ISSN 2310–001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 67 3 2026

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА | НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ | ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 67, № 3 (397) **Май—июнь, 2026**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2026

Адрес редакции:
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Телефон: (8-383)-3297597;   e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.9

ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РЕШЕНИЕ ДЛЯ АБСТРАКТНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А. Н. Артюшин

Аннотация. Рассматриваются вариационные неравенства с ограничением на решение для абстрактных гиперболических уравнений. Методом штрафа доказана теорема существования решения. Указаны достаточные условия геометрического характера на множество ограничения, гарантирующие сходимость штрафных решений к решению задачи. При некоторых дополнительных условиях доказывается сильная сходимость приближенных решений. В результате получается решение, для которого выполняется закон сохранения энергии, что соответствует абсолютно упругому удару.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.301

Ключевые слова: вариационные неравенства, абстрактные гиперболические уравнения.

Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Введение

Пусть X — гильбертово пространство, A — положительный самосопряженный оператор в X, $K \subset X$ — выпуклое замкнутое множество. Целью наших исследований будут вариационные неравенства для абстрактных уравнений вида

$$u''(t) + Au(t) = f(t)$$

с ограничением $u(t) \in K$.

Содержательные задачи такого рода возникают уже для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве простейшего примера можно рассмотреть движение частицы под действием внешней силы. Пусть $K \subset R^n$ — выпуклое замкнутое множество. Частица движется внутри множества K. Ее координаты в момент времени t обозначим через $x(t)$. Рассмотрим задачу

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) + h(t), \quad x(t) \in K, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1,$$

где $f(t, x, x')$ — внешняя сила, $h(t)$ — сила реакции стенки. Эта реакция, очевидно, равна 0, когда точка находится внутри K, и направлена внутрь множества K, когда точка находится на границе ∂K. Избавляясь от неизвестной функции $h(t)$, приходим к следующей задаче. Требуется найти такую функцию $x(t)$, что

$$(x''(t) - f(t, x(t), x'(t)), x(t) - \varphi(t)) \le 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1.$$

Здесь $\varphi(t)$ — произвольная гладкая функция такая, что $\varphi(t) \in K$ для $t \in [0,T]$. Очевидно, что этих соотношений еще недостаточно для описания движения частицы. Помимо этого требуется определить характер взаимодействия частицы со стенкой. Если удар о стенку абсолютно упругий, то абсолютная величина скорости частицы после удара не меняется. Если удар абсолютно неупругий, то проекция скорости частицы на нормаль к границе после удара равна 0. После того, как к указанной системе добавлены некие соотношения, регулирующие взаимодействие частицы со стенкой, можно ожидать, что задача поставлена, а значит, должна иметь место единственность решения. Разрешимость такой задачи можно доказать при достаточно общих условиях. Но единственности решения, вообще говоря, нет. При этом упругость или неупругость удара не имеет значения [1–3].

Следующая задача, вызывающая большой интерес, это вариационные неравенства для волнового уравнения в области $\Omega \in R^n$

$$Lu \equiv u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t)$$

с ограничением $u(x,t) \in K$ для п.в. $t \in (0,T)$. Аналогично предыдущему решение определяется как функция $u(t)$, удовлетворяющая неравенству (в смысле распределений)

$$(Lu - f, u - \varphi) \leq 0$$

для всех гладких $\varphi(x,t)$ таких, что $\varphi(x,t) \in K$ для всех $t \in [0,T]$. Особый интерес представляют случаи $n = 1, 2$ и ограничение $u(x,t) \leq m(x)$, $x \in \Omega$. Соответствующее вариационное неравенство описывает колебания струны или мембраны при наличии твердой стенки, ограничивающей движение сверху. В одномерном случае методом характеристик получен ряд результатов, касающихся однозначной разрешимости [4, 5]. Для многомерного волнового уравнения отметим работу [6] с ограничением решения на границе области. Этот случай интересен тем, что задачу удалось свести к вариационному неравенству с монотонным оператором. В работе [7] рассмотрена задача с ограничением для уравнения с дробной степенью оператора Лапласа. В ней реализован любопытный подход, связанный с минимизацией выпуклого функционала.

В ряде работ изучались задачи с ограничением для уравнений вида

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) = f(x,t),$$

$$u_{tt}(x,t) + \Delta^2 u(x,t) + \Delta^2 u_t(x,t) = f(x,t).$$

Отметим лишь [8–10].

Задачи в абстрактной постановке систематически, по-видимому, не изучались. Отметим лишь работу [9]. В этой работе $A : V \to V'$ — эллиптический самосопряженный оператор, вложение $V \subset X$ плотное и компактное. Одно из основных условий требует, чтобы множество K имело непустую внутренность в интерполяционном пространстве V_θ, $0 < \theta < 1$. Как увидим далее, одного этого достаточно для разрешимости задачи. Мы еще вернемся к этому моменту ниже.

В работе автора [11] для одномерного волнового уравнения использовался метод штрафа. Предельный переход удалось обосновать с помощью некого специфического приема. Однако действующие пружины доказательства остались непонятыми. В настоящей работе удалось разобраться с механизмом предельного перехода и обобщить его на абстрактный случай. Оказывается, что решающую роль играет геометрия множества K. Например, достаточно потребовать компактность поляры множества K или (что эквивалентно) секвенциальную слабую замкнутость границы ∂K. Ниже будет дан ряд эквивалентных формулировок. При этих условиях удается получить содержательную оценку на штрафное слагаемое. Эта оценка позволяет доказать, что некоторая последовательность решений уравнений со штрафом сходится к искомому решению. При определенных дополнительных условиях на K доказывается сильная сходимость этой последовательности, а значит, предельная функция удовлетворяет закону сохранения энергии (критерий абсолютно упругого удара).

2. Основная идея

Опишем основную идею решения задачи. Пусть у нас есть линейный оператор L и мы решаем задачу

$$Lu = f$$

с ограничением $u \in K$. Далее считаем, что $0 \in K$. Воспользуемся методом штрафа и для всякого $\varepsilon > 0$ решим уравнение

$$Lu_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) = f$$

с монотонным оператором штрафа β, связанным с множеством K. Предположим, что для приближенных решений имеется оценка

$$\|u_\varepsilon\|_H^2 + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \le C, \tag{2.1}$$

где H — некоторое гильбертово пространство. Из этой оценки вытекает, что для некоторой подпоследовательности $\varepsilon_n \to 0$ (далее индекс n опускаем) имеет место слабая сходимость

$$u_\varepsilon \underset{H}{\rightharpoonup} u$$

и $u \in K$. Пусть $v \in K$ — пробная функция, тогда

$$(Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - v) \le (f, u_\varepsilon - v).$$

Теперь хотелось бы перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. В неравенстве фигурирует квадратичная нелинейность, а значит, для стандартного предельного перехода слабой сходимости u_ε недостаточно. Мы, однако, поступим иначе. А именно, умножим штрафное уравнение на $u - v$ и получим неравенство

$$(Lu_\varepsilon, u - v) \le (f, u - v) + \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u).$$

Левая часть неравенства линейна, и к ней уже можно применять слабую сходимость. Но теперь надо доказать, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \to 0.$$

И вот здесь нам поможет второе слагаемое в оценке (2.1). Обычно из этой оценки извлекают лишь включение $u \in K$. Мы же получим больше. В силу монотонности оператора β для всех $\varphi \in K$

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - \varphi) \ge 0.$$

Отсюда и из оценки (2.1) следует, что

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), \varphi) \leq \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon) \leq C.$$

Предположим, что найдется некое банахово пространство B такое, что вложение $H \subset B$ плотно и компактно. Пусть $K = K_B \cap H$, где множество $K_B \subset B$ имеет непустую внутренность и $0 \in \operatorname{int} K_B$. Тогда из последней оценки легко получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\|\beta(u_\varepsilon)\|_{B^*} \leq C. \tag{2.2}$$

В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $u_\varepsilon \to u$ сильно в B, а значит,

$$\frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \to 0.$$

Такой подход можно использовать и для анализа гладкости решений вариационных неравенств. В силу оценки (2.2) имеем включение

$$Lu_\varepsilon = f - \frac{1}{\varepsilon}\beta(u_\varepsilon) \in X + B^*.$$

Из этого включения можно получить более точные оценки для решения.

В работе [11] был реализован иной способ доказательства, который иногда бывает удобнее. А именно, пусть $\gamma > 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ для достаточно малых ε справедливо включение $\pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K_B$. Отсюда следует, что $\varphi = \pm\gamma(u_\varepsilon - u) \in K$. С помощью этой пробной функции легко получается неравенство

$$0 \leq \frac{1}{\varepsilon}(\beta(u_\varepsilon), u_\varepsilon - u) \leq \frac{C}{\gamma}.$$

Далее устремляем $\gamma \to \infty$.

Таким образом, предельный переход будет обоснован, если найдутся подходящие пространство B и множество K_B. Следует отметить, что для эволюционных уравнений возникают определенные осложнения, поскольку в чистом виде эта схема для них неприменима. Но компактность вложения $H \subset B$ удачным образом помогает справиться со всеми проблемами.

Само по себе условие на множество K, использующее какое-то вспомогательное пространство B, выглядит не очень удобным. Поэтому хотелось бы иметь эквивалентную формулировку, выраженную во внутренних терминах самого множества K. И такую формулировку можно предъявить. Докажем одну лемму, имеющую помимо дальнейшего применения и определенный самостоятельный интерес. Сначала дадим некоторые определения. Пусть H — гильбертово пространство, $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество.

Определение 2.1. Будем говорить, что K *удовлетворяет C-условию*, если множество K обладает непустой внутренностью, а его граница ∂K секвенциально слабо замкнута. Иными словами, если последовательность элементов $\{x_n\}_{n\in N} \subset \partial K$ слабо сходится к некоторому элементу x, то $x \in \partial K$.

Определение 2.2. Будем говорить, что K *удовлетворяет C_0-условию*, если K удовлетворяет C-условию и $0 \in \operatorname{int} K$.

Определение 2.3. Множество $\Phi_K = \{\varphi \in H^* \mid \varphi(x) \leq 1 \ \forall x \in K\}$ называется *полярой множества K*.

Хорошо известно, что поляра Φ_K — замкнутое выпуклое множество, которое однозначно определяет K, если $0 \in \operatorname{int} K$.

Лемма 2.1. *Пусть K — замкнутое выпуклое множество в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

1. *K удовлетворяет C_0-условию.*

2. *Для любой последовательности $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$, слабо сходящейся к 0, найдется номер n_0 такой, что $x_n \in K$ $\forall n > n_0$.*

3. *Поляра Φ_K компактна в H^*.*

4. *Существуют банахово пространство B и замкнутое выпуклое множество $K_B \subset B$ с непустой внутренностью, $0 \in \operatorname{int} K_B$, такие, что вложение $H \subset B$ плотное и компактное и, кроме того, $K = K_B \cap H$.*

Доказательство. 1 $\Rightarrow$ 2. Пусть дана последовательность $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. Будем рассуждать от противного. Переходя, если надо, к подпоследовательности, можно считать, что $x_n \notin K$ $\forall n \in N$. Поскольку $0 \in \operatorname{int} K$, для всякого n найдется $0 < \gamma_n < 1$ такое, что $y_n = \gamma_n x_n \in \partial K$. Ясно, что $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу условия 1 отсюда получаем $0 \in \partial K$; противоречие.

2 $\Rightarrow$ 3. Прежде всего покажем, что поляра Φ_K ограничена. От противного, предположим, что найдется неограниченная последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$. По теореме Рисса для каждого n существует $x_n \in H$ такой, что $\|x_n\| = 1$ и $\varphi_n(x_n) = \|\varphi_n\|$. Положим $y_n = 2x_n/\|\varphi_n\|$. Легко видеть, что $y_n \to 0$. По условию 2 найдется n_0 такое, что $y_n \in K$ $\forall n > n_0$. Но тогда в силу определения Φ_K для этих n имеем $2 = \varphi_n(y_n) \le 1$; противоречие.

Итак, Φ_K ограничено. Теперь покажем, что из всякой последовательности $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. В силу ограниченности множества Φ_K достаточно показать, что всякая слабо сходящаяся последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ на самом деле сходится сильно. Рассуждение вполне аналогично предыдущему. Пусть $\varphi_n \underset{H^*}{\rightharpoonup} \varphi$. Отметим, что $\varphi \in \Phi_K$, так как Φ_K — выпуклое и замкнутое множество. Обозначим $\psi_n = \varphi_n - \varphi$. Как и раньше, выбираем элементы x_n так, чтобы $\|x_n\| = 1$ и $\psi_n(x_n) = \|\psi_n\|$. Без потери общности можно считать, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$ для некоторого элемента x. Наконец, полагая $y_n = x_n - x$, получим $y_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\psi_n\| \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} \psi_n(y_n)$. Пусть $\gamma > 0$ произвольно. Применяя условие 2 к последовательности $\{\gamma y_n\}_{n\in N}$, получим

$$\gamma \varlimsup_{n\to\infty} \psi_n(y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi)(\gamma y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} \varphi_n(\gamma y_n) \le 1.$$

Следовательно, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \|\psi_n\| = 0$.

3 $\Rightarrow$ 1. Из условия 3 следует, что множество Φ_K ограничено. Пусть $M > 0$ и $\|\varphi\| \le M$ $\forall \varphi \in \Phi_K$. Тогда если $x \in H$ и $\|x\| \le 1/M$, то $\varphi(x) \le 1$ $\forall \varphi \in \Phi_K$, а значит, $x \in K$. Следовательно, внутренность K непуста и $0 \in \operatorname{int} K$.

Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset \partial K$ и $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} x$. Так как все элементы x_n принадлежат границе ∂K, то найдется последовательность $\{\varphi_n\}_{n\in N} \subset \Phi_K$ такая, что $\varphi_n(x_n) > 1 - 1/n$. В силу условия 3 из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для простоты оставим за ней прежнее обозначение φ_n. Тогда $\varphi_n \to \varphi$ сильно в H^*. А значит, $\varphi \in \Phi_K$ и

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x_n) \ge 1.$$

Следовательно, $x \in \partial K$.

$4 \Rightarrow 2$. Пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу компактности вложения $H \subset B$ имеем $x_n \to 0$ сильно в B и $\|x_n\|_B \to 0$. По условию (4) имеет место включение $0 \in \operatorname{int} K_B$. Значит, найдется номер n_0 такой, что $x_n \in K_B$ $\forall n > n_0$. Осталось заметить, что тогда $x_n \in K_B \cap H = K$.

$1, 2 \Rightarrow 4$. Обозначим $K_0 = K \cap (-K)$. В силу C_0-условия множество K_0 выпуклое, замкнутое, уравновешенное и имеет непустую внутренность. Значит, оно порождает некую полунорму $p(\cdot)$ в H. Пусть H_1 — произвольное банахово пространство, для которого вложение $H \subset H_1$ плотно и компактно. Норму в пространстве H_1 будем обозначать через $\|\cdot\|_1$. Наконец, обозначим через B банахово пространство, полученное замыканием H относительно нормы $\|x\|_B = p(x) + \|x\|_1$. В качестве K_B выберем замыкание множества K в норме B. Покажем, что построенные пространство B и множество K_B удовлетворяют требованиям условия 4.

Прежде всего, по построению вложение $H \subset B$ плотное. Докажем, что оно и компактное. Действительно, пусть дана последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \underset{H}{\rightharpoonup} 0$. В силу выбора пространства H_1 считаем, что $\|x_n\|_1 \to 0$. Пусть $\gamma > 0$. Используя условие 2, аналогично предыдущему легко показать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1/\gamma$. Поскольку γ произвольно, отсюда вытекает, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) = 0$. Значит, $x_n \to 0$ сильно в B.

Покажем, что множество K_B содержит единичный шар в B. Пусть $y \in B$ и $\|y\|_B \le 1$. По определению это означает, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset H$ такая, что $x_n \to y$ сильно в B и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \|x_n\|_B \le 1$. В частности, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, p(x_n) \le 1$.

Предположим, что найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k\in N}$ такая, что на ней $p(x_{n_k}) \le 1$. Тогда $x_{n_k} \in K$ $\forall k > 0$, а значит, $y \in K_B$, коль скоро K_B — это замыкание K в B.

Предположим, что такой подпоследовательности не найдется. В этом случае можно считать, что $p(x_n) > 1$ $\forall n > 0$ и $p(x_n) \to 1$. Тогда можно положить $\overline{x}_n = x_n/p(x_n)$. Легко видеть, что $\overline{x}_n \in K$ и $\|\overline{x}_n - x_n\|_B \to 0$. Значит, $\overline{x}_n \to y$ и $y \in K_B$.

Осталось показать, что $K = K_B \cap H$. Пусть $x \in K_B \cap H$. Это значит, что найдется последовательность $\{x_n\}_{n\in N} \subset K$ такая, что $\|x - x_n\|_B \to 0$ и, следовательно, $p(x - x_n) \to 0$. Рассмотрим произвольный функционал $\varphi \in \Phi_K$. Так как $p(x - x_n) \to 0$, то для любого $\gamma > 0$ найдется n_γ такое, что $\gamma(x - x_n) \in K_0 \subset K$ $\forall n > n_\gamma$. Отсюда получаем, что $\varphi(x - x_n) \le 1/\gamma$ $\forall n > n_\gamma$ и $\varphi(x) \le 1 + 1/\gamma$. Но γ произвольно, значит, $\varphi(x) \le 1$. В силу произвольности φ получаем $x \in K$. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.1. Следует отметить, что данная лемма дает конструктивное описание искомого пространства B, что позволяет легко применять ее на практике. Пусть, например, $\Omega \subset R^n$, мы рассматриваем тот или иной класс заданных на Ω функций, и ограничение имеет вид $K = \{u(x) \mid u(x) \le 1,\, x \in \Omega\}$. В этом случае из построения леммы сразу же получаем, что $B = C(\Omega)$. Для наших рассуждений требуется компактность вложения $H \subset B$. Это значит, что при $n = 1$ в лемме 2.1 выполняется условие 4, если $H = W_2^1(\Omega)$. А при $n = 2, 3$ приходится повышать гладкость. В этом случае в качестве H подходит пространство $W_2^2(\Omega)$.

Замечание 2.2. В работе [9] предполагалось, что K имеет непустую внутренность в пространстве V_θ. Заметим, что при этом вложение $V \subset V_\theta$ компактно. Следовательно, в лемме 2.1 можно положить $B = V_\theta$.

3. Абстрактный результат

Пусть X, H — сепарабельные гильбертовы пространства, вложение $H \subset X$ плотно и непрерывно (компактность вложения не предполагается). Скалярное произведение в пространстве X обозначаем круглыми скобками. Отождествляя X и X^*, получим
$$H \subset X \subset H^*.$$
Пусть задан линейный оператор $A \in \mathscr{L}(H, H^*)$ такой, что $A = A_0 + A_1$, где $A_0 \in \mathscr{L}(H, H^*), A_1 \in \mathscr{L}(H, X)$, причем $A_0 = A_0^*$ и для некоторой константы $a_0 > 0$
$$(A_0 u, u) \geq a_0 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in H.$$
Пусть $K \subset H$ — замкнутое выпуклое множество и $T > 0$. На интервале $(0, T)$ рассмотрим следующую задачу:
$$u''(t) + Au(t) = f(t), \tag{3.1}$$
$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u(t) \in K \quad \text{для п.в. } t \in (0, T). \tag{3.2}$$
Для определения решения этой задачи рассмотрим пространство
$$W = \{u(t) \mid u \in L_2(0, T; H),\ u' \in L_2(0, T, X)\}$$
и множество
$$W_K = \{u(t) \in W \mid u(t) \in K \text{ для п.в. } t \in (0, T)\}.$$
Для произвольных $u(t), v(t) \in W$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$ положим
$$L(u, v, \Phi) = -\int_0^T ((u'(t), v'(t))\Phi(t) + (u'(t), v(t))\Phi'(t))\, dt + \int_0^T (Au(t), v(t))\Phi(t)\, dt.$$
Пусть $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f(t) \in L_2(0, T; X)$. *Решением задачи* (3.1), (3.2) назовем функцию $u(t) \in W_K$ такую, что $u(0) = u_0$ и для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0, T]$, $\Phi(t) \geq 0$, $\Phi(T) = 0$, справедливо неравенство
$$L(u, u - \varphi, \Phi) \leq \int_0^T (f(t), u(t) - \varphi(t))\Phi(t) dt + (u_1, u(0) - \varphi(0))\Phi(0). \tag{3.3}$$
Данное неравенство получено формальным умножением уравнения (3.1) на $(u(t) - \varphi(t))\Phi(t)$ и интегрированием по частям. Как увидим позже, решение задачи будет более гладким. В связи с этим введем пространство
$$W^\infty = \{u(t) \mid u \in L_\infty(0, T; H),\ u' \in L_\infty(0, T, X)\}$$
с нормой
$$\|u\|_{W^\infty} = \|u\|_{L_\infty(0,T;H)} + \|u'\|_{L_\infty(0,T,X)}.$$

Решение вариационного неравенства будем получать методом штрафа. Для обоснования предельного перехода нам понадобится следующая

Лемма 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть даны последовательности $\{u_{1n}\}_{n\in N} \subset X$, $\{f_n(t)\}_{n\in N} \subset L_2(0,T;X)$, $\{u_n(t)\}_{n\in N} \subset W^\infty$, удовлетворяющие неравенству (3.3) для всякого n. Предположим, что для некоторых $u_1, f(t), u(t)$ при $n \to \infty$ имеют место сходимости*

$$\begin{aligned} u_{1n} &\to u_1 \quad \text{сильно в } X,\\ f_n(t) &\to f(t) \quad \text{сильно в } L_2(0,T;X),\\ u_n(t) &\rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),\\ u_n'(t) &\rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X). \end{aligned}$$

Тогда $u_1, f(t), u(t)$ тоже удовлетворяют неравенству (3.3).

Доказательство. Совершим предельный переход при $n \to \infty$ в неравенстве (3.3). Правая часть в этом неравенстве линейная по u. Кроме этого

$$L(u_n, u_n - \varphi, \Phi) = L(u_n, u - \varphi, \Phi) + L(u_n, u_n - u, \Phi).$$

Первое слагаемое в правой части данного равенства линейно по u_n, поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n, u_n - u, \Phi) = 0.$$

Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Тогда это множество удовлетворяет C_0-условию. Применим к нему лемму 2.1 и обозначим через B и K_B соответствующее банахово пространство и его подмножество. По условию теоремы $u_n(t)$ и $u_n'(t)$ равномерно ограничены в пространствах $L_\infty(0,T;H)$ и $L_\infty(0,T;X)$ соответственно. В силу компактности вложения $H \subset B$ семейство функций $u_n(t)$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно в $C([0,T];B)$. А значит, по теореме Асколи — Арцела имеет место сильная сходимость $u_n(t) \to u(t)$ в $C([0,T];B)$. Для доказательства равностепенной непрерывности заметим, что для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство (см., например, [12, лемма 5.1])

$$\|u_n\|_B \le \varepsilon \|u_n\|_H + C(\varepsilon)\|u_n\|_X.$$

Следовательно,

$$\|u_n(t+\delta) - u_n(t)\|_B \le 2\varepsilon \|u_n\|_{L_\infty(0,T;H)} + C(\varepsilon)|\delta| \|u_n'\|_{L_\infty(0,T;X)}.$$

Напомним, что $0 \in \operatorname{int} K_B$. Значит, для любого $\gamma > 0$ найдется номер n_γ такой, что $\pm\gamma(u_n(t) - u(t)) \in K_B$ $\forall t \in [0,T]$, если $n > n_\gamma$. Обозначим

$$\varphi_{\pm\gamma}(t) = w_0 \pm \gamma(u_n(t) - u(t)).$$

Тогда для почти всех $t \in (0,T)$ имеет место включение $\varphi_{\pm\gamma}(t) \in w_0 + (K_B \cap H) = K$. Подставляя эту функцию в неравенство (3.3), после несложных преобразований получим

$$\mp\gamma L(u_n, u_n - u, \Phi) \pm \gamma \int_0^T (f_n(t), u_n(t) - u(t))\Phi(t)dt \pm \gamma(u_{1n}, u_n(0) - u(0))\Phi(0) \le C,$$

а значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |(L(u_n, u_n - u, \Phi)| \le C/\gamma.$$

Отсюда в силу произвольности γ заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} L(u_n, u_n - u, \Phi) = 0.$$

Лемма доказана. □

Следствие 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть для некоторых $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0,T;X)$ имеется последовательность $\{u_n(t)\}_{n\in N} \subset W^\infty$ решений задачи* (3.1), (3.2). *Предположим, что для некоторой $u \in W^\infty$*

$$u_n(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$

$$u_n'(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

Тогда $u(t)$ тоже решение задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 3.1, имеем сильную сходимость $u_n(t) \to u(t)$ в $C([0,T];B)$. По условию $u_n \in W_K$ для всех n. Следовательно, $u \in K_B$ для всех $t \in [0,T]$, а значит, $u \in K_B \cap H = K$ для п.в. $t \in [0,T]$. Таким образом, $u \in W_K$. Остается применить лемму 3.1. $\square$

Замечание 3.1. Для последовательностей $\{u_{1n}\}_{n\in N}$ и $\{f_n(t)\}_{n\in N}$ мы потребовали сильную сходимость. Однако это условие зачастую можно ослабить. Все, что нам надо, это сходимость к нулю $(u_{1n}, u_n(0)-u(0))$ и $(f_n(t), u_n(t)-u(t))$. Пусть, например, вложение $H \subset X$ компактно. Тогда $u_n(t) \to u(t)$ сильно в $C([0,T],X)$, а значит, вместо сильной сходимости последовательностей можно ограничиться слабой.

Может показаться, что условие леммы слишком ограничительное. Однако вот пример, в котором слабый предел решений задачи решением не является. Пусть $X = H = \ell_2$. Естественный базис в этом пространстве обозначим через $\{e_n\}_{n\in N}$. Будем выделять первую компоненту элементов из X и записывать $x = (x_1, x_2, \dots)$ в виде $x = (x_1, y)$, где $y = (x_2, x_3, \dots)$. Множество K — объединение двух конусов с общим основанием: $K = K_1 \cup K_2$

$$K_1 = \left\{ x \in X \mid x_1 \geq 0, x_1 + \frac{2}{\sqrt{3}}|y| \leq 1 \right\},$$

$$K_2 = \{x \in X \mid x_1 \leq 0, -x_1 + 2\sqrt{3}|y| \leq 3\}.$$

Будем рассматривать простейшее уравнение

$$u''(t) = 0.$$

По аналогии с конечномерным случаем будем говорить о движении частицы в множестве K. В начальный момент $u'(0) = (1, 0, 0, \dots)$. Предполагается, что все удары частицы абсолютно упругие. Углы конусов подобраны так, что частица сначала движется до столкновения с границей конуса ∂K_1, отразившись от стенки движется до границы ∂K_2, на которую она падает под прямым углом. Значит, после отражения частица движется обратно по той же самой траектории. Главной особенностью данного примера является следующий факт. Изначально вся энергия сосредоточена в первой компоненте («гармонике»). После первого удара некоторая (вполне определенная) часть энергии переносится в другие компоненты, а в какие именно зависит от начального значения $u(0)$. Выбирая $u(0)$ подходящим образом, можно добиться передачи энергии во все более дальние компоненты. В соответствии с этим для всякого $n > 1$ рассмотрим движение частицы с начальными данными $u_{0n} = \frac{1}{n}e_n$. Рассмотрим слабый предел решений задачи с этими начальными данными. Легко видеть, что предельная функция $u(t)$ имеет следующий вид:

$$u(t) = \begin{cases} (t, 0) & \text{при } t \le 1, \\ (1 - \frac{t-1}{2}, 0) & \text{при } 1 \le t \le 3, \\ \left(\frac{t-3}{2}, 0\right) & \text{при } 3 \le t. \end{cases}$$

Сначала частица движется с единичной скоростью до тех пор, пока не попадет в вершину конуса K_1. После этого происходит отражение и частица движется обратно со скоростью 1/2. Предельная функция все еще является решением задачи, хотя часть энергии уже потеряна (удар оказался неупругим). Но когда частица приходит в точку $x = 0$, скорость вновь меняет знак, как если бы произошло отражение. В этот момент данная функция перестает быть решением задачи.

Данный пример может показаться искусственным, но он важен тем, что наглядно показывает роль геометрии границы множества K. Углы способны непредсказуемым образом перемещать энергию из одних «гармоник» в другие. Это лишний раз показывает, что трудности в обосновании предельного перехода носят объективный характер и связаны с существом дела. В частности, нет каких-то особых оснований ожидать, что решения уравнений со штрафом будут сходиться к решению исходной задачи. В этом контексте стоит отметить, что C-условие запрещает появление конических углов на границе K.

Нам понадобится еще одна техническая лемма.

Лемма 3.2. *Пусть $\psi \in H^*$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C(\varepsilon)$ такая, что*

$$|\psi(u)| \le \varepsilon \|u\|_H + C(\varepsilon)\|u\|_X \quad \forall u \in H.$$

Доказательство стандартное от противного. Пусть утверждение неверно для некоторого $\varepsilon > 0$. Тогда для всякого $n > 0$ найдется такой элемент $u_n \in H$, что $\|u_n\|_H = 1$ и

$$|\psi(u_n)| > \varepsilon + n\|u_n\|_X.$$

Переходя, если надо, к подпоследовательности, отсюда заключаем, что для некоторого $v \in H$ имеет место слабая сходимость $u_n \underset{H}{\rightharpoonup} v$. Следовательно, $\psi(u_n) \to \psi(v)$. С другой стороны, $u_n \to 0$ сильно в X. Значит, $v = 0$ и получаем противоречие: $\varepsilon < |\psi(u_n)| \to 0$. $\square$

Теперь мы готовы к тому, чтобы доказать разрешимость задачи (3.1), (3.2).

Теорема 3.1. *Пусть множество K удовлетворяет C-условию. Пусть $u_0 \in K$, $u_1 \in X$, $f \in L_2(0, T; X)$. Тогда существует решение $u(t)$ задачи* (3.1), (3.2) *такое, что $u \in W^\infty$.*

Доказательство. Воспользуемся методом штрафа. Для этого надо построить соответствующий оператор штрафа. Пусть $w_0 \in \operatorname{int} K$. Положим $K_0 = K - w_0$. Это множество удовлетворяет C_0-условию. Далее исключительно ради простоты считаем, что $w_0 = 0$ и $K_0 = K$. В общем случае следует использовать сдвиг вида $u(t) - w_0$.

В силу леммы 2.1 множество Φ_{K_0} компактно. Значит, по теореме Крейна — Мильмана оно является замкнутой выпуклой оболочкой своих крайних точек.

Обозначим его через E_K. Пусть $\{\psi_k\}_{k\in N}\subset E_K$ — счетное плотное подмножество в E_K. Как обычно, определяем положительную срезку

$$\xi^+ = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \geq 0. \end{cases}$$

Для всякой $u(t)\in W$ и $k\geq 1$ обозначим

$$b^+_{k,u}(t) = (\psi_k(u(t)) - 1)^+,$$

и для всякого $n\geq 1$ определим $\beta_{n,u}(t)\in H^*$ по формуле

$$\beta_{n,u}(t) = n\sum_{k=1}^{n} b^+_{k,u}(t)\psi_k.$$

С геометрической точки зрения мы заменили множество K_0 пересечением конечного количества полупространств, порожденных некоторыми опорными функционалами. Элемент $\beta_{n,u}$ состоит из суммы слагаемых, каждое из которых штрафует выход из соответствующего полупространства.

Отметим, что для любой $\varphi(t)\in W_K$ справедливо неравенство

$$\beta_{n,u}(t)(u(t)-\varphi(t)) \geq 0 \quad \text{для п.в. } t\in(0,T). \tag{3.4}$$

Действительно, рассмотрим какое-нибудь $k\geq 1$. По определению Φ_{K_0} для почти всех $t\in(0,T)$ имеем неравенство $\psi_k(\varphi(t))\leq 1$. Но тогда там, где $b^+_{k,u}(t)>0$, выполняется неравенство $\psi_k(u(t)-\varphi(t))\geq 0$. А значит, $b^+_{k,u}(t)\psi_k(u(t)-\varphi(t))\geq 0$ для п.в. $t\in(0,T)$.

На интервале $(0,T)$ рассмотрим следующую штрафную задачу:

$$u''(t) + Au(t) + \beta_{n,u}(t) = f(t), \tag{3.5}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1. \tag{3.6}$$

Разрешимость этой задачи легко устанавливается методом Галёркина. Все действия абсолютно стандартны, поэтому ниже мы даем лишь схему доказательства, опуская второстепенные детали. Пусть $\{e_j\}_{j\in N}$ — ортонормированный базис в H. При этом если $u_0\neq 0$, то

$$e_1 = u_0/\|u_0\|_H.$$

В противном случае выбор базиса произвольный. Как обычно, для $M>0$ будем искать приближенное решение u_M в виде

$$u_M = \sum_{j=1}^{M} a_{M,j}(t)e_j.$$

Начальные данные $a_{M,j}(0), a'_{M,j}(0)$ задаем следующим образом. Обозначим $H_M = \operatorname{span}\{e_j\}_{j\leq M}$. Тогда для задания начальных данных $a_{M,j}(0)$, $a'_{M,j}(0)$ следует указать два элемента $u_{0M}, u_{1M}\in H_M$. В силу специального выбора базиса можно положить $u_{0M}=u_0$. При этом, очевидно, $u_{0M}\in H_M\cap K$. Пусть P_M — ортогональный проектор в пространстве X на подпространство H_M. Положим $u_{1M}=P_M u_1$. Так как вложение $H\subset X$ плотно, а конечные линейные комбинации всех базисных элементов плотны в H, то $u_{1M}\to u_1$ в X при $M\to\infty$.

Далее для простоты записи индекс M опускаем. Для получения первой оценки умножаем уравнение (3.5) на $u'(t)$ и интегрируем по t. Заметим, что поскольку $u_0 \in K$, то $b^+_{k,u}(0) = 0$, $k \le n$. В результате для всех $t \in (0,T)$ получим

$$\|u'(t)\|^2_X + (A_0u(t), u(t)) + n\sum_{k=1}^{n}(b^+_{k,u}(t))^2 \le C + C\int_0^t \left(\|u'(s)\|^2_X + \|u(s)\|^2_H + \|u(s)\|^2_X\right) ds.$$

Воспользовавшись леммой Гроноулла и условием на оператор A_0, отсюда получаем оценку

$$\|u'(t)\|^2_X + \|u(t)\|^2_H + n\sum_{k=1}^{n}(b^+_{k,u}(t))^2 \le C_0 \quad \forall t \in (0,T). \tag{3.7}$$

Вторую оценку (она нам понадобится позже) получаем умножением уравнения (3.5) на $u(t)$:

$$n\sum_{k=1}^{n}\int_0^T b^+_{k,u}(t)\,dt \le C_1. \tag{3.8}$$

Важно отметить, что константы C_0, C_1 в этих оценках зависят только от f, u_0, u_1 и не зависят от M, n.

Из этих оценок вытекает существование решения $u_M(t)$ на всем интервале $(0,T)$. Далее переходим к пределу при $M \to \infty$. В результате получим $\overline{u}(t) \in W^\infty$. При этом можно считать, что

$$u_M(t) \rightharpoonup \overline{u}(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$
$$u'_M(t) \rightharpoonup \overline{u}'(t) \quad \ast\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

Легко видеть, что это и есть решение задачи (3.5), (3.6). Некоторые вопросы может вызвать лишь обоснование предельного перехода

$$(\psi_k(u_M(t)) - 1)^+ \to (\psi_k(\overline{u}(t)) - 1)^+ \text{ для п.в. } t \in (0,T).$$

Пусть $1 \le k \le n$. Покажем, что $p_M(t) = \psi_k(u_M(t))$ сходятся к $p(t) = \psi_k(\overline{u}(t))$ сильно в $C[0,T]$ при $M \to \infty$. Для этого применим теорему Асколи — Арцела. Равномерная ограниченность всех $p_M(t)$ следует из равномерной ограниченности $\|u_M\|_H$ (оценка (3.7)). Покажем, что семейство этих функций равностепенно непрерывно. Рассуждение совершенно аналогично тому, что было при доказательстве леммы 3.1. Пусть $\varepsilon > 0$ и $t_2 > t_1$. Применяя лемму 3.2 к функционалу ψ_k, получаем

$$|p_M(t_2) - p_M(t_1)| \le 2C_0\varepsilon + C(\varepsilon)\int_{t_1}^{t_2}\|u'(t)\|_X dt \le C(\varepsilon + C(\varepsilon)|t_2 - t_1|).$$

Правую часть в этом неравенстве можно сделать сколь угодно малой, если сначала выбрать малое ε, а затем потребовать нужную малость $|t_2 - t_1|$.

Итак, решение задачи со штрафом получено. Обозначим его через $v_n(t)$. Теперь перейдем к пределу по n. Заметим, что в силу (3.4) для любых $\varphi(t) \in W_K$ и $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, для функции $v_n(t)$ справедливо неравенство (3.3). Семейство функций $\{v_n(t)\}_{n\in N}$ равномерно ограничено в W^∞. Значит, найдутся элемент $u(t) \in W^\infty$ и подпоследовательность $\{v_{n_k}(t)\}_{k\in N}$ такие, что

$$v_{n_k}(t) \rightharpoonup u(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;H),$$

$$v'_{n_k}(t) \rightharpoonup u'(t) \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;X).$$

По лемме 3.1 функция $u(t)$ тоже удовлетворяет неравенству (3.3). При этом $v_n(0) = u_0$, а значит, и $u(0) = u_0$. Осталось показать, что $u(t) \in W_K$. Фиксируем k и рассмотрим функционал ψ_k. Из оценки (3.7) следует, что для любого $t \in (0,T)$

$$\psi_k(v_n(t)) \le 1 + \sqrt{C_0/n}.$$

Как и раньше, с помощью леммы 3.2 показываем, что $\psi_k(v_n(t)) \to \psi_k(u(t))$ сильно в $C[0,T]$. Следовательно, $\psi_k(u(t)) \le 1$ $\forall t \in (0,T)$. Отсюда сначала заключаем, что соответствующее неравенство верно для всех $\psi \in E_K$, а затем и для всех $\psi \in \Phi_{K_0}$. Теорема доказана. $\square$

4. Абсолютно упругий удар

Пусть $u(t)$ — решение задачи (3.1), (3.2). Положим

$$E(t) = \|u'(t)\|_X^2 + 2(A_0u(t), u(t)).$$

Будем говорить, что для $u(t)$ выполняется *закон сохранения энергии*, если для любой функции $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$, справедливо равенство

$$E(0)\Phi(0) + \int_0^T E(s)\Phi'(s)\,ds = 2\int_0^T (A_1u(s) - f, u'(s))\Phi(s)\,ds.$$

Неформально будем говорить, что в этом случае удары абсолютно упругие.

Теорема 3.1 дает существование какого-то решения, но не дает никакой информации о том, сохраняется для него энергия или нет. Отметим, что это свойство эквивалентно сильной сходимости последовательности решений уравнений со штрафом. Судя по всему, в некоторых случаях такой сходимости нет и энергия не сохраняется. Однако при некоторых дополнительных условиях на множество K требуемую сходимость получить все-таки удается.

Теорема 4.1. *Пусть множество $K_X \subset X$ удовлетворяет C-условию в пространстве X, $K = K_X \cap H$. Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и $\{v_n\}_{n\in N}$ — последовательность решений уравнений со штрафом, которая сходится к решению $u(t)$ задачи* (3.1), (3.2). *Тогда*

$$v_n(t) \to u(t) \quad \textit{сильно в } L_\infty(0,T;H), \tag{4.1}$$

$$v'_n(t) \to u'(t) \quad \textit{сильно в } L_2(0,T;X) \tag{4.2}$$

и для $u(t)$ выполняется закон сохранения энергии.

Доказательство. Пусть $\overline{w} \in \operatorname{int} K_X \cap H$. Пусть $K_0 = K_X - \overline{w}$, $\Phi_{K_0} \subset X$ — поляра множества K_0 (напомним, что мы отождествляем X и X^*). Как и ранее, для простоты считаем, что $\overline{w} = 0$.

Прежде всего, сделаем одно замечание относительно функционалов $\psi_k \in H^*$ из доказательства теоремы 3.1. Рассмотрим какой-нибудь такой функционал ψ_k. По условию теоремы $\operatorname{int} K_X \neq \varnothing$ и $K = K_X \cap H$. Значит, для некоторого $r > 0$ и любого $w \in H$ имеем

$$\pm r \frac{w}{\|w\|_X} \in K, \quad |\psi_k(w)| \leq \frac{\|w\|_X}{r}.$$

Следовательно, по непрерывности функционал ψ_k продолжается до функционала $\psi_k' \in X^*$, причем $\|\psi_k'\|_{X^*} \leq 1/r$. Кроме этого, по непрерывности имеет место неравенство $\psi_k'(x) \leq 1$ для всех $x \in K_X$. Поэтому $\psi_k' \in \Phi_{K_0}$. В дальнейшем просто считаем, что $\psi_k \in \Phi_{K_0}$.

Пусть $n, m > 0$. Положим $w_{n,m}(t) = v_n(t) - v_m(t)$. Далее там, где это не вызовет недоразумений, индексы n, m будем опускать. Кроме этого, вместо $b_{k,u}^+$ и $\beta_{n,u}$ пишем просто b_k^+ и β_n. Легко видеть, что функция $w(t)$ удовлетворяет системе

$$w''(t) + Aw(t) + \chi(t) = 0, \quad w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \tag{4.3}$$

где $\chi(t) = \beta_n(t) - \beta_m(t)$. Мы хотели бы умножить уравнение (4.3) на $w'(t)$ и получить оценку для $w(t)$ в пространстве W^∞. Но такое простое рассуждение не проходит. Вместо этого будем умножать уравнение на $Qw'(t)$, где Q — некий специальный проектор в X. Этот проектор будет подобран так, чтобы $(\chi(t), Qw'(t))$ было мало, но при этом $(A_0 w, Qw'(t)) \sim (A_0 w, w'(t))$.

Сначала докажем сходимость (4.1). В силу условий на A_0, A_1 найдется такое $q > 0$, что

$$q(\|u\|_X^2 + (A_0 v, v)) \geq |(A_1 v, u)| \quad \forall u \in X, \forall v \in H.$$

По лемме 2.1 поляра $\Phi_{K_0} \subset X$ компактна, а значит, вполне ограничена. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется семейство $\eta_1, \dots, \eta_L \subset H$, образующее ε-сеть в Φ_{K_0}. Вообще говоря, элементы η_k могут не принадлежать Φ_{K_0}, но для нас это неважно, главное чтобы это семейство было ограничено в X константой, не зависящей от ε. Рассмотрим штрафное слагаемое $\beta_n(t)$. По построению оно имеет вид

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b_k^+(t) \psi_k,$$

где $\psi_k \in \Phi_{K_0}$, $k = \overline{1, n}$. Используя ε-сеть, это слагаемое можно записать в виде

$$\beta_n(t) = n \sum_{k=1}^{n} b_k^+(t)(\psi_k - \eta_{j_k}) + \sum_{j=1}^{L} \widetilde{b}_j(t) \eta_j,$$

причем $\|\psi_k - \eta_{j_k}\|_X \leq \varepsilon$, $k = \overline{1, n}$. Аналогичное представление имеет место и для $\beta_m(t)$. В результате с учетом оценки (3.8) получаем, что

$$\chi(t) = \chi_0(t) + \sum_{j=1}^{L} \theta_j(t) \eta_j,$$

где $\|\chi_0(t)\|_{L_1(0,T;X)} \leq 2C_1 \varepsilon$ и $\|\theta_j(t)\|_{L_1(0,T)} \leq 2C_1$, $j = \overline{1, L}$.

Пусть $X_L = \operatorname{span}\{\eta_j\}_{j\le L}$, $X_L \subset X$. Обозначим через P ортогональный проектор в X на это подпространство X_L и $Q = I - P$. Умножая уравнение (4.1) на $2e^{-2qt}Qw'(t)$ и интегрируя, для $t\in(0,T)$ получаем

$$e^{-2qt}(A_0w(t),w(t)) \le 4\varepsilon C_1\|w_t\|_{L_\infty(0,T;X)} + 2\int\limits_0^t e^{-2qs}(A_0w(s),Pw'(s))\,ds. \quad (4.4)$$

Строгое обоснование этой оценки можно получить, если рассматривать функцию $w(t)$ как единственное решение задачи (4.3). Доказываем ее разрешимость методом Галёркина, причем функции $\{\eta_j\}_{j\le L}$ включаем в базис. Требуемая оценка будет выполнена для приближенных решений с достаточно большим номером. После этого она переносится на функцию $w(t)$ с помощью предельного перехода.

Пусть $e_1,\dots,e_L$ — ортонормированный базис в X_L. Заметим, что в силу выбора элементов $\eta_j\in H$ имеем и $e_j\in H$, $j=\overline{1,L}$. Тогда

$$(A_0w(s),Pw'(s)) = \sum_{j=1}^L (w'(s),e_j)(w(s),A_0e_j). \quad (4.5)$$

Напомним, что речь идет о функции $w_{n,m}(t)=v_n(t)-v_m(t)$. По построению все эти функции равномерно ограничены в W^∞. Поэтому $(w'_{n,m}(s),e_j)\in L_\infty(0,T)$ $\forall j=\overline{1,L}$. Как и раньше, из леммы 3.2 получаем, что $(w_{n,m}(s),A_0e_j)\to 0$ $\forall j=\overline{1,L}$ сильно в $C[0,T]$. Соединяя (4.4) и (4.5), переходим к пределу при $n,m\to\infty$. В результате имеем неравенство

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\|v_n(t)-v_m(t)\|_{L_\infty(0,T;H)} \le C\sqrt{\varepsilon}.$$

Отсюда и из произвольности ε следует (4.1).

Теперь уже легко доказать сходимость (4.2). Пусть весовая функция $\Phi(t)\in C^1[0,T]$ такова, что $\Phi(t)\ge 0$, $t\in(0,T)$ и $\Phi(T)=0$. Умножаем уравнение (4.3) на $\Phi(t)w(t)$ и интегрируем:

$$\int\limits_0^T \|w'(t)\|_X^2\Phi(t)\,dt = \int\limits_0^T \Phi(t)\left((Aw(t),w(t)) + (\chi(t),w(t))\right)\,dt + \int\limits_0^T (w'(t),w(t))\Phi'(t)\,dt.$$

Заметим, что $\chi\in L_1(0,T;X)$. В силу равномерной ограниченности всех $w'_{n,m}(t)$ в $L_\infty(0,T;X)$ и сходимости (4.1) получаем

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\int\limits_0^T \|v'_n(t)-v'_m(t)\|_X^2\Phi(t)\,dt = 0.$$

Пусть $\varepsilon>0$. Выберем весовую функцию $\Phi(t)$ так, чтобы $\Phi(t)=1$ для $0\le t\le T-\varepsilon$. Тогда

$$\int\limits_0^T \|v'_n-v'_m\|_X^2\,dt \le \int\limits_0^T \|v'_n(t)-v'_m(t)\|_X^2\Phi(t)\,dt + 2\varepsilon\big(\|v'_n\|^2_{L_\infty(0,T;X)}+\|v'_m\|^2_{L_\infty(0,T;X)}\big).$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}} \int\limits_0^T \|v_n' - v_m'\|_X^2\, dt \le C\varepsilon.$$

Отсюда следует (4.2).

Покажем, что для предельного решения выполняется закон сохранения энергии. Пусть $\Phi(t) \in C^1[0,T]$, $\Phi(T) = 0$. Мы только что доказали сильную сходимость последовательности $v_n(t)$. В силу этого достаточно установить, что

$$J_n = \int\limits_0^T (\beta_n(s), v_n'(s))\Phi(s)\, ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Легко видеть, что

$$2J_n = -\int\limits_0^T n \sum_{k=1}^n (b_k^+(s))^2 \Phi'(s)\, ds.$$

Отсюда, используя (3.7) и (3.8), получаем

$$2|J_n| \le C \sup_{k,s} b_k^+(s) \le C/\sqrt{n}.$$

Следовательно, $J_n \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Стоит отметить, что главную роль в этом доказательстве играет некоторая специальная ε-сеть. Существование такой сети обеспечивает C-условие для множества K_X. В том случае, когда вложение $H \subset X$ компактно, условия на множество K можно ослабить. Эти условия носят несколько громоздкий характер, и мы их не приводим.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Paoli L., Schatzman M.* Mouvement à un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d′énergie // Modél. Math. and Computer Modelling (M2AN). 1993. V. 27. P. 673–717.
2. *Schatzman M.* Uniqueness and continuous dependence on data for one-dimensional impact problems // Math. and Computer Modelling. 1998. V. 28, N 4–8. P. 1–18.
3. *Ballard P.* The dynamics of discrete mechanical systems with perfect unilateral constraints // Arch. Rational Mech. Anal. 2000. V. 154. P. 199–274.
4. *Schatzman M.* A hyperbolic problem of second order with unilateral constraints: The vibrating string with a concave obstacle // J. Math. Anal. Appl. 1980. V. 73, N 1. P. 138–191.
5. *Bamberger A., Schatzman M.* New results on the vibrating string with a continuous obstacle // SIAM J. Math. Anal. 1983. V. 14, N 3. P. 560–595.
6. *Lebeau G., Schatzman M.* A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary // J. Differ. Equ. 1984. V. 53. P. 309–361.
7. *Bonafini M., Novaga M., Orlandi G.* A variational scheme for hyperbolic obstacle problems // Nonlinear Anal. 2019. V. 188. P. 389–404.
8. *Ahn J., Steawart D. E.* An Euler–Bernoulli beam with dynamic contact: discretization, convergence and numerical results // SIAM J. Numer. Anal. 2005. V. 43, N 4. P. 1455–1480.
9. *Ahn J., Steawart D. E.* Existence of solutions for a class of impact problems without viscosity // SIAM J. Math. Anal. 2006. V. 38, N 1. P. 37–63.
10. *Ahn J., Park Eun-Jae.* Dynamic frictionless contact of a nonlinear beam with two stops // Appl. Anal.: An Intern. J. 2014. DOI:10.1080/00036811.2014.931026.
11. *Артюшин А. Н.* Вариационные неравенства для волнового уравнения с ограничением на решение. // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 5. С. 1033–1035.

12. *Лионс Ж. -Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

Поступила в редакцию 15 марта 2026 г.
После доработки 30 марта 2026 г.
Принята к публикации 10 апреля 2026 г.

Артюшин Александр Николаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alexsp3@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 519.682.1+519.683+519.7+519.1

ОБЪЕКТНО–ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ДАННЫЕ И ПРЕФИКСНАЯ ПЕРЕЗАПИСЬ. ЧАСТЬ I: ОБЗОР И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

А. Е. Гутман

Аннотация. Детерминированная префиксная перезаписывающая система представляет собой систему перезаписи строк, не содержащую пар правил вида $X \to Y$, $X \to Z$, где $Y \neq Z$, в которой перезаписи подлежат только самые длинные префиксы. Для таких систем определяются и исследуются аналоги понятий, характерных для объектно-ориентированных систем данных: наследование классов и объектов, экземпляры классов, атрибуты классов и экземпляров, концептуальная зависимость и непротиворечивость, концептуальная схема, типы, подтипы и др. Особое внимание уделяется алгоритмической проверке различных свойств рассматриваемых перезаписывающих систем.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.302

Ключевые слова: префиксная перезапись, полутуэвская система, информационная система, объектно-ориентированная система данных, проверка непротиворечивости, онтология модели данных.

Введение

Классический объектно-ориентированный подход к описанию структурированных данных задействует два фундаментальных отношения: *has* («иметь») и *is* («быть»).

Отношение *has* связывает объекты и классы с их атрибутами. Соотношение «`X` *has a* `Y`» («`X` *имеет* `Y`») означает, что объект или класс `X` обладает атрибутом с именем `Y`, и тем самым можно говорить об «`Y` объекта `X`» как о свойстве объекта `X`, обычно обозначаемом через `X.Y`. Например, если веб-страница имеет кнопку отправки, стиль которой предполагает наличие рамки определенной ширины, то можно говорить о «ширине рамки стиля кнопки страницы», имея в виду объект `page.submitButton.style.border.width`.

Отношение *is* может использоваться для (1) создания экземпляров классов, (2) наследования классов от классов и (3) присваивания значений атрибутам. Соотношение «40 *is an* `Integer`» («40 — *это* `Integer`») связывает объект 40 с классом `Integer` и подразумевает, что число 40 является экземпляром класса `Integer`. Фраза «`Integer` *is* `Number`» означает, что класс `Integer` наследуется от класса `Number`. Утверждение «`Bob.age` *is* 40» присваивает значение 40 атрибуту `age` объекта `Bob`.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2026–0022).

Как видно из приведенных выше примеров, широкая интерпретация отношения *is* позволяет устранить различие между объектами и классами. Единая система данных может объединять декларацию классов («метаданные») и создание объектов-экземпляров вместе с их инициализацией («данные»). Это не означает, что данные и метаданные лучше объединять, чем разделять, но такой подход позволяет унифицировать анализ данных и, в частности, открывает возможность для разработки общего инструмента проверки концептуальной и семантической непротиворечивости.

Отношения *is* и *has* естественно связаны между собой. Интерпретация отношения *is* как наследования или создания экземпляра класса предполагает, что в случае «`X` *is* `Y`» все атрибуты `Y` наследуются классом или объектом `X`. В частности, если «`X` *is* `Y`» и «`Y` *has a* `Z`», то «`X` *has a* `Z`». Более того, если «`X` *is* `Y`» — единственная явная информация об `X`, то можно заключить, что «`X.Z` *is* `Y.Z`». (Под явной информацией понимаются *is*-правила, образующие рассматриваемую систему данных.) При этом можно вывести *неявную* информацию об `X` и сказать, что «`X.Z` *is* `Y.Z` неявно». Таким образом, при означивании свойства `X.Z` производится перезапись, заменяющая в нем префикс `X` на `Y` согласно явному правилу «`X` *is* `Y`». Этот же принцип применим к конструкциям произвольной длины. Например, если явно известно, что «`Bob.Address` *is* `Alice.Work.Address`», то `Bob.Address.City.Code` получает неявную перезапись в виде `Alice.Work.Address.City.Code`.

Ясно, что явные правила имеют приоритет над любыми неявными выводами. Поэтому, если «`X` *is* `Y`», «`Y` *has a* `Z`» и система данных содержит явное правило «`X.Z` *is* `A`», то последнее правило имеет приоритет над неявным «`X.Z` *is* `Y.Z`». Возможен также конфликт иного рода — когда одновременно применимы несколько явных правил. В качестве примера рассмотрим следующий фрагмент системы данных:

```
block.style.color   is blue
header.style.color  is red
button              is block
button.style        is header.style
```

Попробуем выяснить, чему равен цвет в стиле кнопки, т. е. раскрыть значение `button.style.color`. Поскольку `button` — это `block`, было бы естественно ожидать, что `button.style.color` — это `block.style.color`, т. е. `blue`. Но, с другой стороны, `button.style` — это `header.style`, а следовательно, `button.style.color` — это `header.style.color`, т. е. `red`. Интуитивно последнее означивание должно иметь приоритет, поскольку правило «`button.style` *is* `header.style`», по-видимому, имеет преимущество перед «`button` *is* `block`». Причина состоит не в том, что одно из правил расположено после другого. (Система данных считается неупорядоченным множеством *is*-правил.) Ключевой момент здесь в том, что правило «`button.style` *is* `header.style`» более *конкретно*, так как оно означивает более длинный объект — `button.style`, а не `button`. Следовательно, при означивании следует *переписывать самый длинный префикс*, т. е. задействовать самое конкретное из применимых правил.

Теперь остановимся на *непротиворечивости данных*. Очевидно, при построении системы определений следует избегать концептуальных циклов. Фраза «`man` *is* `man`» ничего не определяет, поскольку означивание термина `man` приводит к бесконечному циклу. Вместе с тем концептуальная непротиворечивость не запрещает рекурсию. Например, правило «`man.son` *is* `man`» вполне допустимо. С другой стороны, правило «`man` *is* `man.son`» выглядит некорректным: оно по-прежнему не проясняет смысл термина `man`, пока не определен атрибут `son` объекта `man`, а последний лишен смысла до определения `man`. Правила «`man` *is* `Adam`» и «`Adam.rib` *is* `man.rib`» тоже образуют противоречивую пару, поскольку `Adam.rib` есть `man.rib`, а последнее неявно переписывается в `Adam.rib`. Подобные примеры обосновывают необходимость формального определения концептуальной непротиворечивости и поиска соответствующей эффективной проверки. (Эта задача аналогична анализу онтологии системы данных как множества концептуальных определений.)

Всякое систематическое определение понятий, классов или объектов неизбежно подразумевает наличие хотя бы одного понятия, не требующего определения. Вообще говоря, первичных понятий может быть несколько, но теоретически достаточно иметь лишь один «универсальный объект». Обозначим его через ω. Слово X вида $\mathtt{entity}\,.\,\mathtt{attr}_1\,.\,\mathtt{attr}_2\,.\cdots.\,\mathtt{attr}_n$ в рамках рассматриваемой системы данных перезаписывается с применением наиболее конкретного *is*-правила, в результате чего возникает новое слово и процесс перезаписи самых длинных префиксов последующих слов продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто слово ω. В этом случае можно заключить, что исходное слово X является *объектом* (или *понятием*). В противном случае, если процесс перезаписи либо (1) заканчивается неперезаписываемым словом, отличным от ω, либо (2) никогда не завершается, слово X считается лишенным смысла. Возможность (2) делает анализ нетривиальным и обосновывает поиск алгоритмической проверки осмысленности того или иного слова. (Эта задача аналогична анализу онтологии понятия в рамках системы данных.)

Рассматривая какой-либо объект X и последовательность атрибутов D вида $\mathtt{attr}_1\,.\,\mathtt{attr}_2\,.\cdots.\,\mathtt{attr}_n$, будем говорить, что D является *деталью* объекта X, если слово $X.D$ имеет смысл. Множество $\|X\|$ всех деталей объекта X можно рассматривать как *тип* объекта X. (Такой подход известен как «утиная типизация».) Всякий раз, когда алгоритмическая процедура предполагает формальный аргумент A, тело процедуры обычно содержит вхождения слова A вместе с некоторыми словами вида $A.D_i$. Для корректной работы процедуры при подстановке объекта X вместо A необходимо (и, вероятно, достаточно), чтобы все слова $X.D_i$ имели смысл. Иначе говоря, объект X должен иметь подходящий тип. В этой связи было бы полезно иметь алгоритм сравнения типов объектов: для данных объектов X и Y необходимо научиться эффективно сравнивать типы X и Y, т. е. определять, какие из соотношений $\|X\| = \|Y\|$, $\|X\| \subseteq \|Y\|$, $\|X\| \supseteq \|Y\|$ имеют место. Эта задача нетривиальна хотя бы потому, что тип объекта может быть бесконечным. (Например, при наличии правила «`man.son` *is* `man`» тип объекта `man` содержит все слова `son`, `son.son`, `son.son.son`, ...)

Ниже будут приведены формальные определения рассматриваемых понятий, сформулированы основные результаты и описаны алгоритмы для всех упомянутых задач. Чтобы обозначения были менее громоздкими, будем считать имена сущностей и атрибутов отдельными символами (буквами) некоторого алфавита $\mathbb{A}$ и условимся записывать последовательности атрибутов $\alpha_1\,.\,\alpha_2\,.\cdots.\,\alpha_n$ в виде $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$, превращая их тем самым в слова над $\mathbb{A}$. Явные правила «X *is* Y» будем записывать в виде $X \to Y$.

Поскольку материал данной работы опирается на вполне стандартные сведения из классических областей, в дальнейшем по ходу изложения приводятся лишь явно используемые ключевые определения и факты. Более подробные сведения о системах префиксной перезаписи и регулярных системах читатель может найти в основополагающей работе Ю. Р. Бюхи о регулярных канонических системах [1], исследовании Д. Кокаля регулярной структуры префиксной перезаписи [2], монографии Р. В. Бука и Ф. Отто о системах перезаписи строк [3] и характеризации регулярных языков посредством префиксных грамматик, принадлежащей М. Фрейзеру и Д. Пейджу [4]. Что касается объектно-ориентированной парадигмы, полезными классическими источниками служат обзор Л. Карделли и В. Вегнера [5], манифест систем объектно-ориентированных баз данных М. Аткинсона и др. [6] и обзор К. Р. Диттриха понятий объектно-ориентированной модели данных [7]. Сведения, относящиеся к теории графов, можно почерпнуть из классической монографии Ф. Харари [8].

Данная статья расширяет набор определений и результатов, анонсированных в [9], и является первой в запланированной серии публикаций, посвященных представлению объектно-ориентированных данных в виде префиксных перезаписывающих систем. Статья имеет характер предваряющего обзора и не содержит доказательств утверждений и обоснований алгоритмов. Все детали, включая различные примеры, будут опубликованы в последующих частях серии.

Материал статьи сгруппирован в шести параграфах. В §1 приведены основные определения, касающиеся рассматриваемых перезаписывающих систем и интерпретации в них таких классических объектно-ориентированных понятий, как наследование, декларация члена класса, создание объекта-экземпляра класса и означивание свойства. Параграф 2 посвящен рассмотрению перезаписывающих систем как систем формальных определений и исследованию концептуальной непротиворечивости таких систем. Параграф 3 содержит интерпретацию понятий перекрывающего, добавленного и неявного атрибута, а также понятия декларирующего класса (источника) атрибута. В §4 вводятся и детально исследуются понятия типа и подтипа в их связи с наследованием классов и означиванием атрибутов. Параграф 5 посвящен эффективному анализу перезаписи и включает алгоритмы, проверяющие такие свойства системы, как отсутствие бесконечно перезаписываемых слов и концептуальная непротиворечивость. Параграф 6, в свою очередь, посвящен анализу структуры типов и содержит, в том числе, описание алгоритмов, позволяющих сравнивать типы объектов и находить конкретные детали, отличающие один тип от другого.

1. Детерминированная префиксная перезаписывающая система

1.1. На протяжении всей статьи $\mathbb{A}$ — конечный алфавит, $\mathbb{A}^*$ (соответственно, $\mathbb{A}^+$) — множество всех (соответственно, всех непустых) слов над $\mathbb{A}$. Для краткости будем говорить «*слово*» вместо «непустое слово над $\mathbb{A}$». Элементы $\mathbb{A}$ называются *буквами*. Буквы традиционно отождествляются с соответствующими однобуквенными словами. Длина слова X обозначается через $|X|$. Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \ldots\}$.

1.2. Слово X будем называть *префиксом* (соответственно, *собственным префиксом*) слова $Y \in \mathbb{A}^+$ и писать $X \sqsubseteq Y$ или $Y \sqsupseteq X$ (соответственно, $X \sqsubset Y$ или $Y \sqsupset X$), если $X \in \mathbb{A}^+$ и $Y = XS$ для некоторого $S \in \mathbb{A}^*$ (соответственно, $S \in \mathbb{A}^+$).

Если $n \in \mathbb{N}$, $X \in \mathbb{A}^+$ и $|X| \geqslant n$, то символом $X{\restriction_n}$ условимся обозначать префикс слова X, имеющий длину n. Таким образом, слово $X{\restriction_n} \in \mathbb{A}^+$ определяется соотношениями $X{\restriction_n} \sqsubseteq X$ и $\big|X{\restriction_n}\big| = n$.

1.3. Если символ $\rightsquigarrow$ обозначает какое-либо бинарное отношение, то через $\overset{*}{\rightsquigarrow}$ будем обозначать рефлексивное транзитивное замыкание отношения $\rightsquigarrow$, а через $\overset{+}{\rightsquigarrow}$ — его транзитивное замыкание. Таким образом, запись $x \overset{*}{\rightsquigarrow} y$ (соответственно, $x \overset{+}{\rightsquigarrow} y$) означает, что

$$x = z_0 \rightsquigarrow z_1 \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow z_n = y$$

для некоторых $z_1, \dots, z_n$, где $n \geqslant 0$ (соответственно, $n \geqslant 1$). В частности, соотношение $x \overset{*}{\rightsquigarrow} y$ справедливо тогда и только тогда, когда $x = y$ или $x \overset{+}{\rightsquigarrow} y$.

1.4. Рассмотрим произвольное бинарное отношение $\to$ на $\mathbb{A}^+$ (т. е. подмножество декартова квадрата $\mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$) и букву $\omega \in \mathbb{A}$. Пару $\langle \to, \omega \rangle$ назовем *детерминированной префиксной перезаписывающей системой*, или для краткости *системой*, если множество $\to$ конечно, непусто и удовлетворяет следующим условиям:

(a) из $X \to Y$ и $X \to Z$ следует $Y = Z$;

(b) не существует таких $S, Y \in \mathbb{A}^*$, что $\omega S \to Y$.

В дальнейшем, давая определения и формулируя утверждения, по умолчанию считаем фиксированной произвольную детерминированную префиксную перезаписывающую систему $\langle \to, \omega \rangle$, относительно которой интерпретируются вводимые понятия, а также используемые термины и обозначения.

1.5. Положим

$$\mathbb{E} := \{X : \ X \to Y \text{ для некоторого } Y\}$$

и условимся называть элементы множества $\mathbb{E}$ *явными словами*. Символом $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ обозначается *явный алфавит* — множество всех букв, встречающихся в явных словах:

$$\mathbb{A}_{\mathbb{E}} := \min\{A \subseteq \mathbb{A} : \mathbb{E} \subseteq A^+\}.$$

Кроме того, определим число μ как длину самого длинного явного слова:

$$\mu := \max\{|E| : \ E \in \mathbb{E}\}.$$

1.6. Будем говорить, что слово E является *явным префиксом* слова X, если $E \in \mathbb{E}$ и $E \sqsubseteq X$. Слово X назовем *перезаписываемым*, если X имеет хотя бы один явный префикс.

Как легко видеть, условие 1.4(a) означает, что для каждого $E \in \mathbb{E}$ существует единственное слово E', удовлетворяющее соотношению

$$E \to E',$$

а условие 1.4(b) равносильно тому, что слова вида ωS, где $S \in \mathbb{A}^*$, не являются перезаписываемыми.

1.7. Для перезаписываемого слова X рассмотрим его самый длинный явный префикс E, определим соответствующий суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X = ES$, и положим

$$X' := E'S,$$

где $E \to E'$ (см. п. 1.6). Слово X' будем называть *результатом перезаписи* слова X. Введем бинарное отношение $\Rightarrow$ на $\mathbb{A}^+$, полагая

$$X \Rightarrow Y \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ X \text{ перезаписываемо и } X' = Y.$$

1.8. Рекурсивно определим

$$\begin{aligned}
&\mathbb{W}_0 := \mathbb{A}^+,\\
&X^{(0)} := X \ \text{ для } X \in \mathbb{W}_0;\\
&\mathbb{W}_n := \{X \in \mathbb{W}_{n-1} : X^{(n-1)} \text{ перезаписываемо}\},\ n \geqslant 1,\\
&X^{(n)} := (X^{(n-1)})' \ \text{ для } X \in \mathbb{W}_n,\ n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Слово $X^{(n)}$ назовем n*-м результатом перезаписи* слова X. Таким образом, для каждого $X \in \mathbb{W}_n$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&X = X^{(0)} \Rightarrow X^{(1)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)};\\
&X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n \geqslant 0,\\
&X \overset{+}{\Rightarrow} X^{(n)} \text{ при } n > 0.
\end{aligned}$$

Элементы множества $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathbb{W}_n$ называются *бесконечно перезаписываемыми словами*. Остальные слова называются *конечно перезаписываемыми*. Для данного слова X максимальную (конечную или бесконечную) последовательность вида

$$\langle X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \dots \rangle$$

будем называть *последовательностью перезаписи* слова X. Таким образом, слово X конечно (бесконечно) перезаписываемо тогда и только тогда, когда последовательность перезаписи слова X конечна (бесконечна).

1.9. Будем говорить, что слово $X \in \mathbb{A}^+$ является *объектом*, если $X \overset{*}{\Rightarrow} \omega$. Символом $\mathbb{O}$ обозначим множество всех объектов:

$$\mathbb{O} := \{X \in \mathbb{A}^+ : X \overset{*}{\Rightarrow} \omega\}.$$

Как легко видеть, последовательность перезаписи всякого объекта $X \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ имеет вид

$$X = X^{(0)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)} \to \omega, \quad n \geqslant 0.$$

Согласно условию 1.4(b) универсальный объект ω не является перезаписываемым, причем ω является единственным неперезаписываемым объектом.

1.10. Из приведенных выше обозначений и определений ясно, что система $\langle \to, \omega \rangle$ рассматривается как префиксная перезаписывающая система, причем перезаписи подлежат только самые длинные префиксы слов. При этом система интерпретируется как распознающее устройство, для которого множество $\mathbb{O}$ служит распознаваемым языком (см. [10]). Такая система названа «детерминированной», поскольку всякое перезаписываемое слово имеет единственный результат перезаписи.

Введение понятия объекта можно рассматривать как отделение «понятий» от «бессмысленных слов». Объект — это слово X, имеющее «смысл», а именно результат перезаписи $X' = X^{(1)}$, который тоже имеет смысл — $(X')' = X^{(2)}$, и так далее вплоть до последнего результата перезаписи — «универсального объекта» ω, смысл которого предполагается заданным заранее. Отношение $\to$ тем самым трактуется как концептуальное определение, а правило $X \to Y$ рассматривается как определение понятия X: «X — это Y». Правило $X\alpha \to Z$ является определением свойства: «свойство α объекта X — это Z», а правило $X\alpha\beta \to Z$ служит определением «свойство β свойства α объекта X — это Z» и т.д.

В этом смысле условие 1.4(a), налагаемое на отношение $\to$, означает концептуальную однозначность (понятие не может иметь несколько различных смыслов). Условие 1.4(b) означает, что универсальный объект ω не имеет осмысленных атрибутов.

Отношение $\to$ можно также трактовать как объектно-ориентированное наследование или создание экземпляра и рассматривать правило $X \to Y$ как явное указание на тот факт, что «класс X непосредственно наследуется от класса Y» или «объект X является экземпляром класса Y». Далее, правило $X\alpha \to Z$ можно рассматривать как декларацию атрибута или означивание свойства: «класс X содержит атрибут α, значения которого принадлежат классу Z», или «свойство $X\alpha$ имеет значение Z», или «свойство $X\alpha$ является экземпляром класса Z». В этом смысле условие 1.4(a), налагаемое на отношение $\to$, запрещает множественное наследование (и, следовательно, ни один объект не может принадлежать нескольким несравнимым классам). Кроме того, согласно условию 1.4(b) универсальный объект ω не обладает никакими декларируемыми свойствами.

1.11. Пусть $\langle \mathbb{O}, \Leftarrow \rangle$ — ориентированный граф, вершинами которого являются всевозможные объекты, а дугами служат пары $\langle X, Y \rangle$ объектов, удовлетворяющих соотношению $Y \Rightarrow X$.

Теорема. *Граф $\langle \mathbb{O}, \Leftarrow \rangle$ является деревом с конечными уровнями.*

Дерево $\langle \mathbb{O}, \Leftarrow \rangle$ будем называть *деревом наследования*. Корнем этого дерева служит универсальный объект ω. Отметим, что дерево наследования может быть бесконечным и даже не иметь листьев.

1.12. Введем бинарное отношение $\Rightarrow_{\mathrm{w}}$ на $\mathbb{A}^+$, полагая

$$X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y \ \text{ тогда и только тогда,} \\ \text{когда } \ X = ES \text{ и } Y = E'S \text{ для некоторых } E \in \mathbb{E} \text{ и } S \in \mathbb{A}^*.$$

Таким образом, отношение $\Rightarrow_{\mathrm{w}}$ представляет собой перезапись, соответствующую системе $\langle \to, \omega \rangle$, рассматриваемой как обычная префиксная перезаписывающая система, а не как система с перезаписью самых длинных префиксов. Ясно, что из $X \to Y$ следует $X \Rightarrow Y$, а из $X \Rightarrow Y$ следует $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$. Поэтому формулы $X \overset{+}{\Rightarrow} Y$ и $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y$ можно прочитывать как «X *перезаписывается в* Y» и «X *слабо перезаписывается в* Y». Формулу $X \to Y$ можно снабдить прочтением «X *явно перезаписывается в* Y».

1.13. Введем бинарное отношение $\rightarrowtail$ на $\mathbb{A}^+$, полагая

$$X \rightarrowtail Y \ \text{ тогда и только тогда, когда } \ X \sqsupset Y \text{ или } X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y.$$

Как легко видеть, транзитивное замыкание $\overset{+}{\rightarrowtail}$ является наименьшим транзитивным отношением на $\mathbb{A}^+$, обладающим следующими тремя свойствами для всех $X, Y, S \in \mathbb{A}^+$:

(a) если $X \to Y$, то $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$;

(b) если $X \to Y$, то $XS \overset{+}{\rightarrowtail} YS$;

(c) $XS \overset{+}{\rightarrowtail} X$.

В случае $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ будем говорить, что X *концептуально зависит от* Y. Слово X назовем *корректно определенным*, если X концептуально не зависит от X.

2. Концептуальная непротиворечивость

2.1. Будем говорить, что рассматриваемая система $\langle \to, \omega \rangle$ *концептуально непротиворечива*, если все слова корректно определены, т. е. ни одно слово концептуально не зависит от самого себя. Для краткости дадим имя этому условию:

$$\text{Система концептуально непротиворечива.} \tag{\textbf{Con}}$$

Приведенная выше терминология оправдывается неформальной трактовкой правила перезаписи $X \to Y$ как определения X через Y («X — это Y») и трактовкой правила $XS \to Z$ как определения детали («деталь S объекта X — это Z»). Поэтому неформально отношение $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ можно понимать следующим образом: определение X явно или неявно задействует Y, а значит, при последовательном описании концептуальной схемы понятие Y должно быть введено раньше X, иначе X окажется некорректно определенным.

2.2. Слово X назовем *рекуррентным* (соответственно, *слабо рекуррентным*), если $X \overset{+}{\Rightarrow} XS$ (соответственно, $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} XS$) для некоторого $S \in \mathbb{A}^*$.

2.3. Предложение. *Для любых* $X, Y \in \mathbb{A}^+$

$X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$ *тогда и только тогда,*
когда $X \sqsupset Y$ *или* $X \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} YS$ *для некоторого* $S \in \mathbb{A}^*$.

2.4. Следствие. *Слово корректно определено тогда и только тогда, когда оно не является слабо рекуррентным.*

2.5. Для произвольного символа $\rightsquigarrow$, обозначающего какое-либо бинарное отношение на $\mathbb{A}^+$, положим

$$|{\rightsquigarrow}| := \{X \in \mathbb{A}^+ : E \overset{*}{\rightsquigarrow} X \text{ для некоторого } E \in \mathbb{E}\}$$

и обозначим через $[\rightsquigarrow]$ ориентированный граф, вершинами которого являются слова из $|{\rightsquigarrow}|$, а дугами служат пары $\langle X, Y \rangle$, где $X, Y \in |{\rightsquigarrow}|$ и $X \rightsquigarrow Y$.

Условимся называть граф $[\rightarrowtail]$ *концептуальной схемой*, а граф $[\Rightarrow_{\mathrm{w}}]$ — *схемой слабой перезаписи* рассматриваемой системы. Поскольку из соотношения $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y$ следует $X \rightarrowtail Y$, схема слабой перезаписи $[\Rightarrow_{\mathrm{w}}]$ является подграфом концептуальной схемы $[\rightarrowtail]$.

2.6. Теорема. *Следующие свойства системы равносильны:*
(1) *все слова корректно определены, т. е. выполнено условие* (Con)*;*
(2) *каждое явное слово корректно определено;*
(3) *не существует слабо рекуррентных явных слов;*
(4) *не существует слабо рекуррентных слов;*
(5) *концептуальная схема ациклична;*
(6) *концептуальная схема ациклична и конечна;*
(7) *схема слабой перезаписи ациклична и конечна.*

2.7. Введем следующее именованное условие:

$$\text{Не существует рекуррентных слов.} \tag{\textbf{Rec}}$$

2.8. Предложение. *Из* (Con) *следует* (Rec).

2.9. Теорема. *Если все слова* $X \in \mathbb{A}^+_{\mathbb{E}}$ *длины* $|X| \leqslant \mu$ *не являются рекуррентными, то все слова не являются рекуррентными, т. е. выполнено* (Rec).

2.10. Пусть $B(\mathscr{S})$ — множество слов, определенное по системе $\mathscr{S}$ некоторым условием. Будем говорить, что $B(\mathscr{S})$ является *базисом рекуррентности*, если для произвольной системы $\mathscr{S}$ из нерекуррентности всех слов, принадлежащих $B(\mathscr{S})$, следует нерекуррентность всех слов. Теорема 2.9 утверждает, что множество $\{X \in \mathbb{A}^+_{\mathbb{E}} : |X| \leqslant \mu\}$ является базисом рекуррентности. Несмотря на свою конечность, это множество может быть довольно объемным. Автору неизвестны условия, которые определяли бы существенно меньшие базисы рекуррентности. (Имеются примеры, показывающие, что ни множество $\mathbb{E}$ явных слов, ни множество всех префиксов явных слов не могут служить базисом рекуррентности.)

2.11. Введем следующее именованное условие:

$$\text{Все слова конечно перезаписываемы.} \qquad (\mathbf{Fin})$$

2.12. Теорема. *Если все явные слова конечно перезаписываемы, то все слова конечно перезаписываемы, т. е. выполнено* (Fin).

2.13. Теорема. *Из* (Rec) *следует* (Fin).

Таким образом, согласно предложению 2.8 и теореме 2.13 из (Con) следует (Rec), а из (Rec) следует (Fin). Как показывают примеры, обратные импликации в общем случае неверны.

2.14. Введем следующие два именованных условия:

$$\text{Все явные слова являются объектами, т. е. } \mathbb{E} \subseteq \mathbb{O}. \qquad (\mathbf{Obj})$$

$$\text{Если } X \in \mathbb{A}^+,\ \alpha \in \mathbb{A} \text{ и } X\alpha \in \mathbb{E}, \text{ то } X \in \mathbb{O}. \qquad (\mathbf{PreObj})$$

2.15. Теорема. *Предположим, что выполнено* (Obj). *Пусть $X, Y \in \mathbb{A}^+$, $X \to Y$, и пусть буква $\alpha \in \mathbb{A}\backslash\{\omega\}$ встречается в Y. Тогда $\alpha \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}$.*

Таким образом, при выполнении (Obj) все буквы, отличные от ω и встречающиеся в правилах системы, принадлежат явному алфавиту.

2.16. Предложение.
(1) *Пусть $X, Y \in \mathbb{A}^+$ и $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$. Тогда включение $X \in \mathbb{O}$ равносильно $Y \in \mathbb{O}$.*
(2) *Пусть выполнено* (Obj). *Для данного $X \in \mathbb{A}^+$ включение $X \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ имеет место тогда и только тогда, когда $X \overset{*}{\Rightarrow} E$ для некоторого $E \in \mathbb{E}$.*
(3) *Пусть выполнено* (PreObj). *Если $X, S \in \mathbb{A}^+$ и $XS \in \mathbb{O}$, то $X \in \mathbb{O}$.*

3. Атрибуты

3.1. Пусть $X \in \mathbb{O}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$. Будем говорить, что α является *атрибутом* объекта X, если $X\alpha \in \mathbb{O}$. Объект $X\alpha$ в этом случае называется *свойством* (точнее, *свойством* α или α-*свойством*) объекта X. Множество всех атрибутов X обозначим через $\|X\|_1$. Из условия 1.4(b) ясно, что $\|\omega\|_1 = \varnothing$.

Букву α назовем *явным атрибутом* (соответственно, *неявным атрибутом*) объекта X, если $X\alpha \in \mathbb{O} \cap \mathbb{E}$ (соответственно, $X\alpha \in \mathbb{O}\backslash\mathbb{E}$).

Назовем α *перекрывающим атрибутом* (соответственно, *добавленным атрибутом*) объекта X, если $X\alpha \in \mathbb{O} \cap \mathbb{E}$ и, кроме того, X перезаписываемо и $X'\alpha \in \mathbb{O}$ (соответственно, $X'\alpha \notin \mathbb{O}$). Если α является перекрывающим атрибутом X, то будем говорить, что свойство $X\alpha$ *перекрывает* свойство $X'\alpha$.

Таким образом, всякий атрибут является либо явным, либо неявным, а всякий явный атрибут является либо перекрывающим, либо добавленным.

3.2. Предложение. *Для всех $X \in \mathbb{O}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$ справедливы следующие утверждения:*

(1) *α является неявным атрибутом объекта X тогда и только тогда, когда X перезаписываемо, $X\alpha \notin \mathbb{E}$ и $X'\alpha \in \mathbb{O}$;*

(2) *α является добавленным атрибутом объекта X тогда и только тогда, когда X перезаписываемо, $X\alpha \in \mathbb{O}$ и $X'\alpha \notin \mathbb{O}$.*

3.3. Предложение. *Пусть выполнено* (Obj). *Если $X, Y \in \mathbb{A}^+$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ и $Y\alpha \in \mathbb{O}$, то $X\alpha \in \mathbb{O}$.*

3.4. Предложение. *Пусть выполнено* (Obj). *Рассмотрим последовательность перезаписи*

$$X = X^{(0)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)} = \omega$$

объекта X. Если $\alpha \in \|X\|_1$, то существует число $0 \leqslant i \leqslant n$ такое, что

$$X^{(0)}\alpha, \ldots, X^{(i)}\alpha \in \mathbb{O}, \quad X^{(i+1)}\alpha, \ldots, X^{(n)}\alpha \notin \mathbb{O}$$

и α является добавленным атрибутом объекта $X^{(i)}$.

3.5. Следствие. *Пусть выполнено* (Obj). *Буква α является атрибутом объекта X тогда и только тогда, когда $X^{(n)}\alpha \in \mathbb{E}$ для некоторого $n \geqslant 0$.*

3.6. Культура программирования обычно включает рекомендацию давать декларируемым сущностям как можно более содержательные имена в разумных пределах, чтобы каждый идентификатор помогал читателю догадываться о роли соответствующего объекта в данном фрагменте кода. В частности, не рекомендуется создавать омонимию внутри локального контекста — например, декларировать переменную или класс с тем же именем, что и у какого-либо атрибута (свойства или метода), но с иной семантикой, или наоборот — декларировать атрибуты с именами, занятыми системными объектами, классами или переменными, находящимися в том же локальном контексте и имеющими иной содержательный смысл.

Букву ω, а также буквы, образующие явные однобуквенные слова, условимся называть *автономными буквами*. В рамках рассматриваемого формализма именно автономные буквы играют роль системных и декларируемых имен, а именами атрибутов служат буквы, занимающие в словах вторую или более дальнюю позицию. С учетом этой аналогии упомянутое выше отсутствие омонимии можно сформулировать в виде (несколько более сильного) условия о том, что автономная буква может занимать в явном слове только первую позицию:

$$\begin{array}{l}\text{если } \alpha \in \mathbb{A},\ X \in \mathbb{A}^+,\ Y \in \mathbb{A}^* \text{ и } X\alpha Y \in \mathbb{E},\\ \text{то } \alpha \neq \omega \text{ и слово } \alpha \text{ не является явным.}\end{array} \qquad (\textbf{NoClash})$$

3.7. Теорема. *Пусть выполнено* (NoClash). *Тогда автономная буква может занимать в объекте только первую позицию:*

$$\begin{array}{l}\text{если } \alpha \in \mathbb{A},\ X \in \mathbb{A}^+,\ Y \in \mathbb{A}^* \text{ и } X\alpha Y \in \mathbb{O},\\ \text{то } \alpha \neq \omega \text{ и слово } \alpha \text{ не является явным.}\end{array}$$

3.8. Предложение.

(1) *Всякий однобуквенный объект образован автономной буквой.*

(2) *Если выполнено условие* (Obj), *то автономные буквы — это в точности буквы, образующие однобуквенные объекты.*

(3) *Если выполнено условие* (PreObj), *то первая буква любого объекта является автономной.*

3.9. Пусть $X \in \mathbb{O}$ и $\alpha \in \mathbb{A}$. Будем называть X *источником атрибута* α, если α является добавленным атрибутом объекта X, т. е. если $X\alpha \in \mathbb{O} \cap \mathbb{E}$ и $X'\alpha \notin \mathbb{O}$ или, что то же самое, $X\alpha \in \mathbb{O}$ и $X'\alpha \notin \mathbb{O}$ (см. пп. 3.1 и 3.2).

Понятие источника служит аналогом понятия декларирующего класса для данного члена (свойства, метода и т. п.) — максимально абстрактного среди классов, обладающих этим членом, или, точнее, максимально далекого предка среди таких классов в какой-либо из цепей наследования.

Отметим, что наличие у какого-либо атрибута нескольких различных источников (несравнимых относительно наследования) вполне допустимо и не противоречит практике. Например, в языках .NET источниками атрибута `Length` служат классы `System.Array`, `System.String`, `System.IO.Stream` и некоторые другие классы.

3.10. Теорема.

(1) *Если $X, Y \in \mathbb{O}$, $X \Rightarrow Y$ и $\|Y\|_1 = \varnothing$, то объект X является источником всех своих атрибутов. (Например, это так в случае $X \to \omega$.)*

(2) *Если выполняется* (NoClash), *то автономная буква не может быть атрибутом какого-либо объекта и, в частности, не имеет источника.*

(3) *Если выполняются* (Obj) *и* (PreObj), *то всякая неавтономная буква явного алфавита имеет хотя бы один источник.*

(4) *Если выполняются* (Obj), (PreObj) *и* (NoClash), *то для любой неавтономной буквы $\alpha \in \mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ следующие утверждения равносильны:*
   (a) *для любых явных α-свойств $X\alpha$ и $Y\alpha$ существует такое явное α-свойство $Z\alpha$, что $X \overset{*}{\Rightarrow} Z$ и $Y \overset{*}{\Rightarrow} Z$;*
   (b) *для любых α-свойств $X\alpha$ и $Y\alpha$ существует такое явное α-свойство $Z\alpha$, что $X \overset{*}{\Rightarrow} Z$ и $Y \overset{*}{\Rightarrow} Z$;*
   (c) *α обладает единственным источником.*

(5) *Любой атрибут любого объекта имеет источник. Более того, если α — атрибут объекта X, то $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ для некоторого источника Y атрибута α.*

(6) *Пусть выполнено* (Obj). *Буква α является атрибутом объекта X тогда и только тогда, когда $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ для некоторого источника Y атрибута α.*

4. Типы объектов

4.1. Будем говорить, что слово $D \in \mathbb{A}^+$ является *деталью* объекта X, если $XD \in \mathbb{O}$. Через $\|X\|$ обозначим множество всех деталей X и назовем $\|X\|$ *типом* объекта X. (Из условия 1.4(b) ясно, что $\|\omega\| = \varnothing$.)

Отметим, что множество $\mathbb{O}$ всех объектов может быть бесконечным и, более того, могут существовать объекты X с бесконечным типом $\|X\|$. Тем не менее множество $\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\}$ всех типов объектов всегда конечно (см. теорему 6.2).

4.2. Будем говорить, что $\|X\|$ является *подтипом* $\|Y\|$, если $\|X\| \supseteq \|Y\|$. Отметим, что в приведенном определении фигурирует именно обратное включение множеств. Этим подчеркивается то обстоятельство, что тип $\|X\|$, будучи подтипом $\|Y\|$, является более конкретным и более богатым, а тип $\|Y\|$ — более абстрактным и более бедным.

4.3. Предложение. *Для любых объектов X и Y справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $\|X\| = \|Y\|$, то $\|XD\| = \|YD\|$ для всех $D \in \|X\|$;*

(2) *если $\|X\| \subseteq \|Y\|$, то $\|XD\| \subseteq \|YD\|$ для всех $D \in \|X\|$.*

При дополнительном предположении (PreObj) *имеют место следующие утверждения:*

(3) $\|X\| = \|Y\|$ *тогда и только тогда, когда* $\|Y\|_1 = \|X\|_1$ *и* $\|X\alpha\| = \|Y\alpha\|$ *для всех* $\alpha \in \|X\|_1$;

(4) $\|X\| \subseteq \|Y\|$ *тогда и только тогда, когда* $\|X\|_1 \subseteq \|Y\|_1$ *и* $\|X\alpha\| \subseteq \|Y\alpha\|$ *для всех* $\alpha \in \|X\|_1$.

4.4. Предложение. *Если* $X, Y \in \mathbb{O}$, $X \Rightarrow Y$ *и* $XS \notin \mathbb{E}$ *для всех* $S \in \mathbb{A}^+$, *то* $\|X\| = \|Y\|$.

4.5. Если неформально интерпретировать отношение $X \stackrel{+}{\Rightarrow} Y$ как «X наследуется от Y» (или «X является частным случаем Y» или «X — это Y») и трактовать объекты $X\alpha$ как свойства X, то в случае $X \stackrel{+}{\Rightarrow} Y$ объект X должен в некотором смысле наследовать свойства Y и, возможно, делать их более конкретными и расширять их совокупность. Формально это требование сводится к следующему:

$$\text{если } X, Y \in \mathbb{O} \text{ и } X \stackrel{+}{\Rightarrow} Y, \text{ то } \|X\| \supseteq \|Y\|. \qquad (\textbf{CoInh+})$$

Приведенные ниже факты уточняют условие (CoInh+).

4.6. Введем следующее именованное условие:

$$\begin{array}{l}\text{Если } X, Y \in \mathbb{A}^+,\ \alpha \in \mathbb{A},\ X\alpha \in \mathbb{E},\ Y\alpha \in \mathbb{O} \text{ и } X \Rightarrow Y,\\ \text{то } X\alpha \in \mathbb{O} \text{ и } \|X\alpha\| \supseteq \|Y\alpha\|.\end{array} \qquad (\textbf{CoInh})$$

4.7. Теорема. *Пусть выполнено* (PreObj). *Следующие утверждения равносильны:*

(1) *система удовлетворяет* (CoInh);

(2) *если* $X, Y \in \mathbb{O}\backslash\{\omega\}$ *и* $X \Rightarrow Y$, *то* $\|X\| \supseteq \|Y\|$;

(3) *если* $X, Y \in \mathbb{O}$ *и* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$, *то* $\|X\| \supseteq \|Y\|$.

Следовательно, при выполнении (PreObj) условия (CoInh+) и (CoInh) равносильны.

4.8. Следствие. *Пусть выполнены* (PreObj) *и* (CoInh).

(1) *Если* $Y \in \mathbb{O}$ *и* $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$, *то* $\|X\|_1 \supseteq \|Y\|_1$ *и* $\|X\alpha\| \supseteq \|Y\alpha\|$ *для всех* $\alpha \in \|Y\|_1$.

(2) *Если* $X, Y, D \in \mathbb{A}^+$, $X \stackrel{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $YD \in \mathbb{O}$, *то* $XD \in \mathbb{O}$ *и* $\|XD\| \supseteq \|YD\|$.

(3) *Если* $X, Y \in \mathbb{A}^+$, $X \stackrel{+}{\rightarrowtail} Y$ *и* $Y \in \mathbb{O}$, *то* $X \in \mathbb{O}$ *и* $\|X\| \supseteq \|Y\|$.

4.9. Объектные системы с типизацией значений атрибутов обычно удовлетворяют следующим (или аналогичным) требованиям. Предположим, что класс Y имеет декларированный атрибут α с типом значения τ. Если в этом случае объект x является экземпляром класса Y, то x имеет атрибут α, тип значения которого совпадает с τ или является более конкретным, чем τ. Аналогично, если класс X наследуется от класса Y, имеющего атрибут α типа τ, то X имеет унаследованный атрибут α, тип значения которого совпадает с τ или является более конкретным, чем τ. Если интерпретировать отношение $X \Rightarrow Y$ как «объект X является экземпляром класса Y» или «класс X непосредственно наследуется от класса Y» и трактовать отношение $X\alpha \to V$ как «V является явным значением свойства $X\alpha$» или «V является декларированным классом значения атрибута α в классе X», то приведенные выше требования можно формализовать в виде следующего именованного условия:

$$\begin{array}{l}\text{Если } X, Y, V \in \mathbb{A}^+,\ \alpha \in \mathbb{A},\ Y\alpha \in \mathbb{O},\ X\alpha \to V \text{ и } X \Rightarrow Y,\\ \text{то } V \in \mathbb{O} \text{ и } \|V\| \supseteq \|Y\alpha\|.\end{array} \qquad (\textbf{CoVal})$$

4.10. Теорема. *Совокупность условий* (PreObj) *и* (CoVal) *влечет* (CoInh).

4.11. Как показывает следующее утверждение, при выполнении (PreObj) условие (CoVal) влечет свой существенно более сильный вариант.

Предложение. *Пусть выполнены* (PreObj) *и* (CoVal).

Если $X, Y, V \in \mathbb{A}^+$, $\alpha \in \mathbb{A}$, $Y\alpha \in \mathbb{O}$, $X\alpha \Rightarrow V$, $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ *и* $X \neq Y$, *то* $V \in \mathbb{O}$ *и* $\|V\| \supseteq \|Y\alpha\|$.

4.12. *Графом типов объектов* будем называть граф, вершинами которого являются всевозможные объекты, а дугами служат пары $\langle X, Y\rangle$, где $X, Y \in \mathbb{O}$ и $\|X\| \subseteq \|Y\|$.

Для любой системы граф наследования $\langle \mathbb{O}, \Leftarrow\rangle$ является деревом (см. теорему 1.11), причем при выполнении (PreObj) и (CoInh) дерево наследования вкладывается в граф типов объектов (см. теорему 4.7). Тем не менее граф типов объектов не всегда представляет собой дерево. Более того, имеются примеры систем, удовлетворяющих всем рассматриваемым в данной работе именованным условиям, в которых существует четверка объектов A, B, C, D, образующих поддерево в графе наследования и «ромб» в графе типов:

$$D \Rightarrow B \Rightarrow A \Leftarrow C,$$

$$\|B\| \supset \|A\| \subset \|C\|, \quad \|B\| \subset \|D\| \supset \|C\|, \quad \|B\| \text{ и } \|C\| \text{ несравнимы.}$$

4.13. Концептуальная зависимость была введена в п. 1.13 как отношение на множестве всех слов. Поскольку слова, не являющиеся объектами, считаются «бессмысленными», было бы естественно описать зависимость между объектами с привлечением только объектов: если понятие X концептуально зависит от понятия Y, то должна существовать цепь понятий (а не произвольных слов), связывающая X с Y. Этот принцип обосновывается следующей теоремой (см. также следствие 4.15).

4.14. Теорема. *Пусть выполнены* (Obj), (PreObj) *и* (CoInh). *Объект X концептуально зависит от объекта Y тогда и только тогда, когда существуют* $X_1, \ldots, X_n \in \mathbb{O}$, $n \geqslant 1$, *такие, что* $X \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_n = Y$.

4.15. Следствие. *Пусть выполнены* (Obj), (PreObj) *и* (CoInh). *Ограничение отношения* $\overset{+}{\rightarrowtail}$ *на* $\mathbb{O}$ *является наименьшим транзитивным отношением на* $\mathbb{O}$, *обладающим следующими тремя свойствами для всех* $X, Y \in \mathbb{O}$ *и* $D \in \mathbb{A}^+$:

(a) *если* $X \rightarrow Y$, *то* $X \overset{+}{\rightarrowtail} Y$;

(b) *если* $X \rightarrow Y$ *и* $D \in \|X\| \cap \|Y\|$, *то* $XD \overset{+}{\rightarrowtail} YD$;

(c) *если* $D \in \|X\|$, *то* $XD \overset{+}{\rightarrowtail} X$.

Приведенное выше утверждение показывает, что при выполнении (Obj), (PreObj) и (CoInh) концептуальная зависимость между объектами может быть описана в полном соответствии с исходным определением этого отношения на множестве всех слов. Единственное отличие состоит в том, что последнее описание не выходит за пределы множества объектов.

4.16. В теореме 4.14 и следствии 4.15 ни одно из условий (Obj), (PreObj) или (CoInh) нельзя опустить. Если отказаться хотя бы от одного из этих трех условий, возникают примеры систем, в которых отношение концептуальной зависимости между объектами не может быть охарактеризовано в рамках множества объектов: в этих системах имеются такие объекты X и Y, что X концептуально зависит от Y, но любая цепь, концептуально связывающая X с Y, непременно задействует бессмысленные слова.

4.17. Предположим, что для некоторого слова (понятия, объекта или класса) X потребовалось узнать «историю» его определения. История X должна содержать само слово X и историю его родителя X', а если X имеет вид $Y\alpha$, где α — перекрывающий атрибут объекта Y, то в историю X уместно включить историю перекрываемого слова $Y'\alpha$. Кроме того, отражая связь X с X', полезно разместить в истории X какой-либо признак того, имеет ли X какие-либо явные отличия от X', т. е. указать, есть ли у X детали, отсутствующие у X', и имеются ли объекты XD, значения которых перекрывают $X'D$.

С формальной точки зрения историю будем считать ориентированным графом, каждая вершина которого — объект, а каждая дуга, выходящая из $A \in \mathbb{O}$ и входящая в $B \in \mathbb{O}$, является тройкой вида $\langle A, r, B\rangle$, где $r \in \{0, 1, 2\}$. Всякий такой граф условимся называть *h-графом*. *Историей объекта* X назовем h-граф Γ, удовлетворяющий следующим условиям:

(a) X является вершиной Γ;

(b) к любой вершине Γ, отличной от X, ведет путь от X;

(c) Γ содержит дугу $\langle A, 0, B\rangle$ (соответственно, $\langle A, 1, B\rangle$) тогда и только тогда, когда $A \Rightarrow B$ и A не имеет явных деталей (соответственно, имеет хотя бы одну явную деталь);

(d) Γ содержит дугу $\langle A, 2, B\rangle$ тогда и только тогда, когда существуют объект C и его перекрывающий атрибут α такие, что $A = C\alpha$ и $B = C'\alpha$.

Теорема.

(1) *Любой объект имеет единственную историю.*

(2) *История любого объекта конечна.*

(3) *Если система концептуально непротиворечива, то история любого объекта ациклична.*

5. Эффективный анализ перезаписи

Оставшаяся часть статьи посвящена алгоритмической проверке различных свойств рассматриваемых перезаписывающих систем, и следующая теорема является основным шагом в этом направлении.

5.1. Теорема. *Для данной системы положим* $\mu := \max\{|E| : E \in \mathbb{E}\}$. *Слово X является бесконечно перезаписываемым тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух (взаимоисключающих) условий:*

(a) *существуют целые числа $n \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что* $X^{(n)} = X^{(n+r)}$;

(b) *существуют целые числа $n \geqslant 0$ и $r > 0$ такие, что*

$$\mu \leqslant \left|X^{(n)}\right| \leqslant \left|X^{(n+1)}\right|, \ldots, \left|X^{(n+r)}\right|,$$
$$X^{(n)} \neq X^{(n+r)}, \quad X^{(n)}{\restriction}_{\mu} = X^{(n+r)}{\restriction}_{\mu}.$$

В случае (a) *последовательность перезаписи слова X содержит цикл:*

$$X \overset{*}{\Rightarrow} \underbrace{X^{(n)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n+r-1)}}_{\text{период}} \Rightarrow X^{(n)} \Rightarrow \cdots.$$

В случае (b) *положим $Y = X^{(n)}{\restriction}_{\mu}$ и определим соответствующий суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X^{(n)} = YS$. Тогда существует слово $R \in \mathbb{A}^+$ такое, что $Y^{(r)} = YR$, и последовательность перезаписи $\langle X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots\rangle$ содержит подпоследовательность, образованную словами $X^{(n+mr)} = YR^mS$, $m \geqslant 0$, каждое из которых начинает регулярный «период роста» длины r:*

$$\begin{aligned} X \overset{*}{\Rightarrow} X^{(n)} &= YS \Rightarrow Y^{(1)}S \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}S \\ \Rightarrow X^{(n+r)} &= YRS \Rightarrow Y^{(1)}RS \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}RS \\ \Rightarrow X^{(n+2r)} &= YR^2S \Rightarrow Y^{(1)}R^2S \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^2S \\ \Rightarrow \cdots & \\ \Rightarrow X^{(n+mr)} &= YR^mS \Rightarrow Y^{(1)}R^mS \Rightarrow \cdots \Rightarrow Y^{(r-1)}R^mS \\ \Rightarrow \cdots . & \end{aligned}$$

В частности, $\{X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots\} = \{Y^{(j)}R^mS \,:\, 0 \leqslant j < r,\ m \geqslant 0\}$.

5.2. Пусть $\mathscr{P}$ — какое-либо множество «конструктивных объектов» (т. е. множество, чьи элементы могут использоваться как входные данные алгоритмов), и пусть $C(Y,p)$ — условие, которое может быть наложено на слова Y с дополнительными параметрами $p \in \mathscr{P}$. Формально можно считать, что C является подмножеством произведения $\mathbb{A}^+ \times \mathscr{P}$ и для всех $Y \in \mathbb{A}^+$ и $p \in \mathscr{P}$ выражение $C(Y,p)$ означает включение $\langle Y,p\rangle \in C$.

Для такого условия $C(Y,p)$ определим условие $C'(Y,R,S,p)$, где $Y,R \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$, $p \in \mathscr{P}$, следующим образом:

$C'(Y,R,S,p)$ тогда и только тогда,
когда существует $m \geqslant 1$ такое, что $C(YR^mS,p)$.

Будем говорить, что условие $C(Y,p)$ *циклически разрешимо*, если справедливы следующие два утверждения:

(a) существует алгоритм, проверяющий условие $C(Y,p)$ для $Y \in \mathbb{A}^+$, $p \in \mathscr{P}$;

(b) существует алгоритм, проверяющий условие $C'(Y,R,S,p)$ для $Y,R \in \mathbb{A}^+$, $S \in \mathbb{A}^*$, $p \in \mathscr{P}$.

Отметим, что условие (a) в общем случае не влечет (b). Этот факт можно вывести из существования рекурсивного множества $C \subseteq \mathbb{N}^2$, для которого множество $\{n \in \mathbb{N} : (\exists\, m \in \mathbb{N})\ \langle m,n\rangle \in C\}$ не является рекурсивным (см., например, [11, гл. 1, §6]).

5.3. Пусть $C(Y,p)$ — циклически разрешимое условие. Теорема 5.1 обосновывает следующий простой алгоритм, который по заданным системе, слову $X \in \mathbb{A}^+$ и параметру p проверяет существование слова $Y \in \mathbb{A}^+$, удовлетворяющего условиям $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y,p)$.

Алгоритм. Существует ли такое слово Y, что $X \overset{*}{\Rightarrow} Y$ и $C(Y,p)$?

- Если $C(X,p)$, возвращаем **Да**.
  Если слово X не является перезаписываемым, возвращаем **Нет**.
- В противном случае последовательно вычисляем результаты перезаписи $X^{(1)},\dots,X^{(i)},\dots$ и на каждом шаге $i \geqslant 1$ анализируем фрагменты $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$, где $0 \leqslant n < n+r = i$, следующим образом:
  - Если $C\big(X^{(n+r)},p\big)$, возвращаем **Да**.
  - Если $X^{(n)} = X^{(n+r)}$, возвращаем **Нет**.
  - Если $\langle X^{(n)}, \dots, X^{(n+r)}\rangle$ удовлетворяет условию (b) теоремы 5.1,
    полагаем $Y := X^{(n)}{\restriction}_{\mu}$;
    определяем суффикс $S \in \mathbb{A}^*$, для которого $X^{(n)} = YS$;
    выбираем $R \in \mathbb{A}^+$ так, что $Y^{(r)} = YR$
    (такое слово R существует по теореме 5.1);
    если $C'(Y,R,S,p)$, возвращаем **Да**; иначе возвращаем **Нет**.
  - Если $X^{(n+r)}$ не является перезаписываемым, возвращаем **Нет**.
    В противном случае переходим к следующему шагу, $i+1$.

5.4. Как легко видеть, для данной системы $\mathscr{S}$ условие

$$C(Y, \mathscr{S}) = \text{«}Y \text{ не является перезаписываемым в } \mathscr{S}\text{»}$$

циклически разрешимо. Поэтому алгоритм 5.3, специализированный для этого условия, проверяет конечную перезаписываемость данного слова в данной системе. Ниже приведена упрощенная версия этой процедуры.

Алгоритм. Является ли слово X конечно перезаписываемым?

- Начинаем вычисление последовательности перезаписи $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, ...
- Если возникает неперезаписываемое слово $X^{(i)}$, возвращаем **Да**.
- В противном случае согласно теореме 5.1 в последовательности встретится фрагмент $\langle X^{(n)}, X^{(n+1)}, \ldots, X^{(n+r)}\rangle$, удовлетворяющий условию (a) или условию (b) теоремы 5.1. В этом случае возвращаем **Нет**.

Поскольку множество $\mathbb{E}$ явных слов конечно, из теоремы 2.12 следует, что *условие* (Fin) *эффективно проверяемо*: достаточно ко всем явным словам применить алгоритм 5.4.

5.5. Специализация алгоритма 5.3 для условия

$$C(Y) = \text{«}Y = \omega\text{»}$$

проверяет, *является ли данное слово объектом*. (Эту же проверку можно осуществить посредством незначительной модификации алгоритма 5.4.) Теперь ясно, что *условия* (Obj) *и* (PreObj) *эффективно проверяемы*.

5.6. Отметим, что при выполнении условия (Fin) включение $X \in \mathbb{O}$ проверяется тривиально: достаточно проверить, оканчивается ли словом ω (конечная) последовательность перезаписи X. Кроме того, если выполнено (Obj), можно остановить вычисление последовательности перезаписи X, если на некотором шаге $n \geqslant 0$ возникнет явное слово $X^{(n)} \in \mathbb{E}$. Более того, если выполнены и (Obj), и (PreObj), вычисление можно завершить, если очередной результат перезаписи $X^{(n)}$ окажется префиксом какого-либо явного слова (см. предложение 2.16).

5.7. Как легко видеть, условие

$$C(Y, X) = \text{«}Y \sqsupseteq X\text{»}$$

циклически разрешимо. Поэтому соответствующим образом специализированная версия алгоритма 5.3 проверяет, *является ли данное слово X рекуррентным*. По теореме 2.9 заключаем, что (Rec) *эффективно проверяемо*: чтобы проверить отсутствие рекуррентных слов, достаточно применить этот алгоритм ко всем словам над $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ длины не более μ. (Тем не менее получающаяся проверка имеет экспоненциальное время работы; см. замечание 2.10.)

Другой подход к проверке (Rec) может быть основан на теореме 2.13, согласно которой (Rec) влечет (Fin). Сначала проверим (Fin). Если это условие не выполняется, то (Rec) также не выполняется. Если же (Fin) выполняется, то условие (Rec) можно проверить, обработав все слова X над $\mathbb{A}_{\mathbb{E}}$ длины $|X| \leqslant \mu$ и вернув **Нет**, если среди них встретится такое слово X, что $X \sqsubseteq X^{(n)}$ для некоторого $n \geqslant 1$.

5.8. По теореме 2.6 условие (Con) можно эффективно проверить с помощью построения концептуальной схемы и проверки ацикличности этой схемы в ходе ее построения. Описанный ниже алгоритм проверяет, является ли данная система концептуально непротиворечивой. Если это так, алгоритм возвращает концептуальную схему системы, а в противном случае возвращает пример цикла в концептуальной схеме. В алгоритме используются переменный ориентированный граф $\Gamma = \langle \Gamma_{\mathrm{V}}, \Gamma_{\mathrm{A}} \rangle$ (с вершинами Γ_{V} и дугами Γ_{A}) и переменная $\mathscr{A}$, значениями которой являются конечные подмножества декартова квадрата $\mathbb{A}^+ \times \mathbb{A}^+$.

Алгоритм. Концептуально непротиворечива ли данная система?
(1) Полагаем $\Gamma_{\mathrm{V}} := \mathbb{E}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \varnothing$.
(2) Полагаем $\mathscr{A} := \{\langle X, Y \rangle : X$ — сток графа Γ и $X \rightarrowtail Y\}$.
(3) Если $\mathscr{A} = \varnothing$, констатируем **концептуальную непротиворечивость** и возвращаем Γ в качестве **концептуальной схемы**.
(4) В противном случае для каждой пары $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{A}$ делаем следующее:
если $X = Y$ или Γ содержит путь из Y в X,
утверждаем, что система **концептуально противоречива**,
и возвращаем **цикл**: $X \rightarrowtail X$ или $Y \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X \rightarrowtail Y$;
в противном случае полагаем $\Gamma_{\mathrm{V}} := \Gamma_{\mathrm{V}} \cup \{Y\}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \Gamma_{\mathrm{A}} \cup \{\langle X, Y \rangle\}$.
(5) Переходим к (2).

5.9. Если алгоритм 5.8 применить к концептуально противоречивой системе, он вернет пример цикла

$$X_0 \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_m = X_0$$

в концептуальной схеме, но не гарантирует, что все слова X_i в этом цикле являются объектами (даже в случае, когда X_0 — объект). С другой стороны, из теоремы 4.14 следует, что при выполнении условий (Obj), (PreObj) и (CoInh) любой путь

$$X_0 \rightarrowtail X_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_m$$

между объектами X_0 и X_m можно преобразовать в путь из *объектов*

$$Y_0 \rightarrowtail Y_1 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail Y_n, \quad \text{где } Y_0 = X_0 \text{ и } Y_n = X_m.$$

Отметим, что такое преобразование может быть выполнено *эффективно*.

5.10. Небольшим изменением алгоритма 5.8 можно получить процедуру построения схемы слабой перезаписи вместо концептуальной схемы. Приведенный ниже алгоритм проверяет для произвольной системы, существуют ли слабо рекуррентные слова, и либо возвращает пример такого слова, либо строит схему слабой перезаписи системы.

Алгоритм. Существует ли слабо рекуррентное слово?
(1) Полагаем $\Gamma_{\mathrm{V}} := \mathbb{E}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \varnothing$.
(2) Полагаем $\mathscr{A} := \{\langle X, Y \rangle : X$ — сток графа Γ и $X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y\}$.
(3) Если $\mathscr{A} = \varnothing$, утверждаем, что **слабо рекуррентных слов нет**, и возвращаем Γ в качестве **схемы слабой перезаписи**.
(4) В противном случае для каждой пары $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{A}$ делаем следующее:
если $X \sqsubseteq Y$ или Γ содержит путь из префикса $Y_0 \sqsubseteq Y$ в X,
возвращаем **слабо рекуррентное слово**:
$X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y \sqsupseteq X$ или $Y_0 \Rightarrow_{\mathrm{w}} \cdots \Rightarrow_{\mathrm{w}} X \Rightarrow_{\mathrm{w}} Y \sqsupseteq Y_0$;
в противном случае полагаем $\Gamma_{\mathrm{V}} := \Gamma_{\mathrm{V}} \cup \{Y\}$, $\Gamma_{\mathrm{A}} := \Gamma_{\mathrm{A}} \cup \{\langle X, Y \rangle\}$.
(5) Переходим к (2).

5.11. Согласно теореме 2.6 схема слабой перезаписи концептуально противоречивой системы содержит путь вида $X_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} X_n \sqsupseteq X_0$, где $X_0 \in \mathbb{E}$. Будучи примененным к противоречивой системе, алгоритм 5.10 возвращает пример пути $Y_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y_n \sqsupseteq Y_0$, но начальное слово Y_0 не обязано быть явным. В этой связи стоит отметить, что всякий путь вида $Y_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} Y_n \sqsupseteq Y_0$ может быть *эффективно* преобразован в путь вида $X_0 \overset{+}{\Rightarrow}_{\mathrm{w}} X_n \sqsupseteq X_0$ (той же длины), где $X_0 \in \mathbb{E}$.

5.12. Наиболее убедительным свидетельством концептуальной противоречивости представляется пример цикла $X_0 \rightarrowtail \cdots \rightarrowtail X_n = X_0$, состоящего из *объектов* и начинающегося с *явного* слова X_0. Отметим, что если противоречивая система удовлетворяет условиям (Obj), (PreObj) и (CoInh), то цикл такого вида может быть найден *эффективно*.

6. Эффективный анализ типов объектов

6.1. Объект C будем называть *характером*, если либо $C = \omega$, либо $C \sqsubset E$ для некоторого слова $E \in \mathbb{E}$. Множество всех характеров обозначим через $\mathbb{C}$. Ясно, что это множество конечно.

Для данного объекта X рассмотрим последовательность перезаписи

$$X^{(0)} \Rightarrow \cdots \Rightarrow X^{(n)} = \omega$$

и обозначим через $\mathrm{ch}(X)$ первый характер, встречающийся в этой последовательности. Назовем $\mathrm{ch}(X)$ *характером* объекта X.

Поскольку $\mathrm{ch}(C) = C$ для всех $C \in \mathbb{C}$, справедливо равенство

$$\mathbb{C} = \{\mathrm{ch}(X) : X \in \mathbb{O}\}.$$

6.2. Теорема. *Для всех $X \in \mathbb{O}$ имеет место равенство $\|X\| = \|\mathrm{ch}(X)\|$. В частности,*

$$\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\} = \{\|C\| : C \in \mathbb{C}\},$$

и множество $\{\|X\| : X \in \mathbb{O}\}$ конечно.

6.3. Под *задачей сравнения типов* понимается поиск алгоритма, обеспечивающего сравнение типов объектов, т. е. определяющего, какие из отношений

$$\|X\| = \|Y\|, \quad \|X\| \subseteq \|Y\|, \quad \|X\| \supseteq \|Y\|$$

выполняются для данных объектов X и Y. Ясно, что по данному объекту можно эффективно определить его характер. Следовательно, согласно теореме 6.2 задача сравнения типов сводится к эффективному сравнению типов характеров.

6.4. Для произвольной функции $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ определим следующее отношение эквивалентности на $\mathbb{C}$:

$X \underset{\tau}{\sim} Y$ тогда и только тогда,
когда $\|X\|_1 = \|Y\|_1$ и $\tau\big(\mathrm{ch}(X\alpha)\big) = \tau\big(\mathrm{ch}(Y\alpha)\big)$ для всех $\alpha \in \|X\|_1$.

Функцию $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ назовем *типизацией*, если для любых $X, Y \in \mathbb{C}$

$$\text{из } \tau(X) = \tau(Y) \text{ следует } X \underset{\tau}{\sim} Y.$$

Простейшим примером типизации служит произвольная инъекция $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$. Типизацию τ назовем *минимальной*, если ее образ $\mathrm{im}\,\tau := \tau[\mathbb{C}]$ имеет наименьшее число элементов $|\mathrm{im}\,\tau|$ среди всевозможных типизаций:

$$|\mathrm{im}\,\tau| \leqslant |\mathrm{im}\,\sigma| \text{ для любой типизации } \sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{N}.$$

Функцию $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ назовем *точной типизацией*, если для любых $X, Y \in \mathbb{C}$

$$\tau(X) = \tau(Y) \text{ равносильно } \|X\| = \|Y\|.$$

Утверждение 6.5 (2) приведенной ниже теоремы оправдывает употребление термина «типизация» в последнем определении.

6.5. Теорема. *Пусть* $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$.

(1) *Если для любых* $X, Y \in \mathbb{C}$ *из* $\|X\| = \|Y\|$ *следует* $\tau(X) = \tau(Y)$, *то для любых* $X, Y \in \mathbb{C}$ *из* $\|X\| = \|Y\|$ *следует* $X \underset{\tau}{\sim} Y$.

(2) *Всякая точная типизация является типизацией.*

(3) *Пусть выполнено* (PreObj). *Если* τ *является типизацией, то для всех* $X, Y \in \mathbb{C}$ *из* $\tau(X) = \tau(Y)$ *следует* $\|X\| = \|Y\|$.

(4) *Утверждение, обратное к* (3), *не имеет места: существуют система, удовлетворяющая условию* (PreObj), *и функция* $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ *такие, что для всех* $X, Y \in \mathbb{C}$ *из* $\tau(X) = \tau(Y)$ *следует* $\|X\| = \|Y\|$, *но функция* τ *не является типизацией.*

(5) *Утверждение* (3) *не сохраняет силу без требования* (PreObj).

6.6. Теорема. *Пусть выполнено* (PreObj). *Функция* $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ *является точной типизацией тогда и только тогда, когда* τ *— минимальная типизация.*

6.7. Следующий алгоритм использует две переменные функции $\tau, \sigma : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ (каждая из которых может быть закодирована в виде массива натуральных чисел, индексированных характерами).

Алгоритм. Вычисление точной типизации.

(1) Определяем τ, полагая $\tau(X) := 1$ для всех $X \in \mathbb{C}$.

(2) Если для всех $X, Y \in \mathbb{C}$ из $\tau(X) = \tau(Y)$ следует $X \underset{\tau}{\sim} Y$, **возвращаем** τ.

(3) Присваиваем σ копию τ.

(4) Для каждого $k \in \big\{\tau(X) : X \in \mathbb{C}$ и $(\exists Y \in \mathbb{C})\big(X \underset{\tau}{\not\sim} Y$ и $\tau(X) = \tau(Y)\big)\big\}$ выполняем следующее:
    произвольно нумеруем множество $\{X \in \mathbb{C} : \tau(X) = k\}$,
    превращая его в последовательность $\langle X_1, \dots, X_n \rangle$, $n \geqslant 2$,
    и для каждого $i = 2, \dots, n$ выполняем следующее:
        если $X_i \underset{\tau}{\sim} X_j$ для некоторого $1 \leqslant j < i$, полагаем $\sigma(X_i) := \sigma(X_j)$,
        а в противном случае полагаем $\sigma(X_i) := \max\{\sigma(X) : X \in \mathbb{C}\} + 1$.

(5) Полагаем $\tau := \sigma$ и переходим к (2).

6.8. Теорема. *Алгоритм* 6.7 *завершается для любой системы, и если система удовлетворяет условию* (PreObj), *то возвращаемая функция* $\tau : \mathbb{C} \to \mathbb{N}$ *является точной типизацией:* $\tau(X) = \tau(Y)$ *тогда и только тогда, когда* $\|X\| = \|Y\|$.

Алгоритм 6.7 аналогичен алгоритму В. Г. Визинга, осуществляющему разбиение множества вершин графа на классы подобных вершин (см. [12]). Автор благодарен С. В. Августиновичу за обнаружение этой аналогии.

6.9. Для произвольного бинарного отношения $\lhd$ на $\mathbb{C}$ (т. е. подмножества $\lhd \subseteq \mathbb{C}^2$) определим бинарное отношение $\widetilde{\lhd}$ на $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$X \mathbin{\widetilde{\lhd}} Y \text{ тогда и только тогда, когда } \|X\|_1 \subseteq \|Y\|_1 \text{ и } \mathrm{ch}(X\alpha) \lhd \mathrm{ch}(Y\alpha) \text{ для всех } \alpha \in \|X\|_1.$$

Отношение $\lhd \subseteq \mathbb{C}^2$ назовем *подтипизацией*, если $\lhd \subseteq \widetilde{\lhd}$, т. е. для всех $X, Y \in \mathbb{C}$

$$\text{из } X \lhd Y \text{ следует } X \mathbin{\widetilde{\lhd}} Y.$$

Простейшим примером подтипизации служит отношение равенства на $\mathbb{C}$. *Точной подтипизацией* назовем отношение $\big\{\langle X, Y \rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \subseteq \|Y\|\big\}$, т. е. такое отношение $\lhd \subseteq \mathbb{C}^2$, что для любых $X, Y \in \mathbb{C}$

$$X \lhd Y \text{ равносильно } \|X\| \subseteq \|Y\|.$$

Утверждение 6.10 (2) приведенной ниже теоремы оправдывает употребление термина «подтипизация» в последнем определении.

6.10. Теорема. *Пусть $\lhd$ — произвольное бинарное отношение на $\mathbb{C}$.*

(1) *Если $\lhd$ включает точную подтипизацию, то и $\widetilde{\lhd}$ включает точную подтипизацию. Иными словами, если для любых $X, Y \in \mathbb{C}$ из $\|X\| \subseteq \|Y\|$ следует $X \lhd Y$, то для любых $X, Y \in \mathbb{C}$ из $\|X\| \subseteq \|Y\|$ следует $X \mathrel{\widetilde{\lhd}} Y$.*

(2) *Точная подтипизация является подтипизацией.*

(3) *Пусть выполнено* (PreObj). *Тогда всякая подтипизация включается в точную подтипизацию: если $\lhd$ — подтипизация, $X, Y \in \mathbb{C}$ и $X \lhd Y$, то $\|X\| \subseteq \|Y\|$.*

6.11. Описанный ниже алгоритм использует два переменных множества $\lhd, \lhd_0 \subseteq \mathbb{C}^2$.

Алгоритм. Вычисление точной подтипизации.

(1) Полагаем $\lhd := \mathbb{C}^2$.

(2) Полагаем $\lhd_0 := \lhd \cap \widetilde{\lhd}$.

(3) Если $\lhd_0 = \lhd$, **возвращаем** $\lhd$.
В противном случае полагаем $\lhd := \lhd_0$ и переходим к (2).

6.12. Теорема. *Для любой системы алгоритм* 6.11 *завершается, и если система удовлетворяет условию* (PreObj), *то возвращаемое отношение $\lhd$ является точной подтипизацией: для всех $X, Y \in \mathbb{C}$ соотношение $X \lhd Y$ равносильно включению $\|X\| \subseteq \|Y\|$.*

6.13. Таким образом, при выполнении (PreObj) соотношение $\|X\| \subseteq \|Y\|$ для $X, Y \in \mathbb{O}$ поддается эффективной проверке. (Как легко видеть, отсюда следует, что условия (CoInh) *и* (CoVal) *эффективно проверяемы*.) Тем не менее одного только утверждения «$\|X\| \nsubseteq \|Y\|$» не всегда достаточно, и для более тонкого анализа может потребоваться конкретная причина нарушения включения $\|X\| \subseteq \|Y\|$. В громоздкой системе поиск конкретной детали $D \in \|X\| \setminus \|Y\|$ может оказаться нетривиальным, и соответствующий алгоритм был бы полезным инструментом диагностики. Напомним, что согласно теореме 6.2 решение этой задачи достаточно автоматизировать для характеров.

6.14. *Диагностикой подтипизации* назовем функцию $\Delta : \mathscr{D} \to \mathbb{A}^+$, определенную на множестве

$$\mathscr{D} = \{\langle X, Y \rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \nsubseteq \|Y\|\}$$

и сопоставляющую каждой паре $\langle X, Y \rangle \in \mathscr{D}$ какую-нибудь деталь

$$\Delta(X, Y) \in \|X\| \setminus \|Y\|.$$

6.15. Следующий алгоритм использует переменное множество $\mathscr{D} \subseteq \mathbb{C}^2$ и переменную функцию $\Delta : \mathscr{D} \to \mathbb{A}^+$.

Алгоритм. Вычисление диагностики подтипизации.

(1) Полагаем $\mathscr{D} := \varnothing$.

(2) Для всех попарно различных $X, Y \in \mathbb{C}$ выполняем следующее:
 если существует $\alpha \in \|X\|_1 \setminus \|Y\|_1$,
 то добавляем пару $\langle X, Y \rangle$ к $\mathscr{D}$ и присваиваем $\Delta(X, Y) := \alpha$.

(3) Для всех попарно различных $X, Y \in \mathbb{C}$ таких, что $\langle X, Y \rangle \notin \mathscr{D}$, выполняем следующее:
 если имеется атрибут $\alpha \in \|X\|_1$, для которого $\big\langle \mathrm{ch}(X\alpha), \mathrm{ch}(Y\alpha) \big\rangle \in \mathscr{D}$,
 то добавляем пару $\langle X, Y \rangle$ к $\mathscr{D}$
 и присваиваем $\Delta(X, Y) := \alpha\, \Delta\big(\mathrm{ch}(X\alpha), \mathrm{ch}(Y\alpha)\big)$.

(4) Если на шаге (3) не было присваиваний, то **возвращаем** Δ.
В противном случае переходим к (3).

6.16. Теорема. *Для любой системы алгоритм* 6.15 *завершается, и если система удовлетворяет условию* (PreObj), *то возвращаемая функция* $\Delta : \mathscr{D} \to \mathbb{A}^+$ *является диагностикой подтипизации:*

$$\mathscr{D} = \{\langle X, Y\rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \nsubseteq \|Y\|\},$$
$$\Delta(X, Y) \in \|X\| \backslash \|Y\| \text{ для всех } \langle X, Y\rangle \in \mathscr{D}.$$

6.17. Диагностику подтипизации $\Delta : \mathscr{D} \to \mathbb{A}^+$ назовем *лаконичной*, если для всех $\langle X, Y\rangle \in \mathscr{D}$

$$|\Delta(X, Y)| = \min\{|D| : D \in \|X\| \backslash \|Y\|\},$$

т. е. деталь $\Delta(X, Y) \in \|X\| \backslash \|Y\|$ имеет наименьшую длину среди всевозможных слов $D \in \|X\| \backslash \|Y\|$. В этом смысле $\Delta(X, Y)$ дает самый короткий ответ на вопрос о том, почему не выполняется включение $\|X\| \subseteq \|Y\|$.

Диагностика подтипизации, возвращаемая алгоритмом 6.15, не всегда лаконична. Более того, имеются примеры систем, удовлетворяющих всем рассматриваемым в данной работе именованным условиям, для которых этот алгоритм дает верные, но не самые короткие ответы.

6.18. Описанный ниже алгоритм является модификацией алгоритма 6.15. Основное отличие заключается в использовании вспомогательной целочисленной переменной n, значение которой увеличивается на единицу после каждого прохождения этапа (3).

Алгоритм. Вычисление лаконичной диагностики подтипизации.
(1) Полагаем $\mathscr{D} := \varnothing$ и $n := 1$.
(2) Для всех попарно различных $X, Y \in \mathbb{C}$ выполняем следующее:
 если существует $\alpha \in \|X\|_1 \backslash \|Y\|_1$,
 то добавляем пару $\langle X, Y\rangle$ к $\mathscr{D}$ и присваиваем $\Delta(X, Y) := \alpha$.
(3) Для всех попарно различных $X, Y \in \mathbb{C}$ таких, что $\langle X, Y\rangle \notin \mathscr{D}$, выполняем следующее:
 если существует атрибут $\alpha \in \|X\|_1$,
 для которого $\big\langle \mathrm{ch}(X\alpha), \mathrm{ch}(Y\alpha)\big\rangle \in \mathscr{D}$ и $\big|\Delta\big(\mathrm{ch}(X\alpha), \mathrm{ch}(Y\alpha)\big)\big| = n$,
 то добавляем пару $\langle X, Y\rangle$ к $\mathscr{D}$
 и присваиваем $\Delta(X, Y) := \alpha\, \Delta\big(\mathrm{ch}(X\alpha), \mathrm{ch}(Y\alpha)\big)$.
(4) Если на шаге (3) не было присваиваний, то **возвращаем** Δ.
 В противном случае полагаем $n := n + 1$ и переходим к (3).

6.19. Теорема. *Для любой системы алгоритм* 6.18 *завершается, и если система удовлетворяет* (PreObj), *то возвращаемая функция* $\Delta : \mathscr{D} \to \mathbb{A}^+$ *является лаконичной диагностикой подтипизации:*

$$\mathscr{D} = \{\langle X, Y\rangle \in \mathbb{C}^2 : \|X\| \nsubseteq \|Y\|\},$$
$$\Delta(X, Y) \in \|X\| \backslash \|Y\|,$$
$$|\Delta(X, Y)| = \min\{|D| : D \in \|X\| \backslash \|Y\|\}$$

для всех $\langle X, Y\rangle \in \mathscr{D}$.

Благодарность. Автор признателен Сергею Владимировичу Августиновичу за плодотворные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Büchi J. R.* Regular canonical systems // Arch. Math. Logik Grundlag. 1964. V. 6. P. 91–111.
2. *Caucal D.* On the regular structure of prefix rewriting // Theoret. Comput. Sci. 1992. V. 106, N 1. P. 61–86.
3. *Book R. V., Otto F.* String-rewriting systems. New York: Springer, 1993.
4. *Frazier M., Page C. D.* Prefix grammars: An alternative characterization of the regular languages // Inform. Process. Lett. 1994. V. 51, N 2. P. 67–71.
5. *Cardelli L., Wegner P.* On understanding types, data abstraction, and polymorphism // ACM Comput. Surv. 1985. V. 17, N 4. P. 471–523.
6. *Аткинсон М., Бансилон Ф., ДеВитт Д., Диттрих К., Майер Д., Здоник С.* Манифест систем объектно-ориентированных баз данных // Системы управления базами данных. 1995. № 4.
7. *Dittrich K. R.* Object-oriented data model concepts // Advances in Object-Oriented Database Systems. Berlin: Springer, 1994. P. 29–45.
8. *Харари Ф.* Теория графов. Москва: Мир, 1973.
9. *Gutman A. E.* Object-oriented data as prefix rewriting systems // Vladikavkaz. Mat. Zh. 2015. V. 17, N 3. P. 23–35.
10. *Саломаа А.* Жемчужины теории формальных языков. Москва: Мир, 1986.
11. *Барвайс Дж.* Справочная книга по математической логике. Часть III: Теория рекурсии. Москва: Наука, 1982.
12. *Визинг В. Г.* Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.

Поступила в редакцию 15 января 2026 г.
После доработки 15 января 2026 г.
Принята к публикации 7 апреля 2026 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 515.12

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РАЗМЕРНОСТЕЙ КВАНТОВАНИЯ ИДЕМПОТЕНТНЫХ МЕР

А. В. Иванов

Аннотация. На пространстве $I(X)$ идемпотентных мер (мер Маслова), заданных на метрическом компакте X, вводится метрика ρ_I, определяющая метризацию функтора идемпотентных мер I. Для каждой меры $\mu \in I(X)$ по метрике ρ_I можно определить верхнюю и нижнюю размерности квантования этой меры, которые не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. Доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер: на любом метрическом компакте емкостной размерности $a < \infty$ для любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \leq b \leq c \leq a$, существует идемпотентная мера, нижняя и верхняя размерности квантования которой равны b и c соответственно.

Ранее аналогичная теорема о промежуточных значениях была доказана автором для размерностей квантования вероятностных мер, идемпотентным аналогом которых являются меры Маслова.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.303

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, размерность квантования идемпотентных мер.

1. Введение

В работе речь пойдет о мерах (вероятностных и идемпотентных), заданных на метрическом компакте (X, ρ). *Квантованием* вероятностной (борелевской) меры называется ее приближение мерами с конечными носителями. В рамках теории квантования введено понятие размерности квантования $D(\mu)$ вероятностной меры μ (см. [1]). Величина $D(\mu)$ характеризует скорость возрастания числа точек в носителе ε-аппроксимации меры μ при $\varepsilon \to 0$. Эта скорость бывает «неустойчивой» и тогда рассматривают верхнюю $\overline{D}(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}(\mu)$ размерности квантования меры μ, связанные неравенством $\underline{D}(\mu) \leq \overline{D}(\mu)$. Известно (см. [1]), что размерности квантования вероятностной меры (верхняя и нижняя) не превосходят соответствующих емкостных размерностей ее носителя. В работе [2] была доказана следующая теорема о промежуточных значениях размерностей квантования вероятностных мер.

Теорема 1.1 [2]. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт, емкостная размерность которого равна $a \leq \infty$. Тогда для любых двух чисел b, c, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq b \leq c \leq a$, на X существует вероятностная мера μ_{bc}, для*

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

которой

$$\underline{D}(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}(\mu_{bc}) = c.$$

Постановка вопроса о приближении предполагает наличие подходящей метрики на пространстве вероятностных мер, заданных на метрическом компакте (X, ρ). В качестве такой метрики в сформулированных выше утверждениях рассматривается расстояние Канторовича — Рубинштейна ρ_P, которое определяется по формуле

$$\rho_P(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \mathrm{Lip}_1(X)\}, \tag{1}$$

где $\mathrm{Lip}_1(X)$ — множество вещественных функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой 1, и $\mu(f) = \int f\,d\mu$.

Главным результатом данной статьи является доказательство аналога теоремы 1.1 для идемпотентных мер. Основные понятия идемпотентного анализа кратко изложены в обзоре [3]. В идемпотентной математике аналогом вероятностных мер являются идемпотентные меры или меры Маслова (см. [4]), которые можно определить как нормированные функционалы $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$, линейные относительно идемпотентных арифметических операций (суммы $x \oplus y = \max\{x, y\}$ и произведения $x \odot y = x + y$). Множество $I(X)$ идемпотентных мер на компакте X, наделенное слабой* топологией, всегда является компактом. Непрерывное отображение компактов $f : X \to Y$ естественно порождает отображение $I(f) : I(X) \to I(Y)$. Таким образом, конструкция I определяет ковариантный функтор в категории компактов и непрерывных отображений. Топологические свойства этого функтора исследованы в [4], где было доказано, что функтор I является нормальным в смысле Е. В. Щепина [5].

В работе [6] для любого метрического компакта (X, ρ) на $I(X)$ определены непрерывные псевдометрики ρ_n, $n \in \mathbb{N}$, по формуле (1) с заменой Lip_1 на Lip_n. С помощью этих псевдометрик мы вводим расстояние ρ_I на $I(X)$, отличное от метрик, рассмотренных в [6–8]. При этом метрики ρ_I задают метризацию функтора I по В. В. Федорчуку [9]. В метрическом пространстве $(I(X), \rho_I)$ определены размерности квантования идемпотентной меры μ (верхняя $\overline{D}_I(\mu)$ и нижняя $\underline{D}_I(\mu)$), которые (как и в случае вероятностных мер) не превосходят соответствующих емкостных размерностей носителя меры μ. В работе доказано, что для размерностей квантования идемпотентных мер справедлива следующая теорема о промежуточных размерностях, аналогичная теореме 1.1. *Для любого метрического компакта (X, ρ) емкостной размерности $\dim_B X = a < \infty$ и любых двух чисел b, c, связанных неравенствами $0 \le b \le c \le a$, существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что*

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{bc}) = c.$$

При доказательстве этой теоремы используется техника работы [10], где теорема о промежуточных размерностях была доказана при ограничении $b < a/2$.

2. Определения и вспомогательные утверждения

Для компактного хаусдорфова пространства (компакта) X через $C(X)$, как обычно, обозначается пространство непрерывных функций на X; c_X — постоянная функция на X со значением $c \in \mathbb{R}$.

Определение 2.1 [4]. Функционал $\mu : C(X) \to \mathbb{R}$ называется *идемпотентной мерой* или *мерой Маслова*, если для любых $f, g \in C(X)$ и $c \in \mathbb{R}$ выполняются следующие условия:

1) $\mu(c_X) = c$;

2) $\mu(c_X + f) = c + \mu(f)$;

3) $\mu(\max\{f, g\}) = \max\{\mu(f), \mu(g)\}$.

(Условие (1) является условием нормировки функционала μ, (2) и (3) — условия линейности относительно идемпотентных арифметических операций.)

Множество идемпотентных мер обозначается через $I(X)$. Любой функционал $\mu \in I(X)$ непрерывен на $C(X)$ относительно топологии равномерной сходимости и сохраняет порядок. Последнее означает, что если $f \leq g$ (т. е. $f(x) \leq g(x)$ для любого $x \in X$), то $\mu(f) \leq \mu(g)$. Для каждой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ определена ее плотность $d_\mu : X \to \mathbb{R}_{\max}$ по формуле

$$d_\mu(x) = \inf\{\mu(f) : f \in C(X),\ f \leq 0_X,\ f(x) = 0\},$$

где $\mathbb{R}_{\max} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$. Функция d_μ удовлетворяет условию $\max d_\mu = 0$ и полунепрерывна сверху. При этом d_μ определяет исходную меру μ:

$$\mu(f) = \max\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}, \tag{2}$$

где $f \in C(X)$. (Формула (2) корректна, поскольку функция $d_\mu + f$ полунепрерывна сверху и, следовательно, $\sup\{d_\mu(x) + f(x) : x \in X\}$ достигается в некоторой точке компакта X.) И обратно, если взять любую полунепрерывную сверху функцию $g : X \to \mathbb{R}_{\max}$, удовлетворяющую условию $\max g = 0$, то формула (2) определяет идемпотентную меру μ_g:

$$\mu_g(f) = \max\{g(x) + f(x) : x \in X\},$$

для которой $d_{\mu_g} = g$ (см. [11]). Носителем меры μ называется множество

$$\operatorname{supp}(\mu) = \overline{\{x : d_\mu(x) > -\infty\}}.$$

Множество $I(X)$ является подмножеством пространства $\mathbb{R}^{C(X)}$ с тихоновской топологией. Тем самым $I(X)$ наделяется слабой* топологией. В [12] показано, что для любого компакта X пространство $I(X)$ является компактом. Для любого непрерывного отображения компактов $h : X \to Y$ определено непрерывное отображение $I(h) : I(X) \to I(Y)$ по формуле

$$I(h)(\mu)(f) = \mu(f \circ h)$$

для каждого $f \in C(Y)$. Таким образом, конструкция I является ковариантным функтором в категории Comp компактов и непрерывных отображений, который (как показано в [4]) является нормальным в смысле Е. В. Щепина (см. [5]).

В работе [6] для каждого $n \in \mathbb{N}$ на $I(X)$ определена непрерывная псевдометрика ρ_n по формуле

$$\rho_n(\mu, \nu) = \sup\{|\mu(f) - \nu(f)| : f \in \operatorname{Lip}_n(X)\}, \tag{3}$$

где $\operatorname{Lip}_n(X)$ — множество функций на X, удовлетворяющих условию Липшица с константой n. В силу условия 2 определения 2.1 в формуле (3) достаточно рассматривать функции из $\operatorname{Lip}_n(X)$, принимающие нулевое значение в некоторой фиксированной точке x_0. Множество таких функций равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи это множество компактно. Таким образом, в формуле (3) sup можно заменить на max. Заметим, что $f \in \mathrm{Lip}_n(X)$ тогда и только тогда, когда $f/n \in \mathrm{Lip}_1(X)$.

В [8] для каждой возрастающей последовательности натуральных чисел $\alpha = (n_i : i \in \mathbb{N})$ определена совместимая с топологией метрика $\rho_{I\alpha}$ на $I(X)$ по формуле

$$\rho_{I\alpha}(\mu,\nu) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\rho_{n_i}(\mu,\nu)}{n_i 2^i}. \tag{4}$$

Модифицируем формулу (4), заменив в ней ряд коэффициентов $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^i}$ рядом $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{i^2}$ (напомним, что его сумма равна $\pi^2/6$). В качестве α возьмем последовательность $(2^i : i \in \mathbb{N})$ и положим

$$\rho_I(\mu,\nu) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{\rho_{2^i}(\mu,\nu)}{2^i \cdot i^2}. \tag{5}$$

Почти дословно повторив рассуждения, приведенные при доказательстве предложений 3.2 и 3.4 из [8], можно утверждать, что формула (5) определяет совместимую с топологией метрику ρ_I на $I(X)$ и метрики ρ_I задают метризацию функтора I в терминологии В. В. Федорчука.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $I_n(X) = \{\mu \in I(X) : |\operatorname{supp}(\mu)| \le n\}$ замкнуто в $I(X)$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n(X)$ всюду плотно в $I(X)$ (см. [4]). Поэтому для любой меры $\mu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ определено натуральное число $N(\mu,\varepsilon)$, равное наименьшей мощности носителя ε-приближения меры μ по метрике ρ_I:

$$N(\mu,\varepsilon) = \min\{n : \rho_I(\mu, I_n(X)) \le \varepsilon\}.$$

Если μ имеет бесконечный носитель, то $N(\mu,\varepsilon)$ неограниченно возрастает при $\varepsilon \to 0$. Скорость этого возрастания характеризует размерность квантования $D_I(\mu)$ меры μ:

$$D_I(\mu) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\mu,\varepsilon)}{-\log\varepsilon}$$

(если указанного предела не существует, то рассматриваются верхний и нижний пределы, и мы получаем верхнюю $\overline{D}_I(\mu)$ и нижнюю $\underline{D}_I(\mu)$ размерности квантования μ).

Нам понадобится также понятие емкостных размерностей (верхней $\overline{\dim}_B F$ и нижней $\underline{\dim}_B F$) замкнутого подмножества F метрического компакта (X,ρ) (см. [12]). Для множества F и $\varepsilon > 0$ через $N(F,\varepsilon)$ обозначим наименьшее число точек в ε-сети для F. Тогда

$$\overline{\dim}_B F = \varlimsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(F,\varepsilon)}{-\log\varepsilon}, \quad \underline{\dim}_B F = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(F,\varepsilon)}{-\log\varepsilon}.$$

В случае совпадения этих пределов используют обозначение $\dim_B F$ и говорят о *емкостной размерности* F.

Предложение 2.2. *Для любой идемпотентной меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\overline{D}_I(\mu) \le \overline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)), \quad \underline{D}_I(\mu) \le \underline{\dim}_B(\operatorname{supp}(\mu)).$$

Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством аналогичных неравенств в [7, предложение 4.3 и следствие 4.4].

Подмножество A метрического компакта (X, ρ) называется *ε-разделенным* ($\varepsilon > 0$), если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in A$.

Следующее предложение доказано в [10].

Предложение 2.3 [10, предложение 2.5]. *Пусть последовательность положительных чисел ε_n монотонно ($\varepsilon_n \ge \varepsilon_{n+1}$) сходится к нулю,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \varepsilon_{n+1}} = 1,$$

и пусть T_n — последовательность ε_n-разделенных ε_n-сетей в X. Тогда

$$\overline{\dim}_B X = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}, \quad \underline{\dim}_B X = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n}.$$

Из доказанного в [10] предложения 2.1 следует

Предложение 2.4. *Если последовательность ε_n удовлетворяет условиям предложения 2.3, то*

$$\underline{D}_I(\mu) = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}, \quad \overline{D}_I(\mu) = \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log N(\mu, \varepsilon_n)}{-\log \varepsilon_n}.$$

Пусть $\mu \in I(X)$ и d_μ — функция плотности меры μ. Положим

$$K(\mu) = \{x : d_\mu(x) = 0\}.$$

Предложение 2.5. *Для любой меры $\mu \in I(X)$ имеют место неравенства*

$$\underline{D}_I(\mu) \ge \underline{\dim}_B K(\mu), \quad \overline{D}_I(\mu) \ge \overline{\dim}_B K(\mu).$$

Доказательство. Опираясь на результаты [7, леммы 3.3, 4.5], легко проверить, что имеет место неравенство

$$N(\mu, \varepsilon) \ge N(K(\mu), \varepsilon),$$

из которого следует утверждение предложения. □

Для замкнутого подмножества F метрического компакта X определим идемпотентную меру λ_F по формуле

$$\lambda_F(f) = \max\{f(x) : x \in F\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что мера λ_F имеет функцию плотности d_{λ_F}, которая тождественно равна нулю на F и принимает значение $-\infty$ во всех остальных точках X. Из предложений 2.2 и 2.5 вытекает

Следствие 2.6. *Для любого замкнутого подмножества $F \subset X$*

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = \underline{\dim}_B F, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = \overline{\dim}_B F.$$

В пространстве $I(X)$ определено идемпотентное сложение $\oplus$. Для $\mu, \nu \in I(X)$ мера $\mu \oplus \nu \in I(X)$ определяется по формуле

$$(\mu \oplus \nu)(f) = \max\{\mu(f), \nu(f)\},$$

где $f \in C(X)$. Очевидно, что

$$d_{\mu\oplus\nu}(x) = \max\{d_\mu(x), d_\nu(x)\}.$$

Имеют место следующие утверждения, доказательства которых почти тождественны доказательствам соответствующих предложений из [7].

Предложение 2.7 [7, предложение 4.10]. *Для любых $\mu, \nu \in I(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство*

$$N(\mu \oplus \nu, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\nu, \varepsilon).$$

Следствие 2.8 [7, следствие 4.11]. *Для любых мер $\mu, \nu \in I(X)$*

$$\overline{D}_I(\mu \oplus \nu) \leq \max\{\overline{D}_I(\mu), \overline{D}_I(\nu)\}.$$

3. Теорема о промежуточных значениях размерностей квантования

Пусть (X, ρ) — метрический компакт, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Замкнутый ε-шар точки x будем обозначать через $B(x, \varepsilon) = \{y : \rho(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Теорема 3.1. *Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\dim_B X = a < \infty$. Тогда для любых чисел b, c, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq b \leq c \leq a$, существует мера $\mu_{bc} \in I(X)$ такая, что*

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = b, \quad \overline{D}_I(\mu_{bc}) = c.$$

Доказательство. Покажем вначале, что на X существует идемпотентная мера μ, для которой $D_I(\mu) = b$. Для $b = 0$ в качестве μ можно взять любую меру с конечным носителем. При $b = a$ искомой мерой μ является мера λ_X в силу следствия 2.6.

В дальнейшем $b \in (0, a)$. Положим $\varepsilon_n = 1/2^n$, $n \in \mathbb{N}$. Зафиксируем в X возрастающую (по включению) последовательность подмножеств $T_0, T_1, \ldots, T_n, \ldots$, где $|T_0| = 1$ и каждое T_n при $n \in \mathbb{N}$ является ε_n-разделенной ε_n-сетью в X. Такую последовательность легко построить по индукции, дополняя на шаге $n+1$ уже построенное T_n до максимального ε_{n+1}-разделенного подмножества T_{n+1}, которое (в силу максимальности) будет ε_{n+1}-сетью.

Положим

$$b_n = 2^{2^{np}},$$

где $n \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ — числовой параметр. Определим функцию $d : X \to \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d(x) = 0$ при $x \in T_0$; $d(x) = -b_n$ при $x \in T_n \setminus T_{n-1}$; $d(x) =$

$-\infty$ при $x \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$. Легко проверить, что функция d полунепрерывна сверху и $\max d = 0$. Следовательно, d есть функция плотности некоторой идемпотентной меры μ. Покажем, что при изменении параметра p размерность квантования меры μ принимает все значения в диапазоне $(0, a)$.

Оценка снизу. Пусть мера ν имеет конечный носитель $\mathrm{supp}(\nu) = B$ и $|B| < |T_n|$. Множество T_n является ε_n-разделенным, следовательно, шары $B(x, \varepsilon_n/2)$, $x \in T_n$, попарно не пересекаются. Таким образом, существует точка $t \in T_n$, для которой $B(t, \varepsilon_n/2) \cap B = \varnothing$, и, значит, $\rho(t, B) > \varepsilon_n/2$. Поскольку функция $\rho(x, B)$ принадлежит $\mathrm{Lip}_1(X)$, для любого $i \in \overset{\circ}{N}$ получаем

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq |\mu(2^i \rho(x, B)) - \nu(2^i \rho(x, B))|.$$

Множество B является носителем меры ν и $\rho(x, B) = 0$ при $x \in B$. Следовательно, $\nu(2^i \rho(x, B)) = 0$. При этом

$$\mu(2^i \rho(x, B)) \geq 2^i \rho(t, B) + d(t) > 2^i \varepsilon_n/2 - b_n.$$

Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) \geq 2^i \varepsilon_n/2 - b_n.$$

Положим

$$i(n) = [2^{np}] + n + 2.$$

Легко проверить, что для всех $i > i(n)$ выполняется неравенство

$$2^i \varepsilon_n/4 > b_n.$$

Таким образом, при $i > i(n)$

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu) > 2^i \varepsilon_n/4.$$

Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu) \geq \frac{6}{\pi^2} \sum_{i > i(n)} \frac{\rho_{2^i}(\mu, \nu)}{2^i \cdot i^2} > \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Введем обозначение

$$\delta_n = \frac{6}{\pi^2} \frac{\varepsilon_n}{4(i(n)+1)}.$$

Нетрудно показать, что последовательность δ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \delta_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Итак, доказано, что если носитель меры ν имеет мощность меньше $|T_n|$, то $\rho_I(\mu, \nu) > \delta_n$. Следовательно,

$$N(\mu, \delta_n) \geq |T_n|. \tag{6}$$

Из неравенства (6) и предложений 2.3, 2.4 получаем

$$\underline{D}_I(\mu) = \varliminf_{n \to \infty} \frac{\log N(\mu, \delta_n)}{-\log \delta_n} \geq \varliminf_{n \to \infty} \left(\frac{\log |T_n|}{-\log \varepsilon_n} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \delta_n} \right) = \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Оценка сверху. Для каждого n определим функцию $d_n : X \to \mathbb{R}_{\max}$ следующим образом: $d_n(x) = d(x)$ при $x \in T_n$; $d_n(x) = -\infty$ при $x \notin T_n$. Очевидно, что d_n является функцией плотности некоторой меры ν_n с носителем $\operatorname{supp}(\nu_n) = T_n$. Для $i \in \mathbb{N}$ оценим величину

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = \max\{|\mu(2^i f) - \nu_n(2^i f)| : f \in \operatorname{Lip}_1(X)\}. \qquad (7).$$

Пусть g — функция из $\operatorname{Lip}_1(X)$, на которой достигается максимум правой части формулы (7), т. е.

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = |\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)|.$$

В силу формулы (2) для некоторой точки $y \in X$ имеет место равенство $\mu(2^i g) = 2^i g(y) + d(y)$. Если $y \in T_n$, то легко проверить, что $\mu(2^i g) = \nu_n(2^i g)$ и тогда $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$. Если $y \notin T_n$, то существует точка $t \in T_n$ такая, что $\rho(t, y) \le \varepsilon_n$, поскольку T_n является ε_n-сетью. Имеем

$$2^i g(t) + d(t) \le \nu_n(2^i g) < 2^i g(y) + d(y) = \mu(2^i g).$$

Следовательно,

$$|\mu(2^i g) - \nu_n(2^i g)| \le 2^i |g(y) - g(t)| + d(y) - d(t).$$

При этом $|g(y) - g(t)| \le \varepsilon_n$, $d(y) \le -b_{n+1}$, $-d(t) \le b_n$. Таким образом,

$$\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \le 2^i \varepsilon_n - (b_{n+1} - b_n). \qquad (8)$$

Пусть $i = j(n)$ — наименьшее натуральное число, для которого правая часть формулы (8) больше нуля. Легко проверить, что

$$j(n) = [\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n + 1$$

(здесь мы считаем, что n достаточно велико, так, что $\log_2(b_{n+1} - b_n) > 0$).

Поскольку $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \ge 0$, правая часть формулы (8) не может быть отрицательной. Отсюда следует, что при $i < j(n)$ случай $y \notin T_n$ заведомо исключен. Таким образом, $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) = 0$ при $i < j(n)$ и $\rho_{2^i}(\mu, \nu_n) \le 2^i \varepsilon_n$ при $i \ge j(n)$. Следовательно,

$$\rho_I(\mu, \nu_n) \le \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=j(n)}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{i^2} \le \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}. \qquad (9)$$

Положим

$$\xi_n = \frac{6\varepsilon_n}{\pi^2([\log_2(b_{n+1} - b_n)] + n)}.$$

Нетрудно доказать, что последовательность ξ_n удовлетворяет условиям предложения 2.3 и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \varepsilon_n}{\log \xi_n} = \frac{1}{p+1}.$$

Из неравенства (9) следует, что

$$N(\mu, \xi_n) \le |T_n|,$$

откуда по аналогии с полученной выше нижней оценкой для $\underline{D}_I(\mu)$ получаем

$$\overline{D}_I(\mu) \le \frac{\dim_B X}{p+1}.$$

Теперь для данного $b \in (0, \dim_B X)$ достаточно взять значение p, для которого $\dim_B X/(p+1) = b$, и мы получим меру μ с размерностью квантования $D_I(\mu) = b$.

Переходим к построению искомой меры μ_{bc} для $c \in [b, a]$. В работе [13] доказано, что в компакте X существует замкнутое подмножество F, для которого $\underline{\dim}_B F = 0$, $\overline{\dim}_B F = c$. Рассмотрим идемпотентную меру λ_F. В силу следствия 2.6

$$\underline{D}_I(\lambda_F) = 0, \quad \overline{D}_I(\lambda_F) = c. \tag{10}$$

Таким образом, при $b = 0$ мера λ_F является искомой мерой μ_{bc}. Если $b = c = a$, то $\mu_{bc} = \lambda_X$.

При $b \in (0, a)$ положим

$$\mu_{bc} = \mu \oplus \lambda_F,$$

где μ — идемпотентная мера размерности $D_I(\mu) = b$, построенная выше. В силу следствия 2.8 и равенств (10) $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \leq c$. При этом $K(\mu_{bc}) \supset F$. Следовательно, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) \geq \overline{\dim}_B F = c$ в силу предложения 2.5. Итак, $\overline{D}_I(\mu_{bc}) = c$.

Согласно предложению 2.7

$$N(\mu_{bc}, 2\varepsilon) \leq N(\mu, \varepsilon) + N(\lambda_F, \varepsilon).$$

Поскольку $\underline{D}_I(\lambda_F) = 0$, существует последовательность $\varepsilon_i \to 0$, для которой

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\log N(\lambda_F, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = \underline{D}_I(\lambda_F) = 0.$$

При этом при малых ε_i выполняется неравенство $N(\mu, \varepsilon_i) > N(\lambda_F, \varepsilon_i)$, так как $D_I(\mu) = b > 0$. Следовательно,

$$\underline{D}_I(\mu_{bc}) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\mu_{bc}, 2\varepsilon)}{-\log \varepsilon} \leq \varliminf_{i\to\infty} \frac{\log 2N(\mu, \varepsilon_i)}{-\log \varepsilon_i} = b.$$

Для доказательства обратного неравенства $\underline{D}_I(\mu_{bc}) \geq b$ достаточно дословно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве неравенства $\underline{D}_I(\mu) \geq \dim_B X/(p+1)$ для меры μ, с заменой μ на μ_{bc}. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Graf S., Luschgy H.* Foundations of quantization for probability distributions. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2000.
2. *Иванов А. В.* О размерности квантования вероятностных мер // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 8. С. 41–51.
3. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П., Шпиз Г. Б.* Идемпотентный функциональный анализ. Алгебраический подход // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 5. С. 758–797.
4. *Заричный М. М.* Пространства и отображения идемпотентных мер // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 3. С. 45–64.
5. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
6. *Bazylevych L., Repovs D., Zarichnyi M.* Spaces of idempotent measures of compact metric spaces // Topology Appl. 2010. V. 157, N 1. P. 136–144.
7. *Ivanov A. V.* On quantization dimensions of idempotent probability measures // Topology Appl. 2022. V. 306. 107931.
8. *Ivanov A. V.* On metrization of the idempotent measures functor and quantization dimensions // Topology Appl. 2023. V. 329. 108362.
9. *Федорчук В. В.* Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.

10. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях размерностей квантования идемпотентных мер // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. С. 139–148.
11. *Akian M.* Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Am. Math. Soc. 1999. V. 351, N 11. P. 4515–4543.
12. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2013.
13. *Иванов А. В.* О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545.

Поступила в редакцию 1 декабря 2025 г.
После доработки 1 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 512.54+512.552

АВТОМОРФИЗМЫ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ ТИПА $\mathbf{G}_2$ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ С НЕОБРАТИМОЙ ТРОЙКОЙ

В. В. Киракосян

Аннотация. Доказано, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, т. е. является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.304

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, локальное кольцо.

Введение

Цель данной работы — доказать, что каждый автоморфизм группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативным локальным кольцом с необратимой тройкой стандартен, т. е. является композицией кольцевого, диаграммного и внутреннего автоморфизмов. В работе мы следуем статьям Е. И. Буниной, в первую очередь статьям [1–3], в которых доказан аналогичный результат для других групп Шевалле.

Для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ существует лишь одна решетка весов, которая является одновременно универсальной и присоединенной, поэтому для каждого кольца R существует единственная группа Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ — это $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$. Более того, над локальными кольцами универсальные группы Шевалле совпадают со своими элементарными подгруппами, поэтому рассматриваемая группа Шевалле одновременно является элементарной (т. е. нам известны образующие и соотношения в ней).

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Стейнбергом [4] для конечного случая и Хамфри [5] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы Бореля и Титса [6], Картера и Чена [7], Чена [8–12], Абе [13], А. А. Клячко [14].

Аналог теоремы 2 для систем корней типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$ и $\mathbf{E}_\ell$ был получен Е. И. Буниной в [15], в работе [16] полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобная теорема для локальных колец без $1/2$ была доказана в [1]. Для систем корней типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ она получена в [17], однако в этой работе для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ предполагаются обратимыми двойка и тройка в кольце. В статьях [2, 3] данный результат доказывается для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ уже без требования обратимости двойки. В [18] Е. И. Буниной была доказана аналогичная теорема для системы корней типа $\mathbf{F}_4$ при условии обратимости двойки. В [19] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединенных групп на произвольные коммутативные кольца (с соответствующими условиями обратимости двойки или тройки).

Для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ в случае локального кольца от требования обратимости тройки также удается отказаться, этому и посвящена данная работа.

1. Определения и формулировки основных теорем

Определение 1. Подмножество Φ евклидова пространства $\mathbb{E}$ называется *системой корней* в $\mathbb{E}$, если выполнены следующие условия:

1) множество Φ конечно, порождает $\mathbb{E}$ и не содержит 0;
2) если $\alpha \in \Phi$, то из кратных корня α в Φ содержатся только $\pm\alpha$;
3) если $\alpha \in \Phi$, то *отражение* w_α относительно гиперплоскости, ортогональной α, выражаемое формулой
$$w_\alpha\beta = \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha,$$
сохраняет множество Φ инвариантным; коэффициенты, участвующие в формуле, обозначаются через
$$\langle\beta,\alpha\rangle = \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}$$
и называются *числами Картана*;
4) если $\alpha,\beta \in \Phi$, то $\langle\beta,\alpha\rangle \in \mathbb{Z}$.

Определение 2. Подмножество Δ в Φ называется *базисом* (а входящие в него корни *простыми*), если

1) Δ является базисом в $\mathbb{E}$;
2) каждый корень $\beta \in \Phi$ представляется в виде
$$\beta = \sum_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha,$$
где коэффициенты k_α целые и все одновременно неотрицательные или неположительные.

Если все коэффициенты k_α неотрицательны (соответственно все k_α неположительны), то корень β называется *положительным* (соответственно *отрицательным*).

Определение 3. Подгруппа (конечная) W в $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$, порожденная всеми отражениями w_α, $\alpha \in \Phi$, называется *группой Вейля* системы корней Φ.

Группа Вейля играет исключительно важную роль в изучении систем корней. Среди свойств группы Вейля выделим два важных свойства, которые в дальнейшем будем использовать: группа Вейля в действительности порождается лишь простыми отражениями w_α, $\alpha \in \Delta$, и она транзитивно действует на множестве всех корней одной длины.

Подробные сведения о системах корней, их типах и свойствах можно найти, например, в [20, 21].

Зафиксируем неприводимую систему корней Φ, имеющую тип $\mathbf{G}_2$. Данная система корней имеет ранг 2, состоит из 6 положительных и 6 отрицательных корней, и в ней встречаются корни двух различных длин. Пусть $\{e_1, e_2, e_3\}$ —

стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$. Пронумеруем положительные корни системы $\mathbf{G}_2$ следующим образом (первые два корня являются простыми):

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -2e_1 + e_2 + e_3,\\
\alpha_2 &= e_1 - e_2;\\
\alpha_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 = -e_1 + e_3,\\
\alpha_4 &= \alpha_1 + 2\alpha_2 = -e_2 + e_3,\\
\alpha_5 &= \alpha_1 + 3\alpha_2 = e_1 - 2e_2 + e_3,\\
\alpha_6 &= 2\alpha_1 + 3\alpha_2 = -e_1 - e_2 + 2e_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрим комплексную простую алгебру Ли $\mathscr{L}$ типа $\mathbf{G}_2$ с картановской подалгеброй $\mathscr{H}$ (подробную информацию о полупростых алгебрах Ли, включая их классификацию и связь с системами корней, можно найти в [21]). В алгебре Ли $\mathscr{L}$ можно выбрать *базис Шевалле*

$$\{x_\alpha \mid \alpha \in \Phi;\ h_i \mid 1 \leq i \leq 2\}$$

таким образом, что для любых двух элементов этого базиса их коммутатор является целочисленной линейной комбинацией элементов этого же базиса, а именно:

1) $[h_i, h_j] = 0,\ 1 \leq i, j \leq 2;$
2) $[h_i, x_\alpha] = \langle \alpha, \alpha_i \rangle x_\alpha,\ 1 \leq i \leq 2,\ \alpha \in \Phi;$
3) $[x_\alpha, x_{-\alpha}] = h_\alpha$ является целочисленной линейной комбинацией векторов h_1, h_2;
4) если α, β — линейно независимые корни и $\alpha + \beta \notin \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = 0$;
5) если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $[x_\alpha, x_\beta] = N_{\alpha\beta} x_{\alpha+\beta}$, причем $N_{\alpha\beta} = \pm(r+1)$, где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$; существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$ (подробнее см. в приложении).

Определение 4. Если $x \in \mathscr{L}$, то отображение

$$\operatorname{ad} x\colon \mathscr{L} \to \mathscr{L}, \quad \operatorname{ad} x(y) = [x, y]$$

является эндоморфизмом пространства $\mathscr{L}$ и, более того, (внутренним) дифференцированием алгебры Ли $\mathscr{L}$. Отображение

$$\operatorname{ad}\colon \mathscr{L} \to \mathfrak{gl}(\mathscr{L}), \quad \operatorname{ad}(x) = \operatorname{ad} x$$

является гомоморфизмом алгебр Ли и называется *присоединенным представлением* алгебры Ли $\mathscr{L}$.

Замечание 1. Присоединенное представление полупростой алгебры Ли является *точным* (инъективным), так как его ядро совпадает с центром алгебры Ли, который, разумеется, является абелевым идеалом и поэтому тривиален.

Введем обозначения для образов элементов базиса Шевалле при присоединенном представлении:

$$X_\alpha = \operatorname{ad} x_\alpha; \quad H_i = \operatorname{ad} h_i.$$

Определение 5. Ассоциативное кольцо R с единицей называется *локальным*, если оно имеет единственный максимальный идеал (совпадающий с радикалом этого кольца). Это равносильно тому, что необратимые элементы кольца R образуют идеал.

Замечание 2. Будем описывать автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над коммутативными локальными кольцами с необратимой тройкой и активно пользоваться тем фактом, что в этом случае двойка обратима, так как иначе в силу локальности кольца и равенства $3 - 2 = 1$ единица была бы необратима, что неверно.

Возьмем произвольное коммутативное локальное кольцо и построим элементарную присоединенную группу Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над этим кольцом (см. [22]). Для удобства кратко воспроизведем построение здесь (см. также приложение).

В базисе Шевалле алгебры Ли $\mathscr{L}$ все операторы $X_\alpha^k/k!$ для $\alpha \in \Phi$ и $k \in \mathbb{N}$ записываются целочисленными (нильпотентными) матрицами. Целочисленная матрица может рассматриваться как матрица над произвольным коммутативным кольцом R с единицей, т. е. рассмотрим матрицы размера $n \times n$ над R (в нашем случае $n = \dim \mathscr{L} = 14$), и указанные матрицы $X_\alpha^k/k!$ при $\alpha \in \Phi$, $k \in \mathbb{N}$ вложим в $\mathrm{M}_n(R)$.

Теперь рассмотрим автоморфизмы свободного модуля R^n вида

$$x_\alpha(t) = \exp(tX_\alpha) = 1 + tX_\alpha + \frac{t^2X_\alpha^2}{2!} + \ldots + \frac{t^kX_\alpha^k}{k!} + \ldots, \quad \alpha \in \Phi,\ t \in R.$$

Так как все матрицы X_α нильпотентны, такой ряд всегда конечен.

Очевидно, что для таких экспонент выполнено следующее простое, но важное соотношение:

$$x_\alpha(t)x_\alpha(u) = x_\alpha(t + u). \tag{1}$$

Определение 6. Автоморфизмы $x_\alpha(t)$ называются *элементарными корневыми элементами.*

Определение 7. Подгруппа в $\mathrm{Aut}(R^n)$, порожденная всеми автоморфизмами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$, называется *элементарной присоединенной группой Шевалле* и обозначается через $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.

Определение 8. В элементарной группе Шевалле определим также следующие важные элементы:

- $w_\alpha(t) = x_\alpha(t)x_{-\alpha}(-t^{-1})x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$; $\quad \omega_\alpha = w_\alpha(1)$;
- $h_\alpha(t) = w_\alpha(t)w_\alpha(1)^{-1}$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R^*$.

Как отмечено во введении, над локальными кольцами для системы корней типа $\mathbf{G}_2$ группа Шевалле $G(R) = G_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ совпадает со своей элементарной подгруппой $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, поэтому в данной работе мы не будем вводить группы Шевалле в общем смысле.

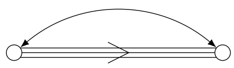
Определим стандартные автоморфизмы (элементарной) группы Шевалле $G(R)$ и еще один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 9. Пусть $\rho\colon R \to R$ — автоморфизм кольца R. Отображение $(a_{ij}) \mapsto (\rho(a_{ij}))$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается той же буквой ρ и называется *кольцевым автоморфизмом* группы $G(R)$. Заметим, что для всех $\alpha \in \Phi$, $t \in R$ элемент $x_\alpha(t)$ отображается в $x_\alpha(\rho(t))$.

Определение 10. Предположим, что R — совершенное кольцо характеристики 3, т. е. $3 = 0$ и эндоморфизм Фробениуса $F(t) = t^3$ является автоморфизмом R. Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ положим $\lambda(\alpha) = 1$, если α — длинный корень, и $\lambda(\alpha) = 3$, если α — короткий корень. Пусть $\delta\colon \Phi \to \Phi$ — перестановка системы корней типа $\mathbf{G}_2$, которая переставляет длинные корни с короткими таким образом, что отображение $\alpha \mapsto \lambda(\alpha)\delta(\alpha)$ является изоморфизмом систем корней; такая δ определена однозначно, при этом $\delta^2 = 1$ и δ действует на множестве простых корней следующим образом: $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$. Тогда знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$ могут быть выбраны таким образом, что отображение

$$x_\alpha(t) \mapsto x_{\delta(\alpha)}(t^{\lambda(\alpha)}), \quad \alpha \in \Phi,\ t \in R,$$

однозначно определяет автоморфизм группы $G(R)$, который обозначается той же буквой δ и называется *диаграммным* (*графовым*) *автоморфизмом* группы $G(R)$ (см. [22, 23]):



Замечание 3. Очевидно, кольцевой и диаграммный автоморфизмы коммутируют между собой.

Определение 11. Пусть $g \in G(R)$. Сопряжение группы $G(R)$ с помощью элемента g является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается через i_g и называется *внутренним автоморфизмом* группы $G(R)$.

Эти три типа автоморфизмов называются *стандартными.* К стандартным также относятся *центральные* автоморфизмы, однако в рассматриваемом нами случае системы корней типа $\mathbf{G}_2$ таких нетривиальных нет, поэтому будем говорить, что автоморфизм группы $G(R)$ *стандартен*, если он является композицией трех введенных типов автоморфизмов.

Кроме того, нам понадобится еще один дополнительный тип автоморфизмов.

Определение 12. Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, нормализующая группу $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ является автоморфизмом группы $G(R)$, который обозначается через i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, *индуцированным элементом* C.

Главная наша цель — доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\mathbf{G}_2, R)$ — *группа Шевалле типа* $\mathbf{G}_2$, R — *коммутативное локальное кольцо с необратимой тройкой. Тогда любой автоморфизм группы* $G(R)$ *стандартен.*

Основная теорема будет сразу следовать из двух теорем.

Теорема 2. *Каждый автоморфизм* φ *группы Шевалле типа* $\mathbf{G}_2$ *над локальным кольцом с необратимой тройкой является композицией кольцевого автоморфизма, диаграммного автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Теорема 3. *Каждый автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа* $\mathbf{G}_2$ *над локальным кольцом с необратимой тройкой является внутренним* (*т. е. сопряжением с помощью элемента данной группы Шевалле*).

Разд. 2–6 посвящены доказательству теоремы 2. Разд. 7 посвящен доказательству теоремы 3.

2. Замена исходного автоморфизма изоморфизмом специального вида

В данном разделе используются некоторые соображения, взятые из работы [24] и присутствующие также в предыдущих подобных работах, упоминавшихся выше (в частности, [1, 2]).

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R, $3 \in J$, k — поле вычетов R/J характеристики 3, $E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ — нормальная подгруппа в группе Шевалле $G(R) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, порожденная всеми элементами $x_\alpha(t)$ для $\alpha \in \Phi$, $t \in J$. Тогда E_J — наибольшая нормальная собственная подгруппа в $G(R)$ (см. [25–27]). Следовательно, подгруппа E_J инвариантна относительно действия автоморфизма φ.

Таким образом, автоморфизм

$$\varphi\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$$

индуцирует автоморфизм

$$\overline{\varphi}\colon E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)/E_J = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k) \to E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k).$$

Группа $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$ является присоединенной группой Шевалле над полем, значит, автоморфизм $\overline{\varphi}$ стандартен (см. [22]), т. е. имеет вид

$$\overline{\varphi} = i_{\overline{g}} \overline{\delta}^{\varepsilon} \overline{\rho},$$

где $\overline{g} \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k))$, $\overline{\delta}$ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $\overline{\rho}$ — полевой автоморфизм, индуцированный некоторым автоморфизмом поля k.

Ясно, что существует матрица $g \in \mathrm{GL}_n(R)$, образ которой при факторизации R по J совпадает с $\overline{g}$. При этом отметим, что мы не можем быть уверены в том, что $g \in N(E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R))$.

Рассмотрим отображение

$$\varphi' = i_{g^{-1}} \varphi.$$

Это изоморфизм группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_n(R)$ на некоторую подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, причем при факторизации R по J он переходит в точности в автоморфизм $\overline{\delta}^{\varepsilon} \overline{\rho}$.

До конца этого раздела временно предположим, что диаграммного автоморфизма $\overline{\delta}$ нет в композиции, т. е. $\varepsilon = 0$ и изоморфизм φ' при факторизации по J переходит в автоморфизм $\overline{\rho}$. Тогда проведенные рассуждения доказывают следующее утверждение.

Предложение 1. *Любая матрица $A \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$ с элементами из подкольца R_1 в R, порожденного единицей, отображается при изоморфизме φ' в матрицу из множества*

$$A \cdot \mathrm{GL}_n(R, J) = \{B \in \mathrm{GL}_n(R) \mid A - B \in \mathrm{M}_n(J)\}$$

(*иными словами, ее образ является сдвигом исходной матрицы на некоторую матрицу с элементами из радикала J*).

Пусть $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $a^2 = 1$. Тогда элемент

$$e = \frac{1}{2}(1 + a)$$

является идемпотентом в кольце $\mathrm{M}_n(R)$:

$$e^2 = \frac{1}{4}(1 + 2a + a^2) = \frac{1}{4}(2 + 2a) = e.$$

Этот идемпотент определяет разложение свободного R-модуля $V \cong R^n$:

$$V = eV \oplus (1-e)V = V_0 \oplus V_1$$

(модули V_0, V_1 свободны, так как любой проективный модуль над локальным кольцом свободен [28]). Пусть $\overline{V} = \overline{V}_0 \oplus \overline{V}_1$ — соответствующее разложение k-модуля (линейного пространства) $\overline{V} \cong k^n$ относительно $\overline{a}$ и

$$\overline{e} = \frac{1}{2}(1 + \overline{a}).$$

Предложение 2. *Модули (подпространства) $\overline{V}_0$, $\overline{V}_1$ являются образами модулей V_0, V_1 при факторизации по J.*

Доказательство. Обозначим образы модулей V_0, V_1 при факторизации по J через $\widetilde{V}_0$, $\widetilde{V}_1$ соответственно. Так как

$$V_0 = \{x \in V \mid ex = x\}, \quad V_1 = \{x \in V \mid ex = 0\},$$

то

$$\overline{e}(\overline{x}) = \frac{1}{2}(1+\overline{a})(\overline{x}) = \frac{1}{2}(1+\overline{a}(\overline{x})) = \frac{1}{2}(1+\overline{a(x)}) = \overline{e(x)}.$$

Тогда $\widetilde{V}_0 \subset \overline{V}_0$, $\widetilde{V}_1 \subset \overline{V}_1$.

Пусть $x = x_0 + x_1$, $x_0 \in V_0$, $x_1 \in V_1$. Тогда $\overline{e}(\overline{x}) = \overline{e}(\overline{x}_0) + \overline{e}(\overline{x}_1) = \overline{x}_0$. Если $\overline{x} \in \widetilde{V}_0$, то $\overline{x} = \overline{x}_0$. $\square$

Пусть теперь для матрицы a с целыми элементами $b = \varphi'(a)$. Тогда $b^2 = 1$ и согласно предложению 1 b сравнима с a по модулю радикала J.

Предложение 3. *Предположим, что $a \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, $b \in \mathrm{GL}_n(R)$, $a^2 = b^2 = 1$, a — матрица с элементами из подкольца R_1 в R, порожденного единицей, b и a сравнимы по модулю радикала J, $V = V_0 \oplus V_1$ — разложение V относительно a, $V = V_0' \oplus V_1'$ — разложение V относительно b. Тогда $\dim V_0' = \dim V_0$, $\dim V_1' = \dim V_1$.*

Доказательство. Имеем R-базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ модуля V такой, что

$$\{e_1, \dots, e_k\} \subset V_0, \quad \{e_{k+1}, \dots, e_n\} \subset V_1.$$

Ясно, что

$$\overline{a}\overline{e}_i = \overline{ae_i} = \overline{\left(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\right)} = \sum_{j=1}^n \overline{a}_{ji}\overline{e}_j.$$

Пусть $\overline{V} = \overline{V}_0 \oplus \overline{V}_1$, $\overline{V} = \overline{V}'_0 \oplus \overline{V}'_1$ — разложения k-модуля (пространства) $\overline{V}$ относительно $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Ясно, что $\overline{V}_0 = \overline{V}'_0$, $\overline{V}_1 = \overline{V}'_1$. Таким образом, по предложению 2 образы модулей V_0 и V_0', V_1 и V_1' при факторизации по радикалу J совпадают. Возьмем такие $\{f_1, \dots, f_k\} \subset V_0'$, $\{f_{k+1}, \dots, f_n\} \subset V_1'$, что $\overline{f}_i = \overline{e}_i$, $i = 1, \dots, n$. Так как матрица перехода от $\{e_1, \dots, e_n\}$ к $\{f_1, \dots, f_n\}$ обратима (сравнима с единичной матрицей по модулю радикала J), то $\{f_1, \dots, f_n\}$ — это R-базис в V. Ясно, что тогда $\{f_1, \dots, f_k\}$ является R-базисом в V_0', а $\{f_{k+1}, \dots, f_n\}$ — R-базисом в V_1'. $\square$

Следствие 1. *В условиях предыдущего предложения для матрицы b существует некоторый базис модуля V, в котором b имеет тот же вид, что и матрица a в исходном базисе. Таким образом, матрицы a и b сопряжены.*

3. Метод линеаризации для локальных колец

Опишем метод линеаризации для локальных колец, которым далее будем активно пользоваться. Этот метод позволяет доказывать, что некоторая система полиномиальных уравнений с коэффициентами в локальном кольце R имеет лишь нулевое решение в радикале кольца. Он был описан и использовался во многих аналогичных работах, перечисленных выше; здесь для удобства приведем теорему и один простой пример, иллюстрирующий применение метода (см., например, [2]).

Теорема 4. *Пусть R — локальное кольцо, и пусть дана система полиномиальных уравнений вида $P_i(x_1,\dots,x_n)=0$, где все входящие полиномы $P_i\in R[x_1,\dots,x_n]$ с коэффициентами в кольце R и, кроме того, для каждого i выполнено $P_i(0,\dots,0)=0$ (т. е. это полиномы без свободного члена). Пусть $\overline{P}_i$ — приведенные по модулю радикала $J=\mathrm{Rad}(R)$ линеаризации P_i, т. е. $\overline{P}_i$ содержит лишь мономы первой степени соответствующего полинома, приведенные по модулю радикала. Тогда если система $\overline{P}_i=0$ имеет единственное нулевое решение $x_j=0$, то исходная система в радикале J имеет единственное решение $x_j=0$ ($x_j\in J$).*

Доказательство. Система уравнений $P_i(x_1,\dots,x_n)=0$ может быть представлена в виде $A(x_1,\dots,x_n)x=0$, где A — матрица, зависящая от переменных x_j. Если определитель матрицы A сравним по модулю радикала с обратимым элементом кольца R (который не зависит от переменных x_j, так как они лежат в радикале), то можно явно выразить решение $x=(A(x))^{-1}0=0$ и получить, что $x=0$ (так как в локальном кольце любой элемент, сравнимый с обратимым по модулю радикала, обратим). Но определитель матрицы $A(x)$ сравним по модулю радикала с определителем матрицы линеаризованной системы, значит, достаточным условием единственности нулевого решения исходной полиномиальной системы в радикале является обратимость матрицы линеаризованной системы, т. е. единственность нулевого решения для линеаризованной системы. $\square$

Замечание 4. Отметим, что способ получения указанной матрицы $A(x)$ неоднозначен, однако ее линеаризация однозначна.

Пример 1. Пусть R — локальное кольцо с необратимой тройкой. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x+3y-xy=0,\\ x-y+xy=0.\end{cases}$$

Ее приведенная по модулю радикала линеаризация имеет вид

$$\begin{cases} x=0,\\ x-y=0,\end{cases}$$

определитель матрицы равен -1 и обратим, поэтому нулевое решение единственно. Следовательно, по теореме исходная система тоже имеет лишь нулевое решение в радикале кольца.

С другой стороны, для исходной системы можно убедиться в единственности нулевого решения в радикале непосредственно. Перепишем ее в следующем виде:

$$\begin{cases} x+(3-x)y=0,\\ (1+y)x-y=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $x = (1+y)^{-1}y$, подставляем это выражение в первое уравнение и получаем после приведения подобных членов

$$((1+y)^{-1} + (3-x))y = 0.$$

Так как коэффициент при y обратим (как сумма обратимого и необратимого элементов локального кольца), получаем, что $y = 0$, значит, и $x = 0$.

4. Образы элементов $w_\alpha(1)$, $x_\alpha(1)$

Напомним, что мы перешли к изоморфизму φ', который при факторизации R по J переходит в автоморфизм $\overline{\delta}^{\varepsilon}\overline{\rho}$.

Рассмотрим матрицы

$$h_\alpha(-1) = \omega_\alpha^{-2} = \omega_\alpha^2, \quad \alpha \in \Phi$$

(вид некоторых из этих матриц в выбранном базисе можно найти в приложении). Это диагональные матрицы порядка 2 с элементами ± 1 на диагонали, причем все они содержат одинаковое количество элементов -1. Значит, по следствию 1 образ $h_\alpha(-1)$ при изоморфизме сопряжен $h_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(-1)$.

Лемма 1. *Образы $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ можно сопряжением одновременно привести к $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = 0$. Поскольку образы коммутирующих матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ также коммутируют, их можно привести к диагональному виду. Применяя следствие 1 к каждой из инволюций $h_{\alpha_1}(-1)$, $h_{\alpha_2}(-1)$ и их произведению $h_{\alpha_1}(-1) \cdot h_{\alpha_2}(-1)$, получаем, что ранги всех четырех совместных собственных подмодулей образов совпадают с рангами соответствующих подмодулей для исходной пары. Следовательно, можно произвести сопряжение (заменой базиса) и привести образы матриц $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ к диагональному виду, а затем выполнить сопряжение матрицей перестановки, чтобы на диагонали элементы стояли так же, как у $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$.

В случае $\varepsilon = 1$ аналогичное рассуждение дает нужный результат. $\square$

Теперь будем считать, что мы заменили исходный изоморфизм новым, переводящим $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ в $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(-1)$ и $h_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(-1)$.

Рассмотрим матрицы $x_\alpha(1)$, $w_\alpha(1) = \omega_\alpha$ для всех $\alpha \in \Phi$.

Лемма 2. *Все матрицы $x_\alpha(1)$ и ω_α, $\alpha \in \Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$x_{\alpha_1}(1), \quad x_{\alpha_2}(1), \quad \omega_{\alpha_1}, \quad \omega_{\alpha_2}.$$

Доказательство. В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$ выполнено, в числе прочих, следующее соотношение (см. [22]):

$$\omega_\alpha x_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} = x_{w_\alpha \beta}(\pm t), \tag{2}$$

где знак зависит только от корней α, β (и не зависит ни от t, ни от выбора базиса), причем этот знак совпадает для пар корней α, β и $\alpha, -\beta$. В частности, отсюда легко получить такое же соотношение для $w_\beta(t)$, $t \in R^*$:

$$\begin{aligned} \omega_\alpha w_\beta(t) \omega_\alpha^{-1} &= \omega_\alpha (x_\beta(t) x_{-\beta}(-t^{-1}) x_\beta(t)) \omega_\alpha^{-1} \\ &= x_{w_\alpha\beta}(\pm t) x_{-w_\alpha\beta}(\mp t^{-1}) x_{w_\alpha\beta}(\pm t) = w_{w_\alpha\beta}(\pm t). \end{aligned} \tag{3}$$

Если в каком-то соотношении должен быть выбран знак минус, то достаточно потом обратить полученную матрицу, поскольку в силу (1) $x_\alpha(-t) = (x_\alpha(t))^{-1}$ и $w_\alpha(-t) = (w_\alpha(t))^{-1}$.

Группа Вейля системы корней порождается простыми отражениями, а также действует транзитивно на множестве корней одинаковой длины. Следовательно, имея матрицы $\omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ и используя соотношения (3) (при $t = 1$), можно выразить все матрицы ω_α, $\alpha \in \Phi$.

Аналогично, так как α_1, α_2 — корни двух возможных различных длин, снова благодаря транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины можно из соотношений (2) (при $t = 1$) выразить все матрицы $x_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$. □

Таким образом, если произвести сопряжение матрицей из $\mathrm{GL}_n(R, J)$ (т. е. сравнимой с единичной по модулю радикала J), которое переведет образы матриц $x_{\alpha_1}(1)$, $x_{\alpha_2}(1)$, ω_{α_1}, ω_{α_2} в матрицы $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1)$, $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1)$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}$ соответственно, то композиция изоморфизма с этим сопряжением будет переводить все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha \in \Phi$, причем по-прежнему при факторизации R по J она будет переходить в автоморфизм $\overline{\delta}^\varepsilon \overline{\rho}$.

Лемма 3. *Указанное сопряжение существует.*

Доказательство. Пользуясь предложением 1, обозначим образы матриц $x_{\alpha_1}(1), x_{\alpha_2}(1), \omega_{\alpha_1}, \omega_{\alpha_2}$ через $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}(1)+A$, $x_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}(1)+B$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_1)}+C$, $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha_2)}+D$, где $A, B, C, D \in \mathrm{M}_n(J)$ — неизвестные матрицы.

В элементарной группе Шевалле для всех $\alpha, \beta \in \Phi$, $\alpha + \beta \neq 0$, выполнено следующее соотношение на коммутатор соответствующих корневых элементов (см. [22]):

$$(x_\alpha(t), x_\beta(u)) = \prod_{\substack{i\alpha+j\beta\in\Phi,\\ i,j\in\mathbb{N}}} x_{i\alpha+j\beta}(c_{ij}t^i u^j), \tag{4}$$

где $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ — групповой коммутатор (обозначаемый для удобства круглыми скобками, чтобы не путать с коммутатором в алгебре Ли), произведение в правой части берется по всем корням $i\alpha + j\beta$, $i, j \in \mathbb{N}$, расположенным в некотором фиксированном порядке, а c_{ij} — целые числа, зависящие только от α, β и от выбранного порядка корней (и не зависящие от t, u), причем если $\alpha + \beta \in \Phi$, то $c_{11} = N_{\alpha\beta}$. В случае нашей системы корней Φ типа $\mathbf{G}_2$ произведение в правой части всегда состоит не более чем из четырех элементов, и все коэффициенты c_{ij} принимают значения $\pm1, \pm2, \pm3$. Еще раз подчеркнем, что благодаря целочисленности c_{ij} все участвующие в соотношении корневые элементы легко выражаются через соответствующие корневые элементы без коэффициентов c_{ij} — достаточно воспользоваться свойством (1).

Итак, рассмотрим набор образов всех соотношений вида (2), (3), (4) при $t = u = 1$, а также соотношений $h_{\alpha_i}(-1) = \omega_{\alpha_i}^2$, $i = 1, 2$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц A, B, C, D, т. е. относительно $4n^2 = 4 \cdot 14^2 = 784$ переменных из радикала. Решая систему методом линеаризации, можно попытаться доказать, что $A = B = C = D = 0$. Однако компьютерное вычисление показывает, что это не так, линеаризованная система, приведенная по модулю радикала J (отметим, что в результате все коэффициенты такой системы будут равны 0 или ±1), может иметь ненулевое решение, а именно, ее ранг равен 732 (как при $\varepsilon = 0$, так и при $\varepsilon = 1$). Это означает, что действительно требуется нетривиальное сопряжение.

С помощью компьютерного вычисления можно убедиться, что существует такое сопряжение, которое сохраняет $h_{\alpha_1}(-1)$ и $h_{\alpha_2}(-1)$ и при этом позволяет занулить ровно 52 переменные (т. е. после этого сопряжения соответствующие элементы матриц-образов совпадают с элементами требуемых матриц). Таким образом, получаем систему относительно $784-52=732$ переменных, приведенная по модулю радикала линеаризация которой оказывается системой полного ранга, равного 732, и поэтому имеет только нулевое решение, откуда по теореме о линеаризации заключаем, что $A=B=C=D=0$ и найденное сопряжение является искомым. $\square$

5. Образы элементов $x_\alpha(t)$

Итак, на данном этапе изоморфизм переводит все $x_\alpha(1)$ и ω_α соответственно в $x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$ и $\omega_{\delta^\varepsilon(\alpha)}$, $\alpha\in\Phi$.

Следствие 2. *Если $\varepsilon=1$, то кольцо R имеет характеристику* 3.

Доказательство. Рассмотрим корни α_1, α_2, $\alpha_4=\alpha_1+2\alpha_2$, $\alpha_5=\alpha_1+3\alpha_2$, $\alpha_6=2\alpha_1+3\alpha_2$ и следующие соотношения вида (4):

$$(x_{\alpha_1}(1),x_{\alpha_6}(1))=1,\quad (x_{\alpha_2}(1),x_{\alpha_4}(1))=x_{\alpha_5}(\pm 3).$$

Поскольку $\delta(\alpha_1)=\alpha_2$, $\delta(\alpha_6)=\alpha_4$, отсюда сразу следует $\pm3=0$ в R. $\square$

Изучим образы $x_\alpha(t)$, а именно, докажем, что эти матрицы переходят в некоторые $x_\alpha(t')$ в случае $\varepsilon=0$ или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ в случае $\varepsilon=1$, где $t\mapsto t'$ — кольцевой автоморфизм. Над полем это верно (см. [22]). Значит, в нашем случае они переходят в $x_\alpha(t')+T$ ($\varepsilon=0$) или $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})+T$ ($\varepsilon=1$), где $T\in \mathrm{M}_n(J)$. Нужно доказать, что во всех случаях $T=0$. Однако это может быть неверно, если неправильно выбрать t' и соответственно T. Правильный выбор будет описан ниже.

Замечание 5. На этом этапе мы ничего не говорим об отображении $t\mapsto t'$. Утверждается лишь, что существует такой элемент t', что матрицы отображаются указанным образом.

Лемма 4. *Все матрицы $x_\alpha(t)$, $\alpha\in\Phi$, выражаются через следующий набор матриц:*

$$\omega_\alpha,\ \alpha\in\Phi;\quad x_{\alpha_1}(t),\ x_{\alpha_2}(t).$$

Доказательство. По аналогии с леммой 2 данное утверждение сразу следует из соотношений (2), транзитивности действия группы Вейля на множестве корней одной длины и того факта, что α_1,α_2 — это корни двух возможных различных длин. $\square$

Рассмотрим матрицы $x_{\alpha_1}(t)$ и $x_{\alpha_2}(t)$. Пользуясь рассуждением выше, обозначим их образы при изоморфизме через $x_{\alpha_1}(t')+S$ и $x_{\alpha_2}(t')+T$ соответственно ($\varepsilon=0$) или через $x_{\alpha_2}(t')+S$ и $x_{\alpha_1}((t')^3)+T$ соответственно ($\varepsilon=1$), где $S,T\in \mathrm{M}_n(J)$ — неизвестные матрицы с элементами из радикала J. Выберем S и T так, чтобы выполнялось $T_{7,11}=0$. Как выяснится далее при компьютерном вычислении, это даст правильный выбор представителя. В силу леммы 4 достаточно доказать, что $S=T=0$.

Возьмем набор образов тех соотношений вида (2) и (4), в которые входят только элементы (и их степени) вида $x_\alpha(t)$, $x_\alpha(1)$ и ω_α, $\alpha\in\Phi$. Они дают систему (полиномиальных) уравнений относительно неизвестных матриц S и T, т. е. (с учетом условия $T_{7,11}=0$) относительно $2n^2-1=2\cdot 14^2-1=391$ переменных из радикала. Решим полученную систему методом линеаризации. Компьютерное вычисление показывает, что приведенная по модулю радикала J линеаризация системы является системой полного ранга, равного 391 (как при $\varepsilon=0$, так и при $\varepsilon=1$), и поэтому имеет только нулевое решение. Отсюда по теореме о линеаризации заключаем, что $S=T=0$.

6. Доказательство теоремы 2

Таким образом, на данном этапе изоморфизм переводит матрицы $x_\alpha(t)$ в некоторые $x_\alpha(t')$ ($\varepsilon=0$) или в некоторые $x_{\delta(\alpha)}((t')^{\lambda(\alpha)})$ ($\varepsilon=1$). Обозначим отображение $t\mapsto t'$ через $\rho\colon R\to R$.

Лемма 5. *Отображение ρ инъективно, аддитивно и мультипликативно; в случае $\varepsilon=1$ эндоморфизм Фробениуса F также инъективен.*

Доказательство. Инъективность отображения ρ, а также эндоморфизма F при $\varepsilon=1$, очевидна, так как у нас изоморфизм групп и при этом $x_\alpha(0)=1$.

Аддитивность ρ сразу следует из соотношения (1).

Мультипликативность ρ следует, например, из соотношения (4) для корней α_1 и α_5:

$$(x_{\alpha_1}(t),x_{\alpha_5}(u))=x_{\alpha_1+\alpha_5}(tu)=x_{\alpha_6}(tu)$$

(это рассуждение остается в силе и при $\varepsilon=1$, так как участвующие в соотношении корни длинные). $\square$

Следствие 3. *Отображение ρ является изоморфизмом из кольца R на некоторое его подкольцо R'; в случае $\varepsilon=1$ то же верно и для эндоморфизма Фробениуса F.*

Докажем сюръективность полученных эндоморфизмов кольца R. Заметим, что мы находимся в ситуации, в которой для некоторой матрицы $C\in \mathrm{GL}(V)$ выполнено

$$i_C\varphi(E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R))=CE_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)C^{-1}\subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R')$$

(причем при $\varepsilon=0$ имеет место равенство). Покажем, что $R'=R$.

Лемма 6. *Если для некоторого $C\in\mathrm{GL}(V)$ имеет место включение*

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)C^{-1}\subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R'),$$

где R' — подкольцо в R, то $R'=R$.

Доказательство. Обозначим матричные единицы через E_{ij}. Можно проверить, что

$$((x_{\alpha_1}(1)-1)(x_{\alpha_5}(1)-1))^2=E_{6,12},$$

$$\omega_{\alpha_6}((x_{\alpha_1}(1)-1)(x_{\alpha_5}(1)-1))^2\omega_{\alpha_6}^{-1}=E_{12,6}.$$

Произведение этих матричных единиц дает матричную единицу $E_{6,6}$. В матрице $h_{\alpha_1}(t)$ элемент на позиции (6, 6) равен t. Таким образом, с помощью нашей группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)$ сложением и умножением матриц можно получить любую матрицу вида $tE_{6,6}$, где $t\in R^*$.

Предположим теперь, что R' — собственное подкольцо в R. Так как

$$CE_{\mathrm{ad}}(\Phi,R)C^{-1}\subset E_{\mathrm{ad}}(\Phi,R'),$$

то подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R)$, порожденное всеми элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$, должно переходить в подкольцо кольца $\mathrm{M}_n(R')$, порожденное элементами группы $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R')$. Следовательно, все элементы матриц $C(tE_{6,6})C^{-1}$ при $t \in R^*$ должны лежать в подкольце R'.

Очевидно, в обратимой матрице над локальным кольцом не может быть строки или столбца, полностью состоящего из необратимых элементов. Значит, существует такая пара индексов i, j, что элементы $C_{i,6}$ и $(C^{-1})_{6,j}$ обратимы. Отсюда заключаем, что при $t \in R^*$

$$C_{i,6}t(C^{-1})_{6,j} = (C(tE_{6,6})C^{-1})_{i,j} \in R',$$

т. е.

$$C_{i,6}R^*(C^{-1})_{6,j} = R^* \subset R'.$$

Но локальное кольцо R аддитивно порождается множеством R^*, поэтому в действительности $R \subset R'$, что дает требуемое равенство $R' = R$. $\square$

Следствие 4. *Отображение ρ является автоморфизмом кольца R; в случае $\varepsilon = 1$ эндоморфизм Фробениуса F также является автоморфизмом кольца R, т. е. в этом случае R — совершенное кольцо характеристики 3. При этом выполнено $CE_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R)$.*

Таким образом, показано, что композиция $i_C\varphi$ исходного автоморфизма φ группы Шевалле и некоторого сопряжения (замены базиса) с помощью матрицы $C \in \mathrm{GL}_n(R)$, нормализующей данную группу, является композицией $\delta^\varepsilon\rho$, где δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — кольцевой автоморфизм. Это завершает доказательство теоремы 2.

7. Доказательство теоремы 3

Пусть $C \in \mathrm{GL}_n(R)$ — матрица из нормализатора группы $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Наша цель — показать, что $C \in R^* \cdot G(R)$.

Если J — максимальный идеал (радикал) кольца R, то матрицы из $\mathrm{M}_n(J)$ образуют радикал в кольце матриц $\mathrm{M}_n(R)$, поэтому

$$C \cdot \mathrm{M}_n(J) \cdot C^{-1} = \mathrm{M}_n(J),$$

следовательно,

$$C \cdot (1 + \mathrm{M}_n(J)) \cdot C^{-1} = 1 + \mathrm{M}_n(J),$$

т. е.

$$C \cdot E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J) \cdot C^{-1} = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J),$$

так как $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R) \cap (1 + \mathrm{M}_n(J))$. Значит, образ $\overline{C}$ матрицы C при факторизации кольца R по радикалу J индуцирует автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(k) = E_{\mathrm{ad}}(\Phi, k)$, где k — поле вычетов R/J характеристики 3.

Лемма 7. *Любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над полем k характеристики 3 является внутренним.*

Доказательство. Предположим, что некоторая матрица $C \in \mathrm{GL}_n(k)$ лежит в нормализаторе группы $G(k)$. Тогда автоморфизм-сопряжение i_C стандартен (см. [22]), т. е. $i_C = i_g \circ \delta^\varepsilon \circ \rho$, где $g \in G(k)$, δ — диаграммный автоморфизм и $\varepsilon \in \{0, 1\}$, ρ — полевой автоморфизм. Следовательно, $i_{g^{-1}}i_C = i_{C'} = \delta^\varepsilon\rho$, $C' \in$

$\mathrm{GL}_n(k)$. Заметим, что для любого $\alpha \in \Phi$ выполнено $\delta^\varepsilon \rho(x_\alpha(1)) = \delta^\varepsilon(x_\alpha(1)) = x_{\delta^\varepsilon(\alpha)}(1)$.

Допустим, что $\varepsilon = 1$. Тогда имеем $C' x_\alpha(1) = x_{\delta(\alpha)}(1) C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Достаточно записать эти соотношения, рассматриваемые как уравнения относительно неизвестной матрицы $C' \in \mathrm{M}_n(k)$, для корней, положительно порождающих всю систему, а именно $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$. Вычисление показывает, что пространство решений полученной системы линейных уравнений над полем k одномерно и не содержит решений, соответствующих обратимым матрицам. Это приводит к противоречию с предположением $\varepsilon = 1$.

Таким образом, $\varepsilon = 0$ и $i_{g^{-1}} i_C = i_{C'} = \rho$, т. е. сопряжение матрицей C' задает полевой автоморфизм ρ. Значит, $C' x_\alpha(1) = x_\alpha(1) C'$ для всех $\alpha \in \Phi$. Следовательно, матрица C' скалярна и автоморфизм i_C внутренний. $\square$

Из леммы 7 следует, что $i_{\overline{C}} = i_{g'}$, $g' \in G(k)$. Возьмем произвольный элемент $g \in G(R)$, для которого выполнено $\overline{g} = g'$, и рассмотрим матрицу $C' = g^{-1} \cdot C$. Очевидно, эта матрица также нормализует группу $G(R)$, при этом $\overline{C'} = 1$. Таким образом, описание матриц из нормализатора группы $G(R)$ сведено к описанию матриц из нормализатора данной группы, сравнимых с единичной по модулю радикала J.

Далее будем считать, что изначальная матрица C сравнима с единичной по модулю радикала: $C = 1 + Y$, $Y \in \mathrm{M}_n(J)$.

Для каждого $\alpha \in \Phi$ имеет место равенство

$$C x_\alpha(1) C^{-1} = x_\alpha(1) \cdot g_\alpha, \quad g_\alpha \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J),$$

или, эквивалентно,

$$C x_\alpha(1) = x_\alpha(1) g_\alpha C. \tag{5}$$

Любой элемент $g_\alpha \in E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ можно разложить в произведение вида

$$t_{\alpha_1}(1 + a_{\alpha,1}) t_{\alpha_2}(1 + a_{\alpha,2}) x_{\alpha_1}(b_{\alpha,1}) \cdots x_{\alpha_6}(b_{\alpha,6}) x_{-\alpha_1}(c_{\alpha,1}) \cdots x_{-\alpha_6}(c_{\alpha,6}),$$

где $a_{\alpha,1}, a_{\alpha,2}, b_{\alpha,1}, \ldots, b_{\alpha,6}, c_{\alpha,1}, \ldots, c_{\alpha,6} \in J$ (см., например, [25]).

Рассматривая набор соотношений вида (5) для корней $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$, положительно порождающих всю систему, получаем систему полиномиальных уравнений относительно неизвестных $Y_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$, лежащих в радикале. Однако чтобы иметь возможность применить к ней метод линеаризации, необходимо произвести некоторые дополнительные преобразования.

Заметим, что при умножении матрицы C на матрицы из $E_{\mathrm{ad}}(\Phi, R, J)$ и на скаляры, сравнимые с 1 по модулю радикала J, по-прежнему получается матрица из нормализатора группы $G(R)$, сравнимая с единичной по модулю J.

Лемма 8. *Существует такой набор элементов $d, a_1, a_2 \in 1 + J$, $b_1, \ldots, b_6$, $c_1, \ldots, c_6 \in J$, что для матрицы*

$$\begin{aligned} C' = d \cdot t_{\alpha_1}(a_1) t_{\alpha_2}(a_2) \cdot x_{-\alpha_2}(b_2) x_{-\alpha_6}(b_6) x_{-\alpha_5}(b_5) x_{-\alpha_4}(b_4) x_{-\alpha_3}(b_3) x_{-\alpha_1}(b_1) \\ \cdot C \cdot x_{\alpha_1}(c_1) x_{\alpha_3}(c_3) x_{\alpha_4}(c_4) x_{\alpha_5}(c_5) x_{\alpha_6}(c_6) x_{\alpha_2}(c_2) \end{aligned}$$

выполнено $C' = 1 + Y'$, где $Y' \in \mathrm{M}_n(J)$ содержит нули на конкретных $n+1 = 15$ позициях (явно указанных в доказательстве).

Доказательство. Положим $C^{(0)} = C$.

Рассмотрим позицию (α_5, α_6) и умножим $C^{(0)}$ слева на $x_{-\alpha_1}\big(-C^{(0)}_{\alpha_5,\alpha_6} / C^{(0)}_{\alpha_6,\alpha_6}\big)$. В результате получим матрицу $C^{(1)}$, у которой $C^{(1)}_{\alpha_5,\alpha_6} = 0$.

Рассмотрим позицию (α_4, α_6) и умножим $C^{(1)}$ слева на $x_{-\alpha_3}\bigl(-C^{(1)}_{\alpha_4,\alpha_6}/C^{(1)}_{\alpha_6,\alpha_6}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(2)}$, у которой $C^{(2)}_{\alpha_4,\alpha_6} = 0$ и при этом также сохраняется $C^{(2)}_{\alpha_5,\alpha_6} = 0$, так как в матрице $x_{-\alpha_3}(t)$ строка, соответствующая α_5, содержит лишь диагональную единицу и все остальные нули.

Рассмотрим позицию (α_3, α_6) и умножим $C^{(2)}$ слева на $x_{-\alpha_4}\bigl(C^{(2)}_{\alpha_3,\alpha_6}/C^{(2)}_{\alpha_6,\alpha_6}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(3)}$, у которой $C^{(3)}_{\alpha_3,\alpha_6} = 0$ и при этом все предыдущие нулевые позиции также остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_1, α_6) и умножим $C^{(3)}$ слева на $x_{-\alpha_5}\bigl(C^{(3)}_{\alpha_1,\alpha_6}/C^{(3)}_{\alpha_6,\alpha_6}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(4)}$, у которой $C^{(4)}_{\alpha_1,\alpha_6} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (h_1, α_6) и умножим $C^{(4)}$ слева на $x_{-\alpha_6}\bigl(C^{(4)}_{h_1,\alpha_6}/(2C^{(4)}_{\alpha_6,\alpha_6})\bigr)$. Получим матрицу $C^{(5)}$, у которой $C^{(5)}_{h_1,\alpha_6} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_5) и умножим $C^{(5)}$ слева на $x_{-\alpha_2}\bigl(-C^{(5)}_{\alpha_4,\alpha_5}/C^{(5)}_{\alpha_5,\alpha_5}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(6)}$, у которой $C^{(6)}_{\alpha_4,\alpha_5} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Далее рассмотрим позицию (α_6, α_5) и умножим $C^{(6)}$ уже справа на $x_{\alpha_1}\bigl(-C^{(6)}_{\alpha_6,\alpha_5}/C^{(6)}_{\alpha_6,\alpha_6}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(7)}$, у которой $C^{(7)}_{\alpha_6,\alpha_5} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_2) и умножим $C^{(7)}$ справа на $x_{\alpha_3}\bigl(-C^{(7)}_{\alpha_4,\alpha_2}/(2C^{(7)}_{\alpha_4,\alpha_4})\bigr)$. Получим матрицу $C^{(8)}$, у которой $C^{(8)}_{\alpha_4,\alpha_2} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, h_2) и умножим $C^{(8)}$ справа на $x_{\alpha_4}\bigl(C^{(8)}_{\alpha_4,h_2}/C^{(8)}_{\alpha_4,\alpha_4}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(9)}$, у которой $C^{(9)}_{\alpha_4,h_2} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_4, -\alpha_2)$ и умножим $C^{(9)}$ справа на $x_{\alpha_5}\bigl(C^{(9)}_{\alpha_4,-\alpha_2}/C^{(9)}_{\alpha_4,\alpha_4}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(10)}$, у которой $C^{(10)}_{\alpha_4,-\alpha_2} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию $(\alpha_5, -\alpha_1)$ и умножим $C^{(10)}$ справа на $x_{\alpha_6}\bigl(C^{(10)}_{\alpha_5,-\alpha_1}/C^{(10)}_{\alpha_5,\alpha_5}\bigr)$. Получим матрицу $C^{(11)}$, у которой $C^{(11)}_{\alpha_5,-\alpha_1} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Рассмотрим позицию (α_4, α_3) и умножим $C^{(11)}$ справа на $x_{\alpha_2}\bigl(C^{(11)}_{\alpha_4,\alpha_3}/(2C^{(11)}_{\alpha_4,\alpha_4})\bigr)$. Получим матрицу $C^{(12)}$, у которой $C^{(12)}_{\alpha_4,\alpha_3} = 0$ и все предыдущие нулевые позиции остаются нулевыми.

Таким образом, матрица $C^{(12)}$ содержит ровно 12 (недиагональных) нулевых позиций.

Положим $C^{(13)} = \bigl(C^{(12)}_{h_1,h_1}\bigr)^{-1} \cdot C^{(12)}$. Тогда $C^{(13)}_{h_1,h_1} = 1$, т. е. $Y^{(13)}_{h_1,h_1} = 0$, при этом, очевидно, все предыдущие нулевые позиции сохраняются.

Осталось применить умножения на диагональные матрицы t_{α_1} и t_{α_2}. Заметим, что у $t_{\alpha_1}(a)$ на позиции (α_6, α_6) стоит a и на позиции (α_4, α_4) стоит 1, а у $t_{\alpha_2}(a)$ на позиции (α_4, α_4) стоит a и на позиции (α_6, α_6) стоит 1, при этом у обеих матриц на позиции (h_1, h_1) стоит 1. Следовательно, если положить $C' = C^{(15)} = t_{\alpha_1}\bigl((C^{(13)}_{\alpha_6,\alpha_6})^{-1}\bigr) \cdot t_{\alpha_2}\bigl((C^{(13)}_{\alpha_4,\alpha_4})^{-1}\bigr) \cdot C^{(13)}$, то получим $C'_{\alpha_4,\alpha_4} = C'_{\alpha_6,\alpha_6} = 1$, т. е. $Y'_{\alpha_4,\alpha_4} = Y'_{\alpha_6,\alpha_6} = 0$, при этом все предыдущие нулевые позиции также сохраняются. $\square$

Итак, рассмотрим матрицу $C' = 1+Y'$ из леммы 8. Как уже отмечалось, C' по-прежнему нормализует группу $G(R)$ и сравнима с единичной по модулю J.

Теперь вернемся к системе уравнений вида (5). Аналогичные уравнения справедливы для матрицы C'. Имеем систему уравнений относительно $n^2 - (n+1) + 4n = 237$ неизвестных $Y'_{ij}, a_{\alpha,i}, b_{\alpha,i}, c_{\alpha,i}$, лежащих в радикале. Как показывает вычисление, линеаризация данной системы является системой полного ранга, равного 237, поэтому имеет единственное нулевое решение. По теореме о линеаризации отсюда, в частности, следует, что $Y' = 0$, т. е. $C' = 1$. Это завершает доказательство теоремы 3.

Основная теорема 1 теперь немедленно следует из доказанных теорем 2 и 3.

8. Приложение

8.1. Знаки структурных констант $N_{\alpha\beta}$. Напомним, что при $\alpha + \beta \in \Phi$ структурные константы $N_{\alpha\beta}$ базиса Шевалле выражаются формулой

$$N_{\alpha\beta} = \pm(r+1),$$

где r — максимальное целое число, для которого $\beta - r\alpha \in \Phi$. Как уже упоминалось в работе, существуют алгоритмы согласованного выбора знаков всех констант $N_{\alpha\beta}$. Более подробные сведения об этом можно найти, например, в [29, 30]. Готовые таблицы структурных констант для систем корней некоторых типов можно также найти, например, в [23, 31].

8.2. Построение представления, некоторые элементы группы Шевалле. В пространстве представления возьмем следующий базис:

$$v_1 = x_{\alpha_1},\ \dots,\ v_6 = x_{\alpha_6},$$

$$v_7 = x_{-\alpha_1},\ \dots,\ v_{12} = x_{-\alpha_6},$$

$$v_{13} = h_1,\ v_{14} = h_2.$$

Выпишем, к примеру, образы элементов x_α базиса, соответствующих простым корням, а также некоторые элементы группы Шевалле:

$$X_{\alpha_1} = \begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-2&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix},$$

$$X_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-2\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-2&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&2&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix};$$

$$x_{\alpha_1}(t)=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&-t^2&0&0&0&0&0&-2t&3t\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&t&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&t&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix},$$

$$x_{\alpha_2}(t)=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&-t^2&0&0&0&0&t&-2t\\
-t&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t^2&0&-2t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
t^3&0&-3t^2&3t&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&3t&3t^2&-t^3&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&2t&-t^2&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-t&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&t&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix};$$

$$\omega_{\alpha_1}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix},$$

$$\omega_{\alpha_2}=\begin{pmatrix}
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&-1
\end{pmatrix};$$

$$h_{\alpha_1}(-1)=\begin{pmatrix}
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{pmatrix},$$

$$
h_{\alpha_2}(-1) = \begin{pmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

Благодарность. Автор выражает благодарность Елене Игоревне Буниной за внимание к работе, ценные замечания и консультации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 7. С. 47–80.

2. *Бунина Е. И., Верёвкин П. А.* Автоморфизмы групп Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2012. Т. 17, № 7. С. 49–66.

3. *Бунина Е. И., Верёвкин П. А.* Нормализатор группы Шевалле типа $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. математика. 2013. Т. 18, № 1. С. 57–62.

4. *Steinberg R.* Automorphisms of finite linear groups // Canad. J. Math. 1960. V. 12. P. 606–615.

5. *Humphreys J. E.* On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 908–911.

6. *Borel A., Tits J.* Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques simples // Ann. Math. 1973. V. 97, N 3. P. 499–571.

7. *Carter R. W., Chen Yu.* Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. 1993. V. 155, N 1. P. 44–94.

8. *Chen Yu.* Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. 1994. V. 92. P. 231–237.

9. *Chen Yu.* Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. 1995. V. 47, N 1. P. 81–97.

10. *Chen Yu.* On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 8. P. 2357–2361.

11. *Chen Yu.* Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Am. Math. Soc. 1996. V. 348, N 2. P. 521–541.

12. *Chen Yu.* Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. 2000. V. 226, N 2. P. 719–741.

13. *Abe E.* Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Analysis. 1993. V. 5, N 2. P. 74–90.

14. *Klyachko A. A.* Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras // J. Algebra. 2010. V. 324, N 10. P. 2608–2619.

15. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы элементарных присоединенных групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с 1/2 // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 4. С. 443–470.

16. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{A}_\ell$, $\mathbf{D}_\ell$, $\mathbf{E}_\ell$ над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 2. С. 35–59.

17. *Бунина Е. И.* Автоморфизмы групп Шевалле типов $\mathbf{B}_2$ и $\mathbf{G}_2$ над локальными кольцами // Фундамент. и прикл. математика. 2007. Т. 13, № 4. С. 3–29.

18. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of type $\mathbf{F}_4$ over local rings with 1/2 // J. Algebra. 2010. V. 323, N 8. P. 2270–2289.
19. *Bunina E. I.* Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. 2012. V. 355, N 1. P. 154–170.
20. *Bourbaki N.* Groupes et algèbres de Lie. Paris: Hermann, 1968.
21. *Humphreys J. E.* Introduction to Lie algebras and representation theory. New York: Springer, 1978.
22. *Steinberg R.* Lectures on Chevalley groups. Mew Haven: Yale Univ., 1967.
23. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: Wiley, 1989.
24. *Петечук В. М.* Автоморфизмы групп SL_n, GL_n над некоторыми локальными кольцами // Мат. заметки. 1980. Т. 28, № 2. С. 187–204.
25. *Abe E.* Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. 1969. V. 21, N 3. P. 474–494.
26. *Abe E.* Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings // Contemp. Math. 1989. V. 83. P. 1–17.
27. *Costa D. L., Keller G. E.* On the normal subgroups of $\mathbf{G_2}(A)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1999. V. 351, N 12. P. 5051–5088.
28. *McDonald B. R.* Automorphisms of $\mathrm{GL}_n(R)$ // Trans. Am. Math. Soc. 1976. V. 215. P. 145–159.
29. *Samelson H.* Notes on Lie algebras. New York: Springer, 1990.
30. *Cohen A. M., Murray S. H., Taylor D. E.* Computing in groups of Lie type // Math. Comp. 2004. V. 73, N 247. P. 1477–1498.
31. *Gilkey P. B., Seitz G. M.* Some representations of exceptional Lie algebras // Geom. Dedicata. 1988. V. 25. P. 407–416.

Поступила в редакцию 18 февраля 2026 г.
После доработки 18 февраля 2026 г.
Принята к публикации 10 марта 2026 г.

Киракосян Вазген Валерикович (ORCID 0009-0005-7393-890X)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
vazgen.kirakosyan@gmail.com

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 512.554

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПРОСТЫХ АЛГЕБР НОВИКОВА И ДУБЛЕЙ ВИТТА

В. А. Логачев, А. П. Пожидаев

Аннотация. Описание дифференцирований простых конечномерных алгебр Новикова и прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем простой характеристики сводится к описанию специальных дифференцирований исходных ассоциативных коммутативных дифференциально простых алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.305

Ключевые слова: алгебра Новикова, дифференцирование, левосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, полином Дарбу, дубль Витта.

Введение

Алгебра $\mathscr{A}$ называется *левосимметрической*, если ассоциатор $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ на $\mathscr{A}$ левосимметричен, т. е. $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathscr{A}$. Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр. Другим хорошо известным примером левосимметрических алгебр являются алгебры Новикова, в которых коммутируют все операторы правого умножения.

В работе [1] была введена конструкция расширения левосимметрической алгебры, позволяющая строить новые левосимметрические алгебры на основе существующих. В основе этой конструкции лежит согласованная пара дифференцирования и гессиана исходной алгебры. В [2] эта конструкция была названа конструкцией Мицухары, где также были предложены обобщения этой конструкции, частными случаями которых являются дубли Витта. В [3] введено понятие эндоморфа произвольной неассоциативной алгебры и, в частности, показано, что эндоморфы левосимметрических алгебр образуют значительный класс простых таких алгебр. В [4] построена конструкция Мицухары для эндоморфов произвольных левосимметрических алгебр, а также описаны дифференцирования эндоморфов произвольных алгебр. В [5] описаны автоморфизмы конечномерных прелиевых дублей Витта над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Пусть d — некоторое ненулевое дифференцирование алгебры $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}$ называется *d-простой*, если $\mathscr{A}^2 \neq 0$ и $\mathscr{A}$ не содержит собственных d-инвариантных идеалов; при этом дифференцирование d называется *простым*.

Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d. Определим на $\mathscr{A}$ новое умножение правилом $x \circ y = xd(y)$. Обозначим полученную алгебру через $\mathscr{A}(d)$. Хорошо известно, что $\mathscr{A}(d)$ является алгеброй Новикова и $\mathscr{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда

Работа второго автора поддержана Российским научным фондом (грант 25-41-00005).

$\mathscr{A}$ является d-простой (в случае характеристики не 2). Более общей является конструкция с умножением $x \circ y = xd(y) + axy$, где $a \in \mathscr{A}$ — некоторый фиксированный элемент (см. [6, 7]); данная алгебра в [8] обозначается через $(\mathscr{A}, d, a)$ (а мы далее обозначаем ее через $\mathscr{A}(d, a)$ в случае $a \neq 0$). Классификация конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики 0 была получена в [9]. В работе [8] дана изящная классификация неассоциативных конечномерных простых алгебр Новикова над алгебраически замкнутыми полями характеристики $p > 0$ (полная классификация таких алгебр над полями характеристики $p > 2$ была получена ранее в [10]). В [11] снято ограничение на алгебраическую замкнутость поля, а именно, доказано, что любая такая алгебра над полем характеристики $p > 0$ изоморфна некоторой алгебре $(\mathscr{A}, d, a)$. Также в [11] описаны автоморфизмы конечномерных алгебр $(\mathscr{A}, d, a)$ над алгебраически замкнутым полем.

В настоящей работе описаны дифференцирования простых конечномерных алгебр Новикова (§ 1) и прелиевых дублей Витта (§ 2) над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Напомним необходимые для дальнейшего определения и обозначения. Всюду далее F означает основное поле, а F^* — мультипликативную группу поля F; через $\mathscr{A}$ мы обозначаем некоторую алгебру над F. В дальнейшем $\langle \Upsilon \rangle = \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где опускаем символ F, если поле ясно из контекста. Если $\mathscr{A}$ — некоторая алгебра (векторное пространство) над F, то через $\operatorname{End} \mathscr{A}$ будем обозначать алгебру всех F-линейных операторов на $\mathscr{A}$, а через $\operatorname{Der} \mathscr{A}$ — алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathscr{A}$. Образ $\varphi(x)$ элемента x под действием отображения φ часто обозначается также через φ_x. Операторы $R_a, L_a \in \operatorname{End} \mathscr{A}$, действующие по правилам $R_a(x) = xa$ и $L_a(x) = ax$ для любого $x \in \mathscr{A}$, называются операторами *правого* и *левого* умножения на элемент $a \in \mathscr{A}$.

Если I является d-инвариантным идеалом в $\mathscr{A}$, то это обозначается следующим образом: $I \lhd_d \mathscr{A}$. В дальнейшем, говоря про d-простые алгебры, мы считаем, что $d \neq 0$. Далее через $F_p[x_1, \ldots, x_n]$ обозначается алгебра усеченных многочленов над полем F характеристики p, т. е. $x_i^p = 0$, $x_i^0 = 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$ (единица 1 отождествляется с единицей поля F).

§ 1. Дифференцирования алгебр Новикова

Всюду далее мы работаем с конечномерными ассоциативными коммутативными d-простыми алгебрами и часто применяем следующий хорошо известный результат (см., например, [2, 12]).

Лемма 1.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F. Тогда $\mathscr{A}$ содержит единицу 1, характеристика поля F равна $p > 0$, $\mathscr{A} \cong F_p[x_1, \ldots, x_n]$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A} \cdot d(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, и $\operatorname{Ker} d = F$. В частности, $d(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы.*

Заметим, что линейное отображение $D = d + R_a$ является *обобщенным* дифференцированием алгебры $\mathscr{A}$, т. е.

$$D(xy) = D(x)y + xd(y) \tag{1}$$

для любых $x, y \in \mathscr{A}$. Будем говорить, что $H \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$ является *α-перестановочным* с $D = d + R_a$, если для некоторого $\alpha \in \mathscr{A}$ выполнено равенство

$$HD = D(H + \alpha)$$

(здесь и далее $H+\alpha$ означает $H+R_\alpha$). Заметим, что $D(1)=a$, а потому $H(a)=D(\alpha)$; если при этом $a=0$, то $D=d$, $d(\alpha)=0$, $dR_\alpha=R_\alpha d$, стало быть,

$$(H-\alpha)d=dH,$$

что мы и возьмем за определение *α-перестановочного* дифференцирования с дифференцированием d. Обозначим данный $\alpha\in\mathscr{A}$ через $\omega(H)$. Положим

$$\operatorname{Der}_D\mathscr{A}=\{H\in\operatorname{Der}\mathscr{A}: HD=D(H+\omega(H))\}.$$

Заметим, что $\omega(H)$ определяется с точностью до элемента β из $\operatorname{Ker}D$ такого, что $\beta\mathscr{A}\subseteq\operatorname{Ker}D$. Действительно, если $HD=D(H+\gamma)$ для некоторого $\gamma\in\mathscr{A}$, то $D\beta=0$ при $\beta=\alpha-\gamma$. Если алгебра $\mathscr{A}$ является d-простой, то $\beta\mathscr{A}\lhd_d\mathscr{A}$, откуда либо $\beta=0$, либо β обратим. Во втором случае получаем $D=0$, т. е. $d=-R_a\in\operatorname{Der}\mathscr{A}$, откуда $a=0$ и $d=0$. Таким образом, в случае d-простой алгебры $\mathscr{A}$ элемент $\omega(H)$ определен однозначно.

Пусть $H,F\in\operatorname{Der}_D\mathscr{A}$, $\omega(H)=\alpha,\omega(F)=\beta$. Тогда

$$\begin{aligned}[H,F]D=(HF-FH)D&=HD(F+\beta)-FD(H+\alpha)\\&=D(H+\alpha)(F+\beta)-D(F+\beta)(H+\alpha)\\&=D[H+\alpha,F+\beta]=D([H,F]+H(\beta)-F(\alpha)).\end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая

Лемма 1.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над полем F, $a\in\mathscr{A}$, $D=d+a$. Тогда $\operatorname{Der}_D\mathscr{A}$ является подалгеброй Ли в $\operatorname{Der}\mathscr{A}$; при этом $\omega(H)$ определяется по H однозначно и $\omega([H,F])=H(\omega(F))-F(\omega(H))$ для любых $H,F\in\operatorname{Der}_D\mathscr{A}$.*

Для дальнейшего нам понадобятся явные условия простоты рассматриваемых алгебр Новикова в случае $\mathscr{A}\cong F_2[x]$. Далее ∂ обозначает частную производную по x.

Лемма 1.3 [11]. *Пусть $\mathscr{A}=F_2[x]$. Алгебра Новикова $\mathscr{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $d=(\beta+\gamma x)\partial$ при $\beta,\gamma\in F^*$. Алгебра $\mathscr{A}(d,a)$ проста $\Leftrightarrow$ $d=(\beta+\gamma x)\partial$ при $\beta\in F^*$; при этом если $\gamma\in F^*$, то $\gamma\neq a$.*

Лемма 1.4. *Пусть $\mathscr{A}=F_2[x]$, $\mathscr{A}(d,a)$ проста, $D=d+R_a$ и $1\in\operatorname{Im}D$. Тогда $\operatorname{Ker}D=0$.*

Доказательство. Пусть $0\neq c\in\operatorname{Ker}D$. Если $c\in F$, то $D(c)=ca=0$, что противоречит условию $a\neq0$. Так как $\langle1,c\rangle=\mathscr{A}$, то $\operatorname{Im}D=\langle D(1)\rangle=\langle a\rangle$. Таким образом, $\dim\operatorname{Im}D=1$, а так как по условию $1\in\operatorname{Im}D$, то $a\in F$. Возьмем d как в лемме 1.3. Тогда $D(x)=\beta+\gamma x+ax$, откуда $\gamma=a$; противоречие. $\square$

Напомним, что ненулевой многочлен f называется *полиномом Дарбу* относительно дифференцирования d, если $d(f)=\lambda f$ для некоторого *собственного многочлена* λ. Также нам понадобится следующая

Теорема 1.1 [11]. *Пусть $\mathscr{A}=F_p[x_1,\dots,x_n]$, d — простое дифференцирование $\mathscr{A}$. Если f является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ, то f обратим и f по λ определяется однозначно с точностью до ненулевого скаляра. Обратно, любой обратимый $f\in\mathscr{A}$ является полиномом Дарбу относительно d для некоторого собственного многочлена λ.*

Теорема 1.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p>0$ и алгебра $\mathbb{A}=(\mathscr{A},d,a)$ проста. Тогда $G\in\operatorname{Der}\mathbb{A}$ в том и только в том случае, если $G=H+\omega(H)$ для некоторого $H\in\operatorname{Der}_D\mathscr{A}$; при этом $\omega(H)\in F$ в случае $a=0$.*

Доказательство. Пусть $G\in\operatorname{Der}\mathbb{A}$. Тогда $G(x\circ y)=G(x)\circ y+x\circ G(y)$, т. е.

$$G(xD_y)=G(x)D(y)+xD(G_y) \tag{2}$$

для любых $x,y\in\mathbb{A}$ (напомним, что мы используем также обозначение $D_x:=D(x)$, что позволяет избежать нагромождения скобок). Пусть $\alpha=G(1)$. Заметим, что $D(1)=0$ при $a=0$, поэтому, полагая $y=1$ в (2), получаем $d(\alpha)=0$, т. е. $\alpha\in F$ при $a=0$. Полагая $x=1$ в (2), выводим

$$G(D_y)=\alpha D(y)+D(G_y). \tag{3}$$

Пусть $H=G-\alpha$. Тогда из (3) следует $HD=D(H+\alpha)$, откуда H является α-перестановочным с D.

Покажем, что H является дифференцированием алгебры $\mathscr{A}$. Из (2) выводим

$$H(xD_y)=G(xD_y)-\alpha xD_y=G_xD_y+xD(G_y)-\alpha xD_y. \tag{4}$$

С другой стороны, по (3) имеем

$$\begin{aligned}H(x)D_y+xH(D_y)&=G_xD_y-\alpha xD_y+xG(D_y)-\alpha xD_y\\&=G_xD_y-\alpha xD_y+x(\alpha D_y+D(G_y))-\alpha xD_y=G_xD_y+xD(G_y)-\alpha xD_y.\end{aligned} \tag{5}$$

Сравнивая (4) и (5), получаем

$$H(xy)=H(x)y+xH(y), \tag{6}$$

если хотя бы один из x,y лежит в $\operatorname{Im}D$.

Если D невырожденное, то (6) справедливо для любых $x,y\in\mathbb{A}$. Поэтому по теореме 1.1 можем считать, что $\dim\operatorname{Ker}D=1$, т. е. $\mathbb{A}=\operatorname{Im}D\oplus\langle e\rangle$ для некоторого $e\in\mathbb{A}$. Таким образом, чтобы установить справедливость (6) для любых $x,y\in\mathbb{A}$, достаточно проверить истинность (6) для $x=y=e$.

Если $1\notin\operatorname{Im}D$, то можно считать $e=1$ и тогда (6) для $x=y=1$ очевидно. Далее можно предполагать, что $1\in\operatorname{Im}D$ и $\mathscr{A}\ncong F_2[x]$ по леммам 1.3 и 1.4.

Заметим, что можно считать $S:=\operatorname{Im}D:=D(\mathscr{A})$ подалгеброй в $\mathscr{A}$. Действительно, если это не так, то существуют $x,y\in S$ такие, что $z=xy\notin S$. Тогда $H\in\operatorname{Der}\mathscr{A}$, поскольку

$$H(z^2)=H(zxy)=H(zx)y+zxH(y)=H(z)xy+zH(x)y+zxH(y)=2zH(z).$$

Покажем, что $d(S)$ содержит обратимые элементы. Действительно, пусть $J=d(S)\mathscr{A}$ и $t=d(D_x)y$ для некоторых $x,y\in\mathscr{A}$. Тогда $J\triangleleft\mathscr{A}$, а так как $d=D-R_a$, то, применяя (1), получаем

$$d(t)\equiv d(d(D_x))y\equiv -d(aD_x)y\equiv 0\,(\operatorname{mod}J),$$

поскольку $a\in S$ и S — подалгебра в $\mathscr{A}$. При этом $J\neq 0$, так как $\mathscr{A}\ncong F_2[x]$, откуда $J=\mathbb{A}$.

Окончательно, $D_{ex}=D_ex+ed_x$, откуда $ed_x\in S$ для любого $x\in S$. Выбирая $x\in S$ так, что d_x обратим (при этом $d_x=D_x-ax\in S$ и $d_x^{-1}\in S$, так как $a,1\in S$), получаем $e\in S$. Пришли к противоречию.

Обратно, если $H\in\operatorname{Der}_D\mathscr{A}$, то, полагая $G=H+\omega(H)$, получаем дифференцирование G алгебры Новикова $\mathbb{A}$. $\square$

§ 2. Дифференцирования дублей Витта

Дубль Витта. Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием d над полем F и $\overline{\mathscr{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathscr{A}$ (как векторного пространства). Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$ над F, на котором произведение определено правилами

$$a \circ b = ab + \overline{ab}, \quad \overline{a} \circ b = ad(b), \quad a \circ \overline{b} = 0, \quad \overline{a} \circ \overline{b} = \overline{ad(b)}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$ с заданным умножением является левосимметрической, обозначается через $\mathscr{A}_d$ и называется *дублем Витта* алгебры $\mathscr{A}$ [2]. При этом $\mathscr{A}_d$ проста тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ является d-простой [2].

Опишем все дифференцирования дубля Витта простой алгебры $\mathscr{A}_d$. Будем говорить, что дифференцирование D алгебры $\mathscr{A}_d$ *индуцируется* дифференцированием $\tau \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$, если

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\bar{a}) = \overline{\tau(a)}$$

для любого $a \in \mathscr{A}$. Подпространство дифференцирований в $\operatorname{Der} \mathscr{A}$, перестановочных с d, обозначим через $\operatorname{Der}_d \mathscr{A}$.

Теорема 2.1. *Линейное отображение D является дифференцированием простой алгебры $\mathscr{A}_d$ тогда и только тогда, когда D индуцируется дифференцированием $\tau \in \operatorname{Der}_d \mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть D — дифференцирование алгебры $\mathscr{A}_d$. Тогда

$$D(a) = \theta(a) + \overline{\varphi(a)}, \quad D(\overline{a}) = \chi(a) + \overline{\psi(a)}$$

для любого $a \in \mathscr{A}$ и некоторых однозначно определенных $\theta, \varphi, \chi, \psi \in \operatorname{End} \mathscr{A}$. Далее будем использовать запись $D = D(\theta, \varphi, \chi, \psi)$.

Из определений получаем следующие равенства:

$$D(a \circ b) = D(ab + \overline{ab}) = \theta(ab) + \overline{\varphi(ab)} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)},$$

$$\begin{aligned} D(a) \circ b + a \circ D(b) &= (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ b + a \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)}) \\ &= \theta(a)b + \overline{\theta(a)b} + \varphi(a)d(b) + \overline{a\theta(b)} + a\theta(b). \end{aligned}$$

Значит, для любых $a, b \in \mathscr{A}$ выполнено

$$\theta(ab) + \chi(ab) = \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + a\theta(b), \tag{7}$$

$$\varphi(ab) + \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b). \tag{8}$$

Рассмотрим следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} 0 = D(a \circ \overline{b}) &= D(a) \circ \overline{b} + a \circ D(\overline{b}) \\ &= (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ \overline{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)}) = \overline{\varphi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\chi(b)}, \end{aligned}$$

из которой следует, что $\chi(a) = 0$ и $\varphi(a)d(b) = 0$ для всех $a, b \in \mathscr{A}$.

Рассмотрим левый аннулятор множества $d(\mathscr{A})$ в $\mathscr{A}$:

$$B = \operatorname{Ann}_l \, d(\mathscr{A}) = \{x \in \mathscr{A} : xd(\mathscr{A}) = 0\}.$$

Так как $d^2(\mathscr{A}) \subset d(\mathscr{A})$, то $0 = d(bd(a)) = d(b)d(a) + bd^2(a) = d(b)d(a)$ для всех $b \in B$ и $a \in \mathscr{A}$, откуда $d(B) \subset B$. Поскольку B — d-инвариантный идеал, то $B = 0$ или $B = \mathscr{A}$. Если $B = \mathscr{A}$, то $\mathscr{A}d(\mathscr{A}) = 0$, а так как $1 \in \mathscr{A}$, то $d = 0$. Значит, $B = 0$ и $\varphi = 0$. Используя равенства $\chi = \varphi = 0$, (7) и (8) можно переписать следующим образом:

$$\theta(ab) = a\theta(b) + \theta(a)b, \quad \psi(ab) = \theta(a)b + a\theta(b),$$

откуда следует, что $\theta \in \operatorname{Der}\mathscr{A}$, и $\theta = \psi$, так как $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$.

Из свойств дифференцирования получаем следующие равенства:

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{a}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ D(\overline{b}) = \overline{\psi(a)} \circ \overline{b} + \overline{a} \circ \overline{\psi(b)} = \overline{\psi(a)d(b)} + \overline{ad(\psi(b))},$$

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{ad(b)}) = \overline{\psi(ad(b))},$$

сравнивая которые, выводим

$$ad(\psi(b)) + \psi(a)d(b) = \psi(ad(b)).$$

Так как $\psi \in \operatorname{Der}\mathscr{A}$, то $ad(\psi(b)) = a\psi(d(b))$ и $d\psi = \psi d$. Далее, имеем

$$D(\overline{b} \circ a) = D(\overline{b}) \circ a + \overline{b} \circ D(a) = \psi(b)d(a) + bd(\theta(a)),$$

$$D(\overline{b} \circ a) = D(bd(a)) = \psi(bd(a)) = \psi(b)d(a) + b\psi(d(a)),$$

откуда $bd(\theta(a)) = b\psi(d(a))$, что эквивалентно предыдущему соотношению $d\psi = \psi d$. В итоге для некоторого $\tau = \theta \in \operatorname{Der}\mathscr{A}$ имеем

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\overline{a}) = \overline{\tau(a)}, \quad \tau d = d\tau.$$

Обратно, легко проверить, что любое дифференцирование τ алгебры $\mathscr{A}$, удовлетворяющее условию $d\tau = \tau d$, задает дифференцирование D дубля Витта $\mathscr{A}_d$ по правилу

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\overline{a}) = \overline{\tau(a)}. \quad \square$$

Обобщенный дубль Витта. Рассмотрим ассоциативную коммутативную алгебру $\mathscr{A}$ с ненулевым дифференцированием d над полем F. Наделим $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$ умножением:

$$\overline{b} \circ a = bd(a) + \overline{ba}, \quad a \circ \overline{b} = \overline{ab}, \quad a \circ b = ab, \quad \overline{a} \circ \overline{b} = \overline{ad(b)}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Построенная алгебра является левосимметрической, обозначается через $W_d(\mathscr{A})$ и называется *обобщенным дублем Витта* алгебры $\mathscr{A}$ [2]. Алгебра $W_d(\mathscr{A})$ проста тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ является d-простой [2].

Опишем все дифференцирования конечномерной простой алгебры $W_d(\mathscr{A})$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p > 0$.

Пусть $\alpha \in \mathscr{A}$ и $D \in \operatorname{Der} W_d(\mathscr{A})$. Как и ранее, будем использовать запись $D(\theta, \varphi, \chi, \psi)$ для дифференцирования D и γ для оператора R_γ.

Лемма 2.1. *Пусть D — произвольное дифференцирование алгебры $W_d(\mathscr{A})$. Тогда $D = D(\psi - \alpha, \varphi, \gamma, \psi)$ для некоторых $\psi \in \operatorname{End}\mathscr{A}$, $\gamma, \alpha = \psi(1) \in \mathscr{A}$ и $\varphi \in \operatorname{Der}_d \mathscr{A}$; при этом $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$, $2\varphi(a)d(b) = 0$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$ и выполнены соотношения*

$$\psi(a)d(b) + ad(\psi(b)) = \psi(ad(b)) + abd(\alpha), \tag{9}$$

$$\psi(ab) + \alpha ab = \psi(a)b + \varphi(a)d(b) + a\psi(b). \tag{10}$$

Более того, если $\varphi = 0$ и $\tau = \psi - \alpha$, то данные соотношения эквивалентны тому, что $\tau d = d\tau + \alpha d$ и $\tau \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$.

Доказательство. Из определений имеем равенства

$$D(a \circ b) = D(a) \circ b + a \circ D(b) = (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ b + a \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)})$$
$$= \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + \overline{\varphi(a)b} + a\theta(b) + \overline{a\varphi(b)},$$
$$D(a \circ b) = D(ab) = \theta(ab) + \overline{\varphi(ab)},$$

что эквивалентно

$$\theta(ab) = a\theta(b) + \varphi(a)d(b) + \theta(a)b, \quad \varphi(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b) \tag{11}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Аналогично получаем

$$D(\overline{a} \circ b) = D(\overline{a}) \circ b + \overline{a} \circ D(b) = (\chi(a) + \overline{\psi(a)}) \circ b + \overline{a} \circ (\theta(b) + \overline{\varphi(b)})$$
$$= \chi(a)b + \psi(a)d(b) + \overline{\psi(a)b} + ad(\theta(b)) + \overline{a\theta(b)} + \overline{ad(\varphi(b))},$$
$$D(\overline{a} \circ b) = D(ad(b) + \overline{ab}) = \theta(ad(b)) + \overline{\varphi(ad(b))} + \chi(ab) + \overline{\psi(ab)},$$

откуда

$$\begin{gathered} \chi(a)b + \psi(a)d(b) + ad(\theta(b)) = \theta(ad(b)) + \chi(ab), \\ \psi(a)b + a\theta(b) + ad(\varphi(b)) = \psi(ab) + \varphi(ad(b)) \end{gathered} \tag{12}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Далее рассмотрим следующие равенства:

$$D(a \circ \overline{b}) = D(a) \circ \overline{b} + a \circ D(\overline{b}) = (\theta(a) + \overline{\varphi(a)}) \circ \overline{b} + a \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)})$$
$$= \overline{\theta(a)b} + \overline{\varphi(a)d(b)} + a\chi(b) + \overline{a\psi(b)},$$
$$D(a \circ \overline{b}) = D(\overline{ab}) = \chi(ab) + \overline{\psi(ab)}.$$

Таким образом,

$$\psi(ab) = \theta(a)b + \varphi(a)d(b) + a\psi(b), \quad \chi(ab) = a\chi(b) \tag{13}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Полагая $b = 1$, $\psi(1) = \alpha \in \mathscr{A}$, $\chi(1) = \gamma \in \mathscr{A}$, получаем

$$\psi(a) = \theta(a) + \alpha a, \quad \chi(a) = \gamma a.$$

Теперь из (13) следует (10). Используя (13) и (11), перепишем (12):

$$ad(\varphi(b)) = 2\varphi(a)d(b) + a\varphi d(b),$$

откуда при $a = 1$ получаем $d\varphi = \varphi d$, а потому $2\varphi(a)d(b) = 0$. Далее, имеем

$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{a}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ D(\overline{b}) = (\chi(a) + \overline{\psi(a)}) \circ \overline{b} + \overline{a} \circ (\chi(b) + \overline{\psi(b)})$$
$$= \overline{\chi(a)b} + \overline{\psi(a)d(b)} + ad(\chi(b)) + \overline{a\chi(b)} + \overline{ad(\psi(b))},$$
$$D(\overline{a} \circ \overline{b}) = D(\overline{ad(b)}) = \chi(ad(b)) + \overline{\psi(ad(b))},$$

откуда

$$\begin{gathered} \chi(ad(b)) = ad(\chi(b)), \\ \psi(ad(b)) = \chi(a)b + \psi(a)d(b) + a\chi(b) + ad(\psi(b)) \end{gathered} \tag{14}$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. При $a = b = 1$ получаем $d(\gamma) = 0$ и $2\gamma + d(\alpha) = 0$. Теперь (14) можно переписать в виде $\psi(ad(b)) = 2\gamma ab + \psi(a)d(b) + ad(\psi(b))$, и приходим к (9).

Если $\varphi = 0$, то указанная в лемме эквивалентность легко проверяется. $\square$

Будем говорить, что дифференцирование D алгебры $W_d(\mathscr{A})$ *индуцируется* α-перестановочным с d дифференцированием τ алгебры $\mathscr{A}$, если для произвольного $a \in \mathscr{A}$ выполняются следующие равенства:

$$D(a) = \tau(a), \quad D(\overline{a}) = \gamma a + \overline{(\tau + \alpha)(a)}$$

для некоторых $\alpha, \gamma \in \mathscr{A}$ таких, что $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$.

Теорема 2.2. *Если F — алгебраически замкнутое поле, то всякое дифференцирование конечномерной простой алгебры $W_d(\mathscr{A})$ индуцируется α-перестановочным с d дифференцированием τ алгебры $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть D — дифференцирование алгебры $W_d(\mathscr{A})$. Сначала рассмотрим случай, когда характеристика поля F не равна 2. В этом случае из леммы 2.1 следует равенство $\varphi(a)d(b) = 0$. Рассмотрим $\operatorname{Ann}_l d(\mathscr{A})$. Как и в теореме 2.1, $\operatorname{Ann}_l d(\mathscr{A}) \lhd_d \mathscr{A}$, откуда $\varphi = 0$. По лемме 2.1 $\tau = \psi - \alpha \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$, $\tau d = d\tau + \alpha d$, $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha)$.

Теперь рассмотрим случай, когда характеристика поля F равна 2. В этом случае $D = D(\tau, \varphi, \gamma, \tau + \alpha)$ по лемме 2.1. Из (10) и коммутативности $\mathscr{A}$ следует, что $\varphi(a)d(b) = \varphi(b)d(a)$. Так как в $\operatorname{Im} d$ лежат обратимые элементы, то найдется такой b, что $d(b)$ обратим, откуда

$$\varphi(a) = d(b)^{-1}\varphi(b)d(a),$$

и $\varphi = cd$ для некоторого $c \in \mathscr{A}$. Поскольку $\varphi \in \operatorname{Der}_d(\mathscr{A})$ по лемме 2.1, то $c = \beta \in F$. Так как характеристика поля равна 2, то (9) можно переписать в виде

$$\psi(ad(b)) = \psi(a)d(b) + ad(\psi(b)).$$

Рассматривая (10), заменяя b на $d(b)$ и используя равенство $\varphi = \beta d$, последовательно получаем

$$\psi(ad(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \varphi(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$\psi(a)d(b) + ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) = \psi(a)d(b) + \beta d(a)d^2(b) + a\psi(d(b)),$$

$$ad(\psi(b)) + \alpha ad(b) + a\psi(d(b)) = \beta d(a)d^2(b).$$

Полагая $a = 1$ в (9) и подставляя полученное выражение в последнее равенство, выводим $\beta d(a)d^2(b) = 0$. Так как $d(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы, то $\beta d^2(\mathscr{A}) = 0$.

Если $d^2(\mathscr{A}) \neq 0$, то $\beta = 0$ и $\varphi = 0$. Если $d^2(\mathscr{A}) = 0$, то $\mathscr{A} = F_2[x]$ и $d = \xi\partial$ для некоторого $\xi \in F^*$. В этом случае, полагая $a = b = x$ в (10), выводим $\varphi = 0$.

Таким образом, по лемме 2.1 получаем

$$\tau = \psi - \alpha \in \operatorname{Der} \mathscr{A}, \quad \tau d = d\tau + \alpha d, \ \alpha \in F, \quad D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha).$$

Обратно, легко проверяется, что $D = D(\tau, 0, \gamma, \tau + \alpha) \in \operatorname{Der} W_d(\mathscr{A})$ при $d(\gamma) = 0$, $2\gamma + d(\alpha) = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mizuhara A.* On simple left-symmetric algebras over a solvable Lie algebra // Sci. Math. Jpn. 2003. V. 57, N 2. P. 325–337.
2. *Пожидаев А. П.* Об обобщенной конструкции Мицухары // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 545–559.
3. *Пожидаев А. П.* Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.
4. *Пожидаев А. П.* О конструкции Мицухары для эндоморфов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–54.
5. *Пожидаев А. П.* Группы автоморфизмов прелиевых дублей Витта // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1214–1226.
6. *Gelfand I. M., Dorfman I. Ya.* Hamiltonian operators and algebraic structures related to them // Funct. Anal. Appl. 1979. V. 13, N 4. P. 248–262.
7. *Xu X.* Novikov–Poisson algebras // J. Algebra. 1997. V. 190, N 2. P. 253–279.

8. *Zhelyabin V. N., Zakharov A. S.* On finite-dimensional simple Novikov algebras of characteristic p // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 3. P. 680–687.

9. *Zelmanov E.* On a class of local translation invariant Lie algebras // Soviet Math. Dokl. 1987. V. 35. P. 216–218.

10. *Xu X.* On simple Novikov algebras and their irreducible modules // J. Algebra. 1996. V. 185, N 3. P. 905–934.

11. Pozhidaev A. P., Zhelyabin V. N. On simple and semisimple finite-dimensional Novikov algebras and their automorphisms // J. Algebra. 2026. V. 689.

12. *Harper L. R. Jr.* On differentiably simple algebras // Trans. Am. Math. Soc. 1961. V. 100, N 1. P. 63–72.

Поступила в редакцию 24 октября 2025 г.
После доработки 17 февраля 2026 г.
Принята к публикации 18 февраля 2026 г.

Логачев Вадим Анатольевич
Новосибирский государственный университет,
Пирогова, 1, Новосибирск 630090
v.logachev@g.nsu.ru

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЧЛЕНАХ

И. И. Матвеева, А. В. Хмиль

Аннотация. Рассматривается класс систем нелинейных разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах. Исследована асимптотическая устойчивость нулевого решения, получена оценка на множество притяжения нулевого решения и установлены оценки, характеризующие скорости стабилизации решений систем на бесконечности. При получении результатов используется функционал Ляпунова — Красовского специального вида.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.306

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, периодические коэффициенты, функционал Ляпунова – Красовского, оценки решений, скорость стабилизации.

Посвящается нашему Учителю
профессору Демиденко Геннадию Владимировичу

Введение

В работе рассматриваются системы разностных уравнений с периодическими коэффициентами в линейных членах следующего вида:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)} + F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{0.1}$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, т. е.

$$A(n + N) = A(n), \quad B(n + N) = B(n), \quad n = 0, 1, \dots,$$

$\tau(n) \in \mathbb{N}$ — запаздывание, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$, $F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)$ — вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau)\| \le q\|u_0\|^{1+\omega}, \quad u_j \in \mathbb{C}^m, \ j = 0, 1, \dots, \tau, \ n = 0, 1, \dots, \tag{0.2}$$

$\omega, q > 0$. Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1) и получение оценок решений $\{x_n\}$, характеризующих скорость стабилизации при $n \to \infty$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение № 075-15-2025-349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

Хорошо известно, что разностные уравнения с запаздыванием используются при моделировании различных процессов в биологии, химии, экономике, социологии и др. Одной из важных является проблема устойчивости решений возникающих уравнений и систем. Последние 30 лет проводятся активные исследования этой проблемы для различных классов разностных уравнений с запаздыванием (см., например, [1–14] и ссылки в этих работах). При изучении устойчивости применяются аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений (спектральные методы, метод неравенств типа Халаная, метод функций Ляпунова и функционалов Ляпунова — Красовского, построение решения в операторном виде, установление связей между обыкновенными дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с запаздыванием и т. д.). В настоящее время крайне мало работ, в которых рассматриваются нелинейные разностные уравнения с переменным запаздыванием.

Системы вида (0.1) с постоянными коэффициентами ($A(n) \equiv A$, $B(n) \equiv B$) рассматривались в [15, 16]. С использованием функционала Ляпунова — Красовского специального вида в [15] исследовалась устойчивость нулевого решения в линейном случае ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$), в [16] — в нелинейном случае. Системы вида (0.1) с N-периодическими коэффициентами в линейных членах рассматривались в [17, 18]. В [17] изучалась асимптотическая устойчивость нулевого решения линейных систем ($F(n, u_0, u_1, \dots, u_\tau) \equiv 0$), в [18] — квазилинейных систем ($\omega = 0$). В данной работе изучается более сложный нелинейный случай ($\omega > 0$). При проведении исследований мы будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$v(n, x) = \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{0.3}$$

где $H(n) = H(n + N)$, K_0, $K_1, \dots, K_{\tau-1}$ — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был предложен в [17] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского

$$\langle H(t)y(t), y(t)\rangle + \int\limits_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

$$H(t) = H^*(t) > 0, \quad K(s) = K^*(s) > 0, \quad s \in [0, \tau],$$

введенного в [19] для исследования асимптотической устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах [20]

$$\frac{d}{dt}y(t) = A(t)y(t) + B(t)y(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0,$$

где $A(t)$, $B(t)$ — матрицы с T-периодическими коэффициентами.

Используя функционал (0.3), мы установим оценку на множество притяжения нулевого решения нелинейных систем вида (0.1) и получим оценку на скорость стабилизации решений этих систем на бесконечности. В первом параграфе содержатся вспомогательные результаты, которые будут использоваться во втором параграфе при получении основных результатов.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с запаздыванием и периодическими коэффициентами

$$x_{n+1} = A(n)x_n + B(n)x_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где $\{A(n)\}$, $\{B(n)\}$ — последовательности N-периодических матриц размера $m \times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$ — запаздывание, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$. Очевидно, эту систему можно записать в виде следующей системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j}, \quad n = 0, 1, \dots, \tag{1.2}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B(n) & \text{при } j = \tau(n), \\ 0 & \text{при } j \neq \tau(n). \end{cases} \tag{1.3}$$

При изучении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2) в [17] использовался функционал Ляпунова — Красовского (0.3). Были установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2), а следовательно, и (1.1), при этом также получена оценка на скорость убывания решения $\{x_n\}$ системы (1.1) с заданными начальными условиями

$$x_0,\ x_{-1}, \dots, x_{-\tau} \tag{1.4}$$

при $n \to \infty$. Приведем соответствующие результаты из работы [17].

Всюду далее $S > 0$ ($S < 0$) означает, что S — эрмитова положительно (отрицательно) определенная матрица.

Теорема 1 [17]. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы*

$$H(n), \quad K_j, \quad j = 0, 1, \dots, \tau,$$

такие, что

$$H(n) = H(n+N), \quad \Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \dots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & A^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ B_1^*(n)H(n+1)A(n) & C_{11}(n) & \dots & B_1^*(n)H(n+1)B_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)H(n+1)A(n) & B_\tau^*(n)H(n+1)B_1(n) & \dots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*(n)H(n+1)A(n) - H(n) + K_0,$$
$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)H(n+1)B_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \dots, \tau - 1,$$
$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)H(n+1)B_\tau(n) - K_\tau$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Из условий на $A(n)$, $B(n)$, $\tau(n)$ вытекает, что количество различных матриц $C(n)$ конечно. Следовательно, при выполнении условий теоремы 1 существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\langle C(n)\begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_\tau \end{pmatrix} \right\rangle \ge c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|u_i\|^2, \quad u_i \in \mathbb{C}^m. \tag{1.6}$$

Теорема 2 [17]. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Пусть* $\varkappa_j \in (0,1)$, $j=1,2,\dots,\tau$, *такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + \varkappa_i K_{i-1} \le 0,\ i=1,\dots,\tau-1, \quad -\Delta_\tau + \varkappa_\tau K_{\tau-1} \le 0. \tag{1.7}$$

Тогда для решения начальной задачи (1.1), (1.4) *справедлива оценка*

$$\|x_n\| \le \left[(h_1(n))^{-1}\prod_{j=0}^{r-1}(1-\varepsilon_j)\varepsilon^k v(0,x)\right]^{1/2}, \tag{1.8}$$

$$n = kN + r, \quad r = 1,\dots,N, \quad k = 0,1,\dots,$$

где $h_1(n) > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* $H(n)$,

$$v(0,x) = \langle H(0)x_0, x_0\rangle + \sum_{j=-\tau}^{-1}\langle K_{-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon_j = \min\left\{\varkappa_1,\dots,\varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H(j)\|}\right\}, \quad 0<\varepsilon_j<1, \quad \varepsilon = \prod_{j=0}^{N-1}(1-\varepsilon_j). \tag{1.10}$$

В предположении, что выполнены условия теоремы 1, с использованием функционала (0.3) в следующем параграфе сформулируем и докажем основные результаты работы.

§ 2. Основные результаты

Рассмотрим нелинейную систему разностных уравнений вида (0.1). Поскольку запаздывание ограничено, систему (0.1) можно записать в виде

$$x_{n+1} = A(n)x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j} + F(n, x_n, x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}), \quad n=0,1,\dots, \tag{2.1}$$

где матрицы $B_j(n)$ определены в (1.3). Рассмотрим для системы (2.1) начальную задачу с заданными начальными условиями

$$x_0,\ x_{-1},\dots,x_{-\tau}, \quad x_j \in \mathbb{C}^m. \tag{2.2}$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1. Для формулировки результатов введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 = 1 - \varepsilon_0 &+ 2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &+ q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}(v(0,x))^{\omega},\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_j = 1 - \varepsilon_j &+ 2q\|H(j+1)\|\|A(j)\|(h_1(j))^{-1-\omega/2}M_{j-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ &+ q^2\|H(j+1)\|\left(\frac{\|H(j+1)\|\|B(j)\|^2}{c_1}+1\right)\\ &\times (h_1(j))^{-1-\omega}M_{j-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}, \quad j=1,2,\dots,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$M_j = \prod_{k=0}^{j}\Lambda_k, \quad M = M_{N-1} = \Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1}, \tag{2.5}$$

где $h_1(j) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(j)$, c_1, $v(0,x)$, ε_j определены в (1.6), (1.9), (1.10) соответственно. Поскольку $0<\varepsilon_j<1$ и $v(0,x)\ge 0$, то $\Lambda_j > 0$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1. *Тогда нулевое решение системы* (2.1) *асимптотически устойчиво и множество*

$$\mathscr{E} = \{x_0, \dots, x_{-\tau} \in \mathbb{C}^m : M < 1\} \tag{2.6}$$

является множеством притяжения нулевого решения. При этом для решения задачи (2.1), (2.2) *с начальными условиями из* $\mathscr{E}$ *имеет место оценка*

$$\|x_n\| \le \left[(h_1(n))^{-1} \prod_{j=0}^{r-1} \Lambda_j M^k v(0,x) \right]^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$n = kN + r, \quad r = 1, \dots, N, \quad k = 0, 1, \dots.$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — решение начальной задачи (2.1), (2.2). Рассмотрим на этом решении функционал $v(n,x)$, определенный в (0.3). В силу условий на $H(n)$ и $\{K_j\}$ при $\{x_n\} \neq 0$ имеем $v(n,x) > 0$.

Рассмотрим разность $v(n+1,x) - v(n,x)$, $n = 0, 1, \dots$. Используя обозначения для матриц Δ_j, получим

$$\begin{aligned}
v(n+1,x) - v(n,x) &= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle \\
&\quad + \sum_{j=n+1-\tau}^{n} \langle K_{n-j}x_j, x_j\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle \\
&= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \langle K_0 x_n, x_n\rangle \\
&\quad - (\langle K_0 x_{n-1}, x_{n-1}\rangle - \langle K_1 x_{n-1}, x_{n-1}\rangle) - \cdots \\
&\quad - (\langle K_{\tau-1} x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle) - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\
&= \langle H(n+1)x_{n+1}, x_{n+1}\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle \\
&\quad + \langle K_0 x_n, x_n\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle.
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\{x_n\}$ является решением задачи (2.1), (2.2), имеем

$$\begin{aligned}
v(n+1,x) - v(n,x) &= \langle A^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_n\rangle - \langle H(n)x_n, x_n\rangle + \langle K_0 x_n, x_n\rangle \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\tau} \langle A^*(n)H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau} \langle B_j^*(n)H(n+1)A(n)x_n, x_{n-j}\rangle \\
&\quad + \sum_{j,i=1}^{\tau} \langle B_j^*(n)H(n+1)B_i(n)x_{n-i}, x_{n-j}\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\
&\quad + 2\,\mathrm{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{\tau} \mathrm{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle \\
&\quad + \langle H(n+1)F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau}), F(n, x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-\tau})\rangle.
\end{aligned}$$

Используя матрицу $C(n)$, заданную в (1.5), разность $v(n+1,x) - v(n,x)$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
v(n+1,x) - v(n,x) &= -\left\langle C(n) \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix} \right\rangle \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle + W(n,x),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned} W(n,x) = 2\operatorname{Re}\langle H(n+1)A(n)x_n, F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle \\ + 2\sum_{j=1}^{\tau}\operatorname{Re}\langle H(n+1)B_j(n)x_{n-j}, F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle \\ + \langle H(n+1)F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau}), F(n,x_n,x_{n-1},\dots,x_{n-\tau})\rangle. \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в (2.8). По условию теоремы все матрицы $C(n)$ являются положительно определенными, при этом выполнена оценка (1.6). Поскольку $H(n) = H^*(n) > 0$, то

$$c_1\sum_{i=0}^{\tau}\|x_{n-i}\|^2 \ge \frac{c_1}{\|H(n)\|}\langle H(n)x_n, x_n\rangle + c_1\sum_{i=1}^{\tau}\|x_{n-i}\|^2. \tag{2.9}$$

Из условий (1.7) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle\Delta_{n-j}x_j, x_j\rangle + \langle\Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \\ \ge \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle + \varkappa_\tau\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В силу (0.2) имеем

$$\begin{aligned} |W(n,x)| \le 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|^{2+\omega} \\ + \left[2q\|H(n+1)\|\|x_n\|^{1+\omega}\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H(n+1)\|\|x_n\|^{2+2\omega}\right]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма. *Рассмотрим квадратичную форму*

$$U = u_0(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_\tau u_\tau), \quad u_i \in \mathbb{R},\ \alpha_i \ge 0.$$

Для любых $\beta_i > 0$, $i = 1,\dots,\tau$, имеет место неравенство

$$U \le \beta_0 u_0^2 + \beta_1 u_1^2 + \dots + \beta_\tau u_\tau^2, \tag{2.12}$$

где

$$\beta_0 \ge \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} + \dots + \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau}.$$

Введем следующие обозначения:

$$u_0 = \|x_n\|^{1+\omega}, \quad u_i = \|x_{n-i}\|,$$

$$\alpha_0(n) = q^2\|H(n+1)\|, \quad \alpha_i(n) = 2q\|H(n+1)\|\|B_i(n)\|, \quad i = 1,\dots,\tau.$$

Применим лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках в (2.11), выбирая

$$\beta_i = c_1, \quad i = 1,\dots,\tau, \quad \beta_0(n) = \alpha_0(n) + \frac{1}{4c_1}\sum_{i=1}^{\tau}\alpha_i^2(n).$$

Тогда

$$2q\|H(n+1)\|\|x_n\|^{1+\omega}\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H(n+1)\|\|x_n\|^{2+2\omega}$$
$$\leq q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\|x_n\|^{2+2\omega} + c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

Следовательно,

$$|W(n,x)| \leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\|x_n\|^{2+\omega}$$
$$+ q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)\|x_n\|^{2+2\omega} + c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

В силу положительной определенности матриц $H(n)$, K_j справедливы неравенства

$$v(n,x) \geq \langle H(n)x_n, x_n\rangle \geq h_1(n)\|x_n\|^2,$$

где $h_1(n) > 0$ — минимальное собственное значение матрицы $H(n)$. Следовательно,

$$|W(n,x)| \leq 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|\,(h_1(n))^{-1-\alpha}\,(v(n,x))^{1+\alpha}$$
$$+ q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(n))^{-1-2\alpha}\,(v(n,x))^{1+2\alpha}$$
$$+ c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2, \quad (2.13)$$

где $\alpha = \omega/2$.

Учитывая оценки (2.9), (2.10), (2.13), из (2.8) получаем

$$0 \leq v(n+1,x) \leq v(n,x) - \frac{c_1}{\|H(n)\|}\langle H(n)x_n, x_n\rangle$$
$$- \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle - \varkappa_\tau\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle$$
$$+\ 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^{1+\alpha}$$
$$+ q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(n))^{-1-2\alpha}\,(v(n,x))^{1+2\alpha}.$$

Используя ε_n, определенное в (1.10), имеем

$$v(n+1,x) \leq v(n,x) - \varepsilon_n\left(\langle H(n)x_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle\right)$$
$$+ 2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^{1+\alpha}$$
$$+ q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(n))^{-1-2\alpha}(v(n,x))^{1+2\alpha}.$$

В силу определения функционала $v(n,x)$ в (0.3) получаем

$$v(n+1,x) \le \biggl(1-\varepsilon_n+2q\|H(n+1)\|\|A(n)\|(h_1(n))^{-1-\alpha}(v(n,x))^\alpha + q^2\|H(n+1)\|\left(\frac{\|H(n+1)\|\|B(n)\|^2}{c_1}+1\right) \times (h_1(n))^{-1-2\alpha}(v(n,x))^{2\alpha}\biggr)v(n,x), \quad n=0,1,\dots. \tag{2.14}$$

Пусть $n=0$. Тогда

$$v(1,x) \le \Lambda_0 v(0,x),$$

где Λ_0 определено в (2.3).

Пусть $n=1$. Тогда в силу (2.14) с учетом последнего неравенства получаем

$$\begin{aligned} v(2,x) &\le \biggl(1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\alpha}(v(1,x))^\alpha \\ &\quad + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-2\alpha}(v(1,x))^{2\alpha}\biggr)v(1,x) \\ &\le \Lambda_0\biggl(1-\varepsilon_1+2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\alpha}\Lambda_0^\alpha(v(0,x))^\alpha \\ &\quad + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-2\alpha}\Lambda_0^{2\alpha}(v(0,x))^{2\alpha}\biggr)v(0,x). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу определения Λ_1 в (2.4) имеем

$$v(2,x) \le \Lambda_0\Lambda_1 v(0,x).$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$v(n,x) \le \prod_{j=0}^{n-1}\Lambda_j v(0,x) = M_{n-1}v(0,x), \quad n=1,2,\dots, \tag{2.15}$$

где Λ_j и M_j определены в (2.4) и (2.5) соответственно.

Покажем, что

$$\Lambda_{lN+j} \le \Lambda_j, \quad j=0,1,\dots,N-1,\ l=1,2,\dots. \tag{2.16}$$

Рассмотрим Λ_N. В силу периодичности матриц $A(n)$, $B(n)$, $H(n)$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda_N &= 1-\varepsilon_0+2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}M_{N-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ &\quad + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}M_{N-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}. \end{aligned}$$

По определению $M_{N-1}=\Lambda_0\Lambda_1\dots\Lambda_{N-1}=M$. Поскольку в силу условий теоремы $M<1$, то

$$\begin{aligned} \Lambda_N &\le 1-\varepsilon_0+2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2} \\ &\quad + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}(v(0,x))^{\omega} = \Lambda_0. \end{aligned}$$

Рассмотрим Λ_{N+1} и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{N+1} = 1 - \varepsilon_1 + 2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_N^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_N^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Очевидно,

$$M_N = (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N = M\Lambda_N \leq M\Lambda_0 \leq \Lambda_0 = M_0.$$

Следовательно, $\Lambda_{N+1} \leq \Lambda_1$. Аналогично в силу периодичности

$$\begin{aligned}\Lambda_{N+2} = 1 - \varepsilon_2 + 2q\|H(3)\|\|A(2)\|(h_1(2))^{-1-\omega/2}M_{N+1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ + q^2\|H(3)\|\left(\frac{\|H(3)\|\|B(2)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(2))^{-1-\omega}M_{N+1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$M_{N+1} = (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1} = M\Lambda_N\Lambda_{N+1} \leq M\Lambda_0\Lambda_1 \leq \Lambda_0\Lambda_1 = M_1,$$

то $\Lambda_{N+2} \leq \Lambda_2$. Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$\Lambda_{N+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Рассмотрим теперь Λ_{2N} и воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N} = 1 - \varepsilon_0 + 2q\|H(1)\|\|A(0)\|(h_1(0))^{-1-\omega/2}M_{2N-1}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ + q^2\|H(1)\|\left(\frac{\|H(1)\|\|B(0)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(0))^{-1-\omega}M_{2N-1}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Учитывая предыдущие оценки, имеем

$$\begin{aligned}M_{2N-1} = (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_N\Lambda_{N+1}\cdots\Lambda_{2N-1}\\ \leq (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1}) = M^2 < 1.\end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda_{2N} \leq \Lambda_0$. Рассмотрим Λ_{2N+1} и опять воспользуемся периодичностью соответствующих матриц. Тогда

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N+1} = 1 - \varepsilon_1 + 2q\|H(2)\|\|A(1)\|(h_1(1))^{-1-\omega/2}M_{2N}^{\omega/2}(v(0,x))^{\omega/2}\\ + q^2\|H(2)\|\left(\frac{\|H(2)\|\|B(1)\|^2}{c_1}+1\right)(h_1(1))^{-1-\omega}M_{2N}^{\omega}(v(0,x))^{\omega}.\end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}M_{2N} = (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_N\Lambda_{N+1}\cdots\Lambda_{2N-1})\Lambda_{2N}\\ \leq (\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})(\Lambda_0\Lambda_1\cdots\Lambda_{N-1})\Lambda_0 = M^2\Lambda_0 \leq \Lambda_0 = M_0,\end{aligned}$$

то $\Lambda_{2N+1} \leq \Lambda_1$. Повторяя такие же рассуждения, получаем

$$\Lambda_{2N+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0,1,\ldots,N-1.$$

Аналогичным образом приходим к неравенствам

$$\Lambda_{lN+j} \leq \Lambda_j, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,\ l = 1,2,\ldots,$$

что дает (2.16). Тогда при $n = kN + r$, $r = 1, \dots, N$, $k = 0, 1, \dots$, получаем

$$M_{n-1} = \prod_{j=0}^{n-1} \Lambda_j \le \left(\prod_{j=0}^{N-1} \Lambda_j \right)^k \Lambda_{kN} \Lambda_{kN+1} \dots \Lambda_{kN+r-1} \le M^k \Lambda_0 \Lambda_1 \dots \Lambda_{r-1}.$$

Следовательно, из (2.15) имеем

$$v(n,x) \le \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_{r-1} M^k v(0,x), \quad n = kN + r, \; r = 1, \dots, N, \; k = 0, 1, \dots.$$

Используя определение функционала (0.3), для решения задачи (2.1), (2.2) получаем

$$\|x_n\|^2 \le (h_1(n))^{-1} \Lambda_0 \Lambda_1 \cdots \Lambda_{r-1} M^k v(0,x),$$

где $n = kN + r$, $r = 1, \dots, N$, $k = 0, 1, \dots$. Это неравенство дает (2.7). Поскольку по условию теоремы $M < 1$, решение задачи (2.1), (2.2) стремится к нулю при $n \to \infty$. Следует отметить, что M непрерывно зависит от начальных данных (2.2), причем $M = \prod\limits_{j=0}^{N-1} (1 - \varepsilon_j) < 1$ при нулевых начальных данных. Следовательно, нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Теорема доказана.

Замечание. Если $q = 0$, то $\Lambda_j = 1 - \varepsilon_j < 1$ и, следовательно, $M < 1$. Тогда оценка (2.7) переходит в оценку (1.8) без каких-либо ограничений на начальные данные; т. е. результат теоремы 3 переходит в результат теоремы 2, полученный в [17].

Отметим, что условия асимптотической устойчивости формулируются в виде легко проверяемых неравенств, а числовые характеристики множества притяжения и скорости убывания решений вычисляются конструктивно. Это дает возможность применять полученные результаты на практике при изучении устойчивости решений конкретных систем уравнений вида (0.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gyori I., Pituk M.* Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 2. P. 376–392.
2. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. 1995. V. 1, N 2. P. 151–161.
3. *Yu J. S.* Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. 1998. V. 36, N 10–12. P. 203–210.
4. *Gyori I., Hartung F.* Stability in delayed perturbed differential and difference equations // Fields Institute Communications. 2001. V. 29. P. 181–194.
5. *Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K.* Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 535849.
6. *Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. 2009. Article ID 104310.
7. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Исследование абсолютной устойчивости разностных систем с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. вычисл. и прикл. математики. 2010. № 4. С. 118–126.
8. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30–41.
9. *Stojanovic S. B., Debeljkovic D. L. J., Dimitrijevic N.* Stability of discrete-time systems with time-varying delay: delay decomposition approach // Intern. J. Computers, Communications & Control. 2012. V. 7, N 4. P. 775–783.
10. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* Асимптотика решений разностных уравнений с запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2016. № 7. С. 66–82.

11. *Baštinec J., Demchenko H., Diblik J., Khusainov D. Ya.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2018. Article ID 9703919.

12. *Ngoc P. H. A., Trinh H., Hieu L. T., Huy N. D.* On contraction of nonlinear difference equations with time-varying delays // Math. Nachrichten. 2019. V. 292, N 4. P. 859–870.

13. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: Stability and control. Singapore: Springer, 2019.

14. *Diblik J.* Exponential stability of linear discrete systems with multiple delays by degenerated Lyapunov–Krasovskii functionals // Appl. Math. Letters. 2023. V. 142. Article ID 108654.

15. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 50–62.

16. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2021. Т. 28, № 3. С. 31–44.

17. *Demidenko G. V., Baldanov D. Sh.* Exponential stability of solutions to delay difference equations with periodic coefficients // Continuum Mechanics, Applied Mathematics and Scientific Computing: Godunov's Legacy — A Liber Amicorum to Professor Godunov (Editors: Demidenko G. V., Romenski E., Toro E., Dumbser M.) Cham, Switzerland: Springer Nature, 2020. P. 93–100.

18. *Матвеева И. И., Хмиль А. В.* Устойчивость решений одного класса разностных уравнений с переменным запаздыванием и периодическими коэффициентами в линейных членах // Мат. заметки СВФУ. 2023. Т. 30, № 4. С. 37–48.

19. *Демиденко Г. В., Матвеева И.И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.

20. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.

Поступила в редакцию 14 февраля 2026 г.
После доработки 14 февраля 2026 г.
Принята к публикации 10 марта 2026 г.

Матвеева Инесса Изотовна (ORCID 0000-0002-9390-2702)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`matveeva.ii@yandex.ru`

Хмиль Арсений Владимирович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`khmilarseniy@mail.ru`

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.956.8:517.958.539(3)

СПЕКТР УПРУГИХ ПЧЕЛИНЫХ СОТ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. А. Назаров

Аннотация. В низкочастотном диапазоне спектра изотропного волновода в форме толстого слоя тонкостенных пчелиных сот с полностью закрепленной поверхностью обнаружено множество раскрытых широких лакун между узкими спектральными сегментами (соответственно зоны торможения и прохождения волн). Упругие волны концентрируются около и осциллируют вдоль ребер сотовых ячеек. Результаты получены посредством построения асимптотики собственных пар модельной задачи на ячейке периодичности, зависящей от параметра Флоке. Основную роль играет явление пограничного слоя, описываемого решениями двух — плоской векторной и антиплоской скалярной — задач теории упругости в симметричной двумерной треноге, составленной из единичных полуполос. Решающее наблюдение: единственное собственное число из дискретного спектра скалярной задачи лежит строго ниже спектра векторной. Обоснование асимптотики проведено при помощи классической леммы о «почти собственных» числах и векторах, а также проверки сходимости атрибутов собственных вектор-функций.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.307

Ключевые слова: гексагональная решетка, слой упругих пчелиных сот, задача Дирихле для пространственной системы Ламе, асимптотика собственных чисел, спектральные лакуны.

1. Постановки задач. Пусть $\boxtimes^0$ — правильная гексагональная сетка (рис. 1,a) на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y = (y_1, y_2)$, т. е. бесконечный граф с единичными ребрами, встречающимися в вершинах под углом $2\pi/3$, а $\boxtimes^h$ — $(h/2)$-окрестность множества $\boxtimes^0$, часто называемая «толстым» графом, и $h > 0$ — (безразмерный) малый параметр. Систему декартовых координат y зафиксируем так, чтобы ячейка периодичности $\bowtie^0$ сетки располагалась в ромбе $\Diamond$ с вершинами $(\pm 3/2, 0)$, $(0, \pm\sqrt{3}/2)$ и состояла из двух симметричных «треног» Y^0_ℓ и $\mathsf{Y}^0_\wp$ (левая ℓ и правая $\wp$) с горизонтальными звеньями $\mathsf{I}^0_{\ell 0} = \{y : y_1 \in (-1/2, 0), y_2 = 0\}$ и $\mathsf{I}^0_{\wp 0} = \{y : y_1 \in (0, 1/2), y_2 = 0\}$. Остальные звенья $\mathsf{I}^0_{\ell\pm}$ и $\mathsf{I}^0_{\wp\pm}$ длиной $1/2$ наклонены под углом $\pm\pi/3$ к оси абсцисс y_1, причем знак плюс отвечает тем из них, которые попали на верхнюю полуплоскость $\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Плоская ячейка периодичности $\bowtie^h = \boxtimes^h \cap \Diamond$ (рис. 1,b) толстого графа (утолщенной сетки) образована шестью прямоугольниками $\mathbb{I}^h_{\ell/\wp,\alpha}$, $\alpha = 0, \pm$, размером $h \times (1 - h\sqrt{3})/2$ и двумя треугольниками $\triangle^h_{\ell/\wp}$ с равными сторонами длиной h и с центрами в точках $\mathscr{O}^h_{\ell/\wp}$ (рис. 1,b). Введем еще аппликату $z = x_3$ и пространственную декартову систему координат $x = (y, z) \in \mathbb{R}^3$, а также толстый (в вертикальном направлении) слой $\boxtimes^h_H = \boxtimes^h \times (0, H)$ гексагональной ячеистой

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

структуры: у всех геометрических объектов верхний индекс h указывает малую (нулевую при $h = 0$) толщину стенок, а нижний H — их высоту (ср. рис. 1,b и рис. 2,a).

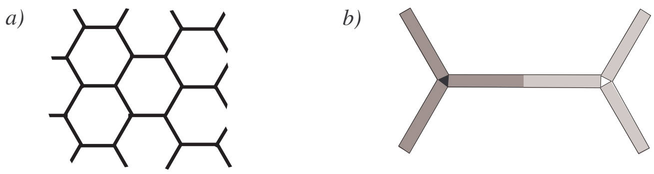


Рис. 1. Фрагмент плоской гексагональной сетки (a). Ячейка периодичности $\bowtie^h$ (b) утолщенной сетки $\boxtimes^h$: левая тренога Y^h_ℓ тонирована глубоко и ее узел $\triangle^h_\ell$ зачернен, но узел $\triangle^h_\wp$ правой треноги $\mathsf{Y}^h_\wp$ высветлен.

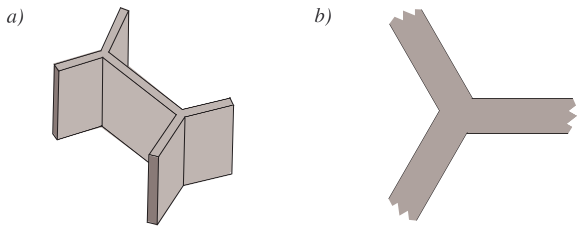


Рис. 2. Пространственная ячейка периодичности (a); прямоугольники, на которых ставятся условия квазипериодичности, глубоко тонированы. Плоская бесконечная (левая) тренога (b).

Гармонические во времени с частотой ς^h колебания изотропного и однородного (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\varrho > 0$) упругого волновода $\boxtimes^h_H$, ячейка периодичности $\bowtie^h_H$ которого схематично изображена на рис. 2,a, описываются системой трех уравнений в частных производных

$$L(\nabla_x)u^h(x) := -\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x \cdot u^h(x) = \varrho(\varsigma^h)^2 u^h(x), \quad x \in \boxtimes^h_H. \quad (1)$$

Здесь $\nabla_x = \mathrm{grad}$, $\nabla_x\cdot = \mathrm{div}$, а $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа. Кроме того, u^h — вектор смещений и $u^h_j = e_{(j)} \cdot u^h$ — его проекции на оси x_j с ортами $e_{(j)}$. Поверхность волновода считаем фиксированной — жестко закрепленной, т. е. назначаем на ней условия Дирихле

$$u^h(x) = 0, \quad x \in \partial\, \boxtimes^h_H\,. \quad (2)$$

Как известно из теории Флоке — Блоха — Гельфанда (см. [1–5] и др.), спектр

$$\sigma^h = \bigcup_{q\in\mathbb{N}} \Sigma^h(q), \quad \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}, \quad (3)$$

задачи (1), (2) состоит из спектральных сегментов (зон прохождения волн)

$$\Sigma^h(q) = \big\{\Lambda^h_q(\theta) \mid \theta = (\theta_\ell, \theta_\wp) \in [0,2\pi]^2\big\}, \quad (4)$$

между которыми могут располагаться раскрытые лакуны (зоны торможения волн). Сами сегменты (4) определяются по собственным числам

$$0 < \Lambda^h_1(\theta) \leq \Lambda^h_2(\theta) \leq \Lambda^h_3(\theta) \leq \dots \leq \Lambda^h_q(\theta) \leq \dots \to +\infty \quad (5)$$

зависящей от параметра Флоке θ модельной задачи на ячейке периодичности

$$-\mu\Delta_x U^h(x;\theta) - (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x \cdot U^h(x;\theta) = \Lambda^h(\theta)U^h(x;\theta), \quad x \in \bowtie_H^h, \tag{6}$$

$$U^h(x;\theta) = 0, \quad x \in \partial \bowtie_H^h \setminus \overline{\mathbb{I}_H^h}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} U^h(x;\theta)\big|_{\mathbb{I}^{h+}_{H\ell/\wp}} &= e^{i\theta_{\ell/\wp}} U^h(x;\theta)\big|_{\mathbb{I}^{h-}_{H\wp/\ell}}, \\ \partial_n U^h(x;\theta)\big|_{\mathbb{I}^{h+}_{H\ell/\wp}} &= -e^{i\theta_{\ell/\wp}} \partial_n U^h(x;\theta)\big|_{\mathbb{I}^{h-}_{H\wp/\ell}}. \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\mathbb{I}_H^h$ — объединение прямоугольников $\mathbb{I}^{h\pm}_{H\ell/\wp} \subset \overline{\mathbb{I}_H^h}$ размером $h \times H$, попадающих на призматическую поверхность $\diamondsuit \times (0,H)$ (тонированы на рис. 2,а) и называемых также торцами трехмерной ячейки, а ∂_n — производная вдоль внешней нормали.

Спектр (5) задачи (6)–(8) дискретный, а функции $[0,2\pi]^2 \ni \theta \mapsto \Lambda_k^h(\theta)$ непрерывны и 2π-периодичны (см. любой из цитированных источников). Собственные вектор-функции $U^h_{(k)}(\cdot;\theta) \in H^1_{0,\theta}(\bowtie_H^h)^3$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$\big(U^h_{(k)}(\cdot;\theta), U^h_{(j)}(\cdot;\theta)\big)_{\bowtie_H^h} = \delta_{j,k}, \quad j,k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Здесь $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $(\cdot,\cdot)_{\bowtie_H^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2\big(\bowtie_H^h\big)$, вообще говоря, комплексном, $H^1_{0,\theta}\big(\bowtie_H^h\big)^3$ — пространство Соболева вектор-функций, удовлетворяющих условию Дирихле (7) и первому условию квазипериодичности (8), а верхний индекс 3 указывает количество компонент вектор-функций, но он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм.

Основная цель работы — построение и обоснование асимптотики собственных пар $\big\{\Lambda_k^h(\theta); U^h_{(k)}(\cdot;\theta)\big\}$ задачи (6)–(8) и как следствие выяснение лакунарного строения спектра (3) задачи (1), (2). Тело $\boxtimes_H^h$ можно интерпретировать как восковое гнездо пчелиных сот, однако с некоторой натяжкой: условия Дирихле подразумевают, что пласт сот зажат между абсолютно жесткими фланцами, а содержащийся в них мед полностью затвердел. Распространение волн в сотовой вощине $\boxtimes_H^h$ оказывается необычным, поскольку в главном они концентрируются около ребер ячеек и являются продольными, т. е. колебания происходят в вертикальном направлении.

Публикации [6, 7] и другие, содержащие описание замечательных свойств графена, и особенно присуждение авторам Нобелевской премии привели к большому количеству физических и математических статей, в которых предлагались и изучались разнообразные модели этих незаурядных объектов. Упомянем лишь два исследования, имеющие прямое отношение к тематике данной работы и выявляющих лакунарное строение спектров задач Неймана[1)] [13] и Дирихле [14] для оператора Лапласа на тонких плоских гексагональных решетках.

Оставив в стороне физическую природу упругой структуры, подчеркнем, что проведенный далее анализ задачи теории упругости (1), (2) отличается от предшествующих разработок многими аспектами, так как рассматривается не скалярная и плоская, а векторная и пространственная задача. Проверенная далее локализация собственных вектор-функций модельной задачи (6)–(8) подсказывает, что в асимптотических формулах на первый план выходит явление

[1)]В этой работе применяется одномерная модель Полинга [8], но общие результаты (см. [9–12] и др.) устанавливают близость спектров задач на обычном и «толстом» графах.

пограничного слоя, который описывается при помощи решений двух, плоской и антиплоской — векторной и скалярной (см., например, [15]), задач в двумерной симметричной бесконечной «треноге» $\mathbb{Y}$ (рис. 2, b), образованной тремя ($\alpha = 0, \pm$) полуполосами Π_α единичной толщины со средними линиями, исходящими из начала $\mathscr{O}$ декартовой системы координат $\eta \in \mathbb{R}^2$ под углом $2\pi/3$ одна к другой, причем

$$\Pi_0 = \{\eta = (\eta_1, \eta_2) : \eta_1 > 0, \ |\eta_2| < 1/2\}. \tag{10}$$

Если дискретный спектр скалярной задачи полностью известен (см. публикацию [16]), то об изолированных собственных числах векторной задачи нет вообще никакой информации. На помощь приходит теорема 2, показывающая, что в низкочастотном диапазоне спектра (5) пограничный слой порожден именно собственной функцией антиплоской задачи.

Основной технический прием — замена обычного функционала упругой энергии (см., например, [15]) квазиэнергией

$$E\big(U^h, U^h; \bowtie_H^h\big) = \mu \big\| \nabla_x U^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 + (\lambda+\mu)\big\|\nabla_x \cdot U^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2. \tag{11}$$

Такая возможность появилась благодаря постановке условий Дирихле, а именно, умножив (6) скалярно на пробную вектор-функцию $\Psi^h(\cdot;\theta) \in H^1_{0,\theta}\big(\bowtie_H^h\big)^3$ и проинтегрировав по частям при учете условия (7) и первого условия (8) для Ψ^h, а также второго условия (8) для $U^h(\cdot;\theta)$ приходим к интегральному тождеству (см. [17–19] и др.)

$$E\big(U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta); \bowtie_H^h\big) = \Lambda^h(\theta)(U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta))_{\bowtie_H^h} \quad \forall \Psi^h \in H^1_{0,\theta}\big(\bowtie_H^h\big)^3. \tag{12}$$

Полуторалинейная форма

$$E\big(\Phi, \Psi; \bowtie_H^h\big) = \mu(\nabla_x \Phi, \nabla_x \Psi)_{\bowtie_H^h} + (\lambda+\mu)(\nabla_x \cdot \Phi, \nabla_x \cdot \Psi)_{\bowtie_H^h}$$

положительно определенна, эрмитова и замкнута в $H^1_{0,\theta}\big(\bowtie_H^h\big)^3$, что и обеспечивает все упомянутые свойства спектра задачи (12) (или (6)–(8) в дифференциальной форме).

Кратко опишем строение статьи. В теореме 1 из разд. 2 доказана локализация собственных вектор-функций $U^h_{(k)}(\cdot;\theta)$ около ребер $\triangle^h_{\ell/\wp} \times (0, H)$ ячейки $\bowtie_H^h$ и экспоненциальное затухание при удалении от них. В разд. 3 приведена информация о спектрах двух, плоской (18) и антиплоской (19), задач теории упругости в бесконечной треноге $\mathbb{Y}$ (центральный результат — теорема 2), а порожденная захваченной волной во второй, скалярной, задаче асимптотика собственных пар задачи (6)–(8) построена в разд. 4. В разд. 5 исследовано явление пространственного пограничного слоя. Найденные асимптотические конструкции обоснованы в разд. 6 и 7, а выводы о лакунарном строении спектра (3) приведены в разд. 8 (соответственно теоремы 5 и 6). Наконец, в разд. 9 перечислено несколько открытых вопросов.

2. Концентрация собственных функций около ребер решетки. Введем непрерывную кусочно-гладкую экспоненциальную весовую функцию

$$\mathscr{R}^h_\beta(x) = \begin{cases} e^{\beta r(y)/h} & \text{при } r(y) := \operatorname{dist}(y, \triangle^h) \le 1/4, \\ e^{\beta/4h} & \text{при } r(y) \ge 1/4, \end{cases} \tag{13}$$

где $\triangle^h = \triangle^h_\ell \cup \triangle^h_\wp$ — объединение треугольных узлов плоской ячейки $\boxtimes^h$.

Теорема 1. *Пусть для некоторых $p \in \mathbb{N}$, $\theta \in [0,2\pi]^2$ и $d > 0$ собственное число $\Lambda_p^h(\theta)$ подчинено соотношению*

$$\Lambda_p^h(\theta) \le h^{-2}\mu(\pi^2 - d). \tag{14}$$

Тогда найдутся такие не зависящие от θ и p положительные величины h_d, β_d и c_d, что при $h \in (0, h_d]$ нормированная в пространстве $L^2(\bowtie_H^h)^3$ собственная вектор-функция $U_{(p)}^h(\cdot;\theta)$ задачи (6)–(8) удовлетворяет весовой оценке

$$h^2\big\|\mathscr{R}_{\beta_d}^h \nabla_x U_{(p)}^h(\cdot;\theta); L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 + \big\|\mathscr{R}_{\beta_d}^h U_{(p)}^h(\cdot;\theta); L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 \le c_d. \tag{15}$$

Доказательство. Индексы d, p и по возможности аргумент θ не пишем. Подставим в интегральное тождество (12) пробную вектор-функцию $\Psi^h = \mathscr{R}_\beta^h \Phi^h$, где $\Phi^h := \mathscr{R}_\beta^h U^h \in H_{0,\theta}^1\big(\bowtie_H^h\big)^3$, а первое условие квазипериодичности (8) сохранено потому, что вес (13) постоянен около прямоугольников $\mathbb{I}_{H\ell/\wp}^{h\pm}$. Двукратное коммутирование градиент-оператора ∇_x и множителя $\mathscr{R}_\beta^h(y)$ превращает названное тождество в равенство

$$\begin{aligned}\mu\big(\big\|\nabla_x\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 - \big(\Phi^h\mathscr{R}_{-\beta}^h\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h, \nabla_x\Phi^h\big)_{\bowtie_H^h}\\ + \big(\nabla_x\Phi^h, \Phi^h\mathscr{R}_{-\beta}^h\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h\big)_{\bowtie_H^h} - \big\|\Phi^h\mathscr{R}_{-\beta}^h\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2\big)\\ + (\lambda+\mu)\big(\big\|\nabla_x\cdot\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 - \big(\mathscr{R}_{-\beta}^h\Phi^h\cdot\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h, \nabla_x\cdot\Phi^h\big)_{\bowtie_H^h}\\ + \big(\nabla_x\cdot\Phi^h, \mathscr{R}_{-\beta}^h\Phi^h\cdot\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h\big)_{\bowtie_H^h} - \big\|\mathscr{R}_{-\beta}^h\Phi^h\cdot\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2\big)\\ = \Lambda^h\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2.\end{aligned} \tag{16}$$

После выделения вещественных частей все скалярные произведения в левой части взаимно уничтожаются и в результате остаются только квадраты норм.

Теперь заметим, что $\mathscr{R}_\beta^h = 1$, $\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h = 0$ и $\Phi^h = U^h$ на треугольниках $\triangle_{\ell/\wp}^h$ и

$$\mathscr{R}_{-\beta}^h(y)\left|\frac{\partial\mathscr{R}_\beta^h}{\partial y_j}(y)\right| \le \frac{\beta}{h} \quad \text{при} \quad y \in \bowtie^h \setminus \triangle^h,\ j = 1, 2. \tag{17}$$

Кроме того, одномерное неравенство Фридрихса на интервале $(-h/2, h/2)$, условие Дирихле (7) и геометрическое строение сечения ячейки обеспечивают оценку

$$\big\|\nabla_x\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h \setminus \triangle_H^h\big)\big\|^2 \ge \pi^2 h^{-2}\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h \setminus \triangle_H^h\big)\big\|^2.$$

При помощи перечисленных соотношений придаем равенству (16), из которого удалим ненужные слагаемые, следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma\mu\big\|\nabla_x\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 \le (\sigma-1)\mu\big\|\nabla_x\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2\\ + (\mu + 2(\lambda+\mu))\big\|\Phi^h\mathscr{R}_{-\beta}^h\nabla_x\mathscr{R}_\beta^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 + \Lambda^h\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2\\ \le h^{-2}(\pi^2(\sigma-1)\mu + \beta^2(2\lambda+3\mu) + h^2\Lambda^h)\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h \setminus \triangle_H^h\big)\big\|^2 + \Lambda^h\big\|\Phi^h; L^2\big(\triangle_H^h\big)\big\|^2.\end{aligned}$$

При учете ограничения (14) фиксируем величины $\sigma \in (0,1)$ и $\beta > 0$ так, чтобы множитель при $\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h \setminus \triangle_H^h\big)\big\|^2$ стал меньше $-h^{-2}d/2$ (знак минус). К тому же в силу нормировки (9) и равенства $\Phi^h = U^h$ на $\triangle_H^h := \big(\triangle_\ell^h \cup \triangle_\wp^h\big) \times (0, H)$

последнее слагаемое не превосходит $\mu\pi^2 h^{-2}$. В итоге, сократив общий множитель μ, выводим, что

$$h^2\sigma\big\|\nabla_x\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 + \frac{d}{2}\big\|\Phi^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2 \le \pi^2.$$

Оценка второй нормы из левой части (15) уже получена, а для оценки первой нужно еще раз применить коммутирование и учесть формулу (17). Теорема доказана.

3. Задачи о двумерном пограничном слое. Растяжение продольных координат $y \mapsto \eta^\ell = h^{-1}(y - \mathscr{O}_\ell)$ и $y \mapsto \eta^\wp = -h^{-1}(y - \mathscr{O}_\wp)$ относительно центров треугольников $\triangle_\ell^h$ и $\triangle_\wp^h$, но сохранение масштаба для аппликаты z с последующим формальным переходом к $h = 0$ трансформирует область $\bowtie_H^h$ в прямое произведение $\mathbb{Y} \times (0, H) \ni (\eta, z)$. Обратим внимание на знак минус в формуле для $\eta^\wp$ (зеркальное отражение треноги $\mathsf{Y}_\wp^0$, требующее также преобразования вектора смещений $u^h \mapsto \big(u_1^h, u_3^h, u_2^h\big)$), но далее индексы ℓ и $\wp$ у координат η не пишем. Указанные действия расщепляют оператор Ламе $L(\nabla_\eta, 0)$ на блочно-диагональную матрицу с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta) = -\mu\Delta_\eta - (\lambda + \mu)\nabla_\eta\nabla_\eta\cdot$ и оператором $-\mu\Delta_\eta$ на главной диагонали. В итоге возникают две задачи, а именно плоская задача теории упругости

$$-\mu\Delta_\eta w'(\eta) - (\lambda + \mu)\nabla_\eta\nabla_\eta \cdot w'(\eta) = M'w'(\eta),\ \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'(\eta) = 0,\ \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (18)$$

для вектора продольных смещений $w' = (w_1, w_2)$ и антиплоская задача для депланации $w^\odot := w_3$ (символ $\odot$ — обычное обозначение на плоскости для перпендикулярной ей оси аппликат)

$$-\mu\Delta_\eta w^\odot(\eta) = M^\odot w^\odot(\eta),\ \eta \in \mathbb{Y}, \quad w^\odot(\eta) = 0,\ \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (19)$$

По этим задачам выстраиваются симметричные, положительно определенные, замкнутые соответственно в $H^1(\mathbb{Y})^2$ и $H^1(\mathbb{Y})$ квадратичные формы

$$E'(w', w'; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_\eta w', \nabla_\eta w')_\mathbb{Y} + (\lambda+\mu)(\nabla_\eta\cdot w', \nabla_\eta\cdot w')_\mathbb{Y} \text{ и } \mu(\nabla_\eta w^\odot, \nabla_\eta w^\odot)_\mathbb{Y}, \quad (20)$$

а значит, согласно [20, гл. 10] и неограниченные самосопряженные положительно определенные операторы A' и $A^\odot$ в гильбертовых пространствах $L^2(\mathbb{Y})^2$ и $L^2(\mathbb{Y})$. Непрерывные спектры $\wp_c'$ и $\wp_c^\odot$ этих операторов совпадают и занимают луч $[M_\dagger, +\infty)$ с точкой отсечки $M_\dagger = \mu\pi^2$ (см., например, статью [21] по поводу плоской задачи, а для антиплоской результат очевиден).

В работе [16] доказано, что дискретный спектр $\wp_d^\odot$ оператора $A^\odot$ состоит из единственного собственного числа $M_1^\odot \in (0, \mu\pi^2)$. Соответствующая собственная функция $w_1^\odot \in H_0^1(\mathbb{Y})$, положительная в области $\mathbb{Y}$ и нормированная в $L^2(\mathbb{Y})$, обладает вращательной симметрией на угол $2\pi/3$ относительно начала координат $\mathscr{O}$ и допускает в полуполосе (10) представление

$$w_1^\odot(\eta) = K_1^\odot e^{-\eta_1\sqrt{\pi^2-\mu^{-1}M_1^\odot}}\cos(\pi\eta_2) + O(e^{-|\eta|\sqrt{4\pi^2-\mu^{-1}M_1^\odot}}) \quad \text{при } \eta_1 \to +\infty. \quad (21)$$

В каждой из трех ($\alpha = 0, \pm$) угловых точек раствором $4\pi/3$ на границе $\partial\mathbb{Y}$ (вершин $\mathscr{O}^\alpha$ узла $\triangle$ — равностороннего треугольника с единичной стороной) справедливо разложение

$$w_1^\odot(\eta) = C_1^\odot\rho_\alpha^{3/4}\sin\left(\frac{3\varphi_\alpha}{4}\right) + O\big(\rho_\alpha^{3/2}\big), \quad \rho_\alpha \to +0, \quad (22)$$

где $(\rho_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathbb{R}_+ \times (0, 4\pi/3)$ — система полярных координат с центром в вершине $\mathscr{O}^\alpha$. Коэффициенты $K_1^\odot$ и $C_1^\odot$ положительны, так как положительная функция $w_1^\odot$ раскладывается в сходящиеся ряды Фурье на полуполосе и секторе, но среди членов рядов только отделенные в формулах (21) и (22) не меняют знак.

Автор не знает, пустым или нет является дискретный спектр $\wp'_d$ оператора A' плоской задачи теории упругости (18). Следующее утверждение, компенсирующее недостаток информации, понадобится при построении асимптотики собственных пар задачи (6)–(8).

Теорема 2. *Полуинтервал* $\left(0, M_1^\odot\right]$ *свободен от дискретного спектра* $\wp'_d$ *оператора* A'.

Доказательство. Допустим, что существует собственная пара $\{M'_1; w'_{(1)}\} \in \left(0, M_1^\odot\right] \times H_0^1(\mathbb{Y})^2$. В силу минимального принципа (см., например, [20; теорема 10.2.2]) первое (наименьшее) собственное число находится по формуле

$$M'_1 = \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \setminus \{0\}} \frac{E'(\psi', \psi'; \mathbb{Y})}{\|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = \frac{E'(w'_{(1)}, w'_{(1)}; \mathbb{Y})}{\|w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\|^2}. \tag{23}$$

Согласно левому определению (20) имеем

$$M'_1 \geq \min_{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \setminus \{0\}} \frac{\mu\|\nabla_\eta \psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \mu\|\nabla_\eta \psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2 + \|\psi_2; L^2(\mathbb{Y})\|^2}$$
$$= \mu \min_{\psi^\odot \in H_0^1(\mathbb{Y}) \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla_\eta \psi^\odot; L^2(\mathbb{Y})\|^2}{\|\psi^\odot; L^2(\mathbb{Y})\|^2} = M_1^\odot. \tag{24}$$

Первое неравенство в цепочке (24) можно считать строгим, так как минимум в формуле (23) можно вычислять по конусу

$$\mathfrak{Y}_\delta := \left\{\psi' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 : \|\nabla_\eta \cdot \psi'; L^2(\mathbb{Y})\| \geq \delta \left\|\psi'; L^2(\mathbb{Y})\right\|\right\}.$$

Число $\delta > 0$ нужно выбрать так, чтобы в $\mathfrak{Y}_\delta$ попали и нормированный в $L^2(\mathbb{Y})^2$ вектор $w'_{(1)}$, на котором реализуется минимум (23), и вектор $2^{-1/2}\left(w_1^\odot, w_1^\odot\right)$, включающий дважды собственную функцию задачи (19). Это возможно потому, что $\|\nabla_\eta \cdot w'_{(1)}; L^2(\mathbb{Y})\| > 0$ и $\left\|\partial_{\eta_1} w_1^\odot + \partial_{\eta_2} w_1^\odot; L^2(\mathbb{Y})\right\| > 0$. В самом деле, если $\nabla_\eta \cdot w'_{(1)} = 0$, то каждая $(j = 1, 2)$ из компонент $w'_{(1)j}$ удовлетворяет задаче

$$-\mu\Delta_\eta w'_{(1)j}(\eta) = M'_1 w'_{(1)j}(\eta), \ \eta \in \mathbb{Y}, \quad w'_{(1)j}(\eta) = 0, \ \eta \in \partial\mathbb{Y}.$$

При учете соотношения (24) видим, что $M'_1 = M_1^\odot$ и в силу простоты собственного числа $M_1^\odot$ вектор-функция $w'_{(1)}(\eta)$ совпадает с $Cw_1^\odot(\eta)$ при некотором столбце $C \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, а значит,

$$C_1 \frac{\partial w_1^\odot}{\partial \eta_1}(\eta) + C_2 \frac{\partial w_1^\odot}{\partial \eta_2}(\eta) = 0, \quad \eta \in \mathbb{Y}.$$

Последнее равенство невозможно, так как нетривиальное решение задачи (19), зависящее только от одной переменной $C_2\eta_1 - C_1\eta_2$, — нонсенс. Теорема доказана.

Сама собственная пара $\left\{M_1^\odot; w_1^\odot\right\}$ и ее свойства будут использованы в разд. 4. Перечисленные факты означают, что справедливы неравенства

$$\mu\|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \geq M_1^\odot \|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}),$$

$$\mu\|\nabla_\eta w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \geq \mu\pi^2\|w_3; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \ \forall w_3 \in H_0^1(\mathbb{Y}) \text{ в случае } \big(w_3, w_1^\odot\big)_\mathbb{Y} = 0, \quad (25)$$
$$E'(w', w'; \mathbb{Y}) \geq (M_1^\odot + d_\mathbb{Y})\|w'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 \quad \forall w' \in H_0^1(\mathbb{Y})^2 \text{ при некотором } d_\mathbb{Y} > 0.$$

Замечание 1. Если какая-либо часть поверхности упругого волновода свободна от внешних воздействий (условия Неймана в напряжениях) и вместо квазиэнергии приходится пользоваться истинной упругой энергией, то теорема 2 перестает быть верной. Контрпримером служат задачи теории упругости в полуполосе (10) с условиями Дирихле на боковых сторонах и Неймана на торце: дискретный спектр скалярной задачи пуст из-за возможности разделить переменные, но у векторной задачи собственное число на интервале $(0, M_\dagger)$ есть (см. [21–23] и др.).

4. Формальная асимптотика. На плоской ячейке $\bowtie^h$ введем гладкие срезающие функции $\chi^h_{\ell/\wp}$, служащие для локализации асимптотических конструкций на левую Y^h_ℓ и правую $\mathsf{Y}^h_\wp$ треноги,

$$\chi_{\ell/\wp}(y) = 1 \text{ при } |y - \mathscr{O}_{\ell/\wp}| \leq \gamma \text{ и } \chi_{\ell/\wp}(y) = 0 \text{ при } |y - \mathscr{O}_{\ell/\wp}| \geq (2\gamma+1)/4. \quad (26)$$

Параметр $\gamma \in (0, 1/2)$ выбирается произвольно (см. разд. 9, 1°).

В соответствии с теоремой 1 о локализации собственных вектор-функций и теоремой 2 о пограничном слое примем следующие асимптотические анзацы для двух (ℓ и $\wp$) собственных пар $\big\{\Lambda^h_{k_{\ell/\wp}}(\theta); U^h_{(k_{\ell/\wp})}(\cdot;\theta)\big\}$ задачи (6)–(8) при каком-нибудь параметре Флоке θ:

$$\Lambda^h = h^{-2}M_1^\odot + \kappa + \dots, \quad (27)$$

$$U^h(x) = \chi_{\ell/\wp}(y)\big(e_{(3)}w_1^\odot(\eta^{\ell/\wp})v(z) + hW(\eta^{\ell/\wp})\partial_z v(z) + h^2 V(\eta^{\ell/\wp}, z)\big) + \dots. \quad (28)$$

Индекс $k_{\ell/\wp}$ и аргумент θ для краткости не указываем, многоточие замещает младшие асимптотические члены, растянутые координаты $\eta^{\ell/\wp} \in \mathbb{R}^2$ и спектральная пара $\{M_1^\odot; w_1^\odot\}$ задачи (19) введены в разд. 3, а вектор-функции W, V и число κ подлежат определению.

Подставим анзацы (27) и (28) в систему уравнений (6) и соберем множители при одинаковых степенях малого параметра. Учитывая расщепление оператора Ламе $L(\nabla_x)$, вызванное растяжением продольных координат y, но сохранением масштаба для z (см. начало разд. 3), получаем для вектора $W' = (W_1, W_2)$ и скаляра V_3 (остальные компоненты у W и V нулевые) задачи теории упругости, плоскую

$$L'(\nabla_\eta)W'(\eta) - M_1^\odot W'(\eta) = (\lambda+\mu)\nabla_\eta w_1^\odot(\eta), \ \eta \in \mathbb{Y}, \quad W'(\eta) = 0, \ \eta \in \partial\mathbb{Y}, \quad (29)$$

и антиплоскую

$$-\mu\Delta_\eta V_3(\eta; z) - M_1^\odot V_3(\eta; z) = F_3(\eta, z) := \kappa w_1^\odot(\eta)v(z) + (\lambda + 2\mu)w_1^\odot(\eta)\partial_z^2 v(z)$$
$$+ (\lambda+\mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\partial_z^2 v(z), \ \eta \in \mathbb{Y}, \quad V_3(\eta; z) = 0, \ \eta \in \partial\mathbb{Y}. \quad (30)$$

Условия Дирихле на границе треноги унаследованы от условий (7) на поверхности $\partial \bowtie^h_H \setminus \mathbb{I}^h_H$.

В силу упомянутых и доказанных фактов из разд. 3 задача (29) с двумерным оператором Ламе $L'(\nabla_\eta)$ однозначно разрешима в классе Соболева $H_0^1(\mathbb{Y})^2$, а у задачи (30) есть одно условие разрешимости в классе экспоненциально затухающих функций — ортогональность правой части F_3 собственной функции w_1. Оно принимает вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-b\partial_z^2 v(z) = \kappa v(z), \quad z \in (0, H), \quad (31)$$

которое, отталкиваясь от условия Дирихле (7), снабдим краевыми условиями

$$v(0) = 0 \quad \text{и} \quad v(H) = 0. \quad (32)$$

Теорема 3. *Для коэффициента в уравнении* (31) *выполнено соотношение*

$$b = \int\limits_{\mathbb{Y}} w_1^{\odot}(\eta)\big((\lambda+2\mu)w_1^{\odot}(\eta) + (\lambda+\mu)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\big)\, d\eta > \mu. \qquad (33)$$

Доказательство. Интегрируя по частям, находим, что

$$\begin{aligned} b = \lambda + 2\mu + 2(\lambda+\mu)\int\limits_{\mathbb{Y}} w_1^{\odot}(\eta)\nabla_\eta \cdot W'(\eta)\, d\eta + (\lambda+\mu)\int\limits_{\mathbb{Y}} \nabla_\eta w_1^{\odot}(\eta)\cdot W'(\eta)\, d\eta \\ = \mu + (\lambda+\mu)\big\|w_1^{\odot} + \nabla_\eta \cdot W'; L^2(\mathbb{Y})\big\|^2 \\ + (\mu\|\nabla_\eta W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2 - M_1^{\odot}\|W'; L^2(\mathbb{Y})\|^2). \quad (34) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части неотрицательно, а последняя разность положительна благодаря первому неравенству (25) и невозможности формулы $W' = Cw_1^{\odot}$ со столбцом $C \in \mathbb{R}^2$. Теорема доказана.

Наконец, упомянем, что собственные пары задачи (31), (32) имеют вид

$$\varkappa_m = b\pi^2 H^{-2} m^2, \quad v_m(z) = (H/2)^{-1/2}\sin(\pi m z/H), \quad m \in \mathbb{N}. \qquad (35)$$

5. Трехмерный пограничный слой. В силу формул (35) второй член анзаца (28), принятого на начальном этапе асимптотического анализа, не удовлетворяет условиям Дирихле (7) на основаниях ячейки $\bowtie_H^h$. Согласно общим принципам построения асимптотик (см., например, монографии [24, 25]) компенсация возникающих невязок производится при помощи построения трехмерных пограничных слоев около треугольников $\triangle_{\ell/\wp}^h \times \{0\}$ и $\triangle_{\ell/\wp}^h \times \{H\}$ на основаниях ячейки. Вблизи одного из них, например $\triangle_\ell^h \times \{0\}$, производим растяжение координат $x \mapsto \xi_\ell^0 = \big(h^{-1}\big(y - \mathscr{O}_\ell^h\big), h^{-1}z\big)$ и перейдем формально к $h = 0$. В результате получим следующую задачу Дирихле в неограниченной области $\Xi_+ = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+$:

$$\begin{gathered} L(\nabla_\xi)Z_\ell^0(\xi) - M_1^{\odot} Z_\ell^0(\xi) = 0, \quad \xi \in \Xi_+, \\ Z_\ell^0(\xi) = 0,\ \xi \in \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+, \quad Z_\ell^0(\eta, 0) = G(\eta, 0),\ \eta \in \mathbb{Y}. \end{gathered} \qquad (36)$$

Такие же задачи возникают около трех других треугольников после подходящих поворотов систем координат. Ограничимся рассмотрением указанного треугольника, но не будем писать символы 0 и ℓ. В силу первого соотношения (25) и следствия одномерного неравенства Харди

$$\|(1+\zeta)^{-1}\Psi; L^2(\Xi_+)\|^2 \le 4\|\nabla_\xi \Psi; L^2(\Xi_+)\|^2 \quad \forall \Psi \in C_c^\infty(\Xi_+), \qquad (37)$$

а также определения (11) выводим оценку первой нормы в правой части

$$\begin{aligned} \big(E(Z, Z; \Xi_+) - M_1^{\odot}\|Z; L^2(\Xi_+)\|^2\big)^{1/2} \\ \ge c_\Xi \left(\left\| \frac{Z}{1+\zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 + \left\| \frac{\nabla_\xi Z}{1+\zeta}; L^2(\Xi_+) \right\|^2 \right)^{1/2} \quad (38) \end{aligned}$$

с множителем $c_\Xi > 0$, не зависящим от $Z \in C_c^\infty(\Xi_+)$. Оценка второй нормы требует разбиения множества Ξ на ячейки υ_n, $n \in \mathbb{N}$, двух типов: единичные кубы и призмы с основаниями $\triangle$ единичной высоты, на которых верны подлежащие суммированию соотношения

$$\mu \left\| \frac{\nabla_\xi Z}{1+\zeta}; L^2(\upsilon_n) \right\|^2 \le \frac{\max\{1+\zeta \mid \xi \in \upsilon_n\}}{\min\{1+\zeta \mid \xi \in \upsilon_n\}} \times \left(\frac{E(Z,Z;\upsilon_n) - M_1^{\odot} \|Z; L^2(\upsilon_n)\|^2}{\max\{1+\zeta \mid \xi \in \upsilon_n\}} + C \left\| \frac{Z}{1+\zeta}; L^2(\upsilon_n) \right\|^2 \right),$$

где общий множитель не превосходит двух, а максимум в знаменателе дроби больше единицы.

Через $\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ обозначим пополнение линейного множества $C_c^\infty(\Xi_+)^3$ (бесконечно дифференцируемые вектор-функции с компактными носителями) по норме $\|Z; \mathbf{H}_0^1(\Xi)\|$ из левой части неравенства (38), которое означает, что пространство состоит из вектор-функций $Z \in H^1_{0,\mathrm{loc}}(\overline{\Xi_+})^3$, для которых конечна названная норма. Теорема Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве обеспечивает очередное утверждение.

Лемма 1. *При любом функционале* $\mathbf{F} \in \big(\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3\big)^*$ *интегральное тождество*

$$E(Z^\sharp, \Psi; \Xi_+) - M_1^{\odot} \big(Z^\sharp, \Psi)_{\Xi_+} = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3 \tag{39}$$

имеет единственное решение $Z^\sharp \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ *и верна оценка*

$$\big\|Z^\sharp; \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)\big\| \le C_\Xi \big\|\mathbf{F}; \big(\mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3\big)^*\big\|.$$

Под *обобщенным решением* $Z \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ (норма сохранена, но нет обращения в нуль на основании полуцилиндра Ξ_+) задачи (36), в которой правая часть — след вектор-функции $G \in \mathbf{H}_0^1(\Xi; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, понимаем сумму $Z = Z^\sharp + G$, где $Z^\sharp \in \mathbf{H}_0^1(\Xi_+)^3$ — решение задачи (39) при

$$\mathbf{F}(\Psi) = -E(G, \Psi; \Xi_+) + M_1^{\odot}(G, \Psi)_{\Xi_+}. \tag{40}$$

Теперь применим теорию Кондратьева [26] (см. также [27, гл. 3, § 1; 28, § 3] и др.). Именно, рассмотрим интегральное тождество на бесконечном в обе стороны цилиндре $\Xi = \mathbb{Y} \times \mathbb{R}$:

$$E(Z, \Psi; \Xi) - M_1^{\odot} \big(Z, \Psi)_\Xi = \mathbf{F}(\Psi) \quad \forall \Psi \in C_c^\infty(\Xi)^3 \tag{41}$$

с подходящим (см. ниже) функционалом $\mathbf{F}$ в правой части. Применим преобразование Фурье $\mathscr{F}_{\zeta \to \mathfrak{z}}$ вдоль прямой $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \mathfrak{z} = t\}$, $t \neq 0$, и придем к интегральному тождеству

$$\widehat{E}_{\mathfrak{z}}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) - M_1^{\odot}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} = \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{\Psi}) \quad \forall \widehat{\Psi} \in H_0^1(\mathbb{Y})^3, \tag{42}$$

где образы Фурье снабжены значком $\widehat{\ }$, а полуторалинейная форма имеет вид

$$\widehat{E}_{\mathfrak{z}}(\widehat{Z}, \widehat{\Psi}; \mathbb{Y}) = \mu(\nabla_\eta \widehat{Z}, \nabla_\eta \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + \mu \mathfrak{z}^2 (\widehat{Z}, \widehat{\Psi})_{\mathbb{Y}} + (\lambda + \mu)(\nabla_\eta \cdot \widehat{Z}' + i\mathfrak{z}\widehat{Z}_3, \nabla_\eta \cdot \widehat{\Psi}' + i\overline{\mathfrak{z}}\widehat{\Psi}_3)_{\mathbb{Y}}, \tag{43}$$

причем i — мнимая единица и черта указывает на комплексное сопряжение. Интегральное тождество (12) порождает полиномиальный пучок

$$\mathbb{C} \ni \mathfrak{z} \mapsto \big(\mathfrak{A}(\mathfrak{z}) : H_0^1(\mathbb{Y})^3 \to \big(H_0^1(\mathbb{Y})^3\big)^*\big). \tag{44}$$

К сожалению, по причине отсутствия компактности вложения $H^1(\mathbb{Y}) \subset L^2(\mathbb{Y})$ (область $\mathbb{Y}$ неограниченная) невозможно применить привычную схему исследования эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность, использующую оценки [29] решений в соболевских нормах, зависящих от параметра, и аналитическую альтернативу Фредгольма [30, гл. 1, теорема 5.1]. Впрочем, для конкретной задачи (42) без особого труда находим следующие их заменители.

1°. При $\mathfrak{z} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как форма (43) положительно определена.

2°. Существует такое $\mathfrak{k} > 0$, что при $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ и $|\mathfrak{y}| < \mathfrak{k}|\mathfrak{x}|$ оператор $\mathfrak{A}(\mathfrak{z})$ обратим, так как оказывается малым возмущением оператора $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$.

3°. В силу вычислений из разд. 4 (центральный момент — теорема 3) у пучка (44) в точке $\mathfrak{z} = 0$ есть одна (непродолжимая) жорданова цепочка длиной два, состоящая из собственного $\mathfrak{u}^0 = e_{(3)} w_1^{\odot}$ и присоединенного $\mathfrak{u}^1 = -iW$ векторов. Кроме того, в силу абстрактных результатов [31] и [32, гл. 9] существует такой радиус $\mathfrak{r} > 0$, что проколотая окрестность $\{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : 0 < |\mathfrak{z}| < \mathfrak{r}\}$ свободна от спектра пучка $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{z})$.

В итоге находим такую величину $\mathfrak{h} > 0$, что в полосе $\varpi(\mathfrak{h}) = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \mathfrak{z}| < \mathfrak{h}\}$ резольвента $\mathfrak{A}(\cdot)^{-1}$ — абстрактная голоморфная функция с единственным полюсом в точке $\mathfrak{z} = 0$ (второго порядка). Теперь повторим буквально все рассуждения теории Кондратьева. Именно, предположим, что правая часть $\mathbf{F}$ интегрального тождества (41) — функционал на обоих пространствах $\mathfrak{W}^1_{0,\pm\mathfrak{h}}(\Xi)^3$, полученных пополнением линеала $C_c^{\infty}(\mathbb{Y} \times \mathbb{R})^3$ по экспоненциальным весовым соболевским нормам

$$\big\|\Psi; \mathfrak{W}^1_{0,\pm\mathfrak{h}}(\Xi)\big\| = \bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{\pm 2\mathfrak{h}\zeta} (\|\Psi(\cdot,\zeta); H^1(\mathbb{Y})\|^2 + \|\partial_\zeta \Psi(\cdot,\zeta); L^2(\mathbb{Y})\|^2)\, d\zeta \bigg)^{1/2}.$$

Тогда преобразование Фурье задает аналитическую функцию $\widehat{\mathbf{F}}$ в полосе $\varpi(\mathfrak{h})$. Зафиксируем весовой показатель $\mathfrak{b} \in (0, \mathfrak{h})$. Обратные преобразования Фурье функции $\mathfrak{z} \mapsto \mathfrak{A}(\mathfrak{x})^{-1} \widehat{\mathbf{F}}(\cdot; \mathfrak{z})$ вдоль прямых $\mathfrak{L}_{\pm\mathfrak{b}} = \{\mathfrak{z} \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \mathfrak{z} = \pm\mathfrak{b}\}$ предоставляют два решения $Z^{\pm} \in \mathfrak{W}^1_{0,\pm\mathfrak{h}}(\Xi)^3$ задачи (41), а теорема Коши о вычетах — их связь

$$Z^-(\xi) = C_0 e_{(3)} w_1^{\odot}(\eta) + C_1 \big(\zeta e_{(3)} w_1^{\odot}(\eta) + W(\eta)\big) + Z^+(\xi). \tag{45}$$

Вернемся к рассмотрению задачи (39) на полуцилиндре Ξ_+ с правой частью (40), порожденной вектор-функцией G, равной нулю при $\zeta > 1$, — это свойство достигается разрешенным умножением на срезку $\chi_1 \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, для которой $\chi_1(\zeta) = 1$ при $\zeta < 1/2$ и $\chi_1(\zeta) = 0$ при $\zeta > 1$. Теперь умножим само решение $Z^{\sharp} \in \mathbf{H}^1_0(\Xi_+)^3$ на $1 - \chi_1$ и придем к интегральному тождеству (41) с функционалом $\mathbf{F}$, имеющим носитель на множестве $\overline{\mathbb{Y}} \times [0,1]$. Вектор-функция $Z^- = (1 - \chi_1) Z^{\sharp}$, продолженная нулем на $\Xi_- = \mathbb{Y} \times (-\infty, 0)$, принадлежит пространству $\mathfrak{W}^1_{0,-\mathfrak{b}}(\Xi)^3$ (заменили степенной вес $(1+\zeta)^{-1}$ экспоненциальным $e^{-\mathfrak{b}\zeta}$) и допускает представление (45), которое сузим на полуцилиндр Ξ_+. Слагаемое $C_0 e_{(3)} w_1^{\odot}$ попадает в пространство $\mathbf{H}^1_0(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$, а слагаемое $C_1\big(\zeta e_{(3)} w_1^{\odot} + W\big)$ — только при $C_1 = 0$. Уточним полученный результат.

Теорема 4. *Существует такой показатель $\beta > 0$, что в случае $e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}} G \in H^1_0(\mathbb{Y})^3$ решение $Z \in \mathbf{H}^1_0(\Xi_+; \partial\mathbb{Y} \times \mathbb{R}_+)^3$ задачи (36) допускает представление*

$$Z(\xi) = C(G) e_{(3)} w_1^{\odot}(\eta) + \widetilde{Z}(\xi),$$

причем модуль коэффициента $C(G) \in \mathbb{R}$ и норма $\|e^{\beta(1+|\xi|^2)^{1/2}}\widetilde{Z}; H^1(\Xi_+)\|$ остатка $\widetilde{Z}(\xi)$, исчезающего на бесконечности с экспоненциальной скоростью, не превосходят $c\|e^{\beta(1+|\eta|^2)^{1/2}}G; H^1(\mathbb{Y})\|$.

Доказательство. Осталось убедиться в экспоненциальном затухании остатка $\widetilde{Z}(\eta,\zeta)$ при $|\eta| \to +\infty$. Для этого достаточно заметить, что компоненты $w_1^{\odot}$ и W_1, W_2 собственного и присоединенного векторов принадлежат пространству $\mathfrak{W}^1_{\vartheta,0}(\mathbb{Y})$ с весовой нормой $\|\Psi; \mathfrak{W}^1_{\vartheta,0}(\mathbb{Y})\| = \|e^{\vartheta(1+|\eta|^2)^{1/2}}\Psi; H^1(\mathbb{Y})\|$. Таким образом, в определении пучка (44) пространство Соболева $H^1_0(\mathbb{Y})$ можно заменить пространством Кондратьева $\mathfrak{W}^1_{\vartheta,0}(\mathbb{Y})$ при сохранении основных свойств пучка. При этом задачу следует интерпретировать как обыкновенное дифференциальное уравнение с операторными коэффициентами в банаховом или гильбертовом пространстве (см. [33–35] и др.). Теорема 4 доказана.

В разд. 6 будет использовано следствие теоремы 4: существует постоянная $C_W \in \mathbb{R}$, при которой решение $Z^W(\xi)$ задачи (36) с правой частью $G(\eta,0) = W(\eta) - C_W e_{(3)} w_1^{\odot}(\eta)$ исчезает на бесконечности с экспоненциальной скоростью.

6. Обоснование асимптотики некоторых собственных чисел. В пространстве Соболева $\mathscr{H}^h(\theta) = H^1_{0,\theta}(\bowtie^h_H)^3$ введем новое скалярное произведение

$$\langle U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta)\rangle = E\big(U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta); \bowtie^h_H\big) \tag{46}$$

и определим положительно определенный, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор $\mathscr{T}^h(\theta)$ при помощи тождества

$$\langle \mathscr{T}^h(\theta) U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta)\rangle = (U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta))_{\bowtie^h_H} \quad \forall U^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta) \in \mathscr{H}^h(\theta). \tag{47}$$

Поскольку ячейка $\bowtie^h_H$ ограничена, этот оператор компактный, т. е. согласно общим результатам [20, теоремы 10.1.5 и 10.2.2] его существенный спектр состоит из единственной точки $\tau = 0$, а дискретный спектр образует монотонную положительную бесконечно малую последовательность (нормальных) собственных чисел, составленную при учете их (конечных) кратностей,

$$\tau^h_1(\theta) \ge \tau^h_2(\theta) \ge \tau^h_3(\theta) \ge \cdots \ge \tau^h_k(\theta) \ge \cdots \to +0. \tag{48}$$

При этом вариационная задача (12) превращается в абстрактное уравнение

$$\mathscr{T}^h(\theta)\mathscr{U}^h(\theta) = \tau^h \mathscr{U}^h(\theta) \in \mathscr{H}^h(\theta)$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^h(\theta) = \Lambda^h(\theta)^{-1}. \tag{49}$$

Связь (49) переделывает последовательность (48) в последовательность (5).

Следующее утверждение известно как лемма о «почти собственных» числах и векторах (см. первоисточник [36]) и основано на спектральном разложении резольвенты оператора $\mathscr{T}^h(\theta)$ (см., например, [20, гл. 6]).

Лемма 2. *Зафиксируем какой-нибудь параметр Флоке $\theta \in [0,2\pi]^2$. Пусть $\mathbf{U}^h(\theta) \in \mathscr{H}^h(\theta)$ и $\mathbf{t}^h(\theta) \in \mathbb{R}_+$ таковы, что*

$$\|\mathbf{U}^h(\theta); \mathscr{H}^h(\theta)\| = 1, \quad \|\mathscr{T}^h(\theta)\mathbf{U}^h(\theta) - \mathbf{t}^h(\theta)\mathbf{U}^h(\theta); \mathscr{H}^h(\theta)\| =: \boldsymbol{\delta}^h(\theta) \in (0, \mathbf{t}^h(\theta)). \tag{50}$$

Тогда есть собственное число $\tau^h_{\mathbf{n}^h(\theta)}$ *оператора* $\mathscr{T}^h(\theta)$, *подчиненное оценке*

$$\left|\tau^h_{\mathbf{n}^h(\theta)} - \mathbf{t}^h(\theta)\right| \le \boldsymbol{\delta}^h(\theta).$$

Более того, при любом $\boldsymbol{\delta}^h_*(\theta) \in (\boldsymbol{\delta}^h(\theta), \mathbf{t}^h(\theta))$ *найдется столбец коэффициентов*

$$\mathbf{c}^h(\theta) = \left(\mathbf{c}^h_{\mathscr{N}^h(\theta)}, \dots, \mathbf{c}^h_{\mathscr{N}^h(\theta)+\mathscr{X}^h(\theta)-1}\right) \in \mathbb{C}^{\mathscr{X}^h(\theta)},$$

для которого

$$\left\|\mathbf{U}^h(\theta) - \sum_{j=\mathscr{N}^h(\theta)}^{\mathscr{N}^h(\theta)+\mathscr{X}^h(\theta)-1} \mathbf{c}^h_j(\theta)\mathscr{U}^h_j(\theta); \mathscr{H}^h(\theta)\right\| \le 2\frac{\boldsymbol{\delta}^h(\theta)}{\boldsymbol{\delta}^h_*(\theta)}, \tag{51}$$

$$\sum_{j=\mathscr{N}^h(\theta)}^{\mathscr{N}^h(\theta)+\mathscr{X}^h(\theta)-1} \left|\mathbf{c}^h_j(\theta)\right|^2 = 1.$$

Здесь $\tau^h_{\mathscr{N}^h(\theta)}, \dots, \tau^h_{\mathscr{N}^h(\theta)+\mathscr{X}^h(\theta)-1}$ *— набор всех собственных чисел оператора* $\mathscr{T}^h(\theta)$ *из замкнутого сегмента* $\left[\mathbf{t}^h(\theta) - \boldsymbol{\delta}^h_*(\theta), \mathbf{t}^h(\theta) + \boldsymbol{\delta}^h_*(\theta)\right]$, *а соответствующие собственные векторы* $\mathscr{U}^h_{\mathscr{N}^h(\theta)}(\theta), \dots, \mathscr{U}^h_{\mathscr{N}^h(\theta)+\mathscr{X}^h(\theta)-1}(\theta)$ *удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки*

$$\left\langle \mathscr{U}^h_j(\theta), \mathscr{U}^h_k(\theta)\right\rangle = \delta_{j,k}. \tag{52}$$

В согласии с асимптотическим анализом из разд. 4 соорудим по собственной паре (35) предельной задачи (31), (32) следующие «почти собственные» число и вектор оператора $\mathscr{T}^h(\theta)$:

$$\mathbf{t}^h_{n\ell/\wp} = h^2(M_1 + h^2\kappa_n)^{-1}, \tag{53}$$

$$\mathbf{U}^h_{n\ell/\wp}(x) = \left\|\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}; \mathscr{H}^h(\theta)\right\|^{-1} \mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}(x). \tag{54}$$

Отметим, что каждому индексу $n \in \mathbb{N}$ отвечают два (ℓ и $\wp$) не зависящих от параметра Флоке экземпляра числа (53), а вектор-функции

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}(x) = \chi^h_{\ell/\wp}(y)\big(&e_{(3)}w_1(\eta^{\ell/\wp})v_n(z) + hW(\eta^{\ell/\wp})\partial_z v_n(z) + h^2 e_{(3)}V_3(\eta^{\ell/\wp})v_n(z)\\ &+ h\big(e_{(3)}w_1(\eta^{\ell/\wp})\mathfrak{v}_n(z) + hW(\eta^{\ell/\wp})\partial_z\mathfrak{v}_n(z)\big) - h\chi_H(z)\partial_z v_n(0)Z^W(\xi^0_{\ell/\wp})\\ &- h\chi_H(H-z)\partial_z v_n(H)Z^W\big(\xi^H_{\ell/\wp}\big)\big)\end{aligned}$$

локализованы на треногах $\mathsf{Y}^h_{H\ell}$ и $\mathsf{Y}^h_{H\wp}$ благодаря определению срезок (26). Кроме того, $\{M_1; w_1\}$ — собственная пара задачи (19), вектор $W = (W', 0)$ включает решение задачи (29), а компонента $V_3(\eta^{\ell/\wp})v_n(z)$ находится в результате решения задачи (30), из правой части которой при помощи уравнения (31) устранена вторая производная $\partial_z^2 v_n(z)$. Наконец, $\xi^{0/H}_{\ell/\wp}$ и Z^W — растянутые координаты и специальное решение задачи (36), введенные соответственно в начале и конце разд. 5, а $\mathfrak{v}_n$ — любая гладкая функция,

$$\mathfrak{v}_n(z) = -C_W\partial_z v_n(0) \text{ при } z \in (0, H/3) \text{ и } \mathfrak{v}_n(z) = -C_W\partial_z v_n(H) \text{ при } z \in (2H/3, H).$$

Согласно краевым условиям для Z^W и v_n, введению срезки $\chi_H \in C^\infty_c[0, H)$, для которой $\chi_H(z) = 1$ вблизи точки $z = 0$, а также равенствам $\partial_z\mathfrak{v}_n(0) =$

$\partial_z \mathfrak{v}_n(H) = 0$ и конструкциям из разд. 4 вектор-функция $\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}$ удовлетворяет условию Дирихле (7), а значит, ввиду присутствия срезки $\chi^h_{\ell/\wp}$ выполнено включение $\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp} \in \mathscr{H}^h(\theta)$ при любом $\theta \in [0, 2\pi]$.

Обработаем величину $\boldsymbol{\delta}^h_{n\ell/\wp}(\theta)$ из формулы (50), найденную по паре (53), (54). Из определений (46) и (47) вытекает цепочка равенств

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\delta}^h_{n\ell/\wp}(\theta) &= \sup \bigl|\bigl\langle \mathscr{T}^h(\theta)\mathbf{U}^h_{n\ell/\wp} - \mathbf{t}^h_{n\ell/\wp}\mathbf{U}^h_{n\ell/\wp}, \psi^h(\cdot;\theta)\bigr\rangle\bigr| \\
&= \bigl\|\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}; \mathscr{H}^h(\theta)\bigr\|^{-1}\mathbf{t}^h_{n\ell/\wp} \sup \bigl| E\bigl(\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}, \psi^h(\cdot;\theta); \bowtie^h_H\bigr) \\
&\qquad - (h^{-2}M_1 + \kappa_n)\bigl(\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}, \psi^h(\cdot;\theta)\bigr)_{\bowtie^h_H}\bigr| \\
&= \bigl\|\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}; \mathscr{H}^h(\theta)\bigr\|^{-1}\mathbf{t}^h_{n\ell/\wp} \sup\bigl|\bigl((L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa_n)\mathbf{v}^h_{n\ell/\wp}, \psi^h(\cdot;\theta)\bigr)_{\bowtie^h_H}\bigr|. \qquad (55)
\end{aligned}$$

Супремум вычисляется по единичному шару в пространстве $\mathscr{H}^h(\theta)$, т. е. в силу неравенства Фридрихса на тонкостенной конструкции $\bowtie^h_H$ выполнено соотношение

$$\begin{aligned}
1 \geq \|\psi^h(\cdot;\theta); \mathscr{H}^h(\theta)\|^2 &\geq \mu\bigl\|\nabla_x\psi^h(\cdot;\theta); L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 \\
&\geq c_{\bowtie}\mu h^{-2}\bigl\|\psi^h(\cdot;\theta); L^2(\bowtie^h_H)\bigr\|^2, \quad c_{\bowtie} > 0. \qquad (56)
\end{aligned}$$

Для укорочения формул индексы n, $\ell/\wp$ и аргумент θ не пишем. Имеем

$$\begin{aligned}
&(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)\mathbf{v}^h = [L(\nabla_x), \chi](e_{(3)}w_1 v + hW\partial_z v + h^2 e_{(3)}V_3 v) \\
&\quad - h^{-2}\chi v e_{(3)}(\mu\Delta_\eta + M_1)w_1 + h^{-1}\chi\partial_z v((L'(\nabla_\eta) - M_1)W' - (\lambda+\mu)\nabla_\eta w_1, 0) \\
&\quad - h^0\chi e_{(3)}\bigl((\mu\Delta_\eta + M_1)V_3 v + \kappa w_1 v + (\lambda + 2\mu)w_1\partial_z^2 v + (\lambda+\mu)\nabla_\eta \cdot W'\partial_z^2 v\bigr) \\
&- h^1\chi\bigl(\mu W'\partial_z^3 v + \kappa W'\partial_z v + (\lambda+\mu)\nabla_\eta V_3\partial_z v, 0\bigr) - h^2\chi e_{(3)}((\lambda+2\mu)V_3\partial_z^2 v + \kappa V_3 v) \\
&\quad + h(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(e_{(3)}w_1\mathfrak{v} + hW\partial_z)\mathfrak{v} \\
&\quad - h\sum_{G=0,H}\partial_z v(G)(L(\nabla_x) - h^{-2}M_1 - \kappa)(\chi_H(\cdot^G)Z^W(\cdot^G)) =: \sum_{l=1}^{8} I^h_l. \qquad (57)
\end{aligned}$$

Напомним, что у векторных множителей при степенях параметра h с нечетными показателями равна нулю третья компонента, а с четными показателями — первые две. Построения из разд. 4 показывают, что $I^h_2 = I^h_3 = I^h_4 = 0$. Кроме того,

$$\bigl|\bigl(I^h_1, \psi^h\bigr)_{\bowtie^h_H}\bigr| \leq c_1 h^{-q} e^{-\gamma\sqrt{\pi^2 - \mu^{-1}M_1}/h}.$$

Здесь учтено неравенство (56) для пробной функции ψ^h, экспоненциальное затухание функций w_1, W_j и V_3 на бесконечности в треноге $\mathbb{Y}$, а также расположение носителей производных срезки (26). Аналогичные соображения обеспечивают при $p = 5, 6$ оценки

$$\begin{aligned}
\bigl|\bigl(I^h_p, \psi^h\bigr)_{\bowtie^h_H}\bigr| &\leq c_p h\Biggl(\int\limits_{\bowtie^h_H}\Bigl\{1 + |\eta|^4 + \sum_{\alpha=0,\pm}\rho_\alpha^{2(\phi-1)}\Bigr\}e^{-2\sqrt{\pi^2-\mu^{-1}M_1}|\eta|}\,dx\Biggr)^{1/2} \\
&\qquad \times \bigl\|\psi^h; L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\| \leq C_p h^3.
\end{aligned}$$

Дополнительный весовой множитель, выделенный фигурными скобками, возник по причине искажения представлений (21) и (22) для функций W_1, W_2 и V_3 на бесконечности, упомянутого в разд. 3 перед теоремой 2. Он, разумеется, не влияет на сходимость интеграла по ячейке $\bowtie^h_H$, который приобретает порядок h^2 ввиду быстрого экспоненциального затухания подынтегрального выражения. Наконец, верны оценки

$$\left|\left(I^h_7,\psi^h\right)_{\bowtie^h_H}\right| \le c_p h^3 \quad \text{и} \quad \left|\left(I^h_8,\psi^h\right)_{\bowtie^h_H}\right| \le c_p h^{7/2}.$$

Первая выполнена согласно построениям из разд. 4, в силу которых после применения оператора $L(\nabla_x) - h^{-2}M^{\odot}_1$ остается вектор-функция, зависящая полиномиально от h и гладко от z, а также исчезающая с экспоненциальной скоростью при $|\eta| \to +\infty$, а вторая — по причине экспоненциального затухания на бесконечности решения Z^W задачи (36) в трехмерной области Ξ: коммутирование со срезкой χ_H дает вклад $O(he^{-\beta H/3h})$, а умножение на κ — вклад $O(hh^{3/2}h)$.

При учете нормировок собственных функций w_1 и v_n выводим еще и соотношение

$$\|\mathbf{v}^h;\mathscr{H}^h\|^2 = \mu\|\nabla_\eta w_1; L^2(\mathbb{Y})\|^2\|v_n; L^2(0,H)\|^2 + O(h) = M^{\odot}_1 + O(h).$$

Таким образом, $\|\mathbf{v}^h;\mathscr{H}^h\| \ge \left(M^{\odot}_1\right)^{1/2}/2$ при малом h. Вспомним порядок h^2 еще одного сомножителя (53) в последнем выражении для величины (55). В итоге обнаруживаем, что эта величина удовлетворяет неравенству

$$\boldsymbol{\delta}^h_{n\ell/\wp}(\theta) \le c_n h^5.$$

Теперь лемма 2 предоставляет собственные числа $\tau^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta)$ оператора $\mathscr{T}^h(\theta)$ и $\Lambda^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta) = \tau^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta)^{-1}$ задачи (6)–(8), подчиненные неравенствам

$$\begin{aligned}&\left|\tau^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta) - \mathbf{t}^h_{n,\ell/\wp}(\theta)\right| \le c_n h^5\\ &\qquad\Rightarrow \left|\Lambda^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n\right| \le c_n h^3(M_1 + h^2\kappa_n)\Lambda^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta).\end{aligned} \tag{58}$$

Последняя оценка гарантирует, что

$$\frac{1}{2}\Lambda^h_{N^h_{n,\ell/\wp}}(\theta) \le h^{-2}M_1 + \kappa_n$$

при $c_n h^3(M_1 + h^2\kappa_n) \le \frac{1}{2}$. В результате превращаем неравенство (58) в такое:

$$\left|\Lambda^h_{N^h_{n,\ell/\wp}(\theta)}(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_n\right| \le 2c_n h(M_1 + h^2\kappa_n)^2. \tag{59}$$

Сформулируем финальное утверждение, доказательство которого будет закончено в очередном разделе.

Теорема 5. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные величины h_k и C_k, что при $h \in (0, h_k]$ и любом $\theta \in [0, 2\pi]^2$ для членов $\Lambda^h_{2k-1}(\theta)$ и $\Lambda^h_{2k}(\theta)$ последовательности* (5) *собственных чисел задачи* (6)–(8) *выполнено неравенство*

$$\left|\Lambda^h_q(\theta) - h^{-2}M_1 - \kappa_k\right| \le C_k h \quad \text{при} \quad q = 2k-1, 2k. \tag{60}$$

7. Утверждение о сходимости и доказательство теоремы 5. Сначала убедимся в том, что найдутся два (ℓ и $\wp$) разных собственных числа, удовлетворяющих соотношению (59) — воспользуемся второй частью леммы 2. Введем какой-либо множитель $\varrho > 1$ в формулу

$$\boldsymbol{\delta}^h_{*n\ell/\wp}(\theta) = \varrho\boldsymbol{\delta}^h_{n\ell/\wp}(\theta). \tag{61}$$

Через $\mathbf{c}^h_{(n\ell/\wp)} \in {}^{\mathscr{X}^h_n(\theta)}$ и $\mathbf{S}^h_{n\ell/\wp} \in \mathscr{H}^h(\theta)$ обозначим пары столбцов и линейных комбинаций собственных векторов оператора $\mathscr{T}^h(\theta)$, предоставленные формулой (51). Условия ортогональности и нормировки (52) показывают, что

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl(\mathbf{c}^h_{(n\ell)}, \mathbf{c}^h_{(n\wp)}\bigr)_{\mathbb{R}^{\mathscr{X}^h_n(\theta)}}\bigr| = \bigl|\bigl\langle \mathbf{S}^h_{n\ell}, \mathbf{S}^h_{n\wp}\bigr\rangle\bigr| \le \bigl|\bigl\langle \mathbf{S}^h_{n\ell} - \mathbf{U}^h_{n\ell}, \mathbf{S}^h_{n\wp}\bigr\rangle\bigr| \\ + \bigl|\bigl\langle \mathbf{U}^h_{n\ell}, \mathbf{S}^h_{n\wp} - \mathbf{U}^h_{n\wp}\bigr\rangle\bigr| + \bigl|\bigl\langle \mathbf{U}^h_{n\ell}, \mathbf{U}^h_{n\wp}\bigr\rangle\bigr| \le 2\rho^{-1} + 2\rho^{-1} + 0.\end{aligned}$$

Последний нуль возник потому, что носители вектор-функций $\mathbf{U}^h_{n\ell}$ и $\mathbf{U}^h_{n\wp}$ не пересекаются (см. определение срезок (26)). При большом ϱ столбцы $\mathbf{c}^h_{(n\ell)}$ и $\mathbf{c}^h_{(n\wp)}$ «почти ортогональны», что возможно только в случае $\mathscr{X}^h_n(\theta) \ge 2$. Зафиксируем подходящий множитель ϱ в формуле (61).

Итак, оценка (59) с увеличенной в ϱ раз мажорантой (несущественное ее изменение) выполнена по крайней мере для двух членов последовательности (5). Теперь проверим, что такой оценке удовлетворяют только собственные числа $\Lambda^h_{2n-1}(\theta)$ и $\Lambda^h_{2n}(\theta)$.

Заметим, что по доказанному к настоящему моменту верны неравенства

$$\begin{aligned}\Lambda^h_{2n-1}(\theta) \le \Lambda^h_{2n}(\theta) \le \max_{\ell,\wp}\bigl\{\Lambda^h_{N^h_{n\ell/\wp}(\theta)}(\theta)\bigr\} \\ \le h^{-2}M_1 + \kappa_n + 2\varrho c_n h(M_1 + h^2\kappa_n)^2 \le h^{-2}M_1 + C_n. \quad (62)\end{aligned}$$

Таким образом, для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 2\pi]^2$ найдется положительная бесконечно малая последовательность $\bigl\{h^{(n)}_m(\theta)\bigr\}_{m\in\mathbb{N}}$, вдоль которой имеют место сходимости (индекс n и аргумент θ по обычаю не пишем)

$$\Lambda^h_q - h^{-2}M_1 \to \widehat{\kappa}_q \text{ при } h \to +0, \quad \text{где } q = 2n-1, 2n. \quad (63)$$

Определим следующие функции переменной $z \in (0, H)$ и вектор-функции переменных $(\eta^{\ell/\wp}, z) \in \mathbb{Y} \times (0, H)$:

$$W^{h\ell/\wp}_{q3}(z;\theta) = h\int_{\mathbb{Y}} w_1(\eta)\chi_{\ell/\wp}(y)U^h_{(q)3}(\mathscr{O}^{\ell/\wp} \pm h\eta^{\ell/\wp}, z)\,d\eta^{\ell/\wp}, \quad (64)$$

$$W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp}(\eta^{\ell/\wp}, z;\theta) = h\chi_{\ell/\wp}(y)U^h_{(q)}(\mathscr{O}^{\ell/\wp} \pm h\eta^{\ell/\wp}, z;\theta) - e_{(3)}w_1(\eta^{\ell/\wp})W^{h\ell/\wp}_{q3}(z;\theta). \quad (65)$$

Здесь $\chi_{\ell/\wp}$ — срезки (26), $U^h_{(q)}$ — нормированная в пространстве $L^2(\bowtie^h \times (0,H))^3$ собственная вектор-функция задачи (6)–(8), а знаки плюс и минус отвечают индексам ℓ и $\wp$ соответственно. Далее аргумент θ не пишем. Понятно, что выполнены краевые условия

$$W^{h\ell/\wp}_{q3}(0) = W^{h\ell/\wp}_{q3}(H) = 0. \quad (66)$$

Благодаря весовой оценке (15) и ограничению (26) несложные преобразования, порождающие экспоненциально малые погрешности, превращают интегральное тождество (12), в котором фигурируют пара $\bigl\{\Lambda^h_q; U^h_{(q)}\bigr\}$ и пробная вектор-функция $\Psi^h = \chi^2_{\ell/\wp}U^h_{(q)}$, в соотношение

$$\begin{aligned}\mu\bigl\|\partial_z\bigl(\chi_{\ell/\wp}U^h_{(q)}\bigr); L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 \\ \le \Lambda^h_q\bigl\|\chi_{\ell/\wp}U^h_{(q)}; L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 - \mu\bigl\|\nabla_y\bigl(\chi_{\ell/\wp}U^h_{(q)}\bigr); L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \\ \le \bigl(\Lambda^h_q - M_1h^{-2}\bigr)\bigl\|\chi_{\ell/\wp}U^h_{(q)}; L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \\ \le C_q\bigl\|U^h_{(q)}; L^2\bigl(\bowtie^h_H\bigr)\bigr\|^2 + c_q e^{-\beta_q/h} \le \mathbf{C}_q. \quad (67)\end{aligned}$$

Величины $c_q e^{-\beta_q/h}$ учитывают невязки, возникающие вследствие коммутирования градиент-оператора ∇_x со срезками $\chi_{\ell/\wp}$, неотрицательное слагаемое $(\lambda+\mu)\big\|\nabla_y\cdot\big(\chi_{\ell/\wp}U^h_{(q)}\big);L^2(\bowtie^h_H)\big\|^2$ из квазиэнергии (11) отброшено за ненадобностью, а в конце цепочки использовано первое неравенство в списке (25).

Вектор-функция (65) при всех $z\in(0,H)$ удовлетворяет условию ортогональности

$$\big(W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp 3},w_1\big)_{\mathbb{Y}}=0, \tag{68}$$

а значит, из второго и третьего неравенств (25) вытекает, что

$$\int\limits_0^H\big\|\nabla_\eta W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp 3}(\cdot;z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz\ge\pi^2\int\limits_0^H\big\|W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp 3}(\cdot;z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz,$$

$$\int\limits_0^H\big(\mu\big\|\nabla_\eta W^{h\ell/\wp\prime}_{(q)\perp}(\cdot;z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2+(\lambda+\mu)\big\|\nabla_\eta\cdot W^{h\ell/\wp\prime}_{(q)\perp}(\cdot;z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\big)\,dz$$
$$\ge(M_1+d_{\mathbb{Y}})\int\limits_0^H\big\|W^{h\ell/\wp\prime}_{(q)\perp}(\cdot;z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz. \tag{69}$$

Напомним, что $d_{\mathbb{Y}}>0$. По той же причине (68) имеем

$$\int\limits_{\bowtie^h_H}\big|\chi_{\ell/\wp}(y)U^h_{(q)}(x)\big|^2\,dx=h^2\int\limits_0^H\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|\chi_{\ell/\wp}(y)U^h_{(q)}(x)\big|^2\,d\eta dz$$
$$=\int\limits_0^H\big|W^{h\ell/\wp}_{q3}(z)\big|^2\,dz+\int\limits_0^H\big\|W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp}(\cdot,z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz,$$

$$\mu h^2\int\limits_0^H\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|\chi_{\ell/\wp}(y)\partial_z U^h_{(q)}(x)\big|^2\,d\eta dz$$
$$=\mu\int\limits_0^H\big|\partial_z W^{h\ell/\wp}_{q3}(z)\big|^2\,dz+\mu\int\limits_0^H\big\|\partial_z W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp}(\cdot,z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz, \tag{70}$$

$$\mu h^2\int\limits_0^H\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|\nabla_y(\chi_{\ell/\wp}(y)U^h_{(q)3}(x))\big|^2\,d\eta dz=\mu\int\limits_{\mathbb{Y}}|\nabla_\eta w_1(\eta)|^2\,d\eta\int\limits_0^H\big|W^{h\ell/\wp}_{q3}(z)\big|^2\,dz$$
$$+\mu\int\limits_0^H\int\limits_{\mathbb{Y}}\big|\nabla_\eta W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp 3}(\eta,z)\big|^2\,d\eta dz+2\mu\int\limits_0^H\int\limits_{\mathbb{Y}}W^{h\ell/\wp}_{q3}(z)\nabla_\eta w_1(\eta)\cdot\nabla_\eta W^{h\ell/\wp}_{(q)\perp 3}(\eta,z)\,d\eta dz$$
$$=M_1\big\|W^{h\ell/\wp}_{q3};L^2(0,H)\big\|^2+\mu\big\|\nabla_\eta W^{h\ell/\wp}_{q\perp 3};L^2(\mathbb{Y}\times(0,H))\big\|^2.$$

Последний интеграл обратили в нуль при помощи интегрирования по частям, формулы $-\mu\Delta_\eta w_1=M_1w_1$ и условия ортогональности (68).

Из соотношений (70), (67) и (9), (66) вытекает, что вдоль разреженной последовательности $\{h_m^{(n)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ (сохраняем то же обозначение, что и в (63)) имеет место сходимость

$$W_{q3}^{h\ell/\wp} \to \widehat{v}_q^{\ell/\wp} \quad \text{слабо в} \quad H_0^1(0,H) \quad \text{и сильно в} \quad L^2(0,H). \tag{71}$$

С целью проверить предельный переход для вектор-функции (65)

$$W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp} \to 0 \quad \text{сильно в} \quad L^2(\mathbb{Y}\times(0,H))^3 \tag{72}$$

придадим уже использованному в формуле (67) интегральному тождеству такой вид:

$$\mu\big\|\nabla_y\big(\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime}\big);L^2(\bowtie_H^h)\big\|^2+(\lambda+\mu)\big\|\nabla_y\cdot\big(\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime}\big)+\chi_{\ell/\wp}\partial_z U_{(q)3}^h;L^2(\bowtie_H^h)\big\|^2$$
$$-\Lambda_q^h\big\|\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime};L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2+\mu\big\|\nabla_y\big(\chi_{\ell/\wp}U_{(q)3}^h\big);L^2(\bowtie_H^h)\big\|^2-\Lambda_q^h\big\|\chi_{\ell/\wp}U_{(q)3}^h;L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2$$
$$\le-\mu\big\|\chi_{\ell/\wp}\partial_z U_{(q)}^h;L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2+c_q e^{-\beta_q/h}\le c_q.$$

В силу простого алгебраического соотношения $(a+b)^2\ge(1-\varepsilon)a^2-(\varepsilon^{-1}-1)b^2$ с произвольным $\varepsilon>0$, неравенств (69) и первой формулы (70) выводим, что левая часть превосходит величину

$$0\ge\mu\big\|\nabla_y\big(\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime}\big);L^2(\bowtie_H^h)\big\|^2+(1-\varepsilon)(\lambda+\mu)\big\|\nabla_y\cdot(\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime});L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2$$
$$-\Lambda_q^h\big\|\chi_{\ell/\wp}U_{(q)}^{h\prime};L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2-(\varepsilon^{-1}-1)(\lambda+\mu)\big\|\chi_{\ell/\wp}\partial_z U_{(q)3}^h;L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2$$
$$+\big(M_1h^{-2}-\Lambda_q^h\big)\big\|W_{(q)3}^{h\ell/\wp};L^2(0,H)\big\|^2+\big(\mu\pi^2h^{-2}-\Lambda_q^h\big)\big\|W_{(q)\perp3}^{h\ell/\wp};L^2(\mathbb{Y}\times(0,H))\big\|^2$$
$$\ge\frac{1-\varepsilon}{h^2}\int_0^H E'\big(W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp\prime}(\cdot,z),W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp\prime}(\cdot,z);\mathbb{Y}\big)\,dz$$
$$-\Lambda_q^h\int_0^H\big\|W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp\prime}(\cdot,z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\,dz-C_q\big\|W_{(q)3}^{h\ell/\wp};L^2(0,H)\big\|^2$$
$$+\left(\frac{\mu\pi^2-M_1}{h^2}-C_q\right)\big\|W_{(q)\perp3}^{h\ell/\wp};L^2(\mathbb{Y}\times(0,H))\big\|^2-\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)(\lambda+\mu)\mathbf{C}_q$$
$$\ge\frac{1}{h^2}\int_0^H\Big(\big\{(M_1+d_{\mathbb{Y}})(1-\varepsilon)-h^2\Lambda_q^h\big\}\big\|W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp\prime}(\cdot,z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2$$
$$+\{\mu\pi^2-M_1-C_qh^2\}\big\|W_{(q)\perp3}^{h\ell/\wp\prime}(\cdot,z);L^2(\mathbb{Y})\big\|^2\Big)\,dz-C_q-(\varepsilon^{-1}-1)(\lambda+\mu)\mathbf{C}_q.$$

В силу ограничения (62) число $\varepsilon>0$ можно выбрать так, чтобы первый коэффициент, выделенный фигурными скобками, стал больше $c_{\mathbb{Y}}>0$ при $h\in(0,h_{\mathbb{Y}}]$ и некотором $h_{\mathbb{Y}}>0$. Второй такой коэффициент положителен, поскольку $M_1<\mu\pi^2$ (см. разд. 3). Следовательно, выполнено неравенство

$$\big\|W_{(q)\perp}^{h\ell/\wp};L^2(\mathbb{Y}\times(0,H))\big\|^2\le c_q'h^2,$$

влекущее за собой сходимость (72), причем предельный переход (71) и условие нормировки (9) собственной вектор-функции $U_{(q)}^h$ показывают, что

$$\sum_{\tau=\ell/\wp}\big\|\widehat{v}_q^{\tau};L^2(0,H)\big\|^2=1. \tag{73}$$

Теперь возьмем какую-либо функцию $\varphi \in C_c^\infty(0,H)$ и в интегральное тождество (12) для пары $\{\Lambda_q^h; U_{(q)}^h\}$ подставим имитирующую асимптотический анзац (28) пробную вектор-функцию

$$\Psi^h(x) = h\chi_{\ell/\wp}(y)(e_{(3)}w_1(\eta^{\ell/\wp})\varphi(z) + hW(\eta^{\ell/\wp})\partial_z\varphi(z) + h^2V(\eta^{\ell/\wp}, z)),$$

В отличие от разд. 4 компонента V_3 последнего члена находится из задачи

$$\begin{aligned} -\mu\Delta_\eta V_3(\eta;z) - M_1V_3(\eta;z) \qquad\qquad& \\ = (\lambda+\mu)\nabla_\eta\cdot W'(\eta)\partial_z^2\varphi(z) + w_1(\eta)(\lambda+2\mu-b)\partial_z^2\varphi(z), &\quad \eta\in\mathbb{Y}, \\ V_3(\eta;z)=0, \quad \eta\in\partial\mathbb{Y},& \end{aligned}$$

В силу формулы (33) для коэффициента b такая задача имеет решение, но модификация анзаца имеет следующее последствие: в соответствии с проведенными в разд. 4 вычислениями упомянутое интегральное тождество переписывается в виде

$$\begin{aligned} 0 = h\big(U_{(q)}^h, \big(L(\nabla_x) - \Lambda_q^h\big)(\chi_{\ell/\wp}(e_{(3)}w_1\varphi + hW\partial_z\varphi + h^2V)\big)_{\bowtie_H^h} \\ = h^{-1}\big(\chi_{\ell/\wp}U_q^h, w_1\big(b\partial_z^2\varphi + \big(\Lambda_q^h - h^{-2}M_1\big)\varphi\big)\big)_{\bowtie_H^h} + O(1). \end{aligned} \tag{74}$$

Согласно сходимостям (63) и (71), (72) предельный переход $h\to+0$ в формуле (74) превращает ее в соотношение

$$\big(\widehat{v}_q^{\ell/\wp}, b\partial_z^2\varphi + \widehat{\kappa}_q\varphi\big)_{(0,H)} = 0 \quad \forall\varphi\in C_c^\infty(0,H).$$

Отсюда при учете равенства (73) выводим нужное утверждение.

Лемма 3. *При ограничении* (62) *предельные переходы* (63) *и* (71) *дают собственную пару хотя бы одного из двух* (ℓ *и* $\wp$) *экземпляров задачи* (31), (32).

Теперь можно завершить проверку теоремы 5. Соотношение (62) обеспечивает неравенство $\max\{N_{n\ell/\wp}^h(\theta)\} \ge 2n$. Если случилось, что один из индексов $N_{n\ell/\wp}^h(\theta)$ строго больше $2n$ при каких-нибудь $\theta\in[0,2\pi]^2$ и последовательности $\{h_n(\theta)\}_{n\in\mathbb{N}}$, стремящейся к $+0$, то на сегменте $\mathscr{J}_n^{h_n(\theta)} := [0, h_n(\theta)^{-2}M_1 + \kappa_n + C_kh_n(\theta)]$ найдется собственное число $\Lambda_\#^{h_n(\theta)}$ (как обычно, индекс n и аргумент θ далее не пишем), у которого собственная вектор-функция $U_{(\#)}^h$ ортогональна в $L^2\big(\bowtie_H^h\big)^3$ не менее $2n$ собственным вектор-функциям той же задачи (6)–(8), отличающимся от $U_{(\#)}^h$, но отвечающим собственным числам из сегмента $\mathscr{J}^h$. Предельные переходы (63) и (71) предоставляют спектральную пару $\{\kappa_\#; v_\#\}\in[0,\kappa_n]\times H_0^1(0,H)$ задачи (31), (32), причем сильные L^2-сходимости (71) и (72) гарантируют, что $v_\#$ ортогональна функциям $v_1,\dots,v_n$ из списка (35). Это, разумеется, невозможно, т. е. теорема 5 доказана в полном объеме.

8. Лакунарное строение спектра. Теорема 5 показывает, что спектральные сегменты $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ располагаются около точек

$$h^{-2}M_1 + \pi^2bH^{-2}k^2 + O(h), \tag{75}$$

однако она дает неправильную — степенну́ю — оценку для их длин. Следующее утверждение, опирающееся на теорему 1, показывает, в частности, что эти длины экспоненциально малы.

Теорема 6. *Для любого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные h_k и C_k, что при $h \in (0, h_k]$ длины $\mathscr{L}_k^h$ сегментов $\Sigma_{2k-1}^h = \Sigma_{2k}^h$ удовлетворяют неравенству*

$$\mathscr{L}_k^h \leq 2C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \tag{76}$$

где $\beta = \beta_d > 0$ — показатель, предоставленный теоремой 1, например, при $d = (\mu\pi^2 - M_1)/2$.

Доказательство. В условиях теоремы 1 для собственных чисел (5) проверим оценку

$$\left|\Lambda_k^h(\theta) - \Lambda_k^h(0)\right| \leq C_k h^{-2} e^{-\beta/h}, \tag{77}$$

из которой сразу же вытекает искомая формула (76). Подчеркнем, что в силу асимптотической формулы (60) при малом h ограничение (14) выполнено при любом $d \in (0, \mu\pi^2 - M_1)$.

Применим максиминимальный принцип (см. [20; теорема 10.2.2]) для оператора задачи (6)–(8)

$$\Lambda_p^h(\theta) = \max_{\mathscr{E}_p(\theta)} \inf_{\Psi^h(\cdot;\theta) \in \mathscr{E}_p(\theta)\setminus\{0\}} \frac{E\big(\Psi^h(\cdot;\theta), \Psi^h(\cdot;\theta); \bowtie_H^h\big)}{\big\|\Psi^h(\cdot;\theta); L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2},$$

в котором $\mathscr{E}_p(\theta)$ — любое подпространство в $H_{0,\theta}^1\big(\bowtie_H^h\big)^3$ с коразмерностью $p-1$.

Зафиксируем два параметра Флоке θ^1 и θ^2 в квадрате $[0, 2\pi]^2$. Произведения $Z_{(j)}^h(x; \theta^1) = \chi(y) U_{(j)}^h(x; \theta^1)$, $j = 1, \ldots, p$, собственных вектор-функций $U_j^h(\cdot; \theta^1)$ и суммы $\chi = \chi_\ell + \chi_\wp$ срезок (26) аннулируются около торцов $\mathbb{I}_{H\ell/\wp\pm}^{h\pm}$ ячейки и потому попадают в пространство $H_{0,\theta}^1\big(\bowtie_H^h\big)^3$ при любом параметре Флоке θ. Более того, в силу экспоненциальной весовой оценки (15) они подчинены неравенствам

$$\left|\big(Z_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), Z_{(m)}^h(\cdot; \theta^1)\big)_{\bowtie_H^h} - \delta_{j,m}\right| \leq c_p^0 e^{-\beta/h},$$

$$\left|E\big(Z_{(j)}^h(\cdot; \theta^1), Z_{(m)}^h(\cdot; \theta^1); \bowtie_H^h\big) - \delta_{j,m}\Lambda_j^h(\theta^1)\right| \leq c_p^1 h^{-2} e^{-\beta/h}, \quad j, m = 1, \ldots, p,$$

и сохраняют линейную независимость. Таким образом, в любом подпространстве $\mathscr{E}_p^h(\theta^2)$ (сменили параметр Флоке), имеющем коразмерность $p-1$, находим линейную комбинацию

$$\mathscr{Z}_{\mathscr{E}_p^h(\theta^2)}^h(x) = \sum_{j=1}^p \mathscr{C}_j^h(\theta^2) Z_{(j)}^h(x), \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^p \left|\mathscr{C}_j^h(\theta^2)\right|^2 = 1.$$

В силу приведенных формул дробь Рэлея удовлетворяет соотношению

$$\frac{E\big(\mathscr{Z}_{\mathscr{E}_p^h(\theta^2)}^h, \mathscr{Z}_{\mathscr{E}_p^h(\theta^2)}^h; \bowtie_H^h\big)}{\big\|\mathscr{Z}_{\mathscr{E}_p^h(\theta^2)}^h; L^2\big(\bowtie_H^h\big)\big\|^2} \leq \frac{\sum\limits_{j=1}^p \left|\mathscr{C}_j^h(\theta^2)\right|^2 \Lambda_j^h(\theta^1) + c_p^1 p^2 h^{-2} e^{-\beta/h}}{\sum\limits_{j=1}^p \left|\mathscr{C}_j^h(\theta^2)\right|^2 - c_p^0 p^2 e^{-\beta/h}}$$

$$\leq \Lambda_p^h(\theta^1) + C_p h^{-2} e^{-\beta/h}. \tag{78}$$

Для проверки оценки (77), а вместе с ней и оценки (76) нужно в неравенстве (78) поменять местами параметры θ^1 и θ^2, а затем положить $\theta^1 = \theta$ и $\theta^2 = 0$. Теорема 6 доказана.

Установленные асимптотические формулы означают, что в низкочастотном диапазоне спектра (3) зоны прохождения волн (4) располагаются около точек (75), но имеют экспоненциально малые длины, а между парами $\Sigma^h_{2k-1} = \Sigma^h_{2k}$ и $\Sigma^h_{2k+1} = \Sigma^h_{2k+2}$ спектральных сегментов раскрыта лакуна шириной $\pi^2 bH^{-2}(2k+1)$. При этом зоны торможения волн оказываются значительно более широкими, что в значительной степени препятствует распространению упругих волн в тонкостенной сотовой конструкции $\boxtimes^h_H$.

9. Разное. 1°. Размеры спектральных сегментов. Теорема 5 с приемлемой точностью $O(h)$ устанавливает положение сегментов (4), однако такая точность не дает правильного представления об их длинах. В принципе продолжение процедуры построения асимптотики из разд. 4 позволяет соорудить разложение собственных чисел в ряды по степеням малого параметра h, что все-таки не позволяет вычислить экспоненциально малую величину $\mathscr{L}^h_k$ (см. теорему 6). Таким образом, построение асимптотики длин спектральных сегментов остается открытым вопросом. Кроме того, из-за присутствия в сумме (57) членов степенно́го порядка малости безразличен выбор величины $\gamma \in (0, 1/2)$ в формуле (26) для срезок $\chi_{\ell/\wp}$, вообще говоря, влияющий на экспоненциальную точность использованных асимптотических приближений.

2°. Постановка краевых условий в предельной задаче. Краевые условия (32) были назначены в концах отрезка $(0, H) \ni z$ по причине условий Дирихле (7) на основаниях $\bowtie^h \times \{0\}$ и $\bowtie^h \times \{H\}$ ячейки $\bowtie^h_H$, но также подтверждены предельным переходом (71) в равенствах (68). Вместе с тем асимптотический анализ многих задач в тонких областях связывает краевые условия в предельной задаче с явлением порогового резонанса [37, 11, 38] в задаче (36) о пограничном слое около торцов призм $\Upsilon^h_{H\ell/\wp} := \triangle^h_{\ell/\wp} \times (0, H)$. Говоря приблизительно, пороговый резонанс возникает при наличии у названной задачи нетривиального ограниченного решения, причем в этом случае предельное уравнение (31) следует снабдить краевыми условиями Неймана. Однако классический прием [39], приспособленный к задаче Дирихле для системы Ламе (см. [40, 22, 23] и др.), доказывает отсутствие у задачи (36) не только порогового резонанса, но и точечного спектра. В итоге постановка условий Дирихле (32) приобретает и обсуждаемый способ обоснования.

3°. Условия свободного края. Как упоминалось в замечании 1, смена типа краевых условий на боковой поверхности $\partial \bowtie^h \times (0, H)$ ячейки периодичности коренным образом изменяет свойства пограничного слоя и, как следствие, требует полной перестройки асимптотических анзацев для собственных пар $\{\Lambda^h(\theta); U^h(\cdot; \theta)\}$. Вместе с тем вполне разумны сужение условий Дирихле в смещениях (2) на объединение боковых поверхностей ячеек $\{x \in \partial\boxtimes^h_H : z \in (0, H)\}$ и постановка на основаниях сотового слоя условий Неймана в напряжениях (см., например, [15]):

$$2\mu \frac{\partial u^h_3}{\partial z}(y, z) + \lambda \nabla_x \cdot u^h(y, z) = 0,$$

$$\mu\left(\frac{\partial u^h_j}{\partial z}(y, z) + \frac{\partial u^h_3}{\partial y_j}(y, z)\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ y \in \bowtie^h, \ z = 0, H.$$

В этом случае задачи (18) и (19) для пограничного слоя около ребер $\Upsilon^h_{H\ell/\wp}$ ячейки $\bowtie^h_H$ сохраняются полностью, а асимптотический анализ из разд. 4 предоставляет обыкновенное дифференциальное уравнение (31) на отрезке $(0, H) \ni z$.

Вместе с тем краевые условия на границе полубесконечной призмы Ξ_+ также становятся смешанными, но никакой информации о спектре подобных задач теории упругости в слоевидных областях до сих пор нет. Поэтому вид краевых условий для уравнения (31) пока остается неизвестным. Более того, при наличии дискретного спектра в задаче на Ξ возникает явление околовершинной локализации собственных (вектор)-функций (см. [41, 42] и др.), т. е. асимптотические анзацы для собственных пар становятся совершенно другими.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гельфанд И. М.* Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
2. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т. 3. Теория рассеяния. М.: Мир, 1982.
3. *Кучмент П. А.* Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.
4. *Скриганов М. М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1985. Т. 171. С. 1–122.
5. *Kuchment P.* Floquet theory for partial differential equations. Basel: Birchäuser, 1993.
6. *Geim A. K., Novoselov K. S.* The rise of graphene // Nature materials. 2007. V. 6, N 3. P. 183–191.
7. *Geim A. K.* Graphene: status and prospects // Science. 2009. V. 324, N 5934. P. 1530–1534.
8. *Pauling L.* The diamagnetic anisotropy of aromatic molecules // J. Chem. Phys. 1946. V. 4. P. 673–677.
9. *Kuchment P. A., Zeng H.* Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 258. P. 671–700.
10. *Exner P., Post O.* Convergence of spectra of graph-like thin manifolds // J. Geom. Phys. 2005. V. 54, N 1. P. 77–115.
11. *Grieser D.* Spectra of graph neighborhoods and scattering // Proc. London Math. Soc. 2008. V. 97, N 3. P. 718–752.
12. *Post O.* Spectral analysis on graph-like spaces. Heidelberg: Springer, 2012. (Lecture Notes in Mathematics; V. 2039).
13. *Kuchment P. A., Post O.* On the spectra of carbon nano-structure // Commun. Math. Phys. 2007. V. 275, N 3. P. 805–826.
14. *Nazarov S. A., Ruotsalainen K., Uusitalo P.* Asymptotics of the spectrum of the Dirichlet Laplacian on a thin carbon nano-structure // C. R. Mecanique. 2015. V. 343. P. 360–364.
15. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
16. *Nazarov S. A., Ruotsalainen K., Uusitalo P.* The Y-junction of quantum waveguides // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94, N 6. P. 477–486.
17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
18. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
19. *Лионс Ж.-Л., Madженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
20. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
21. *Камоцкий И. В., Назаров С. А.* О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Научн. книга, 1999. Т. 18. С. 105–148.
22. *Назаров С. А.* Упругие волны, захваченные полубесконечной полосой с защемленными боковыми сторонами и изломанным торцом // Прикл. математика и механика. 2023. Т. 87, № 2. С. 265–279.
23. *Назаров С. А.* Собственные колебания упругой полуполосы при различном расположении участков фиксации ее краев // Акустический журн. 2023. Т. 69, № 4. С. 398–409.
24. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.
25. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

26. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.

27. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.

28. *Назаров С. А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.

29. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Успехи мат. наук. 1964. Т. 19, № 3. С. 53–161.

30. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

31. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений. I. // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.

32. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

33. *Agmon S., Nirenberg L.* Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space // Commun. Pure. Appl. Math. 1963. V. 16, N ?. P. 121–239.

34. *Pazy A.* Asymptotic expansions of solutions of ordinary differential equations in Hilbert space // Arch. Rational Mech. Anal. 1967. V. 24, N ?. P. 193–218.

35. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1978. V. 77, N 1. P. 25–82.

36. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

37. *Molchanov S., Vainberg B.* Scattering solutions in networks of thin fibers: small diameter asymptotics // Commun. Math. Phys. 2007. V. 273, N 2. P. 533–559.

38. *Назаров С. А.* Пороговые резонансы и виртуальные уровни в спектре цилиндрических и периодических волноводов // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 6. С. 3–60.

39. *Rellich F.* Über das asymptotische Verhalten der Lösungen $\Delta u + \lambda u = 0$ von in unendlichen Gebieten // Jahresber. Deutsch. Math.-Verl. 1943. V. 53, N 1. P. 57–65.

40. *Назаров С. А.* Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 11. С. 99–130.

41. *Назаров С. А.* Лакуны в спектре тонкостенного прямоугольного бесконечного короба Дирихле с периодическим семейством перегородок // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 7. С. 91–133.

42. *Назаров С. А.* Разные типы локализации собственных функций скалярных смешанных краевых задач в тонких многогранниках // Уфимск. мат. журн. 2025. Т. 17, № 1. С. 25–61.

Поступила в редакцию 4 мая 2025 г.
После доработки 12 марта 2026 г.
Принята к публикации 12 марта 2026 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)
Институт проблем машиноведения РАН,
ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov108@gmail.com, serna108@mail.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.951

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

А. Л. Павлов

Аннотация. Рассмотрены преобразование Лапласа обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве, его свойства, теорема обращения и применение для построения слабых обобщенных решений задачи Коши для линейных уравнений соболевского типа с постоянными коэффициентами в классе функций, растущих на бесконечности.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.308

Ключевые слова: преобразование Лапласа, обобщенная функция медленного роста, задача Коши, уравнение соболевского типа.

Посвящается Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его семидесятилетием

1. Введение

Преобразование Лапласа широко используется при исследовании дифференциальных уравнений и связанных с ними задач, в частности, задачи Коши. Статья Ю. И. Любича [1] является убедительным подтверждением тому.

Задаче Коши для уравнений соболевского типа посвящено много работ (см. [2–4] и литературу в них). Работ, в которых рассматривалась разрешимость задачи Коши для уравнений соболевского типа с постоянными коэффициентами в классах функций, растущих на бесконечности, сравнительно немного (см. [5–11] и литературу в них).

В настоящей работе преобразование Лапласа обобщенных функций применяется для построения обобщенного решения задачи Коши

$$P(D_x, \partial_t)u \equiv \sum_{k=0}^{m} P_k(D_x)\partial_t^k u = f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0, \tag{1.1}$$

$$\partial_t^k u\big|_{t=0} = g_k, \quad k = 0, \dots, m-1, \tag{1.2}$$

где

$$D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n}), \quad D_{x_k} = -i\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad P_k(\sigma), \quad k = 0, \dots, m,$$

— многочлены с комплексными коэффициентами.

Предполагается, что многочлен $P_m(\sigma)$ имеет вещественные нули, т. е. уравнение (1.1) является уравнением соболевского типа. Так называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной. Исследование задач для таких уравнений начато С. Л. Соболевым в [12].

Обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) называют семейство обобщенных функций $u(t)$, $t \geq 0$, гладко зависящее от t и удовлетворяющее (1.1), (1.2) в обобщенном смысле [13]:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{d^k(P_k(D_x)u(t), \varphi)}{dt^k} = (f, \varphi), \quad \left.\frac{d^k(u(t), \varphi)}{dt^k}\right|_{t=0} = (g_k, \varphi), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

где φ — произвольная функция основного пространства. Такое решение будем называть *сильным обобщенным решением* задачи Коши (1.1), (1.2).

Слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2) будем называть обобщенную функцию u в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n+1} = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0\}$, удовлетворяющую уравнению

$$P(D_x, \partial_t)u = f + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(D_x) g_k \otimes \delta_t^{(j)}, \tag{1.3}$$

где f — обобщенная функция в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathbb{R}}_{+}^{n+1}$.

Если к обобщенным функциям u и f в (1.3) можно применить преобразование Фурье — Лапласа, т. е. применить преобразование Фурье по пространственным переменным и преобразование Лапласа по выделенной переменной, то построение решения уравнения (1.3) сводится к построению решения уравнения

$$P(\sigma, \lambda)\widehat{u}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma) \widehat{g}_k \lambda^j, \tag{1.4}$$

где $\widehat{u}(\lambda)$, $\widehat{f}(\lambda)$ — преобразование Фурье — Лапласа обобщенных функций u и f.

Целью настоящей работы является исследование разрешимости уравнения (1.3) в пространствах обобщенных функций, определенных на основе пространства обобщенных функций медленного роста и его подпространств. Вводятся пространства обобщенных функций, отражающие анизотропную регулярность и анизотропный рост их элементов на бесконечности, дается определение преобразования Лапласа в этих пространствах, доказываются его свойства и теорема обращения, применяется преобразование Лапласа для построения слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) с использованием уравнения (1.4).

Основы теории преобразования Лапласа обобщенных функций заложены Л. Шварцем и Лионсом. Элементы теории преобразования Лапласа обобщенных функций медленного роста, носители которых содержатся в замкнутом, выпуклом, остром конусе в $\mathbb{R}^n$ с вершиной в точке 0, и примеры ее применения в математической физике изложены в [14]. Теория преобразования Лапласа в специально конструируемых пространствах основных и обобщенных функций представлена в [15], в одномерном случае подробно, в многомерном — конспективно.

В данной работе рассмотрение преобразования Лапласа обобщенных функций ориентировано на его применение к исследованию разрешимости задачи Коши (1.1), (1.2) в классах функций, растущих на бесконечности. В определенной степени в ней реализовано обобщение теории преобразования Лапласа векторнозначных функций, широко используемой в теории абстрактной задачи Коши (см., например, [1„ 16, 17]), на случай обобщенных функций.

Преобразование Лапласа обобщенных функций применено в работе для доказательства существования обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2), существенно усиливает результаты, полученные автором в [7–11].

Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию Петровского [18] в такой форме:

$$(\exists\gamma \in \mathbb{R})(\operatorname{Re}\lambda(\sigma) \le \gamma, \text{ если } P(\sigma,\lambda(\sigma)) = 0, \ \sigma \in \mathbb{R}^n \backslash N), \tag{P}$$

где N — множество общих вещественных нулей многочленов $P_k(\sigma)$, $k = 0,\dots,m$.

Если $N = \varnothing$, то это условие эквивалентно условию

$$(\exists\gamma \in \mathbb{R})(P(\sigma,\lambda) \ne 0, \ \sigma \in \mathbb{R}^n, \ \operatorname{Re}\lambda > \gamma). \tag{P$'$}$$

Как показано в [7], условие $N = \varnothing$ является необходимым и достаточным условием единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2) в классе обобщенных функций медленного роста. Этот факт отражает существенные различия в исследовании задачи Коши (1.1), (1.2) при $N = \varnothing$ и $N \ne \varnothing$.

Существование слабого обобщенного решения характеристической задачи Коши в пространстве обобщенных функций конечной регулярности $D'_F(\mathbb{R}^{n+1})$ с носителем в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$ для уравнения (1.1), правая часть которого принадлежит этому пространству, доказано Хермандером (см. [19, теорема 12.8.1]) при выполнении условия, более слабого, чем условие Петровского. Доказательство этого фундаментального результата существенно связано с особенностями свойств пространства $D'_F(\mathbb{R}^{n+1})$, в частности, при решении проблемы деления, и не позволяет отслеживать рост на бесконечности и регулярность решения в зависимости от свойств правой части в уравнении (1.1).

В настоящей работе приведены достаточные условия существования слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) в пространствах, построенных на основе пространства обобщенных функций медленного роста и его подпространств, учитывающих регулярность и поведение на бесконечности начальных данных и правой части уравнения (1.1). В частности, для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию

$$N = \{\sigma_1,\dots,\sigma_p\}, \tag{D}$$

доказано существование слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) для любых начальных данных из пространства $S'(\mathbb{R}^n)$ и любых обобщенных функций f из указанных пространств.

Условиям (P) и (D) удовлетворяют многие линейные уравнения соболевского типа, возникающие в приложениях, в частности, уравнение Соболева, уравнение медленных волн Россби, уравнение динамики стратифицированной жидкости и др.

С помощью преобразования Фурье — Лапласа построение слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) сводится к построению решения уравнения (1.4), существенной особенностью которого является обращение в нуль многочлена $P(\sigma,\lambda)$ при $\sigma \in N$, $\lambda \in \Pi_\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \gamma\}$. Поэтому основная трудность в нахождении решения уравнения (1.4) состоит в решении задачи о делении обобщенной функции из $S'(\mathbb{R}^n)$, голоморфно зависящей от параметра, на многочлен $P(\sigma,\lambda)$, имеющий вещественные нули. Эта задача рассмотрена в [20]. Полученный в ней результат применяется в данной работе для построения слабого обобщенного решения задачи (1.1), (1.2) в шкале пространств, учитывающих регулярность и поведение на бесконечности рассматриваемых функций.

Для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (P′), построение слабого обобщенного решения задачи Коши в работе основано на описании мультипликаторов в рассматриваемых функциональных пространствах и получении оценок для производных функции $P^{-1}(\sigma, \lambda)$.

Полученные результаты являются основой для построения сильных обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2). Речь идет о поиске условий на начальные данные и правую часть уравнения (1.1), обеспечивающих существование у слабых обобщенных решений следов на гиперплоскостях $t = \mathrm{const}$, гладко зависящих от t, и принятие начальных данных в (1.2). Некоторые результаты в этом направлении содержатся в [7–11].

2. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Пространство обобщенных функций медленного роста $S' = S'(\mathbb{R}^n)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством $S(\mathbb{R}^n)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(x)\|_{l,k} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\Big[(1+|x|)^l \sum_{|\alpha|\le k} \big|D_x^\alpha \varphi(x)\big|\Big], \quad l,k = 0,1,2,\dots.$$

Рассмотрим семейство подпространств S', зависящих от параметров s и l:

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1+|\sigma|^2)^s |\mathscr{F}_x((1+|x|^2)^{l/2} f)|^2\, d\sigma\right]^{1/2} < +\infty \right\},$$

где $\mathscr{F}_x g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [18]. Это двупараметрическое семейство пространств является семейством гильбертовых пространств и обладает следующими свойствами:

1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s};

2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье;

3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s.

Из свойства 3 следует, что для любой обобщенной функции $g \in S'$ существуют числа s и l такие, что $g \in H_l^s$.

Пространство H_l^s можно рассматривать как пополнение $S(\mathbb{R}^n)$ по указанной норме. Следовательно, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_l^s.

При целых неотрицательных l пространство H_0^l совпадает с пространством Соболева W_2^l, в частности, $H_0^0 = L_2$.

Как показано в [18], $f \in H_s^l$ тогда и только тогда, когда справедливы равенства

$$f = (1+|\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}}(1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}} h = (1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}}(1+|\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} g, \tag{2.1}$$

где через $(1+|D|^2)^{-\frac{l}{2}}$ обозначен псевдодифференциальный оператор, символ которого равен $(1+|x|^2)^{-\frac{l}{2}}$, $h \in L_2$, $g \in L_2$ и

$$\|h\|_{L_2} = \|g\|_{L_2} = \|f\|_s^l.$$

Через C_l^r, $r \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \mathbb{R}$, обозначим пространство непрерывно дифференцируемых функций φ до порядка r с конечной нормой

$$|\varphi|_l^r = \sup_{x\in\mathbb{R}^n,\ |\alpha|\le r} |(1+|x|^2)^{\frac{l}{2}} \partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Пространство C_l^r банахово. Связь шкал пространств $\{C_l^r\}$ и $\{H_l^s\}$ отражают неравенства [18]

$$\|\varphi\|_{l-p}^r \leq c_1 |\varphi|_l^r \leq c_2 \|\varphi\|_l^{r+q}, \quad p, q > \frac{n}{2}. \tag{2.2}$$

Через $C_{[\gamma]}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \in \mathbb{R}$, обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $\upsilon(t)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_s^l с конечной нормой

$$|||\upsilon(t)|||_{C_{[\gamma]}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} = \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+,\, 0 \leq \nu \leq r} \left[e^{-\gamma t} \left\| \frac{d^\nu \upsilon(t)}{dt^\nu} \right\|_s^l \right].$$

Пространство $C_{[\gamma]}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ банахово. Преобразование Фурье по пространственным переменным отображает изоморфно пространство $C_{[\gamma]}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на $C_{[\gamma]}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Через $D(\mathbb{R}^n)$ обозначают множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, а через $D'(\mathbb{R}^n)$ — пространство, состоящее из линейных форм на $D(\mathbb{R}^n)$ таких, что для всякого компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существуют постоянные $C(K)$, $p(K)$, удовлетворяющие неравенству

$$|(f, \varphi)| \leq C(K) \sum_{|\alpha| \leq p(K)} \sup_{\sigma \in K} |\partial^\alpha \varphi(\sigma)|, \quad \varphi \in D(\mathbb{R}^n),\ \operatorname{supp} \varphi \subset K.$$

Через $E'_+(\mathbb{R}^n)$ будем обозначать множество обобщенных функций пространства $E'(\mathbb{R}^n)$, где $E(\mathbb{R}^n)$ — некоторое пространство основных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Через $\mathscr{H}(G, E')$ обозначим множество голоморфных функций со значениями в пространстве обобщенных функций E', определенных в области $G \subset \mathbb{C}$:

$$\mathscr{H}(G, E') = \{f(\lambda) \in E',\ \lambda \in G;\ \forall \varphi \in E\ (f(\lambda), \varphi) \in \mathscr{H}(G)\},$$

где $\mathscr{H}(G)$ — пространство функций, голоморфных в области G.

Для исследования слабых обобщенных решений задачи Коши (1.1), (1.2) рассмотрим функциональные пространства обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве.

Через $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ обозначим множество, состоящее из обобщенных функций $f \in S'(\mathbb{R}^{n+1})$, удовлетворяющих условиям:

1) $\operatorname{supp} f \subset \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}$;

2) для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ имеет место включение $f_\psi = (f, (\cdot)\psi) \in S'(\mathbb{R}^n)$, т. е. существуют числа l, $s \in \mathbb{R}$ такие, что для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливо неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \equiv |(f, \varphi\psi)| \leq c_{ls}(\psi) \|\varphi\|_s^l; \tag{2.3}$$

3) последовательность f_{ψ_k} сходится к f_ψ в слабой топологии пространства $S'(\mathbb{R}^n)$, если последовательность функций $\psi_k(t) \in S(\mathbb{R})$ сходится к ψ в $S(\mathbb{R})$.

Так как

$$S'(\mathbb{R}^{n+1}) = \operatorname{ind} \lim_{l,s} H_s^l(\mathbb{R}^{n+1}),$$

то для любой обобщенной функции $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in H_{s+}^l(\mathbb{R}^{n+1})$, где

$$H_{s+}^l(\mathbb{R}^{n+1}) = \{f \in H_s^l(\mathbb{R}^{n+1}) : \operatorname{supp} f \subset \overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}\}.$$

Следовательно, для любых $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$|(f, \varphi\psi)| \leq \|f\|_s^l \|\varphi\psi\|_{-s}^{-l}. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Для любых функций $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ при $l \in \mathbb{R}_+$, $s \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C\|\varphi(\sigma)\|_s^l \|\psi(t)\|_{s'}^{\theta(l)}, \tag{2.5}$$

где $s' = \begin{cases} s, & \text{если } s \geq 0, \\ 0, & \text{если } s < 0, \end{cases}$ $\theta(l) = \begin{cases} l, & \text{если } l \in \mathbb{Z}_+, \\ [l]+1, & \text{если } l \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Z}_+. \end{cases}$

Доказательство. Если $l \in \mathbb{Z}_+$, то, пользуясь оценкой нормы в H_s^l, приведенной в [8, лемма 2.1], получим неравенство

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C_1 \Bigg(\sum_{|\alpha| \leq l} \int (1+|\sigma|^2+t^2)^s |\partial^\alpha(\varphi(\sigma)\psi(t))|^2 \, d\sigma dt \Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

При $s \geq 0$ из полученной оценки следует неравенство

$$\begin{aligned} &\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \\ &\quad \leq C_2 \Bigg(\sum_{|(\alpha'\alpha_{n+1})| \leq l} \int (1+|\sigma|^2)^s |\partial^{\alpha'}\varphi(\sigma)|^2 (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 \, d\sigma dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_2 \Bigg(\sum_{|(\alpha'\alpha_{n+1})| \leq l} \int (1+|\sigma|^2)^s |\partial^{\alpha'}\varphi(\sigma)|^2 \, d\sigma \cdot \int (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 \, dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad \leq C_3 \|\varphi(\sigma)\|_s^l \max_{\alpha_{n+1} \leq l} \Bigg(\int (1+t^2)^s |\partial^{\alpha_{n+1}}\psi(t)|^2 \, dt \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leq C_4 \|\varphi\|_s^l \|\psi\|_s^l. \end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения при $s < 0$ с использованием неравенства

$$(1+|\sigma|^2+t^2)^s \leq (1+|\sigma|^2)^s$$

приводят к неравенству

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C_4' \|\varphi\|_s^l \|\psi\|_0^l.$$

Следовательно, при $l \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$ неравенство (2.5) справедливо.

К произвольным $l \in \mathbb{R}_+$ можно перейти с помощью интерполяции. Метод построения интерполяционных пространств между двумя гильбертовыми пространствами, предложенный Лионсом (см., например, [21]), примененный к пространствам H_s^{m+1} и H_s^m, $m \in \mathbb{Z}_+$, дает пространства $H_s^{m+1-\theta}$, $0 \leq \theta \leq 1$.

Неравенство (2.5) выражает непрерывность оператора из $H_s^l(\mathbb{R}^n)$ в $H_s^l(\mathbb{R}^{n+1})$, который элементам φ пространства $H_s^l(\mathbb{R}^n)$ ставит в соответствие элементы $\varphi\psi$ пространства $H_s^l(\mathbb{R}^{n+1})$, где $\psi \in S(\mathbb{R})$. Выше доказано, что этот оператор непрерывен при $l \in \mathbb{Z}_+$ и справедливо неравенство

$$\|\varphi(\sigma)\psi(t)\|_s^l \leq C' \|\varphi(\sigma)\|_s^l \|\psi(t)\|_{s'}^l,$$

где $s' = s$, если $s \geq 0$, и $s' = 0$, если $s < 0$.

На основании теоремы об интерполяции (см. [21, гл. I, теорема 5.1]) он непрерывен для любого $l \in \mathbb{R}_+$ и неравенство (2.5) справедливо. Лемма доказана.

Если в определении пространства $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ заменить $S'(\mathbb{R}^n)$ его подпространством $H_s^l(\mathbb{R}^n)$, то получим определение пространства $S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$. При этом последовательность обобщенных функций f_{ψ_k} сходится к f_ψ по норме пространства H_s^l, если последовательность функций $\psi_k \in S(\mathbb{R})$ сходится к ψ в $S(\mathbb{R})$.

Пусть $f \in S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$. Тогда для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ определена функция $f_\psi \in H_s^l(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ выполняется неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \le \|f_\psi\|_s^l \|\varphi\|_{-s}^{-l}. \tag{2.6}$$

Лемма 2.2. *Справедливо равенство*

$$S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n)) = \bigcup_{s,l} S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big). \tag{2.7}$$

Доказательство. Так как $S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big) \subset S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ по определению, достаточно показать, что для любой $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$.

Как отмечено выше, для любой обобщенной функции $f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ существуют числа l и s такие, что $f \in H_s^l(\mathbb{R}^{n+1})$ и справедливо неравенство (2.4).

Если $l \le 0$, то из неравенств (2.4) и (2.5) следует неравенство

$$|(f_\psi, \varphi)| \le C\|f\|_s^l \|\varphi(\sigma)\|_{-s}^{-l} \|\psi(t)\|_{-s'}^{\theta(-l)}.$$

Из этого неравенства следует, что для любой функции $\psi \in S(\mathbb{R})$ обобщенная функция $f_\psi \in S'(\mathbb{R}^n)$ может быть продолжена по непрерывности на пространство $H_{-s}^{-l}(\mathbb{R}^n)$, т. е. $f_\psi \in H_s^l$ и справедливо неравенство

$$\|f_\psi\|_s^l \le C\|f\|_s^l \|\psi\|_{-s'}^{\theta(-l)}. \tag{2.8}$$

Из неравенства (2.8) вытекает, что последовательность обобщенных функций f_{ψ_k} сходится к f_ψ в $H_s^l(\mathbb{R}^n)$, если последовательность $\psi_k(t) \in S(\mathbb{R})$ сходится к $\psi(t)$ в пространстве $S(\mathbb{R})$. Следовательно, при $l \le 0$ будет $f \in S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$.

Если $l > 0$ и $f \in H_{s+}^l(\mathbb{R}^{n+1})$, то справедливо включение

$$(1 + |\sigma|^2 + t^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Применяя теорему Фубини и неравенство Коши — Буняковского, для произвольных $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ получим

$$\begin{aligned}
|(f_\psi, \varphi)| &= |(f, \varphi\psi)| = |((1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f, (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)\psi(t)|) \\
&= \left| \int (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) (1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)\psi(t)\, d\sigma dt \right| \\
&\le \int \left| \int (1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t) (1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)\, d\sigma \right| |\psi(t)|\, dt \\
&\le \int \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t)|^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{-\frac{l}{2}} \varphi(\sigma)|^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} |\psi(t)|\, dt \\
&\le \|\varphi\|_{-s}^{-l} \int \left(\int |(1 + |\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} (1 + |D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}} f(\sigma, t)|^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} |\psi(t)|\, dt.
\end{aligned}$$

Дальнейшее оценивание зависит от знака s. Если $s \le 0$, то справедливо неравенство

$$(1+|\sigma|^2)^{\frac{s}{2}}(1+t^2)^{\frac{s}{2}} \le (1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Используя это неравенство, получим оценку

$$|(f_\psi,\varphi)| \le \|\varphi\|_{-s}^{-l}\|\psi\|_{-s}^{0}\left(\int |(1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}(1+|D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}}f(\sigma,t)|^2\,d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, при $s \le 0$ справедливо неравенство

$$|(f_\psi,\varphi)| \le C(f)\|\psi\|_{-s}^{0}\|\varphi\|_{-s}^{-l},$$

где

$$C(f) = \left(\int |(1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}(1+|D_\sigma|^2)^{\frac{l}{2}}f(\sigma,t)|^2\,d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $s > 0$, то справедливо неравенство

$$(1+|\sigma|^2)^{\frac{s}{2}} \le (1+|\sigma|^2+t^2)^{\frac{s}{2}}.$$

Используя это неравенство, получим аналогичную оценку при $s > 0$:

$$|(f_\psi,\varphi)| \le C(f)\|\psi\|_{0}^{0}\|\varphi\|_{-s}^{-l}.$$

Следовательно, при $l > 0$ обобщенная функция f_ψ может быть продолжена по непрерывности на пространство $H_{-s}^{-l}(\mathbb{R}^n)$, т. е. $f_\psi \in H_s^l(\mathbb{R}^n)$ и справедливо неравенство

$$\|f_\psi\|_s^l \le C(f)\|\psi\|_{s'}^0, \tag{2.9}$$

где $s' = 0$, если $s > 0$, и $s' = -s$, если $s \le 0$.

Из этого неравенства следует непрерывная зависимость f_ψ от $\psi \in S(\mathbb{R})$, т. е. при $l > 0$ будет $f \in S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$. Лемма доказана.

Обозначим через $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ множество таких обобщенных функций $f \in D'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, что $e^{-\gamma t}f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, т. е. $f = e^{\gamma t}g$, $g \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$.

Пространство $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ инвариантно относительно дифференцирования. Это следует из описания элементов пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ и равенства

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma e^{\gamma t}g + e^{\gamma t}\frac{\partial g}{\partial t} = e^{\gamma t}\left(\gamma g + \frac{\partial g}{\partial t}\right).$$

Аналогично определяются пространства $S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)$:

$$S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)) = \big\{f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n) : e^{-\gamma t}f \in S'_+\big(\mathbb{R}, H_s^l(\mathbb{R}^n)\big)\big\}.$$

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства S' в себя, т. е. функция $a(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S' тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma)| \le c_\alpha(1+|\sigma|)^{q(\alpha)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.10}$$

где $c_\alpha > 0$, $q(\alpha)$ — числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка α (см. [18]).

Так как S' является объединением пространств H_s^l, $l, s \in \mathbb{R}$, то представляет интерес описание действия мультипликатора $a(\sigma)$ в шкале пространств H_s^l.

Теорема 2.1. *Умножение на функцию $a(\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10), является непрерывным отображением из пространства H^l_s, l, $s \in \mathbb{R}$, в $H^l_{s-q(l)}$, где*

$$q(l) = \max_{|\alpha| \le \nu(l)} q(\alpha), \quad \nu(l) = \begin{cases} |l|, & \text{если } l \in \mathbb{Z}, \\ [|l|] + 1, & \text{если } l \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и для любой обобщенной функции $g \in H^l_s$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma)g\|^l_{s-q(l)} \le C(\max_{|\alpha| \le \nu(l)} c_\alpha)\|g\|^l_s, \tag{2.11),}$$

где $C > 0$ — некоторое число, не зависящее от функции $a(\sigma)$.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [8]. В нем используются только производные функции $a(\sigma)$ и их оценки до порядка $\nu(l)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Умножение на функцию $a(\sigma) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющую неравенствам (2.10) при $|\alpha| \le \nu(l)$, является непрерывным отображением из пространства H^l_s, $l, s \in \mathbb{R}$, в пространство $H^l_{s-q(l)}$ и справедливо неравенство (2.11).*

Приведенное утверждение означает, что функция $a(\sigma) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющая неравенствам (2.10) при $|\alpha| \le \nu(l)$, является мультипликатором в $H^l_{-\infty} = \bigcup\limits_s H^l_s$.

Рассмотрим семейство функций $a(\sigma, \lambda)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in G \subset \mathbb{C}$, непрерывно дифференцируемых по σ до порядка $\nu \in \mathbb{Z}_+$ при каждом $\lambda \in G$, голоморфных по переменной λ в области G вместе с производными по σ до порядка ν и удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial^\alpha a(\sigma, \lambda)| \le c_\alpha (1 + |\lambda|)^{p(\alpha)}(1 + |\sigma|)^{q(\alpha)}, \quad |\alpha| \le \nu, \ \lambda \in G, \ \sigma \in \mathbb{R}^n, \tag{2.12}$$

где $c_\alpha > 0$, $p(\alpha)$, $q(\alpha)$ — некоторые числа, зависящие от α.

Теорема 2.2. *Умножение на функцию $a(\sigma, \lambda)$, удовлетворяющую неравенствам (2.12) при $\nu = \nu(l)$, $l \in \mathbb{R}$, является непрерывным отображением пространства $\mathscr{H}\big(G, H^l_s\big)$, $s \in \mathbb{R}$, в пространство $\mathscr{H}\big(G, H^l_{s-q(l)}\big)$ и для любой функции $f(\lambda) \in \mathscr{H}\big(G, H^l_s\big)$ справедливо неравенство*

$$\|a(\sigma, \lambda)f(\lambda)\|^l_{s-q(l)} \le C_l(1 + |\lambda|)^{p(l)}\|f(\lambda)\|^l_s, \tag{2.13}$$

где $C_l > 0$ — некоторое число, $p(l) = \max\limits_{|\alpha| \le \nu(l)} p(\alpha)$.

Доказательство. Из условия теоремы и теоремы 2.1 следует, что обобщенная функция $a(\sigma, \lambda)f(\lambda)$ при каждом $\lambda \in G$ принадлежит пространству $H^l_{s-q(l)}$ и справедливо неравенство (2.13).

Докажем голоморфность функции $a(\sigma, \lambda)f(\lambda)$. Для произвольной точки $\lambda_0 \in G$ функцию $f(\lambda) \in \mathscr{H}(G, H^l_s)$ в некотором замкнутом круге $V_r(\lambda_0)$ можно представить в виде

$$f(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^m, \quad \lambda \in V_r(\lambda_0),$$

где $f_m(\lambda_0) \in H^l_s$ и справедливы неравенства

$$\|f_m(\lambda_0)\|^l_s \le \frac{M}{r^m}, \quad M = \max_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|^l_s, \quad m = 0, 1, \dots. \tag{2.14}$$

Аналогичное представление в круге $V_r(\lambda_0)$ имеет голоморфная в области G функция $a(\sigma, \lambda)$, гладко зависящая от $\sigma \in \mathbb{R}^n$:

$$a(\sigma, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\sigma, \lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^k, \quad \lambda \in V_r(\lambda_0),$$

где $a_k(\sigma, \lambda_0) \in C^{\nu(l)}(\mathbb{R}^n)$. Это следует из интегрального представления функции $a_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$a_k(\sigma, \lambda_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} \frac{a(\sigma, \lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}\, d\lambda.$$

Пользуясь этим представлением и неравенствами (2.12), получим оценки производных по σ функций $a_k(\sigma, \lambda_0)$:

$$|\partial^\alpha a_k(\sigma, \lambda_0)| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} |\partial^\alpha a(\sigma, \lambda)| \frac{|d\lambda|}{r^{k+1}}$$

$$\le C'_\alpha (1 + |\sigma|)^{q(\alpha)} \frac{1}{r^{k+1}} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = r} (1 + |\lambda|)^{p(\alpha)}\, |d\lambda| \le C''_\alpha (1 + |\lambda_0|)^{p(\alpha)} (1 + |\sigma|)^{q(\alpha)} \frac{1}{r^k}, \tag{2.15}$$

где C'_α, $C''_\alpha(r)$ — числа, не зависящие от k. Следовательно, функции $a_k(\sigma, \lambda_0)$, $k = 0, 1, \dots$, удовлетворяют условию следствия 2.1.

Из следствия 2.1 и неравенств (2.15) при $r < 1$ следует неравенство

$$\|a_k(\sigma, \lambda_0) f_m(\lambda_0)\|^l_{s-q(l)} \le C_l \frac{1}{r^k} (1 + |\lambda_0|)^{p(l)} \|f_m(\lambda_0)\|^l_s.$$

Из этого неравенства и неравенства (2.14) следует, что обобщенная функция

$$g_\tau(\lambda_0) = \sum_{m+k=\tau} a_k(\sigma, \lambda_0) f_m(\lambda_0)$$

принадлежит пространству $H^l_{s-q(l)}$ и справедливо неравенство

$$\|g_\tau(\lambda_0)\|^l_{s-q(l)} \le \frac{\widetilde{C}_l}{r_1^\tau} (1 + |\lambda_0|)^{p(l)} \max_{\lambda \in V_r(\lambda_0)} \|f(\lambda)\|^l_s, \quad r_1 < r.$$

Следовательно, внутри круга $V_{r_1}(\lambda_0)$ сходится ряд

$$F(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} g_\tau(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0)^\tau.$$

Из равенства $a(\sigma, \lambda) f(\lambda) = F(\lambda)$ вытекает, что $a(\sigma, \lambda) f(\lambda) \in \mathscr{H}\big(G, H^l_{s-q(l)}\big)$. Непрерывная зависимость $a(\sigma, \lambda) f(\lambda)$ от $f(\lambda) \in \mathscr{H}\big(G, H^l_s\big)$ следует из неравенства (2.13). Теорема доказана.

Важным примером функции $a(\sigma, \lambda)$, удовлетворяющей неравенствам (2.12), является функция $P^{-1}(\sigma, \lambda)$, где $P(\sigma, \lambda)$ — многочлен, удовлетворяющий условию (P'). Из этого условия следует, что функция $P^{-1}(\sigma, \lambda)$ является бесконечно дифференцируемой по переменной $\sigma \in \mathbb{R}^n$ и голоморфной по переменной $\lambda \in \Pi_\gamma$.

Теорема 2.3. *Если многочлен $P(\sigma,\lambda)$ удовлетворяет условию* (P′)*, то справедливо неравенство*

$$\frac{1}{|P(\sigma,\lambda)|}\le C(1+|\lambda|)^p(1+|\sigma|)^q,\quad (\sigma,\lambda)\in\mathbb{R}^n\times\Pi_{\gamma'},\tag{2.16}$$

где $C(\gamma')>0$, p, q — некоторые числа, $\gamma'>\gamma$.

Теорема 2.3 является частным случаем теоремы 3.3 в [22], доказанной с помощью оценки модуля многочлена от вещественных переменных (см. [23, § 21.4, теорема A.3]).

Обобщением теоремы 2.3 является следующее утверждение.

Теорема 2.4. *Если многочлен $P(\sigma,\lambda)$ удовлетворяет условию* (P′)*, то для любого $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$ справедливо неравенство*

$$\left|\partial^\alpha\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right|\le C_\alpha(\gamma')(1+|\sigma|)^{q(\alpha)}(1+|\lambda|)^{p(\alpha)},\quad (\sigma,\lambda)\in\mathbb{R}^n\times\Pi_{\gamma'},\tag{2.17}$$

где $C_\alpha(\gamma')>0$, $q(\alpha)=|\alpha|(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda))+q$, $p(\alpha)=|\alpha|(p+m)+p$, $\gamma'>\gamma$.

Доказательство. При $|\alpha|=0$ неравенство (2.17) справедливо, так как совпадает с неравенством (2.16). Предположим, что неравенство (2.17) справедливо для всех $\beta\in\mathbb{Z}^n_+$, $|\beta|\le k$ и $\alpha'=\alpha+\gamma_i$, $|\alpha|=k$, $|\gamma_i|=1$.

Воспользовавшись формулой Лейбница и предположением, получим

$$\begin{aligned}\left|\partial^{\alpha'}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right|&=\left|\partial^\alpha\left(\frac{\partial_iP(\sigma,\lambda)}{P^2(\sigma,\lambda)}\right)\right|\le c'_\alpha\sum_{\beta\le\alpha}\left|\partial^{\alpha-\beta}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right|\left|\partial^\beta\frac{\partial_iP(\sigma,\lambda)}{P(\sigma,\lambda)}\right|\\&\le c''_\alpha\sum_{\beta\le\alpha}\left|\partial^{\alpha-\beta}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right|\sum_{\gamma\le\beta}\left|\partial^{\beta-\gamma}\frac{1}{P(\sigma,\lambda)}\right||\partial^\gamma\partial_iP(\sigma,\lambda)|\\&\le c'''_\alpha\sum_{\beta\le\alpha,\,\gamma\le\beta}(1+|\sigma|)^{q(\alpha-\beta)+q(\beta-\gamma)+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)}(1+|\lambda|)^{p(\alpha-\beta)+p(\beta-\gamma)+m}\\&\le c_{\alpha'}(1+|\sigma|)^{\widetilde{q}(\alpha')}(1+|\lambda|)^{\widetilde{p}(\alpha')},\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{q}(\alpha')&=\sup_{\beta\le\alpha,\,\gamma\le\beta}(q(\alpha-\beta)+q(\beta-\gamma)+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda))\\&=\sup_{\beta\le\alpha,\,\gamma\le\beta}[(|\alpha|-|\beta|)(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda))+q+(|\beta|-|\gamma|)(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda))+q\\&\qquad+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda)]=|\alpha'|(q+\deg_\sigma P(\sigma,\lambda))+q=q(\alpha'),\\\widetilde{p}(\alpha')&=\sup_{\beta\le\alpha:\,:\,\gamma\le\beta}(p(\alpha-\beta)+p(\beta-\gamma)+m)\\&=\sup_{\gamma\le\alpha}[(|\alpha|-|\gamma|+1)(p+m)+p]=|\alpha'|(p+m)+p=p(\alpha').\end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (2.17) справедливо. Теорема доказана.

3. Преобразование Лапласа обобщенных функций и его свойства

Определение преобразования Лапласа обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$, основано на определении преобразования Лапласа скалярных функций $f(t)$, $t\ge0$, по формуле

$$\widehat{f}(\lambda)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}\,dt.$$

Если $e^{-\gamma t}|f(t)| < C$, $t \geq 0$, то преобразование Лапласа $\widehat{f}(\lambda)$ функции $f(t)$ определено и является голоморфной функцией в полуплоскости Π_γ.

Приведенное определение преобразования Лапласа обобщается на случай векторнозначных функций со значениями в банаховых и локально выпуклых пространствах. Это обобщение находит применение в теории абстрактной задачи Коши (см. [1, 16, 17, 24]).

Такой же подход может быть использован для определения преобразования Лапласа обобщенных функций, носители которых содержатся в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$.

Пусть $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$. Рассмотрим обобщенную функцию $\widehat{f}(\lambda)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, определенную равенством

$$(\widehat{f}(\lambda), \varphi) \equiv (e^{-\gamma t} f, \varphi \eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma - \lambda)t}), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{3.1}$$

где $\eta_\varepsilon(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < -\varepsilon. \end{cases}$

Так как $\varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t} \in S(\mathbb{R}^{n+1})$, $\lambda \in \Pi_\gamma$ и $e^{-\gamma t} f \in S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, то правая часть в (3.1) определена и непрерывна в $S(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, $\widehat{f}(\lambda) \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$.

Независимость $\widehat{f}(\lambda)$ от ε следует из того, что функция $\eta_{\varepsilon_1}(t) - \eta_{\varepsilon_2}(t)$ обращается в нуль вместе с производными любого порядка при $t \geq 0$, а $\operatorname{supp} e^{-\gamma t} f \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. Поэтому справедливо равенство

$$(e^{-\gamma t} f, \varphi(\eta_{\varepsilon_1}(t) - \eta_{\varepsilon_2}(t)) e^{(\gamma-\lambda)t}) = 0, \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{3.2}$$

Для его доказательства рассмотрим разбиение единицы $\{\varphi_i, \Omega_i\}$, $\bigcup\limits_i \Omega_i = \mathbb{R}^{n+1}$, $\overline{\Omega}_i \Subset \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда $\varphi_i e^{-\gamma t} f \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$ и $\operatorname{supp} \varphi_i e^{-\gamma t} f = \operatorname{supp} \varphi_i \cap \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = K_i \Subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. По теореме 2.3.3 из [25] $(\varphi_i e^{-\gamma t} f, \varphi(\eta_{\varepsilon_1}(t) - \eta_{\varepsilon_2}(t)) e^{(\gamma-\lambda)t}) = 0$ для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, равенство (3.2) справедливо, т. е. значение правой части в (3.1) от ε не зависит. А это означает, что оно не зависит от значений функции $\eta_\varepsilon(t)$ при $t < 0$.

Функция $\widehat{f}(\lambda) \in S'(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, называется *преобразованием Лапласа* обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ и обозначается через Lf.

Теорема 3.1. *Если обобщенная функция f принадлежит $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$, то ее преобразование Лапласа $\widehat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathscr{H}(\Pi_\gamma, S'(\mathbb{R}^n))$.*

Доказательство. Из равенства (3.1) при $\operatorname{Re} \Delta\lambda > \gamma - \operatorname{Re} \lambda$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ следуют равенства

$$(\widehat{f}(\lambda + \Delta\lambda) - \widehat{f}(\lambda), \varphi) = (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)(e^{(\gamma-(\lambda+\Delta\lambda))t} - e^{(\gamma-\lambda)t}))$$

$$= (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}\left(-t\Delta\lambda + \frac{t^2}{2} e^{-\theta(\Delta\lambda)t}(\Delta\lambda)^2\right))$$

$$= (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)(-t)e^{(\gamma-\lambda)t})\Delta\lambda + \left(e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2} e^{(\gamma-(\lambda+\theta(\Delta\lambda)))t}\right)(\Delta\lambda)^2,$$

где $0 \leq \theta = \theta(\Delta\lambda) \leq 1$.

Из определения пространства $S'_+(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ следует справедливость равенства

$$\lim_{\Delta\lambda \to 0} \left(e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2} e^{(\gamma-(\lambda+\theta(\Delta\lambda)))t}\right) = \left(e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)\frac{t^2}{2} e^{(\gamma-\lambda)t}\right).$$

Следовательно, функция $(\widehat{f}(\lambda),\varphi)$ дифференцируема по λ в полуплоскости Π_γ, т. е. обобщенная функция $\widehat{f}(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости Π_γ как функция со значениями в локально выпуклом пространстве $S'(\mathbb{R}^n)$. Теорема доказана.

Согласно определению преобразования Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ в (3.1) отображение $f \to \widehat{f}(\lambda)$ линейно. Это отображение обратимо.

Теорема 3.2. *Если $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ и $\widehat{f}(\lambda) = 0$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, то $f = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $f \neq 0$. Тогда существует функция $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ такая, что не равна нулю обобщенная функция $g_\varphi \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}) : (g_\varphi, \psi) = (f, \varphi\psi), \psi \in S(\mathbb{R})$.

Так как $S'(\mathbb{R}) = \bigcup\limits_{l,s} H^l_s$, существуют числа l и s такие, что $\hbar_\varphi = e^{-\gamma t} g_\varphi \in H^l_s$.

Если $l \geq 0$, то $\hbar_\varphi \in H^0_l$ и справедливо равенство

$$(\hbar_\varphi, \eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)(t)}) = (\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma - \operatorname{Re}\lambda)t} \hbar_\varphi, e^{-i\eta t}),$$

$\eta = \operatorname{Im}\lambda$, $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$. По построению $\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\hbar_\varphi \in L_1(\mathbb{R})$. По условию левая часть полученного равенства равна нулю при $\operatorname{Re}\lambda > \gamma$, а правая является преобразованием Фурье функции из $L_1(\mathbb{R})$. Следовательно, $\eta_\varepsilon(t)\hbar_\varphi = 0$. А тогда $g_\varphi = 0$, так как $\operatorname{supp} g_\varphi \subset \overline{\mathbb{R}}_+$, что противоречит предположению.

Если $l < 0$, то $\hbar_\varphi \in H^{-2k}_l$ для некоторого $k \in N$. Из равенства (2.1) следует равенство

$$\eta_\varepsilon(t)\hbar_\varphi = (1 - \partial_t^2)^k (1 + |t|)^{-\frac{l}{2}} u, \quad u \in L_2(-2\varepsilon, +\infty).$$

Тогда справедливы равенства

$$\begin{aligned}&(\hbar_\varphi, \eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}) = \big((1+|t|)^{-\frac{l}{2}} u, \big(1 - \partial_t^2\big)^k e^{(\gamma-\lambda)t}\big)\\ &= ((1+|t|)^{-\frac{l}{2}} u, Q(\gamma-\lambda) e^{(\gamma-\lambda)t}) = (Q(\gamma-\lambda) e^{(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t} (1+|t|)^{-\frac{l}{2}} u, e^{-i\eta t}),\ \eta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

где $Q(\gamma-\lambda)$ — некоторый многочлен от $\gamma - \lambda$.

Рассуждениями, аналогичными предыдущим, приходим к противоречию и в этом случае. Следовательно, $f = 0$. Теорема доказана.

Теорема 3.3. *Если обобщенная функция f принадлежит $S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H^l_s\big)$, то ее преобразование Лапласа $\widehat{f}(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H^l_s\big)$.*

Доказательство. Принадлежность $\widehat{f}(\lambda)$ при $\lambda \in \Pi_\gamma$ пространству H^l_s следует из определения пространства $S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H^l_s(\mathbb{R}^n)\big)$ и равенства

$$(\widehat{f}(\lambda), \varphi) = (e^{-\gamma t} f, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}),$$

которое имеет смысл для всех $\varphi \in H^{-l}_{-s}$.

Из этого равенства следует равенство норм

$$\|\widehat{f}(\lambda)\|^l_s = \|(e^{-\gamma t} f)_{\psi(\varepsilon,k)}\|^l_s, \tag{3.3}$$

где $\psi(\varepsilon,\lambda) = \eta_\varepsilon(t) e^{(\gamma-\lambda)t}$.

Голоморфность функции $(\widehat{f}(\lambda),\varphi)$, $\varphi \in H^{-l}_{-s}$, устанавливается рассуждениями, аналогичными использованным в доказательстве теоремы 3.1.

Обобщенная функция $\widehat{f}(\lambda)$ как функция со значениями в H^l_s сильно непрерывна. Это следует из определения пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$ и непрерывной зависимости функции $\psi(\varepsilon, \lambda)$ от $\lambda \in \Pi_\gamma$ в пространстве $S(\mathbb{R})$. Следовательно, обобщенная функция $\widehat{f}(\lambda)$ сильно голоморфна по переменной λ в полуплоскости Π_γ как функция со значениями в пространстве H_s^l (см. [26, теорема 3.31]). Теорема доказана.

Если $u(t) \in C^0_{[\gamma]}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, то преобразование Лапласа обобщенной функции $\eta(t)u(t) \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H_s^l)$, где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, совпадает с обычным определением преобразования Лапласа $u(t)$ как функции со значениями в банаховом пространстве [1]. Это следует из справедливости для любой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ равенств

$$(L(\eta(t)u(t)), \varphi) = (e^{-\gamma t}\eta(t)u(t), \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t})$$
$$= \int_0^\infty (u(t), \varphi)\eta_\varepsilon(t)e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^\infty (u(t), \varphi)e^{-\lambda t} dt = \left(\int_0^\infty u(t)e^{-\lambda t}\, dt, \varphi\right).$$

Так как $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_{-s}^{-l}, из приведенных равенств следует равенство

$$L\eta u(\lambda) = \int_0^\infty u(t)e^{-\lambda t}\, dt.$$

Преобразование Лапласа L обобщенных функций пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ обладает свойством

$$L\frac{\partial f}{\partial t} = \lambda L f. \tag{3.4}$$

Его справедливость следует из равенств

$$\left(L\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi\right) = \left(e^{-\gamma t}\frac{\partial f}{\partial t}, \varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\right)$$
$$= \left(e^{-\gamma t}f, -\frac{\partial}{\partial t}(\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t})\varphi(\sigma)\right) + (e^{-\gamma t}f, \gamma\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\varphi(\sigma))$$
$$= \left(e^{-\gamma t}f, \varphi(\sigma)\left(-\frac{\partial\eta_\varepsilon(t)}{\partial t}e^{(\gamma-\lambda)t} - (\gamma-\lambda)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t} + \gamma\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\right)\right)$$
$$= (e^{-\gamma t}f, \lambda\varphi(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}) = \lambda(Lf, \varphi).$$

Здесь использованы такие же рассуждения, как и при доказательстве равенства (3.2).

Если $u(t) \in C^1_{[\gamma]}(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, то из равенства (3.4) следует равенство

$$L\left(\eta(t)\frac{du}{dt}\right)(\lambda) = \lambda Lu(\lambda) - u(0), \tag{3.5}$$

где $\frac{du}{dt}$ — обычная производная функции $u(t)$. Его справедливость следует из равенств

$$\left(L\left(\eta(t)\frac{du}{dt}\right)(\lambda), \varphi\right) = \left(e^{-\gamma t}\eta(t)\frac{du}{dt}, \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\right)$$
$$= \int_0^\infty \left(\frac{du}{dt}, \varphi\right)e^{-\lambda t}\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{d[(u(t), \varphi)e^{-\lambda t}]}{dt} + \lambda(u(t), \varphi)e^{-\lambda t}\right) dt$$
$$= (\lambda Lu(\lambda), \varphi) - (u(0), \varphi) = (\lambda Lu(\lambda) - u(0), \varphi).$$

Преобразованием Фурье — Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$ называется обобщенная функция $\widetilde{f}(\lambda)$, определенная равенством

$$(\widetilde{f}(\lambda), \varphi) \equiv (e^{-\gamma t} f, \widehat{\varphi}(\sigma)\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}), \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n),$$

где $\widehat{\varphi}(\sigma)$ — преобразование Фурье функции $\varphi(\sigma)$.

Будем обозначать преобразование Фурье — Лапласа обобщенной функции f через $\mathscr{L}\mathscr{F}f$.

Если $u(t) \in C^m_{[\gamma]}(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s)$ является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2), то, используя свойства преобразований Лапласа и Фурье обобщенных функций, нетрудно показать, что преобразование Фурье — Лапласа обобщенной функции $\eta(t)u(t)$ является решением уравнения (1.4).

Применение преобразования Лапласа при изучении задачи Коши основано на теоремах обращения преобразования Лапласа. Классическая теорема обращения приведена, например, в [27]. Теоремы обращения преобразования Лапласа векторнозначных функций содержатся в [1, 17, 24].

Для доказательства теоремы обращения рассматриваемого преобразования Лапласа обобщенных функций приведем утверждение типа теоремы Пэли — Винера — Шварца (см. [25, теорема 7.3.1]).

Теорема 3.4. *Если $f \in S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H^l_s\big)$, $l, s \in \mathbb{R}$, то справедливо неравенство*

$$\|\widehat{f}(\lambda)\|^l_s \le C'(f)C(\delta,\gamma)(1+|\lambda|)^\mu, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \gamma+\delta, \quad \delta > 0, \tag{3.6}$$

где $C(\delta,\gamma)$, μ — числа, зависящие от f.

Доказательство. Из условия следует, что $e^{-\gamma t}f \in H^{l'}_{s'}(\mathbb{R}^{n+1})$, $\operatorname{supp} e^{-\gamma t}f \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$, где l', s' — некоторые числа. Из равенства (3.3) и неравенств (2.8) и (2.9) следует неравенство

$$\|\widehat{f}(\lambda)\|^l_s \le C'(f)\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|^{l''}_{s''}, \tag{3.7}$$

где l'', s'' — числа, зависящие от l', s', а $C'(f)$ — число, зависящее от $e^{-\gamma t}f$.

Если $l'' > 0$, то справедливы неравенства

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|^{l''}_{s''} \le C_1 \sum_{k\le\nu(l'')} \left(\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} (1+t^2)^{s''}|\partial^k(\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}|^2\,dt\right)^{\frac12}$$

$$\le C_2 \sum_{k\le\nu(l'')} \left(\sum_{i=0}^{k}\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty} (1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt\right)^{\frac12}.$$

Оценим каждое слагаемое в правой части полученного неравенства, пользуясь оценкой

$$|\partial^i\eta_\varepsilon(t)| \le C\varepsilon^{-i},$$

которая может быть обеспечена построением функции $\eta_\varepsilon(t)$ (см., например, [25, теорема 1.4.1]).

Так как функция $\widehat{f}(\lambda)$ не зависит от выбора ε, то для каждого $\lambda \in \Pi_\gamma$ выберем $\varepsilon = \frac{1}{1+|\lambda|}$. Тогда при $i \ge 1$ имеем неравенство

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt$$

$$\le \int\limits_{-\varepsilon}^{0}(1+t^2)^{s''}(1+|\lambda|)^{2i}|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{-\frac{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)}{1+|\lambda|}}\,dt.$$

При $\lambda \in \Pi_\gamma$ справедливы неравенства

$$(1+|\lambda|)^{2i}|\gamma-\lambda|^{2(k-i)} \le C_1(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}, \quad e^{-\frac{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)}{1+|\lambda|}} \le C_2(\gamma).$$

Следовательно, для рассматриваемого слагаемого верна оценка

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\partial^i\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2(k-i)}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt \le C_3(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}.$$

Если $i=0$ и $\varepsilon = \frac{1}{1+|\lambda|}$, то

$$\int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\eta_\varepsilon(t)|^2|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt$$

$$\le \int\limits_{-\varepsilon}^{0}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{-\frac{(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)}{1+|\lambda|}}\,dt + \int\limits_{0}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt.$$

Первое слагаемое в правой части этого неравенства не превосходит величины $C_1(\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}$.

При оценке второго слагаемого воспользуемся тем, что $\operatorname{Re}\lambda-\gamma \ge \delta$, $\delta>0$:

$$\int\limits_{0}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\gamma-\lambda|^{2k}e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt \le C_5(\delta,\gamma)(1+|\lambda|)^{2k}.$$

Учитывая все полученные оценки, при $l''\ge 0$ имеем неравенство

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{l''} \le C_6(\delta,\gamma)(1+|\lambda|)^{\nu(l'')}.$$

Из этого неравенства и (3.7) следует справедливость неравенства (3.6) при $l''\ge 0$.

Если $l''<0$, то

$$\|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{l''} \le \|\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}\|_{s''}^{0} \le \int\limits_{-\varepsilon}^{\infty}(1+t^2)^{s''}|\eta_\varepsilon(t)|^2e^{2(\gamma-\operatorname{Re}\lambda)t}\,dt \le C_7(\delta,\gamma).$$

Следовательно, и при $l''<0$ неравенство (3.6) справедливо. Теорема доказана.

Теорема 3.5. *Если обобщенная функция $\upsilon(\lambda)$ принадлежит пространству $\mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H_s^l\big)$ и справедливо неравенство*

$$\|\upsilon(\lambda)\|_s^l \le C(1+|\lambda|)^r, \quad \operatorname{Re}\lambda>\gamma,\ r\in\mathbb{Z}_+, \tag{3.8}$$

то существует обобщенная функция $u \in S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H_s^l\big)$ такая, что $\widehat{u}(\lambda)=\upsilon(\lambda)$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенную функцию $\omega(t)$, заданную формулой

$$\omega(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}e^{\lambda t}\,d\tau, \quad \xi>\gamma,\ \tau=\operatorname{Im}\lambda,\ t>0. \tag{3.9}$$

Из неравенства (3.8) следует справедливость неравенства

$$\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\|\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}\|_s^l\,d\tau \le C\int\limits_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty}\left(\frac{1+|\lambda|}{|\lambda|}\right)^r\frac{1}{|\lambda|^2}\,d\tau < +\infty, \quad \xi>\gamma,$$

и равенства

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2} = 0.$$

Из теоремы 2.6 в [1] следует, что функция $\omega(t)$, определенная в (3.9), принадлежит пространству $C^0_{[\gamma]}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s\big)$ и ее преобразование Лапласа совпадает в полуплоскости Π_γ с функцией $\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}$.

Рассмотрим обобщенную функцию $u = \partial_t^{r+2}(\eta(t)\omega(t))$. По построению $\operatorname{supp} u \subset \overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+$. Так как для произвольных функций $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ и $\psi \in S(\mathbb{R})$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}(e^{-\gamma t}u, \varphi(\sigma)\psi(t)) &= (\eta(t)\omega(t), (-1)^{r+2}\partial_t^{r+2}(\psi(t)e^{-\gamma t})\varphi) \\ &= \int_0^\infty (e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)(-1)^{r+2}e^{\gamma t}\partial_t^{r+2}(\psi(t)e^{-\gamma t})\, dt, \qquad (3.10)\end{aligned}$$

то $u \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$.

Докажем, что $u \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H^l_s)$. Так как $\omega(t) \in C^0_{[\gamma]}\big(\overline{\mathbb{R}}_+, H^l_s\big)$, то справедливо неравенство

$$|(e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)| \le \|e^{-\gamma t}\omega(t)\|^l_s \|\varphi\|^{-l}_{-s} \le C\|\varphi\|^{-l}_{-s}. \qquad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) следует справедливость неравенств

$$\begin{aligned}|(e^{-\gamma t}u, \varphi\psi)| &\le C_1 \int_0^\infty |(e^{-\gamma t}\omega(t), \varphi)| \sum_{k=0}^{r+2} \big|\partial_t^k\psi(t)\big|\, dt \\ &\le C_2 \int_0^\infty \|\varphi\|^{-l}_{-s} \sum_{k=0}^{r+2}\big|\partial_t^k\psi(t)\big|\, dt \le C_3\|\varphi\|^{-l}_{-s}\|\psi\|^{r+2}_0.\end{aligned}$$

Следовательно, u_ψ принадлежит H^l_s и непрерывно зависит от $\psi \in S(\mathbb{R})$, т. е. $e^{-\gamma t}u \in S'_+(\mathbb{R}, H^l_s)$.

Пользуясь определением обобщенной функции u, найдем ее преобразование Лапласа. Для произвольной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}(Lu, \varphi) &= (e^{-\gamma t}u, \varphi\eta_\varepsilon(t)e^{(\gamma-\lambda)t}) = (\eta(t)\omega(t), (-1)^{r+2}\partial_t^{r+2}(\eta_\varepsilon(t)e^{-\lambda t})\varphi) \\ &= \int_0^\infty (\omega(t), \varphi)(-1)^{r+2}\sum_{k=0}^{r+2} C_k\partial_t^k\eta_\varepsilon(t)\partial_t^{r+2-k}e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \int_0^\infty (\omega(t), \varphi)\lambda^{r+2}e^{-\lambda t}\, dt = \lambda^{r+2}\int_0^\infty (\omega(t), \varphi)e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \lambda^{r+2}(\upsilon(\lambda)\lambda^{-r-2}, \varphi) = (\upsilon(\lambda), \varphi).\end{aligned}$$

Следовательно, $\widehat{u}(\lambda) = \upsilon(\lambda)$. Теорема доказана.

4. Построение слабого обобщенного решения задачи Коши

Для построения слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) воспользуемся преобразованием Фурье — Лапласа. Задача (1.1), (1.2) при этом преобразовании переходит в задачу нахождения решения уравнения (1.4) в классе функций, голоморфных в полуплоскости Π_γ, со значениями в пространстве

$S'(\mathbb{R}^n)$ и являющихся преобразованиями Фурье — Лапласа обобщенных функций из пространства $S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, S'(\mathbb{R}^n))$.

Рассмотрим уравнение

$$P(\sigma,\lambda)\upsilon(\lambda) = g(\lambda). \tag{4.1}$$

В работе [20] доказано следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любой обобщенной функции* $g(\lambda) \in \mathscr{H}(\Pi_\gamma, H^l_s)$ *можно построить обобщенную функцию* $\upsilon(\lambda)$, *принадлежащую пространству* $\mathscr{H}\big(\Pi_{\gamma_0}, H^{\widetilde{l}}_{\widetilde{s}}\big)$, *где* $\gamma_0 \geq \gamma$, $\widetilde{l}$, $\widetilde{s}$ *— некоторые числа, зависящие от многочлена* $P(\sigma,\lambda)$ *и чисел* l *и* s, *которая удовлетворяет уравнению* (4.1), *и справедливо неравенство*

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\widetilde{l}}_{\widetilde{s}} \leq c(1+|\lambda|)^\nu \|g(\lambda)\|^l_s, \quad \lambda \in \Pi_{\gamma_0}, \tag{4.2}$$

где $c > 0$, ν *— некоторые числа, зависящие от* s *и* l.

Доказательство теоремы 4.1 состоит в построении сначала регуляризации обобщенной функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda) \in D'(\mathbb{R}^n\backslash N)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, голоморфно зависящей от параметра λ, а затем нахождении обобщенной функции, носитель которой принадлежит множеству общих вещественных нулей многочленов $P_i(\sigma)$, $i = 0, 1, \dots, m$, голоморфно зависящей от параметра λ и такой, что сумма построенной регуляризации и этой обобщенной функции является решением уравнения (4.1), голоморфно зависящим от параметра λ. Следовательно, указанное в теореме 4.1 решение уравнения (4.1) имеет вид

$$\upsilon(\lambda) = [P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\overline{q}} + \sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|\leq r_i} u_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))\delta^{(\alpha)}_{\sigma_i}. \tag{4.3}$$

Первое слагаемое в (4.3) является регуляризацией семейства обобщенных функций $P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda) \in D'(\mathbb{R}^n\backslash N)$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, где $g(\lambda) \in \mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H^l_s\big)$, принадлежащей пространству $\mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H^{l'}_{s'}\big)$, где l', s' — некоторые числа, зависящие от l и s. При выполнении условий (P) и (D) существование указанной регуляризации доказано в [20]. Вектор $\overline{q} = (q_1, \dots, q_p) \in \mathbb{Z}^p_+$ зависит от порядка особенностей функции $P^{-1}(\sigma,\lambda)$ в точках $\sigma_1, \dots, \sigma_p$. При этом справедливо неравенство [20, лемма 2.2]

$$\|[P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\overline{q}}\|^{l'}_{s'} \leq C(1+|\lambda|)^{\widetilde{\nu}} \|g(\lambda)\|^l_s, \quad \lambda \in \Pi_\gamma, \tag{4.4}$$

где $C > 0$, $\widetilde{\nu}$ — некоторые числа, не зависящие от $g(\lambda)$.

Во втором слагаемом в (4.3) δ_{σ_i} — дельта-функция, сосредоточенная в точке σ_i, $u_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))$ — голоморфные функции, являющиеся решением системы линейных уравнений

$$\sum_{|\gamma|\leq r_i-|\alpha|} C^\alpha_{\alpha+\gamma} b_{i\gamma}(\lambda) u_{i\gamma+\alpha}(\lambda, g(\lambda)) = \widetilde{h}_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda)), \quad |\alpha| \leq r_i, \tag{4.5}$$

где $b_{i\gamma}(\lambda) = (-1)^{|\gamma|}\partial^\gamma P(\sigma_i,\lambda)$ — многочлены, $C^\alpha_\beta = \frac{\beta!}{\alpha!(\beta-\alpha)!}$,

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{|\alpha|\leq q_i} \widetilde{h}_{i\alpha}(\lambda, g(\lambda))\delta^{(\alpha)}_{\sigma_i} = g(\lambda) - P(\sigma,\lambda)[P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)]_{\overline{q}}.$$

В [20] доказано существование решения системы (4.5), удовлетворяющего неравенствам

$$|u_{i\beta}(\lambda, g(\lambda))| \le c(1+|\lambda|)^{\nu'} \|g(\lambda)\|_s^l, \quad \lambda \in \Pi_{\gamma_0},\ i=1,\dots,p,\ |\beta| \le r_i, \tag{4.6}$$

где $\gamma_0 \ge \gamma$, ν' — некоторые числа.

Из равенства (4.3) и неравенств (4.4), (4.6) следует справедливость неравенства (4.2).

Теорема 4.1 обеспечивает существование слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Теорема 4.2. *Если выполнены условия* (P) *и* (D), *то для любых начальных данных* $g_i \in H_l^s$, $i = 0,\dots,m-1$, *и любой обобщенной функции* $f \in S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H_{l'}^{s'}\big)$ *существует слабое обобщенное решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *принадлежащее пространству* $S'_{[\widetilde{\gamma}]}\big(\mathbb{R}, H_{\widetilde{l}}^{\widetilde{s}}\big)$, *где* $\widetilde{\gamma} > \gamma$, $\widetilde{s}$, $\widetilde{l}$ *— некоторые числа, зависящие от* s, l, s', l'.

Доказательство. Из условия теоремы и теоремы 4.1 следует, что существует семейство обобщенных функций $\upsilon(\lambda) \in \mathscr{H}\big(\Pi_{\gamma_0}, H_{\widetilde{s}}^{\widetilde{l}}\big)$, удовлетворяющее уравнению (1.4), и справедливо неравенство

$$\|\upsilon(\lambda)\|_{\widetilde{s}}^{\widetilde{l}} \le c(1+|\lambda|)^{\nu} \left\| \widetilde{f}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma)\lambda^j \widehat{g}_k \right\|_{s''}^{l''}, \tag{4.7}$$

где $l'' = \min\{l, l'\}$, $s'' = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma,\lambda)\}$.

Так как функция $\widetilde{f}(\lambda)$ является преобразованием Фурье — Лапласа обобщенной функции $f \in S'_{[\gamma]}(\mathbb{R}, H_{l'}^{s'})$, то из теоремы 3.4 следует справедливость неравенства

$$\|\widetilde{f}(\lambda)\|_{s''}^{l''} \le C(\gamma')(1+|\lambda|)^{\mu}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \gamma', \tag{4.8}$$

где $\gamma' > \gamma$, а $C(\gamma')$, μ — числа, зависящие от f.

Из неравенств (4.7) и (4.8) следует справедливость неравенства

$$\|\upsilon(\lambda)\|_{\widetilde{s}}^{\widetilde{l}} \le \widetilde{c}(\widetilde{\gamma})(1+|\lambda|)^{\nu'}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \widetilde{\gamma},$$

где $\widetilde{\gamma} = \max\{\gamma_0, \gamma'\}$, $\nu' = \max\{\nu+\mu, \nu+m\}$, $\widetilde{c}(\widetilde{\gamma})$, μ — числа, зависящие от f и g_i, $i = 0,\dots,m-1$.

По теореме 3.5 существует обобщенная функция $u = (\mathscr{L}\mathscr{F})^{-1}\upsilon(\lambda)$, принадлежащая пространству $S'_{[\widetilde{\gamma}]}\big(\mathbb{R}, H_{\widetilde{l}}^{\widetilde{s}}\big)$. По построению она удовлетворяет уравнению (1.3), т. е. является слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2). Теорема доказана.

Для уравнения (1.1), удовлетворяющего условию (P'), построение слабого обобщенного решения задачи Коши (1.1), (1.2) упрощается. Решение уравнения (4.1) в этом случае сводится к умножению обобщенной функции $g(\lambda)$, голоморфно зависящей от $\lambda \in \Pi_\gamma$, на функцию $P^{-1}(\sigma,\lambda)$.

Теорема 4.3. *Если уравнение* (1.1) *удовлетворяет условию* (P'), *то для любых начальных данных* $g_i \in H_l^s$, $i = 0,\dots,m-1$, *и любой обобщенной функции* $f \in S'_{[\gamma]}\big(\mathbb{R}, H_{l'}^{s'}\big)$ *существует единственное слабое обобщенное решение задачи Коши* (1.1), (1.2), *принадлежащее пространству* $S'_{[\gamma']}\big(\mathbb{R}, H_{\widetilde{l}}^{\widetilde{s}}\big)$, *где* $\gamma' > \gamma$, $\widetilde{l} = \min\{l, l'\}$, $\widetilde{s} = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma,\lambda)\} - q(\widetilde{l})$.

Доказательство. Из условия (P') следует, что функция $P^{-1}(\sigma,\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.2 в полуплоскости $\Pi_{\gamma'}$, $\gamma' > \gamma$. Это следует из неравенств (2.17). Из этой теоремы следует, что решением уравнения (4.1), где $g(\lambda) \in \mathscr{H}\big(\Pi_\gamma, H_{\widehat{s}}^{\widetilde{l}}\big)$, является обобщенная функция $\upsilon(\lambda) = P^{-1}(\sigma,\lambda)g(\lambda)$, принадлежащая пространству $\mathscr{H}\big(\Pi_{\gamma'}, H^{\widehat{l}}_{\widehat{s}-q(\widetilde{l})}\big)$, и справедливо неравенство

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\widetilde{l}}_{\widehat{s}-q(\widetilde{l})} \le C(\widetilde{l},\gamma')(1+|\lambda|)^{\nu(\widetilde{l})(p+m)+p}\|g(\lambda)\|^{\widetilde{l}}_{\widehat{s}}, \quad \operatorname{Re}\lambda \ge \gamma', \tag{4.9}$$

где $C(\widetilde{l},\gamma') > 0$, p — константа в (2.16), а $q(\widetilde{l})$ — функция, определенная в теореме 2.1.

Если уравнение (4.1) получено в результате применения преобразования Фурье — Лапласа к уравнению (1.3), то его правая часть имеет вид

$$g(\lambda) = \widetilde{f}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma)\lambda^j\widehat{g}_k$$

и принадлежит пространству $\mathscr{H}(\Pi_\gamma, H^{\widetilde{l}}_{\widehat{s}})$, где $\widetilde{l} = \min\{l,l'\}$, $\widehat{s} = \min\{s', s - \deg_\sigma P(\sigma,\lambda)\}$. Тогда искомое решение уравнения (1.4) имеет вид

$$\upsilon(\lambda) = P^{-1}(\sigma,\lambda)\left(\widetilde{f}(\lambda) + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{m-j-1} P_{j+k+1}(\sigma)\lambda^j\widehat{g}_k\right),$$

а неравенство (4.9) принимает вид

$$\|\upsilon(\lambda)\|^{\widetilde{l}}_{\widetilde{s}} \le C(\widetilde{l},\gamma')(1+|\lambda|)^{\nu(\widetilde{l})(p+m)+p}\left(\|\widetilde{f}(\lambda)\|^{l'}_{s'} + (1+|\lambda|)^m\sum_{k=0}^{m-1}\|\widehat{g}_k\|^l_s\right),$$

где $\operatorname{Re}\lambda \ge \gamma'$, $\widetilde{s} = \widehat{s} - q(\widetilde{l})$.

Так как это неравенство аналогично неравенству (4.7), дальнейшие рассуждения совпадают с приведенными в доказательстве теоремы 4.2 после получения неравенства (4.7). Следовательно, по теореме 3.5 существует обобщенная функция $u = (\mathscr{L}\mathscr{F})^{-1}\upsilon(\lambda)$, принадлежащая пространству $S'_{[\gamma']}\big(\mathbb{R}_+, H^{\widetilde{s}}_{\widetilde{l}}\big)$, которая по построению является решением уравнения (1.3), т. е. является слабым обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2).

Единственность решения задачи Коши (1.1), (1.2) в рассматриваемых пространствах следует из теоремы 3.2. Теорема доказана.

Представляют интерес условия на начальные данные в (1.2) и правую часть в (1.1), при которых построенные слабые обобщенные решения задачи Коши (1.1), (1.2) являются сильными обобщенными решениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Любич Ю. И.* Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши // Успехи мат. наук. 1966. Т. 21, № 3. С. 3–51.
2. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Тр. Моск. мат. о-ва. 1960. Т. 9. С. 401–423.
3. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
4. *Свешников А. Г., Алешин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. А.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
5. *Костюченко А. Г, Эскин Г. И.* Задачи Коши для уравнений типа Соболева —Гальперна // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 273–284.

6. *Эскин Г. И.* О единственности решения задачи Коши для уравнений не типа Ковалевской // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 285–295.
7. *Павлов А. Л.* Задача Коши для уравнения типа Соболева — Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 11. С. 3–20.
8. *Павлов А. Л.* Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. тр. 2018. Т. 21, № 1. С. 125–154.
9. *Павлов А. Л.* Существование решения задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 824–844.
10. *Павлов А. Л.* Разрешимость задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 5. С. 1119–1136.
11. *Павлов А. Л.* О задаче Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 118–232.
12. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
13. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений (Обобщенные функции. Вып. 3). М.: Физматгиз, 1958.
14. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1978.
15. *Земанян А. Г.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1974.
16. *Крейн С. Г., Хазан М. И.* Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 1983. Т. 21. С. 13–264.
17. *Хилле В., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
18. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
19. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4-х т. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1986.
20. *Павлов А. Л.* О делении обобщенной функции медленного роста, голоморфно зависящей от параметра, на многочлен // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 1130–1141.
21. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
22. *Павлов А. Л.* Регуляризация обобщенной функции медленного роста, голоморфно зависящей от параметра // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1279–1303.
23. *Трев Ж.* Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами. М.: Мир, 1965.
24. *Arendt W. et al.* Vector-valued Laplase transforms and Cauchy problems: Second Edition. Basel: Springer, 2011. (Monogr. Math.; V. 96).
25. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. В 4-х т. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье. М.: Мир, 1986.
26. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
27. *Фукс Б. А., Левин В. И.* Функции комплексного переменного и их приложения. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Поступила в редакцию 2 октября 2025 г.
После доработки 5 февраля 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Павлов Александр Леонидович (ORCID 0000-0003-0532-7486)
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001, ДНР;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р.Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР
alex4909@gmail.com

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 517.95

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПО ТОЧЕЧНЫМ ДАННЫМ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

А. А. Потапков, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматриваются вопросы корректности обратных задач восстановления коэффициента теплопередачи с использованием набора значений решения в фиксированных точках на границе области. Условия типа дифракции используются на границе раздела сред. Граничные условия нелинейные и коэффициент теплопередачи представим в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. При определенных условиях на данные доказывается, что существует единственное решение задачи локально по времени, которое зависит от данных задачи непрерывно. Доказательство опирается на априорные оценки и принцип сжимающих отображений.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.309

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

Посвящается Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Введение

В статье исследуются обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи по точечным данным. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t,x), \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{1}$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x)u_{x_i} + a_0(t,x)u, \quad a_{ij} = a_{ji}\ \forall i,j,$$

$G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ. Считаем, что область G разделена на два открытые множества G^+ и G^-, $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}, G^+ \cap G^- = \varnothing$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0,T) \times \Gamma_0$, $S = (0,T) \times \Gamma$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta(t,x)(\varphi(u) - \varphi(\overline{u}_0)) = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026).

где
$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} n_i u_{x_j},$$
и условиями сопряжения
$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t,x), \quad u^+(t,x) = u^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \tag{3}$$
$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\, x\to x_0\in\Gamma_0} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t,x_0) = \lim_{x\in G^\pm,\, x\to x_0\in\Gamma_0} u(t,x),$$
$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ и $\vec{n}$ — внешние единичные нормали к ∂G^- и Γ. Условия переопределения имеют вид
$$u(t, b_i) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \tag{4}$$
где $b_i \in \Gamma$, $\{b_i\}_{i=1}^r$ — некоторый набор точек. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4), и неизвестной функции
$$\beta(t,x) = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(t) \Phi_i(t,x),$$
где функции Φ_i заданы, а функции $\beta_i(t)$ считаются неизвестными.

Обратные задачи возникают в самых различных задачах при описании процессов тепломассопереноса, диффузии, фильтрации, в экологии и т. п. (см. [1–3]). В частности, задача (1)–(4) возникает при идентификации параметров тепломассопереноса в задачах описания тепловых режимов мерзлых грунтов и техногенного загрязнения почв [4–6]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач (1)–(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, точки $\{b_i\}$ в (4) могут быть как внутренними [7–12] так и граничными точками [13–15] области G (см. стационарный случай в [16]). Имеется ряд работ, посвященных определению коэффициента теплопередачи в нелинейном граничном условии вида
$$\frac{\partial u}{\partial N} + \rho(t)\varphi(u) = g,$$
где функция ρ считается неизвестной (см. [17]). Отметим работы (см. библиографию в [18–20]), где восстанавливается функция вида $\varphi(t,x,u)$ (иногда не зависящая от независимых переменных) в граничном условии Робина вида $\frac{\partial u}{\partial N} + \varphi(t,x,u) = g$ или близком условии. В этих работах используются интегральные условия переопределения различного вида и в некоторых случаях получены теоремы существования и единственности решений таких задач локально по времени. Основной метод построения приближенного решения — сведение задачи к задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала. Отметим, что очень часто эти две задачи не эквивалентны.

Теоретических результатов, посвященных задаче (1)–(4), немного. По-видимому, первая работа, посвященная задаче (1)–(4) в многомерном случае, есть работа [21] (см. также [22]), где в случае $Mu = u_t - \Delta u$ и $r = 1$ были показаны теорема существования и единственности классических решений задачи об определении потока и теорема единственности в задаче об определении коэффициента теплопередачи. Другой подход описан в работе [23], где получена теорема существования и единственности решений в случае $\varphi(u) = u$ и задача рассматривалась в обычной постановке (т. е. условия сопряжения отсутствуют). В данной работе мы используем ту же самую идею и получаем теорему существования и единственности решений в пространствах Соболева.

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Обозначения для пространств Лебега $L_p(G;E)$, Соболева $W_p^s(G;E)$, $W_p^s(Q;E)$ и Гёльдера $C^\alpha(\overline{G};E)$ ($\alpha \geq 0$) стандартные (см. [24, 25]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то пишем просто $W_p^s(G)$ и т. д. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0,T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J;L_p(G)) \cap L_p\big(J;W_p^r(G)\big)$. Соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J;L_p(\Gamma)) \cap L_p\big(J;W_p^r(\Gamma)\big)$. Пусть $(u,v) = \int\limits_G u(x)v(x)\,dx$ и $B_\delta(b_i)$ — шар радиуса δ с центром в точке b_i. Положим $G_\delta = G \cap \bigcup\limits_{i=1}^r B_\delta(b_i)$, $\Gamma_\delta = \Gamma \cap \bigcup\limits_{i=1}^r B_\delta(b_i)$, $Q_\tau^\pm = (0,\tau) \times G^\pm$, $Q_\tau = (0,\tau) \times G$, $S_\tau = (0,\tau) \times \Gamma$.

Далее считаем, что $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$, $\Gamma_\delta \in C^3$ (см. определение в [26, гл. 1]) для некоторого $\delta > 0$. Без ограничения общности можем считать, что для каждого $i = 1,2,\dots,r$ найдутся окрестность Y_i точки b_i и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такие, что $Y_i \cap \Gamma_0 = \varnothing$, ось y_n направлена по внутренней нормали к Γ в точке b_i, уравнение части границы $Y_i \cap \Gamma$ имеет вид $y_n = \gamma_i(y')$, $\gamma_i(0) = 0$, $|y'| < \delta$, $y' = (y_1,\dots,y_{n-1})$, причем $\gamma_i \in C^3(\overline{B'_\delta})$ ($B'_\delta = \{y' : |y'| < \delta\}$) и $G \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, 0 < y_n - \gamma_i(y') < \delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma_i(y') < 0\}$, $\delta_1 > (M+1)\delta$, где M — постоянная Липшица функции γ_i. Иначе уменьшим параметр δ. Далее считаем, что параметр $\delta > 0$ зафиксирован. Мы используем выпрямление границы: $z_n = y_n - \gamma_i(y')$, $z' = y'$, где y — локальная система координат в точке b_i. Оно и обратное к нему $y_n = z_n + \gamma_i(z')$, $y' = z'$ принадлежат классу C^3 (т. е. $y = y(z) \in C^3(\overline{Y_i})$). То же самое утверждение имеет место и для преобразований $x = x(y(z)) = x^i(z)$. Пусть $U = \{z : |z'| < \delta,\ 0 < z_n < \delta_1\}$, $Q_1^\tau = (0,\tau) \times U$, $Q_1 = (0,T) \times U$ и $S_1^\tau = (0,\tau) \times B'_\delta$, $S_1 = (0,T) \times B'_\delta$.

Будем использовать в пространстве $W_p^s(0,\beta;E)$ ($s \in (0,1)$, $\beta > 0$, E — банахово пространство) норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(0,\beta;E)} = \big(\|q\|^p_{L_p(0,\beta;E)} + \langle q\rangle^p_{s,\beta}\big)^{1/p},$$

$$\langle q\rangle^p_{s,\beta} = \int\limits_0^\beta \int\limits_0^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}}\,dt_1 dt_2.$$

При $s \in (0,1)$ положим

$$\widetilde{W}_p^s(0,\beta;E) = \big\{q \in W_p^s(0,\beta;E) : t^{-s}q(t) \in L_p(0,\beta;E)\big\}.$$

Наделим это пространство нормой

$$\|q(t)\|^p_{\widetilde{W}_p^s(0,\beta;E)} = \Big\|\frac{q}{t^s}\Big\|^p_{L_p(0,\beta;E)} + \langle q\rangle^p_{s,\beta}.$$

Если $s \neq 1/p$, то эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(0,\beta;E)}$ для функций $q(t)$ таких, что $q(0) = 0$ при $s > 1/p$, эквивалентны (см. [24, п. 3.2.6, лемма 1]). Положим

$$\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta) = \widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(G)) \cap L_p\big(0,\beta;W_p^{2s}(G)\big).$$

Нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s}(0,\beta;L_p(G))}$ определяются естественным образом, например,

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)} = \big(\|u\|^p_{\widetilde{W}_p^{s}(0,\beta;L_p(G))} + \|u\|^p_{L_p(0,\beta;W_p^{2s}(G))}\big)^{1/p}.$$

Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^{s}(0,\beta;L_p(\Gamma))$, $\widetilde{W}_p^{s,2s}(S_\beta)$. Далее считаем, что параметр $p > n+2$ зафиксирован. Следующие две леммы известны (см. [27, леммы 1.19, 1.20]).

Лемма 1. *Существует постоянная C, не зависящая от $\tau \in (0,T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}, \qquad \left\|\frac{\partial v}{\partial n}\right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\tau)$ таких, что $v(x,0)=0$. Здесь $s_1 = 1-\frac{1}{2p}$ и $s_0 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$.

Лемма 2. *Пусть $s \in ((n+2)/2p,1)$. Тогда если $q \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то $qv \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \le c_0\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}(\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}).$$

Если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \le c_1\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

а если $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \le c_2\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Для функций $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \le c_3\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Постоянные c_i, $i=0,1,2,3$, не зависит от q, v и $\tau \in (0,T]$. Множество Q_τ в этих утверждениях может быть заменено на S_τ (при этом считаем, что $s \in ((n+1)/2p,1)$).

Замечание 1. Условие $s \in ((n+2)/2p,1)$ гарантирует включение $W_p^{s,2s}(Q) \subset C(\overline{Q})$ (см. теорему 1.22 в [27]).

Лемма 3. *Пусть $\varphi(u) \in W_\infty^2(-R,R)$ для всех $R>0$. Пусть $v \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$ и $\|v\|_{L_\infty(S_\tau)} = M$. Тогда*

$$\|\varphi(v)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_1(M) + c_2(M)\|v\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p. \tag{5}$$

Пусть $v_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$, $i=1,2$, $\|v_i\|_{L_\infty(S_\tau)} + \|v_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le M$ и $v_1(0,x) = v_2(0,x)$. Тогда

$$\|\varphi(v_1)-\varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_3(M)\|v_1-v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}. \tag{6}$$

Здесь постоянные $c_i(M)$, $i=1,2,3$, не зависят от $\tau \le T$.

Доказательство. Оценка (5) вытекает непосредственно из определения нормы в пространстве $W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$. Чтобы получить оценку (6), воспользуемся равенством

$$\varphi(v_1)-\varphi(v_2) = \int\limits_0^1 \varphi'(v_2+\xi(v_1-v_2))\,d\xi(v_1-v_2).$$

Используя лемму 2 и неравенство (5), получим

$$\|\varphi(v_1)-\varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le \int\limits_0^1 (\|\varphi'(v_2+\xi(v_1-v_2))\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}$$

$$+\|\varphi'(v_2+\xi(v_1-v_2))\|_{L_\infty(S_\tau)})\,d\xi\|v_1-v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_3(M)\|v_1-v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}.$$

Приведем условия на данные. Оператор L предполагается эллиптическим, т. е. существует постоянная $\delta_0>0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\xi_i\xi_j \ge \delta_0|\xi|^2 \text{ для всех } (t,x)\in Q,\ \xi\in\mathbb{R}^n.$$

Кроме того, предположим, что

$$a_i\in L_p(Q),\quad a_{kl}|_{Q^\pm}\in C(\overline{Q^\pm}),\quad a_{kl}|_\Gamma\in W_p^{s_0,2s_0}(S),\quad a_{kl}^\pm\big|_{\Gamma_0}\in W_p^{s_0,2s_0}(S_0),\quad (7)$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N}=\frac{\partial u_0^-}{\partial N},\quad u_0^+=u_0^-,\quad x\in\Gamma_0,\ s_0=\frac12-\frac1{2p},\quad (8)$$

$$\beta\in W_p^{s_0,2s_0}(S),\quad g(0,x)=B(x,0,\partial_x)u_0|_\Gamma,\quad \varphi(u)\in W_\infty^2(-R,R)\quad \forall R>0,\quad (9)$$

$$u_0(x)|_{G^\pm}\in W_p^{2-\frac2p}(G^\pm),\quad f\in L_p(Q),\quad g,\overline{u}_0\in W_p^{s_0,2s_0}(S),\quad (10)$$

$$a_i\in L_\infty\big(0,T;W_p^1(G_\delta)\big),\quad a_{kl}\in L_\infty\big(0,T;W_\infty^1(G_\delta)\big),\quad \varphi(u)\in W_\infty^3(-R,R)\quad (11)$$

для каждого $R>0$.

Построим функции $\varphi_i(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x)=1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x)=0$ в $\mathbb{R}^n\setminus B_{3\delta/4}(b_i)$.

Пусть Y_i — координатная окрестность точки $b_i\in\Gamma$. Выпрямим границу и перейдем к системе координат $z=(z',z_n)$. Мы также предполагаем, что

$$\nabla_{z'}\beta(t,x^i(z',0))\in W_p^{s_0,2s_0}(S_1),\quad (12)$$

$$\nabla_{z'}\varphi_i g(t,x^i(z',0)),\ \nabla_{z'}\varphi_i\overline{u}_0(t,x^i(z',0))\in W_p^{s_0,2s_0}(S_1),\quad (13)$$

$$\begin{gathered}\nabla_{z'}\varphi_i u_0(x^i(z))\in W_p^{2-2/p}(U),\quad \nabla_{z'}a_{kl}(t,x^i(z',0))\in W_p^{s_0,2s_0}(S_1),\\ \nabla_{z'}\varphi_i f(t,x^i(z))\in L_p(Q_1),\end{gathered}\quad (14)$$

где $k,l=1,2,\dots,n,\ i\le r$. Можно показать, что условия (12)–(14) не зависят от введенной локальной системы координат y и системы координат z.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (7)–(10). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение* u *задачи* (1)–(3) *такое, что* $u|_{Q^\pm_{\tau_0}}\in W_p^{1,2}(Q^\pm_{\tau_0})$. *Если* $\beta=0$, *то справедлива оценка*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+_{\tau_0})}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-_{\tau_0})}\le C_0(\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)}+\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)}$$

$$+\|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})}+\|g\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_{\tau_0})}).\quad (15)$$

Если $u_0\equiv0$, $\beta=0$, *то оценка может быть переписана в виде*

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^+_{\tau_0})}+\|u\|_{W_p^{1,2}(Q^-_{\tau_0})}\le C_1(\|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})}+\|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_{\tau_0})}),\quad (16)$$

где постоянная C_1 не зависит от τ.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$M\Psi = f, \quad \Psi|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial N}\bigg|_S = g_0, \quad g_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial N},$$

$$\frac{\partial\Psi^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial\Psi^-}{\partial N}(t,x), \quad \Psi^+(t,x) = \Psi^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0.$$

Фиксируем $\tau \le T$. По теореме 2.19 в [27] существует единственное решение этой задачи из класса $\Psi \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ (обозначим его через $R_\tau(g_0)$), причем имеет место оценка

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_1(\|g_0\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}).$$

Если $u_0 = 0$, то последнюю оценку можно уточнить:

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_2(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}), \tag{17}$$

где постоянная C_2 не зависит от параметра τ. Доказательство этой оценки повторяет соответствующее в теореме 2 в [28], поэтому его опустим. Тогда $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ — решение задачи (1)–(3) в том и только в том случае, если

$$u|_S = R_\tau(g - \beta(t,x)(\varphi(u) - \varphi(\overline{u}_0)))|_S, \quad u|_S \in W_p^{s_1,2s_1}(S_\tau).$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение, если параметр τ достаточно мал. Сделаем замену $u = v + \Phi$, $\Phi = R_\tau(g - \beta(\varphi(u_0) - \varphi(\overline{u}_0))$. Тогда имеем уравнение

$$v|_S = R_\tau(g - \beta(t,x)(\varphi(v+\Phi) - \varphi(\overline{u}_0)))|_S - \Phi|_S = R_{0\tau}(v|_S). \tag{18}$$

Ищем решение этого уравнения в классе $v \in \widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)$, $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$. Возьмем $v = 0$. Получим $R_{0\tau}(0)$ — решение задачи

$$Mv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N}\bigg|_{S_\tau} = -\beta(\varphi(\Phi) - \varphi(u_0)) \in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau).$$

Возьмем $R_1 = 2\|R_{0T}(0)\|_{\widetilde{W}_p{}^{s_1,2s_1}(S)}$. Пусть $\|v_i\|_{\widetilde{W}_p{}^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le R_1$. В силу теорем вложения $\|v_i\|_{C(\overline{S_\tau})} \le C_0R_1$, где C_0 — некоторая постоянная. По определению оператора R_τ правая часть в (18) обращается в нуль при $t = 0$. Покажем, что на малом промежутке времени оператор $R_{0\tau}(v)$ удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. В силу (17) и лемм 2, 3 имеем оценку

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le c_1\|\beta(\varphi(v_1) - \varphi(v_2))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_2\|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_3(R_1)\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}. \tag{19}$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p{}^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c\tau^{1/2}\|v\|_{\widetilde{W}_p{}^{s_1,2s_1}(S_\tau)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \tag{20}$$

где постоянная c не зависит от $\tau \le T$. Действительно, непосредственно из определения нормы имеем

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau;L_p(\Gamma))} \le c\tau^{1/2}\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1}(0,\tau;L_p(\Gamma))}.$$

Далее,

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_0}(\Gamma))} \le c\|v\|^{\theta}_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_1}(\Gamma))}\|v\|^{1-\theta}_{L_p(S_\tau)} \le c_4\tau^{s_1(1-\theta)}\|v\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)},$$

где $s_1(1-\theta)=1/2$, $\theta=s_0/s_1$, используем лемму 1.14 в [27] и определение нормы в $W_p^{s_1}(0,\tau;L_p(\Gamma))$. Две последние оценки гарантируют (20). Используя оценки (20), (19), получим

$$\|R_{0\tau}(v_1)-R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \le c_5(R_1)\tau^{\frac{1}{2}}\|v_1-v_2\|_{\widetilde{W_p}^{s_1,2s_1}(S_\tau)}.$$

Выберем τ_0 такое, что $\tau^{1/2}c_5(R_1)\le\frac{1}{2}$ при $\tau\le\tau_0$. Тогда выполняются условия теоремы о неподвижной точке и уравнение (18) имеет решение. Если $u_0=0$, то легко увидеть, что постоянные в используемых неравенствах не зависят от $\tau\le\tau_0$ и, значит, имеет место оценка (16).

Замечание 1. Без ограничения общности можем считать, что параметр τ_0 — убывающая функция от величины R_1. В свою очередь, величина R_1 ограничена постоянной cM с $M=\|\beta\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}+\|\beta\|_{L_\infty(S_\tau)}$, c — постоянная, не зависящая от β, при этом норма v в $W_p^{s_1,2s_1}(S_{\tau_0})$ оценивается через $2R_1$ и норма v в $W_p^{1,2}(Q^+_{\tau_0})$ и $W_p^{1,2}(Q^-_{\tau_0})$ оценивается постоянной, зависящей от R_1.

В следующей теореме используем локальную систему координат z.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (7)–(14) *и* $\beta=0$. *Тогда решение задачи* (1)–(3), *полученное в теореме* 1, *обладает свойством* $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z))\in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)$, $i=1,\dots,r$, *причем если* $u_0\equiv 0$, *то имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i u(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_1(\|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}+\|f\|_{L_p(Q_\tau)}$$
$$+\sum_{i=1}^{r}(\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_1^\tau)}+\|\nabla_{z'}\varphi_i g(x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)})),$$

где постоянная C_1 *не зависит от* $\tau\in(0,\tau_0]$.

Доказательство. Доказательство дословно повторяет рассуждения из теоремы 2 в [23] и использует оценку (17).

3. Основные результаты

Далее считаем, что функции $\Phi_i(t,x)$ обладают следующими свойствами:

$$\Phi_i\in W_p^{s_0,2s_0}(S),\quad \nabla_{z'}\Phi_i(t,x^j(z',0))\in W_p^{s_0,2s_0}(S_1),\quad i,j=1,2,\dots,r. \tag{21}$$

Пусть $\Phi(t)$ — матрица с элементами $\phi_{ij}=\Phi_j(t,b_i)$, $i,j=1,2,\dots,r$. В силу теорем вложения $\Phi_i(t,b_j)\in C^{1/2-(n+2)/2p}([0,T])$ (см. [27, теорема 1.22]). Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\begin{gathered}|\varphi(\psi_i(t))-\varphi(\overline{u}_0)(t,b_i)|\ge\delta_1,\quad |\det\Phi|\ge\delta_1>0\quad \forall t\in[0,T],\\ \psi_i\in W_p^{s_1}(0,T),\quad u_0(b_i)=\psi_i(0),\quad i=1,2,\dots,r,\end{gathered} \tag{22}$$

где δ_1 — положительная постоянная. Возьмем первое из равенств (2) в точке $(0,b_j)$. Имеем

$$\sum_{i=1}^{r}\beta_i(0)\Phi_i(0,b_j)=\frac{1}{(\varphi(u_0(b_j))-\varphi(\overline{u}_0(0,b_j)))}\left(g(0,b_j)-\frac{\partial u_0(b_j)}{\partial N}\right), \tag{23}$$

где $j = 1, \dots, r$. Отсюда определяем величины $\beta_i(0)$. Если решение задачи (1)–(4) существует, то выполнено равенство

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial N} + \beta(0,x)[\varphi(u_0) - \varphi(\overline{u}_0)] = g(0,x), \quad x \in \Gamma, \tag{24}$$

где постоянные $\beta_j(0)$ — решение системы (23). Положим

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i(0)\Phi_i(t,x), \quad \alpha = \beta - \beta_0, \quad \alpha_i = \beta_i(t) - \beta_i(0), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

В силу условия (21) $\beta_0 \in W_p^{s_0,2s_0}(S)$, $\nabla_{z'}\beta_0(x^j(z',0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1)$ для всех j. Построим функцию w_0 как решение задачи (1)–(3) с $\beta = \beta_0$. Решение существует на некотором промежутке $[0,\tau_0]$ и обладает свойствами, указанными в теоремах 1, 2. Сделаем замену $u = v + w_0$ в (1)–(4). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (t,x) \in Q = (0,T) \times G, \tag{25}$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta_0(\varphi(v + w_0) - \varphi(w_0)) = -\alpha(\varphi(v + w_0) - \varphi(\overline{u}_0)), \tag{26}$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t,x), \quad v^+(t,x) = v^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0, \tag{27}$$

$$v(t,b_i) = \widetilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0(t,b_i). \tag{28}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (7), (8), (10), (11), (13), (14), (21), (22), (24). *Тогда на некотором промежутке* $[0,\tau_0]$ *существует единственное решение задачи* (1)–(4) *такое, что* $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$, $\beta_i(t) \in W_p^{s_0}(0,\tau_0)$, $i = 1, 2, \dots, r$, *причем* $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^{\tau_0})$, $i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (25)–(28).

Построение операторного уравнения для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируем $R_2 > 0$ (эту величину определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau) : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_2\}$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_2}$ и решая задачу (25)–(27) на некотором промежутке $[0,\tau_0]$, мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \to v(\vec{\alpha})$. Кроме этого отображения нам понадобится еще одно отображение. Фиксируя i и умножая уравнение (25) на φ_i, имеем

$$Mv_i = v_{it} - Lv_i = [\varphi_i, L]v = f_0, \quad v_i|_{t=0} = 0, \quad v_i = \varphi_i v, \tag{29}$$

где

$$[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2\sum_{l,k=1}^{n} a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^{n} a_{lk}\varphi_{ix_l x_k} v - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_{ix_k} v.$$

Сделав замену переменных $x = x^i(z)$, перепишем уравнение в (29) в виде

$$v_{it} - c_{nn}(t,z)v_{iz_n z_n} = \sum_{l+k<2n} c_{kl} v_{iz_k z_l} + \sum_{k=1}^{n} c_k v_{iz_k} + c_0 v_i + f_0 = f_{1i}, \quad z \in U. \tag{30}$$

Отметим, что $c_{nn} > 0$ для всех t, z. В силу свойств решения v и условий на коэффициенты имеем $\varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^\tau)$, $\nabla_{z'}\varphi_i f_{1i} \in L_p(Q_1^\tau)$ и, более того, $f_{1i}(t,z',z_n) \in$

$C^\alpha(\overline{B'_\delta}; L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))$ с $\alpha \le 1-(n-1)/p$ (см. теорему 1.22 в [27]), после может быть изменение на множестве меры нуль. Рассмотрим задачу

$$\omega_{it}(t,z_n) - c_{nn}(t,0,z_n)\omega_{iz_nz_n} = f_{1i}(t,0,z_n), \quad i \le r,\ z_n \in (0,\delta_1), \tag{31}$$

$$\omega_i(0,z_n) = 0, \quad \omega_i|_{z_n=0} = \widetilde{\psi}_i(t), \quad \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1,2,\dots,r. \tag{32}$$

Пусть $v(\vec{\alpha})$ — решение задачи (25)–(27), построим функции ω_i как решения задач (31), (32). Таким образом, каждому $\vec{\alpha}$ отвечает функция v и набор функций ω_i $(i = 1,2,\dots,r)$. Имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial N} = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(t,z')v_{iz_j}(t,x^i(z',0)).$$

Полагая $z' = 0$ и используя (28), запишем равенства

$$\eta_n(t,0)\omega_{jz_n}(t,0) + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_i(t,0)v_{z_i}(t,x^j(0)) \\ + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(w_0(t,b_j))) = -\alpha(t,b_j)(\varphi(\psi_j) - \varphi(\overline{u}_0)), \tag{33}$$

которые также можно переписать в виде

$$\alpha(t,b_j) = \frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t,b_j)) - \varphi(\psi_j)}\Biggl(\eta_n(t,0)\omega_{jz_n}(t,0) \\ + \sum_{i=1}^{n-1}\eta_i(t,0)v_{z_i}(t,b_j) + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(w_0(t,b_j)))\Biggr), \tag{34}$$

где $\varphi(\psi_j) - \varphi(\overline{u}_0(t,b_j)) \ne 0$ (см. (22)). Это и есть система для нахождения вектора $\vec{\alpha}$. Она может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1}\vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \tag{35}$$

где координата F_j вектора $\vec{F}$ есть правая часть (34). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1}\vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c\|\vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{36}$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{W_p^{s_0}(0,\tau)} \le R_2\}$ и переводит его в себя. Рассмотрим систему (35) и найдем $R(0)$. Если $\vec{\alpha} = 0$, то в силу теоремы единственности решение v задачи (25)–(27) есть 0. Тогда правая часть в (31) равна нулю и решения w_i задачи (31), (32) не зависит от $\vec{\alpha}$. Положим $R_2 = 2\|R(0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S)}$. Величина R_2 зависит только от известных данных задачи и не зависит от $\vec{\alpha}, \tau$.

Оценки для решений задачи (25)–(27). Без ограничения общности можем считать (см. замечание 1 и теорему 1), что промежуток $[0,\tau_0]$, на котором решение задачи (25)–(27) существует и единственно, не зависит от $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le R_2\}$, а зависит только от величины R_2. Далее, имеет место оценка (теорема 1)

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le C_2(R_2),$$

где постоянная C_2 зависит от R_2, но не зависит от параметра τ. Пусть

$$g_0 = -\beta_0(\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha(\varphi(v+w_0) - \varphi(\overline{u}_0)).$$

Из теоремы 2 вытекает, что найдется постоянная c_3 такая, что

$$\sum_{i=1}^{r} \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le c\Bigg(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \sum_{i=1}^{r}\|\varphi_i\nabla_{z'}g_0(t,x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(S_1^\tau)}\Bigg).$$

Воспользовавшись леммами 2, 3, получим

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c(R_2).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\partial_{z_k}g_0 = -\beta_{0z_k}(\varphi(v+w_0)-\varphi(w_0)) - \alpha_{z_k}(\varphi(v+w_0)-\varphi(\overline{u}_0))\\ -\beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k}+w_{0z_k})-\varphi'(w_0)(w_{0z_k}))-\\ -\alpha(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k}+w_{0z_k})-\varphi'(\overline{u}_0)\overline{u}_{0z_k}).\end{aligned}$$

Каждое слагаемое оценивается с использованием лемм 2, 3. Рассмотрим, например, третье слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned}&\|\varphi_i\beta_0(\varphi'(v+w_0)(v_{z_k}+w_{0z_k})-\varphi'(w_0)(w_{0z_k}))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c\|\varphi'(v+w_0)(v_{z_k}+w_{0z_k})-\varphi'(w_0)w_{0z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c_1\|(\varphi'(v+w_0)-\varphi'(w_0))(v_{z_k}+w_{0z_k})+\varphi'(w_0)v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\\ &\le c_2(\|\varphi'(v+w_0)-\varphi'(w_0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}(\|v_{z_k}+w_{0z_k}\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}+\|v_{z_k}+w_{0z_k}\|_{L_\infty(S_1^\tau)})\\ &\quad+(\|\varphi'(w_0)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}+\|\varphi'(w_0)\|_{L_\infty(S_1^\tau)})\|v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}).\end{aligned}\tag{37}$$

Далее используем оценки

$$\|\nabla_{z'}w_0\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} + \|\nabla_{z'}w_0\|_{L_\infty(S_1^\tau)} \le c_1\|w_0\|_{W_p^{s_1,2s_1}(S_1)},\tag{38}$$

$$\|\nabla_{z'}v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} \le c_2\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau)}, \quad v\in\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau),\tag{39}$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от τ. Первая вытекает из [27, следствие 1.3, теорема 1.22]. Вторая также вытекает из следствия 1.3 в [27], но надо показать, что постоянная c_2 не зависит от τ. Существует оператор продолжения P функций, заданных на B'_δ в $\mathbb{R}^{n-1}$, такой, что $P\in L\big(W_p^s(B'_\delta), W_p^s(\mathbb{R}^{n-1})\big)$ для всех $s\in[0,2]$ (метод Хестенса [24, § 4.2]). Поэтому достаточно получить оценки в случае, когда S_1^τ заменено на $\widetilde{S}_1^\tau=(0,\tau)\times\mathbb{R}^{n-1}$. Мы используем эквивалентные нормы в $\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)$, $\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)$ (см. нормы в [24, п. 2.5.1]):

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \|vt^{-s_0}\|^p_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)} + \langle v\rangle^p_{s_0,\tau} + \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\frac{|v(t,z^1)-v(t,z^2)|^p}{|z^1-z^2|^{n-1+2s_0p}}\,dx^1dx^2dt,$$

$$\|v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \|vt^{-s_1}\|^p_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)} + \langle v\rangle^p_{s_1,\tau} + \int_0^\tau\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|v_{z_k}(t,z^1)-v_{z_k}(t,z^2)|^p}{|z^1-z^2|^{n-1+2ps_0}}\,dx^1dx^2.$$

Сделаем замену переменных $t = \xi\tau$, $x = \sqrt{\tau}y$, $z^1 = \sqrt{\tau}y_1$, $z^2 = \sqrt{\tau}y_2$. Имеем

$$\|\nabla_{z'}v\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)} = \tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2}\|\nabla_{y'}v(\tau\xi,\sqrt{\tau}y)\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(\widetilde{S}_1^1)}.$$

Правая часть оценивается через $\tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2}c\|v(\tau\xi,\sqrt{\tau}y)\|^p_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(\widetilde{S}_1^1)}$ (см. [27, следствие 1.3]). Сделав обратную замену переменных, придем к (39). Используя (39), (38) и лемму 3, получим, что правая часть в (37) оценивается через $c_3(R_2)$, эта постоянная зависит от $\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)}$, $\|w_0\|_{W_p^{s_1,2s_1}(S_1)}$, т. е. от R_2. Таким образом, $\sum\limits_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_4(R_2)$. Окончательно имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \le C_5(R_2). \qquad (40)$$

Оценки для разности решений задачи (25)–(27). Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2},\dots,\alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i = 1,2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji}\Phi_i, \quad j = 1,2.$$

Каждая из этих функций удовлетворяет оценке (40). Тогда разности $v_1 - v_2 = \widetilde{\omega}$, $\widetilde{\alpha} = \alpha^1 - \alpha^2$ есть решение задачи

$$M\widetilde{\omega} = \widetilde{\omega}_t - L\widetilde{\omega} = 0, \quad \widetilde{\omega}|_{t=0} = 0, \quad (x,t) \in Q = G \times (0,T), \qquad (41)$$

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}}{\partial N} = -\beta_0(\varphi(v_1+w_0) - \varphi(v_2+w_0)) - \frac{(\alpha^1+\alpha^2)}{2}(\varphi(v_1+w_0) - \varphi(v_2+w_0)) - \frac{\widetilde{\alpha}}{2}(\varphi(v_1+w_0) + \varphi(v_2+w_0) - 2\varphi(\overline{u}_0)) = g_0. \qquad (42)$$

$$\frac{\partial\widetilde{\omega}^+}{\partial N}(t,x) = \frac{\partial\widetilde{\omega}^-}{\partial N}(t,x), \quad \widetilde{\omega}^+(t,x) = \widetilde{\omega}^-(t,x), \quad (t,x) \in S_0. \qquad (43)$$

В силу леммы 2 и (21) $\widetilde{\alpha}, \alpha^j \in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$, $\nabla_{z'}\widetilde{\alpha}(t,x^i(z',0)), \nabla_{z'}\alpha^j(t,x^i(z',0)) \in \widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)$, $i = 1,\dots,r$, и имеем оценки

$$\|\widetilde{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_1\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \qquad (44)$$

$$\|\alpha^1+\alpha^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_1(\|\vec{\alpha}_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} + \|\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}) \le 2c_1R_2, \qquad (45)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\widetilde{\alpha}(t,x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} \le c_2\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \qquad (46)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}(\alpha^1+\alpha^2)(t,x^i(z',0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} \le 2c_2R_2, \qquad (47)$$

где постоянная c_2 не зависит от τ. В силу теоремы 1, лемм 2, 3 и оценок (44)–(47), (40) не так трудно получить неравенства

$$\begin{gathered}\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \le c\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)},\\ \|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \le c_5(R_2)\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.\end{gathered} \qquad (48)$$

Воспользовавшись неравенством (20) и леммой 1, получим оценку

$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq c_7(R_2)\tau^{1/2}(\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) + c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (49)$$

Выберем $\tau_1 \leq \tau_0$ так, чтобы $c_7(R_2)\tau^{1/2} \leq 1/2$ при $\tau \leq \tau_1$. Тогда из (48), (49) вытекает неравенство

$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq 2c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad \tau \leq \tau_1. \quad (50)$$

Соответственно из леммы 1 и (48) имеем

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} \leq c_7(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Далее, используя теорему 2, запишем оценку для решений задачи (41)–(43). Имеем

$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \leq c\left(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)} + \sum_{i=1}^{r}\|\varphi_i\nabla_{z'}g_0(t,x^i(z',0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_1^\tau)}\right).$$

Первое слагаемое уже оценено. Оценим второе. Имеем

$$\begin{aligned}\partial_{z_k}g_0 = &-\beta_{0z_k}(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0)) - \frac{(\alpha^1_{z_k}+\alpha^2_{z_k})}{2}(\varphi(v_1+w_0)-\varphi(v_2+w_0))\\ &- \frac{\widetilde{\alpha}_{z_k}}{2}(\varphi(v_1+w_0)+\varphi(v_2+w_0)-2\varphi(\overline{u}_0)) - \beta_0(\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k}+w_{0z_k})\\ &- \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k}+w_{0z_k})) - \frac{(\alpha^1+\alpha^2)}{2}(\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k}+w_{0z_k})\\ &- \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k}+w_{0z_k})) - \frac{\widetilde{\alpha}}{2}(\varphi'(v_1+w_0)(v_{1z_k}+w_{0z_k})\\ &+ \varphi'(v_2+w_0)(v_{2z_k}+w_{0z_k}) - 2\varphi'(\overline{u}_0)\overline{u}_{0z_k}).\end{aligned}$$

Используя леммы 2,3, получение оценки (50) и саму оценку (50), выводим, что при $\tau \leq \tau_1$ имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \leq c_8\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (51)$$

Используя неравенства (50), (51), можем записать

$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^{r}\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \leq c_5\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (52)$$

Оценки для решений задачи (31), (32). Оценим правую часть в (31) в $L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))$. Имеем

$$\|f_{1i}(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \leq c_6\|f_{1i}(t,z',z_n)\|_{W_p^s(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} = J$$

при $s > (n-1)/p$ (лемма 1.9 в [27]). Далее используем интерполяционные неравенства (см. теорему 1.19 в [27]). Имеем

$$J \le c_7 \|f_{1i}(t,z)\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \|f_{1i}(t,z)\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))}, \tag{53}$$

где $2\theta - 1 = s$. Исходя из определения f_{1i} и условий на коэффициенты, имеем

$$\|f_{1i}\|_{W_p^{-1}(B'_\delta;L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le c\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U))} \le c_8\tau^{1/2}\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}, \tag{54}$$

где постоянная c_1 не зависит от τ. Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^1(U))} \le c_9\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;W_p^2(U))}\|v\|^{1/2}_{L_p(0,\tau;L_p(U))}$$

и оценку $\|v\|_{L_p(0,\tau;L_p(U))} \le \tau\|v_t\|_{L_p(0,\tau;L_p(U))}$, вытекающую из формулы Ньютона — Лейбница. Оценки (53), (54) влекут, что

$$\|f_{1i}(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le c_{10}\tau^{(1-\theta)/2}(\|\nabla_{z'}\varphi_i v(t,z)\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) \le C_8(R_2)\tau^{(1-\theta)/2}, \tag{55}$$

где C_8 — постоянная, не зависящая от τ. Используя свойства решений первой начально-краевой задачи [27, теорема 2.9], получаем

$$\sum_{i=1}^r \|w_i(t,z_n)\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le c\sum_{i=1}^r \|f_{1i}(t,0,z_n)\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1)))} \le C_9(R_2)\tau^{(1-\theta)/2} + \sum_{i=1}^r \|\widetilde{\psi}_i\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(0,\tau)}.$$

Оценки для разности решений задачи (31), (32). Пусть, как и ранее, $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i = 1,2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji}\Phi_i, \quad j = 1,2.$$

Пусть w_i^j, $j = 1,2$, — решения задач (31), (32) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j и $w^0 = \varphi_i\widetilde{\omega}$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ суть решения задач

$$k_{it} - c_{nn}(t,0,z_n)k_{iz_nz_n} = \sum_{m+l<2n} c_{ml}\omega^0_{z_mz_l} + \sum_{m=1}^n c_m\omega^0_{z_m} + c_0\omega^0 + [\varphi_i, L]\widetilde{\omega}|_{z'=0} = \widetilde{f}_i, \quad k_i|_{t=0} = 0,\ k_i|_{z_n=0} = 0,\ k_i|_{z_n=\delta_1} = 0,\ i \le r.$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, теорему 2.1 в [27] или [26]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le \sum_{i=1}^r \|\widetilde{f}_i\|_{L_p((0,\tau)\times(0,\delta_1))}.$$

Используя аналог оценки (55) для оценки правой части, получим

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0,\tau)\times(0,\delta_1))} \le c_2\tau^{\frac{1-\theta}{2}}\left(\|\widetilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q^\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{\omega}(t,x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)}\right).$$

В частности, отсюда, из леммы 1 и (52) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^{r} \|k_{iz_n}(t,0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_4 \tau^{(1-\theta)/2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \tag{56}$$

Оценки для оператора R. Считаем, что $\vec{\alpha}_i \in B_{R_2}$, $i = 1,2$. Из (36) имеем

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c \sum_{i=1}^{r} \|F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Используем старые обозначения: v_i, $i = 1,2$, $\widetilde{w} = v_1 - v_2$, $k_i = \omega_i^1 - \omega_i^2$, ω_j^i, $i = 1,2$, — решения задач (31), (32). Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Оно записывается в виде

$$J_1 = \frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t,b_j)) - \varphi(\psi_j)} \eta_n(t,0) k_{jz_n}(t,0),$$

где

$$\eta_n = -\sqrt{1 + |\nabla\gamma_j|^2} \sum_{k,l=1}^{n} \widetilde{a}_{kl}(y^j(z)) n_k n_l|_{z_n=0}.$$

Здесь $n_k = \gamma_{iz_k}(z')/\sqrt{1+|\nabla\gamma_i|^2}$ при $k < n$, $n_n = -1/\sqrt{1+|\nabla\gamma_i|^2}$ и $\widetilde{a}_{kl}$ — старшие коэффициенты оператора L, записанного в локальной системе координат y. В силу леммы 2 и неравенства (56)

$$\|J_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_1 \|k_{iz_n}(t,0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2 \tau^{\beta_1} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \tag{57}$$

где все постоянные не зависят от τ и β_1 — положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = \frac{1}{\varphi(\overline{u}_0(t,b_j)) - \varphi(\psi_j)} \sum_{m=1}^{n-1} \eta_m(t,0) \widetilde{w}_{z_m}(t,b_j).$$

В силу леммы 2

$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2 \sum_{i=1}^{r} (\|\widetilde{w}(t,x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} + \|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}).$$

Здесь каждое из слагаемых оценивается одинаково. Оценка (39) влечет, что

$$\|\widetilde{w}\|_{W_p^1(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \le c\|\widetilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_1^\tau)} \le c_1 \|\widetilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}.$$

В силу теорем вложения (теорема 1.22 в [27])

$$\|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(z))|_{z=0}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_2 \|\nabla_{z'}\varphi_i(\widetilde{w}(t,x^i(z',0)))\|_{W_p^s(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))},$$

при $s \in ((n-1)/p, 1)$. Далее, из вышеприведенных неравенств получим

$$\begin{aligned}
&c_2\|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|_{W_p^s(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\
&\le c_3 \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{\theta}_{W_p^1(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{W_p^{-1}(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\
&\quad \le c_4 \|\nabla_{z'}\varphi_i(\widetilde{w}(t,x^i(z))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \|\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau))} \\
&\quad \le c_5 \|\nabla_{z'}\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{\theta}_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \tau^{(1-\theta)/2} \|\varphi_i\widetilde{w}(t,x^i(z',0))\|^{1-\theta}_{L_p(B'_\delta;\widetilde{W}_p^{s_1}(0,\tau))}.
\end{aligned}$$

Ссылаясь на лемму 1 и используя (52), получим оценку

$$\|\nabla_{z'}\widetilde{w}(t,x^i(z))|_{z=0}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_6\tau^{\beta_2}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $\|J_2\|$, и можно сказать, что

$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_7\tau^{\beta_2}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \tag{58}$$

для некоторой постоянной $\beta_2 > 0$ и не зависящей от τ постоянной c_7. Окончательная оценка, как вытекает из (57), (58), имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1)-R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \le c_8\tau^{\beta_0}\|\vec{\alpha}_1-\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где $\beta_0 = \min(\beta_1,\beta_2)$ и постоянная c_8 не зависит от τ. Возьмем $\tau_2 \le \tau_1$ такое, что $c_8\tau_2^{\beta_0} \le 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_2} в себя при $\tau \le \tau_2$ и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (35) имеет решение $\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau_2)$. Найдено v как решение задачи (25)–(27).

Покажем выполнение (28). Возьмем равенства (26), записанные в системе координат z и взятые в точке $t, x^i(0)$ $(x^i(0) = b_i)$, и вычтем их из соответствующих равенств (33). Используя равенство $w_j(t,0) + w_0(t,b_j) = \psi_j$, получим

$$\eta_n(t,0)(w_{jz_n}(t,0) - v_{z_n}(t,x^j(0))) \\ + (\beta_0+\alpha)(\varphi(w_j(t,0)+w_0(t,b_j)) - \varphi(v(t,b_j)+w_0(t,b_j))) = 0, \tag{59}$$

где $i = 1,2,\dots,r$. Функция $w_{0i} = \varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (30). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (31). Получим равенства

$$w_{it}(t,z_n) - w_{0it}(t,x^i(t,0,z_n)) - c_{nn}(t,0,z_n)(w_{iz_nz_n} - w_{0iz_nz_n}(t,x^i(t,0,z_n))) = 0, \tag{60}$$

где $i \le r$. Функции $w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))$ удовлетворяют уравнениям (60), начальному условию $w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))|_{t=0} = 0$, равенству (59) и

$$w_i(t,z_n) - w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1,2,\dots,r.$$

Для этой задачи справедлив аналог теоремы 1 (доказательство ничем не отличается), и тогда в силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t,z_n) = w_{0i}(t,x^i(t,0,z_n))$. Следовательно, $w_{0i}(t,x^i(0)) = v(t,x^i(0)) = \widetilde{\psi}_i$ для всех i. Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, утверждение о единственности решений здесь очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В.* Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус и К, 2009.
2. *Ткаченко В. Н.* Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наук. думка, 2008.
3. *Глаголев М.В., Сабреков А.Ф.* Идентификация газообмена на границе экосистема/атмосфера: метод обратной задачи // Мат. биология и биоинформатика. 2012. Т. 7, № 1. С. 81–101.
4. *Пермяков П. П.* Идентификация параметров модели тепломассопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2004. № 284. С. 226-238.
5. *Пермяков П. П.* Математическое моделирование негативных мерзлотных процессов. Новосибирск: СО РАН, 2023.

6. *Пермяков П. П., Аммосов А. П.* Математическое моделирование техногенного загрязнения в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 2003.

7. *Dantas L. V., Orlande H. R. B., Cotta R. M.* Идентификация параметров модели тепломассопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. V. 46, N 9. P. 1587–1599.

8. *Lugon J. Jr., Neto A. J. S.* An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a one dimensional porous medium // Proc. COBEM 2003. 17-th Intern. Congress on Mechanical Engineering. 2003. São-Paolo: ABSM, 2003.

9. *Varan L. A. B., Orlande H. R. B., Vianna F. L. V.* Estimation of the convective heat transfer coefficient in pipelines with the Markov chain Monte-Carlo method // Blucher Mechan. Engin. Proc. 2014. V. 1, N 1. P. 1214–1225.

10. *Osman A. M., Beck J. V.* Nonlinear inverse problem for the estimation of time-and-space-dependent heat-transfer coefficients // J. Thermophysics. 2003. V. 3, N 2. P. 146–152.

11. *Farahani S. D., Kowsary F., Ashjaee M.* Experimental estimation heat flux and heat transfer coefficient by using inverse methods // Sci. Iranica B. 2016. V. 3, N 4. P. 1777–1786.

12. *Su J., Hewitt G. F.* Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient // Numerical Heat Transfer. Part A. 2004. V. 45. P. 777–789.

13. *Háo D. N., Thanh P. X., Lesnic D.* Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Probl. 2013. V. 29, N 9. 095020.

14. *Lee J. D., Tanabe I., Takada K.* Identification of the heat transfer coefficient on machine tool surface by inverse analysis // JSME Intern. J., Ser. C. 1999. V. 42, N 4. P. 1056–1060.

15. *Onyango T. M., Ingham D. B., Lesnic D.* Restoring boundary conditions in heat conduction // J. Engen. Math. 2008. V. 62. P. 85–101.

16. *Wang S., Zhang L., Sun X., Jia H.* Solution to two-dimensional steady inverse heat transfer problems with interior heat source based on the conjugate gradient method // Math. Probl. Engin. 2017. V. 2017. Article ID 2861342.

17. *Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimidt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G.* Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // Appl. Math. Modelling. 2012. V. 89, N 1. P. 654–668.

18. *Háo D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnic D.* Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // Appl. Anal. 2015. V. 94, N 9. P. 1784–1799.

19. *Slodicka M., Van Keer R.* Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 18, N 1. P. 139–152.

20. *Rösch A.* Stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 12, N 5. P. 743–756.

21. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. II // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 11. P. 1515–1525.

22. *Kostin A. B., Prilepko A. I.* On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 1. P. 113–122.

23. *Pyatkov S. G., Baranchuk V. A.* Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer // Math. Notes. 2023. V. 113, N 1. P. 93–108.

24. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutscher Verl. des Wissenschaften, 1978.

25. *Amann H.* Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.

26. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural′tseva N. N.* Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1968.

27. *Пятков С. Г.* Краевые и обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений и систем. Новосибирск: Наука, 2025.

28. *Белоногов В. А., Пятков С. Г.* О разрешимости задач сопряжения с условиями типа неидеального контакта // Изв. вузов. Математика. 2020. № 7. С. 18-32.

Поступила в редакцию 7 марта 2026 г.
После доработки 7 марта 2026 г.
Принята к публикации 20 марта 2026 г.

Потапков Алексей Александрович,
Пятков Сергей Григорьевич (ORCID 0000-0002-7238-9559)
Югорский государственный университет,
Инженерная школа цифровых технологий,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
a_potapkov@ugrasu.ru, s_pyatkov@ugrasu.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2026. Том 67, № 3

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП ПО СПЕКТРУ

А. М. Старолетов

Аннотация. Конечные группы называются *изоспектральными*, если они имеют одинаковые множества порядков элементов. В данной статье завершается описание конечных групп, изоспектральных простым группам $PSL_n(q)$ или $PSU_n(q)$, где $n \geq 11$. Также получено существенное ограничение на структуру конечных групп, изоспектральных ортогональным и симплектическим группам.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.310

Ключевые слова: порядок элемента, простая классическая группа, распознавание по спектру.

1. Введение

В данной работе рассматриваются только конечные группы. Множество порядков элементов группы G обозначается через $\omega(G)$ и называется ее *спектром*. Группы называются *изоспектральными*, если они имеют одинаковые спектры. Обозначим через $h(G)$ наибольшее число попарно неизоморфных групп, изоспектральных группе G. Если $h(G) = 1$, то G однозначно (с точностью до изоморфизма) задается своим спектром в классе всех конечных групп и поэтому G называется *распознаваемой* по спектру. Говорят, что G *почти распознаваема*, если $h(G)$ конечно, и *нераспознаваема*, если $h(G) = \infty$. Будем говорить, что *проблема распознаваемости* (*по спектру*) *решена* для G, если число $h(G)$ известно, и в случае $h(G) < \infty$ все группы, изоспектральные G, явно описаны.

В силу [1, лемма 1], если G имеет нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, то $h(G) = \infty$, поэтому проблема распознаваемости по спектру представляет интерес только для групп с тривиальным разрешимым радикалом. Большинство работ по данной проблеме посвящены простым неабелевым группам, однако есть различные примеры, когда проблема решена для групп с непростым цоколем. Подробный обзор результатов и список открытых вопросов можно найти в [2].

Мы обозначаем простые классические группы согласно [3]. В настоящее время проблема распознаваемости по спектру решена для всех простых неабелевых групп, кроме следующих классических групп, определенных над полем нечетного порядка q:

(а) $L_n(q)$, где $8 \leq n \leq 26$, n не является простым числом;
(б) $U_n(q)$, где $8 \leq n \leq 26$, n не является простым числом;
(в) $S_{2n}(q)$ и $O_{2n+1}(q)$, где $5 \leq n \leq 15$, $n \neq 8$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-10003, `https://rscf.ru/project/23-41-10003/`.

(г) $O_{2n}^{+}(q)$, где $5 \leq n \leq 18$;

(д) $O_{2n}^{-}(q)$, где $5 \leq n \leq 17$, $n \neq 8, 16$.

Более точные формулировки и необходимые ссылки для групп, отличных от $U_6(q)$, $L_6(q)$ и $U_n(q)$, где n — простое число, могут быть найдены в [2, теорема 2.1]. Группы $U_5(q)$, $U_6(q)$ и $L_6(q)$ были рассмотрены в [4]. Решение проблемы распознаваемости для групп $U_n(q)$, где n — простое число, было недавно завершено в [5]. Эти два результата появились после публикации обзора [2].

Удобным инструментом для изучения проблемы распознаваемости является *граф простых чисел* (или *граф Грюнберга — Кегеля*). Граф простых чисел группы G определяется следующим образом: его вершины являются простыми делителями порядка группы G и две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Напомним, что подмножество вершин графа называется *кокликой*, если любые две вершины этого подмножества не смежны. Обозначим через $t(G)$ наибольший размер коклики в графе простых чисел группы G. Верхние границы размерностей групп в списке выше можно объяснить следующим образом. Основываясь на предыдущих результатах, А. В. Васильев и М. А. Гречкосеева доказали, что простая классическая группа L почти распознаваема, если $t(L) \geq 23$ [6, 7]. Позднее этот результат был распространен на классические группы L с $14 \leq t(L) < 23$ [8]. Переписывая условие $t(L) \leq 13$ в терминах размерности группы L, мы в точности получаем верхние границы на n из списка выше за исключением того, что в п. (в) отсутствуют группы $S_{32}(q)$ и $O_{33}(q)$. Для этих групп проблема распознаваемости была ранее решена в [9–11].

Мы понижаем верхнюю границу размерностей для линейных и унитарных групп L, рассматривая случаи, когда $6 \leq t(L) \leq 13$.

Теорема 1. *Предположим, что L — одна из простых групп $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \geq 11$. Тогда проблема распознаваемости по спектру для L решена. Более того, $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ для любой конечной группы G, изоспектральной L.*

Как следствие получаем, что проблема распознаваемости для линейных и унитарных групп размерности n в настоящее время не решена только для $n = 8, 9, 10$.

На самом деле теорема 1 является следствием ряда предыдущих результатов и следующей теоремы, доказательство которой является основной целью данной статьи.

Теорема 2. *Предположим, что L — одна из простых групп $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где q нечетно и $12 \leq n \leq 26$. Если G — конечная группа, изоспектральная L, и S — неабелев композиционный фактор группы G, то S не изоморфна классической группе над полем характеристики, взаимно простой с q.*

Ряд рассуждений из доказательства теоремы 2 не использует по существу то, что L является линейной или унитарной, и как следствие может быть проведен для классической группы L любого типа. Результат этих рассуждений выделен в отдельную теорему.

Теорема 3. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем нечетного порядка q такая, что $5 \leq t(L) \leq 13$. Предположим, что G — конечная группа, изоспектральная L, и G имеет неабелев композиционный фактор S такой, что S — классическая группа над полем характеристики, взаимно простой с q. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если L — линейная или унитарная группа с $t(L) \geq 6$, то $t(S) = t(L)$.*

(б) *Если L — линейная или унитарная группа с $t(L) = 5$ или ортогональная или симплектическая группа с $t(L) \geq 7$, то $0 \leq t(S) - t(L) \leq 1$.*

(в) *Если L — симплектическая или ортогональная группа с $5 \leq t(L) \leq 6$, то $0 \leq t(S) - t(L) \leq 2$.*

Данная статья организована следующим образом. Разд. 2 посвящен определениям и вспомогательным арифметическим результатам, которые являются полезными при работе со спектром классических групп. В разд. 3 перечислены необходимые факты о спектрах и графах простых чисел классических групп. Теорема 3 доказывается в разд. 4, а разд. 5 и 6 посвящены доказательствам теорем 2 и 1 соответственно.

2. Предварительные данные: арифметические результаты

Наибольший общий делитель целых чисел a и b обозначается через (a, b). Зафиксируем целое число a с $|a| > 1$ и простое число r.

Через $\pi(a)$ обозначается множество всех простых делителей числа a. Через $a_{\{r\}}$ обозначается r-часть числа a, т. е. наибольшая степень числа r, делящая a. Если π — множество простых чисел, то определим $a_\pi = \prod\limits_{r\in\pi} a_{\{r\}}$ и $a_{\pi'} = a/a_\pi$. В этом случае числа a_π и $a_{\pi'}$ называются π-*частью* и π'-*частью* числа a соответственно.

Если r нечетно и $(a, r) = 1$, то $e(r, a)$ обозначает мультипликативный порядок a по модулю r. Положим $e(2, a) = 1$, если 4 делит $a - 1$, и $e(2, a) = 2$, если 4 делит $a + 1$. Простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $a^i - 1$, если $e(r, a) = i$. Обозначим через $r_i(a)$ некоторый примитивный простой делитель числа $a^i - 1$, если хотя бы один такой делитель существует, через $R_i(a)$ — множество всех таких делителей. Существование примитивных простых делителей для почти всех пар (a, i) было доказано Бэнгом [12] и Жигмонди [13].

Лемма 2.1 (Бэнг — Жигмонди). *Пусть a — целое число и $|a| > 1$. Если i — натуральное число и $(a, i) \notin \{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}$, то множество $R_i(a)$ непусто.*

Для числа $i \neq 2$ произведение всех примитивных простых делителей числа $a^i - 1$, взятых с учетом кратности, обозначается через $k_i(a)$. Положим $k_2(a) = k_1(-a)$. Число $k_i(a)$ называется *наибольшим примитивным делителем* числа $a^i - 1$. Из определения следует, что $(k_i(a), k_j(a)) = 1$, если $i \neq j$. Легко проверить, что $k_1(a) = |a - 1|$, если $a \not\equiv 3 \pmod 4$, и $k_1(a) = |a - 1|/2$, если $a \equiv 3 \pmod 4$, а также $k_2(a) = |a + 1|$, если $a \not\equiv 1 \pmod 4$, и $k_2(a) = |a + 1|/2$, если $a \equiv 1 \pmod 4$. Из [14] следует, что при $i > 2$

$$k_i(a) = \frac{|\Phi_i(a)|}{(r, \Phi_{i_{\{r\}'}}(a))}, \tag{1}$$

где $\Phi_i(x)$ — i-й круговой многочлен, а r — наибольшее простое число, делящее i; более того, если $i_{\{r\}'}$ не делит $r-1$, то $(r, \Phi_{i_{\{r\}'}}(a)) = 1$. Для любого целого числа n, отличного от нуля, через $\varphi(n)$ обозначается значение функции Эйлера на n. Напомним, что $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$. Из определения наибольших примитивных делителей и равенства (1) вытекает следующее полезное утверждение.

Лемма 2.2. *Пусть a и i — целые числа такие, что $|a| > 1$ и $i \geq 1$. Если i нечетно, то $k_i(-a) = k_{2i}(a)$, и если i кратно 4, то $k_i(-a) = k_i(a)$.*

Лемма 2.3 [6, лемма 1.5]. *Пусть a и i — целые числа, $\varepsilon \in \{+, -\}$. Если $a \geq 2$, $i \geq 3$ и $(a, i) \notin \{(2,3), (2,6)\}$, то $k_i(\varepsilon a) > a^{\varphi(i)/2}$.*

Лемма 2.4. *Справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если p — простое число, то* $\Phi_{pn}(x) = \begin{cases} \Phi_n(x^p), \text{ если } (n,p) = p; \\ \Phi_n(x^p)/\Phi_n(x), \text{ если } (n,p) = 1. \end{cases}$

(б) *Если $n < 105$, то все коэффициенты многочлена $\Phi_n(x)$ принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$.*

(в) *Если $3 \leq n < 105$, то $\Phi_n(a) > 0$ для всех действительных чисел a с $|a| \geq 2$.*

(г) *Предположим, что унитарный многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ имеет степень $n \geq 1$ и все его коэффициенты принадлежат множеству $\{-1, 0, 1\}$. Если $a \geq k > 1$, где k — действительное число, то*

$$\frac{k-2}{k-1}a^n < f(a) < \frac{k}{k-1}a^n.$$

Доказательство. П. (а) хорошо известен и упоминается, например, в [15]. П. (б) — это [16, теорема 13.5]. Чтобы доказать (в), заметим, что если $n \geq 3$, то $\varphi(n)$ четно. Из (б) следует, что если $3 \leq n < 105$ и $|a| \geq 2$, то

$$\Phi_n(a) \geq |a|^{\varphi(n)} - |a|^{\varphi(n)-1} - \ldots - |a| - 1$$
$$= |a|^{\varphi(n)} - \frac{|a|^{\varphi(n)} - 1}{|a| - 1} = \frac{|a|^{\varphi(n)+1} - 2|a|^{\varphi(n)} + 1}{|a| - 1} > 0.$$

Докажем (г). По предположению получаем, что

$$f(a) \leq 1 + a + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1},$$

поэтому для доказательства верхней оценки достаточно проверить, что $\frac{a^{n+1}-1}{a-1} < \frac{k}{k-1}a^n$. Последнее неравенство эквивалентно неравенству $a^{n+1} + k - 1 > ka^n$, которое верно, поскольку $a \geq k$. Аналогично получаем, что

$$f(a) \geq a^n - a^{n-1} - \ldots - 1 = 2a^n - a^n - a^{n-1} - \ldots - 1 = 2a^n - \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

Мы знаем, что $-\frac{a^{n+1}-1}{a-1} > -\frac{k}{k-1}a^n$. Поэтому

$$f(a) > 2a^n - \frac{k}{k-1}a^n = \frac{k-2}{k-1}a^n,$$

что и требовалось показать. $\square$

В качестве следствия из п. (в) этой леммы получаем, что в равенстве (1) для $k_i(a)$ модуль в числителе можно убрать, если $3 \leq i < 105$.

Лемма 2.5 [6, лемма 1.7]. *Пусть q и m — целые числа, большие 1, и $\varepsilon \in \{+, -\}$.*

(а) *Если нечетное простое число r делит $\varepsilon q - 1$, то*

$$((\varepsilon q)^m - 1)_{\{r\}} = m_{\{r\}}(\varepsilon q - 1)_{\{r\}}.$$

(б) *Если нечетное простое число r делит $(\varepsilon q)^m - 1$, то r делит $(\varepsilon q)^{m_{\{r\}'}} - 1$.*

(в) *Если $\varepsilon q - 1$ делится на 4, то $((\varepsilon q)^m - 1)_{\{2\}} = m_{\{2\}}(\varepsilon q - 1)_{\{2\}}$.*

Лемма 2.6. *Пусть q — степень нечетного простого числа. Если $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $r \geq 7$ — простое число, то $k_r(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{r-2}$.*

Доказательство. Используя равенство (1), находим, что

$$k_r(\varepsilon q) = \frac{q^r - \varepsilon 1}{(q-\varepsilon 1, r)(q-\varepsilon 1)} \geq \frac{q^r + 1}{(q-\varepsilon 1, r)(q+1)}.$$

Если $(q-\varepsilon 1, r) = 1$, то

$$k_r(\varepsilon q) \geq \frac{q^r+1}{q+1} > \frac{5}{3}q^{r-2},$$

так как $q \geq 3$. Предположим, что $(q-\varepsilon 1, r) = r$. Тогда $q-\varepsilon 1$ делится на r, поэтому $q+1 \geq 2r$. Теперь $\frac{q^r+1}{(q+1)r} > \frac{5}{3}q^{r-2}$ тогда и только тогда, когда $3q^r + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$. Поскольку $q \geq 2r-1$ и $r \geq 7$, получаем, что

$$3q^r + 3 \geq (6r-3)q^{r-1} + 3 \geq (5r+4)q^{r-1} + 3.$$

Далее,

$$(5r+4)q^{r-1} + 3 = 5rq^{r-1} + 4q^{r-1} + 3 \geq 5rq^{r-1} + (8r-4)q^{r-2} + 3.$$

Наконец, находим, что

$$5rq^{r-1} + (8r-4)q^{r-2} + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$$

и, следовательно, $3q^r + 3 > 5rq^{r-1} + 5rq^{r-2}$, что и требовалось показать. □

Лемма 2.7. *Пусть q — степень нечетного простого числа и $\varepsilon \in \{+,-\}$. Тогда $k_9(\varepsilon q) > q^{5.5}$ или $k_7(\varepsilon q) > q^{5.5}$.*

Доказательство. Предположим, что $q \geq 13$. Тогда $q^{0.5} > 3.5$. Используя равенство (1), находим, что

$$k_9(\varepsilon q) \geq (q^6 - q^3 + 1)/3 > (3.5q^{5.5} - q^3)/3 > q^{5.5} + (0.5q^{5.5} - q^3)/3 > q^{5.5}.$$

Предположим, что $q < 13$. Тогда $(q-\varepsilon 1, 7) = 1$, поэтому

$$k_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\varepsilon q) \geq q^6 - q^5 + q^4 - q^3 + q^2 - q + 1 > q^6 - q^5.$$

Легко видеть, что $q^6 - q^5 > q^{5.5}$, если $q \geq 3$, и, значит, $k_7(\varepsilon q) > q^{5.5}$ в этом случае. □

Лемма 2.8. *Пусть q и w — степени простых чисел, при этом $q \neq w$ и q нечетно. Если $k_7(\varepsilon q)$ делит $k_7(\tau w)$, где $\varepsilon, \tau \in \{+,-\}$ и $(q-\varepsilon 1, 7) = 1$, то $5q^6 < w^6$.*

Доказательство. Предположим, что $k_7(\varepsilon q) = k_7(\tau w)$. Если $(w-\tau 1, 7) = 1$, то $\Phi_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\tau w)$ в силу равенства (1). Легко видеть, что если $a > 0$, то

$$\Phi_7(\varepsilon(a+1)) - \Phi_7(\varepsilon a) > 0 \text{ и } \Phi_7(\tau(a+1)) - \Phi_7(\tau a) > 0.$$

Поскольку $w \neq q$, верно, что $w \geq q+1$ или $q \geq w+1$. В первом случае получаем, что

$$\Phi_7(\tau w) \geq \Phi_7(\tau(q+1)) > q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 \geq \Phi_7(\varepsilon q),$$

а во втором случае

$$\Phi_7(\varepsilon q) \geq \Phi_7(\varepsilon(w+1)) > w^6 + w^5 + w^4 + w^3 + w^2 + w + 1 \geq \Phi_7(\tau w);$$

противоречие с $\Phi_7(\varepsilon q) = \Phi_7(\tau w)$. Поэтому можно считать, что $(w-\tau 1, 7) = 7$ и тем самым $w \geq 8$. Заметим, что $k_7(\varepsilon q) \leq \frac{3}{2}q^6$ по лемме 2.4(г), и $k_7(\tau w) \geq$

$\frac{1}{7}(w^6 - w^5 + w^4 - w^3 + w^2 - w + 1) > \frac{1}{8}w^6$, поскольку $w \geq 8$. Значит, $q^6 \geq \frac{1}{12}w^6$ и поэтому $q \geq 7$. Теперь

$$\frac{6}{7}q^6 < 1 - q + q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6 \leq k_7(\varepsilon q) = k_7(\tau w),$$

в то время как $k_7(\tau w) < \frac{8}{49}w^6$ по лемме 2.4(г). Следовательно, $5q^6 < w^6$, что и требовалось доказать.

Предположим, что $k_7(\varepsilon q)$ — собственный делитель $k_7(\tau w)$. Поскольку любое число из $R_7(\tau w)$ не меньше 29, заключаем, что $29k_7(\varepsilon q) \leq k_7(\tau w)$. Следовательно, по лемме 2.4(г) получаем, что $29\frac{1}{2}q^6 < 2w^6$. Это влечет требуемое неравенство $5q^6 < w^6$. $\square$

Лемма 2.9. *Предположим, что u — степень простого числа v и q — степень нечетного простого числа p. Пусть j — целое число такое, что $\varphi(j) \geq 4$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(а) *Если $k_j(u)$ делит $(q^2 - 1)$ и $(j, u) \neq (10, 4)$, то $k_j(u) > u^3$.*

(б) *Если $k_j(u)$ делит $(q^2 - 1)\log_v u$ и $(k_j(u), \log_v u) > 1$, то $k_j(u) > u^3 \log_v u$.*

(в) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)$, где $p < 31$, $p \in R_j(u)$, и $(j, u) \neq (10, 4)$, то $k_j(u) > \frac{p}{12}u^3$.*

(г) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)\log_v u$ и p делит $(k_j(u), \log_v u)$, то $k_j(u) > pu^3 \log_v u$.*

(д) *Если $k_j(u)$ делит $p(q^2 - 1)\log_v u$, $p < 31$, и $(k_j(u), \log_v u) > 1$, то $k_j(u) > pu^3 \log_v u$.*

Более того, во всех пунктах верно неравенство $2u^3 < q^2$, даже если $(j, u) = (10, 4)$.

Доказательство. Сначала предположим, что $\varphi(j) \geq 6$. Покажем, что $k_j(u) > u^4$. Это верно, если $\varphi(j) \geq 8$, по лемме 2.3. Предположим, что $\varphi(j) = 6$. Тогда $j \in \{7, 14, 9, 18\}$. Если $j = 9$ или $j = 18$, то $k_j(u) \geq \frac{u^6 - u^3 + 1}{3}$ в силу равенства (1). Следовательно, в этом случае $k_j(u) > u^4$. Более того,

$$k_7(u) = \frac{u^7 - 1}{(u - 1, 7)(u - 1)} \geq \frac{u^7 - 1}{(u - 1)^2} > u^4$$

и $k_{14}(2) = 43 > 2^4$, в то время как для $u > 2$ верно, что

$$k_{14}(u) > \frac{u^7 + 1}{(u + 1)^2} > u^4.$$

Поскольку $u > \log_v u$, получаем, что $k_j(u) > u^4 > u^3 \log_v u$. Предположим, что $p \in R_j(u)$ и $p < 31$. Заметим, что $u^4 > \frac{p}{12}u^3$, если $u \geq 3$ или $p \leq 23$. С другой стороны, если $u = 2$ и $23 < p < 31$, то $R_7(2) = \{127\}$, $R_{14}(2) = \{43\}$, $R_9(2) = \{19\}$, $R_{18}(2) = \{73\}$, так что этот случай невозможен. Осталось доказать пп. (г), (д) в этом случае. Предположим, что r — простое число такое, что r делит $k_j(u)$ и $\log_v(u)$. Поскольку $\varphi(j) \geq 6$, по малой теореме Ферма получаем, что $r \geq 17$. Обозначим $k = \log_v u$. Поскольку $k \geq 17$, верно, что $2^k > k^2$ и $2^k > 31k$. Это означает, что $u = v^k > k^2$ и $u > 31k$. Следовательно, $k_j(u) > u^4 > u^3 \cdot (\log_v u)^2$ и $k_j(u) > u^4 > 31u^3 \log_v u$. Эти неравенства завершают доказательство для всех чисел j с $\varphi(j) \geq 6$.

Предположим, что $\varphi(j) = 4$. Тогда $j \in \{5, 8, 12, 10\}$. Сначала покажем, что $k_j(u) > u^3$, если $(j, u) \neq (10, 4)$. Используя равенство (1), видим, что $k_{12}(u) = \Phi_{12}(u) = u^4 - u^2 + 1$ и

$$k_8(u) = \frac{\Phi_8(u)}{(u - 1, 2)} = \frac{u^4 + 1}{(u - 1, 2)}.$$

Следовательно, если $j = 12$, то $k_j(u) \geq 2u^3 - u^2 + 1 > u^3$, а если $j = 8$, то $k_j(u) \geq (u^4+1)/2 > u^3$. Предположим, что $j = 5, 10$. Заметим, что $k_j(u) > u^3$ при $u = 2, 3$ и $k_5(4) = 341 > 4^3$. Таким образом, можно считать, что $u \geq 5$. Используя равенство (1), получаем, что $k_j(u) \geq \frac{1}{d}(u^4 - u^3 + u^2 - u + 1)$, где либо $d = 1$, либо $d = 5$ и $u \geq 9$. Если $d = 1$, то $u^4 - u^3 + u^2 - u + 1 \geq 2u^3 - u^3 + u^2 - u + 1 > u^3$. Если $d = 5$, то $k_j(u) \geq \frac{1}{5}(9u^3 - u^3 + u^2 - u + 1) > u^3$. Следовательно, требуемое неравенство $k_j(u) > u^3$ доказано во всех случаях.

Предположим, что $p \in R_j(u)$ и $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)$, где $p < 31$ и $(j,u) \neq (10,4)$. Покажем, что $k_j(u) > \frac{p}{12}u^3$. Мы знаем, что $k_j(u) > u^3$, поэтому можно считать, что $p > 12$. Поскольку $p < 31$ и $p \in R_j(u)$ с $j \in \{5, 8, 10, 12\}$, получаем, что $p - 1$ делится на j и, следовательно, $(p,j) \in \{(13,12), (17,8)\}$. Если $j = 12$, то $k_{12}(2) = 13 > \frac{13}{12}2^3$, а для $u > 2$ верно, что

$$k_{12}(u) = u^4 - u^2 + 1 > 3u^3 - u^2 > 2u^3 > \frac{13}{12}u^3.$$

Если $j = 8$, то $k_8(2) = 17 > \frac{17}{12}2^3$, а для $u > 2$ верно, что

$$k_8(u) \geq \frac{u^4+1}{2} > \frac{3}{2}u^3 > \frac{17}{12}u^3.$$

Предположим, что $(k_j(u), \log_v u) > 1$, и возьмем простое число r, которое делит оба числа $k_j(u)$ и $\log_v u$. По малой теореме Ферма получаем, что $r \geq 11$, и поэтому $u \geq 2^{11}$. Используя равенство (1), находим, что $k_j(u) \geq \frac{u^4 - u^3 + u^2 - u + 1}{5}$. По лемме 2.4(г) получаем, что

$$k_j(u) > \frac{u-2}{5(u-1)}u^4 > \frac{1}{6}u^4.$$

Обозначим $k = \log_v u$. Поскольку $k \geq 11$, верно, что $u \geq 2^k > 6k^2$ и $u \geq 2^k > 6 \cdot 31 \cdot k$. Это означает, что $k_j(u) > u^3(\log_v u)^2$ и $k_j(u) > 31u^3 \log_v u$.

Теперь покажем, что $2u^3 < q^2$ во всех случаях. Поскольку $\varphi(j) \geq 4$, получаем, что $(k_j(u), 6) = 1$. С другой стороны, ясно, что $q^2 - 1$ делится на 8, а $p(q^2-1)$ делится на 24. Если $(j,u) = (10,4)$, то $k_j(u) = 41$ и $\log_v u = 2$. Таким образом, если $k_{10}(4)$ делит $p(q^2-1)$, то $q \geq 40$ и, очевидно, $2u^3 < q^2$. Если $(j,u) \neq (10,4)$, то неравенство $2u^3 < q^2$ следует из доказанных неравенств для $k_j(u)$ и того, что 8 делит $q^2 - 1$, а 24 делит $p(q^2-1)$. $\square$

Лемма 2.10. *Предположим, что u — степень простого числа v и q — степень нечетного простого числа p. Предположим, что $j_1, \dots, j_k$ — различные натуральные числа такие, что $\varphi(j_i) \geq 4$ для всех $1 \leq i \leq k$. Если $\prod_{i=1}^{k} k_{j_i}(u)$ делит $p(q^2-1)\log_v u$, где либо каждый множитель $k_{j_i}(u)$ взаимно прост с p, либо p делит $\log_v u$, либо $p < 31$, то $u^{3k} < q^2$.*

Доказательство. Сначала будем считать, что $(p, k_{j_i}(u)) = 1$ для всех $1 \leq i \leq k$. Заметим, что если $1 \leq i \leq k$, то $(k_{j_i}(u), 6) = 1$. С другой стороны, видно, что $q^2 - 1$ делится на 8. Поскольку $k_{10}(4) = 41 > 4^3/2$ и $8 \cdot \prod_{i=1}^{k} k_{j_i}(u)$ делит $(q^2-1)\log_v u$, получаем, что $u^{3k} < q^2 - 1$ по лемме 2.9(а),(б).

Предположим, что существует число $j \in \{j_1, \dots, j_k\}$ такое, что p делит $k_j(u)$ и $p < 31$. Можно считать, что $j = j_1$. Поскольку $k_{10}(4) = 41$ и $p < 31$, получаем, что $(j,u)\neq(10,4)$. По лемме 2.9(в) верно неравенство $k_j(u)>\frac{p}{12}u^3$. Заметим, что $p(q^2-1)$ делится на 24. Поэтому достаточно доказать, что

$$\prod_{i=2}^{k} k_{j_i}(u)>\frac{1}{2}u^{3k-3},$$

если каждое число $k_{j_i}(u)$ взаимно просто с $\log_v(u)$, или

$$\prod_{i=2}^{k} k_{j_i}(u)>\frac{1}{2}u^{3k-3}\log_v u,$$

если хотя бы одно $k_{j_i}(u)$ не взаимно просто с $\log_v(u)$. Это верно в силу леммы 2.9(а),(б) и неравенства $k_{10}(4)=41>4^3/2$.

Предположим, что существует число $j\in\{j_1,\dots,j_k\}$ такое, что p делит $(\log_v u, k_j(u))$. Лемма 2.9(г) влечет, что $k_j(u)>pu^3\log_v u$, и произведение оставшихся чисел $k_{j_i}(u)$ не меньше $u^{3k-3}/2$. Теперь утверждение следует из того, что 8 делит q^2-1. $\square$

Лемма 2.11 [17, 18]. *Предположим, что x, y и k — ненулевые целые числа. Если $x^2+x+1=y^k$, то либо $k=1$, либо $k=3$ и $(x,y)\in\{(18,7),(-19,7)\}$. Если $x^2+x+1=3y^k$, то $k\leq 2$.*

Лемма 2.12. *Предположим, что q — степень нечетного простого числа и $\varepsilon\in\{+,-\}$. Если $k_6(\varepsilon q)=r^m$, где $r\in\{7,31\}$ и m — натуральное число, то*

$$(r,m,\varepsilon q)\in\{(7,1,5),(7,1,3),(7,3,19),(31,1,-5)\}.$$

Доказательство. Используя равенство (1), находим, что

$$k_6(\varepsilon q)=\frac{q^2-\varepsilon q+1}{(q+\varepsilon 1,3)}.$$

Пусть $k_6(\varepsilon q)=r^m$, где $r\in\{7,31\}$. Если $(q+\varepsilon 1,3)=3$, то $3r^m=q^2-\varepsilon q+1=(\varepsilon q-1)^2+(\varepsilon q-1)+1$. По лемме 2.11 находим, что $m=1$ или $m=2$. Поскольку $r=7$ или $r=31$, заключаем, что $(r,m,\varepsilon q-1)\in\{(7,1,4),(7,1,-5)\}$. По предположению q нечетно, поэтому возможен только случай $r=7$ и $\varepsilon q=5$.

Пусть теперь $(q+\varepsilon 1,3)=1$. Тогда

$$r^m=q^2-\varepsilon q+1=(\varepsilon q-1)^2+(\varepsilon q-1)+1.$$

По лемме 2.11 верно, что либо $m=3$ и $\varepsilon q-1\in\{18,-19\}$, либо $m=1$. Если $m=3$ и $\varepsilon q-1\in\{18,-19\}$, то $r=7$, $\varepsilon q=19$. Наконец, если $m=1$, то $(r,\varepsilon q-1)\in\{(7,2),(7,-3),(31,5),(31,-6)\}$. Поскольку q нечетно, получаем, что $(r,\varepsilon q)\in\{(7,3),(31,-5)\}$. $\square$

Далее для линейных и унитарных групп над полем порядка q мы часто используем стандартное обозначение $L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon\in\{+,-\}$, т. е. $L_n^+(q)=L_n(q)$ и $L_n^-(q)=U_n(q)$. Следуя [6], через $\operatorname{prk} L$ будем обозначать размерность группы L, если L — линейная или унитарная группа, и лиев ранг группы L в случае симплектических или ортогональных групп.

Наименьшее общее кратное элементов спектра $\omega(G)$ равно периоду группы G и обозначается через $\exp(G)$. Для простого числа $r\in\pi(G)$ период силовской r-подгруппы группы G обозначается через $\exp_r(G)$, а наименьшее общее кратное элементов $\omega(G)$, взаимно простых с r, обозначается через $\exp_{r'}(G)$.

Лемма 2.13 [19, следствие 0.5]. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем характеристики p. Пусть $p^\gamma > \operatorname{prk} L - 1$, если L линейная или унитарная, и $p^\gamma > 2 \operatorname{prk} L - 1$ в противном случае. Тогда $\exp_p(L) \leq p^\gamma$.*

Лемма 2.14 [20, лемма 3.5]. *Пусть u — степень простого числа v. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $S = L_n^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$ и $n \geq 3$, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(\tau u),$$

где $c = r \in \pi(u - \tau 1)$, если $n = r^s$, и $c = 1$ иначе.

(б) *Если $S = S_{2n}(u)$ или $S = O_{2n+1}(u)$ при $n \geq 2$, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(u^2),$$

где $c = (2, u-1)^2$, если $n = 2^s$, и $c = (2, u-1)$ иначе.

(в) *Если $S = O_{2n}^\epsilon(u)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$ и $n \geq 4$ четно, то*

$$\exp_{v'}(S) = \exp_{v'}(O_{2n-\epsilon 1}(u)).$$

(г) *Если $S = O_{2n}^\epsilon(u)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$ и $n \geq 4$ нечетно, то*

$$\exp_{v'}(S) = \frac{\Phi_n(\epsilon u)}{(2, u-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u^2).$$

Предложение 2.15. *Предположим, что S — простая классическая группа над полем характеристики v и порядка u такая, что $5 \leq t(S) \leq 14$. Тогда*

$$\frac{1}{\alpha(S)} \cdot v \cdot u^{\gamma(S)} \leq \exp(S) \leq \beta(S) \cdot v \cdot u^{\gamma(S)},$$

где числа $\alpha(S), \beta(S)$ и $\gamma(S)$ указаны в табл. 1.

Доказательство. Будем использовать, что $\exp(S) = \exp_v(S) \cdot \exp_{v'}(S)$, и оценим каждый из этих множителей.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$. Тогда получаем, что $9 \leq m \leq 28$ (см. табл. 2). По лемме 2.13 число $\exp_v(S)$ не превосходит минимальной степени v, большей $m-1$, и, следовательно, $v \leq \exp_v(S) \leq (m-1)v$. По лемме 2.14

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(\tau u),$$

где $c = r \in \pi(u - \tau 1)$, если $m = r^s$, и $c = 1$ в противном случае. Тогда $1 \leq c$ и $c \leq 3, 11, 13, 2, 17, 19, 23, 5, 3$, если $m = 9, 11, 13, 16, 17, 19, 23, 25, 27$ соответственно. Будем использовать следующие оценки для произведений круговых многочленов. Если $s \geq 1$, то

$$\prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(x) = x^{2^s} - 1$$

и тем самым

$$\frac{3}{4} u^{2^s} \leq \prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(\tau u) < u^{2^s}.$$

Таблица 1. Оценки для $\exp(S)$, когда $5 \leq t(S) \leq 14$

S	$(\alpha(S), \beta(S), \gamma(S))$	S	$(\alpha(S), \beta(S), \gamma(S))$
$L_9^{\pm}$	$(32, 86, 28)$	$L_{19}^{\pm}$	$(1081, 1821, 120)$
$L_{10}^{\pm}$	$(6, 64, 32)$	$L_{20}^{\pm}$	$(76, 1922, 128)$
$L_{11}^{\pm}$	$(118, 143, 42)$	$L_{21}^{\pm}$	$(152, 4046, 140)$
$L_{12}^{\pm}$	$(15, 157, 46)$	$L_{22}^{\pm}$	$(76, 2832, 150)$
$L_{13}^{\pm}$	$(370, 342, 58)$	$L_{23}^{\pm}$	$(3490, 5934, 172)$
$L_{14}^{\pm}$	$(15, 247, 64)$	$L_{24}^{\pm}$	$(203, 6203, 180)$
$L_{15}^{\pm}$	$(29, 531, 72)$	$L_{25}^{\pm}$	$(2023, 12946, 200)$
$L_{16}^{\pm}$	$(57, 569, 80)$	$L_{26}^{\pm}$	$(203, 8990, 212)$
$L_{17}^{\pm}$	$(968, 1214, 96)$	$L_{27}^{\pm}$	$(1214, 18699, 230)$
$L_{18}^{\pm}$	$(29, 860, 102)$	$L_{28}^{\pm}$	$(540, 19419, 242)$
$S_{10}, O_{11}, O_{12}^{+}$	$(5, 20, 20)$	$S_{32}, O_{33}, O_{32}^{-}$	$(21, 90, 160)$
$S_{12}, O_{13}, O_{12}^{-}$	$(4, 16, 24)$	$S_{34}, O_{35}, O_{36}^{+}$	$(16, 135, 192)$
$S_{14}, O_{15}, O_{16}^{+}$	$(5, 29, 36)$	$S_{36}, O_{37}, O_{36}^{-}$	$(11, 108, 204)$
$S_{16}, O_{17}, O_{16}^{-}$	$(10, 29, 44)$	$O_{10}^{\pm}$	$(7, 24, 16)$
$S_{18}, O_{19}, O_{20}^{+}$	$(8, 49, 56)$	$O_{14}^{\pm}$	$(7, 37, 30)$
$S_{20}, O_{21}, O_{20}^{-}$	$(5, 39, 64)$	$O_{18}^{\pm}$	$(10, 65, 50)$
$S_{22}, O_{23}, O_{24}^{+}$	$(8, 63, 84)$	$O_{22}^{\pm}$	$(10, 85, 74)$
$S_{24}, O_{25}, O_{24}^{-}$	$(8, 63, 92)$	$O_{26}^{\pm}$	$(16, 135, 104)$
$S_{26}, O_{27}, O_{28}^{+}$	$(12, 98, 116)$	$O_{30}^{\pm}$	$(16, 167, 136)$
$S_{28}, O_{29}, O_{28}^{-}$	$(8, 78, 128)$	$O_{34}^{\pm}$	$(21, 190, 176)$
$S_{30}, O_{31}, O_{32}^{+}$	$(11, 90, 144)$	$O_{38}^{\pm}$	$(21, 228, 222)$

Если t — нечетное простое число, а s — натуральное число, то из леммы 2.4(а) следует, что

$$\Phi_{t^s}(x) = \Phi_{2t^s}(-x) = 1 + x^{t^{s-1}} + x^{2t^{s-1}} + \ldots + x^{(t-1)t^{s-1}} = \frac{x^{t^s} - 1}{x^{t^{s-1}} - 1}.$$

Если $u \geq 3$, то из леммы 2.4 следует, что

$$\frac{1}{2}u^{t^s - t^{s-1}} \leq \Phi_{t^s}(\tau u),\ \Phi_{2t^s}(\tau u) \leq 2u^{t^s - t^{s-1}}.$$

Эти неравенства верны для $u = 2$, поскольку

$$\Phi_{t^s}(\pm 2) \geq \frac{2^{t^s} + 1}{2^{t^{s-1}} + 1} > 2^{t^s - t^{s-1} - 1}.$$

Более того, из леммы 2.4(а) следует, что

$$\Phi_{t^s}(\tau u)\Phi_{2t^s}(\tau u) = \Phi_{t^s}(u^2) = 1 + u^{2t^{s-1}} + \ldots + u^{2(t-1)t^{s-1}}.$$

Поскольку $u^2 \geq 4$, лемма 2.4(г) влечет, что

$$u^{2t^{s-1}(t-1)} < \Phi_{t^s}(\tau u)\Phi_{2t^s}(\tau u) < \frac{4}{3}u^{2t^{s-1}(t-1)}.$$

Таблица 2. Коклики наибольшего размера в $GK(L)$ с $t(L) \geq 5$

L	Условия	$t(L)$	$E(L)$	$J(L) \setminus E(L)$
$U_n(q)$	$n \geq 9$ нечетно	$\frac{n+1}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 10$ четно	$\frac{n}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i < n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
$L_n(q)$	$n \geq 9$ нечетно и $(n,q) \neq (9,2), (11,2)$	$\frac{n+1}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i \leq n\}$	$\varnothing$
	$n = 11$ и $q = 2$	5	$\{7,8,9,11\}$	$\{5,10\}$
	$n \geq 10$ четно и $(n,q) \neq (10,2), (12,2)$	$\frac{n}{2}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < i < n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n = 12$ и $q = 2$	6	$\{7,8,9,10,11,12\}$	$\varnothing$
$S_{2n}(q)$ или $O_{2n+1}(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n+4}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 5$, $n \equiv 1 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (5,2)$	$\frac{3n+5}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 6$, $n \equiv 2 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (6,2)$	$\frac{3n+2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$ и $(n,q) \neq (7,2)$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n+1}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n-1}{2}, n-1, n+1\}$
	$n = 6$ и $q = 2$	5	$\{3,5,8,10,12\}$	
	$n = 7$ и $q = 2$	6	$\{5,7,10,12,14\}$	$\{3,8\}$
$O_{2n}^{+}(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq 2n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 9$, $n \equiv 1 \pmod 4$	$\frac{3n+1}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq 2n, n+1\}$	$\{n-1, n+1\}$
	$n \geq 10$, $n \equiv 2 \pmod 4$	$\frac{3n-2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq 2n\}$	$\{\frac{n}{2}, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n-1}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq 2n, n-1\}$	$\varnothing$
$O_{2n}^{-}(q)$	$n \geq 8$, $n \equiv 0 \pmod 4$	$\frac{3n+4}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} \leq \eta(i) \leq n\}$	$\varnothing$
	$n \geq 9$, $n \equiv 1 \pmod 4$	$\frac{3n+1}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n, i \neq n, \frac{n+1}{2}\}$	$\{\frac{n+1}{2}, n-1\}$
	$n = 6$, $q = 2$	5	$\{3,8,5,10,12\}$	$\varnothing$
	$n = 6$, $q > 2$	5	$\{8,5,10,12\}$	$\{3,6\}$
	$n \geq 10$, $n \equiv 2 \pmod 4$	$\frac{3n+2}{4}$	$\{i \mid \frac{n}{2} < \eta(i) \leq n\}$	$\{\frac{n}{2}, n-2, n\}$
	$n \geq 7$, $n \equiv 3 \pmod 4$ и $q \neq 2$	$\frac{3n+3}{4}$	$\{i \mid \frac{n-1}{2} \leq \eta(i) \leq n, i \neq n, \frac{n-1}{2}\}$	$\varnothing$
	$n = 7$, $q = 2$	5	$\{5,10,12,14\}$	$\{3,8\}$

Для оставшихся многочленов используем следующие неравенства:

$$\frac{3}{4}u^4 < \Phi_{12}(\tau u) = u^4 - u^2 + 1 < u^4,$$

$$\frac{u^8}{2} < \Phi_{15}(\tau u) = u^8 - (\tau u)^7 + (\tau u)^5 - u^4 + (\tau u)^3 - (\tau u) + 1 < 2u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^8 < \Phi_{20}(\tau u) = u^8 - u^6 + u^4 - u^2 + 1 < u^8, \frac{3}{4}u^8 < \Phi_{24}(\tau u) = u^8 - u^4 + 1 < u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^{12} < \Phi_{28}(\tau u) = u^{12} - u^{10} + u^8 - u^6 + u^4 - u^2 + 1 < u^{12}.$$

Например, если $m = 12$, то

$$\exp_{v'}(S) = \prod_{i=1}^{12} \Phi_i(\tau u).$$

Находим, что

$$\frac{3}{4}u^8 < \Phi_1(\tau u)\Phi_2(\tau u)\Phi_4(\tau u)\Phi_8(\tau u) < u^8, \quad u^4 < \Phi_3(\tau u)\Phi_6(\tau u) < \frac{4}{3}u^4,$$

$$u^8 < \Phi_5(\tau u)\Phi_{10}(\tau u) < \frac{4}{3}u^8, \quad \frac{1}{2}u^6 < \Phi_7(\tau u), \Phi_9(\tau u) < 2u^6,$$

$$\frac{1}{2}u^{10} < \Phi_{11}(\tau u) < 2u^{10}, \quad \frac{3}{4}u^4 < \Phi_{12}(\tau u) < u^4.$$

Поскольку $v \le \exp_v(S) \le 11v$, получаем, что

$$\exp(S) > v \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 u^{46} = \frac{9}{128} v u^{46} > \frac{1}{15} v u^{46}$$

и

$$\exp(S) < 11v \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 2^3 u^{46} < 157 v u^{46}.$$

Предположим, что $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u), O^+_{2m+2}(u)\}$, где m нечетно и $5 \le m \le 17$. По лемме 2.13 получаем, что $v \le \exp_v(S) \le (2m+1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u^2),$$

где $c \le 4$, если $n = 2^s$, и $c \le 2$ в противном случае. Оценим $\Phi_i(u^2)$ следующим образом. Во-первых, воспользуемся тем, что

$$\prod_{k=0}^{s} \Phi_{2^k}(u^2) = u^{2^s} - 1,$$

поэтому это произведение меньше u^{2^s} и не меньше $\frac{15}{16}u^{2^s}$ для всех $s \ge 2$. Поскольку $u^2 \ge 4$, из леммы 2.4 следует, что

$$\frac{2}{3}u^{2\varphi(i)} < \Phi_i(u^2) < \frac{4}{3}u^{2\varphi(i)}.$$

Используем эти неравенства, если $i = t^s$, где t — нечетное простое число и $2i > m$. Если $i = t^s$ и $2i \le m$, то

$$\Phi_i(u^2)\Phi_{2i}(u^2) = \Phi_i(u^4) = 1 + u^4 + \ldots + u^{4\varphi(i)} > u^{4\varphi(i)}$$

и, поскольку $u^4 \geq 16$, получаем, что $\Phi_i(u^2)\Phi_{2i}(u^2) < \frac{16}{15}u^{4\varphi(i)}$. Оставшиеся две оценки для этого случая:

$$\frac{15}{16}u^8 < \Phi_{12}(u^2) = u^8 - u^4 + 1 < u^8,$$

$$\frac{3}{4}u^{16} < \Phi_{15}(u^2) = u^{16} - u^{14} + u^{10} - u^8 + u^6 - u^2 + 1 < u^{16}.$$

Предположим, что $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u), O^-_{2m}(u)\}$, где m четно и $6 \leq m \leq 18$. По лемме 2.13 получаем, что $v \leq \exp_v(S) \leq (2m-1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_{v'}(S) = \frac{1}{c} \cdot \prod_{i=1}^{m} \Phi_i(u^2),$$

где $c \leq 4$, если $n = 2^s$, и $c \leq 2$ в противном случае. Для многочленов $\Phi_i(u^2)$ используем неравенства из предыдущего случая.

Предположим, что $S \simeq O^\epsilon_{2m}(u)$, где $\epsilon \in \{+,-\}$, m нечетно и $5 \leq m \leq 19$. По лемме 2.13 получаем, что $v \leq \exp_v(S) \leq (2m-1)v$. По лемме 2.14(б),(в)

$$\exp_{v'}(S) = \frac{\Phi_n(\epsilon u)}{(2, u-1)} \prod_{i=1}^{n-1} \Phi_i(u^2).$$

Очевидно, что $(2, u-1) \leq 2$. Для многочленов $\Phi_i(u^2)$ используем неравенства из предыдущего случая. Наконец, оцениваем $\Phi_n(\epsilon u)$ так же, как в случае линейных и унитарных групп. $\square$

3. Предварительные сведения: графы простых чисел и спектры групп лиева типа

Обозначим через $\pi(G)$ множество всех простых делителей порядка группы G. Граф простых чисел группы G обозначается через $GK(G)$. Коклику в $GK(G)$, содержащую r, будем называть *$\{r\}$-кокликой*. Если $r \in \pi(G)$, то $t(r, G)$ обозначает наибольший размер $\{r\}$-коклики в $GK(G)$. Через $\rho(r, G)$ обозначается множество вершин в некоторой $\{r\}$-коклике в $GK(G)$ размера $t(r, G)$.

Простое число $r \in \pi(G)$ называется *большим* (относительно G), если r лежит в некоторой коклике наибольшего размера в $GK(G)$, и *малым* (относительно G) в противном случае.

Лемма 3.1. *Предположим, что L — неабелева простая группа с $t(L) \geq 5$ и $t(2, L) \geq 2$. Если G — группа с $\omega(G) = \omega(L)$, то справедливы следующие утверждения.*

(а) *Существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G.*

(б) *Для любой коклики ρ из $GK(G)$ с $|\rho| \geq 3$ не более одного простого числа из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(G) - 1$.*

(в) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное с 2 в $GK(G)$, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, G)$.*

(г) *Группа K нильпотентна.*

Доказательство. Первые три утверждения следуют из основной теоремы из [21]. Четвертое утверждение — это [22, теорема 1]. $\square$

Предположим, что L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Положим

$$\delta(L) = \begin{cases} \pi(q - \varepsilon 1), \text{ если } L = L_n^\varepsilon(q), \\ \pi((2, q-1)), \text{ если } L \text{ — симплектическая или ортогональная группа.} \end{cases}$$

Из основных результатов работы [23] (см. также [6, лемма 2.2]) следует, что для двух различных простых чисел $r, s \in \pi(L) \setminus \delta(L)$, где $r \neq p$, ответ на вопрос, являются ли они смежными в $GK(L)$, зависит только от $e(r, q)$, если $s = p$, и $e(r, q)$, $e(s, q)$, если $s \neq p$.

Для формулировки критерия смежности в [23] используется несколько функций целочисленного аргумента. В частности, для симплектических и ортогональных групп используется функция $\eta(k)$, где

$$\eta(k) = \begin{cases} k, & \text{если } k \text{ нечетно,} \\ k/2, & \text{если } k \text{ четно.} \end{cases}$$

Для линейных и унитарных групп будем использовать переформулировку критерия смежности из [24, леммы 2.1–2.3], который сформулирован в несколько иных терминах. Следуя [6], определим функцию φ для унификации дальнейших рассуждений:

$$\varphi(r, L) = \begin{cases} e(r, \varepsilon q), & \text{если } L = L_n^\varepsilon(q), \\ \eta(e(r, q)), & \text{если } L \text{ симплектическая или ортогональная.} \end{cases}$$

Из определения и свойств функции $e(r, q)$ следует, что

$$e(r, q) = \begin{cases} 2\varphi(r, L), & \text{если либо } e(r, q) \text{ четно и } L \text{ симплектическая} \\ & \text{или ортогональная,} \\ & \text{либо } e(r, q) \equiv 2 \pmod 4 \text{ и } L \text{ унитарная;} \\ \varphi(r, L)/2, & \text{если } e(r, q) \equiv 1 \pmod 2 \text{ и } L \text{ унитарная;} \\ \varphi(r, L) & \text{иначе.} \end{cases}$$

В следующей лемме перечислены критерии смежности в графах простых чисел классических групп из [23–25] для всех типов классических групп.

Лемма 3.2. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, где $\operatorname{prk} L = n \geq 4$. Возьмем нечетные простые числа r, s такие, что $r, s \in \pi(L) \setminus \{p\}$. Положим $k = e(r, q)$ и $l = e(s, q)$. Предположим, что $2 \leq \varphi(r, L) \leq \varphi(s, L)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $L = L_n^\varepsilon(q)$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(r, L) + \varphi(s, L) > n$, и $\frac{\varphi(s,L)}{\varphi(r,L)}$ не является целым числом.*

(б) *Если $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(r, L) + \varphi(s, L) > n$, и $\frac{l}{k}$ не является нечетным целым числом.*

(в) *Если $L = O_{2n}^\varepsilon(q)$, то r и s не смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $2\varphi(r, L) + 2\varphi(s, L) > 2n - (1 - \varepsilon(-1)^{k+l})$, $\frac{l}{k}$ не является нечетным целым числом, и если $\varepsilon = +$, то цепочка равенств $n = l = 2\varphi(s, L) = 2\varphi(r, L) = 2k$ неверна.*

В некоторых случаях удобнее использовать следствие критерия смежности.

Лемма 3.3 [6, лемма 2.4]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть* $\operatorname{prk} L = n \geq 4$.

(а) *Если $r \in \pi(L) \setminus \{p\}$, то $\varphi(r, L) \leq n$.*

(б) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L) \setminus \{p\}$, причем $\varphi(r, L) \leq n/2$ и $\varphi(s, L) \leq n/2$, то r и s смежны в $GK(L)$.*

(в) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L) \setminus \{p\}$, причем $n/2 < \varphi(r, L) \leq n$ и $n/2 < \varphi(s, L) \leq n$, то r и s смежны в $GK(L)$ тогда и только тогда, когда $e(r, q) = e(s, q)$.*

(г) *Если r и s — различные простые числа из $\pi(L) \setminus \{p\}$ и $e(r, q) = e(s, q)$, то r и s смежны в $GK(L)$.*

Следующая лемма является аналогом [6, лемма 2.7], сформулированным при новых ограничениях на L.

Лемма 3.4. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть $t(L) \geq 5$.*

(а) *Если $\varphi(r, L) \geq n/2$, то r является большим относительно L.*

(б) *Если r большое относительно L, то $\varphi(r, L) \geq n/2 - 1$.*

(в) *Если r большое относительно L, то*

$$\varphi(r, L) \geq \begin{cases} t(L), & \text{если } L \text{ линейная или унитарная;} \\ (2t(L) - 4)/3, & \text{если } L \text{ симплектическая или ортогональная.} \end{cases}$$

(г) *Если ρ — коклика в $GK(L)$ и $n/2 < \varphi(r, L)$ для каждого $r \in \rho$, то $GK(L)$ имеет коклику σ размера $t(L)$ с $\rho \subseteq \sigma$.*

Доказательство. Все пункты могут быть проверены с помощью [25, табл. 2, 3]. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Тогда $t(p, L) \leq 4$. Более того, предположим, что $\operatorname{prk} L \geq 8$, если L — линейная или унитарная группа, и $\operatorname{prk} L \geq 5$ в противном случае. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если r не смежно с p в $GK(L)$, то r является большим относительно L.*

(б) *Если L — линейная или унитарная группа, то $t(p, L) = 3$.*

(в) *Если $t(p, L) = 2$, то $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где n — четное целое число.*

Доказательство. Обозначим $n = \operatorname{prk} L$. Значения $t(p, L)$ можно найти в [23, табл. 4]. Предположим, что $r \in \pi(L)$ не смежно с p в $GK(L)$. По [23, предложение 3.1] находим, что $\varphi(r, L) > n - 2$, если $L = L_n^{\varepsilon}(q)$ или $L = O_{2n}^{\pm}(q)$, и $\varphi(r, L) > n - 1$, если $L = O_{2n+1}(q)$ или $L = S_{2n}(q)$. По лемме 3.4 получаем, что r является большим по отношению к L. $\square$

Лемма 3.6 [6, лемма 2.3]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Если r — нечетное простое число из $\pi(L) \setminus \{p\}$, то $\varphi(r, L)$ делит $r - 1$, а если L — симплектическая или ортогональная группа, то $2\varphi(r, L)$ делит $r - 1$.*

Лемма 3.7 [26, лемма 1.3]. *Предположим, что S — простая классическая группа лиева ранга m над полем порядка u. Тогда порядки элементов группы S не превосходят $\frac{u}{u-1}u^m$.*

Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Для $\sigma \subseteq \pi(L) \setminus \{p\}$ положим $E(\sigma, L) = \{e(r, -q) \mid r \in \sigma\}$, если L — унитарная группа, и $E(\sigma, L) = \{e(r, q) \mid r \in \sigma\}$ в противном случае. По лемме 3.5

верно, что $t(p,L)\le 4$, поэтому если $t(L)\ge 5$, то любая коклика ρ наибольшего размера в $GK(L)$ не содержит p и, следовательно, множество $E(\rho,L)$ корректно определено. Определим $J(L)$ как объединение множеств $E(\rho,L)$, а $E(L)$ — как пересечение этих множеств, где ρ пробегает все коклики наибольшего размера из $GK(L)$. Следующая лемма является аналогом [6, леммы 2.5] при новых ограничениях на L.

Лемма 3.8. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, и пусть $t(L)\ge 5$. Пусть ρ — коклика наибольшего размера в $GK(L)$. Если $J(L)=E(L)$, то $E(\rho,L)=E(L)$. Если $J(L)\ne E(L)$, то $E(\rho,L)=E(L)\cup\{j\}$ для некоторого $j\in J(L)\setminus E(L)$. В частности, $|E(L)|\le t(L)\le |E(L)|+1$. Множества $E(L)$, $J(L)\setminus E(L)$ и числа $t(L)$ перечислены в табл. 2.*

Доказательство. См. [25, табл. 2, 3]. Отметим, что [25, табл. 3] содержит опечатку для $L=O_{12}^-(q)$, поскольку $r_4(q)$ и $r_{12}(q)$ смежны в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). $\square$

Лемма 3.9. *Предположим, что $L=L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon\in\{+,-\}$ и $t(L)\ge 5$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(а) *Если $r\in R_i(\varepsilon q)$, где $2\le i<n/2$, то $t(r,L)\le i$.*

(б) *Если $r\in R_i(\varepsilon q)$, где $n/3<i<n/2$, то $t(r,L)=i$.*

Доказательство. Поскольку $t(L)\ge 5$, согласно табл. 2 $n\ge 9$. Предположим, что $r\in R_i(\varepsilon q)$, где $2\le i<n/2$, и s не смежно с r в $GK(L)$. Согласно табл. 2 либо $i=5$ и $L=L_{11}(2)$, либо r мало относительно L. В первом случае $t(r,L)=5=i$, поэтому утверждение верно. Следовательно, можно считать, что r мало. По лемме 3.5(а) получаем, что $s\ne p$. Тогда из леммы 3.3(б) следует, что $j=\varphi(s,L)>n/2>i$. Из леммы 3.2(а) следует, что s не смежно с r тогда и только тогда, когда $j\in J=\{n,n-1,\dots,n-i+1\}$ и j не делится на i. Очевидно, что в J существует хотя бы одно целое число, делящееся на i. Значит, существует не более $i-1$ вариантов для j и поэтому $t(r,L)\le i$.

Предположим теперь, что $i>n/3$. Заметим, что если $j\in J$, то $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L согласно табл. 2, поэтому соответствующие простые числа для J вместе с r образуют коклику в $GK(L)$. Очевидно, что $2i$ — единственное целое число, делящееся на i среди элементов J. Следовательно, если $R_j(\varepsilon q)\ne\varnothing$ для всех $j\in J$, то $t(r,L)=i$. Согласно табл. 2 остается рассмотреть случаи $L=L_{11}(2)$ и $L_{12}(2)$. В этих случаях $R_6(2)=\varnothing$ и $i=4,5$. Однако 6 не принадлежит множеству $\{n-i+1,\dots,n\}$, так что снова $t(r,L)=i$, как и заявлено. $\square$

Лемма 3.10 [6, лемма 2.13]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p. Пусть k и l — целые числа, $k\ge 0$, $l>0$, и $\delta=\delta(L)$. Для $j=1,\dots,l$ предположим, что попарно различные простые числа r_j лежат в $\pi(L)\setminus(\delta\cup\{p\})$. Положим $\varepsilon=-$, если L — унитарная группа, и $\varepsilon=+$ в противном случае. Обозначим $i_j=e(r_j,\varepsilon q)$. Произведение $p^kr_1r_2\cdots r_l$ лежит в $\omega(L)$ тогда и только тогда, когда δ'-часть числа p^ka лежит в $\omega(L)$, где*

$$a=\begin{cases}[q^{i_1}-(\varepsilon 1)^{i_1},q^{i_2}-(\varepsilon 1)^{i_2},\dots,q^{i_l}-(\varepsilon 1)^{i_l}], & \text{если } L=L_n^\varepsilon(q),\\ [q^{\eta(i_1)}+(-1)^{i_1},q^{\eta(i_2)}+(-1)^{i_2},\dots,q^{\eta(i_l)}+(-1)^{i_l}] & \text{иначе.}\end{cases}$$

В частности, если $i_1,i_2,\dots,i_l$ больше 2 и попарно различны, то $p^kr_1r_2\cdots r_l\in\omega(L)$ тогда и только тогда, когда $p^kk_{i_1}(\varepsilon q)k_{i_2}(\varepsilon q)\cdots k_{i_l}(\varepsilon q)\in\omega(L)$.

Лемма 3.11 [6, лемма 3.8]. *Для простой классической группы L над полем порядка q и характеристики p с $\mathrm{prk}(L) = n \geq 4$ положим*

$$j = \begin{cases} n, & \text{если } L \simeq L_n(q); \\ 2n-2, & \text{если либо } L \simeq O_{2n}^{+}(q), \text{ либо } L \simeq U_n(q) \text{ и } n \text{ четно,} \\ 2n, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $(k_j(q), |P|) = 1$ для любой собственной параболической подгруппы P группы L. Если $i \neq j$ и примитивный простой делитель $r_i(q)$ принадлежит $\pi(L)$, то существует собственная параболическая подгруппа P группы L такая, что $k_i(q)$ принадлежит $\omega(P)$. В частности, если два различных простых числа $r, s \in \pi(L)$ не делят порядок никакой собственной параболической подгруппы группы L, то r и s смежны в $GK(L)$.

Лемма 3.12 [6, лемма 3.5]. *Пусть L — простая классическая группа над полем порядка q и характеристики p, $r \in \pi(L)$, $r^s \in \omega(P)$, где P — собственная параболическая подгруппа группы L, и $(r, 6p(q+1)) = 1$. Если L действует точно на векторном пространстве V над полем характеристики t, отличной от p, то $tr^s \in \omega(V \rtimes L)$.*

Лемма 3.13. *Предположим, что L — простая классическая группа над полем порядка q и нечетной характеристики p. Если $t(L) \geq 5$ и $t(r, L) = 2$, то r делит $p(q^2-1)$.*

Доказательство. Предположим, что $r \in \pi(L) \setminus \{p\}$ и r не делит q^2-1. Положим $i = \varphi(r, L)$, если L — линейная или унитарная группа, и $i = e(r, q)$, если L — симплектическая или ортогональная группа. Для доказательства утверждения покажем, что $t(r, L) > 2$. Если r является большим относительно L, то $t(r, L) = t(L) \geq 5$. Поэтому можно считать, что r мало относительно L.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$, то $i \geq 3$. Согласно табл. 2 видим, что $n \geq 9$ и $i \leq n/2$. Рассмотрим простые числа s_j для $0 \leq j \leq 2$ такие, что $\varphi(s_j, L) = n - j$. Тогда $\varphi(s_j, L) \geq n-2 > \frac{n}{2} \geq i$. Поскольку $i \geq 3$, не более одного числа из $n, n-1, n-2$ делится на i. Из леммы 3.2(а) следует, что r не смежно по крайней мере с двумя простыми числами из $\{s_0, s_1, s_2\}$ и, более того, множество $\{s_0, s_1, s_2\}$ является кокликой в $GK(L)$. Следовательно, получаем, что $t(r, L) \geq 3$.

Предположим, что $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$, то $i \geq 2$. Согласно табл. 2 видим, что $n \geq 5$. По лемме 3.4(а) получаем, что $i < n/2$. Сначала рассмотрим случай $r \in R_4(q)$. Если n нечетно, то $\{r, r_n(q), r_{2n}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(б). Аналогично если n четно, то $\{r, r_{n-1}(q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Теперь рассмотрим случай $r \notin R_4(q)$. Тогда $\eta(i) \geq 3$. Заметим, что не более одного числа среди $2n$, $2n-2$, $2n-4$ делится на i, поэтому r и два простых числа из множества $\{r_{2n}(q), r_{2n-2}(q), r_{2n-4}(q)\}$ образуют коклику размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(б).

Предположим, что $L \simeq O_{2n}^{\varepsilon}(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Поскольку $(r, p(q^2-1)) = 1$ и r мало относительно L, то согласно [25, табл. 3] имеем $i \geq 2$ и $n \geq 6$. Сначала рассмотрим случай $r \in R_4(q)$. Если n нечетно, то $\frac{n-1}{4}$ и $\frac{2n-2}{4}$ не могут быть одновременно нечетными целыми числами, поэтому $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{n-1}(q)\}$ или $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). Если n четно, то $\{r, r_{n-1}(\varepsilon q), r_{2n-2}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ по лемме 3.2(в). Теперь рассмотрим случай $r \notin R_4(q)$. Тогда $\eta(i) \geq 3$. Поскольку r мало относительно

L, получаем, что $n \geq 7$ и $i < n/2$. Если n нечетно, то $\frac{n-2}{i}$ и $\frac{2(n-2)}{i}$ не могут быть одновременно нечетными целыми числами, поэтому $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{n-2}(\varepsilon q)\}$ или $\{r, r_n(\varepsilon q), r_{2n-4}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Если n четно, то из леммы 3.2(в) следует, что $M = \{r_{2n-4}(q), r_{n-1}(q), r_{2n-2}(q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$ и r не смежно по крайней мере с двумя элементами из M, поэтому $t(r, L) \geq 3$, как и утверждалось. $\square$

4. Доказательство теоремы 3

В этом разделе докажем результаты о строении групп, изоспектральных простым классическим группам. В конце раздела доказана теорема 3.

Предположим, что L — простая классическая группа над полем нечетного порядка q, а G — группа, изоспектральная L. Предположим, что L и G удовлетворяют условию теоремы 3, в частности, $5 \leq t(L) \leq 13$. Обозначим $n = \operatorname{prk} L$. Согласно табл. 2 находим, что $n \geq 9$, если L — линейная или унитарная группа, и $n \geq 5$ в остальных случаях.

Как упоминалось во введении, можно считать, что $n \neq 16$, если $L = S_{2n}(q)$ или $L = O_{2n+1}(q)$.

Используя [23, табл. 6], видим, что $t(2, L) \geq 2$. В силу леммы 3.1 существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. По предположению S — простая классическая группа над полем порядка u, взаимно простого с q.

Положим $m = \operatorname{prk}(S)$. Поскольку $t(L) \geq 5$, согласно табл. 2 существует коклика размера 5 в $GK(L)$, не содержащая простого числа 3. Из леммы 3.1 следует, что по крайней мере четыре простых числа из этой коклики принадлежат $\pi(S)$. Это вместе с [25, табл. 2, 3] влечет, что $m \geq 4$. Фиксируем эти обозначения и ограничения далее в этом разделе.

Лемма 4.1. *Если S — классическая группа над полем характеристики v и $r \in \pi(K) \setminus \{v\}$, то $t(r, L) = 2$ и r делит $p(q^2 - 1)$.*

Доказательство. Зафиксируем простое число $r \in \pi(K) \setminus \{v\}$. Из [6, лемма 2.10] следует, что $t(r, L) \geq 2$. Сначала покажем, что $t(r, L) = 2$.

Предположим, что $t(r, L) \geq 3$. Тогда существуют $s_1, s_2 \in \pi(L) \setminus \{r\}$ такие, что $\{r, s_1, s_2\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. Если r большое относительно L или $r = p$, то можно считать, что s_1 и s_2 являются большими относительно L, поэтому они нечетны. Если r мало относительно L, из леммы 3.5(а) следует, что $s_1, s_2 \neq p$. Согласно табл. 2 получаем, что $\varphi(r, L) < \frac{n}{2}$. По лемме 3.3(б) справедливы неравенства $\varphi(s_1, L) > n/2$ и $\varphi(s_2, L) > n/2$. Значит, s_1 и s_2 нечетны во всех случаях. Из леммы 3.1 следует, что $s_1, s_2 \in \pi(S)$. По лемме 3.1 верно, что $t(S) \geq 4$. Значит, $S \neq L_2(v)$ согласно [25, табл. 2]. Тогда силовские v-подгруппы группы S нециклические и, следовательно, если $v = s_1$ или $v = s_2$, то $rs_1 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ или $rs_2 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ (см., например, [22, лемма 2.13]). Поэтому можно считать, что $s_1, s_2 \neq v$. Из леммы 3.11 следует, что s_1 или s_2 делит порядок собственной параболической подгруппы группы S. По [22, лемма 2.16] получаем, что $rs_1 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$ или $rs_2 \in \omega(G) \setminus \omega(L)$; противоречие.

Следовательно, верно, что $t(r, L) = 2$. По лемме 3.13 получаем, что r делит $p(q^2 - 1)$, что и требовалось показать. $\square$

Лемма 4.2. *Предположим, что простое число $r \neq p$ делит $|\overline{G}/S|$.*

(а) *Если существует целое число $i \geq 3$ такое, что $k_i(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K| \cdot v$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, и для каждого $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) > m/2$*

и $rr_i \notin \omega(L)$, то r делит $k_i(\varepsilon q) - 1$.

(б) *Если существуют различные i и j такие, что $i, j \geq 3$ и $\{r, r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, является кокликой размера 3 в $GK(L)$, то r делит $(k_i(\varepsilon q) - 1)(k_j(\varepsilon q) - 1)$.*

Доказательство. Предположим, что существует $i \geq 3$ такое, что $k_i(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K| \cdot v$ и для каждого $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) > m/2$ и $rr_i \notin \omega(L)$. По лемме 3.3(в) заключаем, что $e(r_i, u)$ одинаково для всех $r_i \in R_i(\varepsilon q)$. Положим $t = e(r_i, u)$ и заметим, что S имеет циклическую холлову подгруппу порядка $k_t(u)$ по [6, лемма 2.12]. Пусть $s \in \pi(k_i(\varepsilon q))$ и $P \in Syl_s(S)$. По аргументу Фраттини число r делит $|N_{\overline{G}}(P)|$. Выберем $x \in N_{\overline{G}}(P)$ так, чтобы $|x| = r$. Тогда $P\langle x\rangle$ — группа Фробениуса с ядром P и дополнением $\langle x\rangle$ и, следовательно, $|P| \equiv 1 \pmod{r}$. Мы знаем, что $(s, |\overline{G}/S| \cdot |K|) = 1$, поэтому силовские s-подгруппы групп G и S изоморфны. Поскольку s — произвольный элемент множества $\pi(k_i(\varepsilon q))$, получаем, что $k_i(\varepsilon q) - 1$ делится на r.

Предположим, что существуют различные i и j такие, что $i, j \geq 3$ и $\{r, r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Тогда $3 \notin \{r_i(\varepsilon q), r_j(\varepsilon q)\}$. Поскольку r делит $|\overline{G}/S|$, из леммы 3.1 следует, что $(k_i(\varepsilon q)k_j(\varepsilon q), |\overline{G}/S| \cdot |K|) = 1$ и тем самым $R_j(\varepsilon q) \cup R_i(\varepsilon q) \subseteq \pi(S)$. Покажем, что существует $\ell \in \{i, j\}$ такое, что если $r_\ell \in R_\ell(\varepsilon q)$, то $r_\ell \neq v$ и $\varphi(r_\ell, S) > m/2$. Сначала предположим, что $v \in R_i(\varepsilon q) \cup R_j(\varepsilon q)$. Без ограничения общности пусть $r_i = v$. Тогда, поскольку r_i и r_j не смежны в $GK(S)$, используя [23, табл. 4], находим, что $\varphi(r_j, S) > m/2$, поэтому можно взять $\ell = j$. Если $v \notin R_i(\varepsilon q) \cup R_j(\varepsilon q)$ и хотя бы для одного $r_i \in R_i(\varepsilon q)$ верно, что $\varphi(r_i, S) \leq m/2$, то по лемме 3.3(б) для каждого $r_j \in R_j(\varepsilon q)$ верно неравенство $\varphi(r_j, S) > m/2$. Следовательно, число j удовлетворяет условию п. (а) и поэтому r делит $k_j(\varepsilon q) - 1$. □

Предложение 4.3. *Предположим, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$. Если $r_i = r_i(\varepsilon q) \in \pi(\overline{G}/S)$ и $4 \leq i \leq n$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) *$i = 4$ и либо $r_i = 61$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r_i = 5$ и $9 \leq n \leq 12$, либо $n \geq 13$;*

(б) *$i = 5$ и либо $n \geq 23$, либо $r_i = 11$ и $n \in \{13, 21, 22\}$;*

(в) *$i = 6$, $r_i = 31$, $n = 9$, $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$, и $\varphi(s, S) \leq m/2$ для некоторого $s \in R_8(\varepsilon q)$;*

(г) *$i = 6$, $r_i = 7$, $11 \leq n \leq 13$, $(q + \varepsilon 1, 5) = 5$, $(q - \varepsilon 1, 11) = 11$, и $\varphi(s, S) \leq m/2$ для некоторого $s \in R_8(\varepsilon q)$;*

(д) *$i = 6$ и $n \geq 14$.*

Доказательство. Поскольку $5 \leq t(L) \leq 13$, согласно табл. 2 получаем $9 \leq n \leq 26$.

Пусть j — целое число и $3 \leq j \leq n$. Обозначим через $r(j)$ наибольший простой делитель числа j, а через $d(j)$ — число $(r(j), \Phi_{j_{\{r(j)\}'}}(\varepsilon q))$. Рассмотрим многочлен $f_j(x) = \frac{1}{d(j)} \cdot \Phi_j(x) - 1$. В силу равенства (1) и леммы 2.4(в) получаем, что $f_j(\varepsilon q) = k_j(\varepsilon q) - 1$. Предположим, что $\Phi_i(x)$ и $f_j(x)$ взаимно просты как элементы $\mathbb{Q}[x]$. Тогда согласно расширенному алгоритму Евклида существуют единственные многочлены $u_j(x), v_j(x) \in \mathbb{Q}[x]$ такие, что $u_j(x)\Phi_i(x) + v_j(x)f_j(x) = 1$, $\deg u_j < \deg f_j$ и $\deg v_j < \deg \Phi_i$. Следовательно, существует положительное целое число $c(j)$ такое, что $c(j)u_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$ и $c(j)v_j(x) \in \mathbb{Z}[x]$, поэтому $c(j)u_j(x)\Phi_i(x) + c(j)v_j(x)f_j(x) = c(j)$.

Предположим, что существуют различные целые числа j_1 и j_2 такие, что $3 \leq j_1, j_2 \leq n$ и $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика размера 3 в $GK(L)$. По лемме 4.2

получаем, что r_i делит $(k_{j_1}(\varepsilon q)-1)(k_{j_2}(\varepsilon q)-1)$. Это означает, что если $f_{j_1}(x)$ и $f_{j_2}(x)$ взаимно просты с $\Phi_i(x)$ в $\mathbb{Q}[x]$, то r_i делит $c(j_1)c(j_2)$.

Теперь докажем утверждение при $i \geq 7$. Для каждой пары (i,n) в табл. 3 перечислены либо две пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$ и $(j_2, c(j_2))$, либо три пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$, $(j_2, c(j_2))$ и $(j_3, c(j_3))$. В первом случае пары выбираются так, что $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ является кокликой в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$. Во втором случае пары выбираются так, что либо $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q), r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ является кокликой в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap \pi(c(j_1)c(j_3)) \cap \pi(c(j_2)c(j_3)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$, либо $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ и $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap \pi(c(j_1)c(j_3)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$. Предыдущее рассуждение показывает, что r_i принадлежит соответствующим пересечениям, поэтому эти пары чисел противоречат существованию r_i.

Все проверки выполняются понятным образом: если имеются пары $(j_1, c(j_1))$, $(j_2, c(j_2))$ для фиксированных i и n, то чтобы убедиться, что $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$, достаточно проверить, что числа i, j_1 и j_2 не делят друг друга и что $i+j_1 > n, i+j_2 > n, j_1+j_2 > n$ по лемме 3.2. Аналогичная проверка проводится в случае трех индексов j_1, j_2 и j_3. Теперь, как упомянуто выше, расширенный алгоритм Евклида дает единственные многочлены $u_{j_1}(x)$, $u_{j_2}(x)$, $v_{j_1}(x)$, $v_{j_2}(x)$ и нам остается только проверить, что перечисленные числа $c(j_1)$ и $c(j_2)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$c(j_1)u_{j_1}(x), c(j_1)v_{j_1}(x), c(j_2)u_{j_2}(x), c(j_2)v_{j_2}(x) \in \mathbb{Z}[x].$$

Заметим, что если ${j_1}_{\{r(j_1)\}'}$ делит $r(j_1)-1$ (и аналогично для j_2 и j_3), то нужно рассмотреть два случая: $d(j_1)=1$ и, следовательно, $f_{j_1}(x) = \Phi_{j_1}(x) - 1$, или $d(j_1) = r(j_1)$ и тем самым

$$f_{j_1}(x) = \frac{1}{r(j_1)}\Phi_{j_1}(x) - 1.$$

Числа $c(j_1)$ выбраны так, чтобы $c(j_1)u_{j_1}$, $c(j_1)v_{j_1}$ в обоих случаях были многочленами с целыми коэффициентами.

В качестве примера рассмотрим случай, когда $i=7$ и $9 \leq n \leq 12$. Используем целые числа $j_1 = 8$, $j_2 = 6$ и $j_3 = 9$. Поскольку $6+7 > 12$ и $6,7,8,9$ не делят друг друга, множества $\{r_7, r_8(\varepsilon q), r_6(\varepsilon q)\}$ и $\{r_7, r_8(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$. Следовательно, r_7 делит $(k_8(\varepsilon q)-1)(k_6(\varepsilon q)-1)$ и $(k_8(\varepsilon q)-1)(k_9(\varepsilon q)-1)$. Поскольку q нечетно, находим, что $d(8)=2$ и $k_8(\varepsilon q) - 1 = \frac{1}{2}\Phi_8(\varepsilon q) - 1$. Легко видеть, что если $u(x) := \frac{1}{7}(2x^3+2x^2-5x+2)$ и $v(x) := \frac{1}{7}(-4x^5 - 8x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x - 10)$, то

$$u(x)\Phi_7(x) + v(x)\left(\frac{1}{2}\Phi_8(x) - 1\right) = 1.$$

Поэтому можно взять $c(8) = 7$. Это означает, что если r_7 делит $k_8(\varepsilon q) - 1$, то r_7 делит 7. Поскольку $r_7 \equiv 1 \pmod 7$, получаем, что $\pi(k_8(\varepsilon q)-1) \cap R_7(\varepsilon q) = \varnothing$. Теперь $k_6(\varepsilon q) - 1$ равно либо $\Phi_6(\varepsilon q) - 1$, либо $\frac{1}{3}\Phi_6(\varepsilon q) - 1$. В первом случае получаем, что $u(x)\Phi_7(x) + v(x)(\Phi_6(x)-1) = 1$ для $u(x) := \frac{1}{7}(-6x+7)$ и $v(x) := \frac{1}{7}(6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1)$, а во втором случае видим, что $u(x)\Phi_7(x) + v(x)(\frac{1}{3}\Phi_6(x)-1) = 1$ для $u(x) := \frac{1}{127}(-42x+85)$ и $v(x) := \frac{1}{127}(126x^5 - 3x^4 + 120x^3 - 15x^2 + 96x - 63)$. Следовательно, если r_7 делит $k_6(\varepsilon q) - 1$, то r_7 делит $7 \cdot 127$ и тем самым $r_7 = 127$. Аналогично $k_9(\varepsilon q) - 1$ равно либо $\Phi_9(\varepsilon q) - 1$, либо $\frac{1}{3}\Phi_9(\varepsilon q) - 1$. В первом случае получаем, что

$$u(x)\Phi_7(x) + v(x)(\Phi_9(x) - 1) = 1$$

Таблица 3. Индексы для линейных и унитарных групп

r_4 : $(j, c(j))$	$n = 9, 10$ $(7, 2 \cdot 5^2)$,$(9, 2 \cdot 5)$	$n = 11, 12$ $(9, 2 \cdot 5)$,$(11, 2 \cdot 61)$	
r_5 : $(j, c(j))$	$n = 9, 10, 11$ $(8, 5)$, $(7, 5 \cdot 311)$, $(9, 5 \cdot 11)$	$n = 12$ $(8, 5)$, $(12, 5)$	$n = 13$ $(9, 5 \cdot 11)$, $(12, 5)$
$(j, c(j))$	$n = 14, 15, 16$ $(12, 5)$, $(14, 5 \cdot 3011)$, $(13, 5 \cdot 11^2 \cdot 41)$	$n = 17, 18$ $(16, 5)$, $(14, 5 \cdot 3011)$, $(17, 5 \cdot 11 \cdot 31 \cdot 41)$	$n = 19, 20$ $(16, 5)$, $(18, 5 \cdot 31)$, $(19, 5 \cdot 11 \cdot 2251)$
$(j, c(j))$	$n = 21, 22$ $(21, 5 \cdot 11^2)$, $(18, 5 \cdot 31)$, $(19, 5 \cdot 11 \cdot 2251)$		
r_6 : $(j, c(j))$	$n = 9$ $(8, 3)$, $(5, 3 \cdot 31)$	$n = 10$ $(8, 3)$, $(5, 3 \cdot 31)$, $(10, 3 \cdot 7)$	$11 \leq n \leq 13$ $(8, 3)$, $(10, 3 \cdot 7)$, $(11, 3 \cdot 7 \cdot 19)$
r_7 : $(j, c(j))$	$9 \leq n \leq 12$ $(8, 7)$, $(6, 7 \cdot 127)$, $(9, 7 \cdot 43)$	$n = 13, 14$ $(8, 7)$, $(12, 7)$	$15 \leq n \leq 18$ $(12, 7), (15, 2 \cdot 7)$
$(j, c(j))$	$19 \leq n \leq 21$ $(15, 2 \cdot 7)$, $(16, 7)$	$22 \leq n \leq 24$ $(18, 7 \cdot 127)$, $(20, 7 \cdot 43 \cdot 197)$, $(19, 7 \cdot 1723 \cdot 3529)$	$n = 25, 26$ $(24, 7)$, $(20, 7 \cdot 43 \cdot 197)$, $(23, 7 \cdot 16968421)$
r_8 : $(j, c(j))$	$9 \leq n \leq 10$ $(5, 2 \cdot 97)$, $(6, 2 \cdot 17)$, $(7, 2 \cdot 1201)$	$11 \leq n \leq 16$ $(9, 2 \cdot 17)$, $(10, 2 \cdot 97)$, $(11, 2 \cdot 3 \cdot 569)$	$17 \leq n \leq 19$ $(12, 2)$, $(15, 2)$
$(j, c(j))$	$20 \leq n \leq 22$ $(15, 2)$, $(18, 2 \cdot 17)$, $(19, 2 \cdot 41 \cdot 1289)$	$23 \leq n \leq 26$ $(21, 2 \cdot 5^2)$, $(22, 2 \cdot 3 \cdot 569)$, $(23, 2 \cdot 139921)$	
r_9 : $(j, c(j))$	$9 \leq n \leq 12$ $(8, 3)$, $(6, 3 \cdot 73)$, $(7, 3 \cdot 109 \cdot 127)$	$13 \leq n \leq 19$ $(12, 3)$, $(11, 3 \cdot 333667)$, $(13, 3 \cdot 440677)$	$20 \leq n \leq 23$ $(15, 3)$, $(16, 3)$
$(j, c(j))$	$24 \leq n \leq 26$ $(20, 3 \cdot 4051)$, $(21, 3 \cdot 9811)$, $(24, 3)$		
r_{10} : $(j, c(j))$	$10 \leq n \leq 14$ $(8, 5)$, $(9, 5 \cdot 31)$, $(7, 5 \cdot 3011)$	$15 \leq n \leq 21$ $(12, 5)$, $(15, 5)$	$22 \leq n \leq 24$ $(15, 5)$, $(16, 5)$
$(j, c(j))$	$n = 25, 26$ $(18, 5 \cdot 11)$, $(24, 5)$, $(23, 5 \cdot 71 \cdot 3301)$		

Окончание таблицы 3

r_{11} : $(j, c(j))$ $(j, c(j))$	$11 \leq n \leq 16$ $(8, 11)$, $(9, 11 \cdot 683)$, $(10, 11 \cdot 23 \cdot 199 \cdot 463)$ $n = 25, 26$ $(16, 11)$, $(24, 11)$	$17 \leq n \leq 22$ $(12, 11)$, $(16, 11)$	$23 \leq n \leq 24$ $(16, 11)$, $(18, 11 \cdot 23 \cdot 89)$, $(14, 11 \cdot 353 \cdot 361219)$
r_{12} : $(j, c(j))$	$12 \leq n \leq 16$ $(8, 3)$, $(9, 2 \cdot 5)$	$17 \leq n \leq 26$ $(15, 3)$, $(16, 3)$	
r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{17} $(j, c(j))$	$13 \leq n \leq 19$ $(8, *)$, $(12, *)$	$20 \leq n \leq 24$ $(12, *)$, $(16, *)$	$n = 25, 26$ $(16, *)$, $(24, *)$
r_{16} : $(j, c(j))$ r_{18}, r_{19}, r_{20}, r_{21}, : r_{22}, r_{23}, r_{25}, r_{26} $(j, c(j))$	$16 \leq n \leq 21$ $(12, 2), (15, 2 \cdot 17)$, $(10, 2 \cdot 7 \cdot 353)$ $18 \leq n \leq 26$ $(12, *)$, $(16, *)$	$22 \leq n \leq 26$ $(15, 2 \cdot 17), (20, 2 \cdot 97)$, $(18, 2 \cdot 257)$	
r_{24} $(j, c(j))$	$24 \leq n \leq 26$ $(15, 5)$, $(16, 3)$		

для $u(x) := -x^4 - x + 1$ и $v(x) := x^4 + x^3 + x^2 + x$, а во втором случае

$$u(x)\Phi_7(x) + v(x)\left(\frac{1}{3}\Phi_9(x) - 1\right) = 1$$

для

$$u(x) := \frac{1}{7 \cdot 43}(-38x^5 - 31x^4 + 46x^3 - 48x^2 - 55x + 169)$$

и

$$v(x) := \frac{1}{7 \cdot 43}(114x^5 + 207x^4 + 69x^3 + 99x^2 + 171x - 198).$$

Следовательно, если r_7 делит $k_9(\varepsilon q) - 1$, то r_7 делит $7 \cdot 43$ и поэтому $r_7 = 43$. Приходим к противоречию, поскольку r_7 не может быть равно одновременно 127 и 43. Информация, которую можно использовать для воспроизведения этого рассуждения, представлена в табл. 3: добавляем пары $(8, 7)$, $(6, 7 \cdot 127)$ и $(9, 7 \cdot 43)$ в ячейку, соответствующую $i = 7$ и $9 \leq n \leq 12$. Другие случаи проверяются аналогично. Явные значения многочленов $u(x)$ и $v(x)$ для всех случаев записаны в отдельных файлах для каждого i [27]. Как упоминалось выше, эти многочлены можно найти с помощью расширенного алгоритма Евклида. Заметим, что мы используем те же j_1 и j_2, если $i \in \{13, 14, 15, 17\}$, а также если $i \in \{18, 19, 20, 21, 22, 23, 25, 26\}$. Поэтому пишем $*$ вместо $c(j_1)$ и $c(j_2)$ в соответствующих ячейках таблицы. Это означает, что $c(j_1)$ и $c(j_2)$ зависят от i, но всегда имеем $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$.

Случаи $i = 4, 5$ рассматриваются аналогично с той лишь разницей, что некоторые пересечения множеств непусты, поэтому простые числа из этих пересечений дают возможные исключения. Рассмотрим в качестве примера случай $i = 4$ и $n = 9, 10$. Мы используем коклику $\{r_4, r_7(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q)\}$ из $GK(L)$. Заметим, что $k_7(\varepsilon q) - 1$ равно либо $\Phi_7(\varepsilon q) - 1$, если $d(7) = 1$, либо $\frac{1}{7}\Phi_7(\varepsilon q) - 1$, если $d(7) = 7$. Легко проверить, что если $u(x) = \frac{1}{2}(x^5 + 2x^4 + x^3 + x + 2)$ и $v(x) = \frac{1}{2}(-x-1)$, то $u(x)\Phi_4(x) + v(x)(\Phi_7(x)-1) = 1$, и если $u(x) = \frac{1}{50}(x^5+8x^4+7x^3+x+8)$ и $v(x) := \frac{1}{50}(-7x - 49)$ соответственно, то

$$u(x)\Phi_4(x) + v(x)\left(\frac{1}{7}\Phi_7(x) - 1\right) = 1.$$

Следовательно, можно взять $c(7) = 50$. Аналогично получаем, что $c(9) = 10$. Это означает, что $r_4 \in \{\pi(50) \cup \pi(10)\} \cap R_4(\varepsilon q) \subseteq \{5\}$. Таким образом, можно гарантировать лишь невозможность случаев $r_4 \neq 5$.

Наконец, рассмотрим случай $i = 6$. По предположению $9 \leq n \leq 13$. Пусть сначала $n = 9$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$ и $j_2 = 5$. Если $(q - \varepsilon 1, 5) = 1$, то $d(5) = 1$ и видим, что $c(8) = c(5) = 3$, и, следовательно, $r \in \{3\} \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$. Таким образом, $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$. Тогда $c(5) = 3 \cdot 31$, и тем самым $r \in \{3, 31\} \cap R_6(\varepsilon q) \subseteq \{31\}$. Значит, r может быть равно только 31. Согласно табл. 2 $\{r_5(\varepsilon q), r_6(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q), r_8(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Из леммы 3.1 следует, что $r_5(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q), r_8(\varepsilon q), r_9(\varepsilon q) \in \pi(S)$. Предположим, что $v \in R_8(\varepsilon q)$. Если $k_6(\varepsilon q) = 31^m$, где m — положительное целое число, то из леммы 2.12 следует, что $m = 1$ и $\varepsilon q = 5$; противоречие с $(q - \varepsilon 1, 5) = 5$. Значит, существует $s \in R_6(\varepsilon q)$ такое, что $s \neq 31$. Мы уже знаем, что $(s, |\overline{G}/S|) = 1$. Лемма 4.1 влечет, что $(s, |K|) = 1$. Это означает, что $s \in \pi(S)$ и поэтому $t(v, S) \geq 5$. С другой стороны, $t(v, S) \leq 4$ согласно лемме 3.5; противоречие. Следовательно, $v \notin R_8(\varepsilon q)$. Значит, существует $r_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$, поскольку в противном случае из леммы 4.2(a) следует, что r делит $k_8(\varepsilon q) - 1 = \frac{1}{2}(q^4 - 1)$, поэтому $i \neq 6$.

Предположим, что $n = 10$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$, $j_2 = 5$ и $j_3 = 10$. Легко видеть, что $\{r, r_8(\varepsilon q), r_5(\varepsilon q)\}$ и $\{r, r_8(\varepsilon q), r_{10}(\varepsilon q)\}$ — коклики в $GK(L)$. Поскольку $c(8) = 3$, $c(5) = 3 \cdot 31$ и $c(10) = 3 \cdot 7$, получаем, что $r \in \pi(3 \cdot 31) \cap \pi(3 \cdot 7) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$; противоречие.

Предположим, что $11 \leq n \leq 13$. Согласно табл. 3 используем $j_1 = 8$, $j_2 = 10$ и $j_3 = 11$. Легко видеть, что $\{r, r_8(\varepsilon q), r_{10}(\varepsilon q), r_{11}(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L)$. Заметим, что $c(8) = 3$. Если $(q + \varepsilon 1, 5) = 1$, то $d(10) = 1$ и $c(10) = 1$, поэтому $r \in \pi(3) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$; противоречие. Следовательно, $(q + \varepsilon 1, 5) = 5$ и $c(10) = 3 \cdot 7$. Аналогично если $(q - \varepsilon 1, 11) = 1$, то $d(11) = 1$ и $c(11) = 3$, поэтому $r \in \pi(3) \cap R_6(\varepsilon q) = \varnothing$. Следовательно, $(q - \varepsilon 1, 11) = 11$ и $c(11) = 3 \cdot 7 \cdot 19$. Тогда $r \in \pi(3 \cdot 7) \cap \pi(3 \cdot 7 \cdot 19) \cap R_6(\varepsilon q) \subseteq \{7\}$. Это означает, что $r = 7$, как и было заявлено. Заметим, что $v \notin R_8(\varepsilon q)$, поскольку в противном случае лемма 3.1 влечет, что $t(v, S) \geq t(L) - 1 = 5$, а это неравенство противоречит лемме 3.5. Как и выше, видим, что из леммы 4.2(a) следует существование $r_8(\varepsilon q)$ такого, что $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) \leq m/2$, что и требовалось доказать. $\square$

Предложение 4.4. *Предположим, что L — симплектическая или ортогональная группа. Если $r_i = r_i(q) \in \pi(\overline{G}/S)$ и $3 \leq \eta(i) \leq n$, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(a) $\eta(i) = 3$ *и* $n \geq 8$;

(б) $i = 8$ *и* $n \geq 11$.

Доказательство. В случае симплектических и ортогональных групп рассуждаем аналогично доказательству предложения 4.3, в частности, используем те же обозначения для чисел $c(j)$ и $d(j)$, определяемых целым числом j. Для каждой пары (i, n) в табл. 4 приведены либо две пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$ и $(j_2, c(j_2))$ такие, что $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ — коклика и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$, либо три пары целых чисел $(j_1, c(j_1))$, $(j_2, c(j_2))$ и $(j_3, c(j_3))$ такие, что для любого $\varepsilon \in \{+, -\}$ множества $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_2}(\varepsilon q)\}$ и $\{r_i, r_{j_1}(\varepsilon q), r_{j_3}(\varepsilon q)\}$ являются кокликами в $GK(L)$ и $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap \pi(c(j_1)c(j_3)) \cap R_i(\varepsilon q) = \varnothing$. Если $n > 5$, то используются j_1, j_2, j_3 такие, что $\eta(j_1), \eta(j_2), \eta(j_3) < n$, это гарантирует, что соответствующие примитивные простые делители лежат в $\pi(L)$ для всех ортогональных и симплектических групп L с $\operatorname{prk} L = n$. Если $n = 5$, то иногда выбираем $j_2 = 5$ и $j_3 = 10$. Это возможно, поскольку $\operatorname{prk} L = 5$ и $t(L) \geq 5$ влечет, что $L \in \{O_{11}(q), S_{10}(q)\}$ согласно табл. 2, поэтому $r_5(q), r_{10}(q) \in \pi(L)$. Для проверки несмежности двух простых чисел в $GK(L)$ можно воспользоваться леммой 3.2. Если $i = 3$ или $i = 6$, то рассматриваются только случаи $5 \leq n \leq 7$, если $i = 8$, то рассматриваются только случаи $5 \leq n \leq 10$. Для других значений i ограничений на n нет.

Имеется следующее отличие от случая линейных и унитарных групп. Предположим, что i делится на 4, j — степень нечетного простого числа s, и

$$u(x)\Phi_i(x) + v(x)(\Phi_j(x) - 1) = 1$$

для многочленов $u(x), v(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Из определения круговых многочленов следует, что $\Phi_i(\varepsilon q) = \Phi_i(-\varepsilon q)$ и $\Phi_j(\varepsilon q) = \Phi_{2j}(-\varepsilon q)$. С другой стороны,

$$k_j(\varepsilon q) = \frac{\Phi_j(\varepsilon q)}{(\varepsilon q - 1, s)}$$

и

$$k_{2j}(\varepsilon q) = \frac{\Phi_{2j}(\varepsilon q)}{(\varepsilon q + 1, s)} = \frac{\Phi_j(-\varepsilon q)}{(\varepsilon q + 1, s)}.$$

Очевидно, $(\varepsilon q - 1, s) = 1$ или $(\varepsilon q + 1, s) = 1$. В зависимости от этого мы выбираем j или $2j$ соответственно и записываем $(j^*, c(j))$ в табл. 4. Это позволяет считать, что $d(j) = 1$. Аналогично рассматриваем i и $2i$ одновременно, если i нечетно. Действительно, если есть равенство

$$u(x)\Phi_i(x) + v(x)\left(\frac{1}{d(j)}\Phi_j(x) - 1\right) = c(j),$$

то оно выполняется как для q, так и для $-q$, т. е. для $r_i(q)$ и $r_i(-q) \in R_{2i}(q)$. Это означает, что если мы записываем пару $(j, c(j))$, то используем $r_j(q)$ для $r_i(q)$ и $r_j(-q)$ для $r_{2i}(q)$.

Наконец, если $i \in \{20, 32, 11, 22, 13, 26, 15, 30, 17, 34\}$, то используем одинаковые числа j_1 и j_2, поэтому значения $c(j_1)$ и $c(j_2)$ не указываются. Это означает, что в каждом случае $\pi(c(j_1)c(j_2)) \cap R_i(q) = \varnothing$, что гарантирует противоречие с существованием r. Явные многочлены $u(x)$ и $v(x)$ для всех случаев записаны в отдельные файлы для каждого i [27]. $\square$

Лемма 4.5. *Предположим, что $r \in R_i(q)$, $\varphi(r, L) \geq 4$, если L — линейная или унитарная группа, и $\varphi(r, L) \geq 3$ в противном случае.*

(а) *Если r большое относительно L и делит $|\overline{G}/S|$, то $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, $r \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$.*

Таблица 4. Индексы для
симплектических и ортогональных групп

r_3, r_6 : $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(8, 3)$, $(5, 3 \cdot 7)$, $(10, 3 \cdot 31)$	$n = 7$ $(12, 3)$, $(5, 3 \cdot 7)$, $(10, 3 \cdot 31)$	
r_8 : $(j, c(j))$ $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(3^*, 2)$, $(5^*, 2)$ $n = 10$ $(7^*, 2)$, $(9^*, 2)$	$n = 7, 8$ $(12, 2)$, $(5^*, 2)$	$n = 9$ $(12, 2)$, $(7^*, 2)$
r_5, r_{10} : $(j, c(j))$ $(j, c(j))$ $(j, c(j))$	$n = 5, 6$ $(8, 5)$, $(3, 5 \cdot 11)$, $(6, 5 \cdot 31)$ $n = 11, 12$ $(16, 5)$, $(9, 5 \cdot 11)$, $(18, 5 \cdot 31)$ $n = 15, 16$ $(24, 5)$, $(28, 5)$	$n = 7, 8$ $(8, 5)$, $(12, 5)$ $n = 13$ $(24, 5)$, $(9, 5 \cdot 11)$, $(18, 5 \cdot 31)$ $n = 17, 18$ $(32, 5)$, $(28, 5)$	$n = 9, 10$ $(12, 5)$, $(16, 5)$ $n = 14$ $(24, 5)$, $(20, 5 \cdot 421)$, $(13, 5 \cdot 11^2 \cdot 41)$
r_{12} $(j, c(j))$ $(j, c(j))$	$n = 6, 7, 8$ $(5^*, 3)$, $(8, 3)$ $n = 17, 18$ $(32, 3)$, $(30, 3)$	$n = 9, 10, 11, 12$ $(7^*, 2)$, $(16, 3)$	$n = 13, 14, 15, 16$ $(11^*, 1)$, $(24, 3)$
r_7, r_{14} : $(j, c(j))$ $(j, c(j))$	$n = 7, 8, 9$ $(8, 7)$, $(12, 7)$ $15 \leq n \leq 18$ $(28, 7)$, $(24, 7)$	$n = 10, 11, 12$ $(12, 7)$, $(16, 7)$	$n = 13, 14$ $(24, 7)$, $(16, 7)$
r_{16} $(j, c(j))$	$8 \leq n \leq 12$ $(12, 2)$, $(7^*, 2)$	$13 \leq n \leq 18$ $(24, 2)$, $(11^*, 2)$	
r_9, r_{18} $(j, c(j))$	$9 \leq n \leq 13$ $(12, 3)$, $(16, 3)$	$14 \leq n \leq 16$ $(24, 3)$, $(16, 3)$	$n = 17, 18$ $(32, 3)$, $(24, 3)$
r_{24}, r_{28}, r_{36} $(j, c(j))$	$12 \leq n \leq 18$ $(16, 3 \cdot 7)$, $(11^*, 1)$		
r_{20}, r_{32}, r_{11}, r_{22}, r_{13}, r_{26}, r_{15}, r_{30}, r_{17}, r_{34} $(j, c(j))$	$10 \leq n \leq 13$ $(12, *)$, $(16, *)$	$14 \leq n \leq 17$ $(16, *)$, $(24, *)$	$n = 18$ $(24, *)$, $(28, *)$

(б) *Если r большое относительно L, то существует $s \in R_i(q)$ такое, что $s \notin \pi(\overline{G}/S)$.*

(в) *Если $r \in \pi(S)$, то $t(r,S) \geq t(r,L)$, в частности, $t(S) \geq t(L)$.*

Доказательство. Предположим, что r является большим относительно L и делит $|\overline{G}/S|$. Если $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, то согласно табл. 2 получаем, что $n \geq 9$ и $\varphi(r,L) \geq n/2$. По предложению 4.3 находим, что $\varphi(r,L) = 6$ и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$. Если L — симплектическая или ортогональная группа, то согласно табл. 2 получаем, что $\eta(i) \geq 3$. По предложению 4.4 либо $\eta(i) = 3$ и $n \geq 8$, либо $i = 8$ и $n \geq 11$. Используя табл. 2, находим, что в этих случаях r мало относительно L; противоречие.

Теперь докажем (б). Предположим, что r является большим относительно L. В силу (а) нужно рассмотреть только случаи, когда $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, $\varphi(r,L) = 6$, и либо $r = 7$ и $11 \leq n \leq 12$, либо $r = 31$ и $n = 9$. Покажем, что существует $s \in R_6(\varepsilon q)$ такое, что $s \neq r$, и, следовательно, $s \notin \pi(\overline{G}/S)$ по предложению 4.3. Предположим противное, что $k_6(\varepsilon q) = r^m$, где $m \geq 1$. Из леммы 2.12 следует, что $(r, m, \varepsilon q) \in \{(7,1,5), (7,1,3), (7,3,19), (31,1,-5)\}$. С другой стороны, по предложению 4.3(в),(г) верно, что $q \equiv \varepsilon 1 \pmod 5$, если $r = 31$ и $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{11}$, если $r = 7$; противоречие.

Предположим, что $r \in \pi(S)$. Покажем, что $t(r,S) \geq t(r,L)$. Рассмотрим $\{r\}$-коклику ρ в $GK(L)$ размера $t(r,L)$. Мы утверждаем, что каждый элемент из $\rho \setminus \{r\}$ является большим относительно L. Если r большое относительно L, это очевидно. Если $r = p$, то это верно по лемме 3.5(а). Пусть $r \neq p$ мало относительно L. Тогда $\varphi(r,L) < n/2$ по лемме 3.4(а). Заметим, что $p \notin \rho$ по лемме 3.5. Это означает, что если $s \in \rho \setminus \{r\}$, то $\varphi(s,L) > n/2$ по лемме 3.3(б) и, следовательно, s большое относительно L по лемме 3.4(а). Значит, каждый элемент $\rho \setminus \{r\}$ является большим относительно L. Согласно табл. 2 если s является большим относительно L, то $\varphi(s,L) \geq 4$, если L — линейная или унитарная группа, и $\varphi(s,L) \geq 3$ в противном случае. По п. (б) можно предполагать, что каждый элемент $\rho \setminus \{r\}$ не делит $|\overline{G}/S|$. Если $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) = \varnothing$, то $\rho \subseteq \pi(S)$ и поэтому $t(r,S) \geq t(r,L)$, что и требовалось показать.

Остается рассмотреть случай, когда $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) \neq \varnothing$. Тогда из леммы 4.1 следует, что $(\rho \setminus \{r\}) \cap \pi(K) = \{v\}$. Поскольку $v \in \pi(S)$, получаем, что $\rho \subseteq \pi(S)$, и, следовательно, $t(r,S) \geq t(r,L)$, как и утверждалось.

Поскольку $t(L) \geq 5$, лемма 3.1 влечет существование числа $r \in \pi(S)$, которое является большим относительно L. Используя п. (в), получаем, что $t(S) \geq t(r,S) \geq t(r,L) = t(L)$. $\square$

По лемме 4.5 получаем, что $t(S) \geq t(L)$. В дальнейшем будем использовать этот факт, не упоминая лемму.

Лемма 4.6. *Пусть r — простое число, большое относительно S. Если S — линейная или унитарная группа, то $\varphi(r,S) \geq t(L) \geq n/2$ и $r \geq n/2+1$. Если S — симплектическая или ортогональная группа, то $\varphi(r,S) \geq (2t(L)-4)/3 \geq (n-4)/3$ и $r > n/2$.*

Доказательство. Если S линейная или унитарная, то из леммы 3.4(в) следует, что $\varphi(r,S) \geq t(S) \geq t(L) \geq n/2$. По лемме 3.6 получаем, что $r \geq \varphi(r,S) + 1 \geq n/2 + 1$. Если S симплектическая или ортогональная, то согласно табл. 2 получаем, что $\varphi(r,S) \geq 3$ и тем самым $r \geq 7$ по лемме 3.6. Из леммы 3.4(в) следует, что $\varphi(r,S) \geq (2t(S)-4)/3 \geq (2t(L)-4)/3 \geq (n-4)/3$.

Осталось показать, что $r > n/2$. Если $n \leq 13$, то $r \geq 7 > n/2$. Если $n \geq 14$, то лемма 3.6 влечет, что $r \geq 2\varphi(r, S) + 1 \geq (2n-5)/3 > n/2$. $\square$

Определение 4.7. Будем говорить, что натуральное число j является *J-индексом* (относительно G), если оно удовлетворяет следующим условиям.

(а) Каждое число $r \in R_j(u)$ является большим относительно S и делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$.

(б) Если $t(S) > t(L)$ и каждая коклика ρ наибольшего размера в $GK(L)$ содержит простое число s такое, что $s \in \pi(S)$ и $\varphi(s, S) \leq m/2$, то $\varphi(r, S) > m/2$ для всех $r \in R_j(u)$.

Следующие три леммы являются аналогами [6, леммы 6.1, 6.2, 6.4] соответственно.

Лемма 4.8. *Существует множество M натуральных чисел размера $t(S) - t(L)$ такое, что каждый элемент из M является J-индексом.*

Доказательство. Можно считать, что $t(S) > t(L)$. Обозначим $t = t(S)$ и $\ell = t(L)$. Рассмотрим коклику $\rho = \{r_{i_1}(u), \dots, r_{i_t}(u)\}$ размера t в $GK(S)$. Предположим, что существует $\ell + 1$ индекс $i \in I = \{i_1, \dots, i_t\}$ такой, что некоторые числа $r_i \in R_i(u)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Тогда соответствующие $\ell + 1$ простых чисел r_i образуют коклику размера $\ell + 1$ в $GK(L)$; противоречие. Следовательно, существует подмножество M множества I, содержащее не менее $t - \ell$ элементов и такое, что если $i \in M$, то каждое число $r_i(u) \in R_i(u)$ делит $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Покажем, что множество M можно выбрать так, чтобы каждый его элемент удовлетворял второму условию определения 4.7.

Предположим, что каждая коклика наибольшего размера в $GK(L)$ содержит простое число s с $\varphi(s, S) \leq m/2$. Из леммы 3.3(б) следует, что множество I включает в себя подмножество I' размера не менее $t - 1$ такое, что для любого простого числа $r \in R_i(u)$ с $i \in I'$ выполняется неравенство $\varphi(r, S) > m/2$. Если $I' = I$, то можно взять M, как и выше. Поэтому можно считать, что $|I'| = t - 1$. Предположим, что существуют ℓ чисел $i \in I'$ с $\widetilde{R}_i(u) = R_i(u) \setminus (\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)) \neq \varnothing$. Тогда множество ρ, состоящее из ℓ простых чисел из различных $\widetilde{R}_i(u)$, образует коклику в $GK(L)$, которая не содержит простого числа s с $\varphi(s, S) \leq m/2$; противоречие. Таким образом, существует подмножество M множества I' такое, что $|M| = t - 1 - (\ell - 1) = t - \ell \geq 1$, и для любого $j \in M$ каждое простое число r из $R_j(u)$ является большим относительно S, делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$ и удовлетворяет условию $\varphi(r, S) > m/2$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.9. *Предположим, что j — это J-индекс. Тогда для любого $r \in R_j(u)$ существует большое относительно L простое число s такое, что $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$ и $s \notin \pi(\overline{G}/S)$.*

Доказательство. Обозначим $\ell = t(L)$ и $t = t(S)$. Зафиксируем $r \in R_j(u)$. Пусть $\rho = \{s_1, \dots, s_\ell\}$ — коклика размера ℓ в $GK(L)$. По леммам 4.1 и 4.5(б) можно считать, что каждое простое число из ρ не делит $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. Заметим, что $v \notin \rho$, так как $t(L) \geq 5$. Пусть $\tau = -$, если S — унитарная группа, иначе положим $\tau = +$. Обозначим $I = \{e(s, \tau u) \mid s \in \rho\}$. Тогда $j' = e(r, \tau u) \notin I$, поскольку каждый элемент из $R_j(u)$ делит произведение $|\overline{G}/S| \cdot |K|$.

Выберем коклику σ размера t в $GK(S)$, содержащую r, и положим $Y = \{e(w, \tau u) \mid w \in \sigma\}$.

Если $t = \ell$, то ρ также является кокликой наибольшего размера в $GK(S)$. Лемма 3.8 влечет, что $I \cap Y = Y \setminus \{j'\}$. Следовательно, ρ содержит подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что множество $M = \{r\} \cup \rho'$ является кокликой в $GK(S)$.

Если r мало относительно L, то M не может быть кокликой в $GK(L)$, поскольку $|M| = \ell$. Следовательно, существует $s \in \rho$ с $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Теперь покажем, что r не может быть большим относительно L. Предположим от противного, что r таково. Тогда из леммы 4.5 следует, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, $r \in R_6(\varepsilon q)$ и либо $11 \leq n \leq 12$ и $r = 7$, либо $n = 9$ и $r = 31$. Поскольку $\rho \cup \{r\}$ не является кокликой в $GK(S)$, заключаем, что r смежно с некоторым $s \in \rho$ в $GK(S)$. Согласно табл. 2 верно, что $s \in R_6(\varepsilon q) \cup R_{12}(\varepsilon q)$. Так как $j' \notin I$, получаем, что $e(s,u) \neq j$. Поскольку r и s смежны в $GK(S)$, из леммы 3.3(в) следует, что $\varphi(r,S) \leq m/2$ или $\varphi(s,S) \leq m/2$. По предложению 4.3(в),(г) существует число $r_8(\varepsilon q) \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8(\varepsilon q),S) \leq m/2$. По лемме 3.3(б) получаем, что $rr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$ или $sr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Таким образом, можно считать, что $t > \ell$.

Предположим, что $\varphi(r,S) > m/2$. По лемме 3.3(б) множество ρ содержит подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что $\varphi(s,S) > m/2$ для любого $s \in \rho'$. Поскольку $j' \notin I$, из леммы 3.3(в) следует, что $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(S)$. Если r мало относительно L, то $\{r\} \cup \rho'$ не является кокликой в $GK(L)$, поэтому утверждение леммы в этом случае выполняется. Следовательно, можно считать, что r большое относительно L, и $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(L)$. По лемме 4.5(а) получаем, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$, $n \leq 12$ и $r \in R_6(\varepsilon q)$. Мы знаем, что $|\{r\} \cup \rho'| = \ell$. Согласно табл. 2 получаем, что $r_8(\varepsilon q) \in \rho'$, поэтому $\varphi(r_8(\varepsilon q),S) > m/2$. Это противоречит предложению 4.3(в),(г).

Пусть теперь $\varphi(r,S) \leq m/2$. Предположим, что r является большим относительно L. Тогда $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $\varepsilon \in \{+,-\}$ и $n \leq 12$, $r \in R_6(\varepsilon q)$ и $\varphi(r_8(\varepsilon q),S) \leq m/2$ для хотя бы одного $r_8(\varepsilon q)$. Из леммы 3.3(в) следует, что $rr_8(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$; противоречие. Значит, r мало относительно L. По определению J-индекса множество ρ можно выбрать таким образом, что либо $\varphi(s,S) > m/2$ для любого $s \in \rho$, либо некоторое $s \in \rho$ не принадлежит $\pi(S)$. Рассмотрим первый случай. Используя табл. 2, видим, что существует коклика σ' наибольшего размера в $GK(S)$ с $\rho \subseteq \sigma'$. Положим $X = \{e(w,\tau u) \mid w \in \sigma'\}$. Применяя лемму 3.8, получаем, что $Y \cap X \supseteq Y \setminus \{j'\}$. Следовательно, ρ включает подмножество ρ' размера $\ell - 1$ такое, что $\{r\} \cup \rho'$ является кокликой в $GK(S)$ и не является кокликой в $GK(L)$. Значит, найдется число $s \in \rho'$ такое, что $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Если $s \notin \pi(\overline{G}/S)$, то оно является требуемым числом. Пусть теперь $s \in \pi(\overline{G}/S)$. Тогда $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $s \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $n = 9$, либо $11 \leq n \leq 12$. Более того, существует число $r_8 \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8,S) \leq m/2$. Следовательно, r смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и $r_6(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Используя критерий смежности в $GK(L)$, находим, что если $n = 9$, то $r \in \{p, r_1(\varepsilon q), r_2(\varepsilon q)\}$ и поэтому r смежно с $r_5(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Таким образом, хотя бы одно из чисел $r_5(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ принадлежит ρ' и является требуемым. Аналогично если $n = 11, 12$, то $r \in \{p, r_1, r_2, r_3, r_4\}$, поэтому r смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и $r_8(\varepsilon q)$, хотя бы одно из которых принадлежит ρ'.

Наконец, предположим, что существует коклика ρ в $GK(L)$ размера ℓ такая, что для некоторого $s \in \rho$ верно, что $s \notin \pi(S)$. Из лемм 4.1 и 4.5 получаем, что $L = L_n^\varepsilon(q)$, где $s \in R_6(\varepsilon q)$, и либо $n = 9$, либо $11 \leq n \leq 12$. Более того, существует $r_8 \in R_8(\varepsilon q)$ такое, что $\varphi(r_8,S) \leq m/2$ по предложению 4.3(в),(г). Поскольку $\varphi(r_8,S) \leq m/2$ и $\varphi(r,S) \leq m/2$, по лемме 3.3(б) получаем $rr_8 \in \omega(S)$. Это означает, что либо $r = p$, либо $\varphi(r,L) \in \{1,2,4\}$, если $n = 9$, и $\varphi(r,L) \in \{1,2,3,4\}$, если $n = 11, 12$. По лемме 3.1 находим, что $r \notin R_4(\varepsilon q)$, если $n = 9$, поскольку $\{r_4(\varepsilon q), r_6(\varepsilon q), r_7(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(L_9^\varepsilon(q))$. Из леммы 4.5

следует, что можно выбрать $r_6 \in R_6(\varepsilon q)$ и $r_7 \in R_7(\varepsilon q)$ таким образом, что $(r_6r_7, |K| \cdot |\overline{G}/S|) = 1$. Поскольку $\varphi(r_8, S) \leq m/2$, из леммы 3.3(б) следует, что $\varphi(r_6, S) > m/2$ и $\varphi(r_7, S) > m/2$. По лемме 3.4(а) получаем, что r_6 и r_7 являются большими относительно S. Используя [23, табл. 4] и лемму 3.2, получаем, что r смежно как с r_6, так и с r_7 в $GK(L)$. Если $rr_7, rr_6 \in \omega(S)$, то из леммы 3.8 следует, что $e(r_6, \tau u), e(r_7, \tau u) \in J(S) \setminus E(S)$ и, следовательно, r_6 и r_7 смежны в $GK(S)$; противоречие. Значит, $rr_7 \in \omega(L) \setminus \omega(S)$ или $rr_6 \in \omega(L) \setminus \omega(S)$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 4.10. *Предположим, что $r \in R_j(u)$, где j — это J-индекс. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(а) $k_j(u)$ *делит* $(q^2 - 1)\log_v u$,

(б) $k_j(u)$ *делит* $p(q^2 - 1)\log_v u$, *и* p *делит* $k_j(u)$ *и* $\log_v u$,

(в) $k_j(u)$ *делит* $p(q^2 - 1)$, *при этом* $p < 31$.

Доказательство. Положим $(k_j(u))_{\{r\}} = r^\gamma$. Поскольку r является большим относительно S, находим, что $r \geq 5$ и $r \neq v$. Применяя лемму 2.5, получаем, что $r^\gamma = \exp_r(S)$.

Предположим, что r делит $|K|$. Поскольку $r \neq v$, из леммы 4.1 следует, что r делит $p(q^2 - 1)$ и $t(r, L) = 2$. Равенство $t(r, L) = 2$ влечет, что r мало относительно L. По [6, лемма 2.10(б)] существует $s \in \pi(L) \setminus \{r, p\}$ такое, что s и r не смежны в $GK(L)$. Используя леммы 3.4(а) и 3.3(б), получаем, что s большое относительно L. По лемме 4.5(б),(в) можно считать, что $s \in \pi(S)$ и $t(s, S) \geq 5$. Следовательно, $s \neq v$ по лемме 3.5. Теперь [22 лемма 2.16] влечет, что s не делит порядки собственных параболических подгрупп группы S. По лемме 3.11 существует собственная параболическая подгруппа P группы S такая, что $r^\gamma \in \omega(P)$. Если R — силовская r-подгруппа группы K (напомним, что K нильпотентна), то S действует на $R/\Phi(R)$ сопряжением. Это действие должно быть точным, поскольку r и s несмежны. Более того, поскольку r большое относительно S, имеем $(r, 6u(u^2 - 1)) = 1$. Применяя лемму 3.12, получаем $r^{\gamma+1} \in \omega(G) = \omega(L)$.

По лемме 4.6 получаем неравенство $r > n/2$. Предположим, что $r = p$. Поскольку $t(p, L) = 2$, из леммы 3.5 следует, что $L \in \{O_{2n+1}(q), S_{2n}(q)\}$, где n — четное число. По предположению $t(L) \leq 13$ и $n \neq 16$, поэтому $n \leq 14$ согласно табл. 2. Мы знаем, что $p^2 \in \omega(L)$, поэтому $p < 29$ по лемме 2.13. Поскольку $n^2/4 > 2n - 1$ при $n \geq 8$ и $5^2 > 2 \cdot 8 - 1$, то $p^2 > 2n - 1$. Из леммы 2.13 следует, что $\exp_p(L)$ не превосходит p^2. Тогда $p^2 \geq p^{\gamma+1}$, откуда $k_j(u)_{\{p\}} \leq p$. Следовательно, $k_j(u)_{\{r\}}$ делит p в этом случае. Предположим, что r делит $(q^2 - 1)$, и положим $(q^2 - 1)_{\{r\}} = r^\delta$. Используя неравенство $r > n/2$ и лемму 2.5, получаем, что $\exp_r(L)$ не превосходит $r^{\delta+1}$. Следовательно, $r^{\delta+1} \geq r^{\gamma+1}$. Таким образом, для любого $j \in J$ и любого $r \in R_j(u) \cap \pi(K)$ число $(k_j(u))_{\{r\}}$ делит $p(q^2 - 1)$, а если $p \in R_j(u)$, то $p < 31$.

Предположим теперь, что r не делит $|K|$. Тогда $|\overline{G}/S|_{\{r\}} = r^\kappa > 1$. Следовательно, $\overline{G}$ содержит подгруппу, изоморфную расширению S посредством автоморфизма τ порядка r^κ, где $\kappa \geq 1$. Поскольку r нечетно и взаимно просто с $|\operatorname{Inndiag}(S)/S|$, можно считать, что τ — полевой автоморфизм. Если $u = v^\beta$ и $\beta = r^\mu \cdot l$, где $(r, l) = 1$, то $\mu \geq \kappa \geq 1$. Если r не делит $v^{lj} - 1$, то r не делит $v^{r^\mu \cdot lj} - 1 = u^j - 1$, что неверно. Следовательно,

$$r^\gamma = (k_j(u))_{\{r\}} = (u^j - 1)_{\{r\}} = (v^{r^\mu \cdot lj} - 1)_{\{r\}} = r^\mu (v^{lj} - 1)_{\{r\}} > r^\kappa$$

по лемме 2.5. Кроме того, r^γ — это наибольшая степень числа r, лежащая в $\omega(S)$. В силу [6, лемма 3.10] получаем, что r^γ равно $\exp_r(\overline{G})$, значит, и $\exp_r(G)$. Если $r \neq p$ и $k = e(r,q) \geq 3$, то неравенство $r > n/2$ влечет, что $(q^k-1)_{\{r\}}$ равно $\exp_r(L)$. По лемме 4.9 существует большое относительно L простое число s такое, что $rs \in \omega(L) \setminus \omega(S)$ и $s \notin \pi(\overline{G}/S)$. Лемма 4.1 влечет, что $s \notin \pi(K)$. Из леммы 3.10 следует, что $r^\gamma s \in \omega(L)$. Поскольку $(rs, |K|) = 1$, группа $\overline{G}$ содержит элемент x порядка $r^\gamma s$. Тогда элемент $y = x^{r^\kappa}$ имеет порядок $r^{\gamma-\kappa}s$ и принадлежит S, что невозможно, поскольку $\gamma > \kappa$. Таким образом, r делит $p(q^2-1)$.

Если r делит q^2-1, то снова неравенство $r > n/2$ и лемма 2.5 влекут, что $r^\gamma \leq r(q^2-1)_{\{r\}}$. Предположим, что $r = p$, в частности, p делит $\log_v u$. Заметим, что число $\exp_p(L)$ не превосходит p^2, поскольку $p > n/2$ и $r \geq 5$. Поскольку произведение различных простых чисел из $R_j(u)$, делящих $|\overline{G}/S|$, делит число $\log_v u$, получаем, что $k_j(u)$ делит $p(q^2-1)\log_v u$. □

Лемма 4.11. *Пусть $d = t(S) - t(L)$ и $d > 0$. Предположим, что $t(S) \geq 7$ и S содержит элемент порядка, большего q^α, где $\alpha > 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(а) $u^{3d} < q^2$,

(б) $d < \frac{4t(L)}{3(\alpha-2)}$.

Доказательство. По лемме 4.8 существует множество M натуральных чисел такое, что $|M| = d$ и каждый элемент M является J-индексом. Поскольку $t(S) \geq 7$, находим, что $\varphi(j) \geq 4$ для каждого $j \in M$ согласно табл. 2. В силу лемм 4.10 и 2.10 получаем, что $u^{3d} < q^2$.

Из леммы 3.7 следует неравенство $q^\alpha < \frac{u}{u-1}u^m \leq u^{m+1}$. Это означает, что $u^{(3\alpha d)/2} < u^{m+1}$. Предположим, что $\alpha \geq 2 + \frac{4t(L)}{3d}$. Тогда $u^{3d+2t(L)} < u^{m+1}$. Следовательно, $m \geq 3d + 2t(L) = d + 2t(S)$ и поэтому $t(S) \leq (m-1)/2$. Согласно табл. 2 получаем, что $t(S) \geq \frac{m}{2}$, если S — линейная или унитарная группа, и $t(S) \geq \frac{3m-2}{4} > \frac{m-1}{2}$, если S — симплектическая или ортогональная группа; противоречие. Таким образом, $\alpha < 2 + \frac{4t(L)}{3d}$ и тем самым $d < \frac{4t(L)}{3(\alpha-2)}$. □

Теперь мы готовы доказать теорему 3.

Доказательство теоремы 3. Обозначим $d = t(S) - t(L)$. Напомним, что $d \geq 0$. Можно считать, что $d \geq 1$, иначе доказывать нечего.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа и $t(L) \geq 6$. Пусть j — наибольшее простое число, меньшее или равное n. Легко видеть, что $j > n/2$ и, следовательно, $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L согласно табл. 2. По предложению 4.3 и лемме 4.1 получаем, что $k_j(\varepsilon q) \in \omega(S)$. По лемме 2.6 $k_j(\varepsilon q) > q^{j-2}$. Следовательно, по лемме 4.11 получаем, что $d < \frac{4t(L)}{3(j-4)}$, если $t(S) \geq 7$. Если $23 \leq n \leq 26$, то $t(L) \leq 13$ и $j \geq 23$, поэтому $d < \frac{18}{19} < 1$. Если $19 \leq n \leq 22$, то $t(L) \leq 11$ и $j \geq 19$, поэтому $d < \frac{14.7}{15} < 1$. Аналогично если $17 \leq n \leq 18$, то $t(L) \leq 9$ и $j = 17$, стало быть, $d < \frac{12}{13} < 1$. Пусть теперь $13 \leq n \leq 16$. Тогда $t(L) \leq 8$ и $j = 13$, поэтому $d < \frac{11}{9} < 2$. Если $11 \leq n \leq 12$, то $t(L) = 6$, $t(S) \geq 7$ и $j = 11$, следовательно, $d < \frac{8}{7} < 2$. Осталось рассмотреть случай $d = 1$, если $6 \leq t(L) \leq 8$. В этом случае из лемм 4.10 и 2.9 следует, что $2u^3 < q^2$. Как и выше, возьмем наибольшее простое число j, меньшее или равное n. Используя равенство (1), находим, что $k_j(\varepsilon q) \geq \frac{q-1}{qj}q^{j-1}$. Из леммы 3.7 следует, что $q^{j-1} < j\frac{q}{q-1}\frac{u}{u-1}u^{\operatorname{prk} S}$. Поскольку $q \geq 3$ и $u \geq 2$, получаем неравенство

$q^{j-1} < 3ju^{\operatorname{prk} S}$. Если $t(L) = 8$, то $j = 13$ и $\operatorname{prk} S \le 18$, поэтому $q^{12} < 39u^{18}$; противоречие с $2u^3 < q^2$. Если $t(L) = 7$, то $j = 13$ и $\operatorname{prk} S \le 16$, поэтому $q^{12} < 39u^{16}$; противоречие с $2u^3 < q^2$. Наконец, если $t(L) = 6$, то $j = 11$ и $\operatorname{prk} S \le 14$, значит, $q^{10} < 33u^{14}$; противоречие с $2u^3 < q^2$.

Предположим, что L — линейная или унитарная группа и $t(L) = 5$. Тогда $9 \le n \le 10$. Согласно табл. 2 видим, что $r_9(\varepsilon q)$ и $r_7(\varepsilon q)$ большие относительно L. Из предложения 4.3 и леммы 4.1 следует, что $k_9(\varepsilon q), k_7(\varepsilon q) \in \omega(S)$. По лемме 2.7 находим, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{5.5}$. Предположим, что $d \ge 2$, поэтому $t(S) \ge 7$. Тогда из леммы 4.11 следует, что $d < \frac{6.7}{3.5} < 2$; противоречие. Значит, в этом случае $d \le 1$. Это завершает рассмотрение случая линейных и унитарных групп.

Предположим, что L — симплектическая или ортогональная группа. Пусть сначала $11 \le t(L) \le 13$. Согласно табл. 2 видим, что $k_{13}(q) \in \omega(L)$. По лемме 2.6 $k_{13}(q) > q^{11}$. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^{11}. Используя лемму 4.11, получаем, что $d < \frac{17.4}{9} < 2$. Если $9 \le t(L) \le 10$, то $k_{11}(q) \in \omega(L)$ или $k_{11}(-q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. По лемме 2.6 оба этих числа больше q^9. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^9. По лемме 4.11 верно неравенство $d < \frac{13.4}{7} < 2$. Если $7 \le t(L) \le 8$, то $k_{16}(q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. Заметим, что $k_{16}(q) = \frac{1}{2}(q^8 + 1) > q^{7.35}$, поскольку $3^{0.65} > 2$. Из предложения 4.4 и леммы 4.1 следует, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{7.35}$. Используя лемму 4.11, получаем, что $d < \frac{10.7}{5.35} = 2$. Предположим, что $t(L) = 6$. Тогда $k_7(q) \in \omega(L)$ или $k_{14}(q) \in \omega(L)$ согласно табл. 2. Используя лемму 2.6, получаем, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший q^5. Из леммы 4.11 следует, что $d < \frac{8}{3} < 3$. Предположим, что $t(L) = 5$. Тогда $k_8(q) \in \omega(L)$. Заметим, что $k_8(q) = (q^4 + 1)/2 > q^{3.35}$. Это означает, что $\omega(S)$ содержит элемент, больший $q^{3.35}$. Из леммы 4.11 вытекает, что $d < \frac{6.7}{1.35} < 5$. Предположим, что $d = 4$. Тогда по лемме 4.11 $u^{12} < q^2$. Поскольку $k_8(q) \in \omega(S)$, лемма 3.7 влечет, что $(u^{24} + 1)/2 < (q^4 + 1)/2 = k_8(q) \le 2u^{\operatorname{prk} S}$. Согласно табл. 2 получаем, что $\operatorname{prk} S \le 18$. Следовательно, верно неравенство $u^{24} + 1 < 4u^{18}$; противоречие. Предположим, что $d = 3$. Тогда $u^9 < q^2$ по лемме 4.11. Поскольку $k_8(q) \in \omega(S)$, лемма 3.7 влечет, что $(u^{18} + 1)/2 < (q^4 + 1)/2 = k_8(q) \le 2u^{\operatorname{prk} S}$. Согласно табл. 2 имеем $\operatorname{prk} S \le 16$. Следовательно, приходим к неравенству $u^{18} + 1 < 4u^{16}$; противоречие с $u \ge 2$. Значит, в этом случае имеем $d \le 2$. Это завершает рассмотрение случая ортогональных и симплектических групп. $\square$

5. Доказательство теоремы 2

В этом разделе докажем теорему 2. Предположим, что L изоморфна $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где q нечетно и $12 \le n \le 26$. Это означает, что $6 \le t(L) \le 13$. Если G — группа, изоспектральная L, то, как и в предыдущем разделе, получаем, что существует неабелева простая группа S такая, что $S \le \overline{G} = G/K \le \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. Предположим, что S — простая классическая группа над полем порядка u, взаимно простого с q. В силу теоремы 3 будет $0 \le t(S) - t(L) \le 1$. Чтобы использовать множество $J(S)$, положим $\nu = -$, если S — унитарная группа, иначе определим $\nu = +$. Фиксируем эти обозначения и ограничения на протяжении этого раздела. Отметим, что ограничения в этом разделе строже, чем в предыдущем, поэтому мы можем использовать все результаты § 4. По [5, теорема 1] можно считать, что n не является простым числом.

Лемма 5.1. *Предположим, что* $t(L) = t(S)$.

(а) *Если* $(n, i) \neq (12, 6)$ *и* $r_i(\varepsilon q)$ *лежит в* $\pi(S)$ *и большое относительно* L, *то* $r_i(\varepsilon q)$ *большое относительно* S, *и либо* $k_i(\varepsilon q)$ *делит* $k_j(u)$ *для некоторого целого числа* j, *либо* $k_i(\varepsilon q)$ *делит* $k_{j_1}(\nu u)k_{j_2}(\nu u)$, *где* $j_1, j_2 \in J(S) \setminus E(S)$.

(б) *Если не существует* J*-индексов относительно* G, *то* $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$.

Доказательство. Предположим, что $(n, i) \neq (12, 6)$ и $r_i(\varepsilon q)$ большое относительно L. По леммам 4.5 и 4.1 получаем, что каждый элемент $r_i(\varepsilon q)$ взаимно прост с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$ и $t(r_i(\varepsilon q), S) \geq t(r_i(\varepsilon q), L) = t(S)$. Следовательно, $r_i(\varepsilon q)$ является большим относительно S. Поскольку любые два элемента из $R_i(\varepsilon q)$ смежны в $GK(S)$ и большие относительно S, то либо существует целое число j такое, что $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_j(u)$, либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq \bigcup\limits_{j \in J(S) \setminus E(S)} R_j(\nu u)$. В первом случае получаем, что $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_j(u)$. Во втором случае предположим, что существуют три различных целых числа $j_1, j_2, j_3 \in J(S) \setminus E(S)$ такие, что некоторые $r_{j_1}(\nu u)$, $r_{j_2}(\nu u)$, $r_{j_3}(\nu u)$ принадлежат $R_i(\varepsilon q)$. Тогда $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u)$ делит $k_i(\varepsilon q)$ и, следовательно, $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \in \omega(S)$. Используя табл. 2, видим, что либо $S \in \{S_{2m}(u), O_{2m+1}(u)\}$, где $m \equiv 3 \pmod 4$ и $\{j_1, j_2, j_3\} = \{\frac{m-1}{2}, m-1, m+1\}$, либо $S = O^-_{2m}(u)$, где $m \equiv 2 \pmod 4$ и $\{j_1, j_2, j_3\} = \{\frac{m}{2}, m-2, m\}$. В обоих случаях находим, что $r_{j_1}(u)r_{j_2}(u)r_{j_3}(u) \notin \omega(S)$ по [28, следствия 2, 3] и [28, следствия 4, 8, 9] соответственно; противоречие. Это означает, что либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_j(\nu u)$, где $j \in J(S) \setminus E(S)$, либо $R_i(\varepsilon q) \subseteq R_{j_1}(\nu u) \cup R_{j_2}(\nu u)$, где $j_1, j_2 \in J(S) \setminus E(S)$. Значит, приходим к выводу, что $k_i(\varepsilon q)$ делит $k_j(\nu u)$ или $k_{j_1}(\nu u)k_{j_2}(\nu u)$ соответственно.

Предположим, что не существует J-индексов и $|J(S) \setminus E(S)| \geq 3$. Из определения 4.7 получаем, что для каждого $j \in J(S)$ существует число $r_j(\nu u) \in R_j(\nu u)$, взаимно простое с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Поскольку $t(L) = t(S)$, получаем, что каждое $r_j(\nu u)$ является большим относительно L. Выберем различные числа $j_1, j_2, j_3 \in J(S) \setminus E(S)$. Как и выше, видим, что $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \notin \omega(S)$. С другой стороны, простые числа $r_{j_1}(\nu u)$, $r_{j_2}(\nu u)$ и $r_{j_3}(\nu u)$ попарно смежны в $GK(S)$ и тем самым попарно смежны в $GK(L)$. Согласно табл. 2 либо существует целое число i такое, что $r_{j_1}(\nu u), r_{j_2}(\nu u), r_{j_3}(\nu u) \in R_i(\varepsilon q)$, либо n четно и $r_{j_1}(\nu u), r_{j_2}(\nu u), r_{j_3}(\nu u) \in R_{n/2}(\varepsilon q) \cup R_n(\varepsilon q)$. Тогда $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u)$ делит $k_i(\varepsilon q)$ или $k_{n/2}(\varepsilon q)k_n(\varepsilon q)$. Заметим, что $k_{n/2}(\varepsilon q)k_n(\varepsilon q) \in \omega(L)$ по лемме 3.10. Следовательно, $r_{j_1}(\nu u)r_{j_2}(\nu u)r_{j_3}(\nu u) \in \omega(S)$; противоречие. $\square$

Лемма 5.2. *Предположим, что* $t(L) = t(S)$ *и* $S = L^\tau_m(u)$, *где* $\tau \in \{+, -\}$. *Тогда* $m \geq n$.

Доказательство. Предположим от противного, что $m < n$. Тогда $n = 2s$ и $m = 2s - 1$ для целого числа $s \geq 6$. Заметим, что $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ смежны в $GK(L)$. Поскольку $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ большие относительно L, в силу лемм 4.5 и 4.1 можно предполагать, что $r_s(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|\overline{G}| \cdot |K|$ и большие относительно S. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$, поэтому существует целое число $j > 2$ такое, что $r_s(\varepsilon q)$, $r_{2s}(\varepsilon q) \in R_j(u)$. Положим $r = r_{s-1}(\varepsilon q)$, если $s \neq 7$, и $r = r_5(\varepsilon q)$, если $s = 7$. По лемме 3.9 получаем, что $t(r, L) \geq 5$. По предложению 4.3 можно считать, что r взаимно просто с $|\overline{G}/S|$. Если $r \in \pi(K)$, то из леммы 4.1 следует, что $r = v$. Тогда $t(v, S) \geq 5$ по лемме 3.1; противоречие с леммой 3.5. Значит, можно считать, что r взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$, в частности, $r \in \pi(S)$. По лемме 4.5(в) получаем, что $t(r, S) \geq t(r, L) \geq s - 1 > 2$, поэтому $r \notin \delta(S)$. Тогда r смежно с $r_s(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие. $\square$

Лемма 5.3. *Предположим, что* $t(S) = t(L)$ *и* $S = L_m^\tau(u)$, *где* $\tau \in \{+, -\}$. *Обозначим* $s = [\frac{n-1}{2}]$. *Если* $t(L) \geq 10$ *и* $0 \leq i \leq 2$ *или* $t(L) = 9$ *и* $0 \leq i \leq 1$, *то* $R_{s-i}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-i}(\tau u)$.

Доказательство. Согласно табл. 2 находим, что $t(L) = [\frac{n+1}{2}]$ и, следовательно, $s = t(L) - 1$. Если $t(L) = 9$, то $17 \leq n \leq 18$, поэтому $s \geq 8$ и $s - 1 > 6$, в частности, $s - 1 > \frac{n}{3}$. Аналогично если $t(L) \geq 10$, то $s - 2 > \frac{n}{3} > 6$. С другой стороны, $s < n/2$. Следовательно, $t(r_{s-i}(\varepsilon q), L) = s - i$ во всех случаях по лемме 3.9.

Пусть j — целое число такое, что $n \geq j \geq s-2$, если $t(L) > 9$, и $n \geq j \geq s-1$, если $t(L) = 9$. Мы утверждаем, что каждое число $r_j(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. По предложению 4.3 получаем, что $r_j(\varepsilon q)$ не делит $|\overline{G}/S|$. Предположим, что $r_j(\varepsilon q) \in \pi(K)$. Из леммы 4.1 следует, что $r_j(\varepsilon q) = v$. Используя лемму 4.5, получаем, что $t(v, S) \geq t(v, L) \geq 6$; противоречие с леммой 3.5. Следовательно, $r_j(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$, в частности, $r_j(\varepsilon q) \in \pi(S)$. По лемме 4.5(в) $t(r_j(\varepsilon q), S) \geq t(r_j(\varepsilon q), L)$. Значит, если $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно L, то $r_j(\varepsilon q)$ большое относительно S. Более того, если $t(L) \geq 10$ и $0 \leq i \leq 2$ или $t(L) = 9$ и $0 \leq i \leq 1$, то $t(r_{s-i}(\varepsilon q), S) \geq t(r_{s-i}(\varepsilon q), L) = s - i$.

Предположим, что $i = 0$. Если $t(r_s(\varepsilon q), S) \neq s$, то $t(r_s(\varepsilon q), S) \geq s + 1 = t(S)$ и, следовательно, $r_s(\varepsilon q)$ большое относительно S. Поскольку $2s + 1 \leq n$, лемма 3.2 влечет, что $r_s(\varepsilon q)$ смежно с $r_{s+1}(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(L)$. Согласно табл. 2 видим, что $r_{s+1}(\varepsilon q)$ и $r_{2s}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и не смежны в $GK(L)$. Следовательно, числа $e(r_s(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{s+1}(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{2s}(\varepsilon q), \tau u)$ попарно различны и принадлежат $J(S) \setminus E(S)$; противоречие, поскольку $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$ по табл. 2. Значит, $t(r_s(\varepsilon q), S) = s$ и поэтому $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ по лемме 3.9. Поскольку это верно для любого $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\varepsilon q)$, получаем, что $R_s(\varepsilon q) \subseteq R_s(\tau u)$.

Предположим, что $i = 1$. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \neq s - 1$, то $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \geq s$. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) = s$, то $r_{s-1}(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ по лемме 3.9. Однако $r_s(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$. Поскольку $r_{2s}(\varepsilon q)$ смежно с $r_s(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{s-1}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, приходим к противоречию. Если $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) \geq s + 1$, то $r_{s-1}(\varepsilon q)$ большое относительно S. Рассматривая простые числа $r_{s+2}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ и рассуждая, как в предыдущем случае, получаем противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$. Следовательно, для любого $r_{s-1}(\varepsilon q) \in R_{s-1}(\varepsilon q)$ верно, что $t(r_{s-1}(\varepsilon q), S) = s - 1$. Тогда $R_{s-1}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-1}(\tau u)$ по лемме 3.9.

Предположим, что $i = 2$. Тогда $t(L) \geq 10$, поэтому $n \geq 19$ и $s \geq 9$. Если $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \neq s - 2$, то $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \geq s - 1$. Если $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s$ или $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s - 1$, то из леммы 3.9 следует, что $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_s(\tau u)$ или $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_{s-1}(\tau u)$ соответственно. Мы уже знаем, что $R_s(\varepsilon q) \subseteq R_s(\tau u)$, при этом $r_s(\varepsilon q)$ смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, кроме того, $R_{s-1}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-1}(\tau u)$ и $r_{s-1}(\varepsilon q)$ смежно с $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Поскольку $r_{s-2}(\varepsilon q)$ не смежно с $r_{2s}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем противоречие. Предположим, что $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) \geq s + 1$. Тогда $r_{s-2}(\varepsilon q)$ является большим относительно S. Рассматривая простые числа $r_{s+3}(\varepsilon q)$ и $r_{2s-4}(\varepsilon q)$, которые являются большими относительно L и смежными с $r_{s-2}(\varepsilon q)$ в $GK(L)$, получаем противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$, как и выше. Следовательно, для любого $r_{s-2}(\varepsilon q) \in R_{s-2}(\varepsilon q)$ верно, что $t(r_{s-2}(\varepsilon q), S) = s - 2$. Тогда $R_{s-2}(\varepsilon q) \subseteq R_{s-2}(\tau u)$ по лемме 3.9. $\square$

Лемма 5.4. *Если* $S = L_m^\tau(u)$, *где* $\tau \in \{+, -\}$, *то*

$$u^{m-1} < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (m, u - \tau 1) q^{n-1},$$

в частности, $u^{m-1} < 3mq^{n-1}$.

Доказательство. По [29, следствие 3] находим, что $\frac{u^m-\tau 1}{(u-\tau 1,m)(u-\tau 1)} \in \omega(S)$. Заметим, что

$$\frac{u^m-\tau 1}{(u-\tau 1,m)(u-\tau 1)} \geq \frac{u^m+1}{(u-\tau 1,m)(u+1)}.$$

Легко видеть, что

$$\frac{u^m+1}{u+1} > \frac{u-1}{u}u^{m-1}.$$

По лемме 3.7 каждый элемент $\omega(L)$ не превосходит $\frac{q}{q-1}q^{n-1}$. Следовательно,

$$\frac{u-1}{(u-\tau 1,m)u}u^{m-1} < \frac{u^m+1}{(u-\tau 1,m)(u+1)} \leq \frac{q}{q-1}q^{n-1}$$

и поэтому

$$u^{m-1} < \frac{q}{q-1}\frac{u}{u-1}(u-\tau 1,m)q^{n-1}.$$

Поскольку $q \geq 3$ и $u \geq 2$, получаем, что $\frac{q}{q-1} \leq \frac{3}{2}$ и $\frac{u}{u-1} \leq 2$, следовательно,

$$\frac{q}{q-1}\frac{u}{u-1}mq^{n-1} \leq 3mq^{n-1}. \quad \square$$

Теперь докажем теорему 2, рассматривая несколько случаев в следующих леммах.

Лемма 5.5. *Теорема* 2 *верна, если* $17 \leq n \leq 26$.

Доказательство. Согласно табл. 2 находим, что $9 \leq t(L) \leq 13$. Из теоремы 3 следует, что $t(S) = t(L)$. Обозначим $m = \operatorname{prk} S$. Разобьем доказательство на несколько случаев в зависимости от значения $t(L)$.

Случай $t(L) = 13$. Тогда $n = 25$ или $n = 26$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = t(L) = 13$, получаем, что $S \in \{O_{33}(u), S_{32}(u), O^{\pm}_{34}(u), O^{+}_{36}(u), O^{-}_{32}(u)\}$ согласно табл. 2.

Предположим, что $S \in \{O_{33}(u), S_{32}(u), O^{-}_{32}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. Теперь покажем, что $q^{17} < u^{12}$. Поскольку $r_{23}(\varepsilon q)$ и $r_{19}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и не смежны в $GK(L)$, из леммы 5.1 следует, что существуют различные натуральные числа i_1 и i_2 такие, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_{i_1}(u)$ и $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_{i_2}(u)$. Поскольку $m = 16$, получаем, что $\eta(i_1), \eta(i_2) \leq 16$. Ясно, что хотя бы одно из чисел i_1 или i_2 не равно 32. Обозначим это число через i. Тогда $\varphi(i) \leq 12$. Из лемм 2.4(г) и 2.6 следует, что

$$\frac{u}{u-1}u^{12} > \Phi_i(u) \geq k_i(u) > \frac{5}{3}q^{17},$$

в частности, $u \geq 3$. Следовательно, $\frac{3}{2}u^{12} > \frac{5}{3}q^{17}$, и поэтому $q^{17} < u^{12}$.

Применяя предложение 2.15 для S и L, находим, что $\frac{2}{21}u^{160} \leq \exp(S) \leq \exp(L) \leq 8990q^{213}$. Поскольку $q^{17} < u^{12}$, получаем, что $q^{226} < u^{160} < 21 \cdot 8990q^{213} < 3^{13}q^{213}$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \in \{O^{\pm}_{34}(u), O^{+}_{36}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) \setminus E(S)$ равно $\{9,16\}$, $\{16,18\}$ или $\{9,18\}$. Поскольку $r_{23}(\varepsilon q)$ является большим относительно L, из леммы 5.1 следует, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$, где i — целое число, $k_9(u)k_{18}(u)$ или $k_9(\tau u)k_{16}(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Заметим, что $\eta(i) \leq 18$ и поэтому $\varphi(i) \leq 16$. По лемме 2.6 получаем, что $k_{23}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{21}$. Из леммы 2.4(г) следует, что

$$k_i(u) \leq \Phi_i(u) < \frac{u}{u-1}u^{\varphi(i)}, \quad k_9(u)k_{18}(u) \leq \Phi_9(u)\Phi_{18}(u) < 4u^{12}$$

и

$$k_9(\tau u)k_{16}(u) \le \Phi_9(\tau u)\Phi_{16}(u) < 4u^{14}.$$

Следовательно,

$$\frac{5}{3}q^{21} < k_{23}(\varepsilon q) < \frac{3}{2}u^{16} < \frac{5}{3}u^{16}$$

и поэтому $q^{21} < u^{16}$. Применяя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{21}u^{176} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 8990q^{213}$. Поскольку $q^{21} < u^{16}$, получаем, что $q^{231} < u^{176} < 21 \cdot 8990q^{213}$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \simeq L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 13$, находим, что $25 \le m \le 26$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_{12}(\varepsilon q) \subseteq R_{12}(\tau u)$. Значит, $k_{12}(\varepsilon q)$ делит $k_{12}(\tau u)$. Из равенства (1) следует, что $k_{12}(\varepsilon q) = q^4 - q^2 + 1$ и $k_{12}(\tau u) = u^4 - u^2 + 1$. Поскольку $q \ne u$, то $k_{12}(\varepsilon q) \ne k_{12}(\tau u)$. Каждый простой делитель числа $k_{12}(\tau u)$ не меньше 13, поэтому $13k_{12}(\varepsilon q) \le k_{12}(\tau u)$. Отсюда следует, что

$$\frac{13}{2}q^4 < 13k_{12}(\varepsilon q) \le k_{12}(\tau u) < u^4.$$

По лемме 5.4 получаем, что $78q^{n-1} > u^{m-1} \ge u^{n-1}$; противоречие с неравенством $u^4 > 6q^4$.

Случай $t(L) = 12$. Тогда $n = 23$ или $n = 24$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 12$, то $S \in \{O_{31}(u), S_{30}(u), O_{30}^{\pm}(u), O_{32}^{+}(u)\}$.

Предположим, что $S \in \{O_{31}(u), S_{30}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $|J(S) \setminus E(S)| = 3$; противоречие с леммой 5.1.

Предположим, что $S \in \{O_{30}^{+}(u), O_{30}^{-}(u), O_{32}^{+}(u)\}$. Согласно табл. 2 верно, что $J(S) = E(S)$. Из леммы 5.1 следует, что существует целое число i такое, что $k_{23}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 15$, то $\varphi(i) \le 12$. Используя лемму 2.4, получаем, что $k_i(u) \le \Phi_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{12}$. Лемма 2.6 влечет, что $k_{23}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{21}$. Следовательно, $u \ge 3$ и $\frac{5}{3}q^{21} < \frac{5}{3}u^{12}$. По предложению 2.15 находим, что $\frac{2}{16}u^{136} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 6203q^{181}$. Следовательно, получаем, что $q^{238} < u^{136} \le 8 \cdot 6203q^{181}$. Значит, $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 12$, находим, что $23 \le m \le 24$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_9(\varepsilon q) \subseteq R_9(\tau u)$. Тогда $3q^6 < u^6$ по [8, лемма 2.5(в)]. Значит, $u \ge 4$. Используя лемму 5.4, получаем, что $u^{n-1} \le u^{m-1} < \frac{3\cdot 4}{2\cdot 3} \cdot 24q^{n-1}$, поэтому $u^{n-1} < 48q^{n-1}$. С другой стороны, неравенство $u^6 > 3q^6$ влечет, что $u^{n-1} > 3^{22/6}q^{n-1} > 56q^{n-1}$; противоречие.

Случай $t(L) = 11$. Тогда $n = 21$ или $n = 22$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 11$, находим, что $S \in \{O_{27}(u), S_{26}(u), O_{29}(u), S_{28}(u), O_{28}^{-}(u)\}$ согласно табл. 2. Если $S = O_{28}^{-}(u)$, то $|J(S) \setminus E(S)| = 3$, значит, случай невозможен по лемме 5.1(б). В других случаях $J(S) = E(S)$ или $J(S) \setminus E(S) = \{7, 14\}$. Из леммы 5.1(а) следует, что $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_7(u)k_{14}(u)$ или $k_i(u)$, где i — целое число такое, что $\eta(i) \le 14$. Тогда $\varphi(i) \le 12$. Лемма 2.4(г) влечет, что $k_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{12}$ и

$$k_7(u)k_{14}(u) \le \Phi_7(u)\Phi_{14}(u) = \Phi_7(u^2) < \frac{4}{3}u^{12}.$$

Используя лемму 2.6, получаем, что $\frac{5}{3}q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) < \frac{u}{u-1}u^{12}$ и, следовательно, $q^{17} < u^{12}$. Применяя предложение 2.15 для S и L, получаем, что

$$\frac{2}{12}u^{116} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 2832q^{151}.$$

Значит, $q^{164} < 6 \cdot 2832 q^{151}$ и поэтому $q^{13} < 17000$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 11$, находим, что $21 \le m \le 22$. По лемме 5.2 получаем, что $m \ge n$. Из леммы 5.3 следует, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Тогда $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$. Используя равенство (1), получаем, что $k_8(\varepsilon q) = (q^4+1)/2$ и $k_8(\tau u) = (u^4+1)/(u-1,2)$. Предположим, что $k_8(\varepsilon q) = k_8(\tau u)$. Поскольку $q \neq u$, имеем равенство $q^4 - 1 = 2u^4$. Очевидно, что q^4-1 делится на 8 и $r_4(q)$, поэтому $q^4 - 1 \neq 2u^4$. Значит, $k_8(\varepsilon q)$ — собственный делитель $k_8(\tau u)$ и тем самым $17 \cdot (q^4+1)/2 \le (u^4+1)$. Поскольку $u^4 + 1 < \frac{16}{15}u^4$, получаем, что $\frac{17}{2}q^4 < \frac{16}{15}u^4$, поэтому $7q^4 < u^4$. С другой стороны, из леммы 5.4 следует, что $u^{n-1} \le 66 q^{n-1}$; противоречие с неравенством $7q^4 < u^4$.

Случай $t(L) = 10$. Тогда $n = 19$ или $n = 20$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 10$, находим, что $S \in \{O_{25}(u), S_{24}(u), O_{26}^{\pm}(u), O_{24}^{-}(u), O_{28}^{+}(u)\}$ согласно табл. 2.

Допустим, что $S \in \{O_{25}(u), S_{24}(u), O_{24}^{-}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) = E(S)$. Из леммы 5.1 следует существование целого числа i такого, что $k_{19}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 12$, имеем $\varphi(i) \le 10$ и поэтому $k_i(u) \le 2u^{10}$ по лемме 2.4. Используя лемму 2.6, получаем, что $q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) \le k_i(u) \le 2u^{10}$. В силу предложения 2.15 находим, что

$$\frac{2}{8}u^{92} \le \exp(S) \le \exp(L) \le 1922 q^{129}.$$

Следовательно, $q^{156} < 2^{92/10} \cdot 4 \cdot 1922 q^{129}$ и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S \in \{O_{26}^{+}(u), O_{26}^{-}(u), O_{28}^{+}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) \setminus E(S)$ равно $\{12,14\}$, $\{12,7\}$ или $\{7,14\}$. Лемма 5.1 влечет, что $k_{19}(\varepsilon q) \le k_i(u)$, где i — целое число, или $k_{19}(\varepsilon q)$ делит одно из чисел $k_{12}(u)k_{14}(u)$, $k_{12}(u)k_7(u)$ или $k_7(u)k_{14}(u)$. Заметим, что $\varphi(i) \le 12$, $\varphi(12) = 4$, $\varphi(7) = \varphi(14) = 6$. Используя лемму 2.4 и равенство $\Phi_7(u)\Phi_{14}(u) = \Phi_7(u^2)$, получаем, что $q^{17} < k_{19}(\varepsilon q) \le 2u^{12}$ во всех случаях. Из предложения 2.15 следует, что

$$\frac{2}{16}u^{104} < \exp(S) \le \exp(L) < 1922 q^{129}.$$

Значит,

$$q^{147} < 2^{(104/12)} \cdot 8 \cdot 1922 q^{129}$$

и поэтому $q^{18} < 7 \cdot 10^6$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 10$, получаем, что $19 \le m \le 20$. По лемме 5.2 верно, что $m \ge n$. Применяя лемму 5.3, находим, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Аналогично предыдущему случаю имеем $7q^4 < u^4$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что $u^{n-1} \le u^{m-1} < 60 q^{n-1}$, что невозможно, поскольку $u^{n-1} > 7^3 q^{n-1}$.

Случай $t(L) = 9$. Тогда $n = 17$ или $n = 18$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Поскольку $t(S) = 9$, получаем, что $S \in \{O_{23}(u), S_{22}(u), O_{22}^{\pm}(u), O_{24}^{+}(u)\}$.

Если $S \in \{O_{23}(u), S_{22}(u)\}$, то $|J(S) \setminus E(S)| = 3$, стало быть, этот случай невозможен по лемме 5.1(б). Предположим, что $S \in \{O_{24}^{+}(u), O_{22}^{+}(u), O_{22}^{-}(u)\}$. Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. По лемме 5.1(а) существует целое число i такое, что $k_{17}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \le 12$, заключаем, что $\varphi(i) \le 10$. Из лемм 2.6 и 2.4 следует, что

$$\frac{5}{3}q^{15} < k_{17}(\varepsilon q) \le k_i(u) \le \frac{u}{u-1}u^{10},$$

поэтому $u \geq 3$ и $q^{15} < u^{10}$. Используя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{10}u^{74} \leq \exp(S) \leq \exp(L) < 860q^{103}$. Следовательно, $q^{111} < u^{74} \leq 5 \cdot 860q^{103}$ и поэтому $q^8 < 4300$. Это неравенство влечет, что $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+,-\}$. Поскольку $t(S) = 9$, находим, что $17 \leq m \leq 18$. По лемме 5.2 имеем неравенство $m \geq n$. Применяя лемму 5.3, получаем, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$. Следовательно, $7q^4 < u^4$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что $u^{n-1} \leq u^{m-1} < 54q^{n-1}$, что невозможно, поскольку $u^{n-1} > 7^3q^{n-1}$. $\square$

Лемма 5.6. *Теорема* 2 *верна, если* $15 \leq n \leq 16$.

Доказательство. В этом случае получаем, что $t(L) = 8$. По теореме 3 верно, что $t(S) = 8$.

Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Согласно табл. 2 $S \in \{O_{19}(u), S_{18}(u), O_{21}(u), S_{20}(u), O_{20}^-(u)\}$.

Предположим, что $S \in \{O_{19}(u), S_{18}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) = E(S)$. Если $n = 16$, то $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ большие относительно L и смежны в $GK(L)$. По лемме 3.9 получаем, что $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ большие относительно S и смежны в $GK(S)$. Поскольку $J(S) = E(S)$, получаем равенство $\varphi(r_8(\varepsilon q), S) = \varphi(r_{16}(\varepsilon q), S)$. С другой стороны, $r_7(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$ по лемме 4.1 и предложению 4.3. Следовательно, $r_7(\varepsilon q)$ смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{16}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие с леммой 3.10. Следовательно, можно считать, что $n = 15$. Из леммы 5.1 следует, что существует целое число i такое, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \leq 9$, имеем $\varphi(i) \leq 8$, поэтому $k_i(u) \leq \frac{u}{u-1}u^8$ по лемме 2.4. Поскольку $k_i(u) \geq k_{13}(\varepsilon q) > q^{11}$, находим, что $u \geq 5$. По лемме 2.6 получаем, что $\frac{5}{3}q^{11} < k_{13}(\varepsilon q) \leq k_i(u) \leq \frac{5}{4}u^8$ и, следовательно, $q^{11} < \frac{3}{4}u^8$. Используя предложение 2.15, находим, что $\frac{2}{8}u^{56} \leq \exp(S) \leq \exp(L) \leq 531q^{73}$. Следовательно,

$$q^{77} < \left(\frac{3}{4}\right)^7 u^{56} < \left(\frac{3}{4}\right)^7 \cdot 4 \cdot 531q^{73}$$

и поэтому $q < 5$. Значит, $q = 3$. Используя неравенство $u^{56} \leq 4 \cdot 531q^{73}$, находим, что $u < 5$; противоречие с $u \geq 5$.

Если $S = O_{20}^-(u)$, то $J(S) \setminus E(S) = \{5, 10, 8\}$; противоречие с леммой 5.1.

Предположим, что $S \in \{O_{21}(u), S_{20}(u)\}$. Согласно табл. 2 $J(S) \setminus E(S) = \{5, 10\}$. Из леммы 5.1 следует, что $R_{13}(\varepsilon q) \subseteq R_5(u) \cup R_{10}(u)$ или существует целое число i такое, что $R_{13}(\varepsilon q) \subseteq R_i(u)$. Поскольку $\eta(i) \leq 10$, заключаем, что $\varphi(i) \leq 8$ и поэтому $k_i(u) \leq 2u^8$ по лемме 2.4(г). С другой стороны,

$$k_5(u)k_{10}(u) \leq \Phi_5(u^2) = u^8 + u^6 + u^4 + u^2 + 1 < \frac{3}{2}u^8.$$

По лемме 2.6 получаем, что $k_{13}(\varepsilon q) > \frac{5}{3}q^{11}$ и тем самым $u > 2$. Из леммы 2.4(г) следует, что $\frac{5}{3}q^{11} < k_{13}(\varepsilon q) \leq \frac{5}{3}u^8$ и, следовательно, $q^{11} < u^8$. По предложению 2.15

$$\frac{2}{5}u^{64} \leq \exp(S) \leq \exp(L) \leq 569q^{81}.$$

Стало быть, $q^{88} < u^{64} < 3 \cdot 569q^{81}$ и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $S = L_m^\tau(u)$, где $15 \leq m \leq 16$ и $\tau \in \{+,-\}$. По лемме 5.2 $m \geq n$. Из леммы 4.1 и предложения 4.3 следует, что простые числа $r_7(\varepsilon q)$, $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Следовательно, по леммам 3.9 и 4.5 $t(r_7(\varepsilon q), S) \geq 7$. Если $t(r_7(\varepsilon q), S) = 8$, то $r_7(\varepsilon q)$ большое относительно

S и смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ и $r_8(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Следовательно, числа $e(r_7(\varepsilon q), \tau u)$, $e(r_{14}(\varepsilon q), \tau u)$ и $e(r_8(\varepsilon q), \tau u)$ различны; противоречие с $|J(S) \setminus E(S)| \leq 2$. Значит, $t(r_7(\varepsilon q), S) = 7$ для любого $r_7(\varepsilon q) \in R_7(\varepsilon q)$ и поэтому $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_7(\tau u)$ по лемме 3.9.

Предположим, что $n = 16$. Поскольку $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{16}(\varepsilon q)$ смежны в $GK(S)$ и большие относительно S, а число $r_7(\varepsilon q)$ смежно с $r_8(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{16}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем, что $m = 16$, $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$ и $R_{16}(\varepsilon q) \subseteq R_{16}(\tau u)$. Следовательно, $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$ и поэтому $7q^4 < u^4$. По лемме 5.4 $u^{15} < 48q^{15}$; противоречие с $7q^4 < u^4$.

Предположим, что $n = m = 15$. Поскольку $r_8(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ смежны с $r_7(\varepsilon q)$, заключаем, что либо $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$, либо $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\tau u)$. В первом случае находим, что $k_8(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$, и получаем противоречие, как и в предыдущем случае. Поэтому можно считать, что $R_8(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\tau u)$. Тогда $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_8(\tau u)$ и, следовательно, $k_{14}(\varepsilon q)$ делит $k_8(\tau u)$. По лемме 2.6 $q^5 < k_7(-\varepsilon q) = k_{14}(\varepsilon q) \leq k_8(\tau u) = u^4 + 1 < \frac{16}{15}u^4$. По предложению 2.15 получаем, что
$$\frac{v}{29}u^{72} < \exp(S) \leq \exp(L) < 531q^{73}.$$
Следовательно,
$$q^{90} < \left(\frac{16}{15}\right)^{18} u^{72} < 4 \cdot 15 \cdot 531q^{73}$$
и поэтому $q < 3$; противоречие.

Предположим, что $n = 15$ и $m = 16$. По предложению 2.15 $\frac{v}{57}u^{80} < \exp(S) \leq \exp(L) < 531q^{73}$. Если $(q - \varepsilon 1, 7) = 1$, то из леммы 2.8 следует, что $5q^6 < u^6$ и поэтому $5^{13}q^{80} < u^{80}$, что противоречит неравенству $\exp(S) \leq \exp(L)$. Значит, можно считать, что $(q - \varepsilon 1, 7) = 7$, в частности, $q \geq 13$. По лемме 5.1 получаем, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_{16}(\tau u)k_8(\tau u)$ или $k_i(\tau u)$, где i — целое число такое, что $i \leq 16$. Используя равенство (1), получаем, что $k_{13}(\varepsilon q) > \frac{12}{13d}q^{12}$, где $d = (q - \varepsilon 1, 13)$. С другой стороны,
$$k_{16}(\tau u)k_8(\tau u) \leq (u^8 + 1)(u^4 + 1) < \frac{u}{u-1}u^{12}$$
и
$$k_i(\tau u) \leq \frac{u}{u-1}u^{12}$$
по лемме 2.4(г). Следовательно, $u \geq 7$ и поэтому
$$q^{12} < \frac{13}{12} \cdot \frac{7}{6}du^{12} < \frac{3}{2}du^{12}.$$
Тогда
$$q^{80} < \left(\frac{3}{2}d\right)^7 u^{80} < \left(\frac{3}{2}d\right)^7 \cdot 29 \cdot 531q^{73}.$$
Значит, $q^7 < 300000d^7$. Если $d = 1$, то $q < 7$; противоречие с $q \geq 13$. Если $d = 13$, то $q - \varepsilon 1$ делится на 7 и 13, поэтому $q \geq 183$. Тогда $q^7 > (13^2)^7 > d^7 13^7 > 300000d^7$; противоречие. $\square$

Лемма 5.7. *Теорема* 2 *верна, если* $13 \leq n \leq 14$.

Доказательство. Поскольку n не является простым числом, получаем, что $n = 14$.

По теореме 3 верно, что $t(S) = 7$. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Согласно табл. 2 $S \in \{O_{17}(u), S_{16}(u), O^{\pm}_{18}(u), O^{+}_{20}(u),$

$O_{16}^{-}(u)\}$. Из леммы 4.1 и предложения 4.3 следует, что $r_5(\varepsilon q)$, $r_7(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ взаимно просты с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Тогда $r_7(\varepsilon q)$ и $r_{14}(\varepsilon q)$ являются большими относительно L и смежными в $GK(S)$. Поскольку $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$, получаем, что $J(S) \neq E(S)$. Следовательно, $S \notin \{O_{17}(u), S_{16}(u), O_{16}^{-}(u)\}$ согласно табл. 2. Таким образом, можно считать, что $S = O_{18}^{\pm}(u)$ или $S = O_{20}^{+}(u)$. В этом случае имеем $|J(S) \setminus E(S)| = 2$. Значит, $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_{j_1}(u)$ и $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_{j_2}(u)$, где $J(S) \setminus E(S) = \{j_1, j_2\}$. Следовательно, $R_{13}(\varepsilon q) \cap (R_{j_1}(u) \cup R_{j_2}(u)) = \varnothing$. Из леммы 5.1 следует, что $k_{13}(\varepsilon q)$ делит $k_i(u)$ для некоторого целого числа i такого, что $\eta(i) \leq 10$. Тогда $\varphi(i) \leq 8$. Обозначим число $(q - \varepsilon 1, 13)$ через d. Используя равенство (1), находим, что $k_{13}(\varepsilon q) \geq \frac{2}{3d} q^{12}$. Из леммы 2.4(г) следует, что

$$\frac{u}{u-1} u^8 > k_i(u) \geq \frac{2}{3d} q^{12}.$$

Поскольку $q \geq 3$, получаем, что $u \geq 4$. Следовательно,

$$q^{12} < \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} d u^8 = 2du^8.$$

По предложению 2.15 находим, что $\frac{v}{10} u^{50} < \exp(S) \leq \exp(L) \leq 247 q^{65}$. Это означает, что $q^{75} < (2d)^{6.25} u^{50} < (2d)^{6.25} \cdot 1235 q^{65}$. Тогда $q^{10} < 93995 d^{6.25}$. Если $d = 1$, то $q < 4$ и, следовательно, $q = 3$. В этом случае $R_7(3) = \{1093\}$ и $R_{14}(3) = \{547\}$. Согласно табл. 2 $j_1 \in \{5, 10\}$ или $j_2 \in \{5, 10\}$, следовательно, $1093 - 1$ или $547 - 1$ должно делиться на 10; противоречие. Если $d = 13$, то $q < 15$, но это невозможно, поскольку $q - \varepsilon 1$ делится на 13.

Предположим, что $S = L_m^{\tau}(u)$, где $13 \leq m \leq 14$. Из леммы 5.2 следует, что $m = 14$. Согласно табл. 2 видим, что $J(L) \setminus E(L) = J(S) \setminus E(S) = \{7, 14\}$. Применяя лемму 4.1 и предложение 4.3, получаем, что $r_5(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. Следовательно, $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_7(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{14}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$. Это означает, что $R_7(\varepsilon q) \subseteq R_7(\epsilon u)$ и $R_{14}(\varepsilon q) \subseteq R_{14}(\epsilon u)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$. По лемме 2.8 получаем, что $5q^6 < u^6$ и, следовательно, $32 q^{13} < u^{13}$. С другой стороны, лемма 5.4 влечет, что

$$u^{13} < \frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) q^{13}.$$

Если $u \geq 4$, то

$$\frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) < \frac{3}{2} \frac{4}{3} 14 = 28,$$

а если $u \leq 3$, то $(u - \tau 1, 14) \leq 2$ и

$$\frac{q}{q-1} \cdot \frac{u}{u-1} \cdot (u - \tau 1, 14) \leq \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 6;$$

противоречие с $32 q^{13} < u^{13}$. $\square$

Лемма 5.8. *Теорема 2 верна, если $n = 12$.*

Доказательство. В этом случае $t(L) = 6$ и $t(S) = 6$ по теореме 3. Предположим, что S — симплектическая или ортогональная группа. Тогда $S \in \{O_{15}(u), S_{14}(u), O_{14}^{\pm}(u), O_{16}^{+}(u)\}$, где $u \neq 2$, если $S = O_{14}^{-}(u)$. Согласно табл. 2 видим, что $|J(S) \setminus E(S)| = 3$, если $S \in \{O_{15}(u), S_{14}(u)\}$. Следовательно, эти случаи невозможны по лемме 5.1(б). Предположим, что $S \in \{O_{14}^{\pm}(u), O_{16}^{+}(u)\}$.

Согласно табл. 2 видим, что $J(S) = E(S)$. В силу леммы 2.12 и предложения 4.3 существует $r_6(\varepsilon q) \neq 7$, взаимно простое с $|\overline{G}/S|$. Из леммы 4.1 следует, что $r_6(\varepsilon q) \notin \pi(K)$. Значит, числа $r_{12}(\varepsilon q)$ и $r_6(\varepsilon q)$ являются большими относительно S и смежными в $GK(S)$. Аналогично получаем, что $r_5(\varepsilon q)$ взаимно просто с $|\overline{G}/S| \cdot |K|$. Это означает, что $r_5(\varepsilon q)$ смежно с $r_6(\varepsilon q)$ и не смежно с $r_{12}(\varepsilon q)$ в $GK(S)$; противоречие с $J(S) = E(S)$.

Предположим, что $S \simeq L_m^\tau(u)$, где $\tau \in \{+, -\}$ и $11 \leq m \leq 12$. Из леммы 5.2 следует, что $m = 12$. Заметим, что $J(L) \setminus E(L) = J(S) \setminus E(S) = \{6, 12\}$. Рассматривая простые числа $r_5(\varepsilon q)$, $r_6(\varepsilon q)$ и $r_{12}(\varepsilon q)$, находим, что для некоторого $r_6(\varepsilon q)$ верно, что $r_6(\varepsilon q) \in R_6(\tau u)$, и поэтому $R_{12}(\varepsilon q) \subseteq R_{12}(\tau u)$. Следовательно, $k_{12}(\varepsilon q)$ делит $k_{12}(\tau u)$. Это означает, что $6q^4 < u^4$, и поэтому $138q^{11} < u^{11}$. С другой стороны, $u^{11} < 36q^{11}$ по лемме 5.4; противоречие. $\square$

§ 6. Доказательство теоремы 1

Предположим, что группа L изоморфна $L_n(q)$ или $U_n(q)$, где $n \geq 11$, а q — степень простого числа p. Если q четно, то проблема распознаваемости для L решена в случае линейных групп в [30] и в случае унитарных групп в [31]. В частности, для любой группы G, изоспектральной L, верно, что $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Поэтому можно считать, что q нечетно.

Предположим, что G — группа, изоспектральная L. Если $n \geq 27$, то из [8, теорема 1.2] следует, что $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$. Аналогичное заключение верно, если n — простое число в силу основной теоремы статьи [32] и [5, следствие 1]. Основные результаты из [33] показывают, какие именно группы G подходят для L, поэтому проблема распознаваемости решена в этих случаях. Следовательно, можно считать, что n не является простым числом и $12 \leq n \leq 26$.

Используя [25, табл. 2] и [23, табл. 6], видим, что $t(L) \geq 6$ и $t(2, L) \geq 2$. Из леммы 3.1 следует, что существует неабелева простая группа S такая, что $S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S$ для максимальной нормальной разрешимой подгруппы K группы G. По [4, следствие 1] группа S не изоморфна исключительной группе лиева типа. По [34, теоремы 1 и 2] и [24, теоремы 1 и 2] получаем, что S не изоморфна знакопеременной группе, спорадической группе или группе Титса ${}^2F_4(2)'$. Следовательно, можно считать, что S — простая классическая группа. По теореме 2 получаем, что S определена над полем характеристики p. Теперь из [24, теорема 3] следует, что $S \simeq L$ и тем самым $K = 1$ по [11, следствие 1]. Таким образом, $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$ и группа L почти распознаваема. Чтобы определить, какие группы G подходят, можно воспользоваться основными результатами работы [33], поэтому проблема распознаваемости для L решена.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
2. *Grechkoseeva M. A, Mazurov V. D., Shi W., Vasil′ev A. V., Yang N.* Finite groups isospectral to simple groups // Commun. Math. Stat. 2023. V. 11, N 2. P. 169–194.
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Гречкосеева М. А., Паньшин В.В.* О распознаваемости по спектру линейных и унитарных групп небольшой размерности // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 876–900.
5. *Паньшин В. В.* О распознавании простых групп с несвязным графом простых чисел по спектру. 2025. arXiv:2509.03483. (Принята к печати в Мат. заметках).
6. *Vasil′ev A. V.* On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.

7. *Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V.* On the structure of finite groups isospectral to finite simple groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 5. P. 741–759.

8. *Staroletov A.* On almost recognizability by spectrum of simple classical groups // Intern. J. Group Theory. 2017. V. 6, N 4. P. 7–33.

9. *Васильев А. В., Гречкосеева М.А.* О распознаваемости конечных простых ортогональных групп размерности 2^m, 2^m+1 и 2^m+2 над полем характеристики 2 // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 510–526.

10. *Васильев А. В., Горшков И. Б., Гречкосеева М. А., Кондратьев А. С., Старолетов А. М.* О распознаваемости по спектру конечных простых групп типов B_n, C_n и ${}^2D_n$ при $n=2^k$ // Тр. ИММ УрО РАН. 2009. Т. 15, № 2. С. 58–73.

11. *Grechkoseeva M. A.* On element orders in covers of finite simple groups of Lie type // J. Algebra Appl. 2015. V. 14, N 4. 1550056.

12. *Bang A.S.* Taltheoretiske Undersfigelser // Tidsskrift Math. 1886. V. 4. P. 70–80, 130–137.

13. *Zsigmondy K.* Zur theorie der potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.

14. *Roitman M.* On Zsigmondy primes // Proc. Am. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.

15. *Erdös P.* On the coefficients of the cyclotomic polynomial // Bull. Am. Math. Soc. 1946. V. 52. P. 179–184.

16. *Прасолов В. В.* Многочлены, 3-е изд, исправленное. М.: МЦНМО, 2003.

17. *Nagell T.* Des équations indéterminées $x^2+x+1=y^n$ et $x^2+x+1=3y^n$ // Nordsk. Mat. Forenings Skr. 1920. V. 2. 14 pp.

18. *Ljunggren W.* Noen Setninger om ubestemte likninger av formen $(x^n-1)/(x-1)=y^q$ // Norsk. Mat. Tidsskr. 1943. V. 25. P. 17–20.

19. *Testerman D.* A_1-type overgroups of order p in semisimple algebraic groups and the associated finite groups // J. Algebra. 1995. V. 177, N 1. P. 34–76.

20. *Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V, Zvezdina M. A.* Recognition of symplectic and orthogonal groups of small dimensions by spectrum // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 12. 1950230.

21. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.

22. *Yang N., Grechkoseeva M. A., Vasil′ev A. V.* On the nilpotency of the solvable radical of a finite group isospectral to a simple group // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 3. P. 447–470.

23. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.

24. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Старолетов А. М.* О конечных группах, изоспектральных простым линейным и унитарным группам // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 39–53.

25. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.

26. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.

27. `https://github.com/AlexeyStaroletov/RecognitionBySpectrum`

28. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных симплектических и ортогональных групп // Мат. тр. 2010. Т. 13, № 2. С. 33–83.

29. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.

30. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А.* Распознавание по спектру конечных простых линейных групп малых размерностей над полями характеристики 2 // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 5. С. 558–570.

31. *Grechkoseeva M. A., Shi W. J.* On finite groups isospectral to finite simple unitary groups over fields of characteristic 2 // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. V. 10. P. 31–37.

32. *Гречкосеева М. А., Лыткин Д. В.* Почти распознаваемость по спектру конечных простых линейных групп простой размерности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 805–818.

33. *Grechkoseeva M. A.* On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 6. P. 1191–1222.

34. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* О конечных группах, изоспектральных простым симплектическим и ортогональным группам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6.

С. 1225–1247.

Поступила в редакцию 7 ноября 2025 г.
После доработки 3 декабря 2025 г.
Принята к публикации 5 декабря 2025 г.

Старолетов Алексей Михайлович (ORCID 0000-0002-3914-6758)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
staroletov@math.nsc.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 10.04.2026. Уч.-изд. л. 16,1. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 25.05.2026. Объем файла 1.88 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.