u^6(w) + \frac{1}{3} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) - \varphi_6(u)) w_j + \sum_{j \in I_1} c_{j67} \varphi_6(u) w_j. \quad (2.12)$$

Рассмотрим точку $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. В силу (2.2) и (2.11) первые два слагаемых правой части (2.12) соотносимы с $d_2(u, w)$ во второй степени. Следовательно, если отображение-график липшицево, то

$$c_{j67} \varphi_6(u) = 0 \quad (2.13)$$

для всех $u \in \mathbb{G}$ и $j = 1, 2$. Тогда и второе слагаемое правой части (2.12) также равно нулю. Так как в этой точке в силу (2.11) значение $\varphi_u^6(w)$ отличается от своего дифференциала, равного

$$- \sum_{i \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_i \varphi_k(u) c_{ik6},$$

на $O(w_1^2 + w_2^2)$, то из липшицевости отображения-графика должно следовать

$$\left| \sum_{j, i \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{j67} c_{ik6} w_j w_i \varphi_k(u) \right| \leq L (w_1^2 + w_2^2)^{3/2},$$

где $L < \infty$. Отсюда выводим

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = 0$$

и

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0.$$

Таким образом, $s_7 = w_7$.

Исследуем координату s_8 . Имеем

$$\begin{aligned}
 s_8 = & \varphi_u^8(w) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} c_{ij8}(\varphi_i(u) + \varphi_i(w))w_j + \frac{1}{12} \sum_{k, i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5}c_{k58}\varphi_k(u)\varphi_i(u)w_j \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{k, i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5}c_{k58}\varphi_i(u)\varphi_k(w)w_j \\
 & - \frac{1}{12} \sum_{k, m \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{jm5}c_{k58}(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))\varphi_m(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_3(u)\varphi_i(u)w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))\varphi_i(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{m, j \in I_1, i \in \tilde{I}_1} c_{ij6}c_{m68}\varphi_i(u)w_jw_m + \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}\varphi_m(w)w_jw_i \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_i(u)w_j\varphi_3(w) - \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j(\varphi_3(u)\varphi_4(w) - \varphi_4(u)\varphi_3(w))c_{j68}.
 \end{aligned}$$

В силу (2.10)

$$\begin{aligned}
 s_8 = & \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8}(\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 m \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8}\varphi_i(u) \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_3(u)\varphi_i(u)w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(w) + \varphi_3(u))\varphi_i(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}(\varphi_m(w) - \varphi_m(u))w_jw_i + \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_i(u)w_j\varphi_3(w) \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w))c_{j68}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Тогда для $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$ выводим, что $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. Если же $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то $\varphi_u^8(w)$ должно быть дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u)$$

и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

Кроме того, для любых $u, w \in \mathbb{G}$ верно

$$\sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}(\varphi_m(w) - \varphi_m(u))w_jw_i = O(d_2(u, w)^3) \quad (2.15)$$

и

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(w) - \varphi_3(u))(\varphi_i(w) - \varphi_i(u))w_j = O(d_2(u, w)^3), \quad (2.16)$$

где величина $O(1)$ зависит только от φ .

Пусть теперь $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. В силу вышеизложенного и (2.2) для оценки координаты s_8 достаточно оценить величину

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j68} \varphi_u^6(w) w_j \\ + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_3(w) - \varphi_3(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_4(w) - \varphi_4(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Из (2.11) следует, что

$$\varphi_u^6(w) = - \sum_{l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_l \varphi_k(u) c_{lk6} + O(w_1^2 + w_2^2).$$

Кроме того,

$$\varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \sum_{l \in I_1} \phi_{kl}(u) w_l + \hat{\omega}_u^k(w) \cdot d_2(u, w),$$

где

$$\sum_{l \in I_1} \phi_{kl}(u) w_l = \nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle,$$

а $\hat{\omega}_u^k(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow u$ (см. обозначение 11), $k = 3, 4$.

Таким образом, величиной, сравнимой с $(w_1^2 + w_2^2)^{3/2}$, должно оцениваться сверху значение

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ - \frac{1}{2} \sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ + \sum_{j, l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ + \sum_{j, l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l \\ + \hat{\omega}_u^3(w) \cdot d_2(u, w) \cdot \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + \hat{\omega}_u^4(w) \cdot d_2(u, w) \cdot \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Так как при условии липшицевости φ_Γ выражение (2.18) оценивается через $O(d_2(u, w)^3) = o(d_2(u, w)^2)$, то полином

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l
\end{aligned}$$

аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $o(d_2(u, w)^2)$. Иными словами,

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j$$

является первым дифференциалом, а

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l
\end{aligned}$$

является вторым дифференциалом отображения $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ в точке u по w_1 , w_2 , если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. Кроме того, если положить

$$\omega_u^8(w) = \frac{\varphi_u^8(w) - D\varphi_u^8(u)\langle w \rangle - \frac{1}{2} D_2\varphi_u^8(u)\langle w \rangle}{d_2(u, w)^2},$$

то условие (2.8), а именно,

$$\begin{aligned}
& \left| \omega_u^8(w) + \frac{\hat{\omega}_u^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\
& \quad \left. + \frac{\hat{\omega}_u^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \right| \leq \hat{L} d_2(u, w)
\end{aligned}$$

должно выполняться для некоторого $\hat{L} < \infty$.

Рассмотрим теперь (2.14) для точки

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \hat{X}_k \right) (u)$$

без слагаемых (2.15), (2.16) и

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} (\varphi_i(w) - \varphi_i(u)),$$

так как они и так не превосходят величины, сравнимой с $d_2(u, w)^3$. Построим вспомогательные точки

$$w^1 = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$$

и

$$w^2 = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(w^1).$$

Тогда

$$w = \exp\left(\left(w_7 - \frac{1}{2}w_1w_5\right)\widehat{X}_7\right)(w^2) = \exp(\widehat{w}_7\widehat{X}_7)(w^2),$$

и $\widehat{w}_7 \leq \widehat{c}d_2(u, w)^3$, $\widehat{c} < \infty$. Положим $w^0 = u$ и $w^3 = w$. Из (2.2) выводим

$$\varphi_{w^{l-1}}^6(w^l) = \varphi_6(w^l) - \varphi_6(w^{l-1}) + \frac{1}{2}(\varphi_4(w^{l-1})\varphi_3(w^l) - \varphi_3(w^{l-1})\varphi_4(w^l)),$$

где $l = 1, 2, 3$.

Отсюда с учетом доказанных ранее свойств координатной функции $\varphi_v^6(\cdot)$, $v \in \mathbb{G}$, следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_u^6(w) &= \sum_{l=1}^3 \varphi_{w^{l-1}}^6(w^l) + \frac{1}{2}(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1))(\varphi_4(w^0) - \varphi_4(w^1)) \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi_4(w^2) - \varphi_4(w^1))(\varphi_3(w^1) - \varphi_3(w^0)) + \frac{1}{2}(\varphi_3(w^3) - \varphi_3(w^2))(\varphi_4(w^0) - \varphi_4(w^1)) \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi_4(w^3) - \varphi_4(w^2))(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^0)) = \varphi_u^6(w^1) + O(d_2(u, w)^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Кроме того, с точностью до величины, сравнимой с $d_2(u, w)^3$, значение $\varphi_u^8(w)$ в силу (1.1) совпадает с суммой

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w^1) + \varphi_{w^1}^8(w^2) + \varphi_{w^2}^8(w) + \frac{1}{2}(\varphi_u^3(w^1)\varphi_{w^1}^6(w^2) - \varphi_u^6(w^1)\varphi_{w^1}^3(w^2)) \\ + \frac{1}{2}(\varphi_{w^1}^3(w^2)\varphi_{w^2}^6(w) - \varphi_{w^1}^6(w^2)\varphi_{w^2}^3(w)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

причем значение

$$\max\{\varphi_{w^2}^8(w), \varphi_u^3(w^1)\varphi_{w^1}^6(w^2), \varphi_{w^1}^3(w^2)\varphi_{w^2}^6(w), \varphi_{w^1}^6(w^2)\varphi_{w^2}^3(w)\}$$

сравнимо с $d_2(u, w)^3$ в силу полученных необходимых условий. Преобразуем теперь выражение (2.14) с учетом (2.17), не учитывая слагаемые из (2.19) и (2.20), сравнимые с $d_2(u, w)^2$ и $d_2(u, w)^3$ соответственно. Получаем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w^1) + \varphi_{w^1}^8(w^2) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j68} \varphi_u^6(w^1) w_j - \frac{1}{2} \varphi_u^6(w^1) \varphi_{w^1}^3(w^2) + \sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u) \\ + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_3(w) - \varphi_3(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_4(w) - \varphi_4(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как

$$\sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u) = \sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(w^1) + O(d_2(u, w)^3),$$

то из доказанного выше следует

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\varphi_u^6(w^1)\varphi_{w^1}^3(w^2) \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3), \end{aligned}$$

а с учетом (2.11) выводим

$$\begin{aligned} & -(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}c_{4j6}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3). \end{aligned}$$

Так как это выражение совпадает с

$$\begin{aligned} & -(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_4(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^2)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3), \end{aligned}$$

а hc -дифференциалы $\nabla_H \varphi_k$ нулевые в этих точках для $k = 3, 4$, то получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\widehat{\omega}_{w^1}^3(w^2)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_4(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + \frac{\widehat{\omega}_{w^2}^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)). \end{aligned}$$

Таким образом, необходимость условий установлена.

Перейдем к доказательству достаточности. Заметим, что для координат $s_1, \dots, s_5$ все рассуждения обратимы, поэтому условие достаточности для них доказано. Для координаты s_6 достаточность следует из (2.19), а для координаты s_7 необходимые условия являются достаточными в силу обратимости выкладок, касающихся координат точки, а также (2.12), (2.13) и (2.19).

Для доказательства достаточности условий для s_8 , аналогично, достаточно рассмотреть представление (2.21) и обратить выкладки. Теорема доказана.

3. Существование структур и отображений

После доказательства теоремы возникает естественный вопрос, существуют ли группы Карно с выведенными ограничениями на структурные константы, за исключением тривиальных случаев, когда или отображение нулевое, или поля из $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ коммутируют.

Прежде всего сформулируем и докажем уточнение утверждения теоремы 12 о дифференциалах координатной функции $\varphi_u^8(w)$.

Теорема 14. Если зависящее только от горизонтальных переменных отображение $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ таково, что построенный по нему график является липшицевым во внутреннем смысле отображением, горизонтальные координатные функции которого непрерывно h -дифференцируемы, то должно выполняться соотношение

$$\phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} + c_{l68}) \quad (3.1)$$

для всех $j, l = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По установленному критерию при фиксированном $u \in \mathbb{G}$ координатная функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ является дважды дифференцируемой, если $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$. Кроме того, так как $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема в таких же точках и

$$\varphi_6(w) = \varphi_u^6(w) + \varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)),$$

где φ_3 и φ_4 дифференцируемы по w_1 и w_2 по условию, то и $\varphi_6(w)$ также дифференцируема по w_1 и w_2 . Следовательно, производная по w_l элемента

$$- \left(c_{j68}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}c_{3j6}(\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2}c_{4j6}\varphi_3(u)\varphi_4(u) \right)$$

из (2.5) должна совпадать с коэффициентом при $w_j w_l$ из (2.6):

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{lk6}c_{j68}\varphi_k(u) - \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{2}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{3}c_{j68}\varphi_4(u) \right) \\ - \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{j68}\varphi_3(u) \right). \end{aligned}$$

Используя производную φ_6 , установленную в (2.4), выводим, что необходимо выполнение следующего условия:

$$\begin{aligned} \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} - c_{l68}) + \phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) \\ = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u) \left(\frac{4}{3}c_{4l6} - \frac{2}{3}c_{l68} \right) + \phi_{4j}(u)\varphi_3(u) \left(\frac{2}{3}c_{4l6} + \frac{2}{3}c_{l68} \right), \end{aligned}$$

или

$$\phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} + c_{l68}).$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 15. Самым простым примером выполнения соотношения (3.1) являются случаи, когда справедливо одно из следующих условий.

1. Верно $c_{l46} = c_{l68}$ для $l = 1, 2$.
2. Функции $\varphi_3(u)$ и $\varphi_4(u)$ не зависят от горизонтальных координат.

ПРИМЕР 16. Если $c_{l46} \neq c_{l68}$ для $l = 1, 2$ и φ_3 и φ_4 не обращаются в нуль, то верно соотношение

$$\frac{\phi_{3j}(u)}{\varphi_3(u)} = \frac{\phi_{4j}(u)}{\varphi_4(u)}, \quad j = 1, 2.$$

Исследуем свойства структур, определяемых условиями, выведенными в теореме 12. Известно, что структура алгебры Ли (в том числе алгебры Ли векторных полей) определяется тождеством Якоби. В рассматриваемом случае нужно, чтобы это тождество выполнялось для структурных констант на $\widehat{\mathbb{G}}$. Так как коммутаторы второго порядка с базисными полями, степень которых более единицы, равны нулю, то достаточно проверить выполнение тождества Якоби для горизонтальных векторных полей. Иными словами, нужно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0, \\ [X_1, [X_2, X_4]] + [X_2, [X_4, X_1]] + [X_4, [X_1, X_2]] = 0, \\ [X_1, [X_3, X_4]] + [X_3, [X_4, X_1]] + [X_4, [X_1, X_3]] = 0, \\ [X_2, [X_3, X_4]] + [X_3, [X_4, X_2]] + [X_4, [X_2, X_3]] = 0. \end{cases}$$

Запишем их в терминах структурных констант из (1.2). Имеем

$$\begin{cases} c_{235} + c_{236}c_{167} - c_{136}c_{267} + c_{357} = 0, \\ c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{245} + c_{246}c_{167} - c_{146}c_{267} + c_{457} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Чтобы убедиться в том, что примеры описанных в теореме 12 структур и отображений существуют, исследуем выведенные условия на отображения и структурные константы. А именно, требуется выполнение равенств

$$c_{167}\varphi_6(u) = c_{267}\varphi_6(u) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{1k5}\varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{2k5}\varphi_k(u) = 0.$$

Заметим, что второе условие эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} c_{135} & c_{145} \\ c_{235} & c_{245} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_3(u) \\ \varphi_4(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где ненулевые значения $\varphi_3(u)$ и $\varphi_4(u)$ возможны, только если

$$c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235} = 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим основные случаи и их варианты.

СТРУКТУРА 1. Пусть $c_{167} = c_{267} = 0$. Из (3.2) следует

$$c_{235} = -c_{357}, \quad c_{245} = -c_{457}.$$

Кроме того, из пятого уравнения системы (3.2) следует, что выполнено условие (3.4), а седьмое уравнение этой системы превращается в тождество. Тогда, во-первых, система (3.3) имеет (в общем случае) ненулевые решения φ_3 и φ_4 , и, во-вторых, для этих решений верно

$$0 = c_{235}\varphi_3(u) + c_{245}\varphi_4(u) = c_{537}\varphi_3(u) + c_{547}\varphi_4(u).$$

Отсюда вытекает, что выполнены все условия п. 4 теоремы 12. Таким образом, в (3.2) остаются четыре уравнения:

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

СТРУКТУРА 1.1. Пусть

$$c_{135} = c_{245} = c_{145} = c_{235} = 0. \quad (3.6)$$

Тогда $c_{357} = c_{457} = 0$, $c_{168} = c_{146}$ и $c_{268} = c_{246}$, следовательно, $c_{458} = 0$ и

$$c_{236}c_{146} - c_{136}c_{246} + c_{358} = 0.$$

Очевидно, что константы, удовлетворяющие данному соотношению, существуют. Поэтому и группа $\hat{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли векторных полей, определяемых вышеописанными структурными константами, также существует.

В свою очередь, так как $c_{168} = c_{146}$ и $c_{268} = c_{246}$ при условии (3.6), то выполнено соотношение (3.1), и на отображения накладываются только ограничения, связанные со свойствами первых (классических) дифференциалов их координатных функций.

СТРУКТУРА 1.2. Рассмотрим теперь случай, когда условие (3.6) не выполняется. Так как c_{135} и c_{235} входят в систему (3.5) симметрично, то предположим без ограничения общности, что $c_{135} \neq 0$. Тогда

$$c_{245} = \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}, \quad (3.7)$$

а из (3.3) будет следовать

$$\varphi_3(u) = -\frac{c_{145}}{c_{135}}\varphi_4(u). \quad (3.8)$$

Поэтому

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Чтобы убедиться, что константы, удовлетворяющие системе (3.9), существуют, положим

$$c_{168} = x, \quad c_{458} = y, \quad c_{268} = z, \quad c_{358} = t$$

и исследуем разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x = c_{145}t + c_{146} - c_{135}y, \\ y = c_{146}z - c_{246}x, \\ z = \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}t + c_{246} - c_{235}y, \\ t = c_{136}z - c_{236}x. \end{cases}$$

В свою очередь, она сводится к системе

$$\begin{cases} x(1 + c_{135}(\frac{c_{145}}{c_{135}}c_{236} - c_{246})) + z(c_{135}(c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{136})) = c_{146}, \\ x(c_{235}(\frac{c_{145}}{c_{135}}c_{236} - c_{246})) + z(1 + c_{235}(c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{136})) = c_{246}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Тогда если верно

$$1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} + c_{235}c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{136} \neq 0,$$

то решение (x, y, z, t) существует и единственно. Если же

$$1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} + c_{235}c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{136} = 0,$$

то для существования решений нужно, чтобы либо $c_{146} = c_{246} = 0$, либо эквивалентность системы (3.10) одному уравнению.

Заметим, что во всех перечисленных случаях константы, входящие в (3.10), можно подобрать так, чтобы описанные выше условия выполнялись. Рассмотрим один из частных случаев.

СТРУКТУРА 1.2.1. Пусть $1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} = 0$ и $c_{235} = 0$. Тогда система (3.10) сведется к системе

$$\begin{cases} z(c_{135}c_{146} - c_{145}c_{136}) = c_{146}, \\ z = c_{246}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Система (3.10) имеет решения, если система (3.11) корректна и выполняется условие

$$c_{246}(c_{135}c_{146} - c_{145}c_{136}) = c_{146},$$

а с учетом предположения $c_{135}c_{246} - 1 = c_{145}c_{236}$ оно эквивалентно соотношению

$$c_{145}c_{236}c_{146} = c_{145}c_{136}c_{246}.$$

Если предположить, что $c_{145} = 0$, то с учетом (3.7) и (3.8) получим, что $\varphi_3 \equiv 0$, тогда как на φ_4 ограничений нет; при этом условие (3.1) выполнено. Если же $c_{145} \neq 0$, то условие

$$c_{236}c_{146} = c_{136}c_{246}$$

гарантирует корректность системы (3.11). Так как $c_{145} \neq 0$, то (3.1) выполнено в силу (3.8).

Как видно, ограничений на значения $x = c_{168}$ здесь нет.

СТРУКТУРА 2. Пусть хотя бы одно из значений c_{167} или c_{267} отлично от нуля. Предположим для определенности, что $c_{167} \neq 0$ (случай $c_{267} \neq 0$ является аналогичным). Тогда $\varphi_6(u) \equiv 0$.

Из условия

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167}c_{1k6}\varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167}c_{2k6} + c_{267}c_{1k6})\varphi_k(u) = 0$$

пункта 4 теоремы 12 вытекает, что, во-первых,

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{1k6}\varphi_k(u) = 0, \quad (3.12)$$

и, во-вторых,

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{2k6} \varphi_k(u) = 0. \quad (3.13)$$

Условия (3.12) и (3.13) выполняются, если $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$ или если

$$c_{136} \varphi_3(u) = -c_{146} \varphi_4(u) \quad \text{и} \quad c_{236} \varphi_3(u) = -c_{246} \varphi_4(u),$$

где $c_{136}c_{246} = c_{236}c_{146}$, или если $c_{136} = c_{246} = c_{236} = c_{146} = 0$. Кроме того, из п. 4 теоремы 12 следует, что должно выполняться

$$c_{357} \varphi_3(u) + c_{457} \varphi_4(u) = 0. \quad (3.14)$$

Заметим, что если $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$, то из теоремы 12 следует, что единственным условием липшицевости отображения-графика является липшицевость координатной функции $\varphi_u^8(w)$ относительно d_2 :

$$|\varphi_u^8(w)| \leq L d_2(u, w)^3 \quad (3.15)$$

для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из функций φ_3 и φ_4 может не быть равной нулю. В этом случае возможно два вида структур.

СТРУКТУРА 2.1. Пусть $c_{136} = c_{246} = c_{236} = c_{146} = 0$. Тогда из (3.2) имеем

$$\begin{cases} c_{235} + c_{357} = 0, \\ c_{358} = c_{458} = 0, \\ c_{245} + c_{457} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} = c_{268} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \end{cases}$$

откуда следует $c_{267} = 0$ и

$$c_{167} - (c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235}) = 0.$$

Так как $c_{167} \neq 0$, то и $c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235} \neq 0$. Следовательно, единственным решением системы (3.3) будет $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$ и должно выполняться (3.15).

Поэтому рассмотрим случай, когда хотя бы один из коэффициентов из (3.12) или (3.13) отличен от нуля.

СТРУКТУРА 2.2. Пусть для определенности $c_{136} \varphi_3(u) = -c_{146} \varphi_4(u)$, где $c_{136} \neq 0$. Тогда $c_{246} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{236}$ и $\varphi_3(u) = -\frac{c_{146}}{c_{136}} \varphi_4(u)$, а с учетом (3.14) выводим

$$-c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} \varphi_4(u) + c_{457} \varphi_4(u) = 0.$$

Если $\varphi_4(u) = 0$, то и $\varphi_3(u) = 0$, поэтому будем считать, что $\varphi_4(u)$ не совпадает тождественно с нулем. Тогда

$$c_{457} = c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}}.$$

Далее, из условия (3.3) выводим

$$-\frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135} \varphi_4(u) + c_{145} \varphi_4(u) = -\frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235} \varphi_4(u) + c_{245} \varphi_4(u) = 0;$$

тогда $c_{145} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135}$ и $c_{245} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235}$. Следовательно,

$$c_{135}c_{457} - c_{145}c_{357} = c_{135}c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} - \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135}c_{357} = 0$$

и

$$c_{235}c_{457} - c_{245}c_{357} = c_{235}c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} - \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235}c_{357} = 0,$$

и из пятого и седьмого уравнений системы (3.2) получаем $c_{167} = c_{267} = 0$, т. е. ситуацию структуры 1. Подчеркнем, что условие $c_{136}\varphi_3(u) = -c_{146}\varphi_4(u)$, где $c_{136} \neq 0$, включает случай, когда $\varphi_3 \equiv 0$ и $c_{146} = 0$.

Случай, когда $c_{236}\varphi_3(u) = -c_{246}\varphi_4(u)$, где один из коэффициентов отличен от нуля, рассматривается аналогично.

Лемма 17. Пусть отображение групп Энгеля $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ таково, что координатные функции при полях степени один и два равны нулю, а отображение-график φ_Γ липшицево во внутреннем смысле. Тогда $\varphi \equiv \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 12 и (2.5) верно, что для любых $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$, производная функции $\varphi_u^8(w)$ в точке u , которая выражается через $\varphi_3(u)$, $\varphi_4(u)$ и $\varphi_6(u)$, равна нулю. Кроме того, для произвольных точек $w_s = \exp(sw_1\hat{X}_1 + sw_2\hat{X}_2)(u)$ и $w_t = \exp(tw_1\hat{X}_1 + tw_2\hat{X}_2)(u)$, лежащих на интегральной линии векторного поля $w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2$, верно

$$w_s = \exp((s-t)w_1\hat{X}_1 + (s-t)w_2\hat{X}_2)(w_t).$$

Следовательно, для всяких точек $u, w \in \mathbb{G}$, связанных соотношением $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$, справедливо равенство $\varphi(w) = \varphi(u)$ (см. аналогичные аргументы в [3]). Так как любые две точки группы $\mathbb{G}$ можно соединить ломаной, состоящей из интегральных линий горизонтальных полей (см., например, [26]), то равенство $\varphi(w) = \varphi(u)$ справедливо для любых точек $u, w \in \mathbb{G}$. Лемма доказана.

Таким образом, установлена

Теорема 18. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 6 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Если хотя бы одна из констант c_{167} или c_{267} на $\hat{\mathbb{G}}$ отлична от нуля, то липшицевы графики можно построить только по отображениям $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, тождественно равным некоторой константе.

Если же предположить, что хотя бы одна горизонтальная координатная функция отображения, по которому построен липшицев график, не равна тождественно нулю, то $c_{167} = c_{267} = 0$.

Рассмотрим два простых примера структуры 1.2 и отображений, по которым строится липшицев во внутреннем смысле график.

ПРИМЕР 19. Пусть $\hat{\mathbb{G}}$ — структура, удовлетворяющая условию предположения 6, для структурных констант которой верно $c_{167} = c_{267} = 0$. Пусть еще φ_3 и φ_4 — гладкие функции, зависящие только от горизонтальных переменных, для которых верно (3.8):

$$\varphi_3(u) = -\frac{c_{145}}{c_{135}}\varphi_4(u).$$

Тогда для них верно и условие (3.1). Так как мы считаем, что эти функции зависят только от горизонтальных переменных, то дифференциал (2.7) должен

быть равен нулю, поэтому предположим дополнительно, что $c_{458} = c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}}$. Тогда из (3.9) следует

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{358}c_{145} = 0, \\ c_{268} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

В свою очередь, из (2.2) и условия 3 теоремы 12 следует, что

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial u_j}(u) = - \sum_{k \in \tilde{I}_1} \varphi_k(u) c_{jk6} = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{j36} - c_{j46} \right) \varphi_4(u), \quad (3.16)$$

где $j = 1, 2$. Так как мы рассматриваем гладкие отображения, то должно выполняться

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) c_{jk6} = \sum_{k \in \tilde{I}_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}(u) c_{ik6},$$

т. е.

$$\left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{j36} - c_{j46} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_i}(u) = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{i36} - c_{i46} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_j}(u),$$

а именно,

$$\left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{136} - c_{146} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u) = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u).$$

Если $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{136} - c_{146} = \frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} = 0$, то на φ_4 ограничений нет. Если же хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля (например, $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \neq 0$), то выводим

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u) = \frac{c_{145}c_{136} - c_{135}c_{146}}{c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246}} \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u)$$

и поэтому φ_4 — это произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{145}c_{136} - c_{135}c_{146}}{c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.17)$$

Тогда из уравнения (3.16) можно восстановить функцию φ_6 , а по соотношениям (2.3) и (2.5) — функцию φ_8 .

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Вышеописанный пример подходит, в частности, для структуры 1.2.1 в силу условия $c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} = -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Если φ_4 зависит еще от w_5 и w_7 и $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \neq 0$, то характер зависимости от горизонтальных координат (3.17) может не сохраняться.

ПРИМЕР 22. Пусть $\widehat{\mathbb{G}}$ — структура, удовлетворяющая условию предположения 6, для структурных констант которой верно $c_{167} = c_{267} = 0$. Пусть еще φ_3 и φ_4 — гладкие функции, зависящие только от горизонтальных переменных, одна из которых тождественно равна нулю.

Предположим, что $\varphi_3 \equiv 0$. Тогда если аналогичное условие не выполняется для φ_4 , то в силу (2.10) верно $c_{145} = c_{245} = 0$. Так как φ_4 зависит только от горизонтальных переменных, то соотношение (2.7) должно быть тождественно равно нулю и поэтому $c_{458} = 0$. Тогда система (3.5) принимает вид

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Из (2.2) и условия 3 теоремы 12 следует, что

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial u_j}(u) = -\varphi_4(u)c_{j46},$$

где $j = 1, 2$, а так как мы рассматриваем гладкие отображения, то должно выполняться

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u)c_{246} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u)c_{146}.$$

Если $c_{146} = c_{246} = 0$, то выводим $c_{358} = 0$, и φ_4 — произвольная гладкая функция. Если же хотя бы одно из этих значений отлично от нуля (например, $c_{246} \neq 0$), то верно

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u) = \frac{c_{146}}{c_{246}} \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u),$$

и тогда φ_4 — произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{146}}{c_{246}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.18)$$

Пусть теперь $\varphi_4 \equiv 0$. Тогда имеем $c_{135} = c_{235} = c_{358} = c_{458} = 0$ и

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Если $c_{136} = c_{236} = 0$, то ограничений на гладкую функцию φ_3 не будет, а единственным ограничением будет система

$$\begin{cases} c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Если же хотя бы одно из этих значений отлично от нуля (например, $c_{236} \neq 0$), то, аналогично предыдущему случаю, φ_3 — произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{136}}{c_{236}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Если при $\varphi_4 \equiv 0$ предположить, что $c_{146} = c_{246} = 0$, то при любом выборе оставшихся констант тождество Якоби будет выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Если φ_4 зависит еще от w_5 и w_7 и $c_{246} \neq 0$ или если φ_3 зависит еще от w_5 и w_7 и $c_{236} \neq 0$, то характер зависимости от горизонтальных координат (3.18) и (3.19) соответственно может не сохраняться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
2. Карманова М. Б. Липшицевы графики на группах Гейзенберга и связанные задачи // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 1. С. 154–158.
3. Карманова М. Б. О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 882–900.
4. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
5. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
6. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
7. Fomenko A. T. (ed.) Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993.
8. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2006. V. 3. P. 145–161.
9. Hladky R. K., Pauls S. D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging and Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
10. Petitot J. Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
11. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
12. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. Reine Angew. Math. 2010. V. 648. P. 75–110.
13. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
14. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81, N 2. P. 251–295.
15. Garofalo N., Pauls S. D. The Bernstein problem in the Heisenberg group. arXiv:math/0209065v2, 2005.
16. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.
17. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301. P. 1369–1406.
18. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. [Электронный ресурс] arXiv:2311.06638v1 [math.MG]. 2023.
19. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
20. Карманова М. Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
21. Карманова М. Б. Двухступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
22. Карманова М. Б. Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.
23. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
24. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Math. Ann. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
25. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
26. Karmanova M., Vodopyanov S. On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces // Geometric Control and Sub-Riemannian Geometry (Proc. INdAM Meet-

ing; Cortona, May 2012). Cham: Springer INDAM Ser., 2014. V. 5. P. 241–262.

Поступила в редакцию 14 апреля 2026 г.

После доработки 14 апреля 2026 г.

Принята к публикации 23 апреля 2026 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

УДК 517.955

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов, Б. В. Жигжитжапов

Аннотация. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Характер вырождения в изучаемых уравнениях определяется тем, что старший операторный коэффициент может быть необратимым оператором.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.408

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, начально-краевые задачи, регулярные решения, вырождение, существование, единственность.

Геннадия Владимировичу Демиденко
в честь его 70-летия

1. Введение

В работе исследуется следующий класс уравнений составного типа:

$$L_1 u_t(x, t) + L_2 u(x, t) = f(x, t), \quad (*)$$

где L_1 и L_2 — дифференциальные операторы второго порядка.

Уравнения данного класса в литературе часто называют *уравнениями соболевского типа* или *псевдопараболическими уравнениями* [1, 2], они применяются в гидродинамике, задачах фильтрации, массо-, влаго- и теплопереноса [3–8]. Уравнения типа (1) исследовались в работах многих авторов, в частности, стоит отметить работы С. Л. Соболева, А. И. Кожанова, Г. А. Свиридюка, В. Е. Федорова и др. [9–15]. Кроме названных также выделим работы, в которых изучаются задачи для уравнений соболевского типа более высокого порядка как близкие к данной [16, 17]. В этих двух статьях изучался случай, когда оператор L_1 при старшей производной по времени имел вид $L_1 = \lambda - \Delta$, причем при некоторых определенных значениях постоянного коэффициента λ оператор L_1 становился необратимым. Особенностью данной работы является то, что старший оператор L_1 имеет переменные коэффициенты и может вырождаться на произвольных множествах при различных значениях временной переменной. Такого рода случаи вырождения еще не изучались в литературе для уравнений рассматриваемого типа.

В настоящей работе используется математический аппарат, описанный в монографиях [18, 19].

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

© 2026 Кожанов А. И., Жигжитжапов Б. В.

2. Необходимые определения и построения

Пусть ограниченная область определения пространственных переменных $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую (для удобства бесконечно гладкую) границу $\partial\Omega = \Gamma$. Область определения переменных (x, t) обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$. Функции $f(x, t)$, $a_1(t)$ и $a_2(t)$ считаем известными, определенными на соответственно замыкании Q и отрезке $[0, T]$ функциями. Оператор Лапласа Δ действует по пространственным переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Операторы L_1 , L_2 и L определяются следующим образом:

$$L_1 v = (a_1(t) - \Delta)v, \quad L_2 v = (a_2(t) - \Delta)v, \quad Lv = L_1 v_t + L_2 v.$$

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (3)$$

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейство нормированных в $L_2(\Omega)$ функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ играют ключевую роль в данном исследовании. Они определяются из задачи

$$\Delta\omega(x) = \lambda\omega(x), \quad \omega(x)|_{x \in \Gamma} = 0.$$

Известны свойства (см., например, [19, 20]) последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейства функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. В частности, известно, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из отрицательных действительных чисел и имеет единственную предельную точку $-\infty$. Также известно, что функции $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать так, чтобы они образовывали полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$, что и считается выполненным.

В тех случаях, когда коэффициент $a_1(t)$ становится равным каким-либо собственным значениям λ_k в каких-либо точках или подмножествах отрезка $[0, T]$, оператор L_1 становится необратимым и требуется задать некоторые дополнительные условия, чтобы задача (1)–(3) была поставлена корректно.

Вследствие непрерывности $a_1(t)$ и свойств чисел λ_k найдется такое минимальное положительное целое число k_0 , что для $k > k_0$ будет выполняться $a_1(t) > \lambda_k$ на всем отрезке $[0, T]$.

Множество функций $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ определяется равенствами

$$f_k(t) = \int_{\Omega} f(x, t) w_k(x) dx.$$

Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{L_2(Q, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(Q, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Теоремы существования и единственности

Теорема 3.1. Пусть для коэффициентов $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $f(x, t)$ выполняются следующие условия:

$$a_1(t) \in C^1([0, T]), \quad a_2(t) \in C^1([0, T]), \quad f(x, t) \in L_2(Q); \quad (4)$$

$$a_2(t) - \lambda_1 - \frac{1}{2}a_1'(t) > 0, \quad a_2(t) - \lambda_1 + \frac{1}{2}a_1'(t) > 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5)$$

$$a_1(0) > \lambda_1, \quad a_1(T) \geq \lambda_1; \quad (6)$$

$$f_k'(t) \in L_2([0, T]), \quad k = 1, 2, \dots, k_0. \quad (7)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V решение, причем только одно.

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{k_0} y_k(t) w_k(x) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} y_k(t) w_k(x). \quad (8)$$

Функции $y_k(t)$ определяются как решения следующих задач:

$$(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \quad (9)$$

$$y_k(0) = 0. \quad (10)$$

Для $k > k_0$ существование и единственность решений $y_k(t)$ задач (9), (10) в пространстве $W_2^1([0, T])$ следует из невырожденности уравнений.

Покажем, что задачи (9), (10) при $k = 1, 2, \dots, k_0$ (т. е. при наличии вырождения) имеют решения, принадлежащие $W_2^1([0, T])$. Рассмотрим следующую задачу для $\varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon y_k''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \quad (9_\varepsilon)$$

$$y_k(0) = y_k'(T) = 0. \quad (11)$$

Из общей теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка следует, что при $\varepsilon > 0$ задача (9_ε), (11) имеет решение $y_{k,\varepsilon}(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0, T])$. Покажем, что для этих решений имеют место равномерные по ε априорные оценки. Индекс « ε » при получении оценок указывать не будем.

Умножим уравнение (9_ε) на $y_k(t)$ и проинтегрируем, используя условия теоремы и условия задачи (9_ε), (11). Так получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\varepsilon y_k'^2(t) + \left[(a_2(t) - \lambda_k - \frac{1}{2}a_1'(t)) y_k^2(t) \right] \right) dt \\ + \frac{1}{2} [a_1(T) - \lambda_k] y_k^2(T) = \int_0^T f_k(t) y_k(t) dt. \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга, получаем следующую априорную оценку:

$$\int_0^T (\varepsilon y_k'^2(t) + y_k^2(t)) dt \leq N \int_0^T f_k^2(t) dt, \quad N > 0. \quad (12)$$

Умножив уравнение (9_ε) на $-y_k''(t)$ и проинтегрировав, учитывая условия задачи и теоремы, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\varepsilon y_k''^2(t) + \left(a_2(t) - \lambda_k + \frac{a_1'(t)}{2} \right) y_k'^2(t) \right] dt \\ & + \frac{1}{2} [a_1(0) - \lambda_k] y_k'^2(0) = \int_0^T (f_k'(t) y_k'(t) - a_2'(t) y_k(t) y_k'(t)) dt + f_k(0) y_k'(0). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя формулу интегрирования по частям и неравенство (12), а также неравенство Юнга, получаем, что следствием (13) будет оценка

$$\int_0^T (\varepsilon y_k''^2(t) + y_k'^2(t)) dt \leq M \int_0^T (f_k'^2(t) + f_k^2(t)) dt, \quad (14)$$

постоянная M в которой зависит только от функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Оценок (12) и (14) достаточно, чтобы получить существование подпоследовательности решений $y_{k,\varepsilon_m}(t)$ задачи (9_ε) , для которой при $m \rightarrow \infty$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m y_{k,\varepsilon_m}''(t) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2([0, T]),$$

$$y_{k,\varepsilon_m}(t) \rightarrow y_k(t) \text{ слабо в } W_2^1([0, T]).$$

Это следует из свойств рефлексивности гильбертова пространства.

Указанные сходимости означают, что для любой функции $\eta(t)$ из пространства $L_2([0, T])$ имеет место сходимость при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\varepsilon_m y_{k,m}''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_{k,m}'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_{k,m}(t)] \eta(t) dt \\ & \rightarrow \int_0^T [(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t)] \eta(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\int_0^T [(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) - f_k(t)] \eta(t) dt = 0.$$

В силу произвольности функции $\eta(t)$ из этого равенства и следует выполнение уравнения (9).

Далее, имеют место равенства

$$|y_k(0)| = |y_k(0) - y_{k,m}(0)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)] dt - \frac{1}{T} \int_0^T (T-t)[y_k'(t) - y_{k,m}'(t)] dt \right|.$$

Отсюда

$$|y_k(0)| \leq \frac{1}{T} \left| \int_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)] dt \right| + \frac{1}{T} \left| \int_0^T (T-t)[y_k'(t) - y_{k,m}'(t)] dt \right|.$$

Вследствие указанных выше сходимостей каждое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. А это и означает выполнение равенства $y_k(0) = 0$.

Поскольку для функции $y_k(t)$ выполняется уравнение (9), после умножения этого уравнения на функцию $y_k(t)$ получим оценку

$$\int_0^T y_k^2(t) dt \leq N \int_0^T f_k^2(t) dt.$$

Из этой оценки вытекает единственность решений задачи (9), (10) в пространстве $W_2^1([0, T])$.

Докажем принадлежность функции $u(x, t)$, определенной равенством (8), пространству V .

Для натуральных чисел k из промежутка $[k_0 + 1, \infty)$ уравнение для функций $y_k(t)$ можно записать в виде

$$y_k'(t) + \frac{a_2(t) - \lambda_k}{a_1(t) - \lambda_k} y_k(t) = \frac{f_k(t)}{a_1(t) - \lambda_k}. \quad (9')$$

Пусть $k_{0,1}$ — такое натуральное число, что при $k \geq k_{0,1}$ выполняются неравенства $a_1(t) - \lambda_k > 0$, $a_2(t) - \lambda_k > 0$ при $t \in [0, T]$. Умножая уравнение (9') вначале на функцию $\lambda_k^2 y_k(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, T]$, затем на функцию $\lambda_k^2 y_k'(t)$ и вновь интегрируя по отрезку $[0, T]$, получим, что при $k \geq k_{0,1}$ выполняется неравенство

$$\lambda_k^2 \int_0^T y_k^2(t) dt + \lambda_k^2 \int_0^T y_k'^2(t) dt \leq N_1 \int_0^T f_k^2(t) dt$$

с постоянной N_1 , определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Определим функцию $u_{k_{0,1},m}(x, t)$:

$$u_{k_{0,1},m}(x, t) = \sum_{k=k_{0,1}}^m y_k(t) w_k(x).$$

Имеем

$$\int_Q [\Delta u_{k_{0,1},m}(x, t)]^2 dx dt = \sum_{k=k_{0,1}}^m \lambda_k^2 \int_0^T y_k^2(t) dt \leq N_1 \sum_{k=k_{0,1}}^m \int_0^T f_k^2(t) dt \leq N_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2$$

(последнее неравенство есть следствие неравенства Бесселя). Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим, что функция

$$\Delta \left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k(t) w_k(x) \right)$$

принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Аналогичные выкладки дают принадлежность функции

$$\Delta \left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k'(t) w_k(x) \right)$$

также пространству $L_2(Q)$. Но тогда и функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V .

Из доказанного выше следует, что краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , причем ровно одно.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия (4) и (5), а также условия

$$a_i(t) \in C^2([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad a_2(t) + \frac{3}{2}a_1'(t) - \lambda_1 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

$$a_1(0) = a_1(T) = \lambda_1, \quad a_2'(0) = a_2'(T) = 0, \quad a_2(0) - \lambda_1 \neq 0; \quad (15)$$

$$f_1(t) \in W_2^2([0, T]), \quad f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(T) = 0. \quad (16)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V решение, причем ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y_1^{(4)} + [a_1(t) - \lambda_1]y_1' + [a_2(t) - \lambda_1]y_1 = f_1(t), \quad y_1'(0) = y_1'(T) = y_1'''(0) = y_1'''(T) = 0. \quad (17)$$

Разрешимость при фиксированном ε краевой задачи (17) в $W_2^4([0, T])$ известна; для решений этой задачи будут выполняться равномерные по ε оценки (12) и (14). Дополнительно умножая уравнение (17) на функцию $y_1^{(4)}(t)$, интегрируя полученное равенство по отрезку $[0, T]$, используя условия (15) и (16), краевые условия (17), а также имеющиеся оценки (12) и (14), придем к априорной оценке

$$\varepsilon \int_0^T [y_1^{(4)}(t)]^2 dt + \int_0^T [y_1''(t)]^2 dt \leq M_1 \int_0^T \{f_1^2(t) + [f_1'(t)]^2 + [f_1''(t)]^2\} dt$$

с постоянной M_1 , определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Из этой оценки и из оценок (12), (14) следует, что существует функция $y_1(t)$, принадлежащая пространству $W_2^2([0, T])$ (см. доказательство теоремы 3.1), являющаяся решением уравнения

$$[a_1(t) - \lambda_1]y_1'(t) + [a_2(t) - \lambda_1]y_1(t) = f_1(t).$$

В этом уравнении функция $y_1'(t)$ ограничена; поскольку $a_1(0) - \lambda_1 = 0$, то будут выполняться равенства

$$[a_1(0) - \lambda_1]y_1'(0) = 0, \quad [a_2(0) - \lambda_1]y_1(0) = 0.$$

Вследствие условия $a_2(0) - \lambda_1 \neq 0$ получим, что необходимо выполняется равенство $y_1(0) = 0$.

Существование остальных функций $y_k(t)$ очевидно. Функция $u(x, t)$, определенная суммой ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)w_k(x),$$

будет искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана. $\square$

Пусть выполняется условие $a_1(T) < \lambda_1$. Обозначим через k_1 натуральное число такое, что $\lambda_{k_1} \leq a_1(T) < \lambda_{k_1-1}$.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (4), (5), (7), а также условия

$$a_1(0) > \lambda_1, \quad a_1(T) < \lambda_1. \quad (18)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V бесконечно много решений. Если же дополнительно к условиям (2), (3) выполняются условия

$$\int_{\Omega} u(x, T)w_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, k_1 - 1, \quad (19)$$

то задача (1)–(3) будет иметь в пространстве V ровно одно решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_k , $k = 1, \dots, k_1 - 1$, — произвольные действительные числа. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $y_k(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0, T)$ уравнению (9) и такую, что для нее выполняются условия

$$y_k(0) = 0, \quad y_k(T) = A_k. \quad (20)$$

Положим $z_k(t) = y_k(t) - \frac{A_k t}{T}$. Для функции $z_k(t)$ должно выполняться уравнение

$$(a_1(t) - \lambda_k)z'_k(t) + (a_2(t) - \lambda_k)z_k(t) = f_k(t) - (a_1(t) - \lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t) - \lambda_k)\frac{A_k t}{T}, \quad (21)$$

а также условия

$$z_k(0) = z_k(T) = 0. \quad (22)$$

Используя регуляризацию уравнения (21) уравнением

$$\begin{aligned} -\varepsilon z''_k(t) + (a_1(t) - \lambda_k)z'_k(t) + (a_2(t) - \lambda_k)z_k(t) \\ = \widehat{f}_k(t) = f_k(t) - (a_1(t) - \lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t) - \lambda_k)\frac{A_k t}{T} \end{aligned}$$

($\varepsilon > 0$), далее получая априорные оценки (12) и (14) (с помощью анализа равенств, полученных после умножения регуляризованного уравнения соответственно на функции $z_k(t)$ и $z''_k(t)$ с последующим интегрированием по отрезку $[0, T]$) и осуществляя стандартную процедуру перехода к пределу, нетрудно показать, что краевая задача (21), (22) имеет решение $z_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^1([0, T])$. Но тогда функция $y_k(t)$, определенная равенством $y_k(t) = z_k(t) + \frac{A_k t}{T}$, будет решением из пространства $W_2^1([0, T])$ краевой задачи (9), (20).

Функции $y_k(t)$ при $k = k_1, \dots, k_0$ строим как решения задач (9), (10). Далее, функции $y_k(t)$ при $k > k_0$ строим как решения обычной (невырожденной) задачи Коши. Наконец, функция $u(x, t)$, представленная суммой (8), даст искомое решение краевой задачи (1)–(3). Но поскольку функции $y_k(t)$ при $k = 1, \dots, k_1 - 1$ определяются произвольным действительным числом A_k , то таких функций будет бесконечно много. Следовательно, и решений $u(x, t)$ краевой задачи (1)–(3) будет бесконечно много.

Пусть в задаче (1)–(3) дополнительно выполняется условие (19). Тогда для решения $u(x, t)$ имеем

$$u(x, T) = \sum_{k=1}^{k_1-1} A_k w_k(x) + \sum_{k=k_1}^{\infty} y_k(T) w_k(x).$$

Умножая это равенство последовательно на функции $w_1(x), \dots, w_{k_1-1}(x)$ и интегрируя по области Ω , получим $A_k = 0$, $k = 1, \dots, k_1 - 1$. Другими словами, функция $u(x, t)$, заданная равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) w_k(x),$$

в котором функции $y_k(t)$ при $k = 1, \dots, k_1 - 1$ определяются как решения задачи (9), (20) в случае $A_k = 0$, функции $y_k(t)$ при $k \geq k_1$ определяются как решения задачи (9), (10), будет искомым решением краевой задачи (1)–(3), (19), причем других решений нет. $\square$

4. Заключение

В работе представлены новые результаты о разрешимости в соболевских пространствах первой начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Особенностью изучаемых уравнений является то, что операторный коэффициент при первой производной по временной переменной может быть необратимым в произвольном числе точек из интервала $(0, T)$ (в том числе и на множестве ненулевой меры), причем может менять и направление эволюции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Наряду с первой начально-краевой задачей для уравнения (1) можно аналогичным образом изучить разрешимость и других задач, например, третьей начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozhanov A. I. Composite-type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
4. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. 1964. N 3. P. 60–72.
5. Грачев С. И., Коротенко В. А., Кушакова Н. П. Исследование влияния трансформации двухфазной фильтрации на формирование зон невыработанных запасов нефти // Зап. Горного ин-та. 2020. Т. 241. С. 68–82.
6. Лобковский Л. И., Рамазанов М. М. Обобщенная модель фильтрации в трещиновато-пористой среде с низкопроницаемыми включениями и ее возможные приложения // Физика Земли. 2022. № 2. С. 144–154.
7. Ходос О. А. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 54–57.
8. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1968. V. 19. P. 614–627.
9. Guseinov F. B., Iskenderov B. A. On a mixed problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a domain cylindrical with respect to the space variables // Russian Math. Surveys. 2006. V. 61, N 2. P. 351–352.
10. Moskvicheva P. O. A numerical experiment for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a bounded domain // J. Comput. Eng. Math. 2017. V. 4, N 2. P. 41–48.
11. Сагадеева М. А., Бадоян А. Д. Задача оптимального управления решениями нестационарной модели Баренблатта — Желтова — Кочиной // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2014. Т. 14, № 2. С. 5–11.
12. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.
13. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
14. Солдатова Е. А., Келлер А. В. Алгоритмы и обработка информации в численном исследовании стохастической модели Баренблатта — Желтова — Кочиной // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 4. С. 29–36.
15. Шпилов А. С. Об устойчивости решений уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной на геометрическом графе // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15. С. 106–110.
16. Замышляева А. А., Бычков Е. В. Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 8. С. 1076–1085.
17. Замышляева А. А., Юзеева А. В. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2010. № 5. С. 23–31.
18. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

19. Triebel H. Interpolation theory, Function spaces, Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Ver. Wiss., 1978.
20. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977.

Поступила в редакцию 18 марта 2026 г.

После доработки 15 апреля 2026 г.

Принята к публикации 16 апреля 2026 г.

Кожанов Александр Иванович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Жигжитжапов Бато Валерьевич
Бурятский государственный университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
zhbat120401@gmail.com

КОВРОВЫЕ КОЛЬЦА ЛИ, НЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОВРОВЫХ ПОДГРУПП

Я. Н. Нужин

Аннотация. Эта статья является продолжением работ автора (Тр. ИММ УрО РАН, 2012; Журн. СФУ. Сер. Математика и физика, 2023; Сиб. мат. журн., 2026). В первой найдены необходимые и достаточные условия инвариантности коврового кольца Ли относительно ковровой подгруппы, а во второй и в третьей установлено, что они являются достаточными для замкнутости исходного ковра. Здесь строятся примеры неприводимых замкнутых ковров над полем такие, что ковровые кольца Ли не инвариантны относительно соответствующих ковровых подгрупп, при этом на характеристику поля накладываются некоторые ограничения в зависимости от типа системы корней, ассоциированной с ковром, в частности, если характеристика поля не меньше 5, то такие ковры существуют для любого типа. Из полученных результатов следует существование неприводимых замкнутых элементарных матричных ковров над полем любой характеристики, не дополняемых до полных матричных ковров. Примеры таких элементарных матричных ковров над полями характеристики 2 и 0 указал ранее В. А. Койбаев (Тр. ИММ УрО РАН, 2011; Сиб. мат. журн., 2021).

DOI 10.33048/smzh.2026.67.409

Ключевые слова: ковер аддитивных подгрупп, ковровое кольцо Ли, группа Шевалле, ковровая подгруппа, определяющие соотношения.

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l , Π — множество ее фундаментальных корней. Простая комплексная алгебра Ли типа Φ обладает базисом Шевалле

$$\{e_r, r \in \Phi; h_s, s \in \Pi\}, \quad (1)$$

структурные константы которого являются целыми числами. Поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi, K)$ с базисом Шевалле (1) над произвольным коммутативным кольцом K (см., например, [1, с. 62]).

Элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ типа Φ над кольцом K порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \quad (2)$$

Ковром типа Φ ранга l над K называется набор подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ аддитивной группы кольца K с условиями

$$C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \quad \text{при } r, s, ir+js \in \Phi, i > 0, j > 0, \quad (3)$$

Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059, <https://rscf.ru/project/25-21-20059/>.

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \quad (4)$$

Заметим, что при $l = 1$ условия ковровости (3) вырождаются, и в этом случае любой паре подгрупп аддитивной группы кольца коэффициентов K соответствует ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$ ранга 1.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет ковровую подгруппу $E(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle$ группы $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M . Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $E(\mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$ для любого $r \in \Phi$. По определению ковер называется *неприводимым*, если все его аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ ненулевые.

Как и в [2], по определению считаем, что подкольцо $L(\mathfrak{A})$ кольца Ли $L(\Phi, K)$ порождается относительно обеих операций (сложение и лиево умножение) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, где элементы e_r из базиса (1). Будем называть $L(\mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Отметим, что базисные элементы e_r , h_s не обязаны лежать в $L(\mathfrak{A})$.

Группа $E(\Phi, K)$ действует на $L(\Phi, K)$, следовательно, подгруппа $E(\mathfrak{A})$ также действует на кольце Ли $L(\Phi, K)$, но его ковровое подкольцо $L(\mathfrak{A})$ уже не обязано быть инвариантным относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$. В действительности автором установлен следующий критерий: подкольцо $L(\mathfrak{A})$ инвариантно относительно подгруппы $E(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$ [2, теорема 3.1].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. Пусть $p \neq 0, 2$, если Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 , и $p \neq 0, 2, 3$, если Φ типа G_2 . Тогда существует неприводимый замкнутый ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем характеристики p такой, что ковровое кольцо Ли $L(\mathfrak{A})$ не инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$, в частности, при $p \geq 5$ такой ковер существует для любой системы корней Φ .

Если кратко, то доказательство теоремы 1 заключается в следующем. Для фиксированного корня $r_0 \in \Phi$ определяем подгруппу $G = \langle x_{r_0}(y), x_s(z) \mid s \in \Phi \setminus \{r_0\} \rangle$, где y, z — свободные переменные над полем F характеристики p , и показываем, что аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r = \{t \mid x_r(t) \in G\}$ составляют замкнутый ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом полиномов $F[y, z]$ такой, что нарушается по крайней мере одно из включений $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. В частности, в этом доказательстве указывается способ построения неприводимых замкнутых ковров любого типа Φ .

2. Некоторые результаты о коврах и ковровых кольцах Ли

Здесь и далее мы используем обозначения и определения, указанные во введении, остальные приводятся по мере надобности.

Замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ исходного ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K по определению состоит из аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in E(\mathfrak{A})\}, \quad r \in \Phi.$$

Если все корни из Φ имеют одинаковую длину, то замыкание является ковром (см., например, [3, с. 528]). В общем случае ответ неизвестен — это вопрос автора из Коуровской тетради [4, вопрос 19.61]. Однако справедлив следующий частичный результат

Лемма 1 [5, теорема 1]. Замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K нечетной характеристики p является ковром, если 3 не делит p , когда Φ типа G_2 .

На самом деле доказательство теоремы 1 из [5] проходит для следующего более сильного утверждения, поскольку в [5] используется только определение ковра и инвариантность любой подгруппы G группы $E(\Phi, K)$, порожденной своими пересечениями $G \cap x_r(K)$, $r \in \Phi$, относительно сопряжений элементами из диагональной подгруппы над подкольцом, порожденным 1.

Лемма 2. Пусть G — подгруппа группы $E(\Phi, K)$ над кольцом K характеристики p , и пусть $p \neq 0, 2$ для Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 , и $p \neq 0, 2, 3$ для Φ типа G_2 . Тогда набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{G}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in G\}$, $r \in \Phi$, является ковром типа Φ над кольцом K .

Следующий результат доказан в работах автора [6, 7]; в [6] он доказан для всех типов кроме симплектического, в [7] — для симплектического типа C_l .

Лемма 3. Включения $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, являются достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$. В частности, любой ковер идеалов замкнут.

Как уже отмечалось выше, доказательство теоремы 1 настоящей статьи состоит в том, что устанавливается существование неприводимых замкнутых ковров $\mathfrak{A}$ любого типа Φ , для которых нарушается включение $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$ для некоторого $r \in \Phi$. Таким образом, утверждение леммы 3 нельзя обратить.

Ковер $\mathfrak{A}$ назовем L -замкнутым, если $L(\mathfrak{A}) \cap Ke_r = \mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, т. е. если в ковровом кольце Ли $L(\mathfrak{A})$ не появятся элементы вида te_r , отличные от порождающих. (В [2] такой ковер называется L -допустимым.)

Лемма 4 [2, теорема 2.1]. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L -замкнутым тогда и только тогда, когда $2\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. В частности, над кольцом K характеристики 2 любой ковер L -замкнут.

Лемма 5 [2, теорема 3.1]. Подкольцо $L(\mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$.

Лемма 6 [2, с. 199]. Всякое ковровое подкольцо $L(\mathfrak{A})$, инвариантное относительно соответствующей ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$, является L -замкнутым.

Лемма 6 подчеркивает согласованность определений инвариантности коврового кольца Ли относительно соответствующей ковровой подгруппы и L -замкнутости исходного ковра.

Пусть $F[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо полиномов от коммутативных переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем F , $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел. Линейный лексикографический порядок множества $\mathbb{N}^n = \{(i_1, \dots, i_n) \mid i_j \in \mathbb{N}\}$ индуцирует такой же порядок на множестве M_f всех мономов

$$cx_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \quad 0 \neq c \in F\},$$

входящих в произвольный полином $f \in F[x_1, \dots, x_n]$. Наибольший элемент множества M_f называется *высшим членом* полинома f . Утверждение следующей леммы хорошо известно.

Лемма 7. Высший член произведения двух полиномов кольца $F[x_1, \dots, x_n]$ равен произведению высших членов сомножителей.

Через $G_1 * G_2$ будем обозначать свободное произведение групп G_1 и G_2 .

Лемма 8. Пусть A и B — нетривиальные аддитивные подгруппы кольца полиномов $F[x_1, \dots, x_n]$ над полем F , состоящие из полиномов с нулевыми свободными членами. Тогда

$$G := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \left\langle \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

В частности, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$ ранга 1, где $\mathfrak{A}_r = A$, $\mathfrak{A}_{-r} = B$, является замкнутым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть полиномы $f_2, f_4 \in A$ и $f_1, f_3 \in B$ ненулевые. Тогда матрицы из правых частей следующих равенств:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ f_2 & 1 + f_1 f_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & f_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + f_2 f_3 & f_1 + f_3 + f_1 f_2 f_3 \\ f_2 & 1 + f_1 f_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + f_2 f_3 & f_1 + f_3 + f_1 f_2 f_3 \\ f_2 + f_4 + f_2 f_3 f_4 & 1 + f_1 f_2 + f_1 f_4 + f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

лежат в группе G , причем степени высших членов полиномов на всех четырех позициях (для наших целей достаточно лишь одной позиции) этих матриц не убывают по лемме 7. Индукцией по числу сомножителей получим, что это справедливо для любого числа сомножителей. Таким образом, поочередное произведение неединичных элементов из групп

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

никогда не будет единичной матрицей. Следовательно, группа G есть свободное произведение двух указанных групп. Отсюда, очевидно, следует утверждение «в частности».

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть y, z — свободные переменные над полем F , а F_1 — подкольцо поля F , порожденное единицей 1. Зафиксируем корень $r_0 \in \Phi$ и определим подгруппы

$$G_{r_0} = G_{-r_0} = \langle x_{r_0}(y), x_{-r_0}(z) \rangle, \quad G_r = \langle x_r(z), x_{-r}(z) \rangle, \quad r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\}.$$

Мы считаем, что они являются подгруппами универсальной группы Шевалле $E(\Phi, K)$ над полем рациональных функций $K = F(y, z)$. Каждая из групп G_r , $r \in \Phi$, является свободным произведением двух циклических групп, а именно,

$$G_{r_0} = \langle x_{r_0}(y) \rangle * \langle x_{-r_0}(z) \rangle, \quad G_r = \langle x_r(z) \rangle * \langle x_{-r}(z) \rangle, \quad r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\}.$$

Это следует из леммы 8 в силу изоморфизма $\langle X_r, X_{-r} \rangle \simeq SL_2(K)$, который справедлив для любого $r \in \Phi$, и он получается продолжением отображения

$$\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} = x_r(v), \quad \phi \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(v), \quad v \in K;$$

см., например, [1, теорема 6.3.1] или [8, с. 45, следствие 6].

Пусть

$$G = \langle G_{r_0}, G_r \mid r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\} \rangle = \langle G_r \mid r \in \Phi \rangle.$$

В силу предположений теоремы и леммы 2 набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}, \quad \text{где } \mathfrak{A}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in G\},$$

является ковром, и, очевидно, он замкнутый. Покажем, что ковровое кольцо Ли $L(\mathfrak{A})$ не инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$.

Пусть ранг Φ равен 1. Тогда по определению $G = G_{r_0}$ и $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{r_0}, \mathfrak{A}_{-r_0}\}$, где $\mathfrak{A}_{r_0} = F_1 y$, $\mathfrak{A}_{-r_0} = F_1 z$. Включение $\mathfrak{A}_{r_0}^2 \mathfrak{A}_{-r_0} \subseteq \mathfrak{A}_{r_0}$ нарушается, так как $y^2 z \notin \mathfrak{A}_{r_0}$. Следовательно, в этом случае теорема верна в силу леммы 5.

Пусть ранг Φ больше 1. Тогда определяющие соотношения группы $E(\Phi, K)$ состоят из соотношений в группах $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ и коммутаторных соотношений (4) в силу известной теоремы Стейнберга [8, теорема 8], а группа G порождается пересечениями $G_r \cap X_r$, $r \in \Phi$. Следовательно, все соотношения в группе G для порождающих множеств $G_r \cap X_r$, $r \in \Phi$, состоят только из соотношений (2) и (4), которые определяют условия ковровости. Конечно, пересечения $G \cap X_r$ будут больше пересечений $G_r \cap X_r$ для всех $r \in \Phi$, но в силу леммы 8 справедливо равенство

$$\langle G \cap X_r, G \cap X_{-r} \rangle = \langle G \cap X_r \rangle * \langle G \cap X_{-r} \rangle,$$

поскольку коэффициенты f_r и f_{-r} у корневых элементов $x_r(f_r) \in G \cap X_r$ и $x_{-r}(f_{-r}) \in G \cap X_{-r}$ лежат в $F[y, z]$ и имеют нулевой свободный член. Поэтому элементы подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, возникают в качестве коэффициентов исходных порождающих $x_{r_0}(y)$ и $x_r(z)$, $r \in \Phi \setminus \{r_0\}$, а затем — в качестве коэффициентов новых корневых элементов, полученных из коммутаторной формулы Шевалле (4). Оценим вид подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, сверху.

Пусть I и соответственно J — идеалы кольца $F_1[y, z]$, порожденные элементами z и соответственно z^2 . Тогда

$$\mathfrak{A}_r \subseteq \begin{cases} I, & \text{если } r \in \Phi \setminus \{r_0\}, \\ F_1 y + J, & \text{если } r = r_0. \end{cases}$$

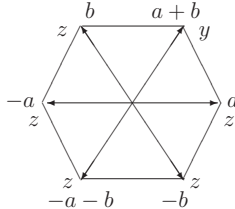


Рис. 1.

Данные включения аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, нетрудно получить для Φ типа A_2 , используя рис. 1, где $r_0 = a + b$. Для остальных систем корней ситуация подобна.

Поскольку $\mathfrak{A}_{r_0} \subseteq F_1 y + J$, то $y^2 z \notin \mathfrak{A}_{r_0}$. С другой стороны, по лемме 5 для инвариантности кольца Ли $L(\mathfrak{A})$ относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$ необходимо, чтобы выполнялось включение $\mathfrak{A}_{r_0}^2 \mathfrak{A}_{-r_0} \subseteq \mathfrak{A}_{r_0}$, из которого следует, что $y^2 z \in \mathfrak{A}_{r_0}$. Таким образом, необходимое условие инвариантности нарушается.

Теорема доказана.

4. Следствие для матричных ковров

Для любого натурального числа $n \geq 2$ набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \quad (5)$$

кольца K , удовлетворяющих включениям

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, \quad (6)$$

называется *полным матричным ковром степени n* . В силу (6) диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$ являются подкольцами из K .

Удалив из набора (5) диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, получим так называемый *элементарный матричный ковер*

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}. \quad (7)$$

В действительности такой подход существенно ограничивает множество элементарных ковров. По определению *элементарным матричным ковром степени n* назовем произвольный набор аддитивных подгрупп (7), удовлетворяющих включениям

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, i \neq r, r \neq j, i \neq j. \quad (8)$$

Элементарный ковер называется *дополняемым*, если можно определить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$ так, что дополненное множество аддитивных подгрупп является полным ковром. Отметим, что возможное дополнение элементарного ковра до полного определяется неоднозначно, а любой дополняемый элементарный ковер замкнут. Хорошо известен следующий критерий (см., например, [9, с. 25] или [10, лемма 6]).

Лемма 9. Элементарный матричный ковер $\mathfrak{A}$ дополняется до полного ковра тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j. \quad (9)$$

В частности, любой элементарный матричный ковер идеалов дополняется до полного ковра.

Если Φ типа A_{n-1} , то универсальная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ над полем K изоморфна группе матриц $SL_n(K)$ с определителем 1. Ковер типа A_{n-1} совпадает с элементарным матричным ковром, и в лиевой терминологии условие (9) записывается так:

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \quad (10)$$

Конечно, включения (10) сильнее включений $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, поэтому при Φ типа A_{n-1} из теоремы 1 и леммы 5 вытекает

Следствие 1. Для любого $n \geq 2$ существует неприводимый замкнутый элементарный матричный ковер степени n над полем любой характеристики, не дополняемый до полного ковра.

Ранее примеры элементарных матричных ковров над полями характеристики 2 и 0, не дополняемых до полных ковров, указал В. А. Койбаев в работах [11, 12], где аддитивные подгруппы, составляющие ковер, приводятся в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter R. W. Simple groups of Lie type. London; New York; Sydney; Toronto: Wiley and Sons, 1972.
2. Нужин Я. Н. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 195–200.
3. Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
4. *The Kurovka notebook: Unsolved problems in group theory*, Eds. Mazurov V. D., Khukhro E. I. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022. N 20.
5. Troyanskaya E. N. To the question of the closure of the carpet // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2024. Т. 17, № 5. С. 684–688.
6. Nuzhin Ya. N. On the closedness of carpets of additive subgroups associated with a Chevalley group over a commutative ring // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2023. Т. 16, № 6. С. 732–737.
7. Нужин Я. Н. Кольца Ли и группы, определяемые коврами симплектического типа // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 1. С. 135–145.
8. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
9. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.
10. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
11. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
12. Койбаев В. А. Замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 326–332.

Поступила в редакцию 8 марта 2026 г.

После доработки 8 марта 2026 г.

Принята к публикации 22 апреля 2026 г.

Нужин Яков Нифантьевич (ORCID 0009-0003-0426-9525)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nuzhin2008@rambler.ru

УДК 517.987

ПОЛНЫЙ ДИАПАЗОН СКОРОСТЕЙ СХОДИМОСТИ СРЕДНИХ БИРКГОФА ДЛЯ ЭРГОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

И. В. Подвигин, В. В. Рыжиков

Аннотация. Для эргодического потока реализуется диапазон скоростей сходимости средних Биркгофа от максимальной скорости до сколь угодно медленной путем подбора усредняемой функции. Для почти всех обмоток тора при этом обеспечена непрерывность усредняемых функций. Это дополняет классический результат Кренгеля о медленных скоростях сходимости средних для эргодических автоморфизмов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.410

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, специальное представление потока, одометр, обмотка тора.

Александру Григорьевичу Качуровскому
по случаю его 65-летия

1. Введение

Для эргодического сохраняющего меру потока T_t на вероятностном пространстве (X, m) и функции $f \in L_1(X, m)$ теорема Биркгофа утверждает, что временные средние

$$A(f, t, x) := \frac{1}{t} \int_0^t f(T_s x) ds$$

сходятся для почти всех $x \in X$ к пространственному среднему $\int f dm$.

Для некоторых функций указанная сходимость может быть равномерной. Именно такая сходимость фигурирует в настоящей статье. Наша цель — показать управление скоростью сходимости средних путем подбора усредняемой функции. Последняя ищется в виде функционального ряда. В результате для заданного потока реализуется диапазон скоростей от так называемой максимальной скорости до сколь угодно медленной. Для некоторых эргодических обмоток тора при этом найдены непрерывные реализации усредняемых функций. Мы также рассмотрим общий случай эргодических потоков без периодических траекторий. Здесь применяется теорема Рудольфа о специальном представлении потока, когда функция возвращения мало отличается от константы. Теореме Рудольфа можно рассматривать как непрерывный аналог леммы Рохлина —

Работа Подвигина И.В. выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

© 2026 Подвигин И. В., Рыжиков В. В.

Халмоша. Следует отметить, что Кренгель в работе [1] использовал эту лемму, а в [2] для медленных сходимостей применялось деликатное обобщение леммы Рохлина — Халмоша, принадлежащее Альперну [3]. Эффект замедления скорости сходимости возможен и в случае весовых усреднений, что показано в [4]. Важно отметить, что в определенных ситуациях весовые усреднения дают сверхбыстрые сходимости со скоростью $o(\frac{1}{t})$, см. [5]. В предлагаемой статье рассматриваются только классические средние Биркгофа, для которых максимальная скорость сходимости средних не может быть $o(\frac{1}{t})$ в случае ненулевой усредняемой функции.

2. Сходимость с максимальной скоростью

Пусть $X = [0, 1)$, в качестве потока рассмотрим вращение окружности, т. е. $T_t x = \{x + t\}$ (дробная часть суммы $x + t$). Очевидно, что для функции $f \in L_1(X, m)$ с нулевым средним для всех x выполнено $A(f, t, x) = 0$ при $t \in \mathbb{Z}$ и

$$|A(f, t, x)| \leq \frac{\|f\|_1}{t}, \quad t > 0.$$

Таким образом, сходимость в теореме Биркгофа равномерная с максимальной возможной скоростью (скорость вида $o(1/t)$ может быть только в случае нулевой функции) [6]. Отметим, что дискретные суммы Биркгофа могут вести себя совсем иначе (см., например, [7, 8]).

Выше мы упомянули вырожденный случай, когда все фазовое пространство потока является периодической траекторией. Максимальная скорость сходимости средних возникает и в неэргодическом случае, когда каждая точка фазового пространства имеет ограниченную (периодическую) траекторию. А именно, пусть $\mathcal{P}(x)$ — период точки $x \in X$ относительно потока T_t , т. е. такое минимальное число $t > 0$, что $T_t x = x$; полагаем для непериодических точек $\mathcal{P}(x) = \infty$. Если $\mathcal{P} \in L_\infty(X, m)$, то сходимость эргодических средних также будет с максимальной скоростью, но уже, вообще говоря, не равномерная. Действительно, полагая $0 < t = N\mathcal{P}(x) + r$, $0 \leq r < \mathcal{P}(x)$, $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, получаем

$$\begin{aligned} & \left| A(f, t, x) - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds \right| \\ &= \left| \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{k\mathcal{P}(x)}^{(k+1)\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds + \frac{1}{t} \int_{N\mathcal{P}(x)}^t f(T_s x) ds - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds \right| \\ &= \left| \left(\frac{N}{t} - \frac{1}{\mathcal{P}(x)} \right) \int_0^{\mathcal{P}(x)} f(T_s x) ds + \frac{1}{t} \int_0^r f(T_s x) ds \right| \leq \frac{2}{t} \int_0^{\mathcal{P}(x)} |f(T_s x)| ds. \end{aligned}$$

Таким образом, наличие медленных скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа связано с неограниченностью (т. е. непериодичностью) траекторий потока. Ниже будем рассматривать только такие случаи.

Пример специального эргодического потока. Пусть $S : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ — биекция, сохраняющая меру Лебега μ на $[0, 1)$. Определим поток T_t на $[0, 1) \times [0, 1)$, действие которого описывается так: все точки (x, y) из $[0, 1) \times [0, 1)$

движутся с единичной скоростью вертикально вверх до встречи с границей квадрата, т. е. $T_t(x, y) = (x, y + t)$. При достижении граничной точки $(x, 1)$ перескакивают в $(Sx, 0)$ и далее продолжают движение вверх, пока не окажутся в $(S^2x, 0)$ и т. д. Мы склеили точку $(x, 1)$ с $(Sx, 0)$, точки движутся с постоянной скоростью, и при этом движении сохраняется площадь (т. е. мера $m = \mu \times \mu$ на квадрате). Полученный поток эргодичен относительно меры m только в случае эргодичности преобразования S относительно меры Лебега μ на отрезке. Такой поток называют специальным потоком над автоморфизмом S с постоянной функцией возвращения.

Заметим, что для не зависящей от x функции на $[0, 1) \times [0, 1)$ с нулевым средним утверждение о равномерной сходимости с максимальной скоростью в теореме Биркгофа очевидно (аргументация не отличается от случая вращения окружности). Далее рассматривается специальный поток над 2-одометром с постоянной функцией возвращения.

Диадический одометр. Рассмотрим 2-одометр S . Он действует на отрезке $[0, 1)$ следующим образом. Для всякого разбиения отрезка $[0, 1)$ на 2^n отрезков вида $[\frac{m}{2^n}, \frac{m+1}{2^n})$ преобразование S циклически переставляет эти маленькие отрезки. При этом каждый такой отрезок переходит в себя при действии степени S^{2^n} . А ограничение этой степени на маленький отрезок подобно исходному одометру.

Дадим явное определение такого преобразования S . Число $x \in [0, 1)$ представим в двоичной записи: $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, $x_i \in \{0, 1\}$. Положим

$$S(0, 0 \dots) = (0, 1 \dots), \quad S(0, 10 \dots) = (0, 01 \dots),$$

$$S(0, \underbrace{11 \dots 11}_m 0 \dots) = (0, \underbrace{00 \dots 00}_m 1 \dots),$$

где остальные разряды, обозначенные многоточием, остаются без изменений. Для двоично рациональных точек отображение определим непрерывным слева. Одометр также называется адическим сдвигом, машиной сложения, преобразованием фон Неймана, автоморфизмом с двоично-рациональным спектром. На рис. 1 изображен его (самоподобный) график.

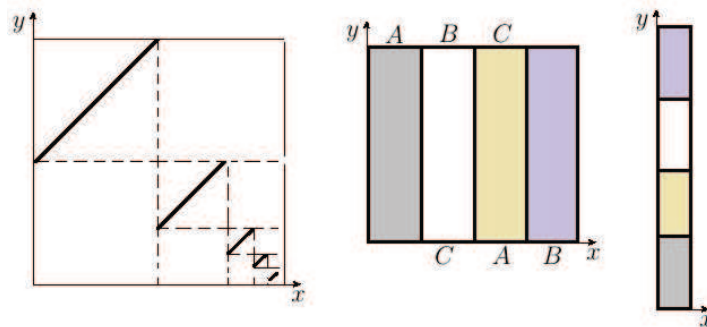


Рис. 1. Самоподобный график 2-одометра (слева); реализация M_n , $n = 2$, с помощью потока над 2-одометром (справа).

Специальный поток над одометром. Для изучения потока над 2-одометром мы будем для всякого $n \in \mathbb{N}$ отождествлять пространство $M = [0, 1) \times [0, 1)$ с прямоугольником $M_n = [0, \frac{1}{2^n}) \times [0, 2^n)$.

Квадрат M есть объединение кусков траекторий длины 1 для точек, принадлежащих нижней границе. Но M можно представить как M_n — объединение траекторий длины 2^n для точек из отрезка $[0, 2^{-n}) \times \{0\}$. На рис. 1 изображено это для $n = 2$. Введем координаты x_n, y_n на таком прямоугольнике M_n .

Рассмотрим функции $f \in L_1(M)$, удовлетворяющие следующим условиям:

- (1) $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$, где $f_n \in L_1(M_n)$ такие, что
- (2) $\int_0^{2^n} f_n(x_n, y_n) dy_n = 0$ для каждого $x_n \in [0, 2^{-n})$ и
- (3) $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, 1} < \infty$, где $\|f_n\|_{\infty, 1} = \sup_{x_n \in [0, 2^{-n})} \int_0^{2^n} |f_n(x_n, y_n)| dy_n$.

Теорема 2.1. Пусть функция f удовлетворяет условиям (1)–(3). Тогда средние $A(f, t, (x, y))$ для потока над 2-одометром равномерно сходятся к 0 при $t \rightarrow \infty$ с максимальной скоростью.

Доказательство. Нетрудно видеть, что условие (2) влечет за собой равенство нулю среднего значения функции f . Покажем, что для всех $t > 1$ и всех $(x, y) \in M$

$$|A(f, t, (x, y))| \leq \frac{2 \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\infty, 1}}{t}.$$

Действительно, пусть $2^{N-1} < t \leq 2^N$, тогда

$$\begin{aligned} |A(f, t, (x, y))| &\leq \left| A\left(\sum_{n=1}^N f_n, t, (x, y)\right) \right| + \left| A\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n, t, (x, y)\right) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^N |A(f_n, t, (x, y))| + \sum_{n=N+1}^{\infty} A(|f_n|, t, (x, y)). \end{aligned}$$

Для каждого слагаемого второй суммы сразу получаем оценку

$$\begin{aligned} A(|f_n|, t, (x, y)) &= \frac{1}{t} \int_0^t |f_n(T_s(x_n, y_n))| ds \\ &= \frac{1}{t} \int_0^{2^n - y_n} |f_n(x_n, s + y_n)| ds + \frac{1}{t} \int_0^{t + y_n - 2^n} |f_n(x'_n, s)| ds \\ &\leq \frac{1}{t} \int_0^{2^n} |f_n(x_n, s)| ds + \frac{1}{t} \int_0^{2^n} |f_n(x'_n, s)| ds \leq \frac{2\|f_n\|_{\infty, 1}}{t}. \end{aligned}$$

Здесь мы считали, что $t + y_n > 2^n$, в противном случае не возникнет множителя 2 в итоговой оценке.

Для слагаемых первой суммы воспользуемся условием (2):

$$tA(f_n, t, (x, y)) = \int_0^{2^n - y_n} f_n(x_n, y_n + s) ds + \underbrace{\int_0^{2^n} f_n(x_n^{(1)}, s) ds}_{=0} + \\ \dots + \underbrace{\int_0^{2^n} f_n(x_n^{(k)}, s) ds}_{=0} + \int_0^{t - k2^n - y_n} f_n(x_n^{(k+1)}, s) ds.$$

Здесь $k \in \mathbb{N}$ — наибольшее натуральное число, для которого $t - 2^n k - y_n \geq 0$. Отсюда уже получаем оценку для слагаемых первой суммы:

$$|A(f_n, t, (x, y))| \leq \frac{1}{t} \left| \int_0^{2^n - y_n} f_n(x_n, y_n + s) ds + \int_0^{t - k2^n - y_n} f_n(x_n^{(k+1)}, s) ds \right| \leq \frac{2\|f_n\|_{\infty,1}}{t}.$$

Если же $t < 2^n - y_n$, то будет получаться оценка без множителя 2. Суммируя неравенства для обеих сумм, приходим к требуемой оценке для временных средних. Теорема 2.1 доказана.

3. Медленная сходимость средних Биркгофа для потока над диадическим одометром

Отказ от условия (3) из изложенного выше примера позволяет получить сколь угодно медленную скорость сходимости временных средних. Покажем это.

Пусть задана быстро растущая последовательность p_n натуральных чисел. Обозначим $L_n = d_n 2^{p_n - 1}$, где $d_n \in (0, 1/2)$. Рассмотрим на $M_n = [0, 2^{-p_n}) \times [0, 2^{p_n})$ функцию f_n , которая на прямоугольнике $[0, 2^{-p_n}) \times [0, L_n)$ равна $a_n > 0$, на прямоугольнике $[0, 2^{-p_n}) \times [2^{p_n - 1}, 2^{p_n - 1} + L_n)$ равна $-a_n$, а в остальных точках M_n равна нулю. Нетрудно проверить, что для любого $x_n \in [0, 2^{-p_n})$

$$\int_0^{2^{p_n}} f_n(x_n, y_n) dy_n = 0, \quad \int_0^{2^{p_n}} |f_n(x_n, y_n)| dy_n = 2a_n L_n.$$

Чтобы для функции $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$ не выполнялось условие (3), накладываем условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n L_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n 2^{p_n - 1} = \infty.$$

При этом чтобы $f \in L_1(M)$, достаточно сходимости ряда из $L_1(M_n)$ -норм функций f_n , т. е. ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n$. Мы же потребуем более сильное условие

$$\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n d_n) \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Будем также считать, что

$$p_{n+1} \geq p_n + 2 \quad \text{и} \quad 2^{p_n - 2} < d_m 2^{p_m - 1} \quad \text{для всех } m > n.$$

Теорема 3.1. Пусть f — построенная выше функция и $t_n = 2^{p_n-2}$. Тогда последовательность средних $A(f, t_n, (x, y))$ для потока над 2-одометром равномерно сходится к 0 при $n \rightarrow \infty$ со скоростью $\mathcal{O}(a_n d_n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представляя

$$A(f, t_n, (x, y)) = A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y)\right) + A(f_n, t_n, (x, y)) + A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right),$$

замечаем, что для всех $(x, y) \in M$

$$A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y)\right) = 0.$$

Это следует из того, что промежуток интегрирования $[0, t_n)$ разбивается на конечное число промежутков длины 2^{p_m} для каждого $m = 1, \dots, n-1$. Это действительно будет так, поскольку 2^{p_n-2} делится на 2^{p_m} . А на интервале длины 2^{p_m} интеграл от f_m по переменной y_m равен нулю.

Теперь обратим внимание на распределение значений функции

$$A_n(x, y) = A(f_n, t_n, (x, y)).$$

На множестве меры $\frac{1}{2} - d_n$ функция $A_n(x, y)$ равна 0, на множестве меры $1/4 - d_n/2$ она равна $2a_n d_n$ (максимальное значение) и на множестве с такой же мерой $A_n(x, y)$ равна $-2a_n d_n$ (минимальное значение). Остальные промежуточные значения меняются линейным образом.

Покажем теперь, как оцениваются значения функции $A\left(\sum_{m=1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right)$.

Поскольку теперь длина промежутка интегрирования, равная 2^{p_n-2} , существенно меньше L_m при $m > n$, то наибольшее по модулю значение среднего $A(f_m, t_n, (x, y))$ будет a_m . Таким образом,

$$\left|A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right)\right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} A(|f_m|, t_n, (x, y)) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n d_n).$$

Собирая оценки вместе, получим для всех $(x, y) \in M$

$$A(f, t_n, (x, y)) = \mathcal{O}(a_n d_n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема 3.1 доказана.

Значения $A(f, t_n, (x, y))$ на множестве меры, близкой к $1/2$, по модулю близки к $2a_n d_n$. Для большинства остальных точек значения функции $A(f, t_n, (x, y))$ имеют порядок $o(a_n d_n)$. Таким образом, нельзя получить оценку вида $o(a_n d_n)$. При этом для заданных последовательностей a_n и d_n мы можем выбирать $t_n \rightarrow \infty$, растущую сколь угодно быстро. Тем самым получаем сколь угодно медленную сходимость средних Биркгофа, причем распределение значений этих средних таково, что на почти половине пространства функция принимает значения асимптотически бесконечно большие по сравнению со значениями, которые функция принимает на оставшейся части пространства.

4. Медленные сходимости средних Биркгофа в общем случае

Мы показали, как реализуется медленная сходимость средних для потока над 2-одометром. Аналогичный эффект можно получить в общем случае. Мы отчасти повторяем предыдущее построение, при выборе t_{n+1} и f_{n+1} применяем специальное прямоугольное представление потока Рудольфа и эргодическую теорему Биркгофа. Момент t_{n+1} выбирается таким, что средние $A(f_1 + \dots + f_n, t_{n+1}, x)$ для большинства x чрезвычайно малы по сравнению с a_{n+1} .

Для выбора f_{n+1} используется теорема о специальном прямоугольном представлении (см., например, [9, гл. 11, § 4]). По теореме Рудольфа для апериодического эргодического потока T_t на вероятностном пространстве (X, m) и любых положительных чисел p, q таких, что p/q иррационально, существует специальное представление потока с функцией, принимающей два значения: p и q . Таким образом, фазовое пространство потока можно разбить на два измеримых множества, которые мы отождествляем с прямоугольниками. Первое множество состоит из отрезков траекторий длины p , а второе — длины q .

Теорема 4.1. Пусть T_t — апериодический эргодический поток на вероятностном пространстве (X, m) и $\varphi(t) \rightarrow +0$. Тогда найдется функция $f \in L_1(X, m)$ с нулевым средним такая, что для п.в. $x \in X$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, x)| = +\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю. Функцию $f \in L_1(X, m)$ ищем в виде

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n),$$

где f_n строится следующим образом. В представлении Рудольфа выбираем параметры высот прямоугольников: $p = h_n$ и $q = h_n + \varepsilon_n$. При этом

$$h_n c_n + (h_n + \varepsilon_n) d_n = 1$$

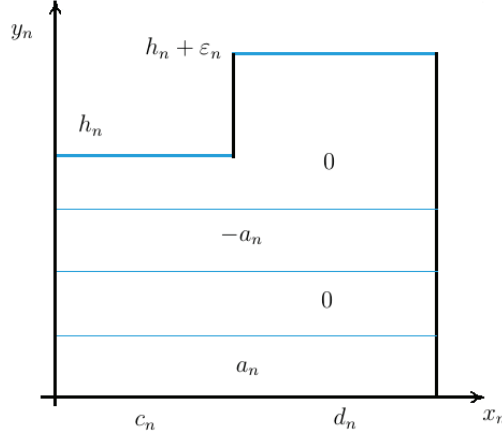
и $h_n \rightarrow +\infty$, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

Функция $f_n(x_n, y_n)$ будет зависеть только от высоты y_n . А именно, пусть $f_n = a_n$ при $0 \leq y_n < h_n/4$; $f_n = -a_n$ при $h_n/2 \leq y_n < 3h_n/4$, а на остальной части f_n равна 0 (рис. 2).

Всю эту «картинку» обратным изоморфизмом измеримо реализуем в исходном пространстве (X, m) (точке x соответствует пара (x_n, y_n)). Обозначение для функции оставляем таким же. Пусть $\delta_n \rightarrow +0$ и $t_n = h_n \delta_n$. Для управления эргодическими средними зададим асимптотические условия на все последовательности:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varepsilon_n d_n + 4\delta_n) < 1, \quad (I)$$

$$a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty \quad \text{и} \quad \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = \alpha_n a_n = o(a_n), \quad (II)$$


 Рис. 2. Представление Рудольфа с параметрами h_n и $h_n + \varepsilon_n$.

$$\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1}}{h_n a_n \delta_n} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \frac{a_n \alpha_n}{\varphi(t_n)} \rightarrow +\infty. \quad (III)$$

По условию (I) мы задаем последовательности ε_n и δ_n . Далее, по условию (II) определяем a_n и, самое важное для управления эргодическими средними, задаем рост h_n условиями (III).

Как и ранее, представим $A(f, t_n, x)$ в виде суммы трех слагаемых:

$$A(f, t_n, x) = A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, x\right) + A(f_n, t_n, x) + A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, x\right).$$

Для третьего слагаемого из условия (II) для всех $x \in X$ имеем

$$\left| A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, x\right) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n).$$

Для первого слагаемого из первой части условия (III) ввиду зануления интеграла на целых отрезках траекторий для всех $x \in X$ имеем

$$A\left(\sum_{m=1}^{n-1} |f_m|, t_n, x\right) \leq \frac{2}{t_n} \sum_{m=1}^{n-1} a_m h_m \leq 2a \frac{h_1 + h_2 + \dots + h_{n-1}}{h_n \delta_n} = o(a_n).$$

Для второго слагаемого нетрудно посчитать, что оно принимает значение a_n на множестве меры $(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n)$, на другом множестве такой же меры — значение $-a_n$, и на множестве меры не меньше $2(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n)$ принимает нулевое значение. Остальные значения по модулю не превосходят a_n .

Таким образом, $A(f, t_n, x) = \mathcal{O}(a_n)$ для всех $x \in X$. При этом на некотором множестве $\mathcal{D}_n$ меры

$$m(\mathcal{D}_n) = 2(c_n + d_n)h_n(1/4 - \delta_n) = 2(1/4 - \delta_n)(1 - \varepsilon_n d_n) > 1/2 - 2\delta_n - \frac{\varepsilon_n d_n}{2}$$

имеем

$$|A(f, t_n, x)| = a_n + o(a_n).$$

Пусть $\mathcal{D} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_n = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{D}_n$, тогда

$$m(\mathcal{D}) = \lim_{N \rightarrow \infty} m\left(\bigcup_{n=N}^{\infty} \mathcal{D}_n\right) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} m(\mathcal{D}_N) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} 1/2 - 2\delta_N - \frac{\varepsilon_N d_N}{2} \geq 1/2.$$

Для каждого $x \in \mathcal{D}$ найдется бесконечный набор номеров $n \geq 1$, для которых будет

$$|A(f, t_n, x)| = a_n(1 + o(1)).$$

Таким образом, для таких x из второго соотношения в (III) получим

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|A(f, t_n, x)|}{\varphi(t_n)} = +\infty,$$

т.е. для $x \in \mathcal{D}$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, x)| = +\infty.$$

Для п.в. $x \in X \setminus \mathcal{D}$ будет выполняться такое же соотношение ввиду закона нуля или единицы для скорости сходимости [10].

5. О медленной сходимости временных средних для обмотки тора и непрерывной функции

Покажем, что усреднение непрерывной функции вдоль траекторий гладкого потока можно совместить с эффектом медленной сходимости средних. Для этого подходящим образом будем сглаживать функции f_n , рассмотренные выше. Пусть $T_t(x, y) = (\{x + t\}, \{y + ct\})$, $(x, y) \in M$, — эргодическая обмотка тора вдоль вектора $(1, c)$, где c — иррациональное число, которое приближается рациональными дробями p_n/q_n так, что

$$0 < c - \frac{p_n}{q_n} = \beta_n \frac{1}{q_n^2} = o\left(\frac{1}{q_n^2}\right).$$

Множество иррациональных чисел, не удовлетворяющих этому условию, имеет нулевую меру. В частности, квадратичные иррациональности ему не удовлетворяют. Рассматривая обмотку тора вдоль вектора $(1, p_n/q_n)$, отождествим тор M с узким параллелограммом M_n со стороной длины $\sqrt{p_n^2 + q_n^2}$, параллельной этому вектору, и стороной длины $1/q_n$, параллельной оси OY . Внутри этого параллелограмма рассмотрим параллелограмм R_n , направленный вдоль потока T_t .

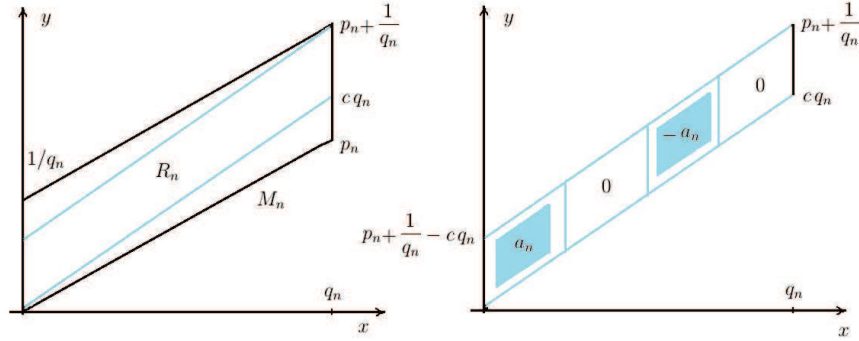
Нетрудно видеть, что площадь параллелограмма R_n равна

$$1 - q_n^2 \left(c - \frac{p_n}{q_n} \right) = 1 - \beta_n.$$

На M_n выберем координаты $y_n \in [0, 1/q_n]$ вдоль оси OY и $x_n \in [0, q_n\sqrt{1+c^2}]$ вдоль вектора $(1, c)$. Построим гладкую функцию $f_n(x_n, y_n)$, которая по модулю не превосходит $a_n > 0$, с условием $\sum_n a_n < \infty$. А именно, разделим R_n на четыре равные по площади части. На первой четверти f_n равна a_n на множестве, отделенном от границы и площади близкой к $1/4$. На оставшейся части этой четверти f_n гладко убывает до нуля на границе. На втором и четвертом параллелограммах f_n равна 0. На третьей четверти значения антисимметричны значениям на первой четверти (рис. 3).

Вне параллелограмма R_n и на его границе пусть f_n равна 0. Также считаем, что

$$\int_0^{q_n\sqrt{1+c^2}} f_n(x_n, y_n) dx_n = 0$$


 Рис. 3. Параллелограмм R_n и определение функции f_n на нем.

для каждого $y_n \in [0, 1/q_n]$. В терминах потока T_t это означает, что

$$\int_0^{q_n} f_n(T_t(0, y)) dt = 0$$

для каждого $y \in [0, 1/q_n]$.

В результате получим непрерывную функцию $f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n, y_n)$.

Пусть $\varphi(t) \rightarrow +0$ при $t \rightarrow +\infty$. Положим $t_n = \delta_n q_n$, а также пусть выполняются условия (II) и (III), где вместо h_n берем q_n .

Теорема 5.1. Пусть f — построенная выше функция. Тогда эргодические средние $A(f, t, (x, y))$ для обмотки тора вдоль вектора $(1, c)$ удовлетворяют для п.в. $(x, y) \in M$ соотношению

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(t)} |A(f, t, (x, y))| = +\infty.$$

Доказательство. Временное среднее представим в виде

$$A(f, t_n, (x, y)) = A\left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y)\right) + A(f_n, t_n, (x, y)) + A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right).$$

Для всех $(x, y) \in M$ имеем очевидную оценку для третьего слагаемого

$$\left| A\left(\sum_{m=n+1}^{\infty} f_m, t_n, (x, y)\right) \right| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} A(|f_m|, t_n, (x, y)) \leq \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m = o(a_n).$$

Чтобы оценить первое слагаемое в указанной выше сумме, воспользуемся занулением интегралов вдоль траектории потока. На большей части отрезков траекторий, вдоль которых берется интеграл, вклад в интеграл нулевой в силу

выбора функций f_m . Нам нужно оценить только значения интегралов вдоль начальной и конечной частей отрезков траектории. А именно, для каждого $m = 1, \dots, n-1$ и всех $(x, y) \in M$

$$\begin{aligned} \sqrt{1+c^2} t_n A(f_m, t_n, (x, y)) &= \int_0^{q_m \sqrt{1+c^2} - x_m} f_m(x_m + s, y_m) ds \\ &+ \underbrace{\int_0^{q_m \sqrt{1+c^2}} f_m(s, y_m^{(1)}) ds}_{=0} + \dots + \underbrace{\int_0^{q_m \sqrt{1+c^2}} f_m(s, y_m^{(k-1)}) ds}_{=0} + \int_0^{x_m} f_m(s, y_m^{(k)}) ds. \end{aligned}$$

Отсюда уже получаем

$$\left| A \left(\sum_{m=1}^{n-1} f_m, t_n, (x, y) \right) \right| \leq \sum_{m=1}^{n-1} \frac{2a_m q_m}{t_n} = \mathcal{O} \left(\frac{q_1 + \dots + q_{n-1}}{\delta_n q_n} \right) = o(a_n).$$

Второе слагаемое ведет себя так же, как и в теореме 4.1 для общего случая. А именно, на некотором множестве $\mathcal{D}_n$ меры не меньшей $1/2 - \theta_n$, для средних справедливо асимптотическое равенство $|A(f, t_n, (x, y))| = a_n + o(a_n)$. Здесь θ_n — сходящаяся к нулю последовательность, зависящая и от β_n, δ_n и от порядка приближения к $1/4$ мер множеств, на которых рассматриваемая функция f_n принимает значения a_n и $-a_n$.

Повторяя с множествами $\mathcal{D}_n$ рассуждения из доказательства теоремы 4.1, получим требуемое.

6. Заключительные замечания

С тематикой скоростей сходимости эргодических средних сопряжено большое количество нерешенных задач.

Сходимость средних и гладкость усредняемой функции. Построенная в теореме 5.1 функция является лишь непрерывной. Интересен вопрос о существовании гладких функций со сколь угодно медленной скоростью сходимости средних. Как показал Ковада [11] (см. также [12]), начиная с некоторого показателя гладкости, зависящего от скорости аппроксимации иррационального числа c , скорость сходимости эргодических средних для обмотки тора будет максимальной $\mathcal{O}(1/t)$.

Возможные распределения средних Биркгофа. Мы показали, как выбор подходящей усредняемой функции реализует диапазон скоростей сходимости от максимальной до сколь угодно медленной. Эффекты замедления скоростей сходимости средних можно обнаруживать для широкого класса групповых действий (см. [4]). Интерес представляет не только оценка скоростей сходимости, но и более общая задача о возможных распределениях значений средних Биркгофа. Благодаря выбору усредняемой функции этими распределениями можно управлять. Можно поставить задачу о том, чтобы распределение значений функции $A(f, t_n, x)$ для эргодического потока было сколь угодно близко к распределению значений, например, функции $c_n s^2, s \in [0, 1]$, относительно меры Лебега на $[0, 1]$. Если числа c_n достаточно быстро стремятся к $+\infty$, задача решается методом, похожим на изложенный выше, при подходящем выборе функций f_m .

Поиск оптимальных весовых распределений. Как уже отмечалось, при рассмотрении весовых усреднений возможно увеличение диапазона быстрых скоростей сходимости средних (см. [5], а также ссылки в этой работе). В связи с этим возникает ряд новых задач. Сформулируем следующие частные случаи.

Пусть f — функция с нулевым средним заданной гладкости $k \geq 1$. Для эргодического сдвига T на торе рассмотрим всевозможные выпуклые суммы вида

$$A_w(f, N, x) = \sum_{n=1}^N w_{n,N} f(T^n x),$$

где $w = (w_{1,N}, \dots, w_{N,N})$ — вероятностный вектор.

При каких вероятностных распределениях коэффициентов $w_{n,N}$ при заданном достаточно большом N нормы $\|A_w\|$ (в пространствах L_1 или L_2 , или L_∞) будут минимальны?

Аналогичный вопрос ставится для непрерывного времени и обмоток тора. Для средних

$$A_w(f, t, x) = \int_0^t w(s, t) f(T_s x) ds,$$

где $w \geq 0$ и $\int_0^t w(s, t) ds = 1$ для каждого $t > 0$, ищем $\inf_w \|A_w\|$.

Даже в случае вращения окружности такие задачи представляются нетривиальными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Krengel U. On the speed of convergence in the ergodic theorem // Monatsh. Math. 1978. V. 86, N 1. P. 3–6.
2. Рыжиков В. В. Медленные сходимости эргодических средних // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 742–746.
3. Alpern S. Return times and conjugates of an antiperiodic transformation // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1981. V. 1, N 2. P. 135–143.
4. Рыжиков В. В. Медленная сходимость взвешенных средних для потоков и действий счетных аменабельных групп // Успехи мат. наук. 2025. Т. 80, № 5. С. 179–180.
5. Tong Z., Li Y. Quantitative uniform exponential acceleration of averages along decaying waves // Изв. РАН. Сер. мат. 2025. V. 89, N 6. P. 131–161.
6. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А. Максимальная поточечная скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2020. Т. 498. С. 18–25.
7. Кочергин А. В. О росте сумм Биркгофа над поворотом окружности // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 836–848.
8. Кочергин А. В. О возвращаемости значений сумм Биркгофа для поворота окружности и гёльдеровой функции // Теория вероятностей и ее применения. 2025. Т. 70, № 4. С. 715–725.
9. Корифельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
10. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А. Закон нуля или единицы в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // Мат. тр. 2021. Т. 24, № 2. С. 65–80.
11. Kowada M. Convergence rate in the ergodic theorem for an analytic flow on the torus // Proceedings of the Second Japan-USSR Symposium on Probability Theory (Maruyama, G., Prokhorov, Y.V. (eds)). Berlin; Heidelberg: Springer, 1973. P. 251–254. (Lecture Notes Math.; V. 330).

12. Ladouceur S., Weber M. Note a propos d'un resultat de Kowada sur les flots analytiques // Seminaire de probabilites. 1992. V. 26. P. 608–618.

Поступила в редакцию 24 января 2024 г.

После доработки 25 февраля 2025 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Подвигин Иван Викторович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

`ipodvigin@math.nsc.ru`

Рыжиков Валерий Валентинович

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

механико-математический факультет,

Ленинские горы, 1, Москва 119991

`vryzh@mail.ru`

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЕСТЕРВЕЛЬТА

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение Вестервельта. В этом уравнении опускается член, описывающий диффузию звука. Тогда уравнение Вестервельта становится квазилинейным гиперболическим уравнением. Далее это уравнение линеаризуется и для него ставится и изучается обратная задача об определении коэффициента при нелинейности, зависящего от пространственных переменных. Выписывается структура решения задачи Коши в окрестности фронта волны. На этой основе обратная задача сводится к задаче интегральной геометрии на семействе прямых линий с заданной весовой функцией. Весовая функция, так же как и семейство прямых, инвариантна относительно всевозможных вращений вокруг фиксированной точки. Это свойство позволяет установить теорему единственности решения обратной задачи и предложить удобный и эффективный метод построения ее решения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.411

Ключевые слова: уравнение Вестервельта, линеаризация, обратная задача, единственность, метод решения.

§ 1. Постановка задачи

Нелинейное распространение слабо нелинейных акустических волн описывается уравнением Вестервельта (см. [1–5]):

$$p_{tt} - \Delta p - b\Delta p_t = q(\mathbf{x})(p^2)_{tt} + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (1)$$

в котором $p(\mathbf{x}, t)$ — давление, b и T — постоянные положительные числа, $q(\mathbf{x})$ — гладкая финитная функция, носитель которой расположен в шаре $B_{R_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R_0\}$, $f(\mathbf{x}, t)$ — внешняя сила. В этом уравнении члены $b\Delta p_t$ и $q(\mathbf{x})(p^2)_{tt}$ описывают эффекты второго порядка малости (с учетом того, что само давление $p(\mathbf{x}, t)$ предполагается малым). Уравнение Вестервельта находит большие приложения в диагностической медицине (см., например, [5–8]). Основная задача диагностики здесь — отыскание функции $q(\mathbf{x})$ по некоторой известной информации о решениях уравнения (1).

Пренебрегая в уравнении (1) членом $b\Delta p_t$, описывающим диффузию звука, получаем нелинейное уравнение гиперболического типа

$$p_{tt} - \Delta p = q(\mathbf{x})(p^2)_{tt} + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (2)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0029).

которое в дальнейшем и будем рассматривать. Используя предположение о малости коэффициента $q(\mathbf{x})$, линеаризуем уравнение (2). Для этого представим функцию $p(\mathbf{x}, t)$ в виде

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t),$$

в котором функция $u(\mathbf{x}, t)$ мала по сравнению с $p_0(\mathbf{x}, t)$. Тогда для функций $p_0(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t)$ получим уравнения

$$(p_0)_{tt} - \Delta p_0 = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (3)$$

$$u_{tt} - \Delta u = q(\mathbf{x})(p_0^2)_{tt}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)). \quad (4)$$

Поставим задачи Коши для уравнений (3) и (4). Пусть $p_0(\mathbf{x}, t)$ является решением задачи Коши

$$(p_0)_{tt} - \Delta p_0 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})r(t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad p_0|_{t=0} = 0, \quad (p_0)_t|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

в которой $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — дельта-функция Дирака, локализованная в точке $\mathbf{y} \in S_R$, $S_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$, $R > R_0$, $r(t)$ — гладкая функция для всех $t \geq 0$ и такая, что $r(0) = 0$, $r'(0) = 1$.

Решение задачи (5) дается формулой

$$p_0(\mathbf{x}, t) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{r(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $H(t) = 0$, если $t < 0$. Тогда задача Коши для функции $u(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = q(\mathbf{x})(p_0^2)_{tt}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)); \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (6) зависит от параметра $\mathbf{y} \in S_R$. Обозначим его через $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Постановка обратной задачи. Пусть $T > 2R$. Найти $q(\mathbf{x})$ в области B_{R_0} , если задана функция

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R), \quad (7)$$

где $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ — решение задачи (6).

Исследованию обратных задач для уравнений нелинейной акустики посвящены публикации [6–11] и ряд других. В них выполнен анализ возможности определения параметра нелинейности $q(\mathbf{x})$, который связан с определенными физическими величинами, представляющими непосредственный интерес в диагностической медицине. В основном эти публикации связаны с исследованием поведения пучка волн определенной частоты и извлечением соотношений, на основе которых определяется желаемый параметр. В настоящей работе предлагается другой подход к исследованию обратной задачи, основанный на вычислении амплитудных характеристик бегущей акустической волны на ее фронте для волн, проходящих через неоднородность среды. Это позволяет свести исходную обратную задачу к задаче, очень близкой в качественном отношении к задаче рентгеновской томографии. Отличие ее от обычной задачи томографии состоит в появлении в заданных интегралах известного весового множителя. В работе выполнено исследование этой задачи, в результате которого установлена теорема единственности решения обратной задачи и предложен эффективный алгоритм ее решения.

§ 2. Структура решения задачи (6)

Теорема 1. Пусть

$$q \in C(\mathbb{R}^3), \quad q(\mathbf{x}) = 0 \text{ для } |\mathbf{x}| \geq R_0, \quad r \in C^\infty[0, T], \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1. \quad (8)$$

Тогда решение задачи (6) в окрестности фронта $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ сферической волны представимо в виде

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)[\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})], \quad (9)$$

в котором $v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ непрерывная функция, бесконечно малая более высокого порядка, чем $(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, при $(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rightarrow 0$, а функция $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вычисляется по формуле

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(4\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{|\xi - \mathbf{y}|}, \quad (10)$$

в которой $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — отрезок прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, s — длина отрезка $[\mathbf{y}, \xi]$, ds — ее элемент, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий (8) функцию $(p_0^2)_{tt}$ можно представить в виде

$$(p_0^2)_{tt} = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)A(\mathbf{x}, \mathbf{y})[1 + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)B(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})], \quad (11)$$

в котором $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вычисляется по формуле

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{(4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}, \quad (12)$$

а $B(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ является бесконечно дифференцируемой функцией всех аргументов. Решение задачи (6) с учетом формулы (11) дается формулой Кирхгофа

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} \times \int_{|\xi - \mathbf{x}| \leq t - |\xi - \mathbf{y}|} \frac{q(\xi)A(\xi, \mathbf{y})[1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\xi - \mathbf{x}| - |\xi - \mathbf{y}|)]}{|\xi - \mathbf{x}|} d\xi. \quad (13)$$

В этой формуле интеграл берется по области

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| \leq t\},$$

ограниченной поверхностью эллипсоида вращения

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| = t\}$$

с фокусами в точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Заметим, что при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$ эллипсоид $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ вырождается в отрезок $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Преобразуем интеграл в формуле (13), введя криволинейные координаты точки ξ . С этой целью введем, следуя [12], семейство софокусных эллипсоидов формулой

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| = \tau\},$$

где $\tau \in [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, t]$. Параметр τ примем в качестве одной из криволинейных координат.

Введем также декартову систему координат $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ с центром в точке $\mathbf{y}$ и связанную с ней сферическую систему координат r, θ, φ . Положим

$$\xi = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi'_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi'_3 = r \cos \theta, \quad (14)$$

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Единичные орты $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, выберем так, чтобы орт $\mathbf{e}_3$ совпал с единичным вектором

$$\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

а орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ примем ортогональными друг другу и орту $\mathbf{e}_3$. При этом ϑ и ϕ являются функциями $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Более точно, выберем $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Тогда из формулы (14) следует, что

$$|\xi - \mathbf{y}| = r, \quad |\xi - \mathbf{x}| = (|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2r|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta + r^2)^{1/2}, \quad (15)$$

и уравнение, определяющее эллипсоид $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)$, имеет вид

$$r = \frac{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2(\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta)}.$$

В качестве второй криволинейной координаты примем угол φ , а в качестве третьей — цилиндрическую координату

$$z = \xi'_3 = r \cos \theta = \frac{(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2) \cos \theta}{2(\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta)}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Выразим $\cos \theta$ и $\sin \theta$ через z, τ . Используя предыдущую формулу, находим, что

$$\cos \theta(z, \tau) = \frac{2z\tau}{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (16)$$

$$\sin \theta(z, \tau) = \frac{[(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2 - 4z^2\tau^2]^{1/2}}{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (17)$$

Формула (17) позволяет найти уравнение эллипсоида в координатах z, τ :

$$r = r(z, \tau) = \frac{z}{\cos \theta(z, \tau)} = \frac{1}{2\tau}(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (18)$$

Из формулы (16) следует, что

$$z \in [z_1(\tau), z_2(\tau)], \quad z_1(\tau) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \tau}{2}, \quad z_2(\tau) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \tau}{2}.$$

При этом

$$r \in [r_1(\tau), r_2(\tau)], \quad r_1(\tau) = \frac{\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2}, \quad r_2(\tau) = \frac{\tau + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2}.$$

Из формул (17) и (18) следует также равенство

$$r(z, \tau) \sin \theta = \frac{1}{2\tau} [(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2 - 4z^2\tau^2]^{1/2} =: h(z, \tau). \quad (19)$$

В результате этих вычислений формула (14) преобразуется к виду

$$\xi = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = h(z, \tau) \cos \varphi, \quad \xi'_2 = h(z, \tau) \sin \varphi, \quad \xi'_3 = z, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (20)$$

В криволинейных координатах z, φ, τ имеем

$$d\xi = h(z, \tau) \frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau dz d\varphi.$$

Вычисляя $\frac{1}{2} \frac{\partial h^2(z, \tau)}{\partial \tau}$, находим, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{4\tau^3} (\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(\tau^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

Из формул (15) и (18) находим, что

$$|\xi - \mathbf{x}| = \frac{\tau^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\tau}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi}{|\xi - \mathbf{x}|} = \frac{1}{2\tau^2} (\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\tau dz d\varphi = \frac{r(z, \tau)}{\tau} d\tau dz d\varphi. \quad (21)$$

Учитывая формулу (21), запишем уравнение (13) в виде

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} \times \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}^t \int_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)} \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - \tau)] \frac{r(z, \tau)}{\tau} d\varphi dz d\tau, \quad (22)$$

в котором переменная ξ определена формулами (19) и (20). Заменяем в интеграле переменные z и τ на новые переменные ζ и τ' :

$$z = z_1(\tau) + (z_2(\tau) - z_1(\tau))\zeta = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \tau}{2} + \tau\zeta, \quad \tau = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'.$$

При такой замене

$$\frac{dz d\tau}{\tau} = (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\zeta d\tau'.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \widehat{z}(\zeta, \tau', t) &= -\frac{\tau'(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{2} + \zeta (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \widehat{h}(\zeta, \tau', t) &= h(\widehat{z}(\zeta, \tau', t), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \widehat{r}(\zeta, \tau', t) &= r(\widehat{z}(\zeta, \tau', t), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \xi &= \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\xi'_1 = \widehat{h}(\zeta, \tau', t) \cos \varphi, \quad \xi'_2 = \widehat{h}(\zeta, \tau', t) \sin \varphi, \quad \xi'_3 = \widehat{z}(\zeta, \tau', t), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Уравнение (22) при указанной выше замене переменных интегрирования и введенных обозначениях принимает вид

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(1 - \tau')] \hat{r}(\zeta, \tau', t) d\varphi d\zeta d\tau'. \quad (24)$$

Так как согласно условию (8) теоремы 1 носитель функции $q(\mathbf{x})$ содержится внутри шара B_{R_0} , то

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \text{ если } D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \cap B_{R_0} = \emptyset.$$

Отсюда следует также, что

$$u|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0} = 0, \text{ если } L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap B_{R_0} = \emptyset.$$

Нас интересует поведение функции $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ в окрестности фронта волны, т. е. при t , близких к $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$, и при условии $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap B_{R_0} \neq \emptyset$. В этом случае $|\xi - \mathbf{y}| > R - R_0$. Поэтому подынтегральное выражение в формуле (24) представляет собой непрерывную функцию всех переменных при t , близких к $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$, и интеграл определяет непрерывную функцию переменных $\mathbf{x}, t, \mathbf{y}$ в окрестности фронта. Кроме того, согласно обозначениям (23) при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$ имеют место соотношения

$$\hat{z}(\zeta, \tau', t) \rightarrow \zeta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \hat{h}(\zeta, \tau', t) \rightarrow 0, \quad \hat{r}(\zeta, \tau', t) \rightarrow \zeta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \xi \rightarrow \mathbf{y} + \zeta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Учитывая эти соотношения и формулу (12), находим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(1 - \tau')] \hat{r}(\zeta, \tau', t) d\varphi d\zeta d\tau' \\ & \rightarrow 2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \int_0^1 q(\xi) A(\xi, \mathbf{y})|_{\xi = \mathbf{y} + \zeta(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \zeta d\zeta \\ & = \frac{2\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y})|_{\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s ds = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{s}, \quad (25) \end{aligned}$$

где s и ds — длина отрезка $[\mathbf{y}, \xi]$ и ее элемент соответственно, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — единичный вектор $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Из формул (24) и (25) следует представление (9), в котором $v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = o(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, а $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определена формулой (10). Кроме того, из формулы (9) вытекает равенство

$$u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{u(\mathbf{x}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \tau, \mathbf{y})}{\tau} = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \square \quad (26)$$

§ 3. Анализ обратной задачи

Из формул (7) и (26) следует равенство

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R). \quad (27)$$

Воспользуемся формулой (10). Тогда из равенства (27) следует, что задача о восстановлении функции $q(\mathbf{x})$ в области B_{R_0} приводит к задаче интегральной геометрии

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{|\xi - \mathbf{y}|} = (4\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R), \quad (28)$$

об отыскании $q(\mathbf{x})$ по заданным формулой (28) интегралам от этой функции. Если бы в формуле (28) отсутствовал множитель $1/|\xi - \mathbf{y}|$, то эта задача совпадала бы с обычной задачей рентгеновской томографии. В данном случае она отличается от задачи томографии за счет этого множителя. Тем не менее решение задачи единственно и для нее существуют удобные для численного решения алгоритмы. В основе этих фактов лежит инвариантность семейства $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и весовой функции $1/|\xi - \mathbf{y}|$ к всевозможным вращениям вокруг начала координат. Кроме того, задача распадается на серию задач о реконструкции функции $q(\mathbf{x})$ в произвольных сечениях шара B_R плоскостями, проходящими через центр шара. Таким образом, построение функции $q(\mathbf{x})$ сводится к однопараметрической серии плоских задач. Теорема единственности и алгоритм построения функции через интегралы от нее по семейству кривых линий с известной весовой функцией, которые обладают свойством инвариантности к всевозможным вращениям вокруг фиксированной точки, были получены ранее в работе [13]. Для удобства читателя кратко изложим основные идеи, на которых основан этот результат.

Задачи решения уравнения (28) для любого сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара, идентичны друг другу. Для определенности рассмотрим такую задачу на плоскости x_1, x_2 . Введем полярные координаты r, φ и выпишем уравнение (28) для функции $\hat{q}(r, \varphi) = q(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$. Обозначим через $C_R = S_R \cap \{x_3 = 0\}$ окружность радиуса R и поставим в соответствие сегменту $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in C_R$, $\mathbf{y} \in C_R$, полярные координаты (ρ, θ) средней точки $((x_1 + y_1)/2, (x_2 + y_2)/2, 0)$ на $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Очевидно, что эта точка является на $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ближайшей к центру окружности C_R . В дальнейшем будем рассматривать только $(\rho, \theta) \in D_{R_0}$, $D_{R_0} = [0, R_0] \times [0, 2\pi)$, так как только в этом случае интегралы от функции $\hat{q}(r, \varphi)$ не равны нулю. Уравнение сегмента $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с координатами (ρ, θ) удобно записать в виде

$$\varphi = \theta + (-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right), \quad j = 1, 2, \quad r \in [\rho, R], \quad (29)$$

в котором ветвь $j = 1$ соответствует части сегмента $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, соединяющего на плоскости $x_3 = 0$ точки (ρ, θ) и (x_1, x_2) , а ветвь $j = 2$ соответствует отрезку прямой, соединяющему точки (y_1, y_2) и (ρ, θ) . При этом

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi_1(\rho, \theta), \quad x_2 = R \sin \varphi_1(\rho, \theta), \quad \varphi_1(\rho, \theta) = \theta - \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \\ y_1 &= R \cos \varphi_2(\rho, \theta), \quad y_2 = R \sin \varphi_2(\rho, \theta), \quad \varphi_2(\rho, \theta) = \theta + \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \\ s &= |\xi - \mathbf{y}| = \sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}, \quad j = 1, 2, \\ \frac{ds}{s} &= \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}(\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2})}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь ds — элемент длины. Обозначим

$$\hat{F}(\rho, \theta) = F_1(R(\cos \varphi_1(\rho, \theta), \sin \varphi_1(\rho, \theta), 0), R(\cos \varphi_2(\rho, \theta), \sin \varphi_2(\rho, \theta), 0)).$$

Уравнение для функции $\hat{q}(r, \varphi)$ в принятых выше обозначениях имеет вид

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\rho}^{R_0} \hat{q}\left(r, \theta + (-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}(\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2})} = \hat{F}(\rho, \theta), \quad (30)$$

$$\rho \in [0, R_0], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Сопоставим функции $\hat{q}(r, \varphi)$ ее ряд Фурье

$$\hat{q}(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(r) e^{ik\varphi}, \quad q_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{q}(r, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Умножая уравнение (30) на $e^{-in\theta}$ и интегрируя его по переменной θ в пределах от 0 до 2π , приходим к уравнению

$$\int_{\rho}^{R_0} q_n(r) \frac{T_n(r, \rho) r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = F_n(\rho), \quad \rho \in [0, R_0], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (31)$$

в котором

$$T_n(r, \rho) = \sum_{j=1}^2 \frac{\exp\left(in(-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)}{\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad F_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{F}(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

При каждом фиксированном n уравнение (31) является уравнением типа Абеля. При этом $T_n(r, \rho)$ является ограниченной и бесконечно дифференцируемой функцией по обоим аргументам в области $\{(r, \rho) \mid \varepsilon \leq \rho \leq r \leq R_0\}$, где ε — произвольно малое положительное число. Кроме того,

$$T_n(\rho, \rho) = \frac{2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \neq 0.$$

Хорошо известно, что эти свойства функции $T_n(r, \rho)$ позволяют свести уравнение (31) к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. Для этого надо применить к обоим частям уравнения (31) оператор дифференцирования половинного порядка. В данном случае удобно использовать оператор

$$\frac{d}{ds} \int_s^{R_0} \frac{(\cdot) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - s^2}}.$$

Его применение приводит (31) при каждом n к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром при $\varepsilon \leq s \leq r \leq R_0$. Отсюда следует единственность решения задачи об отыскании любого коэффициента Фурье $q_n(r)$, а значит, и функции $\hat{q}(r, \varphi)$ для всех $r \in [\varepsilon, R_0]$, а в силу произвольности ε и непрерывности $q_n(r)$ и для $r \in [0, R_0]$. Для уравнения Вольтерра второго рода с непрерывным ядром факториально быстро сходится метод последовательных приближений. Поэтому его можно успешно использовать для определения коэффициента Фурье $q_n(r)$. Однако для суммирования ряда Фурье надо использовать методы регуляризации, развитые в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и других авторов.

Резюмируя выполненный анализ обратной задачи, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Обратная задача имеет не более одного решения. Эта задача сводится к решению уравнения (28), которое, в свою очередь, приводит к решению однопараметрической серии плоских задач в сечениях шара B_R плоскостями, проходящими через его центр. Типичной задачей здесь является задача решения уравнения (30). Последнее уравнение сводится к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром для коэффициентов Фурье $q_n(r)$ функции $\hat{q}(r, \varphi)$. Далее для суммирования ряда Фурье надо использовать методы регуляризации.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поставленная обратная задача является переопределенной, так как для определения функции трех пространственных переменных $q(\mathbf{x})$ используется функция четырех переменных $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S_R \times S_R$. Однако эту переопределенность легко снять. Для этого достаточно рассмотреть однопараметрическое семейство плоскостей $\Sigma(\psi) = \{\xi \mid \xi \cdot \nu(\psi) = 0\}$, $\nu(\psi) = (0, \cos \psi, \sin \psi)$, $\psi \in [0, \pi)$, и задать функцию $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ только для $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \cap \Sigma(\psi)) \times (S_R \cap \Sigma(\psi))$ при $\psi \in [0, \pi)$. При этом размерность данных обратной задачи снижается и совпадает с размерностью искомой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Westervelt P. J. Parametric acoustic array // J. Acoustical Soc. Am. 1963. V. 35. P. 535–537.
2. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 1. С. 40–47.
3. Crighton D. G. Model equations of nonlinear acoustics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 11–33.
4. Hamilton M. F., Blackstock D. T. Nonlinear acoustics. New York: Acad. Press, 1998.
5. Kaltenbacher B. Mathematics of nonlinear acoustics // Evol. Equ. Control Theory. 2015. V. 4. P. 447–491.
6. Ichida N., Sato T., Linzer M. Imaging the nonlinear ultrasonic parameter of a medium // Ultrasonic Imaging. 1983. V. 5. P. 295–299.
7. Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А. Обратные задачи рассеяния в акустике // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 4. С. 433–449.
8. Буров В. А., Гуринович И. Е., Руденко О. В., Тагунов Е. Я. Реконструкция пространственного распределения параметра нелинейности и скорости звука в акустической томографии // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 6. С. 922–929.
9. Hettlich F., Rundell W. A second degree method for nonlinear inverse problems // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 37. P. 587–620.
10. Zhang D., Chen X., Gong X.-F. Acoustic nonlinearity parameter tomography for biological tissues via parametric array from a circular piston source. Theoretical analysis and computer simulations // J. Acoustical Soc. Amer. 2001. V. 109. P. 1219–1225.
11. Kaltenbacher B., Rundell W. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements // Inverse Problems and Imaging. 2021. V. 15, N 5. P. 865–891.
12. Романов В. Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения с нелинейным интегральным оператором // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 245–265.
13. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 30 апреля 2026 г.

После доработки 31 мая 2026 г.

Принята к публикации 31 мая 2026 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru

УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ
И УНИТАРНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ
ЛЕБЕГА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ
ФУНКЦИЯМИ ЛЕЖАНДРА В ЯДРАХ
С. М. Ситник, О. В. Скоромник

Аннотация. Рассматривается класс интегральных операторов со специальными функциями Лежандра в ядрах. Основное содержание составляет обзор результатов по условиям ограниченности и унитарности таких операторов в классических пространствах Лебега. К указанному классу относятся, например, одномерные операторы Бушмана — Эрдейи, многомерные операторы аналогичной структуры, в том числе с интегрированием по специальным пирамидам. Используется техника преобразований Меллина с применением гипергеометрических функций Фокса и формулы обращения для указанного класса интегральных операторов. Во второй части статьи на основе результатов по унитарности операторов Бушмана — Эрдейи для специальных значений параметров рассматриваются обобщения известного свойства операторов Харди, строятся новые дополнительные примеры для этой задачи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.412

Ключевые слова: интегральные операторы, функции Лежандра, условия ограниченности, условия унитарности, пространства Лебега, операторы Бушмана — Эрдейи, преобразование Меллина, операторы Харди.

*Посвящается замечательному математику и человеку
Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием*

1. Интегральные преобразования
с функциями Лежандра первого рода

1.1. Введение. Рассматриваются многомерные интегральные преобразования:

$$(P_{\delta,1}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (1)$$

$$(P_{\delta,2}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (2)$$

$$(P_{\delta,3}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (3)$$

$$(P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (4)$$

$$(H_{\sigma,\kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (5)$$

$$(Hf)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (6)$$

здесь (см., например, [1–6]) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторы, $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ — скалярное произведение; в частности, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Выражение $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$, и аналогично для знаков $\geq, <, \leq, =$;

$$\int_0^{\mathbf{x}} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n};$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$); $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{C}^n$; $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{C}^n$; $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{C}^n$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$; $0 < \gamma < 1$; $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1$; $\dots$; $i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1$; $\dots$; $j_n = 1, 2, \dots, q_n$); $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1$; $\dots$; $i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1$; $\dots$; $j_n = 1, 2, \dots, q_n$); $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ($k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) — мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; для $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}, \quad d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n; \quad \mathbf{t}^l = t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n};$$

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2 = (x_1^2 - t_1^2) \dots (x_n^2 - t_n^2); \quad f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n);$$

функция в ядрах преобразований (5) и (6)

$$H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{x_k}{t_k} \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right. \right], \quad (7)$$

представляет собой произведение Н-функций Фокса $H_{p,q}^{m,n}[z]$. Н-функция Фокса определяется для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$) равенством

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (8)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (9)$$

Здесь L — специально выбранный бесконечный контур, пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H -функции (8) можно ознакомиться в [7, гл. 1, 2]. Функция в ядрах преобразований (1)–(4):

$$P_{\delta}^{\gamma}[\mathbf{z}] = \prod_{k=1}^n P_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k],$$

представляет собой произведение функций Лежандра первого рода $P_{\delta}^{\gamma}(z)$. Эта функция определяется при комплексных $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, z \in \mathbb{C}$ равенствами

$$P_{\delta}^{\bar{\gamma}}(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \bar{\gamma})} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{2}} {}_2F_1 \left(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; \frac{1-z}{2} \right), \quad |\arg(z-1)| < \pi,$$

$$P_{\delta}^{\bar{\gamma}}(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \bar{\gamma})} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{2}} {}_2F_1 \left(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; \frac{1-x}{2} \right), \quad -1 < x < 1$$

[8, формулы 3.2(3) и 3.4(6); 9, п. 11.18], где ${}_2F_1(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [8, § 2.1].

Интегральные преобразования (1)–(4) обобщают соответствующие одномерные интегральные преобразования:

$$(P_{\delta,1}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (10)$$

$$(P_{\delta,2}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (11)$$

$$(P_{\delta,3}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (12)$$

$$(P_{\delta,4}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0). \quad (13)$$

Интерес к интегральным преобразованиям $P_{\delta,k}^{\bar{\gamma}} f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) вызван тем, что интегральные уравнения (10)–(13) возникают при решении дифференциальных уравнений. Уравнение (13) было впервые получено в [10, с. 353] при решении задачи Дирихле в первом квадранте $x > 0, y > 0$ для гиперболического уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + \frac{2\gamma}{x} U_x - \frac{2\delta}{y} U_y = 0.$$

В [10] было дано обращение уравнения (13). Однако этот результат специально не выделялся и поэтому статья [11], в которой были найдены формулы

обращения уравнений (12) и (13), долгое время считалась первой работой в этом направлении. Результаты в [10, 11] были приведены формально без указания классов функций, в которых ищутся решения.

В [12] были получены необходимые и достаточные условия для существования интегрируемого на конечном отрезке решения уравнения при $\operatorname{Re}(\overline{\gamma}) < 1$, $\operatorname{Re}(\overline{\delta}) \geq (-\frac{1}{2})$ и дано его явное решение. В [12] также указано решение уравнения (11). Это уравнение ранее было исследовано в [13], но в его формуле решения содержится ошибка (см. также [14]). В [15] изучено уравнение (10) с произвольными действительными $\overline{\gamma}$ и $\overline{\delta}$ в классе обобщенных функций с носителем на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, а также выделены условия, при которых полученное решение будет обычной функцией.

Результаты в [12, 15] были основаны на представлении $P_{\overline{\delta},1}^{\overline{\gamma}}f$ и $P_{\overline{\delta},2}^{\overline{\gamma}}f$ в виде композиций двух операторов дробного интегрирования от функции по степенной функции x^2 (см. [6, § 18.2]). Эта методика была применена в [6, § 35.2] для получения формул обращения уравнений (10)–(13) в пространствах $L_p(a, b)$, $0 < a < b < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$. В работе [16] аналогичные результаты были получены для (10)–(13) в весовых пространствах вида (14) суммируемых функций на полусоси.

Отметим также работы [17, 18], в которых были указаны достаточные условия обратимости и формулы обращения двух уравнений вида (10) и (13), но записанных в иной форме.

В работе [19] одномерные преобразования (10)–(13) $P_{\overline{\delta},k}^{\overline{\gamma}}f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) были изучены в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{\nu,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^\infty |t^\nu f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, \nu \in \mathbb{R}). \quad (14)$$

В [19] с помощью формул преобразования Меллина от (10)–(13) было доказано, что такие преобразования являются специальными случаями преобразований с Н-функцией Фокса (8). На основании этого была построена теория преобразований $P_{\overline{\delta},k}^{\overline{\gamma}}f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$. При этом даны условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (10)–(13) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемых преобразований, дано описание образов $P_{\overline{\delta},k}^{\overline{\gamma}}(\mathfrak{L}_{\nu,r})$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и выведены формулы обращения.

Следует отметить, что все полученные в [19] результаты верны для классических пространств r -суммируемых функций $L_r(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{L}_{\frac{1}{r},r}$ ($1 \leq r < \infty$).

В работах [1, 2] были изучены функциональные свойства многомерных преобразований (1) и (4) и выведены формулы их обращения в весовых простран-

ствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$ таких, что

$$\|f\|_{\overline{\nu}, \overline{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot 2 - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot 2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty \quad (15)$$

($\overline{2} = (2, \dots, 2)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$).

Далее перейдем к изложению результатов исследования многомерных интегральных преобразований (1)–(4) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}$ интегрируемых функций $f(\mathbf{x})$ таких, что

$$\|f\|_{\overline{\nu}, \overline{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty \quad (16)$$

($\overline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $1 \leq \overline{r} < \infty$, $r_1 = r_2 = \dots = r_n$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$). Исследования основаны на представлении преобразований $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в виде модифицированного преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ (5), при этом устанавливаются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1)–(4), приводятся различные интегральные представления для них, даются описания образов таких операторов и выводятся формулы обращения.

1.2. Вспомогательные сведения. Многомерное преобразование Меллина функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, определяется по формуле

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = \int_0^\infty f(\mathbf{t}) \mathbf{t}^{\mathbf{s}-1} d\mathbf{t}, \quad \operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu}, \quad (17)$$

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$. Обратное преобразование Меллина дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathbf{x}) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{p})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \dots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathbf{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\gamma_j = \operatorname{Re}(s_j)$ ($j = \overline{1, n}$). С теорией многомерного преобразования Меллина (17) можно ознакомиться, например, в книгах [20–22].

Пусть $\mathbf{M}_\zeta$, $\mathbf{R}$ — элементарные операторы [21, гл. 1]:

$$(\mathbf{M}_\zeta f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\zeta f(\mathbf{x}) \quad (\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n), \quad (\mathbf{R}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}} f\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right). \quad (18)$$

Справедлива следующая

Лемма 1 [2, лемма 1]. Пусть $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) и $1 \leq \bar{\nu} < \infty$, $r_1 = r_2 = \dots = r_n$.

(а) $\mathbf{M}_\zeta$ — изометрический изоморфизм $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\zeta), \bar{\nu}}$. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ ($1 \leq \bar{\nu} \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\zeta f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(\mathbf{s} + \zeta)(\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\zeta)). \quad (19)$$

(б) $\mathbf{R}$ — изометрический изоморфизм $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ на $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}, \bar{\nu}}$. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ ($1 \leq \bar{\nu} \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M}\mathbf{R}f)(\mathbf{s}) = (\mathfrak{M}f)(1 - \mathbf{s}) \quad (\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \overline{1 - \nu}). \quad (20)$$

Операторы $\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha$ и $\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha$ дробного интегрирования типа Эрдейи — Кобера определяются при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$), $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$, $\eta \in \mathbb{C}^n$ равенствами [1, формулы (55), (56)]:

$$(\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{-\sigma(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma\eta+\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0),$$

$$(\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0).$$

Через $[X, Y]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

1.3. Функциональные свойства и формулы обращения преобразования $\mathbf{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$.

Для формулировки утверждений, представляющих функциональные свойства и формулы обращения модифицированного $\mathbf{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ -преобразования (5) в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры $\mathbf{H}$ -функции (7) [2, формулы (57)–(60)]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ 0, & m_1 = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_1 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq \bar{n}_1} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ 0, & \bar{n}_1 = 0; \end{cases} \\ \bar{\alpha}_2 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ 0, & m_2 = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_2 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_2 \leq \bar{n}_2} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & \bar{n}_2 > 0, \\ 0, & \bar{n}_2 = 0; \dots \end{cases} \\ \bar{\alpha}_n &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_n \leq m_n} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_n})}{\beta_{j_n}} \right], & m_n > 0, \\ 0, & m_n = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_n = \begin{cases} \min_{1 \leq i_n \leq \bar{n}_n} \left[\frac{1 - \operatorname{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & \bar{n}_n > 0, \\ 0, & \bar{n}_n = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_1^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, \quad \Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}, \\ a_2^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_2} \alpha_{i_2} - \sum_{i=\bar{n}_2+1}^{p_2} \alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j_2} - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_{j_2}, \quad \Delta_2 = \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2}, \dots, \\ a_n^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_n} \alpha_{i_n} - \sum_{i=\bar{n}_n+1}^{p_n} \alpha_{i_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{j_n} - \sum_{j=m_n+1}^{q_n} \beta_{j_n}, \quad \Delta_n = \sum_{j=1}^{q_n} \beta_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i_n}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n - q_n}{2};$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0^1 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_1+1 \leq j_1 \leq q_1} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_1})-1}{\beta_{j_1}} \right], & q_1 > m_1, \\ -\infty, & q_1 = m_1, \end{cases} \\
\beta_0^1 &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_1+1 \leq i_1 \leq p_1} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & p_1 > \bar{n}_1, \\ \infty, & p_1 = \bar{n}_1; \end{cases} \\
\alpha_0^2 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_2+1 \leq j_2 \leq q_2} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_2})-1}{\beta_{j_2}} \right], & q_2 > m_2, \\ -\infty, & q_2 = m_2, \end{cases} \\
\beta_0^2 &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_2+1 \leq i_2 \leq p_2} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & p_2 > \bar{n}_2, \\ \infty, & p_2 = \bar{n}_2; \end{cases} \\
\vdots & \\
\alpha_0^n &= \begin{cases} 1 + \max_{m_n+1 \leq j_n \leq q_n} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_n})-1}{\beta_{j_n}} \right], & q_n > m_n, \\ -\infty, & q_n = m_n, \end{cases} \\
\beta_0^n &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_n+1 \leq i_n \leq p_n} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & p_n > \bar{n}_n, \\ \infty, & p_n = \bar{n}_n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{24}$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции

называется множество векторов $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) таких, что $\bar{\alpha}_k < 1 - \nu_k < \bar{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$) и функции $\mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k}(s_k)$ ($k = \overline{1, n}$), определенные в (9), имеют нули на прямых $\text{Re}(s_k) = 1 - \nu_k$ ($k = \overline{1, n}$) соответственно.

Многомерное интегральное преобразование Меллина (17) от преобразования (5) представляется формулой [2, формула (62)]:

Известно, что преобразование (5) связано с преобразованием (6) соотношением [7, формула (5.1.9)]

где $\mathbf{M}_\zeta$ и $\mathbf{R}$ — операторы преобразований в (18).

Свойства преобразования (5) в пространстве $\mathfrak{L}_{\overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{Z}}}$ (15) следуют из [1, теорема 3] для преобразования (6), представлений (27) и (19), (20).

Теорема 1 [2, теорема 9]. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k &< \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k; \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}); \\ a_k^* &= 0; \quad \Delta_k[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) < 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (28)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (26) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a_k^* = 0$, $\Delta_k[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то оператор $H_{\sigma, \kappa}^1$ преобразования (5) биективно отображает $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$.

(б) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют условиям (28) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (26), то $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $a_k^* = 0$, $\Delta_k[\nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) < 0$ ($k = \overline{1, n}$), то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (5).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде

$$\begin{aligned} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) &= \bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \end{aligned} \quad (29)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$

$$\begin{aligned} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) &= -\bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}+1, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (30)$$

(е) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$, то справедливо равенство

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (H_{\sigma, \kappa}^1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty (H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (31)$$

где

$$(H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\kappa \int_0^\infty H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\sigma f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}}.$$

Функциональные свойства преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ (16) следуют из результатов [4, теорема 3] для преобразования (6), представления (27), леммы 1 и теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $a_k^* = \Delta_k = \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\bar{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k$; $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$) и $1 < \bar{\tau} < \infty$.

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{\tau}}]$. Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (26) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (29) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и дается формулой (30) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (31).

(г) Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}.$$

Из [5, теорема 5] для преобразования (6), теоремы 1 и теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть $a_k^* = \Delta_k = 0$, $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\bar{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$); $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$), и пусть $\mathbf{m} > 0$ или $\mathbf{n} > 0$.

Имеют место следующие утверждения.

(а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{s}}]$ для всех $\bar{s} \geq \bar{\tau}$ таких, что $1/\bar{s} > 1/\bar{\tau} + \operatorname{Re}(\mu)$. Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (26) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (5).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (29) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и дается формулой (30) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\mu)$, то имеет место формула (31).

(д) Пусть $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = I_{-\bar{l}, (\sigma-\bar{\alpha})/\bar{l}}^{-\mu}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}) \quad (32)$$

при $\mathbf{m} > 0$ и соотношением

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = I_{0+, \bar{l}, (\bar{\beta}-\sigma)/\bar{l}-1}^{-\mu}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}) \quad (33)$$

при $\mathbf{n} > 0$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}})$ является подмножеством правых частей (32) и (33) соответственно при $\mathbf{m} > 0$ и $\mathbf{n} > 0$.

Формулы обращения преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ даются равенствами [2, формулы (68) и (69)]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-\kappa} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}, \mathbf{p}-\mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{array}{l} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1, \mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{n}} \\ (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1, \mathbf{m}} \end{array} (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \right] \\ &\times \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t} \quad (34) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1, \mathbf{p}-\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{array}{l} (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1, \mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{n}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1, \mathbf{m}} \end{array} \right] \\ &\times \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (35) \end{aligned}$$

Условия справедливости формул (34) и (35) следуют из [2, теорема 10; 23] и представлены в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $a_k^* = 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\overline{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \overline{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$); $\alpha_0^k < 1 - \nu_k + \operatorname{Re}(\kappa_k) < \beta_0^k$ ($k = \overline{1, n}$), и пусть $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $\Delta_k[\nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}(\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n)$, то формулы обращения (34) и (35) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $\Delta_k = \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}(\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n)$, $1 < \overline{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$), то формулы обращения (34) и (35) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ соответственно.

1.4. Представление $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в виде модифицированного преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$.

В [2, формулы (70) и (71)] были введены односторонние функции

$$K_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^2 - 1)_+^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x}^2 - 1)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}), & \mathbf{x} > 1, \\ 0, & 0 < \mathbf{x} < 1; \end{cases} \quad (36)$$

$$K_2(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{x}^2)_+^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}), & 0 < \mathbf{x} < 1, \\ 0, & \mathbf{x} > 1. \end{cases} \quad (37)$$

На основании (18), (36), (37), [2, формулы (72) и (73)] получены представления для преобразований (1)–(4) соответственно:

$$(P_{\delta, 1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty K_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-\gamma} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (38)$$

$$(P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{1-\gamma} \int_0^\infty (R K_1)\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-1} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (39)$$

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty K_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-\gamma} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (40)$$

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{1-\gamma} \int_0^\infty (R K_2)\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-1} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}. \quad (41)$$

Следующие вспомогательные утверждения дают формулы преобразования Меллина функций $K_1(\mathbf{x})$ и $K_2(\mathbf{x})$ в (36), (37).

Лемма 2 [2, лемма 2]. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$.

(а) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) < 1 + \operatorname{Re}(\gamma + \delta)$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) < \operatorname{Re}(\gamma - \delta)$, то

$$(\mathfrak{M} K_1)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1 + \gamma + \delta - \mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma - \delta - \mathbf{s})/2)}{\Gamma(1 - \mathbf{s}/2) \Gamma((1 - \mathbf{s})/2)}. \quad (42)$$

(б) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) > 0$, то

$$(\mathfrak{M} K_2)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\mathbf{s}/2) \Gamma((\mathbf{s} + 1)/2)}{\Gamma((1 - \gamma - \delta + \mathbf{s})/2) \Gamma(1 + (\delta - \gamma + \mathbf{s})/2)}. \quad (43)$$

Используя формулу преобразования Меллина свертки Меллина [21, (1.4.56)]:

$$\left(\mathfrak{M} \int_0^\infty K\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) y(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right) (\mathbf{s}) = (\mathfrak{M} K)(\mathbf{s})(\mathfrak{M} y)(\mathbf{s}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n);$$

справедливую для подходящих функций $K(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}) = \prod_{k=1}^n K(\frac{x_k}{t_k})$ и $y(\mathbf{x})$, и формулы (19), (20) для преобразований $M_\zeta f, R f$, находим преобразования Меллина выражений (38)–(41).

Применяя (42), для $P_{\delta,1}^\gamma f$ и $P_{\delta,2}^\gamma f$ имеем

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1+\gamma+\delta-\mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma-\delta-\mathbf{s})/2)}{\Gamma(1-\mathbf{s}/2) \Gamma((1-\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}); \quad (44)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1+\delta+\mathbf{s})/2) \Gamma((-\delta+\mathbf{s})/2)}{\Gamma((1-\gamma+\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\mathbf{s}-\gamma)/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}). \quad (45)$$

Согласно (9) и (25) соотношения (44) и (45) принимают вид

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2} \left[\left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma); \quad (46)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0} \left[\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma). \quad (47)$$

Поэтому в силу (26) исходные интегралы преобразований (1) и (2) являются модифицированными преобразованиями вида (5) с $\sigma = 0$, $\kappa = 1 - \gamma$:

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{0,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \quad (48)$$

$$(P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{2,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (49)$$

Аналогично, используя формулу (43), для $P_{\delta,3}^\gamma f, P_{\delta,4}^\gamma f$ имеем

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\mathbf{s}/2) \Gamma((\mathbf{s}+1)/2)}{\Gamma((1-\gamma-\delta+\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\delta-\gamma+\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}); \quad (50)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((\gamma-\mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma-\mathbf{s}+1)/2)}{\Gamma((1-\delta-\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\delta-\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}). \quad (51)$$

В силу (9) и (25) равенства (50) и (51) принимают вид

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0} \left[\left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma); \quad (52)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2} \left[\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma). \quad (53)$$

Согласно (26) исходные интегралы преобразований (3) и (4) являются модификациями преобразования (5) с $\sigma = 0$, $\kappa = 1 - \gamma$:

$$(P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{2,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \quad (54)$$

$$(P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{0,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (1-\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (55)$$

1.5. Преобразования $P_{\delta,k}^\gamma$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ -пространствах. Свойства преобразований (1)–(4) в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ следуют из соответствующих утверждений теоремы 1 для преобразования (5).

На основании (48), (49), (54), (55) и (5) для каждого из операторов (1)–(4) параметры

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (2, 2, \dots, 2); \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (2, 2, \dots, 2); \quad (56)$$

$$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) = (1/2, \dots, 1/2), \quad \beta_j = (\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_n}) = (1/2, \dots, 1/2) \quad (57)$$

($1 \leq i \leq \mathbf{p}$; $1 \leq j \leq \mathbf{q}$) и параметры (22), (23):

$$a_k^* = 0; \quad \Delta_k = 0; \quad \mu_k = \gamma_k - 1 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (58)$$

принимают одинаковые значения.

Для оператора (1):

$$\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} = 2; \quad \overline{\alpha}_k = \infty, \quad \overline{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)] \quad (k = \overline{1, n}). \quad (59)$$

Для оператора (2):

$$\mathbf{m} = 2, \quad \mathbf{n} = 0; \quad \overline{\alpha}_k = -\min[\operatorname{Re}(1 + \delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)], \quad \overline{\beta}_k = \infty \quad (k = \overline{1, n}). \quad (60)$$

Для оператора (3):

$$\mathbf{m} = 2, \quad \mathbf{n} = 0; \quad \overline{\alpha}_k = 0, \quad \overline{\beta}_k = \infty \quad (k = \overline{1, n}). \quad (61)$$

Для оператора (4):

$$\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} = 2; \quad \overline{\alpha}_k = -\infty, \quad \overline{\beta}_k = \operatorname{Re}(\gamma_k) \quad (k = \overline{1, n}). \quad (62)$$

Согласно (44) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2}$ в правой части (46), если

$$\mathbf{s} \neq 2m + 1, \quad \mathbf{s} \neq 2l + 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (63)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (45) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0}$ в правой части (47), если

$$\mathbf{s} \neq \gamma - 2m - 1, \quad \mathbf{s} \neq \gamma - 2l - 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (64)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (50) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0}$ в правой части (52), если

$$\mathbf{s} \neq \delta + \gamma - 2m - 1, \quad \mathbf{s} \neq \gamma - \delta - 2l - 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (65)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (51) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2}$ в правой части (53), если

$$\mathbf{s} \neq -\delta + 2m + 1, \quad \mathbf{s} \neq \delta + 2l + 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (66)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Функциональные свойства преобразований (1)–(4) $P_{\delta,k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ следуют из представлений (48), (49) и (54), (55) значений параметров (56)–(62), утверждений теоремы 1 и представлены в теоремах 5–8 соответственно.

Теорема 5 [2, теорема 11]. Пусть

$$-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)], \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad (67)$$

$$\nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}).$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta,1}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}]$$

такое, что равенство (46) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (63), то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ не зависит от $\overline{\nu}$ в том смысле, что если $\overline{\nu}$ и $\tilde{\overline{\nu}}$ удовлетворяют (67) и если преобразования $P_{\delta,1}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta,1}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\overline{\nu}}, \overline{2}}$ равенством (46), то $P_{\delta,1}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta,1}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\overline{\nu}}, \overline{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}} P_{\delta,1}^\gamma f$ дается формулами (1) и (48).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta,1}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (68)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (69)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta,1}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty g(\mathbf{x}) (P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (70)$$

где $P_{\delta,2}^\gamma f$ — преобразование (2).

Теорема 6. Пусть

$$-\min[\operatorname{Re}(1 + \delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty, \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad (71)$$

$$\nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}).$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta,2}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}]$$

такое, что равенство (47) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (64), то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (71) и если преобразования $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 2}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (47), то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 2}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ дается формулами (2) и (49).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (72)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (73)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(\mathbf{x}) (P_{\delta, 2}^{\gamma} g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\infty} g(\mathbf{x}) (P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (74)$$

где $P_{\delta, 1}^{\gamma} f$ — преобразование (1).

Теорема 7. Пусть

$$0 < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty, \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}). \quad (75)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta, 3}^{\gamma} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (52) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (65), то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (75) и если преобразования $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (52), то $P_{\delta, 3}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ дается формулами (3) и (54).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 3}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (76)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (77)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta, 3}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty g(\mathbf{x}) (P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (78)$$

где $P_{\delta, 4}^\gamma f$ — преобразование (4).

Теорема 8 [2, теорема 12]. Пусть

$$-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \operatorname{Re}(\gamma_k), \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \ (k, l = \overline{1, n}). \quad (79)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta, 4}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (53) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (66), то преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (79) и если преобразования $P_{\delta, 4}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta, 4}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (53), то $P_{\delta, 4}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta, 4}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ дается формулами (4) и (55).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 4}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (80)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$\begin{aligned} (P_{\delta,4}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = & -2^{\gamma-1}\bar{h}\mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ & \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (81)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(\mathbf{x}) (P_{\delta,4}^{\gamma}g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\infty} g(\mathbf{x}) (P_{\delta,3}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (82)$$

где $P_{\delta,3}^{\gamma}f$ — преобразование (3).

1.6. Преобразования $P_{\delta,k}^{\gamma}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ -пространствах. Функциональные свойства преобразований (1)–(4) $P_{\delta,k}^{\gamma}f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ следуют из теорем 2, 3 для преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ (5) представлений (48), (49) и (54), (55) с использованием (58)–(66).

На основании (1) из теоремы 2 и теоремы 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,1}^{\gamma}f$.

Теорема 9. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[\operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$. Если $1 < \bar{\tau} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ биективно и выполняется равенство (46) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ представимо в виде (68) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (69) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}, \bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (70).

(г) Если выполняются условия (63), то преобразование (1) $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,1}^{\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$.

Теорема 10. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,1}^{\gamma} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (46) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ дается формулой (48).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,1}^{\gamma}f$ представимо в виде (68) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (69) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (70).

(д) Если выполняются условия (63), то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,1}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = I_{0+;\bar{l},\bar{\tau}/\bar{l}-1}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{\tau}}), \quad (83)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n)$, $\bar{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(1+\gamma_k+\delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k-\delta_k)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,1}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}})$ является подмножеством правой части (83).

На основании (2) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,2}^\gamma f$.

Теорема 11. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$. Если $1 < \bar{\tau} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (47) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ представимо в виде (72) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (73) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (74).

(г) Если выполняются условия (64), то преобразование (2) $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$.

Теорема 12. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k - \operatorname{Re}(1-\gamma_k) < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,2}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (47) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ дается формулой (49).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,2}^\gamma f$ представимо в виде (72) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (73) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (74).

(д) Если выполняются условия (64), то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = I_{-;\bar{l},-\bar{\alpha}/\bar{l}}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{\tau}}), \quad (84)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$, $\bar{\alpha}_k = -\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}})$ является подмножеством правой части (84).

На основании (3) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,3}^\gamma f$.

Теорема 13. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $0 < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$. Если $1 < \bar{r} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (52) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ представимо в виде (76) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (77) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{r}'}$, где $\bar{r}' = \bar{r}/(\bar{r} - 1)$, то имеет место формула (78).

(г) Если выполняются условия (65), то преобразование (3) $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$.

Теорема 14. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $0 < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ до элемента $P_{\delta,3}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{r}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{r} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (52) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ дается формулой (54).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,3}^\gamma f$ представимо в виде (76) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (77) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{r} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (78).

(д) Если выполняются условия (65), то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = I_{-\bar{l},0}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{r}}), \quad (85)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}})$ является подмножеством правой части (85).

На основании (4) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,4}^\gamma f$.

Теорема 15. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < 1$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$. Если $1 < \bar{r} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (53) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ представимо в виде (80) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (81) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{r}'}$, где $\bar{r}' = \bar{r}/(\bar{r} - 1)$, то имеет место формула (82).

(г) Если выполняются условия (66), то преобразование (4) $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$.

Теорема 16. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(\gamma_k), \operatorname{Re}(\gamma_k + 1)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \overline{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,4}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}; \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{s}}]$ для всех $\overline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\overline{s} \geq \overline{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \overline{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (53) для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ дается формулой (55).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,4}^\gamma f$ представимо в виде (80) при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\overline{h} - 1$ и дается формулой (81) при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\overline{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{s}}$, где $1 < \overline{s} < \infty$, $1 \leq 1/\overline{s} + 1/\overline{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (82).

(д) Если выполняются условия (66), то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}) = I_{0+; \overline{l}, \overline{\beta}/\overline{l}-1}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{\tau}}), \quad (86)$$

где $\overline{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n)$, $\overline{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(\gamma_k), \operatorname{Re}(\gamma_k + 1)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}})$ является подмножеством правой части (86).

1.7. Формулы обращения преобразований $P_{\delta,k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$). На основании представлений (48), (49), (54), (55) и (4) параметры (24) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_0^k &= 0, \quad \beta_0^k = \infty \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= -\infty, \quad \beta_0^k = \operatorname{Re}(2 - \gamma_k) \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= -\infty, \quad \beta_0^k = 1 + \min[\operatorname{Re}(1 - \gamma_k - \delta_k), \operatorname{Re}(2 + \delta_k - \gamma_k)] \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= 1 + \max[\operatorname{Re}(\delta_k - 1), \operatorname{Re}(-\delta_k - 2)], \quad \beta_0^k = \infty \quad (k = \overline{1, n}); \end{aligned}$$

соответственно для операторов преобразований (1)–(4).

Согласно представлению (48) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta,1}^\gamma f$ принимают вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1+\gamma} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (87) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}, \overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (88) \end{aligned}$$

Условия справедливости формул (87) и (88) следуют из теоремы 4.

Теорема 17. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[1, \operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формулы обращения (87) и (88) справедливы при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, то формулы обращения (87) и (88) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (49) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta, 2}^\gamma f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1+\gamma} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}, \quad (89)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (90)$$

Условия справедливости формул (89) и (90) следуют из теоремы 4.

Теорема 18. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $\max[0, \operatorname{Re}(-1 - \delta_k), \operatorname{Re}(\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формулы обращения (89) и (90) справедливы при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, то формулы обращения (89) и (90) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (54) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta, 3}^\gamma f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1+\gamma} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}, \quad (91)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (92)$$

Условия справедливости формул (91) и (92) следуют из теоремы 4.

Теорема 19. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $\max[0, \operatorname{Re}(-1 - \delta_k), \operatorname{Re}(\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{z}}$, то формулы обращения (91) и (92) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, то формулы обращения (91) и (92) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (55) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta, 4}^{\gamma} f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1+\gamma} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (93)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}, \overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 4}^{\gamma} f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (94)$$

Условия справедливости формул (93) и (94) следуют из теоремы 4.

Теорема 20. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[1, \operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{z}}$, то формулы обращения (93) и (94) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, то формулы обращения (93) и (94) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

2. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи

Во второй части статьи в форме небольшого обзора изложены основные факты об операторах Бушмана — Эрдейи. Это один из важных классов операторов с функциями Лежандра в ядрах. Первоначально эти операторы возникли в работах Бушмана и Эрдейи, они рассматривали интегральные уравнения с такими операторами и их обращения (см. [6]). Эти операторы и их модификации в неявном виде были введены и изучались в работах В. В. Катрахова [24]. Само название "операторы Бушмана — Эрдейи" было введено в начале 1980-х С. М. Ситником, им была построена достаточно полная теория этих операторов и как интегральных, и как операторов преобразования, эти результаты последовательно излагались, уточнялись и дополнялись в [6, 25–28] и других работах.

В этой части работы рассматриваются основные определения теории операторов преобразования, приводятся исторические сведения об интегральных операторах Бушмана — Эрдейи. Вводится удобная классификация операторов типа Бушмана — Эрдейи и их обобщений на основе явного вида ядер. Далее вводятся и изучаются операторы преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода, а также их предельный подкласс — операторы нулевого порядка гладкости. Ядра операторов этого класса выражаются через функции Лежандра первого рода. Частными случаями являются известные операторы преобразования Сони́на и Пуассона, а также некоторые классические интегральные

преобразования, в том числе известные операторы дробного интегрирования, в том числе Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера. Затем вводятся операторы преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода, ядра которых выражаются через функции Лежандра второго рода. Приводятся применения общей схемы построения операторов преобразования композиционным методом на основе комбинирования классических операторов преобразования, рассматривается пример применения композиционного метода к определению и изучению операторов преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода. Основное внимание уделяется условиям ограниченности или унитарности введенных операторов в классических пространствах Лебега. В качестве приложений рассматриваются обобщения условий унитарности «сдвинутых» неравенств Харди.

3. Основные понятия теории операторов преобразования

Теория операторов преобразования — это существенное обобщение теории подобия конечномерных матриц. Дадим основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дана пара операторов (A, B) . Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования* (ОП, сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator), если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение

$$TA = BT. \quad (95)$$

Как обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A . При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B . Тогда если существует ОП (95), то часто удается перенести свойства модельного оператора B и на A . Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A , то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (95), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu$, $g = Tf$. Поэтому если второе уравнение с оператором B является более простым и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены монографии, например, [24, 27–29], а также многочисленные работы, процитированные в них. В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференцирования. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений.

Фактически современная теория операторов преобразования возникла из двух примеров, ставших классическими. Первым примером являются ОП, переводящие оператор Штурма — Лиувилля с некоторым потенциалом $q(x)$ во вторую производную:

$$TD^2y(x) + q(x)y(x) = D^2Ty(x), \quad D^2y(x) = y''(x), \quad (96)$$

при некотором выборе естественных краевых условий (см., например, [30, 31]).

Второй пример — это задача о преобразовании оператора Бесселя во вторую производную:

$$TB_\nu f = D^2Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu+1}{x}D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (97)$$

или возмущенного потенциалом оператора Бесселя

$$TB_\nu + q(x)f = D^2Tf, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (98)$$

На этом пути возникли ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи и их многочисленные обобщения (см., например, [24, 27, 28, 32, 33]). Такие операторы преобразования находят многочисленные приложения при изучении уравнений с частными производными с особенностями.

4. Операторы Бушмана — Эрдейи первого рода

Рассмотрим важный класс интегральных операторов, который при определенном выборе параметров является одновременным обобщением ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта и их сопряженных, операторов дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера, а также интегральных преобразований Мелера — Фока (см. [25, 26]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Операторами Бушмана — Эрдейи первого рода* называются интегральные операторы

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (99)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (100)$$

$$B_-^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (101)$$

$$E_-^{\nu,\mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt. \quad (102)$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода [8], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ — та же функция на разрезе $-1 \leq t \leq 1$, $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$. Параметры μ, ν — комплексные числа, $\operatorname{Re} \mu < 1$, можно ограничиться значениями $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$.

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи (или, что то же самое, — операторам Чебышева — Гегенбауэра) по радиальной переменной [34–37], при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области (см. [24, 27, 28]).

Приведем основные свойства введенных выше интегральных операторов (99)–(102). Вначале распространим их определения на случай значения параметра $\mu = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем при $\mu = 1$ операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (103)$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \frac{df(t)}{dt} dt, \quad (104)$$

$$B_-^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \left(-\frac{df(t)}{dt} \right) dt, \quad (105)$$

$$E_-^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (106)$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Теорема 21. Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана — Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана — Лиувилля и Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu} {}_1S_{0+}^\nu f, \quad B_-^{\nu,\mu} f = {}_1P_-^\nu I_-^{1-\mu} f, \quad (107)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^\nu I_{0+}^{1-\mu} f, \quad E_-^{\nu,\mu} f = I_-^{1-\mu} {}_1S_-^\nu f. \quad (108)$$

Эти формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ . Мы докажем, что операторы (103)–(106) являются изоморфизмами пространств $L_2(0, \infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (103)–(106) по действию в пространствах типа L_2 в определенном смысле подобны операторам дробного интегродифференцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$.

Исходя из этого, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Число $\rho = 1 - \operatorname{Re} \mu$ назовем *порядком гладкости операторов Бушмана — Эрдейи* (103)–(106).

Таким образом, при $\rho > 0$ (т. е. при $\operatorname{Re} \mu < 1$) операторы Бушмана — Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (т. е. при $\operatorname{Re} \mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0, \infty)$. Операторы (103)–(106), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана — Эрдейи первого рода (103)–(106) с функцией Лежандра I рода в ядре. При некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана — Эрдейи сводятся к более простым. Так, при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи — Кобера; при $\nu = 0$ — операторами дробного интегродифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_-^{1-\mu}$; при $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu = 0$ или $\mu = 1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu = 0$, $x = 1$, $\nu = it - \frac{1}{2}$ оператор $B_-^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличается от преобразования Мелера — Фока [25, 26].

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right), \quad (109)$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 22. Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетает L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \quad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \quad (110)$$

Введем новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \quad (111)$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетает оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (112)$$

Теорема 23. Пусть $\operatorname{Re} \mu \leq 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu,\mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет на подходящих функциях соотношению (110).

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана — Эрдейи. При этом $E_-^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_-^{\nu,\mu}$ — операторами типа Пуассона.

Теперь сделаем важное замечание. Из приведенной теоремы следует, что ОП Бушмана — Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана — Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведенные функции Бесселя, а другая половина наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона и представляют существенный интерес. Еще раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана — Эрдейи и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Важнейшим свойством операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν . Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения.

Теорема 24. Для унитарности в L_2 операторов (103)–(106) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S_{0+}^\nu, {}_1P_-^\nu)$ и $({}_1S_-^\nu, {}_1P_{0+}^\nu)$ взаимно обратны.

Эта теорема будет использована ниже для установления унитарности одного класса «сдвинутых» операторов типа Харди.

5. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана — Эрдейи второго рода. Их ядра выражаются через функции Лежандра второго рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Введем новую пару операторов Бушмана — Эрдейи с функциями Лежандра второго рода в ядре

$${}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \quad (113)$$

$${}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right). \quad (114)$$

Эти операторы являются аналогами операторов первого рода нулевого порядка гладкости. При $y \rightarrow x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (113) будет типа Сонина, (114) — типа Пуассона).

Теорема 25. Справедливы формулы для норм

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1 + \sin \pi \nu}), \quad (115)$$

$$\|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1 + \sin \pi \nu}). \quad (116)$$

Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν . Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin \pi \nu = -1$.

Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.

Операторы второго рода связаны с преобразованиями Гильберта на полуоси.

Теорема 26. Справедливы представления

$${}_2S^0 f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x^2 - y^2} f(y) dy, \quad (117)$$

$${}_2S^{-1} f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 - y^2} f(y) dy. \quad (118)$$

Для операторов второго рода введем также более общие аналоги операторов преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода с двумя параметрами по формулам

$${}_2S^{\nu, \mu} f = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\mu\pi i} Q_\nu^\mu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} Q_\nu^\mu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right) \quad (119)$$

где $Q_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра второго рода, $Q_\nu^\mu(z)$ — значение этой функции на разрезе, $\operatorname{Re} \mu < 1$. Второй подобный оператор определяется как формально сопряженный в $L_2(0, \infty)$ к (119).

6. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода

Перейдем к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν . Такие операторы определяются по формулам

$$S_U^\nu f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2S^\nu f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1S_-^\nu f, \quad (120)$$

$$P_U^\nu f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2P^\nu f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1P_-^\nu f. \quad (121)$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана — Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно отнести к операторам Бушмана — Эрдейи третьего рода (см. ниже). В интегральной форме эти операторы имеют вид

$$S_U^\nu f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \times \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \quad (122)$$

$$P_U^\nu f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \int_0^x P_\nu \left(\frac{y}{x} \right) \left(\frac{d}{dy} \right) f(y) dy - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \times \left(-\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right). \quad (123)$$

Теорема 27. Операторы (120)–(123) при всех $\nu \in \mathbb{R}$ являются унитарными, взаимно сопряженными и обратными в L_2 . Они являются сплетающими и действуют по формулам (120)–(123). При этом S_U^ν является оператором типа Сонина (Сонина — Катрахова), а P_U^ν — типа Пуассона (Пуассона — Катрахова).

Все рассмотренные выше интегральные операторы имеют ОП в форме подобной (122), (123), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В. В. Катраховым [38]. Он построил их, возмущая дробные интегралы Римана — Лиувилля экспоненциальными заменами. Поэтому в [24] были предложены логичные соответствующие названия: операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено в [25, 26], кроме того, их удастся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом [27, 28, 39–44]. На этом пути построение ОП перестает быть набором специальных отдельных приемов, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом.

7. Приложения операторов Бушмана — Эрдейи

Приведем здесь только краткий список приложений, подробное изложение в [24, 27, 28].

- С помощью ОП Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре»: пространства *И. А. Киприянова изоморфны весовым пространствам С. Л. Соболева* (см. [45]). Разумеется, с помощью ОП Бушмана — Эрдейи рассмотрен только самый простой случай, результаты можно обобщать на другие виды нормировок, многомерный случай, замену неограниченных областей на ограниченные, что еще предстоит рассмотреть в будущем, но это не изменит принципиально основного вывода. Сказанное ни в коем случае не умаляет ни существенного значения, ни необходимости использования пространств *И. А. Киприянова* для подходящего круга задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. Принципиальная важность пространств *И. А. Киприянова* для теории уравнений в частных производных различных типов с операторами Бесселя отражает общий методологический подход, который автор услышал в виде красивого афоризма на пленарной лекции Л. Д. Кудрявцева: «Каждое уравнение должно изучаться в своем собственном пространстве!»

Полученные вложения могут быть использованы для прямого переноса известных оценок для решений *B*-эллиптических уравнений в пространствах *И. А. Киприянова* [45] на оценки в весовых пространствах *С. Л. Соболева*, это непосредственное применение приведенных в статье условий ограниченности и сплетающих свойств операторов преобразования Бушмана — Эрдейи.

- Построенные операторы преобразования позволяют выписывать явные формулы, выражающие решения уравнений в частных производных с операторами Бесселя через невозмущенные уравнения. Примером служит *B*-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^n B_{\nu, x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f, \quad (124)$$

аналогичные *B*-гиперболические и *B*-параболические уравнения [45]. Эта идея ранее осуществлялась с использованием операторов преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта, а новые типы операторов преобразования позволяют получить новые классы подобных формул соответствия.

- Рассмотрим уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу в полупространстве

$$B_{\alpha,t}u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t,x),$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Дадим нестрогое описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t = 0$ единым методом. Образует по формулам (109) операторы преобразования $X_{\alpha,t}$ и $Y_{\alpha,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,t}u = v(t,x)$, $X_{\alpha,t}F = G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G, \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v'_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (125)$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда в предположении, что $Y_{\alpha,t} = X_{\alpha,t}^{-1}$, получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_{\alpha}u|_{t=0} = a(x), \quad (X_{\alpha}u)'|_{t=0} = b(x). \quad (126)$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи первого, второго, третьего родов, Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова, обобщенные операторы Бушмана — Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике, в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам.

- Еще с 1950-х гг. специалистам было известно, что никакой новой теории для построения полиномиальных решений В-эллиптических уравнений не требуется. Это следует из простого факта, что уже операторы преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта переводят степень в степень. Следовательно, они переводят В-гармонические полиномы в гармонические и наоборот по явным формулам с очевидными оценками норм. Поэтому и обобщенные сферические гармоники строятся по явным формулам из обычных, так как они являются сужениями соответствующих полиномов на единичную сферу. Данный подход подробно изложен, например, в работах Рубина [36, 37]. Операторы Бушмана — Эрдейи добавляют новую степень свободы ко всем этим построениям.

- Унитарность сдвинутых на единичный классических операторов Харди — это известный результат, он получается как частный случай из приведенных выше теорем. Подстановка других натуральных значений параметра приводит к новому бесконечному семейству интегральных операторов простого вида, унитарных в $L_2(0, \infty)$.

Приведем последний результат более подробно для нескольких первых натуральных значениях параметра.

Теорема 28. Следующие операторы, действующие на дифференцируемые функции на $(0, \infty)$, образуют пары взаимно обратных изометричных операторов в $L_2(0, \infty)$:

$$U_3 f = f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, \quad U_4 f = f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy,$$

$$\begin{aligned}
U_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, & U_6 f &= f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\
U_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, & U_8 f &= f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\
U_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, & U_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Подобные результаты обобщаются на любые целые параметры и выписываются явно через многочлены Лежандра. По мнению авторов, эти результаты могут стать полезным добавлением к небольшому числу примеров унитарных операторов, которые обычно приводятся в монографиях, учебниках и лекциях для студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. Multi-dimensional integral transform with Fox function in kernel in Lebesgue-type spaces // Mathematics. 2024. V. 12, N 12. 1829. 10 pp.
2. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. Basel: Birkhauser; Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 293–319.
3. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 6. P. 1408–1416.
4. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Papkovich M. V. A special type of multi-dimensional integral transform with Fox H-function in Lebesgue-type weighted spaces // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 9. P. 4613–4623.
5. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерное интегральное преобразование с H-функцией в ядре в весовых пространствах интегрируемых функций // Вестн. Могилевск. гос. ун-та им. А. А. Кулешова. Сер. В. Естественные науки. 2025. Т. 2. С. 27–44.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms. Theory and applications. Boca Raton, Fl.: Chapman and Hall, 2004.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция Гаусса. М.: Наука, 1973.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1966.
10. Copson E. T. On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. V. 1, N 4. P. 349–356.
11. Buschman R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Rev. 1963. V. 5, N 3. P. 232–233.
12. Erdélyi A. An integral equation involving Legendre functions // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1964. V. 12, N 1. P. 15–30.
13. Srivastava K. N. On some integral transforms // Math. Japon. 1962. V. 6, N 3. P. 65–72.
14. Habibullah G. M. An integral operator involving a Legendre function // J. Natur. Sci. Math. 1981. V. 21, N 2. P. 147–153.
15. Erdélyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. 1967. V. 8, N 1. P. 50–54.
16. Скоромник О. В. Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра в ядрах в $\mathcal{L}_{\eta,r}$ -пространствах // Вест. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2008. № 13. С. 68–73.

17. Смирнов М. М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика и астрономия. 1981. Т. 3, № 13. С. 117–119.
В 17 и 18 название действительно одно и то же?
18. Смирнов М. М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика и астрономия. 1984. Т. 3, № 7. С. 111–113.
19. Kilbas A. A., Skoromnik O. V. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -spaces // Integral Transforms and Special Functions. 2009. V. 20, N 9. P. 653–672.
20. Brychkov Yu. A., Glaeske H.-J., Prudnikov A. P., Vu Kim Tuan. Multidimensional integral transformations. Philadelphia, PA: Gordon and Breach, 1992.
21. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
22. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Вычисление интегралов и преобразование Меллина. М.: ВИНТИ, 1989. (Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 27).
23. Скоромник О. В., Папкович М. В. Формулы обращения для отдельных случаев многомерного интегрального преобразования с Н-функцией в ядре в весовых пространствах интегрируемых функций // Мат. методы в технологиях и технике. 2025. № 12-4. С. 24–26.
24. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, № 2. С. 211–426.
25. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдеи нулевого порядка гладкости. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1990.
26. Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдеи // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.
27. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019.
28. Elina Shishkina, Sergei Sitnik Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Ser. Mathematics in Science and Engineering. 1st Ed.. Basel: Elsevier, 2020.
29. Carroll R. Transmutation theory and applications. Amsterdam: North-Holland, 1986.
30. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наук. Думка, 1972.
31. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. Думка, 1977.
32. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.
33. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
34. Deans S. R. The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.
35. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
36. Rubin B. Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions. Jerusalem: The Hebrew University of Jerusalem, 1999/2000.
37. Rubin B. Introduction to Radon transforms (with elements of fractional calculus and harmonic analysis. New York: Camb. Univ. Press, 2015.
38. Катрахов В. В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 5. С. 1048–1051.
39. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод факторизации в теории операторов преобразования // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В. Н. Врагов). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. С. 104–122.
40. Катрахов В. В., Ситник С. М. Композиционный метод построения В-эллиптических, В-гиперболических и В-параболических операторов преобразования // Докл. АН СССР. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

41. Ситник С. М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестн. Самарск. гос. ун-та (СамГУ). Естественная серия. 2008. Т. 8/1. С. 237–248.
42. Shishkina E. L., Sitnik S. M., Jebabli I. Application of integral transforms composition method (ITCM) to obtaining transmutations via integral transforms with Bessel functions in kernels // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. V. 18, N 2. P. 884–900.
43. Sitnik S. M., Jebabli I. On applications of integral transforms composition method // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 3. P. 1029–1042.
44. Sitnik S. M., Jebabli I. The integral transforms composition method for generalized index shifted transmutations // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 7. P. 3401–3415.
45. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997.

Поступила в редакцию 1 апреля 2026 г.

После доработки 3 апреля 2026 г.

Принята к публикации 3 апреля 2026 г.

Ситник Сергей Михайлович (ORCID 0000-0001-9661-4338)
Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет (МГСУ),
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
mathsms@yandex.ru

Скоромник Оксана Валерьевна (ORCID 0009-0009-7222-4250)
Полоцкий государственный университет имени Ефросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, Новополоцк 211440. Беларусь
skoromnik@gmail.com

СТРУКТУРА И АВТОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП

Е. А. Шапорина

Аннотация. Рассматриваются группы торических узлов, которые задаются двумя образующими и соотношением между ними. Для любой пары взаимно простых чисел показано, как представить такую группу в виде циклического расширения некоторой свободной группы. Это достигается путем поиска порождающего множества для свободной группы и поиска нужного автоморфизма. Полученный результат позволяет изучать автоморфизмы таких циклических расширений через изучение автоморфизмов групп торических узлов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.413

Ключевые слова: свободная группа, расщепляемое циклическое расширение, группа внешних автоморфизмов, группа торического узла.

§ 1. Введение

Всюду в работе будем считать, что $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Циклическим расширением свободной группы ранга n с помощью автоморфизма φ называется группа $F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z} \cong \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle$, где $\varphi \in \text{Aut}(F_n)$ — автоморфизм свободной группы, задающий это расширение.

Рассмотрим далее два циклических расширения с помощью автоморфизмов φ, ψ . Обозначим через $\hat{a}$ сопряжение с помощью a ; $\hat{a}$ действует по правилу $g^a = aga^{-1}$.

Если

$$\varphi = \hat{a} \circ \psi, \quad a \in F_n,$$

то соответствующие им циклические расширения

$$M_{\varphi} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle, \quad M_{\psi} = \langle F_n, s \mid sgs^{-1} = \psi(g) \rangle$$

связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\varphi} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle &= \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = (\hat{a} \circ \psi)(g) \rangle \\ &= \langle F_n, t \mid a^{-1}tgt^{-1}a = \psi(g) \rangle. \end{aligned}$$

Значит, отображение $\theta : M_{\varphi} \rightarrow M_{\psi}$, тождественное на F_n и отправляющее t в as , продолжается до изоморфизма групп.

Поэтому можно рассматривать циклическое расширение свободной группы с помощью внешнего автоморфизма, определение которого дано, например, в работе [1]:

Работа выполнена за счет гранта РНФ 24-11-00119.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть F_n — свободная группа ранга n , $\Phi \in \text{Out}(F_n)$. Циклическим расширением свободной группы ранга n с помощью внешнего автоморфизма Φ называется группа

$$M_\Phi = F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $\xi \in \text{Aut}(F_n)$ — произвольный представитель Φ .

Циклические расширения свободных групп, также известные как *mapping tori*, представляют собой классический объект в геометрической и комбинаторной теории групп. Эти группы имеют вид $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ и используются для построения и изучения новых групп из заданной свободной.

Исследования mapping tori развиваются в нескольких основных направлениях.

С геометрической точки зрения важнейшие результаты получили Бествина и Фейн [2]. Они изучали циклические расширения свободных групп с точки зрения кривизны. В работе Бринкмана [3] доказано, что автоморфизм φ свободной группы F_n является гиперболическим в смысле Громова, если он не имеет нетривиальных периодических классов сопряженности.

Алгебраические свойства mapping tori исследовались в целой серии работ. Например, Бринкман [4] изучил необходимые и достаточные условия существования расщепления над $\mathbb{Z}$ для циклического расширения $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ автоморфизмом φ свободной группы.

Пусть φ имеет полиномиальный рост. В работе [5] определяется, какие эпиморфизмы из циклического расширения на $\mathbb{Z}$ имеют конечно порожденное ядро, и вычисляется ранг ядра. Таким образом, авторы решают существенную задачу по описанию всех возможных способов представления M_φ в виде циклического расширения с помощью произвольного автоморфизма свободной группы. Это аналогично случаю групп трехмерных многообразий и отличается от случая циклического расширения с помощью автоморфизма экспоненциального роста.

Обзор современных результатов, касающихся mapping tori, можно найти в работе И. Каповича [6], где для широкого класса эндоморфизмов конечно порожденных свободных групп доказывается, что их циклические расширения являются гиперболическими тогда и только тогда, когда они не содержат подгрупп Баумслэга — Солитера.

Изучение групп автоморфизмов циклических расширений является сложной и актуальной задачей. Одним из первых шагов в этом направлении стала работа [7], в которой было начато систематическое исследование группы внешних автоморфизмов $\text{Out}(M_\varphi)$. В частности, в теореме 1.1 из [7] получено описание групп $\text{Out}(M_\varphi)$ для всех циклических расширений свободной группы ранга 2 в зависимости от вида матрицы $\varphi^{ab} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Методы, разработанные в [7], оказались применимы и для групп более высокого ранга. Так, в 2021 г. [8] они были частично адаптированы для поиска копредставления группы внешних автоморфизмов группы Герстена

$$H = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba, c^t = ca^2 \rangle,$$

и было показано, что $\text{Out}(H) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \times (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

В 2024 г. [9] была изучена серия циклических расширений свободной группы ранга три

$$G_k = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba^k, c^t = c \rangle, \quad k \neq 0,$$

и получено описание группы $\text{Out}(G_k)$.

В настоящей работе для изучения группы внешних автоморфизмов циклического расширения свободной группы задействован новый подход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенной группой Баумслага — Солитера* (или *GBS-группой*) называется конечно порожденная группа, которая действует на дереве так, что все стабилизаторы вершин и ребер — бесконечные циклические группы.

По теореме Басса — Серра (см., например, [10, 11]) такая группа представляется в виде фундаментальной группы графа групп.

Вместо изучения автоморфизмов M_Φ напрямую мы пользуемся результатом Левитта [1] о том, что всякому циклическому расширению свободной группы с помощью внешнего автоморфизма конечного порядка можно поставить в соответствие GBS-группу с нетривиальным центром (автоморфизмы которой изучались, например, в работе [12]).

В статье рассмотрена конкретная бесконечная серия GBS-групп — серия групп торических узлов для взаимно простых p и q (рис. 1)

$$T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle, \quad p > q > 1.$$



Рис. 1. Граф групп для $T_{p,q}$.

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$, где p и q взаимно просты, $p > q > 1$ — группа торического узла. Тогда

$$T_{p,q} \cong \mathbb{F}_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z} \cong \langle \mathbb{F}_n, t \mid t g t^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $n = (p-1)(q-1)$, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(k_{ij})$ при $0 < i < p$, $0 < j < q$, а $\xi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ определяет $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ и может быть задан на порождающих следующим образом.

СЛУЧАЙ 1. При $1 \leq i < p-1$, $1 \leq j < q-1$

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1} k_{(i+1)(j+1)} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 2. При $i = p-1$, $1 \leq j < q-1$

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 3. При $j = q-1$, $1 \leq i < p-1$

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 4. При $i = p-1$, $j = q-1$

$$\xi : k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

В работе [12] (теорема C) доказано, что группа внешних автоморфизмов группы торического узла изоморфна циклической группе порядка 2. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 2. Пусть n , Φ заданы, как в теореме 1. Тогда

$$\text{Out}(\mathbb{F}_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

§ 2. Основной результат

В 2015 г. Левитт [1] доказал следующий результат.

Утверждение 1 [1, утверждение 4.1]. Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. G — GBS-группа с нетривиальным центром.
2. Существуют $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ конечного порядка такие, что $G \cong M_\Phi$.

Для дальнейших рассуждений отметим следующий факт (лемма 2.4 в [13]): $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$.

Ввиду того, что $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$, утверждение 1 применимо к $T_{p,q}$. Но из текста работы [1] неясно, как именно искать n и Φ для данной GBS-группы с центром. Прделаем это для $T_{p,q}$.

Рассмотрим фактор-группу $T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Известно (см. утверждение 3.28 в [14]), что

$$T_{p,q}/Z(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q.$$

Далее построим эпиморфизм $\delta : \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Подробнее о таком эпиморфизме можно посмотреть в [15, гл. 4, разд. 4.1]. Если $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p$, $\langle b \rangle = \mathbb{Z}_q$, то известен следующий факт (подробнее можно посмотреть, например, в [15, гл. 4, окончание разд. 4.1]):

$$\ker(\delta) \cong [\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q] \cong \langle [a^i, b^j], 0 < i < p, 0 < j < q \rangle \cong F(k_{ij}),$$

где $k_{ij} = [a^i, b^j]$.

Построим каноническую проекцию $\pi_1 : T_{p,q} \rightarrow T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Заметим, что ограничение проекции π_1 на $[T_{p,q}, T_{p,q}]$ отождествляет коммутант с $\ker(\delta)$, поскольку центральный элемент $a^p = b^q$ имеет ненулевой образ в абелианизации $T_{p,q}^{ab} \cong \mathbb{Z}$ и потому не лежит в коммутанте.

Лемма 1. Пусть F_n — свободная группа конечного ранга, $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$, конечного порядка, причем

$$\langle \Phi \rangle = \langle \Psi \rangle \leq \text{Out}(F_n).$$

Тогда соответствующие циклические расширения изоморфны:

$$F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} \cong F_n \rtimes_\Psi \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 1. Пусть

$$M_\Phi = \langle F_n, t \mid txt^{-1} = \varphi(x) \rangle, \quad M_\Psi = \langle F_n, s \mid xsx^{-1} = \psi(x) \rangle,$$

где $\varphi, \psi \in \text{Aut}(F_n)$ представляют классы Φ, Ψ соответственно.

Так как $\langle \Phi \rangle = \langle \Psi \rangle$, существует целое число r , взаимно простое с порядком группы $\langle \Phi \rangle$ такое, что $\Phi = \Psi^r$ в $\text{Out}(F_n)$. Следовательно, существует элемент $f \in F_n$, для которого

$$\varphi(x) = f\psi^r(x)f^{-1} \quad \forall x \in F_n.$$

Определим отображение

$$\Theta : M_\Phi \rightarrow M_\Psi$$

условиями

$$\Theta(x) = x \ (x \in F_n), \quad \Theta(t) = fs^r.$$

Проверим определяющее соотношение:

$$\Theta(txt^{-1}) = (fs^r)x(fs^r)^{-1} = f\psi^r(x)f^{-1} = \varphi(x) = \Theta(\varphi(x)).$$

Следовательно, Θ корректно определено и является изоморфизмом. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через

$$\chi : T_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$$

эпиморфизм, задаваемый условиями $\chi(a) = q$, $\chi(b) = p$. Тогда

$$\ker \chi \cong F_n,$$

где $n = (p-1)(q-1)$, и $T_{p,q} \cong F_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}$ для некоторого $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ порядка pq .

Так как $\chi(ab) = p+q$, сопряжение с помощью ab задает автоморфизм, представляющий степень Φ^{p+q} .

Поскольку $p+q$, pq взаимно просты, элементы Φ и Φ^{p+q} порождают одну и ту же циклическую подгруппу в $\text{Out}(F_n)$. Следовательно, по лемме 1 соответствующее циклическое расширение изоморфно $T_{p,q}$.

Обозначим через ξ автоморфизм свободной группы F_n , задаваемый сопряжением с помощью ab , и вычислим его действие на образующих.

СЛУЧАЙ 1. $1 \leq i < p-1$, $1 \leq j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{ij}^{ab} &= [a^i, b^j]^{ab} = (ab)[a^i, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^i b^j a^{-i} b^{-j} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{i+1}b^{-1}a^{-(i+1)})(a^{i+1}b^{j+1}a^{-(i+1)}b^{-(j+1)})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) \\ &= [a, b][a^{i+1}, b]^{-1}[a^{i+1}, b^{j+1}][a, b^{j+1}]^{-1} = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}.$$

Остальные случаи рассматриваем аналогично.

СЛУЧАЙ 2. $i = p-1$, $1 \leq j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{(p-1)j}^{ab} &= [a^{(p-1)}, b^j]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^{(p-1)}b^j a^{-(p-1)}b^{-j}(ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) = [a, b][a, b^{j+1}]^{-1} = k_{11}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11}k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 3. $j = q-1$, $1 \leq i < p-1$. Имеем

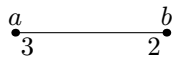
$$\begin{aligned} k_{i(q-1)}^{ab} &= [a^i, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^i, b^{(q-1)}](ab)^{-1} = (ab)a^i b^{(q-1)} a^{-i} b^{-(q-1)} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{(i+1)}b^{-1}a^{-(i+1)}) = [a, b][a^{i+1}, b]^{-1} = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 4. $i = p-1$, $j = q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{(p-1)(q-1)}^{ab} &= [a^{(p-1)}, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^{(q-1)}](ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1}) = [a, b] = k_{11}. \end{aligned}$$

Рис. 2. Граф групп для $T_{3,2}$.

Поэтому

$$\xi : k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим группу трилистника $T_{3,2} = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ (рис. 2). Тогда

$$T_{3,2} \cong M_\Phi = \langle F_n, t \mid t g t^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $n = 2$. Вычислим ξ .

В обозначениях теоремы 1 порождающие свободной группы имеют такой вид: $k_{11} = [a, b]$, $k_{21} = [a^2, b]$. Заметим, что автоморфизм $\xi : x \mapsto x^{ab}$ действует на порождающих таким образом:

$$k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1}, \quad k_{21} \mapsto k_{11}.$$

Применяя ξ шесть раз, получаем

$$k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} k_{21} k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{11}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]},$$

$$k_{21} \mapsto k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{21}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]}. \quad \square$$

Значит, ξ^6 действует как сопряжение на порождающих, тем самым ξ представляет $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_2)$, $|\Phi| = 6$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [16] показано, что по заданным $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$, $|\Phi| < \infty$, $\Psi \in \text{Out}(\mathbb{F}_m)$, $|\Psi| < \infty$ можно вычислить, когда $M_\Phi \cong M_\Psi$.

Тем самым можно установить, когда построенное циклическое расширение изоморфно данному (и когда это не так), и расширить изучаемый класс групп внешних автоморфизмов на классы изоморфных циклических расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levitt G. Generalized Baumslag-Solitar groups: rank and finite index subgroups // Ann. Inst. Fourier. 2015. V. 65, N 2. P. 725–762.
2. Bestvina M., Feighn M. A combination theorem for negatively curved groups // J. Differ. Geom. 1992. V. 35, N 1. P. 85–101.
3. Brinkmann P. Hyperbolic automorphisms of free groups // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 10, N 5. P. 1071–1089.
4. Brinkmann P. Splittings of mapping tori of free group automorphisms // Geom. Dedicata. 2002. V. 93. P. 191–203.
5. Cashen C. H., Levitt G. Mapping tori of free group automorphisms, and the Bieri–Neumann–Strebel invariant of graphs of groups // J. Group Theory. 2016. V. 19, N . P. 191–216.
6. Kapovich I. Mapping tori of endomorphisms of free groups // Commun. Algebra. 2000. V. 28, N 6. P. 2895–2917.
7. Bogopolski O. V., Martino A., Ventura E. The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2 // Commun. Algebra. 2007. V. 35, N 5. P. 1675–1690.
8. Дудкин Ф. А., Шапорина Е. А. Автоморфизмы группы Герстена // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 514–524.
9. Shaporina E. A. Automorphisms of some cyclic extensions of free groups of rank three // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 2. P. 1400–1413.
10. Bogopolski O. V. Introduction to group theory. Zurich: EMS, 2008.
11. Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
12. Gilbert N. D., Howie J., Metaftsis V., Raptis E. Tree actions of automorphism groups // J. Group Theory. 2000. V. 3, N 2. P. 213–223.

13. Jones O. Fixed points of automorphisms of torus knot groups. arXiv:2309.10648. 2023.
14. Burde G., Zieschang H. Knots. Berlin; New York: de Gruyter, 2002.
15. Magnus W., Karrass A., Solitar D. Combinatorial group theory. New York: Dover Publications, 1976.
16. Forester M. Splittings of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 121. P. 43–59.

Поступила в редакцию 3 июня 2025 г.

После доработки 24 января 2026 г.

Принята к публикации 14 февраля 2026 г.

Шапорина Елизавета Алексеевна (ORCID 0009-0003-3039-2842)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

grambergea@gmail.com

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
the American Mathematical Society's $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 30.06.2026. Уч.-изд. л. 15,2. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.07.2026. Объем файла 2.08 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.