ISSN 2310–001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 67 2 2026

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 67, № 2 (396) **Март—апрель, 2026**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2026

Адрес редакции:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 512.55

ГРУППА ВНЕШНИХ АВТОМОРФИЗМОВ МАТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин

Аннотация. Согласно теореме Айзека группа внешних автоморфизмов матричной алгебры $M_n(R)$, где R — факториальное кольцо, тривиальна для каждого $n \in \mathbb{N}$. В работе изучаются обобщения этой теоремы. Доказано, что группа внешних автоморфизмов алгебры матриц над произвольной HCF-областью тривиальна. Для алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(R; s)$ над факториальным кольцом R найдена группа внешних автоморфизмов. В качестве следствия получен критерий изоморфизма алгебры $\mathbb{M}_n(R; s)$ и алгебры формальных матриц порядка n со значением в кольце R.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.201

Ключевые слова: факториальные кольца, группа внешних автоморфизмов, кольцо формальных матриц.

Введение

В работах Сколема [1] и Нётер [2] независимо была доказана теорема, согласно которой любой изоморфизм между двумя простыми подалгебрами конечномерной простой центральной алгебры A индуцируется внутренним автоморфизмом A. В частности, из теоремы Нётер — Сколема следует, что для каждого поля F всякий автоморфизм матричной алгебры $M_n(F)$ является внутренним. Автоморфизмы матричных алгебр над коммутативными кольцами изучались в работе [3]. В частности, в этой работе было показано, что для произвольного коммутативного кольца R и каждого $n \in \mathbb{N}$ группа $\mathrm{Out}(M_n(R))$ является периодической, у которой порядок каждого элемента делит n. В работе [4] было показано, что для произвольной области Безу R и произвольного $n \in \mathbb{N}$ все автоморфизмы R-алгебры $M_n(R)$ являются внутренними. Автоморфизмы колец формальных матриц и условия, при которых у колец формальных верхнетреугольных матриц и близких к ним колец все автоморфизмы являются внутренними, в последнее время были изучены в работах П. А. Крылова, Ц. Д. Норбосамбуева и А. А. Туганбаева (см. [5–7]).

В работе изучены некоторые обобщения результата из [3], согласно которому для каждого факториального кольца R все автоморфизмы R-алгебры $M_n(R)$ являются внутренними. В первом пункте показано, что для произвольной правой области Оре R, у которой каждый конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, всякий автоморфизм кольца $M_n(R)$ представим в виде композиции внутреннего автоморфизма $M_n(R)$ и автоморфизма $M_n(R)$,

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 25-11-00348) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2025-1725/1).

который индуцируется автоморфизмом кольца R. Следствием этого утверждения является тривиальность группы внешних автоморфизмов алгебры $M_n(R)$ для произвольной HCF-области R. Во втором пункте изучены кольца формальных матриц со значением в факториальном кольце. Получено описание группы внешних автоморфизмов для алгебры $\mathbb{M}_n(R;s)$ при $n \geq 3$. Изучено одно из обобщений данной алгебры, в котором все мультипликативные коэффициенты являются степенью одного элемента s. Для таких алгебр при некоторых ограничениях удалось описать группу внешних автоморфизмов. В качестве следствия получены теоремы об изоморфизмах.

Приведем предварительные факты из теории колец формальных матриц, необходимые в дальнейшем. Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$ — кольца, M_{ij} — (R_i, R_j)-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \leq i, j \leq n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ будут (R_i, R_k)-бимодульными гомоморфизмами с той оговоркой, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы для всех $1 \leq i, j \leq n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для $a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Через K обозначим множество всех $n \times n$-матриц (m_{ij}) с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \leq i, k, l, j \leq n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается через $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$. В частном случае, когда $n = 2$, эти кольца называют *кольцами контекста Мориты.*

Рассмотрим кольца формальных матриц порядка n со значением в некотором кольце R. Иными словами, рассмотрим кольца формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в которых $M_{ij} = R$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Нетрудно показать (см. к примеру [8]), что произведение в этих кольцах определяется некоторым набором $\eta = \{\eta_{ikj}\}$ центральных элементов кольца R:

$$\varphi_{ikj}(a \otimes b) = \varphi_{ikj}(1 \otimes 1)ab = ab\varphi_{ikj}(1 \otimes 1) := \eta_{ikj}\, ab, \quad \eta_{ikj} \in C(R).$$

Эти кольца формальных матриц обозначают через $K_n(R;\eta)$. Нетрудно видеть, что из свойства ассоциативности произведения получаем равенство $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}$, верное для всех $1 \leq i, j, k, l \leq n$. В случае колец формальных матриц второго порядка произведение определяется элементом $s = \eta_{121} = \eta_{212}$. В статье [9] эти кольца формальных матриц были обозначены через $K_s(R)$. В работе [9] была изучена проблема изоморфизма для таких колец.

Теорема 1.1 [9, теорема 1.5]. *Пусть R — коммутативное кольцо, s и t — некоторые его элементы, причем хотя бы один из них не является делителем нуля. Кольца $K_s(R)$ и $K_t(R)$ изоморфны в точности тогда, когда существуют такой обратимый элемент $v \in R$ и такой автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Впоследствии в статьях [10–13, 8] этот результат был доказан при различных условиях на кольцо R, а также результат был перенесен на кольца формальных матриц больших размерностей. Так, в статье [8] был рассмотрен следующий класс колец формальных матриц. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и положим $\delta_{ijk} = 1 + \delta_{ik} - \delta_{ij} - \delta_{jk}$, где под δ понимается символ Кронекера. Для элемента $s \in C(R)$ зададим $\eta_{ijk} = s^{\delta_{ijk}}$, $1 \leq i, j, k \leq n$. Иными словами,

$$s_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ s, & \text{если } i, j, k \text{ различны}, \\ s^2, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что мы получаем корректно определенное кольцо формальных матриц $K_n(R; s^{\delta_{ijk}})$, обозначаемое через $\mathbb{M}_n(R; s)$. При этом $\mathbb{M}_2(R; s) = K_{s^2}(R)$. Для данного класса колец была поставлена и решена проблема изоморфизма.

Теорема 1.2 [8, теорема 18]. *Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $Z(R) \subseteq J(R)$, $s, t \in R$ и $n \geq 3$. Тогда кольца $\mathbb{M}_n(R; s)$ и $\mathbb{M}_n(R; t)$ изоморфны в точности тогда, когда существуют такой обратимый элемент $v \in R$ и такой автоморфизм α кольца R, что $t = v\alpha(s)$.*

Как дальнейшее обобщение конструкции в [10] был введен класс колец формальных матриц $M_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. А именно, фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и возьмем $\beta_1, \dots, \beta_n \in C(R)$. Для всех $1 \leq i, j, k \leq n$ положим

$$\eta_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \text{ или } j = k, \\ \beta_j, & \text{если } i, j, k \text{ различны}, \\ \beta_i\beta_j, & \text{если } i = k \neq j. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что мы получаем корректно определенное кольцо формальных матриц $K_n(R; \eta_{ijk})$, обозначаемое через $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. В этих обозначениях $\mathbb{M}_n(R; s) = \mathbb{M}_{s,\dots,s}(R)$. Однако для данного класса колец проблема изоморфизма была решена лишь в частных случаях. При этом группа внешних автоморфизмов была описана только для алгебр $K_s(R)$ над факториальными кольцами.

Теорема 1.3 [14, теорема 6]. *Пусть кольцо R факториально и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда*

$$\operatorname{Out}_R(K_s(R)) \cong (S_2)^k$$

для некоторого натурального числа k. В частности, группа $\operatorname{Out}_R(K_s(R))$ является абелевой.

1. Автоморфизмы матричных алгебр над HCF-областями

Пусть M — правый R-модуль. Множество всех элементов m из M, у которых аннулятор $\operatorname{ann}(m) = \{r \in R \mid mr = 0\}$ существен в R_R, образует подмодуль M и обозначается через $\operatorname{Sing}(M)$. Кольцо R называется *несингулярным справа*, если $\operatorname{Sing}(R_R) = 0$.

Модуль M называется *однородным,* если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение. Модуль M называется *модулем конечной равномерной размерности,* если для M существует такое $n \in \mathbb{N}$, что M является существенным расширением прямой суммы n ненулевых однородных модулей. При этом число n определено однозначно и называется *размерностью Голди* модуля M. Размерность Голди модуля M обозначается через $\operatorname{Gdim}(M)$

Лемма 2.1. *Пусть R — несингулярное справа кольцо, у которого всякий конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, и P — ненулевой конечнопорожденный проективный однородный правый R-модуль. Тогда $P \cong R_R$.*

Доказательство. Поскольку модуль P проективен и конечнопорожден, то он является прямым слагаемым некоторого свободного модуля $F = \bigoplus_{i=1}^{n} e_iR$, где $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис модуля F. Так как $P \neq 0$, то для некоторого $1 \leq k \leq n$ ограничение канонической проекции $\pi_k : \bigoplus_{i=1}^n e_iR \to e_kR$ на P является ненулевым гомоморфизмом. Покажем, что $\pi_k|_P$ — мономорфизм. Пусть $N = \bigoplus_{i\neq k} e_iR$. Предположим, что $\mathrm{Ker}(\pi_k|_P) = P \cap N \neq 0$. В силу однородности модуля P подмодуль $P \cap N$ существен в P. Тогда $P/P \cap N$ — сингулярный модуль. Поскольку $P/P \cap N \cong \pi_k(P)$, то $\mathrm{Sing}(\pi_k(P)) = \pi_k(P) \neq 0$. Так как $\mathrm{Sing}(R_R) = 0$, то $\mathrm{Sing}(F) = 0$. Из полученного противоречия следует равенство $P \cap N = 0$. Таким образом, $P \cong \pi_k(P)$ и, следовательно, модуль P изоморфен некоторому подмодулю модуля R_R. Поскольку по условию всякий конечнопорожденный проективный идеал кольца R является свободным, то модуль P свободен. Так как по условию модуль P неразложим, то $P \cong R_R$. $\square$

Пусть M — произвольный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Через M^* будем обозначать левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, R_R)$. Если $f \in M^*, m \in M$, то через $[m, f]$ обозначим эндоморфизм модуля M, при котором $[m, f](n) = mf(n)$ для каждого $n \in M$. Если τ — автоморфизм кольца R, то эндоморфизм аддитивной группы модуля M называется *τ-линейным*, если равенство $f(mr) = f(m)\tau(r)$ имеет место для каждых $m \in M$ и $r \in R$.

Теорема 2.2. *Пусть R — правое кольцо Оре, у которого всякий конечнопорожденный проективный правый идеал является свободным, и M — конечнопорожденный свободный правый R-модуль. Тогда для всякого автоморфизма φ кольца $\mathrm{End}_R(M)$ существуют автоморфизм τ кольца R и τ-линейный автоморфизм f модуля M такие, что равенство*

$$\varphi(\alpha) = f\alpha f^{-1}$$

верно для каждого эндоморфизма α модуля M. В частности, если кольцо R коммутативно и φ R-линейно, то f принадлежит $\mathrm{End}_R(M)$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис модуля M и $\{e^i\}_{i=1}^n$ — дуальный к нему базис модуля M^*. Для каждого i через π_i обозначим $\varphi([e_i, e^i])$. Поскольку для каждого i эндоморфизм $[e_i, e^i]$ является естественной проекцией модуля M на его прямое слагаемое e_iR относительно разложения $M = \bigoplus_{i=1}^n e_iR$ и $[e_1, e^1] + \ldots + [e_n, e^n] = 1$, то $\{\pi_i\}_{i=1}^n$ — семейство ненулевых ортогональных идемпотентов кольца $\mathrm{End}_R(M)$ и $\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$. Так как размерность Голди модуля M равна n, то для каждого i модуль $\pi_i(M)$ является однородным и, следовательно, согласно лемме 2.1 $\pi_i(M) = f_iR$ для некоторого $f_i \in M$.

Для каждых $i \neq 1$ и $r \in R$ выполнены равенства

$$[e_i, e^i][e_1r, e^1] = [e_1r, e^1][e_i, e^i] = 0$$

и, следовательно,

$$\pi_i\varphi([e_1r, e^1]) = \varphi([e_1r, e^1])\pi_i = 0.$$

Тогда для каждого $r \in R$ однозначно определен элемент $\tau(r)$, для которого выполнены равенства

$$\varphi([e_1r, e^1])(f_1) = f_1\tau(r) \quad \text{и} \quad \varphi([e_1r, e^1]) = [f_1\tau(r), f^1].$$

Заметим, что если кольцо R коммутативно и φ — автоморфизм R-алгебры $\mathrm{End}_R(M)$, то τ является тождественным автоморфизмом кольца R. Покажем, что $\tau : R \to R$ является гомоморфизмом колец. Пусть r_1, r_2 — произвольный элементы из кольца R. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} f_1\tau(r_1+r_2) &= \varphi([e_1(r_1+r_2), e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1] + [e_1r_2, e^1])(f_1) \\ &= (\varphi([e_1r_1, e^1]) + \varphi([e_1r_2, e^1]))(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1])(f_1) + \varphi([e_1r_2, e^1])(f_1) \\ &= f_1(\tau(r_1)+\tau(r_2)), f_1\tau(r_1r_2) = \varphi([e_1r_1r_2, e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1][e_1r_2, e^1])(f_1) \\ &= \varphi([e_1r_1, e^1])\varphi([e_1r_2, e^1])(f_1) = \varphi([e_1r_1, e^1])(f_1)\tau(r_2) = f_1\tau(r_1)\tau(r_2). \end{aligned}$$

Покажем, что $\tau : R \to R$ является автоморфизмом кольца R. Для каждого $r \in R$ однозначно определен элемент $\tau'(r)$, для которого выполнены равенства $\varphi^{-1}([f_1r, f^1])(e_1) = e_1\tau'(r)$ и $\varphi^{-1}([f_1r, f^1]) = [e_1\tau'(r), e^1]$. С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно показать, что τ' является гомоморфизмом колец. Для произвольного $r \in R$ имеют место равенства

$$e_1r = [e_1r, e^1](e_1) = \varphi^{-1}\varphi([e_1r, e^1])(e_1) = \varphi^{-1}([f_1\tau(r), f^1])(e_1) = e_1\tau'\tau(r).$$

Аналогично доказывается равенство $\tau\tau'(r) = r$.

Рассмотрим отображение $f_0 : M \to M$, действующее согласно правилу $m \mapsto \varphi([m, e^1])(f_1)$. Ясно, что отображение f_0 аддитивно. Пусть $m \in M$. Тогда

$$\begin{aligned} f_0(mr) &= \varphi([mr, e^1])(f_1) = \varphi([m, e^1][e_1r, e^1])(f_1) = \varphi([m, e^1])\varphi([e_1r, e^1])(f_1) \\ &= \varphi([m, e^1])(f_1\tau(r)) = \varphi([m, e^1])(f_1)\tau(r) = f_0(m)\tau(r). \end{aligned}$$

для произвольного $r \in R$. Таким образом, f_0 является τ-полулинейным эндоморфизмом.

Для произвольного эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ и каждого $m \in M$ имеют место равенства

$$f_0\alpha(m) = \varphi([\alpha(m), e^1])(f_1) = \varphi(\alpha[m, e^1])(f_1) = \varphi(\alpha)\varphi([m, e^1])(f_1) = \varphi(\alpha)f_0(m).$$

Таким образом, $f_0\alpha = \varphi(\alpha)f_0$. Покажем, что f_0 является τ-полулинейным автоморфизмом. Пусть m — произвольный элемент из модуля M. Так как $f_0(e_1) = f_1$ и φ — автоморфизм кольца $\mathrm{End}_R(M)$, то для некоторого $g \in \mathrm{End}_R(M)$ имеет место равенство $\varphi(g)f_0(e_1) = m$. Следовательно, $f_0g(e_1) = \varphi(g)f_0(e_1) = m$. Таким образом, f_0 — τ-полулинейный эпиморфизм. Так как M — свободный правый R модуль, то с помощью стандартных рассуждений можно показать, что $M = M_0 \oplus \mathrm{Ker}(f_0)$, где $M \cong M_0$. Так как $\mathrm{Gdim}(M) = \mathrm{Gdim}(M_0) + \mathrm{Gdim}(\mathrm{Ker}(f_0))$, то $\mathrm{Gdim}(\mathrm{Ker}(f_0)) = 0$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}(f_0) = 0$. Таким образом, f_0 — τ-полулинейный автоморфизм. Тогда для произвольного эндоморфизма $\alpha \in \mathrm{End}_R(M)$ из равенства $f_0\alpha = \varphi(\alpha)f_0$ следует, что $\varphi(\alpha) = f_0\alpha f_0^{-1}$. $\square$

Коммутативная область целостности R называется HCF-областью, если каждая пара ненулевых элементов из R обладает наибольшим общим делителем. Несложно заметить, что в произвольной HCF-области R всякое конечное семейство ненулевых элементов обладает наибольшим общим делителем и для каждых элементов $a, b, c \in R \setminus \{0\}$, где a и b взаимно просты, из условия $a \mid bc$ следует, что $a \mid c$. Класс HCF-областей является расширением факториальных колец и областей Безу. HCF-области изучались в ряде работ, в частности, в [15, 16]. Согласно [3, 4], если R либо факториальное кольцо, либо область Безу, то для каждого натурального числа n каждый автоморфизм алгебры $M_n(R)$ внутренний. Следующее утверждение является обобщением этих фактов.

Следствие 2.3. *Пусть R — HCF-область. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякий автоморфизм алгебры $M_n(R)$ является внутренним.*

Доказательство. Пусть R — HCF-область. Согласно предыдущей теореме достаточно показать, что всякий конечнопорожденный проективный идеал кольца R является циклическим. Пусть $I = a_1R + \ldots + a_kR$ — ненулевой проективный идеал кольца R. Через a_0 обозначим наибольший общий делитель элементов $a_1, \ldots, a_k$. Ясно, что $I \subseteq a_0R$. Так как всякий конечнопорожденный ненулевой проективный идеал области целостности обратим, то для некоторого конечнопорожденного R-подмодуля I' кольца частных $Q(R)$ области R имеет место равенство $II' = R$. Тогда $1_R = a_1b_1 + \ldots + a_kb_k$, где $b_1, \ldots, b_k \in I'$.

Для каждого i имеет место равенство $b_i = \frac{c_i}{d_i}$, где c_i, d_i — взаимно простые элементы из R. Так как $\frac{a_jc_i}{d_i} \in R$ для каждых i, j, то $d_i \mid a_jc_i$ и, следовательно, $d_i \mid a_j$. Тогда $d_i \mid a_0$ для каждого i. Поскольку $a_0 = a_1(b_1a_0) + \ldots + a_k(b_ka_0) \in I$, получаем равенство $I = a_0R$. $\square$

Теорема 2.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и в коммутативной области целостности R каждый конечнопорожденный проективный идеал является главным. Пусть также в алгебре $M_n(R)$ дано разложение единицы $1 = e_1 + \cdots + e_n$ в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов. Тогда идемпотенты $e_1, \ldots, e_n$ одновременно диагонализируемы в $M_n(R)$.*

Доказательство. Пусть F — свободный модуль над кольцом R и $f_1, \ldots, f_n$ — базис F. Рассмотрим эндоморфизмы $E_1, \ldots, E_n$ модуля F, у которых матрицы относительно выбранного базиса равны соответственно $e_1, \ldots, e_n$. Так как R_R — однородный модуль, то размерность Голди модуля F равна n. Поскольку $F = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i(F)$ и $E_i(F) \neq 0$ для каждого $1 \le i \le n$, то $E_i(F)$ — однородный модуль для каждого $1 \le i \le n$. Тогда из леммы 2.1 следует, что F обладает таким базисом $f'_1, \ldots, f'_n$, что $E_i(f'_j) = 0$, $E_i(f'_i) = f'_i$ для каждых $1 \le i, j \le n$. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и R — коммутативная область целостности, в которой каждый конечнопорожденный проективный идеал является главным. Если в алгебре $K_n(R;\eta)$ дано разложение единицы $1 = e_1 + \cdots + e_n$ в сумму ненулевых ортогональных идемпотентов и $\eta \subseteq R \setminus \{0\}$, то найдутся ненулевые матрицы $A_{ij} \in K_n(R;\eta)$ такие, что $e_iK_n(R;\eta)e_j = A_{ij}R$ для каждых $1 \le i, j \le n$.*

Доказательство. Так как $\eta \subseteq R \setminus \{0\}$, то $K_n(Q(R);\eta) \cong M_n((Q(R))$, где $Q(R)$ — поле частных кольца R. Тогда из предыдущей теоремы следует, что $e_iK_n((Q(R);\eta)e_j \neq 0$ для каждых $1 \le i, j \le n$ и, следовательно, $e_iK_n(R;\eta)e_j \neq 0$. Так как размерность Голди модуля $K_n(R;\eta)_R$ равна n^2 и

$$K_n(R;\eta)_R = \bigoplus_{1 \le i,j \le n} e_iK_n(R;\eta)e_j,$$

то для каждых $1 \le i, j \le n$ R-модуль $e_iK_n(R;\eta)e_j$ однороден и тем самым согласно лемме 2.1 для некоторой матрицы $A_{ij} \in K_n(R;\eta)$ имеет место равенство $e_iK_n(R;\eta)e_j = A_{ij}R$. $\square$

2. Автоморфизмы и группа внешних автоморфизмов алгебр формальных матриц над факториальными кольцами

Пусть кольцо R коммутативно. Исследуем группу внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. Если элементы $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$ обратимы, то согласно [10, предложение 3.3] кольцо формальных матриц $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ изоморфно обыкновенному матричному кольцу того же порядка. Таким образом, существен только случай, когда хотя бы один из элементов $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R$ необратим.

В случае $\beta_1 = \ldots = \beta_n = 0$ в статье [6] было получено полное описание группы автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_n(R;0)$. В частности, имеет место следующая

Теорема 3.1 [6, следствие 15.1]. *Пусть R — неразложимое коммутативное кольцо и $n \in \mathbb{N}$. Тогда*
$$\mathrm{Out}(\mathbb{M}_n(R;0)) = \widetilde{G} \rtimes P,$$
где $\widetilde{G} \cong (U(R))^{(n-1)^2}$, $P \cong S_n$.

Далее, если не указано обратное, в качестве кольца R будем рассматривать факториальное кольцо. Пусть даны натуральное число $n \in \mathbb{N}$, факториальное кольцо R и $s \in R$. Определим отображение $\Phi : \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \to M_n(R)$ как $\Phi([a_{ij}]) = [\eta_{1ij}a_{ij}]$, где $\eta = \{\eta_{ijk}\}$ – соответствующая система множителей. Нетрудно видеть, что Φ является гомоморфизмом алгебр, причем если $\beta_1,\ldots,\beta_n \neq 0$, то этот гомоморфизм инъективный. Отметим, что образ всей алгебры под действием Φ принимает вид
$$\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)) = \begin{pmatrix} R & R & R & \cdots & R \\ \beta_1\beta_2R & R & \beta_2R & \cdots & \beta_2R \\ \beta_1\beta_3R & \beta_3R & R & \cdots & \beta_3R \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_1\beta_nR & \beta_nR & \beta_nR & \cdots & R \end{pmatrix}.$$

Обозначим матричные единицы алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ через E_{ij}. Также рассмотрим двусторонний идеал I, порожденный всеми матричными единицами E_{ij}, где $i \neq j$. Непосредственные вычисления показывают, что
$$I = \langle E_{ij} \mid i \neq j \rangle = \begin{pmatrix} \beta_1\widehat{\beta}_1(R) & R & \cdots & R \\ R & \beta_2\widehat{\beta}_2(R) & \cdots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R & R & \cdots & \beta_n\widehat{\beta}_n(R) \end{pmatrix},$$
где $\widehat{\beta}_k(R) = \sum\limits_{i=1, i\neq k}^{n} \beta_iR$.

Согласно [10, лемма 5.5] для произвольного $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ выполняется $\alpha(I) = I$. Соответственно имеет смысл рассмотреть, как устроены автоморфизмы по модулю идеала I. Так как матричные единицы E_{ii} являются идемпотентными матрицами, в первую очередь нас интересуют идемпотенты алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$.

Лемма 3.2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R$. Пусть также $e, f \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ — такие идемпотенты, что для некоторой обратимой матрицы $u \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ выполняется $ueu^{-1} = f$. Тогда $e - f \in I$.*

Доказательство. Условие $ueu^{-1} = f$ должно выполняться также и в коммутативной фактор-алгебре $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I \cong \prod\limits_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))$. $\square$

По аналогии с классическим результатом Адзумайя [17, теорема 3] нашей целью будет получить обратный к лемме 3.2 результат, но уже при определенных ограничениях на идемпотенты. Для этого потребуется предварительная лемма, аналогичная хорошо известному результату теории алгебр инцидентности.

Лемма 3.3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R \backslash \{0\}$. Если для автоморфизма $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ выполняется $\alpha(E_{ii}) = E_{ii}$ при всех $1 \le i \le n$, то автоморфизм α внутренний.*

Доказательство. Пусть $1 \le i, j \le n$. Так как $E_{ii}\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)E_{jj} = E_{ij}R$, то $\alpha(E_{ij}) = g_{ij}E_{ij}$, причем $g_{ij} \in U(R)$. Пусть $\eta = \{\eta_{ijk}\}$ — соответствующая система множителей. Тогда для любой тройки индексов i, j, k

$$g_{ik}\eta_{ijk}E_{ik} = \alpha(\eta_{ijk}E_{ik}) = \alpha(E_{ij}E_{jk}) = \alpha(E_{ij})\alpha(E_{jk}) = g_{ij}g_{jk}\eta_{ijk}E_{ik}.$$

Так как все β_i не являются делителями нуля, то $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$.

Положим $h_i = g_{1i}^{-1}$, $1 \le i \le n$. Фиксируем произвольные $1 \le i, j \le n$. В силу равенства $g_{1i}g_{ij} = g_{1j}$ получаем $g_{ij} = g_{1i}^{-1}g_{1j} = h_i^{-1}h_j$. Наконец, нетрудно видеть, что отображение α есть сопряжение на матрицу $\mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_n)$ — диагональную матрицу с элементами $h_1, \ldots, h_n$ на главной диагонали. $\square$

Эти результаты позволяют получить желаемое обращение леммы 3.2.

Предложение 3.4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R\backslash\{0\}$. Пусть также $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$. Если для каждого $1 \le i \le n$ выполняется $\alpha(E_{ii}) - E_{ii} \in I$, то автоморфизм α внутренний.*

Доказательство. В $M_n(R)$ имеет место разложение единицы

$$1 = \Phi(\alpha(E_{11})) + \Phi(\alpha(E_{22})) + \ldots + \Phi(\alpha(E_{nn})).$$

В силу теоремы 2.4 найдется обратимая матрица $U \in M_n(R)$ такая, что

$$U^{-1}\Phi(\alpha(E_{ii}))U = E_{ii},$$

или, иными словами, $\Phi(\alpha(E_{ii})) = UE_{ii}U^{-1}$ для всех $1 \le i \le n$. Покажем, что $U \in \Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$.

Положим $U = (u_{ij})$, $U^{-1} = V = (v_{ij})$. Так как $\Phi(\alpha(E_{11})) = UE_{11}V = (u_{i1}v_{1j})$ и $\alpha(E_{11}) \in E_{11} + I$, то $u_{11}v_{11} \in 1 + \beta_1\widehat{\beta}_1(R) \subseteq 1 + \beta_1R$. Таким образом, НОД$(v_{11}, \beta_1) = 1$. Из строения образа $\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ непосредственно получаем, что $u_{i1}v_{11} \in \beta_1\beta_iR$ для всех $2 \le i \le n$. Следовательно, $u_{i1} \in \beta_1R$ для всех $2 \le i \le n$.

Фиксируем какое-нибудь значение $2 \le k \le n$. Так как $\Phi(\alpha(E_{kk})) = UE_{kk}V = (u_{ik}v_{kj})$ и $\alpha(E_{kk}) \in E_{kk} + I$, то $u_{kk}v_{kk} \in 1 + \beta_kR$ и НОД$(u_{kk}, \beta_k) = 1$. Из строения образа $\Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ непосредственно получаем, что $u_{kk}v_{kj} \in \beta_kR$ для всех $1 \le j \le n$, $j \ne k$. Следовательно, $v_{kj} \in \beta_kR$ для всех $j \ne k$. Так как матрицы U, V взаимно обратны, то $U = \det(V)^{-1}(V_{ij})^T$, где под V_{ij} понимается алгебраическое дополнение к элементу v_{ij} матрицы V. Как показано выше, все элементы строки k матрицы V, кроме v_{kk}, лежат в β_kR. Отсюда алгебраические дополнения V_{ik}, $i \ne k$, также лежат в β_kR. Таким образом, $u_{ki} \in \beta_kR$ для всех i, отличных от k. В частности, $u_{k1} \in \beta_1R \cap \beta_kR$.

Покажем, что на самом деле $u_{k1} \in \beta_1\beta_kR$ для всех $2 \le k \le n$. Пусть $p \in R$ — простой элемент кольца, который делит хотя бы один из элементов $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Положим $\beta_i = p^{r_i}\gamma_i$ для всех $1 \le i \le n$, где $r_i \in \mathbb{Z}_+$ и $p \nmid \gamma_i$. Для всех $2 \le k \le n$ имеем $u_{k1}v_{11} \in \beta_1\beta_kR = p^{r_1+r_k}\gamma_1\gamma_kR$. Выделим два случая.

1. $r_1 > 0$. Так как НОД$(v_{11}, \beta_1) = 1$, то и НОД$(v_{11}, p) = 1$. Отсюда $u_{k1} \in p^{r_1+r_k}R$.

2. $r_1 = 0$. В этом случае $u_{k1} \in \beta_kR = p^{r_k}R = p^{r_1+r_k}R$.

Поэтому $p^{r_1+r_k} \mid u_{k1}$. В силу произвольности выбора p получаем $u_{k1} \in \beta_1\beta_k R$. Таким образом, $U \in \Phi(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$. Следовательно, существует матрица $W \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ такая, что $\Phi(W) = U$. В силу [5, теорема 11.1] матрица W обратима.

Через $C_{W_{-1}}$ обозначим автоморфизм $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, являющийся сопряжением на W^{-1}. В силу равенства $\alpha(E_{ii}) = WE_{ii}W^{-1}$ заключаем, что автоморфизм $C_{W^{-1}}\alpha$ удовлетворяет лемме 3.3, а значит, является внутренним, что и влечет заключение предложения. $\square$

Полученные результаты позволяют установить ограничение на группу внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$.

Замечание 3.5. Существенную роль в изучении группы внешних автоморфизмов алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ играет группа автоморфизмов фактор-алгебры

$$\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I \cong \prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R)).$$

В указанном прямом произведении могут встречаться нулевые кольца. Для краткости записи мы предполагаем, что группа автоморфизмов любого нулевого кольца одноэлементна и состоит только из тождественного отображения. В частности, если A — ненулевая R-алгебра, то $\mathrm{Aut}_R((R/R)^n \times A) \cong \mathrm{Aut}_R(A)$ для любого натурального n.

Теорема 3.6. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, кольцо R факториально и $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R\backslash\{0\}$. Тогда $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R))$ изоморфно вкладывается в группу*

$$\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I).$$

Доказательство. Пусть $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. Зададим отображение $\Theta : \mathrm{Out}_R(M) \to \mathrm{Aut}_R(M/I)$ следующим образом. Смежному классу $\mathrm{Inn}_R(M)\cdot\alpha$ сопоставим автоморфизм $\overline{\alpha}$ такой, что $\overline{\alpha}(A+I) = \alpha(A)+I$ для всех $A \in M$. Покажем, что это отображение корректно и имеет тождественное ядро.

Пусть α и β — два автоморфизма алгебры M, которые лежат в одном смежном классе относительно $\mathrm{Inn}_R(M)$: существует обратимая матрица U такая, что $\alpha(A) = U\beta(A)U^{-1}$ для всех $A \in M$. Так как равенство $\alpha(A) = U\beta(A)U^{-1}$ должно выполняться и для образов в коммутативной фактор-алгебре $M/I \cong \prod\limits_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))$, то $\alpha(A)-\beta(A) \in I$ для всех $A \in M$. Таким образом, отображение Θ корректно определено.

Пусть теперь α и β — два автоморфизма алгебры M такие, что $\alpha(A) - \beta(A) \in I$ для всех $A \in M$. В частности, это условие должно соблюдаться для матрицы $A = E_{ii}$. Следовательно, для всех i имеет место включение $\beta^{-1}\alpha(E_{ii}) - E_{ii} \in I$. По предложению 3.4 автоморфизм $\beta^{-1}\alpha$ внутренний. Отсюда автоморфизмы α и β лежат в одном смежном классе относительно $\mathrm{Inn}_R(M)$.

Более того, очевидно, что отображение Θ является гомоморфизмом. Таким образом, группа внешних автоморфизмов $\mathrm{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в группу автоморфизмов алгебры M/I. $\square$

Следствие 3.7. *Пусть дано натуральное число $n > 2$, кольцо R факториально и $\beta_1,\ldots,\beta_n \in R\backslash\{0\}$. Если идеалы $\beta_1R,\ldots,\beta_nR$ попарно комаксимальны, то все R-автоморфизмы алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ внутренние.*

Доказательство. В силу попарной комаксимальности идеалов имеем $\widehat{\beta}_1(R) = \cdots = \widehat{\beta}_n(R) = R$. Поэтому

$$\operatorname{Aut}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)/I) \cong \operatorname{Aut}_R\left(\prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i\widehat{\beta}_i(R))\right) = \operatorname{Aut}_R\left(\prod_{i=1}^{n}(R/\beta_i R)\right) \cong \{e\},$$

так как $\beta_1, \ldots, \beta_n$ попарно взаимно просты. $\square$

В случае $n = 2$ кольца формальных матриц над кольцом R это в точности кольца $K_s(R)$. В [14] было получено описание группы внешних автоморфизмов колец $K_s(R)$. В частности, в [14, лемма 5] показано, что для нетривиальных идемпотентов $e \in K_s(R)$ специального вида существует R-автоморфизм, который отображает E_{11} в e. Следующая лемма усиливает данный результат, снимая ограничения на нетривиальный идемпотент e.

Лемма 3.8. *Пусть кольцо R факториально, $0 \neq s \in R$ и $e \in K_s(R)$ — нетривиальный идемпотент. Тогда существует автоморфизм α алгебры $K_s(R)$ такой, что $\alpha(E_{11}) = e$.*

Доказательство. Положим $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e$. В силу леммы 2.5 существуют ненулевые элементы A_{ij} такие, что $e_i K_s(R) e_j = A_{ij} R$ при $1 \leq i, j \leq 2$, где $A_{11} = e_1$, $A_{22} = e_2$. Тогда для некоторых $t_{121}, t_{212} \in R$ имеем соотношения $A_{12}A_{21} = t_{121}A_{11}$, $A_{21}A_{12} = t_{212}A_{22}$. В силу ассоциативности произведения в $K_s(R)$

$$t_{121}A_{12} = (A_{12}A_{21})A_{12} = A_{12}(A_{21}A_{12}) = t_{212}A_{12}.$$

Положим $t = t_{121} = t_{212}$. Тогда

$$K_s(R) = \bigoplus e_i K_s(R) e_j = \bigoplus A_{ij} R \cong K_t(R),$$

причем указанный изоморфизм является изоморфизмом R-алгебр. Пусть $\Psi : K_s(R) \to K_t(R)$ — соответствующий изоморфизм и $\Psi(A_{ij}) = E_{ij}$. В силу [9, теорема 1] $t = vs$ для некоторого обратимого $v \in R$. Согласно [9, лемма 3] существует изоморфизм $\Phi : K_s(R) \to K_t(R)$ такой, что $\Phi(E_{11}) = E_{11}$. Следовательно, отображение $\Psi^{-1}\Phi$ является R-автоморфизмом кольца $K_s(R)$ и $\Psi^{-1}\Phi(E_{11}) = A_{11}$. $\square$

Также нам потребуется вспомогательное утверждение про факториальные кольца, доказательство которого мы приводим для полноты картины.

Лемма 3.9 [14, лемма 4]. *Пусть кольцо R факториально, $s \in R$ и $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда существуют $k \in \mathbb{N}$ и необратимые элементы $s_1, \ldots, s_k \in R$ такие, что*

(1) $s = s_1 s_2 \cdots s_k$;

(2) *кольцо R/s_iR неразложимо для всех i;*

(3) *идеалы s_iR и s_jR попарно комаксимальны для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Если кольцо R/sR неразложимо, то утверждение тривиально. В противном случае пусть $s = up_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}$ — разложение s на попарно не ассоциированные простые множители. Неразложимость кольца R/sR равносильна отсутствию в R/sR нетривиальных идемпотентов. Предположим, что элемент $t + sR \in R/sR$ является нетривиальным идемпотентом, где $t \in R$. Тогда $t(t-1) \in sR$. Так как элементы t и $t-1$ не могут иметь общих необратимых множителей, то элементу t соответствует разбиение множества $\{1, \ldots, m\} = I \sqcup J$

такое, что

$$t = \Big(\prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i}\Big)t_1 = s_1t_1, \quad 1-t = \Big(\prod_{j\in J} p_j^{\alpha_j}\Big)t_2 = s_2t_2, \quad t_1,t_2\in R.$$

В частности, идеалы s_1R и s_2R комаксимальны в R. Более того, s_1 и s_2 отличны от s и необратимы в силу нетривиальности идемпотента $t+sR$. По китайской теореме об остатках $R/sR \cong R/s_1R\times R/s_2R$.

Повторим данные рассуждения для колец R/s_1R и R/s_2R. Остается заметить, что процесс разбиения s на множители когда-либо должен завершиться, так как ему соответствует дробление множества $\{1,\ldots,m\}$ в дизъюнктное объединение непустых множеств. $\square$

Пусть s — ненулевой необратимый элемент факториального кольца R и $M=\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s. Введем на множестве $\{1,\ldots,n\}$ отношение эквивалентности: $i\sim j \Leftrightarrow \beta_i=\beta_j$. Класс эквивалентности элемента $a\in\{1,\ldots,n\}$ будем обозначать через $[a]$. Через $B_{[a]}$ обозначим множество матриц из M со следующим свойством: если компонента (i,j) матрицы отлична от нуля, то $i,j\in[a]$. Если элементы $\beta_1,\ldots,\beta_n$ упорядочены с учетом отношения эквивалентности, то данное отношение индуцирует блочный вид на M.

Пусть α — R-автоморфизм алгебры M. Будем говорить, что α *согласован с блочной структурой алгебры* M, если для каждого $1\le j\le n$ выполняется $\alpha(E_{jj})\in B_{[j]}+I$.

Предложение 3.10. *Пусть кольцо R факториально, $n\ge 3$, $s\in R$, причем $s\notin\{0\}\cup U(R)$ и фактор-кольцо R/sR неразложимо. Пусть также $M=\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s. Тогда любой R-автоморфизм алгебры M согласован с блочной структурой алгебры M.*

Доказательство. Фиксируем произвольный R-автоморфизм α алгебры M. Не нарушая общности, можно считать что показатели степени s в последовательности $\beta_1,\ldots,\beta_n$ расположены по возрастанию. А именно, пусть $\beta_k=s^{\gamma_k}$ и $\gamma_1\le\gamma_2\le\ldots\le\gamma_n$. Сгруппируем показатели по совпадающим значениям:

$$q_1 := \gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_{n_1}, \quad q_2 := \gamma_{n_1+1}=\gamma_{n_1+2}=\ldots=\gamma_{n_1+n_2},$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$q_m := \gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+1}=\gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+2}=\ldots=\gamma_{(n_1+\ldots+n_{m-1})+n_m},$$

где $\sum\limits_{j=1}^m n_j=n$ и $q_1<q_2<\ldots<q_m$. В частности, $[1]=\{1,\ldots,n_1\}$, $\beta_1\widehat{\beta}_1R=\beta_1\beta_2R$ и $\beta_i\widehat{\beta}_iR=\beta_i\beta_1R$ для всех $2\le i\le n$.

Рассмотрим фактор-кольцо

$$M/I\cong R/(\beta_1\beta_2R)\times\left(\prod_{i=2}^n R/(\beta_i\beta_1R)\right).$$

Определим целое неотрицательное число k следующим образом. Если $n_1>1$ и β_1 обратим, то $k=n_1$. Иначе $k=0$. Нетрудно видеть, что для каждого $1\le i\le k$ имеет место включение $E_{ii}\in I$. Так как $\alpha(I)=I$, то $\alpha(E_{ii})\in E_{ii}+I$ для каждого $1\le i\le k$. В силу неразложимости кольца R/sR неразложимо и кольцо $R/(\beta_i\beta_1 R)$ для всех $i > k$. Поэтому кольцо M/I содержит только единственный набор из $n-k$ попарно ортогональных идемпотентов. Следовательно, для некоторой перестановки $\pi \in S_n$ выполняется $\alpha(E_{ii}) \in E_{\pi(i)\pi(i)} + I$ для всех $1 \le i \le n$. Выделим два случая.

Если $n_1 > 1$, то

$$M/I \cong \left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_m} R/(s^{q_m+q_1}R)\right).$$

Для любых различных $1 \le a < b \le m$ имеем $\operatorname{Hom}_R(R/(s^{q_a+q_1}R), R/(s^{q_b+q_1}R)) = \varnothing$. Поэтому автоморфизм α согласован с блочной структурой алгебры M.

Пусть теперь $n_1 = 1$. Тогда среди элементов $\beta_1, \ldots, \beta_n$ обратимым может быть только β_1,

$$M/I \cong R/(s^{q_1+q_2}R) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_k} R/(s^{q_k+q_1}R)\right).$$

Отсюда для каждого $1 \le j \le n$ выполняется импликация: если $j \notin [1], [2]$, то $\alpha(E_{jj}) \in B_{[j]} + I$. Если $\pi(1) = 1$, то и для $j \in [1], [2]$ выполняется $\alpha(E_{jj}) \in B_{[j]} + I$. Предположим теперь, что $\pi(1) \ne 1$. Положим $\alpha(E_{ii}) = E_{\pi(i)\pi(i)} + I_{\pi(i)\pi(i)}$, где $I_{\pi(i)\pi(i)} \in I$ для всех $1 \le i \le n$. Пусть также $b = \pi^{-1}(1)$. Так как перестановка π нетождественная и $n \ge 3$, то, очевидно, найдется число $1 \le a \le n$ такое, что $a \ne b$ и $\gamma_a + \gamma_b > \gamma_{\pi(a)} + \gamma_{\pi(b)}$. Фиксируем значение a.

Так как для любых различных $1 \le i, j \le n$ имеем $E_{ij}R = E_{ii}ME_{jj}$, то

$$\alpha(E_{ij})R = (E_{\pi(i)\pi(i)} + I_{\pi(i)\pi(i)})M(E_{\pi(j)\pi(j)} + I_{\pi(j)\pi(j)}).$$

В частности,

$$\begin{aligned}\alpha(E_{ab})R \ni (E_{\pi(a)\pi(a)} &+ I_{\pi(a)\pi(a)})E_{\pi(a)\pi(b)}(E_{\pi(b)\pi(b)} + I_{\pi(b)\pi(b)}) \\ &= E_{\pi(a)1} + E_{\pi(a)1}I_{11} + I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}I_{11}. \quad (*)\end{aligned}$$

Все элементы на главных диагоналях матриц $I_{\pi(a)\pi(a)}$ и I_{11} лежат в sR. Поэтому $I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}, I_{\pi(a)\pi(a)}E_{\pi(a)1}I_{11} \in sM$. Если $\beta_1 \notin U(R)$, то и $E_{\pi(a)1}I_{11} \in sM$. В общем случае в матрице $E_{\pi(a)1}I_{11}$ в sR лежат элемент на позиции $(\pi(a), 1)$, а также все элементы строк с номерами, отличными от $\pi(a)$ (так как это нулевые строки). Отсюда следует, что правая часть $(*)$ отлична от нуля и не лежит в sM. С другой стороны, эта сумма должна иметь вид $\alpha(E_{ab})r$ для некоторого $r \in R$. Так как $\alpha(E_{ab})r \notin sM$ и элемент в позиции $(\pi(a), 1)$ матрицы $\alpha(E_{ab})r$ не имеет общих необратимых делителей с s, то существует $u_{\pi(a)1} \in R$ такой, что

$$\alpha(E_{ab}) = u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)1},$$

где $I_{\pi(a)1} \in I$. Более того, в матрице $I_{\pi(a)1}$ не лежать в sR могут только элементы на позициях $(\pi(a), 2), \ldots, (\pi(a), n)$. Также $u_{\pi(a)1}$ не имеет общих с s необратимых делителей.

Аналогично

$$\alpha(E_{ba}) = u_{1\pi(a)}E_{1\pi(a)} + I_{1\pi(a)},$$

где $I_{1\pi(a)} \in I$ и в матрице $I_{1\pi(a)}$ не лежать в sR могут только элементы на позициях $(2, \pi(a)), \ldots, (n, \pi(a))$. Элемент $u_{1\pi(a)}$ не имеет общих с s необратимых делителей.

В алгебре M выполняется тождество $E_{ab}E_{ba} = s^{\gamma_a+\gamma_b}E_{aa}$. Отсюда

$$\begin{aligned}s^{\gamma_a+\gamma_b}(E_{\pi(a)\pi(a)} + I_{\pi(a)\pi(a)}) &= \alpha(s^{\gamma_a+\gamma_b}E_{aa}) = \alpha(E_{ab}E_{ba}) \\ &= (u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1} + I_{\pi(a)1})(u_{1\pi(a)}E_{1\pi(a)} + I_{1\pi(a)}) \\ &= u_{\pi(a)1}u_{1\pi(a)}s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1}E_{\pi(a)\pi(a)} + u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)} \\ &\quad + u_{1\pi(a)}I_{\pi(a)1}E_{1\pi(a)} + I_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}. \qquad (**)\end{aligned}$$

По определению идеала I элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ матрицы $I_{\pi(a)\pi(a)}$ лежит в линейной комбинации над R некоторых произведений вида $\beta_i\beta_j$, где $i < j$. В силу минимальности показателей γ_1, γ_2 имеем $\beta_i\beta_j \in s^{\gamma_1+\gamma_2}R$ для всех $i < j$. Таким образом, в произведении $s^{\gamma_a+\gamma_b}(E_{\pi(a)\pi(a)} + I_{\pi(a)\pi(a)})$ элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ лежит в $s^{\gamma_a+\gamma_b} + s^{\gamma_a+\gamma_b+\gamma_1+\gamma_2}R$. Рассмотрим элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в правой части $(**)$. В $u_{\pi(a)1}E_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}$ и $u_{1\pi(a)}I_{\pi(a)1}E_{1\pi(a)}$ этот элемент лежит в $\beta_{\pi(a)}\beta_1 sR = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$, так как в матрицах $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$ элементы в позициях $(\pi(a), 1)$ и $(1, \pi(a))$ соответственно лежат в sR. Рассмотрим элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в $I_{\pi(a)1}I_{1\pi(a)}$. Из определения матричного произведения для слагаемых, составляющих данный элемент, возможны два случая.

(1) Слагаемое получено произведением компонент $(\pi(a), \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$. Так как данные матрицы принадлежат I, то в каждой из матриц элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ лежит в линейной комбинации над R произведений вида $\beta_{\pi(a)}\beta_i$, $i \neq \pi(a)$. Так как $\pi(a) > 1$, каждое произведение $\beta_{\pi(a)}\beta_i$ лежит в $\beta_{\pi(a)}\beta_1 R$. Таким образом, произведение компонент $(\pi(a), \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$ лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_1)^2R = s^{(\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1)+(\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1)}R$.

(2) Слагаемое получено произведением компонент $(\pi(a), k)$ и $(k, \pi(a))$ матриц $I_{\pi(a)1}$ и $I_{1\pi(a)}$, где $k \neq \pi(a)$.

Если $k = 1$, то и сами компоненты $(\pi(a), 1)$ и $(1, \pi(a))$, как мы видели ранее, лежат в sR. Поэтому соответствующее произведению слагаемое лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_1)s^2R = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+2}R$.

Если $k > 1$, то соответствующее слагаемое лежит в $(\beta_{\pi(a)}\beta_k)R = s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_k}R$. Так как $n_1 = 1$, то $\gamma_k > \gamma_1$. Следовательно, сумма по всем $k \neq \pi(a)$ лежит в $s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$.

По построению $\pi(a) > 1$, а значит, $\gamma_{\pi(a)} > \gamma_1$. Таким образом, вне зависимости от того, отлично от нуля значение γ_1 или нет, имеет место неравенство

$$\min((\gamma_{\pi(a)} + \gamma_1) + (\gamma_{\pi(a)} + \gamma_1), \gamma_{\pi(a)} + \gamma_1 + 1) \geq \gamma_{\pi(a)} + \gamma_1 + 1.$$

Отсюда элемент в позиции $(\pi(a), \pi(a))$ в правой части $(**)$ лежит в

$$u_{\pi(a)1}u_{1\pi(a)}s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1} + s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R.$$

В частности, данный элемент не лежит в $s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$. С другой стороны, ранее мы видели, что этот элемент лежит в $s^{\gamma_a+\gamma_b} + s^{\gamma_a+\gamma_b+\gamma_1+\gamma_2}R \subseteq s^{\gamma_{\pi(a)}+\gamma_1+1}R$. Полученное противоречие гарантирует, что $\pi(1) = 1$ при $n_1 = 1$, что и завершает доказательство предложения. □

Следствие 3.11. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и фактор-кольцо R/sR неразложимо. Тогда для любых целых неотрицательных попарно различных $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ все R-автоморфизмы алгебры $M = \mathbb{M}_{s^{\gamma_1},\ldots,s^{\gamma_n}}(R)$ внутренние.*

Доказательство напрямую следует из предложений 3.4 и 3.10. □

Пример 3.12. Пусть кольцо R факториально, s — простой элемент кольца R и $M = \mathbb{M}_{s,s^2,s^3}(R)$. По теореме 3.6 группа $\operatorname{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в $\operatorname{Aut}_R\left(R/s^3R \times R/s^3R \times R/s^4R\right) \cong S_2$. Однако все R-автоморфизмы алгебры M внутренние по следствию 3.11. Таким образом, вложение из теоремы 3.6 не обязано быть сюръективным.

Для уточнения результата теоремы 3.6 опишем группу внешних автоморфизмов алгебры $M_n(R;s)$. Далее в предложении 3.13 будем ассоциировать $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ с образом в $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}(R)$ при вложении $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Матрицу в правой части будем обозначать через $A \oplus (0)_{n-2}$.

Предложение 3.13. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 2$ и $0 \neq \beta_1, \dots, \beta_n \in R$. Пусть также $e \in \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ — нетривиальный идемпотент. Если $\beta_1 = \beta_2$, то существует R-автоморфизм α алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n}(R)$ такой, что*

(1) *$\alpha(E_{kk}) = E_{kk}$ для всех $3 \leq k \leq n$;*

(2) *$\alpha(E_{11}) = e \oplus (0)_{n-2}$, $\alpha(E_{22}) = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$.*

Доказательство. Положим $s = \beta_1 = \beta_2$. При $n = 2$ утверждение предложения следует из леммы 3.8 и изоморфизма $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R) \cong K_{\beta_1\beta_2}(R)$. Зададим автоморфизм α явно. Так как $e \neq 0, I_2$, то найдутся $a, x, y \in R$ такие, что $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$ и $a(1-a) = s^2xy$. Несложно заметить, что в силу факториальности кольца R найдутся элементы $a_{s^2}, a_x, a_y \in R$ и $(1-a)_{s^2}, (1-a)_x, (1-a)_y \in R$ такие, что

$$a = a_{s^2}a_xa_y, \quad (1-a) = (1-a)_{s^2}(1-a)_x(1-a)_y,$$
$$x = a_x(1-a)_x, \quad y = a_y(1-a)_y, \quad s^2 = a_{s^2}(1-a)_{s^2}.$$

Более того, в силу того, что элементы a и $(1-a)$ не могут иметь общих необратимых делителей, не нарушая общности можно считать, что $a_{s^2} = (a_s)^2$ и $(1-a)_{s^2} = ((1-a)_s)^2$ для некоторых $a_s, (1-a)_s \in R$. Также можно считать, что $a_s(1-a)_s = s$.

В силу леммы 2.5 существует ненулевой элемент $A_{12} \in \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ такой, что $e\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)(1-e) = A_{12}R$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$eE_{11}(1-e) = \begin{pmatrix} a(1-a) & -ax \\ y(1-a) & -s^2xy \end{pmatrix}$$
$$= a_y(1-a)_x \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix},$$
$$eE_{22}(1-e) = -eE_{11}(1-e),$$
$$eE_{12}(1-e) = \begin{pmatrix} -s^2ya & a^2 \\ -s^2y^2 & s^2ya \end{pmatrix} = -a_s^2a_y^2 \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix},$$
$$eE_{21}(1-e) = \begin{pmatrix} s^2x(1-a) & -s^2x^2 \\ (1-a)^2 & -s^2x(1-a) \end{pmatrix}$$
$$= (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \begin{pmatrix} a_x(1-a)_ys^2 & -a_s^2a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_ys^2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$a_y(1-a)_x \cdot (2a_x(1-a)_ys^2) + a_s^2a_y^2 \cdot \left(a_s^2a_x^2\right) + (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \cdot \left((1-a)_s^2(1-a)_y^2\right)$$
$$= 2s^2xy + a^2 + (1-a)^2 = 2a(1-a) + a^2 + (1-a)^2 = 1.$$

Поэтому матрица
$$\begin{pmatrix} a_x(1-a)_y s^2 & -a_s^2 a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_y s^2 \end{pmatrix}$$
тоже лежит в $e\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)(1-e)$. Положим
$$A_{12} = \begin{pmatrix} a_x(1-a)_y s^2 & -a_s^2 a_x^2 \\ (1-a)_s^2(1-a)_y^2 & -a_x(1-a)_y s^2 \end{pmatrix}.$$
Аналогично показывается, что для матрицы
$$A_{21} = \begin{pmatrix} (1-a)_x a_y s^2 & (1-a)_s^2(1-a)_x^2 \\ a_s^2 a_y^2 & (1-a)_x a_y s^2 \end{pmatrix}$$
имеет место равенство $(1-e)\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)e = A_{21}R$.

Непосредственные вычисления показывают, что
$$A_{12}A_{21} = s^2 e \quad \text{и} \quad A_{21}A_{12} = s^2(I_2 - e).$$
Поэтому R-линейное отображение $\alpha : \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R) \to \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$ такое, что
$$\alpha(E_{11}) = e, \quad \alpha(E_{12}) = A_{12}, \quad \alpha(E_{21}) = A_{21}, \quad \alpha(E_{22}) = I_2 - e,$$
будет R-автоморфизмом.

Пусть теперь $n \geq 3$ и $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(R)$. Положим $B_{11} = e \oplus (0)_{n-2}$, $B_{12} = A_{12} \oplus (0)_{n-2}$, $B_{21} = A_{21} \oplus (0)_{n-2}$, $B_{22} = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$ и $B_{ij} = E_{ij}$ для всех $3 \leq i,j \leq n$. Так как $1 = B_{11} + B_{22} + \ldots + B_{nn}$ является разложением единицы в сумму n ортогональных идемпотентов, то для каждого элемента $3 \leq k \leq n$ существуют ненулевые матрицы $B_{1k}, B_{2k}, B_{k1}, B_{k2} \in M$ такие, что $B_{11}ME_{kk} = B_{1k}R$, $B_{22}ME_{kk} = B_{2k}R$, $E_{kk}MB_{11} = B_{k1}R$ и $E_{kk}MB_{22} = B_{k2}R$. Зададим эти матрицы явно. Заметим, что
$$B_{11}ME_{kk} = B_{11}(E_{1k}R + E_{2k}R)E_{kk} = B_{11}(E_{1k}R + E_{2k}R),$$
$$B_{11}E_{1k} = aE_{1k} + syE_{2k} = a_s a_y(a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}),$$
$$B_{11}E_{2k} = sxE_{1k} + (1-a)E_{2k} = (1-a)_s(1-a)_x(a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}).$$
Так как
$$a_s a_y \cdot (a_s a_x) + (1-a)_s(1-a)_x \cdot ((1-a)_s(1-a)_y) = a + (1-a) = 1,$$
то можно положить
$$B_{1k} = a_s a_x E_{1k} + (1-a)_s(1-a)_y E_{2k}.$$
Аналогично определяем
$$B_{2k} = (1-a)_s(1-a)_x E_{1k} - a_s a_y E_{2k},$$
$$B_{k1} = a_s a_y E_{k1} + (1-a)_s(1-a)_x E_{k2},$$
$$B_{k2} = (1-a)_s(1-a)_y E_{k1} - a_s a_x E_{k2}.$$

Прямые вычисления показывают, что R-линейное отображение
$$\gamma : M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \to M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$$
такое, что $\gamma(E_{ij}) = B_{ij}$ для всех $1 \leq i,j \leq n$, является гомоморфизмом. Заметим, для всех $1 \leq i,j \leq n$ выполняется $B_{ii}M_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)B_{jj} = B_{ij}R$. Поэтому гомоморфизм γ является автоморфизмом. $\square$

Теорема 3.14. *Пусть $n \geq 2$, кольцо R факториально и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Тогда*
$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cong (S_n)^k,$$
где k определяется, как в лемме 3.9.

Доказательство. Для $n = 2$ утверждение следует из теоремы 1.3. Поэтому можно считать, что $n \geq 3$.

В силу леммы 3.9 найдутся попарно взаимно простые элементы $s_1, \ldots, s_k \in R$ такие, что $s = s_1 \cdots s_k$, кольца $R/s_1^2R, \ldots, R/s_k^2R$ неразложимы и идеалы $s_1^2R, \ldots, s_k^2R$ попарно комаксимальны. По китайской теореме об остатках имеет место изоморфизм
$$R/s^2R = R/s_1^2R \times R/s_2^2R \times \cdots \times R/s_k^2R.$$

В силу теоремы 3.6 группа $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$ изоморфно вкладывается в
$$\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I) \cong \mathrm{Aut}_R((R/s^2R)^n) \cong \mathrm{Aut}_R\left[\left(\prod_{i=1}^{k} R/s_i^2R\right)^n\right] \cong S_n^k.$$

Пусть $\Theta : \mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \to \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I)$ — введенное в доказательстве теоремы 3.6 отображение. Покажем что Θ сюръективно. Возьмем $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$. Под действием стандартного изоморфизма $\mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s)/I) \cong \mathrm{Aut}_R((R/s^2R)^n)$ элемент $\Theta(\mathrm{Inn}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cdot \varphi)$ переходит в автоморфизм $\widehat{\varphi}$ такой, что
$$\widehat{\varphi}((r_1 + s^2R), \ldots, (r_n + s^2R)) = (\varphi(A)_{11} + s^2R, \ldots, \varphi(A)_{nn} + s^2R),$$
где $A = \sum\limits_{i=1}^{n} r_iE_{ii}$, а под $\varphi(A)_{ij}$ понимается (i,j)-компонента матрицы $\varphi(A)$. Очевидно, что R-автоморфизмы алгебры $(R/s^2R)^n$ просто переставляют местами компоненты R/s_i^2R. Учитывая, что группа S_n порождается транспозициями, для доказательства сюръективности достаточно показать существование автоморфизма φ алгебры $\mathbb{M}_n(R;s)$, для которого автоморфизм $\widehat{\varphi}$ переставляет компоненты R/s_1^2R у двух копий R/s^2R, а на всех остальных компонентах действует тождественно.

По китайской теореме об остатках найдется элемент $a \in R$ такой, что $a + s_1^2R = 0 + s_1^2R$ и $a + s_i^2R = 1 + s_i^2R$ для всех $2 \leq i \leq k$. Поэтому достаточно построить автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$, который переводит $E_{11} + I$ в $\mathrm{diag}(a, 1-a, 0, \ldots, 0) + I$, $E_{22} + I$ в $\mathrm{diag}(1-a, a, 0, \ldots, 0) + I$, а $E_{ii} + I$ переводит в себя для всех $3 \leq i \leq n$.

Так как по построению $a(1-a) \in s^2R$, то существует элемент $x \in R$ такой, что $a(1-a) = s^2x$. Тогда матрица $e = \begin{pmatrix} a & x \\ 1 & (1-a) \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_2(R;s)$ будет идемпотентом. В силу предложения 3.13 найдется автоморфизм $\varphi \in \mathrm{Aut}_R(\mathbb{M}_n(R;s))$ такой, что

(1) $\varphi(E_{kk}) = E_{kk}$ при $k > 2$;

(2) $\varphi(E_{11}) = e \oplus (0)_{n-2}$, $\varphi(E_{22}) = (I_2 - e) \oplus (0)_{n-2}$.

Очевидно, что автоморфизм φ искомый. $\square$

Следствие 3.15. *Пусть $n \geq 2$, кольцо R является областью главных идеалов и $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $s = up_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ — разложение s на попарно не ассоциированные простые элементы. Тогда*
$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_n(R;s)) \cong (S_n)^k.$$

Заметим, что в предложении 3.4 фактически доказывается следующий факт: если в $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ имеется разложение единицы $1 = e_1 + \ldots + e_n$ такое, что каждый идемпотент e_i отличается от E_{ii} только на элемент из I, то для некоторой обратимой матрицы $U \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ имеет место равенство $e_i = UE_{ii}U^{-1}$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Это позволяет доказать теорему об изоморфизме для $\mathbb{M}_n(R;s)$, пользуясь знанием группы внешних автоморфизмов.

Теорема 3.16. *Пусть кольцо R факториально, $s \in R$, $n \in \mathbb{N}$. Алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(R;s)$ и $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ изоморфны в точности тогда, когда $\eta_{ijk} = u_{ijk}s^{\delta_{ijk}}$ для всех $1 \leq i,j,k \leq n$, где $u_{ijk} \in U(R)$.*

Доказательство. Если $s \in U(R)$, то утверждение теоремы вытекает из [10, предложение 3.3]. Если $s = 0$, то утверждение теоремы вытекает из [12, лемма 9.2]. Таким образом, достаточно ограничиться случаем $s \notin U(R) \cup \{0\}$.

($\Leftarrow$) Пусть $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ такое кольцо формальных матриц, что $\eta_{ijk} = u_{ijk}s^{\delta_{ijk}}$, где $u_{ijk} \in U(R)$ для всех $1 \leq i,j,k \leq n$. Нетрудно видеть, что набор u_{ijk} удовлетворяет условию: $u_{ijk}u_{ikl} = u_{ijl}u_{jkl}$ для всех $1 \leq i,j,k,l \leq n$.

Положим $g_{ij} = u_{1ij}$, $1 \leq i,j \leq n$. Тогда

$$g_{ij}g_{jk}s^{\delta_{ijk}} = u_{1ij}u_{1jk}s^{\delta_{ijk}} = u_{1ik}u_{ijk}s^{\delta_{ijk}} = g_{ik}\eta_{ijk}.$$

Таким образом, отображение $\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$, определенное по правилу $(a_{ij}) \mapsto (g_{ij}a_{ij})$, будет изоморфизмом.

($\Rightarrow$) Пусть $\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$ — изоморфизм. Через E_{ij} и F_{ij} обозначим матричные единицы колец $\mathbb{M}_n(R;s)$ и $\mathbb{M}_n(R;\eta)$ соответственно. Пусть также $I = \langle E_{ij} \mid i \neq j \rangle$ — идеал в $\mathbb{M}_n(R;s)$, $\Psi(F_{11}), \ldots, \Psi(F_{nn})$ — набор из n взаимно ортогональных ненулевых идемпотентов в $\mathbb{M}_n(R;s)$. Заметим, что ни один из них не может лежать в I. В самом деле, пусть $e \in I$ — идемпотент. Так как элементы главной диагонали матриц из I лежат в sR, то $e = e^2 \in s\mathbb{M}_n(R;s)$. Тем более для любого натурального k имеем $e = e^{2k} \in s^k\mathbb{M}_n(R;s)$. В силу факториальности R это возможно, только если $e = 0$.

Пусть $s = s_1s_2\cdots s_k$ — разбиение из леммы 3.9. Для каждого $1 \leq t \leq k$ можно рассмотреть идеал $I_{s_t} \subseteq \mathbb{M}_n(R;s)$, состоящий из всех матриц, элементы которых на главной диагонали лежат в s_tR. Дублируя рассуждения выше, получаем, что идемпотенты $\Psi(F_{11}), \ldots, \Psi(F_{nn})$ не лежат в s_tR. Так как фактор-алгебра $\mathbb{M}_n(R;s)/I_{s_t} \cong \prod\limits_{i=1}^{n} R/s_tR$ содержит единственный набор из n попарно ортогональных ненулевых идемпотентов, то $\Psi(F_{11}) + I_{s_t}, \ldots, \Psi(F_{nn}) + I_{s_t}$ совпадают с ними с точностью до некоторой перестановки.

Таким образом, можно заключить, что отображение $E_{ii} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ задает R-автоморфизм $\mathbb{M}_n(R;s)/I$. В силу теоремы 3.14 и [10, лемма 5.5] найдется автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n(R;s))$ такой, что $\alpha(E_{ii}) - \Psi(F_{ii}) \in I$.

Композиция $\alpha^{-1}\Psi : \mathbb{M}_n(R;\eta) \to \mathbb{M}_n(R;s)$ будет изоморфизмом, для которого $\alpha^{-1}\Psi(F_{ii}) - E_{ii} \in I$. Рассуждая, как и в доказательстве предложения 3.4, получаем, что $C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ii}) = E_{ii}$ для некоторой обратимой матрицы $U \in U(\mathbb{M}_n(R;s))$, где C_U — соответствующий U внутренний автоморфизм.

Так как элемент E_{ij}, $i \neq j$, характеризуется тем, что $E_{ii}M_n(R;s)E_{jj} = E_{ij}R$, то изоморфизм $C_U\alpha^{-1}\Psi$ переводит элемент F_{ij} в $g_{ij}E_{ij}$, где $g_{ij} \in U(R)$ в силу сюръективности. Остается заметить, что

$$\begin{aligned}\eta_{ijk}g_{ik}E_{ik} = \eta_{ijk}C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ik}) &= C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ij}F_{jk})\\ &= C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{ij}) \cdot C_U\alpha^{-1}\Psi(F_{jk}) = g_{ij}g_{jk}s^{\delta_{ijk}}E_{ik}. \quad \square\end{aligned}$$

Следствие 3.17. *Пусть $s \in \mathbb{Z}$ и $n \geq 2$. Алгебры формальных матриц $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}; s)$ и $\mathbb{M}_n(\mathbb{Z}; \eta)$ изоморфны в точности тогда, когда $\eta_{ijk} = \pm s^{\delta_{ijk}}$ для всех $1 \leq i, j, k \leq n$.*

Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, где $\beta_k = s^{\gamma_k}$, $\gamma_k \in \mathbb{Z}_+$ для каждого $1 \leq k \leq n$. Через $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$ обозначим все попарно различные значения, которые могут принимать элементы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$. При этом для каждого $1 \leq j \leq t$ элемент q_j встречается в последовательности $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ ровно $n_j \in \mathbb{N}$ раз и $\sum\limits_{j=1}^{t} n_j = n$. Набор $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ будем называть набором показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности.

Теорема 3.18. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$. Пусть также $\beta_1, \ldots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s и $\{(q_1, n_1), \ldots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с учетом кратности и $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$. Если $n_1 > 1$, то*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)) \cong \begin{cases} (S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t})^k, & \text{если } q_1 > 0, \\ (S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_t})^k, & \text{если } q_1 = 0. \end{cases}$$

где k определяется, как в лемме 3.9.

Доказательство. Положим $M = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$. В силу леммы 3.9 найдутся попарно взаимно простые элементы $s_1, \ldots, s_k \in R$ такие, что $s = s_1 \cdots s_k$, кольца $R/s_1R, \ldots, R/s_kR$ неразложимы и идеалы $s_1R, \ldots, s_kR$ попарно комаксимальны. Очевидно, что для любого натурального m кольца $R/s_1^mR, \ldots, R/s_k^mR$ также неразложимы и идеалы $s_1^mR, \ldots, s_k^mR$ попарно комаксимальны.

В силу теоремы 3.6 группа $\mathrm{Out}_R(M)$ изоморфно вкладывается в $\mathrm{Aut}_R(M/I)$,

$$M/I \cong \left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots \times \left(\prod_{j=1}^{n_t} R/(s^{q_k+q_1}R)\right).$$

По китайской теореме об остатках для каждого $1 \leq i \leq k$ имеет место изоморфизм

$$R/(s^{q_i+q_1}R) = R/(s_1^{q_i+q_1}R) \times R/\big(s_2^{q_i+q_1}R\big) \times \cdots \times R/\big(s_k^{q_i+q_1}R\big).$$

Так как числа $q_1 + q_1, q_2 + q_1, \ldots, q_k + q_1$ попарно различны, то

$$\mathrm{Aut}_R(M/I) \cong \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_1} R/(s^{q_1+q_1}R)\right) \times \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_2} R/(s^{q_2+q_1}R)\right) \times \cdots$$
$$\times \mathrm{Aut}_R\left(\prod_{j=1}^{n_t} R/(s^{q_k+q_1}R)\right) \cong G \times S_{n_2}^k \times \cdots S_{n_t}^k,$$

где $G = S_{n_1}^k$, если $q_1 > 0$, и $G = \{e\}$ иначе.

Пусть $\Phi : \mathrm{Aut}_R(M/I) \to G \times S_{n_2}^k \times \cdots S_{n_t}^k$ — соответствующий изоморфизм и $\Theta :\ \mathrm{Out}_R(M) \to \mathrm{Aut}_R(M/I)$ — введенное в доказательстве теоремы 3.6 отображение. Фиксируем индекс $1 \leq i \leq k$. Если $n_i = 1$, то группа S_{n_i} одноэлементна. Если $n_i > 1$ и $q_i > 0$, то в силу изоморфизма $\mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\pi(\beta_1),\ldots,\pi(\beta_n)}(R)$

для произвольного $\pi \in S_n$, как и при доказательстве теоремы 3.14, получаем, что в образе $\Phi \cong \Theta$ целиком содержится подгруппа

$$1_{n_1} \times 1_{n_2} \times \cdots \times 1_{n_{i-1}} \times S_{n_i}^k \times 1_{n_{i+1}} \times \cdots \times 1_{n_t},$$

где под 1_{n_j} понимается единица группы $S_{n_j}^k$ (или единица группы G при $j = 1$). Следовательно, $\mathrm{Out}_R(M) \cong \mathrm{Aut}_R(M/I)$. $\square$

Замечание 3.19. Пусть элементы $\beta_1, \dots, \beta_n$ заданы, как в условии теоремы 3.18, $\{(q_1, n_1), \dots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \dots, \beta_n$ с учетом кратности, $q_1 < q_2 < \ldots < q_t$ и $n_1 = 1$. Следуя доказательству теоремы 3.18, легко показать, что группа $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R))$ изоморфно вкладывается в $(S_{n_2+1} \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k$. Через H обозначим подгруппу S_{n_2+1}, состоящую из перестановок, которые оставляют элемент 1 неподвижным. Тогда образ $\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R))$ при вложении выше содержит $(H \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k \cong (S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times \cdots \times S_{n_t})^k$. Неизвестно, будет ли образ изоморфен данному произведению. Однако если кольцо R/sR неразложимо, то изоморфизм будет иметь место в силу предложения 3.10.

Следствие 3.20. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и кольцо R/sR неразложимо. Пусть также $\beta_1, \dots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s и $\{(q_1, n_1), \dots, (q_t, n_t)\}$ — набор показателей s в последовательности $\beta_1, \dots, \beta_n$ с учетом кратности. Тогда*

$$\mathrm{Out}_R(\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)) \cong \begin{cases} S_{n_1} \times \cdots \times S_{n_t}, & \text{если } q_1 > 0, \\ S_{n_2} \times \cdots \times S_{n_t}, & \text{если } q_1 = 0. \end{cases}$$

Пусть в условиях следствия 3.20 среди элементов $\beta_1, \dots, \beta_n$ имеется не более одного обратимого элемента. Тогда фактор-алгебра $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)/I$ содержит единственный набор из n попарно ортогональных ненулевых идемпотентов. Поэтому, повторяя доказательство теоремы 3.16, можно получить аналогичную теорему об изоморфизме. В доказательство потребуется внести только одно изменение. Два набора взаимно ортогональных идемпотентов $E_{11}, \dots, E_{nn}$ и $\Psi(F_{11}), \dots \Psi(F_{nn})$ теперь позволяют задать R-автоморфизм вида $E_{\pi(i)\pi(i)} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ для некоторой перестановки $\pi \in S_n$.

Теорема 3.21. *Пусть кольцо R факториально, $n \geq 3$, $s \in R$, причем $s \notin \{0\} \cup U(R)$ и кольцо R/sR неразложимо. Пусть также набор $\beta_1, \dots, \beta_n \in R$, где каждый элемент β_i представляет из себя целую неотрицательную степень элемента s, содержит не более одного обратимого элемента. Алгебры $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ и $\mathbb{M}_n(R; \eta)$ изоморфны в точности тогда, когда для некоторой перестановки $\pi \in S_n$:*

(1) *$\eta_{ijk} = u_{ijk}\beta_{\pi(j)}$ для всех попарно различных $1 \leq i, j, k \leq n$, где $u_{ijk} \in U(R)$;*

(2) *$\eta_{iji} = u_{iji}\beta_{\pi(i)}\beta_{\pi(j)}$ для всех попарно различных $1 \leq i, j \leq n$, где $u_{iji} \in U(R)$.*

Из теоремы 3.18 напрямую получить аналогичный результат не представляется возможным. Разложимость кольца R/sR вместе с различием идеалов $\beta_i\widehat{\beta}_iR$ уже не гарантируют наличие R-автоморфизма вида $E_{\pi(i)\pi(i)} + I \mapsto \Psi(F_{ii}) + I$ на фактор-алгебре.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skolem T.* Zur Theorie der assoziativen Zahlensysteme // Oslo Vial. Akad. Skr. I. 1927. N 12. P. 50.
2. *Noether E.* Hyperkomplexe Gröıen und Darstellungstheorie // Math. Z. 1929. V. 30. P. 641–692.
3. *Isaacs I. M.* Automorphsms of matrix algebras over commutative rings // Linear Algebra Appl. 1980. V. 31. P. 215–231.
4. *Courtemanche J., Dugas M.* Automorphisms of the endomorphism algebra of a free module // Linear Algebra Appl. 2016. V. 510. P. 79–91.
5. *Крылов П. А., Норбосамбуев Ц. Д.* Автоморфизмы алгебр формальных матриц // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 1116–1127.
6. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Группы автоморфизмов колец формальных матриц // Итоги науки и техн. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2019. Т. 164. С. 96–124.
7. *Krylov P. A., Tuganbaev A. A.* Formal matrix rings: Automorphisms // Internat. J. Algebra Comput. 2023. V. 33, N 4. P. 687–698.
8. *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438, N 12. P. 4672–4688.
9. *Крылов П. А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 456–463.
10. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца формальных матриц и их изоморфизмы // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1199–1214.
11. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. вузов. Математика. 2016. № 3. С. 3–14.
12. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Формальные матрицы и их определители // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.
13. *Tang G., Li C., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Commun. Algebra. 2014. V. 42, N 4. P. 1668–1681.
14. *Кульгускин И. А., Тапкин Д. Т.* Инволюции колец $K_s(R)$ // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 4. С. 81–104.
15. *Anderson D. D.* GCD domains, Gauss' lemma, and contents of polynomials. Boston, MA: Springer US, 2000.
16. *Cohn P. M.* Bezout rings and their subrings // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1968. V. 64. P. 251–264.
17. *Azumaya G.* On maximally central algebras // Nagoya Math. J. 1951. V. 2. P. 119–150.

Поступила в редакцию 24 июля 2025 г.
После доработки 31 октября 2025 г.
Принята к публикации 7 ноября 2025 г.

Абызов Адель Наилевич (ORCID 0000-0002-9809-2091),
Тапкин Даниль Тагирзянович (ORCID 0000-0003-0828-4397)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420000;
Петербургский государственный университет путей сообщения
Императора Александра I,
Московский пр., 9, Санкт-Петербург 190031
Adel.Abyzov@kpfu.ru, danil.tapkin@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.3

СХОДИМОСТЬ МЕР В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА И ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАУССОВСКИХ МЕР

В. И. Богачев

Аннотация. Доказаны два результата о приближении борелевских мер в метрике Канторовича. Первый результат дает скорость сходимости в этой метрике нормированных поверхностных мер на n-мерных сферах к стандартной гауссовской мере на счетной степени прямых, ограниченной на произвольное непрерывно вложенное сепарабельное банахово пространство полной меры, а второй для произвольной слабо сходящейся последовательности вероятностных борелевских мер на сепарабельном пространстве Фреше дает достаточное условие сходимости в метрике Канторовича, порожденной нормой компактно вложенного сепарабельного банахова пространства.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.202

Ключевые слова: гауссовская мера, слабая сходимость мер, метрика Канторовича.

Посвящается памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

Хорошо известно, что нормированные поверхностные меры σ_n на сферах радиуса $\sqrt{n}$ в $\mathbb{R}^n$, рассматриваемые как меры на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, слабо сходятся к стандартной гауссовской мере γ на $\mathbb{R}^\infty$ — счетной степени стандартной гауссовской меры на прямой. Этот результат восходит к работам Бореля [1], Гато [2] и Леви [3], в 1960–70-х обсуждался в связи с развитием бесконечномерного интегрирования в работах [4–6], позже фигурировал в предельных теоремах для проекций (см., например, [7–10]), а в последнее время он снова привлек внимание в связи с изучением так называемого явления концентрации мер (см. [11–13]). Слабая сходимость мер на метрическом пространстве характеризуется сходимостью в метрике Канторовича — Рубинштейна, более сильной является сходимость в метрике Канторовича (определения напоминаются ниже). В этой работе показано, что меры σ_n сходятся к мере γ по метрике Канторовича, порожденной всяким непрерывно вложенным в $\mathbb{R}^\infty$ сепарабельным банаховым пространством E, для которого $\gamma(E) = 1$. При этом получена оценка скорости сходимости, в типичных случаях имеющая вид $Cn^{-1/2}$. Разумеется, для произвольной последовательности вероятностных мер, слабо сходящейся к гауссовской мере, сходимости по какой-либо метрике Канторовича может не быть просто ввиду отсутствия слабого первого момента данных мер. Однако второй результат работы утверждает, что если борелевские вероятностные меры μ_n на сепарабельном пространстве Фреше X слабо сходятся к

Работа поддержана грантом РНФ № 25-11-00007, выполняемым при МГУ им. М. В. Ломоносова.

борелевской мере μ_0, причем существует такое банахово пространство Y с нормой p_Y, непрерывно вложенное в X, что $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \geq 0$, замкнутые шары в Y борелевы в X и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n, то найдется сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, компактно вложенное в X, для которого $\mu_n(E) = 1$ при всех $n \geq 0$, причем меры μ_n сходятся к мере μ_0 на E по метрике Канторовича, порожденной нормой пространства E. Таким образом, в общем случае сходимость по метрике Канторовича всегда можно усилить и получить ее на компактно вложенном пространстве. Если Y компактно вложено в X, то можно найти содержащее Y пространство E с указанными свойствами. Аналогичное утверждение доказано и для знакопеременных мер.

2. Обозначения и терминология

Напомним (см. [14]), что борелевская вероятностная мера γ на локально выпуклом пространстве X с топологически сопряженным X^* называется *центрированной гауссовской*, если все функционалы из X^* являются центрированными гауссовскими случайными величинами относительно γ, т. е. для всякого такого функционала l либо $l = 0$ почти всюду, либо

$$\gamma(x\colon l(x) < c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_l}} \int\limits_{-\infty}^{c} e^{-t^2/(2\sigma_l)}\, dt, \quad \sigma_l = \int\limits_X l^2\, d\gamma.$$

Центрированная гауссовская мера γ называется *радоновской*, если для всякого борелевского множества $B \subset X$ и каждого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт $K \subset B$, что $\gamma(B\backslash K) \leq \varepsilon$. На сепарабельном пространстве Фреше все борелевские меры радоновы.

Для центрированной радоновской гауссовской меры γ на пространстве X замыкание X^* в $L^2(\gamma)$ обозначается через X^*_γ.

Стандартная гауссовская мера на прямой задается плотностью $e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ относительно меры Лебега. Счетная степень этой меры, заданная на счетной степени прямой $\mathbb{R}^\infty$, называется *стандартной гауссовской мерой на* $\mathbb{R}^\infty$. Она играет особую роль в теории гауссовских мер. В силу известной теоремы Цирельсона (см. [14]) всякая центрированная радоновская гауссовская мера γ на локально выпуклом пространстве X, не сосредоточенная на конечномерном подпространстве, линейно изоморфна стандартной гауссовской мере γ_∞ на $\mathbb{R}^\infty$ в следующем смысле: найдутся борелевские линейные подпространства $X_1 \subset \mathbb{R}^\infty$ и $X_2 \subset X$ с $\gamma_\infty(X_1) = \gamma(X_2) = 1$ и взаимно однозначное борелевское линейное отображение $J\colon X_1 \to X_2$ такие, что обратное отображение J^{-1} тоже борелево и образ γ_∞ при J равен γ, т. е. $\gamma(B) = \gamma_\infty(J^{-1}(B))$ для всех борелевских множеств $B \subset X$. В частности, это верно для всякой центрированной гауссовской меры на сепарабельном пространстве Фреше (например, на сепарабельном банаховом пространстве), не сосредоточенной на конечномерном подпространстве.

Из известной теоремы Ферника (см. [14, теорема 2.8.5]) следует, что

$$\int\limits_X p^k\, d\gamma < \infty$$

для всех $k > 0$, если p — γ-измеримая полунорма, определенная на линейном подпространстве γ-меры 1.

Борелевские меры μ_n на топологическом пространстве X слабо сходятся к борелевской вероятностной мере μ, если

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f\,d\mu_n$$

для всякой ограниченной непрерывной функции f на X. В случае полного сепарабельного метрического пространства (X, d) такая сходимость на множестве борелевских вероятностных мер задается метрикой Канторовича — Рубинштейна

$$d_{KR}(\mu,\nu) = \sup\biggl\{ \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu \colon f \in \mathrm{Lip}_1(d),\ |f| \le 1 \biggr\},$$

где $\mathrm{Lip}_1(d)$ — множество 1-липшицевых функций на X, т. е. функций f, для которых $|f(x) - f(y)| \le d(x,y)$ при всех $x, y \in X$. Метрика Канторовича — Рубинштейна порождается нормой Канторовича — Рубинштейна на всем пространстве $\mathscr{M}(X)$ ограниченных знакопеременных борелевских мер, задаваемой формулой

$$\|\sigma\|_{KR} = \sup\biggl\{ \int_X f\,d\sigma \colon f \in \mathrm{Lip}_1(d),\ |f| \le 1 \biggr\}.$$

Слабая сходимость последовательности знакопеременных мер влечет сходимость по норме Канторовича — Рубинштейна, но обратное неверно, если пространство X не дискретно.

На линейном подпространстве $\mathscr{M}_1(X)$ в $\mathscr{M}(X)$, состоящем из знакопеременных борелевских мер, относительно вариаций которых интегрируема функция $x \mapsto d(x, x_0)$ при каком-либо фиксированном $x_0 \in X$ (тогда такие функции интегрируемы при всех x_0), определена норма Канторовича

$$\|\sigma\|_K = |\sigma(X)| + \sup\biggl\{ \int_X f\,d\sigma \colon f \in \mathrm{Lip}_1(d),\ f(x_0) = 0 \biggr\}.$$

На подмножестве $\mathscr{P}_1(X) \subset \mathscr{M}_1(X)$, состоящем из вероятностных мер, относительно которых интегрируема функция $x \mapsto d(x, x_0)$, метрика Канторовича d_K, порожденная нормой Канторовича, задается формулой

$$d_K(\mu,\nu) = \sup\biggl\{ \int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\nu \colon f \in \mathrm{Lip}_1(d),\ f(x_0) = 0 \biggr\}.$$

Конечно, эта метрика зависит от метрики d, поэтому нередко бывает удобно включить эту зависимость в обозначения и писать, скажем, $d_{K,d}(\mu,\nu)$. Если X — банахово пространство с нормой p_X, то порожденную этой нормой метрику Канторовича будем обозначать через d_{K,p_X}. В этом случае $\mathscr{P}_1(X)$ состоит из борелевских вероятностных мер с сильным первым моментом, т. е. мер, относительно которых интегрируема функция p_X.

Ясно, что $d_{KR}(\mu,\nu) \le d_K(\mu,\nu)$, причем для пространства X диаметра не более 1 имеет место равенство. Метрику d всегда можно заменить метрикой, задающей прежнюю топологию и оцениваемой 1, но это может быть нецелесообразно, так как при такой замене может быть потеряна полнота пространства, а в случае банахова пространства ограниченная метрика не будет задаваться нормой. Ниже речь идет как раз о банаховых пространствах.

Напомним, что слабо сходящаяся последовательность борелевских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве X равномерно плотна, где семейство $\mathscr{P}$ неотрицательных борелевских мер на X называется *равномерно плотным*, если для всякого $\varepsilon > 0$ есть такой компакт K, что $\sup\limits_{\mu\in\mathscr{P}} \mu(X\backslash K) \le \varepsilon$.

В случае полного сепарабельного метрического пространства X известен (см. [15, теорема 2.7.4]) следующий критерий сходимости последовательности мер $\mu_n \in \mathscr{P}_1(X)$ к мере $\mu \in \mathscr{P}_1(X)$ по метрике Канторовича: $d_K(\mu_n, \mu) \to 0$ в точности тогда, когда меры μ_n сходятся к мере μ слабо и

$$\lim_{n\to\infty} \int_X d(x_0, x)\,\mu_n(dx) = \int_X d(x_0, x)\,\mu(dx). \tag{2.1}$$

Это равносильно также обычной слабой сходимости мер $(1+d(x_0,x))\cdot\mu_n$ к мере $(1+d(x_0,x))\cdot\mu$. Еще одно равносильное условие: слабая сходимость мер μ_n к μ и равномерная интегрируемость функции $d(x_0,x)$ относительно мер μ_n, т. е.

$$\lim_{R\to\infty} \sup_n \int_{\{x : d(x,x_0)\ge R\}} d(x,x_0)\,\mu_n(dx) = 0.$$

В самом деле, если это условие выполнено, то интегралы от функции $g(x) = d(x,x_0)$ по мерам μ_n равномерно ограничены, поэтому она интегрируема и относительно μ. При этом есть сходимость интегралов от функций $\min(g,R)$ при всех R, что вместе с равномерной интегрируемостью дает (2.1). Обратно, пусть верно (2.1) и есть слабая сходимость. Для всякого $\varepsilon > 0$ есть такое R_1, что интеграл от $g - \min(g,R_1)$ по мере μ меньше ε. Взяв N так, что

$$\left|\int_X g\,d\mu - \int_X g\,d\mu_n\right| + \left|\int_X \min(g,R_1)\,d\mu - \int_X \min(g,R_1)\,d\mu_n\right| < \varepsilon$$

при $n > N$, получим, что для таких n при $R > R_1$ верна оценка

$$\int_{\{g\ge R\}} g\,d\mu_n \le \int_{\{g>R_1\}} g\,d\mu_n = \int_X [g - \min(g,R_1)]\,d\mu_n < 2\varepsilon.$$

Увеличив R_1, получим такую оценку и для оставшихся мер $\mu_1, \ldots, \mu_N$.

На всем пространстве $\mathscr{M}_1(X)$ слабая сходимость не следует из сходимости по норме Канторовича. Например, если есть бесконечная последовательность точек x_n, сходящаяся к x_0, где $x_n \ne x_0$, то для мер $\mu_n = d(x_n,x_0)^{-1/2}(\delta_{x_n} - \delta_{x_0})$ имеем $\|\mu_n\|_K \to 0$, но слабой сходимости нет, так как нет даже ограниченности по вариации. Однако и на $\mathscr{M}_1(X)$ сходимость мер μ_n к μ по норме Канторовича вытекает из слабой сходимости вместе с равномерной интегрируемостью функции $d(x,x_0)$ относительно мер $|\mu_n|$. В самом деле, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $R > 0$, что интегралы от функции $d(x,x_0)$ по мерам $|\mu_n| + |\mu|$ по множеству $\{x : d(x,x_0) \ge R\}$ меньше ε. В силу слабой сходимости есть такое $N \ge 1$, что $\|\mu_n - \mu\|_{KR} \le \varepsilon/R$ при $n \ge N$. Тогда при таких n для всякой функции $f \in \mathrm{Lip}_1(d)$ с $f(x_0) = 0$, положив $f_R = \min(f,R)$, получаем

$$\left|\int_X f\,d\mu - \int_X f\,d\mu_n\right| \le \left|\int_X f_R\,d\mu - \int_X f_R\,d\mu_n\right| + 2\varepsilon \le R\|\mu_n - \mu\|_{KR} + 2\varepsilon \le 3\varepsilon.$$

Метрика Канторовича появилась в классической работе [16] и затем была изучена в статьях [17] и [18], где была введена также норма Канторовича — Рубинштейна. Основные результаты включены в книгу [19]. Отметим, что в значительной части зарубежной литературы используется исторически некорректное (а также и бессмысленное по содержанию) наименование "Wasserstein metric", правда, и там некоторые авторы делают уточняющие пояснения (см., например, [12]). Интересно отметить, что сам Канторович (в предчувствии последующего переименования?) обозначил свою метрику буквой W. Для нее есть двойственная формула

$$d_K(\mu,\nu) = W(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int\limits_{X\times X} d(x,y)\,\pi(dx\,dy),$$

где $\Pi(\mu,\nu)$ — множество борелевских вероятностных мер на $X\times X$ с проекциями μ и ν на сомножители. Такое представление относится к задаче Канторовича оптимальной транспортировки (о задачах Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки см. [12, 15, 20]).

Нам понадобится также известная формула для моментов гауссовской меры. Пусть γ_n — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ с плотностью $(2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$ и $|x|$ — стандартная норма на $\mathbb{R}^n$. Тогда при $p>-n$ имеем

$$I_p = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^p\,\gamma_n(dx) = 2^{p/2}\frac{\Gamma\big((n+p)/2\big)}{\Gamma(n/2)}. \tag{2.2}$$

В частности, если $p=-2$ и $n>2$, то $I_{-2}=(n-2)^{-1}$. Для этого запишем данный интеграл в сферических координатах, причем разделим его на 1 в виде интеграла от 1, также записанного в сферических координатах. После сокращения одинаковых сомножителей, возникающих из-за интегрирования по сфере, это дает

$$\int\limits_0^\infty r^p r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\left(\int\limits_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\right)^{-1}.$$

После замены $r^2=2t$ получаем указанный ответ, причем для $p=-2$ используем формулу $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$.

Будем говорить, что банахово пространство E *непрерывно вложено* в пространство Фреше X, если E является линейным подпространством в X и его замкнутый единичный шар ограничен в X. Если же этот шар компактен в X, то будем называть E *компактно вложенным* в X.

Отметим, что если банаховы пространства E_1 и E_2 непрерывно вложены в X и $E_1\subset E_2$, то естественное вложение банаховых пространств $E_1\to E_2$ непрерывно. Это вытекает из теоремы о замкнутом графике (см. [21] или [22]), поскольку график указанного вложения очевидным образом замкнут.

3. Основные результаты

Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^\infty$ (счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой) и σ_n — нормированная поверхностная мера на сфере радиуса $\sqrt{n}$ в $\mathbb{R}^n$. Эту меру будем считать также и мерой на $\mathbb{R}^\infty$, вложив $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^\infty$ посредством естественного отображения

$$(x_1,\ldots,x_n)\mapsto(x_1,\ldots,x_n,0,0,\ldots).$$

Мера σ_n — образ меры γ при отображении

$$x \mapsto \varphi_n(x)P_n x,$$

где

$$\varphi_n(x) = \left(\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)^{-1/2}, \quad P_n x = (x_1, \ldots, x_n),$$

ибо этот образ — сферически инвариантная вероятностная мера на сфере в $\mathbb{R}^n$, а таковая единственна. В силу (2.2) при $n > 2$ и $p = -2$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} \varphi_n^2 \, d\gamma = n \int\limits_{\mathbb{R}^n} |x|^{-2} \, d\gamma_n = \frac{n}{n-2}. \tag{3.1}$$

В основе обсуждаемых здесь результатов лежит тот простой факт, что в силу закона больших чисел $\bigl(x_1^2 + \cdots + x_n^2\bigr)/n \to 1$ при $n \to \infty$ для γ-почти всех x. В частности, из этого очевидна слабая сходимость мер σ_n к γ на $\mathbb{R}^\infty$, ибо такая сходимость равносильна сходимости интегралов от каждой ограниченной непрерывной функции f от конечного числа переменных (см. [23, следствие 2.4.8]), а в данном случае для функции f от переменных $x_1, \ldots, x_k$ имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f \, d\sigma_n = \int\limits_{\mathbb{R}^\infty} f(\varphi_n(x)x_1, \ldots, \varphi_n(x)x_k) \, \gamma(dx),$$

где $\varphi_n(x)x_j \to x_j$ при $n \to \infty$ для всех j и γ-почти всех x, так что

$$f(\varphi_n(x)x_1, \ldots, \varphi_n(x)x_k) \to f(x_1, \ldots, x_k),$$

поэтому остается воспользоваться теоремой Лебега о мажорируемой сходимости. Следующая теорема дает усиленную количественную характеристику сходимости мер σ_n к γ.

Теорема 3.1. *Пусть E — сепарабельное банахово пространство с нормой p_E, непрерывно вложенное в $\mathbb{R}^\infty$, причем $\gamma(E) = 1$. Тогда меры σ_n сходятся к γ на E по метрике Канторовича d_{K,p_E}, порожденной нормой p_E, и при $n \geq 8$ выполнена оценка*

$$d_{K,p_E}(\gamma, \sigma_n) \leq 2\|p_E\|_{L^2(\gamma)} n^{-1/2} + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} \|p_E \circ (I - P_n)\|_{L^2(\gamma)} \to 0. \tag{3.2}$$

Доказательство. Заметим, что в силу равенства $\gamma(E) = 1$ пространство E содержит все $\mathbb{R}^n$, ибо мера γ эквивалента своим сдвигам на векторы из $\mathbb{R}^n$. Поэтому $\sigma_n(E) = 1$ при всех n. Для всех $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_E f \, d\gamma - \int\limits_E f \, d\sigma_n &= \int\limits_E [f(x) - f(\varphi_n(x)P_n x)] \, \gamma(dx) \\
&= \int\limits_E [f(x) - f(\varphi_n(x)x) + f(\varphi_n(x)x) - f(\varphi_n(x)P_n x)] \, \gamma(dx) \\
&\leq \int\limits_E |1 - \varphi_n(x)| p_E(x) \, \gamma(dx) + \int\limits_E \varphi_n(x) p_E(x - P_n x) \, \gamma(dx) \\
&\leq \|1 - \varphi_n\|_{L^2(\gamma)} \|p_E\|_{L^2(\gamma)} + \left(\frac{n}{n-2}\right)^{1/2} \|p_E \circ (I - P_n)\|_{L^2(\gamma)},
\end{aligned}$$

где использовано неравенство Коши — Буняковского и равенство (3.1). Далее, с учетом равенства

$$\int_0^\infty r^\alpha e^{-r^2/2}\,dr = 2^{(\alpha-1)/2}\Gamma((\alpha+1)/2)$$

после несложных преобразований находим

$$\begin{aligned}\|1-\varphi_n\|^2_{L^2(\gamma)} &= \int_{\mathbb{R}^n}(1-n^{1/2}|x|^{-1})^2\,\gamma_n(dx)\\ &= \int_0^\infty (1-n^{1/2}r^{-1})^2 r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\left(\int_0^\infty r^{n-1}e^{-r^2/2}\,dr\right)^{-1}\\ &= 1-\sqrt{2n}\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)}+\frac{n}{n-2}.\end{aligned}$$

С помощью формулы Стирлинга (см. [24, с. 792]) правую часть при $n\ge 8$ можно оценить через $4n^{-1}$, что в итоге дает объявленную оценку. В самом деле,

$$\Gamma(a) = (2\pi)^{1/2}\exp((a-1/2)\ln a - a + \theta(12a)^{-1}),\quad \theta\in(0,1).$$

Взяв $a=n/2$, получаем

$$\begin{aligned}\sqrt{2n}\,\frac{\Gamma((n-1)/2)}{\Gamma(n/2)} &= 2\sqrt{a}\frac{\Gamma(a-1/2)}{\Gamma(a)}\\ &= 2\exp(2^{-1}\ln a + (a-1)\ln(a-1/2) - a + 1/2 + \theta_1(12(a-1/2))^{-1}\\ &\qquad - (a-1/2)\ln a + a - \theta_2(12a)^{-1})\\ &\ge 2\exp(\ln a + (a-1)\ln(a-1/2) + 1/2 - (12a)^{-1} - a\ln a)\\ &= 2\exp(\ln(a/(a-1/2)) + a\ln((a-1/2)/a) + 1/2 - (12a)^{-1}).\end{aligned}$$

Так как $\ln(1+x)\ge x/2$ и $\ln(1-x)\ge -x-2x^2$ при $x\in[0,1/2]$, то правая часть не меньше $2\exp(2^{-1}(2a-1)^{-1}+a(-1/(2a)-2(2a)^{-2})+1/2-(12a)^{-1})$, что равно

$$2\exp(2^{-1}(n-1)^{-1}-n^{-1}-(6n)^{-1})\ge 2\exp(-2(3n)^{-1})\ge 2(1-2(3n)^{-1}).$$

Таким образом, при $n\ge 8$ получаем

$$\|1-\varphi_n\|^2_{L^2(\gamma)}\le \frac{2}{n-2}+\frac{4}{3n}\le\frac{4}{n}.$$

Для завершения доказательства остается пояснить, почему

$$\lim_{n\to\infty}\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^2(\gamma)} = 0.$$

На самом деле $\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^r(\gamma)}\to 0$ при всех $r\in[1,+\infty)$, ибо $p_E(x-P_nx)\to 0$ для γ-почти всех $x\in E$ (см. [14, теорема 3.5.1]), причем

$$\|p_E\circ(I-P_n)\|_{L^q(\gamma)}\le\|p_E\|_{L^q(\gamma)}\quad\forall\, q\in[1,\infty).$$

Последнее вытекает из такого факта (см. [14, следствие 3.3.7]): если ν — еще одна центрированная гауссовская мера на X, для которой

$$\int_X l^2\,d\nu\le\int_X l^2\,d\gamma$$

для всякого непрерывного линейного функционала l, то для всякой борелевской полунормы p, заданной на линейном подпространстве γ-меры 1, при $q>0$ верно неравенство

$$\int\limits_X p^q\,d\nu \le \int\limits_X p^q\,d\gamma.$$

В данном случае это условие выполнено для образа ν меры γ при отображении $I-P_n$, так как здесь $l(x)=\sum\limits_{i=1}^N c_i x_i$, поэтому интеграл от l^2 по мере ν равен $\sum\limits_{i=1}^{\max(N,n)} c_i^2$, а интеграл от l^2 по мере γ равен $\sum\limits_{i=1}^N c_i^2$. $\square$

Отметим, что $1-\sqrt{2n}\Gamma((n-1)/2)/\Gamma(n/2)+n/(n-2)\sim 1/(2n)$ в силу разложения Стирлинга, поэтому при больших n множитель 2 в правой части (3.2) можно заменить на 1 или даже на $1/\sqrt{2}+\varepsilon$ с $\varepsilon>0$ при $n\ge N(\varepsilon)$.

Пример 3.2. Пусть E — весовое гильбертово пространство последовательностей (x_n) с $p_E(x)^2=\sum\limits_{n=1}^\infty n^{-2}x_n^2<\infty$. Тогда при $n\ge 8$ имеем

$$d_{K,p_E}(\gamma,\sigma_n)\le (2\pi/\sqrt{6}+\sqrt{n/(n-2)})n^{-1/2}<4n^{-1/2},$$

так как

$$p_{_E}(x-P_nx)^2=\sum_{k=n+1}^\infty k^{-2}x_k^2,$$

поэтому справедлива оценка

$$\|p_E\circ(I-P_n)\|^2_{L^2(\gamma)}=\sum_{k=n+1}^\infty k^{-2}\le n^{-1}.$$

Кроме того,

$$\|p_E\|^2_{L^2(\gamma)}=\sum_{n=1}^\infty n^{-2}=\pi^2/6.$$

Анализ доказательства полученной теоремы показывает, что она имеет следующий абстрактный аналог.

Напомним, что пространство Камерона — Мартина H центрированной гауссовской меры γ на сепарабельном пространстве Фреше X с сопряженным X^* состоит из векторов $h\in X$ с конечной нормой

$$|h|_H=\sup\{l(h)\colon l\in X^*,\ \|l\|_{L^2(\gamma)}\le 1\}.$$

Известно (см. [14]), что H с этой нормой оказывается сепарабельным гильбертовым пространством. Скалярное произведение в нем задается следующим образом. Пусть X^*_γ — замыкание X^* в $L^2(\gamma)$. Тогда X^*_γ — сепарабельное гильбертово пространство, для всякого $h\in H$ имеется единственный элемент $\widehat{h}\in X^*_\gamma$, для которого $l(h)=(l,\widehat{h})_{L^2(\gamma)}$ при всех $l\in X^*$. Отображение $h\mapsto\widehat{h}$ — изометрия, а скалярное произведение в H задается формулой

$$(h_1,h_2)_H=(\widehat{h_1},\widehat{h_2})_{L^2(\gamma)}.$$

Для стандартной гауссовской меры γ на $\mathbb{R}^\infty$ пространство Камерона — Мартина есть обычное l^2. Если $\{e_n\}$ — ортонормированный базис в H, то также возникают проекторы $P_nx=\sum\limits_{i=1}^n \widehat{e}_i(x)e_i$, причем для всякого сепарабельного банахова пространства (E, p_E), непрерывно вложенного в X и имеющего γ-меру 1, верно равенство $\lim\limits_{n\to\infty} p_E(x - P_n x) = 0$ для γ-почти всех $x \in E$. Как и выше, вводятся функции

$$\varphi_n(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} \widehat{e}_i(x)^2/n\right)^{-1/2},$$

а также вероятностные меры σ_n на сферах радиуса $n^{1/2}$ в n-мерных подпространствах H_n, порожденных $e_1, \ldots, e_n$: мера σ_n есть образ γ при отображении $x \mapsto \varphi_n(x) P_n x$. Теорема 3.1 остается в силе в этой более общей ситуации с тем же доказательством.

В работах [7, 8] получены оценки по вариации для конечномерных проекций на $\mathbb{R}^k$ при некоторых соотношениях между k и n (например, в случае $k = o(n)$). Разумеется, обычной сходимости по вариации σ_n к γ нет ввиду взаимной сингулярности всех мер σ_n и γ.

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, когда произвольные борелевские вероятностные меры на произвольном сепарабельном пространстве Фреше (полном метризуемом локально выпуклом пространстве) слабо сходятся к борелевской мере.

Сначала установим вспомогательный результат в духе известного критерия равномерной интегрируемости Валле-Пуссена (см. [25, теорема 4.5.9]).

Лемма 3.3. *Пусть $(X, \mathscr{A})$ — измеримое пространство, $\mathscr{P}$ — некоторое семейство вероятностных мер на нем и функция $f \geq 0$ измерима относительно $\mathscr{A}$ и равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, т. е.*

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{\mu\in\mathscr{P}} \int\limits_{\{f\geq R\}} f\, d\mu = 0.$$

Тогда найдутся такие неотрицательные строго возрастающие выпуклые функции Φ и Ψ на $[0, +\infty)$, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{t} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi(t)}{t} = +\infty, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\Phi(t)}{\Psi(t)} = +\infty, \quad \lim_{t\to+\infty} \frac{\Psi^{-1}(t)}{\Phi^{-1}(t)} = +\infty, \tag{3.4}$$

причем функции $\Phi\circ f$ и $\Psi\circ f$ равномерно интегрируемы относительно мер из $\mathscr{P}$.

Доказательство. В силу условия найдутся возрастающие к бесконечности числа N_k, для которых

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}} \int\limits_{\{f\geq N_k\}} f\, d\mu \leq 8^{-k}. \tag{3.5}$$

Ниже эти числа будут увеличены с некоторыми дополнительными ограничениями. Положим $\varphi(t) = \psi(t) = 1$ при $t < N_1$, $\varphi(t) = 4^k$ и $\psi(t) = 2^k$ при $N_k < t < N_{k+1}$,

$$\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(s)\, ds, \quad \Psi(t) = \int\limits_0^t \psi(s)\, ds.$$

Укажем дополнительные ограничения на числа N_k, с учетом которых они выбираются индуктивно путем увеличения исходных чисел (так что (3.5) остается в силе):

$$N_{k+1} > \Phi(N_k) + \Psi(N_k) + 4^k N_k. \tag{3.6}$$

Функции Φ и Ψ выпуклы, строго возрастают и удовлетворяют (3.3). Выполнено также первое условие в (3.4). Проверим второе. Предположим, что при некотором $c > 0$ имеется последовательность точек $y_i \to \infty$, для которых $\Phi^{-1}(y_i) \geq c\Psi^{-1}(y_i)$. Рассмотрим одну из таких точек y. Пусть $y = \Phi(x) = \Psi(z)$, где $x \in (N_k, N_{k+1}]$. Заметим, что $z > x$. Возможны два случая: $z < N_{k+1}$ и $z \in [N_{k+1}, N_{k+2}]$. Случай $z > N_{k+2}$ невозможен при больших k ввиду (3.6), так как $\Phi(x) = \Psi(z) > z > N_{k+2}$, но $\Phi(x) \leq \Phi(N_{k+1}) < N_{k+2}$. В первом случае на отрезке $[N_k, N_{k+1}]$ функции Φ и Ψ имеют вид

$$\Phi(t) = \Phi(N_k) + 4^k(t - N_k) \quad \text{и} \quad \Psi(t) = \Psi(N_k) + 2^k(t - N_k)$$

соответственно. Поэтому

$$\Phi(N_k) + 4^k(x - N_k) = \Psi(N_k) + 2^k(z - N_k). \tag{3.7}$$

Пусть $x = \alpha N_k$ и $z = q\alpha N_k$. Ясно, что $\alpha > 1$, $q > 1$. Заметим, что

$$(4^{k-1} - 1)N_k \leq \Phi(N_k) \leq 4^{k-1} N_k,$$

ибо $\varphi(t) \leq 4^{k-1}$ при $t \leq N_k$ и

$$\Phi(N_k) \geq 4^{k-1}(N_k - N_{k-1}) \geq 4^{k-1}(1 - 4^{1-k})N_k = (4^{k-1} - 1)N_k.$$

Кроме того, $\Psi(N_k) < \Phi(N_k)/2$ при больших k, откуда $\Phi(N_k) - \Psi(N_k) > \Phi(N_k)/2$. Значит, из приведенной выше двусторонней оценки получаем

$$\Phi(N_k) - \Psi(N_k) = \beta 4^k N_k, \quad \text{где } 1/9 \leq \beta \leq 1/4.$$

Таким образом, из (3.7) после деления на $4^k N_k$ находим

$$2^{-k}(q\alpha - 1) = \beta + \alpha - 1 \geq 1/9.$$

В силу нашего предположения $q \leq c^{-1}$. Поэтому предыдущее равенство не может выполняться при больших k. В самом деле, при $\alpha \leq 2$ левая часть становится меньше $1/9$ при больших k. При $\alpha > 2$ имеем

$$\alpha(1 - 2^{-k}q) = 1 - \beta - 2^{-k} \leq 1,$$

откуда $1 - 2^{-k}q \leq 1/2$, что невозможно при больших k виду оценки $q \leq c^{-1}$.

Перейдем к случаю $z \in [N_{k+1}, N_{k+2}]$. Здесь

$$y = \Phi(x) = \Phi(N_k) + 4^k(x - N_k) = \Psi(z) = \Psi(N_k) + 2^k(N_{k+1} - N_k) + 2^{k+1}(z - N_{k+1}).$$

Значит,

$$\Phi(N_k) - 4^k N_k - \Psi(N_k) + 2^k N_k = -2^k N_{k+1} + 2^{k+1} z - 4^k x. \tag{3.8}$$

При больших k имеем $4^k c > 2^{k+1}$. Так как $x \geq cz$, то правая часть (3.8) меньше $-2^k N_{k+1}$. Это приводит к противоречию, ибо левая часть по модулю меньше N_{k+1} в силу (3.6).

Наконец, равномерная интегрируемость функции Φ следует из того, что на $[N_k, N_{k+1}]$ выполнена оценка $\Phi(t) \leq 4^k t$, так как

$$\Phi(t) = \Phi(N_k) + 4^k(t - N_k) \leq 4^{k-1} N_k + 4^k(t - N_k) \leq 4^k t$$

для всех $\mu \in \mathscr{P}$. Следовательно,

$$\int\limits_{\{N_k \le f < N_{k+1}\}} \Phi(f)\, d\mu \le 4^k \int\limits_{\{N_k \le f < N_{k+1}\}} f\, d\mu \le 2^{-k}.$$

Значит,

$$\int\limits_{\{\Phi(f) \ge \Phi(N_k)\}} \Phi(f)\, d\mu \le 2^{1-k}.$$

Меньшая функция Ψ тоже равномерно интегрируема. $\square$

Отметим, что второе условие в (3.4) не вытекает из первого. Например, если $\Phi(t) = e^{2t}$ и $\Psi(t) = e^t$, то $\Phi^{-1}(t) = \Psi^{-1}(t)/2$.

Теорема 3.4. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и семейство $\mathscr{P}$ борелевских вероятностных мер равномерно плотно на X. Предположим, что существует такое непрерывно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что замкнутый единичный шар U_Y из Y является борелевским в X, $\mu(Y) = 1$ при всех $\mu \in \mathscr{P}$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E с нормой p_E, что $\mu(E) = 1$ для всех $\mu \in \mathscr{P}$, норма p_E тоже равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, причем семейство $\mathscr{P}$ равномерно плотно и на пространстве (E, p_E).*

Доказательство. Можно считать, что шар U_Y замкнут в X, перейдя к его замыканию U в X, которое служит замкнутым единичным шаром в банаховом пространстве E_U, равном линейной оболочке U и наделенном нормой p_U, являющейся функционалом Минковского замкнутого ограниченного множества U (см. [21, § 8.6.5]). Ясно, что E_U также непрерывно вложено в X и $Y \subset E_U$, причем $p_U \le p_Y$ на Y, значит, E_U удовлетворяет тем же условиям, что и Y. Это обеспечивает возможность перехода к случаю замкнутого в X шара U_Y. Применим к функции p_Y доказанную выше лемму и возьмем указанные там функции Φ и Ψ. В силу равномерной плотности данных мер в каждом замкнутом множестве $Y_k = \{p_Y \le \Phi^{-1}(k)\}$ есть такой компакт S_k, что

$$\sup_{\mu \in \mathscr{P}} \mu(Y_k \backslash S_k) \le 2^{-k}.$$

Положим $\delta_k = \Phi^{-1}(k)/\Psi^{-1}(k)$. Тогда $\delta_k \to 0$. Заметим, что множество

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \delta_k (\Phi^{-1}(k))^{-1} S_k$$

имеет компактное замыкание в X. В самом деле, если дана бесконечная последовательность $\{a_n\} \subset A$, то либо некоторая ее подпоследовательность лежит в каком-то из компактов $\delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1} S_k$, либо $a_n \to 0$ в Y, а тогда и в X, так как

$$p_Y(\delta_k (\Phi^{-1}(k))^{-1} a) = \delta_k (\Phi^{-1}(k))^{-1} p_Y(a) \le \delta_k (\Phi^{-1}(k))^{-1} \Phi^{-1}(k) = \delta_k$$

при $a \in S_k$. Пусть W — замкнутая абсолютно выпуклая оболочка A и E_W — ассоциированное с W банахово пространство, т. е. линейная оболочка W, наделенная нормой p_W, равной функционалу Минковского множества W, которое становится замкнутым единичным шаром в E_W. Поскольку $A \subset U_Y$, то $W \subset U_Y$, поэтому вложение $E_W \to Y$ непрерывно. Множество E_W является борелевским в X, причем $\mu(E_W)=1$ для всех $\mu\in\mathscr{P}$. Это следует из того, что $S_k\subset E_W$ при всех k, причем в силу неравенства Чебышёва

$$\mu(X\backslash Y_k)\le(\Phi^{-1}(k))^{-1}\int\limits_X p_Y\,d\mu$$

для всех $\mu\in\mathscr{P}$, где интегралы в правой части равномерно ограничены по $\mu\in\mathscr{P}$ некоторым числом C в силу равномерной интегрируемости p_Y, откуда $\mu(X\backslash S_k)\le 2^{-k}+C(\Phi^{-1}(k))^{-1}\to 0$.

Покажем, что

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_{E_W}\Psi(p_W)\,d\mu<\infty.$$

Для этого оценим

$$\mu(\Psi(p_W)>k)=\mu(p_W>\Psi^{-1}(k))=\mu(p_W>\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)),$$

где $\mu\in\mathscr{P}$. Множество $\bigl\{p_W\le\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)\bigr\}$ содержит S_k, поскольку множество $W=\{p_W\le 1\}$ содержит $\delta_k(\Phi^{-1}(k))^{-1}S_k$. Поэтому

$$\mu\bigl(p_W>\delta_k^{-1}\Phi^{-1}(k)\bigr)\le\mu(X\backslash S_k)\le\mu(X\backslash Y_k)+2^{-k},$$

что дает оценку

$$\mu(\Psi(p_W)>k)\le\mu(p_Y>\Phi^{-1}(k))+2^{-k}=\mu(\Phi(p_Y)>k)+2^{-k}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_X\Psi(p_W)\,d\mu=\int\limits_0^\infty\mu(\Psi(p_W)>t)\,dt&\le\sum_{k=0}^\infty\mu(\Psi(p_W)>k)\\&\le\sum_{k=0}^\infty\mu(\Phi(p_Y)>k)+2\le 3+\int\limits_X\Phi(p_Y)\,d\mu.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_{E_W}\Psi(p_W)\,d\mu\le 3+\sup_{\mu\in\mathscr{P}}\int\limits_X\Phi(p_Y)\,d\mu<\infty.$$

Известно (см. [26, теорема 2.5.10]), что найдется банахово пространство X_1, компактно вложенное в X, для которого $E_W\subset X_1$, причем тождественное вложение компактно. По теореме Дэвиса — Фигеля — Джонсона — Пелчинского (см. [27] или [21, теорема 8.6.25]) существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство (E,p_E), содержащее E_W и компактно вложенное в X_1, для которого тождественное вложение $E_W\subset E$ тоже компактно. Норма p_E равномерно интегрируема относительно мер из $\mathscr{P}$, так как $p_E\le Cp_W$ с некоторой константой C. Борелевские множества из (E,p_E) борелевы в X, поэтому борелевские меры на X имеют сужения на E. Ясно, что $\mu(E)=1$ для всех $\mu\in\mathscr{P}$. Равномерная плотность мер из $\mathscr{P}$ на E следует из неравенства Чебышёва

$$\mu(p_W>k)\le k^{-1}\int\limits_{E_W}p_W\,d\mu$$

с учетом равномерной ограниченности интегралов от p_W по мерам из $\mathscr{P}$ (вытекающей из равномерной интегрируемости p_W) и компактности всех множеств $\{p_W \le k\}$ в пространстве E. $\square$

Отметим, что если Y сепарабельно, то шар U_Y автоматически оказывается борелевским множеством в X (см. [25, теорема 6.8.6]). Если шар U_Y замкнут в X (что автоматически имеет место, если Y рефлексивно), то построенное пространство E содержится в Y. Конечно, вместо борелевости U_Y достаточно измеримости относительно мер μ_n.

Следствие 3.5. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и последовательность вероятностных борелевских мер μ_n слабо сходится к борелевской вероятностной мере μ_0. Предположим, что существует такое непрерывно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что замкнутый единичный шар U_Y из Y замкнут в X, $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \ge 0$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, что $E \subset Y$, $\mu_n(E) = 1$ при всех $n \ge 0$ и $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$.*

Доказательство. Слабо сходящаяся последовательность борелевских мер на сепарабельном пространстве Фреше равномерно плотна по теореме Прохорова, поэтому применима предыдущая теорема. Пусть (E, p_E) — банахово пространство, построенное в этой теореме. Так как меры μ_n равномерно плотны и на (E, p_E), то они слабо сходятся к μ_0 также на (E, p_E). В самом деле, в силу их равномерной плотности всякая подпоследовательность в $\{\mu_n\}$ содержит еще одну подпоследовательность, которая слабо сходится на E. Тогда она сходится именно к μ_0 ввиду слабой сходимости к μ_0 на X. С учетом равномерной интегрируемости p_E это дает сходимость $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$. $\square$

Приведем еще одно утверждение, в котором строится подпространство E, большее подпространства Y. Конечно, такое большее подпространство может не быть компактно вложенным, если Y было лишь непрерывно вложено. Поэтому в этом утверждении вложение Y предполагается компактным.

Предложение 3.6. *Пусть X — сепарабельное пространство Фреше и последовательность борелевских вероятностных мер μ_n слабо сходится к борелевской мере μ_0. Предположим, что существует такое компактно вложенное в X банахово пространство Y с нормой p_Y, что $\mu_n(Y) = 1$ при всех $n \ge 0$ и функция p_Y равномерно интегрируема относительно мер μ_n. Тогда найдется такое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство E, что $Y \subset E$ и $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$. Более того, в качестве E можно взять любое компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство, в которое Y компактно вложено.*

Доказательство. Пусть E — компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство с нормой p_E, в которое Y компактно вложено. Известно, что такие пространства существуют (см. [21, теорема 8.6.25]). При этом можно считать, что $p_E \le p_Y$ на Y. Последовательность мер μ_n равномерно плотна на E, ибо $\sup\limits_n \mu_n(p_Y \ge R) \to 0$ при $R \to \infty$ и множества $\{p_Y \le R\}$ компактны в E. По теореме Прохорова всякая подпоследовательность в $\{\mu_n\}$ имеет дальнейшую подпоследовательность, слабо сходящуюся на E. В силу слабой сходимости на X к μ_0 получаем, что и на E вся последовательность слабо сходится к μ_0. Чтобы получить соотношение $\|\mu_0 - \mu_n\|_{K,p_E} \to 0$, остается доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E p_E \, d\mu_n = \int\limits_E p_E \, d\mu_0.$$

Это равенство верно в силу [23, теорема 4.3.15], так как функция p_E непрерывна на E и равномерно интегрируема относительно мер μ_n ввиду оценки $p_E \le p_Y$ на Y. $\square$

Замечание 3.7. Из доказательств и сказанного в п. 2 ясно, что теорема 3.4, следствие 3.5 и предложение 3.6 остаются в силе и для знакопеременных мер, если условие равномерной интегрируемости p_Y выполнено для вариаций рассматриваемых мер, в следствии 3.5 и предложении 3.6 вместо $\mu_n(Y) = 1$ требуется $|\mu_n|(X\backslash Y) = 0$, в теореме 3.4 семейство $\mathscr{P}$ ограничено и вариации мер из $\mathscr{P}$ равномерно плотны, а условие $\mu(E) = 1$ для всех $\mu \in \mathscr{P}$ заменено условием $|\mu|(X\backslash E) = 0$ при всех $\mu \in \mathscr{P}$.

Отметим, что качественное утверждение первой теоремы (без оценки скорости сходимости) вытекает из второй теоремы или из предложения, если уже известна слабая сходимость мер σ_n к γ (которая, однако, в первой теореме получается попутно, а не предполагается заранее известной). В самом деле, пусть (E, p_E) — сепарабельное банахово пространство, непрерывно вложенное в $\mathbb{R}^\infty$ и имеющее γ-меру 1. Борелевские множества из E борелевы в $\mathbb{R}^\infty$ (см. [25, теорема 6.8.6]), поэтому сужение γ на E дает гауссовскую меру на E. Известно, что существует сепарабельное рефлексивное банахово пространство E_0, компактно вложенное в E и имеющее γ-меру 1 (см. [25, теорема 7.12.4]; для этого гауссовость не нужна). Поэтому можно считать E компактно вложенным в $\mathbb{R}^\infty$. Отметим, что в $\mathbb{R}^\infty$ ограниченные множества имеют компактные замыкания, так что единичный шар из E лежит в компакте (он не обязан быть замкнутым в $\mathbb{R}^\infty$, примером служит пространство c_0). Как уже отмечалось выше, $\sigma_n(E) = 1$ для всех n. Чтобы установить равномерную интегрируемость функции p_E относительно мер μ_n, достаточно получить оценку

$$\sup_{n\ge 3} \int\limits_E p_E^{3/2} \, d\sigma_n \le 3\|p_E\|_{L^4(\gamma)} < \infty.$$

Такая оценка вытекает из неравенства Гёльдера с показателями 4/3 и 4 применительно к интегралу

$$\int\limits_E p_E^{3/2} \, d\sigma_n = \int\limits_E \varphi_n^{3/2} p_E \circ P_n \, d\gamma \le \biggl(\int\limits_E \varphi_n^2 \, d\gamma\biggr)^{3/4} \biggl(\int\limits_E (p_E \circ P_n)^4 \, d\gamma\biggr)^{1/4}$$
$$\le 3\biggl(\int\limits_E (p_E \circ P_n)^4 \, d\gamma\biggr)^{1/4} \le 3\biggl(\int\limits_E p_E^4 \, d\gamma\biggr)^{1/4},$$

где мы использовали равенство (3.1) и упомянутый выше факт, что для всякой борелевской полунормы p, заданной на линейном подпространстве γ-меры 1, при $k > 0$ верно неравенство

$$\int\limits_X p(P_n x)^k \, \gamma(dx) \le \int\limits_X p(x)^k \, \gamma(dx),$$

поскольку

$$\int\limits_X l(P_n x)^2\,\gamma(dx) \le \int\limits_X l(x)^2\,\gamma(dx)$$

для всякого непрерывного линейного функционала l. В самом деле, в данном случае это условие также выполнено, так как $l(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i x_i$, поэтому интеграл от l^2 равен $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^2$, а интеграл от $(l \circ P_n)^2$ равен $\sum\limits_{i=1}^{\min(N,n)} c_i^2$.

В последнее время изучаются более общие псевдометрики Канторовича на пространствах мер на неметризуемых вполне регулярных пространствах (см., например, [28–30]). Для таких псевдометрик возможно получение аналогов результатов этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Borel E.* Introduction géométrique à quelques théories physiques. Paris: Gauthier-Villars, 1914.
2. *Gâteaux R.* Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel // Bull. Soc. Math. France. 1919. V. 47. P. 48–67.
3. *Lévy P.* Leçons d′analyse fonctionnelle. Paris: Gauthier-Villars, 1922.
4. *Hida T., Nomoto H.* Gaussian measure on the projective limit space of spheres // Proc. Japan Acad. 1964. V. 40. P. 301–304.
5. *Umemura Y., Kôno N.* Infinite dimensional Laplacian and spherical harmonics // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A. 1965/66. V. 1. P. 163–186.
6. *Mckean H.* Geometry of differential space // Ann. Prob. 1973. V. 1. P. 197–206.
7. *Diaconis P., Freedman D.* A dozen de Finetti-style results in search of a theory // Ann. Inst. H. Poincaré. Probab. et Statist. 1987. V. 23, suppl. N 2. P. 397–423.
8. *Stam A. J.* Limit theorems for uniform distributions on spheres in high-dimensional Euclidean spaces // J. Appl. Probab. 1982. V. 19, N 1. P. 221–228.
9. *Chatterjee S., Meckes E.* Multivariate normal approximation using exchangeable pairs // ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2008. V. 4. P. 257–283.
10. *Peterson A., Sengupta A. N.* The Gaussian limit for high-dimensional spherical means // J. Funct. Anal. 2019. V. 276, N 3. P. 815–866.
11. *Ledoux M.* The concentration of measure phenomenon. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 2001.
12. *Villani C.* Optimal transport, old and new. New York: Springer, 2009.
13. *Зорич В. А.* Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59, № 3. С. 436–451.
14. *Bogachev V. I.* Gaussian measures. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 1998.
15. *Богачев В. И., Колесников А. В., Шапошников С. В.* Задачи Монжа и Канторовича оптимальной транспортировки.. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2023.
16. *Канторович Л. В.* О перемещении масс // Докл. АН СССР. 1942. Т. 37, № 7-8. С. 227–229.
17. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах // Докл. АН СССР. 1957. Т. 115, № 6. С. 1058–1061.
18. *Канторович Л. В., Рубинштейн Г. Ш.* Об одном пространстве вполне аддитивных функций множества // Вестн. ЛГУ. 1958. № 7, вып. 2. С. 52–59.
19. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
20. *Богачев В. И., Колесников А. В.* Задача Монжа — Канторовича: достижения, связи и перспективы // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 5. С. 3–110.
21. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Действительный и функциональный анализ: университетский курс. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2020.
22. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. 5-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.

23. *Bogachev V. I.* Weak convergence of measures. Rhode Island, Providence: Am. Math. Soc., 2018.
24. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. 7-е изд. М.: Наука, 1970.
25. *Bogachev V. I.* Measure theory. V. 1, 2. New York: Springer, 2007.
26. *Bogachev V. I., Smolyanov O. G.* Topological vector spaces. Cham: Springer, 2017.
27. *Davis W.J., Figiel T., Johnson W.B., Pełczyński A.* Factoring weakly compact operators // J. Funct. Anal. 1974. V. 17. P. 311–327.
28. *Afonin K. A., Bogachev V. I.* Kantorovich type topologies on spaces of measures and convergence of barycenters // Commun. Pure Appl. Anal. 2023. V. 22, N 2. P. 597–612.
29. *Афонин К. А.* Двойственность в задаче Канторовича с фиксированным барицентром и барицентры функционалов // Функцион. анализ и его прил. 2024. Т. 58, № 2. С. 5–22.
30. *Арсенович М., Богачев В. И., Крстич М.* Интегрирование функций со значениями в пространствах мер // Тр. МИАН. 2025. Т. 331.

Поступила в редакцию 20 декабря 2025 г.
После доработки 20 декабря 2025 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048;
Православный Свято-Тихоновский гуманитарный университет,
ул. Новокузнецкая, 23б, Москва 115184
vibogach@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.53

О ВОССТАНОВЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ХААРА, СХОДЯЩЕГОСЯ ПО ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ

Г. Г. Геворкян, В. А. Скворцов

Аннотация. Доказывается существование последовательности натуральных чисел, которая имеет плотность нуль и обладает свойством: если подпоследовательность частичных сумм ряда Хаара с номерами из этой последовательности всюду сходится к всюду конечной интегрируемой по Перрону функции, то данный ряд является рядом Фурье — Хаара своей суммы.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.203

Ключевые слова: ряд Хаара, интеграл Перрона, ряд Фурье.

1. Введение и постановка задачи

Напомним определение системы Хаара. Пусть $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots,$ $1 \le \nu \le 2^\mu$. Обозначим

$$\Delta_k := \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{\nu}{2^\mu}\right), \quad \Delta_k^+ := \left(\frac{\nu-1}{2^\mu}, \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}\right), \quad \Delta_k^- := \left(\frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}, \frac{\nu}{2^\mu}\right).$$

Система Хаара определяется формулами $\chi_1(x) = 1$, $x \in [0,1]$, и

$$\chi_k(x) := \begin{cases} 2^{\frac{\mu}{2}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_k^+, \\ -2^{\frac{\mu}{2}}, & \text{когда} \quad x \in \Delta_k^-, \\ 0, & \text{когда} \quad x \notin \overline{\Delta}_k, \end{cases}$$

для $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots,$ $1 \le \nu \le 2^\mu$. В точках разрыва значение функции $\chi_k(x)$ равно среднему арифметическому односторонних пределов функции в этих точках, а в точках 0 и 1 определяется по непрерывности изнутри интервала $[0,1]$. Отсюда следует, что частичные суммы $S_n(x)$ ряда Хаара $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ обладают свойством

$$S_n(x) = \frac{S_n(x+) + S_n(x-)}{2}, \quad \text{если } x \in (0,1), \tag{1}$$

Работа Г. Г. Геворкяна выполнена при финансовой поддержке Комитета по науке министерства ОНКС Республики Армения (грант No 25RG-1A195). Работа В. А. Скворцова выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по Соглашению № 075-15-2025-345.

и

$$S_n(0) = S_n(0+), \quad S_n(1) = S_n(1-).$$

Для $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$ положим $t_k := \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$. Эта точка является центром отрезка $\overline{\Delta}_k$, носителя функции χ_k. Если $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \dots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, то будем говорить, что точки t_k, функции χ_k и числа k *взяты из μ-й пачки.*

Точками $\{t_k\}_{k=2}^n$ отрезок $[0,1]$ разбивается на n интервалов (два полуоткрытых, остальные открытые), на каждом из которых первые n функций системы Хаара принимают постоянные значения. Обозначим эти интервалы слева направо через Δ_i^n, $i = 1, 2, \dots, n$. Если имеем интервалы $\{\Delta_i^n\}_{i=1}^n$, то интервалы $\{\Delta_i^{n+1}\}_{i=1}^{n+1}$ получаются разделением первого слева самого длинного интервала Δ_i^n на два равных интервала.

Частичные суммы ряда Фурье — Хаара интегрируемой функции f определяются формулами (см., например, [1, гл. 3, § 1])

$$S_n(x) = \frac{1}{|\Delta_i^n|} \int\limits_{\Delta_i^n} f(t)\,dt, \quad \text{когда } x \in \Delta_i^n, \tag{2}$$

где $|\Delta|$ — длина отрезка Δ, а в точках разрыва — формулами (1).

Есть также другие способы определения функций системы Хаара, однако при других определениях теоремы единственности, доказанные в этой работе, и многие другие теоремы, доказанные ранее, могут перестать быть верными. Сам Хаар [2] систему определял так, как это сделано выше.

Система Хаара является первым примером ортонормированной системы, обладающей свойством: ряд Фурье непрерывной функции по системе Хаара равномерно сходится к этой функции.

Исследования вопросов единственности рядов по системе Хаара были начаты в работах [3–5]. В этих работах было доказано, что если ряд по системе Хаара всюду сходится к нулю, то все коэффициенты этого ряда равны нулю. Фабер [6] показал, что даже одноточечное множество $\{\frac{1}{2}\}$ не является множеством единственности для рядов Хаара, т. е. существует нетривиальный ряд по системе Хаара, который всюду вне этого множества сходится к нулю. Оказалось (см., например, [7]), что для рядов Хаара любое одноточечное множество не является множеством единственности. В работе [7] доказана также следующая

Теорема А (Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян). *Пусть ряд Хаара*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x) \tag{3}$$

обладает свойствами:

(a) *ряд* (3) *сходится к некоторой интегрируемой по Лебегу функции* $f(x)$ *всюду на отрезке* $[0,1]$, *кроме, быть может, некоторого счетного множества точек,*

(b) *для любой точки* $x_0 \in [0,1]$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{\chi_{n_k}(x_0)} = 0,$$

где $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ *суть все те номера* n, *для которых* $\chi_n(x_0) \ne 0$.

Тогда ряд (3) *является рядом Фурье — Хаара функции f.*

Ф. Г. Арутюнян [8] обобщил теорему A, доказав, что в теореме A вместо интегрируемой по Лебегу функции можно рассмотреть функции, интегрируемые в широком смысле Данжуа.

Когда ряд (3) сходится во всех точках, условие (b) автоматически выполняется во всех точках. Вообще говоря, условие (b) нужно, чтобы допустить исключительное счетное множество. Условие (b) присутствует во многих теоремах единственности рядов Хаара.

В работе [9] В. А. Скворцов определил некоторое обобщение интеграла Данжуа (HD интеграл), восстанавливающее коэффициенты любого всюду сходящегося ряда Хаара по сумме этого ряда. В работах [10, 11] В. А. Скворцов рассмотрел ряды Хаара с коэффициентами, удовлетворяющими некоторому ослабленному варианту условия (b) теоремы A, сходящиеся всюду по некоторой подпоследовательности частичных сумм. Он показал также, что интеграл, восстанавливающий коэффициенты таких рядов, зависит от того, какая подпоследовательность частичных сумм сходится.

В работе [12] Г. Г. Геворкяна рассмотрены ряды Хаара с некоторой подпоследовательностью частичных сумм, всюду сходящейся к всюду конечной интегрируемой по Лебегу функции. Напомним определение рассмотренной там последовательности. Пусть m_i, $i \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность натуральных чисел. Обозначим

$$I := \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n \in \mathbb{N} : 2^{m_i} < n \le 2^{m_i+1}\}. \tag{4}$$

В работе [12] (см. [12, теорема 2]) доказано, что если частичные суммы $S_j(x) = \sum\limits_{n=1}^{j} a_n \chi_n(x)$, $j \in I$, ряда Хаара (3) всюду на $[0,1]$ сходятся к всюду конечной интегрируемой функции f, т. е.

$$\lim_{j \in I,\, j \to \infty} S_j(x) = f(x) \quad \forall x \in [0,1],$$

то ряд (3) является рядом Фурье — Хаара функции f. Отметим, что здесь не требуется выполнения условия (b) теоремы A.

Напомним, что *плотностью* (*нижней плотностью, верхней плотностью*) последовательности натуральных чисел n_i называется предел (нижний предел, верхний предел) отношения $\frac{\Lambda_n}{n}$, когда $n \to \infty$, где Λ_n — количество членов последовательности n_i, не превосходящих n. Последовательность I, определяемая формулой (4), имеет верхнюю плотность не меньше $1/2$ и может иметь нижнюю плотность 0.

В работе [13] Г. Г. Геворкян усилил результат работы [12], рассмотрев сходимость по подпоследовательности, имеющей плотность нуль.

В настоящей работе получено дальнейшее обобщение упомянутых выше результатов для случая сходимости к функции, интегрируемой в узком смысле Данжуа, или, что эквивалентно, в смысле интеграла Перрона (P-интеграла). Для последовательности n_i, $i \in \mathbb{N}$, плотности нуль, построенной в [13], мы докажем, что если подпоследовательность частичных сумм

$$S_{n_i}(x) = \sum_{k=1}^{n_i} a_k \chi_k(x) \tag{5}$$

ряда Хаара всюду сходится к всюду конечной интегрируемой по Перрону функции f, то этот ряд является рядом Фурье — Хаара функции f.

2. Построение последовательности n_i и вспомогательные леммы

Последовательность n_i определим следующим образом. Пусть μ_q, $q \in \mathbb{N}$, — возрастающая последовательность натуральных чисел с условием

$$\mu_q > \mu_{q-1} + 1. \tag{6}$$

Для $p = 1, 2, \ldots, 2^q - 1$ рассмотрим числа

$$2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} - 1, \quad 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q}, \quad 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} + 1. \tag{7}$$

Рассмотрим также числа

$$2^{\mu_q} + 1 \quad \text{и} \quad 2^{\mu_q + 1}. \tag{8}$$

В последовательность чисел n_i включим числа из (7) и (8), написанные в возрастающем порядке. Оценим плотность этой последовательности. Отметим, что количество чисел n_i из (7) и (8), удовлетворяющих неравенству $2^{\mu_q} < n_i \le 2^{\mu_q+1}$, равно $3 \cdot 2^q - 1$. С учетом всех предыдущих пачек количество чисел n_i, удовлетворяющих неравенству $n_i \le 2^{\mu_q+1}$, не превосходит $3 \cdot 2^{q+1} - q < 2^{q+3}$. Далее, для произвольного n возьмем i, для которого $2^{\mu_q} \le n_i \le n < n_{i+1}$. Тогда

$$\frac{i}{n} \le \frac{i}{n_i} \le \frac{2^{q+3}}{2^{\mu_q}} = 2^{q+3-\mu_q}. \tag{9}$$

Из (9) следует, в частности, что если $\mu_q = 2q$, то плотность последовательности, определяемой (7) и (8), равна нулю. Ясно, что можно выбрать μ_q так, чтобы отношение i/n_i стремилось к нулю с наперед заданной скоростью.

Через I обозначим множество $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$. Заметим, что если $n_i = 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} \in I$, то число $p/2^q$ является правым концом носителя функции χ_{n_i} и левым концом носителя функции χ_{n_i+1}.

Далее будем считать, что n_i взяты из (7) или (8).

Теорема 1. *Пусть частичные суммы*

$$S_{n_i}(x) := \sum_{n=1}^{n_i} a_n \chi_n(x), \quad n_i \in I, \tag{10}$$

всюду сходятся к всюду конечной P-интегрируемой функции $\phi(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n(x)$$

является рядом Фурье — Хаара функции $\phi(x)$.

В частном случае, когда ϕ интегрируема по Лебегу, теорема 1 доказана в работе [13].

Доказательство этой теоремы будет опираться на несколько лемм.

Лемма 1. *Если f — непрерывная функция, то*

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1/2} \int\limits_0^1 \chi_k(t)\, df(t) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $k = 2^\mu + \nu$, $\mu = 0, 1, \ldots$, $1 \le \nu \le 2^\mu$, и $t_k = \frac{2\nu-1}{2^{\mu+1}}$. Обозначим также $a_k = \frac{\nu-1}{2^\mu}$ и $b_k = \frac{\nu}{2^\mu}$. Тогда

$$\left|\int\limits_0^1 \chi_k(t)df(t)\right| = |2^{\mu/2}(2f(t_k) - f(a_k) - f(b_k))|$$

$$= |2^{\mu/2}((f(b_k) - f(a_k)) - 2(f(b_k) - f(t_k)))| \le 3 \cdot 2^{\mu/2}\omega(f, 2^{-\mu-1}), \quad (12)$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f. В силу непрерывности функции f из (12) следует (11). Лемма доказана.

Ниже мы будем часто использовать запись $\Phi(\Delta)$ в случае, когда некоторая функция Φ принимает постоянное значение на интервале Δ.

Из леммы 1 и определения системы Хаара, в частности, следует, что если f — непрерывная функция и

$$b_n = \int\limits_0^1 \chi_n(t)df(t),$$

то

$$\lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(0)\right| = \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(\Delta_1^{n_i})\right| = 0$$

$$= \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(1)\right| = \lim_{n_i\to\infty} n_i^{-1}\left|\sum_{n=1}^{n_i} b_n\chi_n(\Delta_{n_i}^{n_i})\right|. \quad (13)$$

Напомним определение интеграла Перрона. Непрерывная функция $M(x)$ ($m(x)$) называется *мажорантной* (*минорантной*) *функцией* для функции f на конечном интервале (a,b), если $M(a) = 0$ ($m(a) = 0$) и числа Дини функции $M(x)$ ($m(x)$) не меньше (не больше) $f(x)$, если $f(x) > -\infty$ ($f(x) < +\infty$), и больше $-\infty$ (меньше $+\infty$), если $f(x) = -\infty$ ($f(x) = +\infty$).

Функция называется *интегрирумой на конечном интервале* (a,b) *по Перрону*, если существуют последовательности мажорантных функций $M_n(x)$ и минорантных функций $m_n(x)$, для которых

$$\sup_n m_n(b) = \inf_n M_n(b). \quad (14)$$

Общее значение в (14) называется (*определенным*) *P-интегралом* функции f на интервале (a,b). Более подробно об интеграле Перрона см. [14]. Далее в работе, говоря об интеграле, всегда будем иметь в виду интеграл Перрона.

Пусть m является минорантной функцией для функции ϕ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\chi_n(x)$ является ее рядом Фурье — Хаара — Стильтеса, т. е.

$$b_n = \int\limits_0^1 \chi_n(t)\,dm(t).$$

Пользуясь аналогом формулы (2) для рядов Фурье — Стильтеса, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k\chi_k(x) = \frac{1}{|\Delta_i^n|}\int\limits_{\Delta_i^n} dm(t), \quad \text{когда } x \in \Delta_i^n. \quad (15)$$

Обозначим $c_k := b_k - a_k$ и рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k\chi_k(x)$. Частичные суммы этого ряда обозначим через $\widetilde{S}_n(x)$.

Лемма 2. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(\Delta_i^n) = C > 0, \tag{16}$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k(\Delta_{i_1}^{n_1}) > C - \varepsilon \tag{17}$$

на интервале

$$\Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n, \tag{18}$$

который не имеет общего правого конца с Δ_i^n.

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда правый конец интервала Δ_i^n меньше единицы. Допустим, что лемма неверна. Это означает, что если $\Delta_j^{n_i}$, $n_i \in I$, удовлетворяет (18) и не имеет общего правого конца с Δ_i^n, то

$$\sum_{k=1}^{n_i} c_k\chi_k(\Delta_j^{n_i}) \le C - \varepsilon. \tag{19}$$

Через β обозначим правый конец интервала Δ_i^n. Для $n' > n$, $n' \in I$, через $\Delta_\beta^{n'}$ обозначим тот интервал из интервалов $\Delta_i^{n'}$, правый конец которого равен β. В силу того, что

$$\int\limits_{\Delta_i^n} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_i^n} \widetilde{S}_n(t)\,dt = C\bigl|\Delta_i^n\bigr|,$$

справедливо равенство

$$\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) = \int\limits_{\Delta_\beta^{n'}} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt = C\bigl|\Delta_i^n\bigr| - \int\limits_{\Delta_i^n\setminus\Delta_\beta^{n'}} \widetilde{S}_{n'}(t)\,dt. \tag{20}$$

Отсюда получаем

$$\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) > C\frac{|\Delta_i^n|}{|\Delta_\beta^{n'}|} - (C-\varepsilon)\biggl(\frac{|\Delta_i^n|}{|\Delta_\beta^{n'}|} - 1\biggr). \tag{21}$$

Следовательно,

$$\widetilde{S}_{n'}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) > \varepsilon\frac{\bigl|\Delta_i^n\bigr|}{\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|}. \tag{22}$$

Из того, что β меньше 1 и имеет вид $\beta = \frac{p}{2^q}$ для некоторых $q \in \mathbb{N}$ и $p \in \{1, 2, \dots, 2^q - 1\}$, и из (7) следует, что при достаточно больших q выполняется

$$|S_{m_{p,q}}(\beta) - S_{m_{p,q}+1}(\beta)| < \frac{1}{2}, \tag{23}$$

где (см. (7))

$$m_{p,q} = 2^{\mu_q} + p2^{\mu_q - q} - 1 \quad \text{и} \quad m_{p,q}, m_{p,q}+1 \in I. \tag{24}$$

Пусть p и q фиксированы и удовлетворяют (23) и (24). Для этих p и q обозначим для сокращения записи

$$\kappa := m_{p,q}. \tag{25}$$

Из (23)–(25) получим, что при достаточно больших q выполняется

$$|a_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}(\beta)| < \frac{1}{2}. \tag{26}$$

Нетрудно заметить, что β является правым концом носителя функции $\chi_{\kappa+1}$. Поэтому из определения функций системы Хаара и (26) следует, что

$$\|a_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\|_\infty < 1. \tag{27}$$

С другой стороны, из леммы 1 имеем

$$b_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr) = o(\kappa) = o\bigl(\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|^{-1}\bigr), \quad \text{когда } \kappa \to \infty. \tag{28}$$

Из (28) и (27) следует, что для любого $\gamma > 0$ выполняется

$$\bigl|c_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}\bigl(\Delta_\beta^{n'}\bigr)\bigr| = 2|c_{\kappa+1}\chi_{\kappa+1}(\beta)| < \gamma\bigl|\Delta_\beta^{n'}\bigr|^{-1}. \tag{29}$$

при достаточно больших $n' \in I$.

Из (29) и (22) при достаточно больших $n' = \kappa + 1$ получим

$$\widetilde{S}_{\kappa+1}(\Delta_{\kappa+1}^+) > \varepsilon\frac{\bigl|\Delta_i^n\bigr|}{\bigl|\Delta_\beta^{\kappa+1}\bigr|} - \frac{\gamma}{\bigl|\Delta_\beta^{\kappa+1}\bigr|} = \frac{\varepsilon\bigl|\Delta_i^n\bigr| - \gamma}{\bigl|\Delta_\beta^{\kappa+1}\bigr|} > C - \varepsilon. \tag{30}$$

В случае $\beta < 1$ лемма доказана.

Если $\beta = 1$ и лемма неверна, то, как показано выше, выполняются (22) и (13) с $n_i = \kappa = 2^{\mu_q+1}$. Сопоставляя (22) и (13), получаем

$$\lim_{n_i\to\infty,\, n_i\in I}\sum_{n=1}^{n_i} c_n\chi_n(1) = +\infty, \tag{31}$$

что противоречит условию теоремы. Лемма доказана.

Аналогично доказывается следующая

Лемма 3. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k\bigl(\Delta_i^n\bigr) = C > 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k\bigl(\Delta_{i_1}^{n_1}\bigr) > C - \varepsilon, \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n$$

и $\Delta_{i_1}^{n_1}$ не имеет общего левого конца с Δ_i^n.

Из лемм 2, 3 следует

Лемма 4. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k\bigl(\Delta_i^n\bigr) = C > 0,$$

то для любого $\varepsilon \in (0, C)$ найдутся $n_1 \in I$ и i_1 такие, что

$$\sum_{k=1}^{n_1} c_k\chi_k\bigl(\Delta_{i_1}^{n_1}\bigr) > C - \varepsilon, \quad \Delta_{i_1}^{n_1} \subset \Delta_i^n$$

и $\Delta_{i_1}^{n_1}$ не имеет общих концов с Δ_i^n.

Лемма 5. *Если для некоторых n и i выполняется*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_k(\Delta_i^n) = C > 0, \tag{32}$$

то найдутся такие подпоследовательность $n_{i_j} \in I$ и двоично иррациональная точка z, что

$$\limsup_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n_{i_j}} b_k\chi_k(z) > \lim_{i\to\infty} \sum_{k=1}^{n_i} a_k\chi_k(z) = \phi(z). \tag{33}$$

Доказательство. Последовательно применяя лемму 4 с $\varepsilon = \frac{C}{2^{j+1}}$, получим последовательность натуральных чисел $n_{i_j} \in I$ и последовательность вложенных интервалов $\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}$ без общих концов, для которых выполняются

$$\sum_{k=1}^{n_{i_j}} c_k\chi_k\big(\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}\big) = C - \sum_{l=1}^{j} \frac{C}{2^{l+1}} > \frac{C}{2}. \tag{34}$$

Поскольку интервалы $\Delta_{\nu_j}^{n_{i_j}}$ не имеют общих концов, то их пересечение состоит из одной двоично-иррациональной точки z и в этой точке выполняется (33). Лемма доказана.

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1. Лемма 5 позволяет доказать, что для миноранты m функции ϕ справедливо неравенство

$$\int_{\Delta_i^n} S_n\big(\Delta_i^n\big)\,dt \ge \int_{\Delta_i^n} dm(t) \text{ для любых } n \text{ и } i. \tag{35}$$

В самом деле, предположим противное. Тогда применение леммы 5 приводит нас к противоречию с условием теоремы.

Аналогично можно доказать, что если M — мажорантная функция функции ϕ, то для любых n и i выполняется

$$\int_{\Delta_i^n} S_n\big(\Delta_i^n\big)\,dt \le \int_{\Delta_i^n} dM(t). \tag{36}$$

Теперь пусть $\Delta_{i_0}^{n_0} = (\alpha, \beta)$ — любой из интервалов $\Delta_j^{n_i}$. Пусть $m_k(x)$ — последовательность минорантных, а $M_k(x)$ — последовательность мажорантных функций для функции $\phi(x)$ на $[0,1]$ с условием

$$\lim_{k\to\infty} (M_k(1) - m_k(1)) = 0. \tag{37}$$

Учитывая, что разность $M_k(x) - m_k(x)$ — неубывающая функция для всех k, из (37) получим

$$\lim_{k\to\infty} (M_k(x) - m_k(x)) = 0 \quad \text{равномерно на } [0,1], \tag{38}$$

причем

$$\lim_{k\to\infty} m_k(x) = \lim_{k\to\infty} M_k(x) = \int_0^x \phi(t)\,dt. \tag{39}$$

Кроме того, как мы доказали,

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}\left(\Delta_{i_0}^{n_0}\right) \geq \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} dm_k(x) = m_k(\beta) - m_k(\alpha) \quad \text{для всех } k \tag{40}$$

и

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(\Delta_{i_0}^{n_0}) \leq \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} dM_k(x) = M_k(\beta) - M_k(\alpha) \quad \text{для всех } k. \tag{41}$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(t)\,dt = \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} \phi(t)\,dt. \tag{42}$$

Поскольку коэффициенты любого ортогонального ряда могут быть представлены как коэффициенты Фурье его частичной суммы, то при любом $k \leq n$

$$a_k = \int\limits_{\Delta_{i_0}^{n_0}} S_{n_0}(t)\chi_k(t)\,dt.$$

Отсюда с учетом постоянства функции χ_k на интервалах, на которых выполнено (42), получаем, что a_k является также коэффициентом Фурье функции ϕ. Теорема доказана.

Замечание. Фактически мы доказали, что если последовательность μ_q удовлетворяет (6), то для последовательности n_i, определяемой (7) и (8), верна теорема 1. Учитывая это, для любой последовательности $h_m \uparrow \infty$ можно найти последовательность n_i, для которой верна теорема 1 и выполняется $\operatorname{card}\{i : n_i \leq m\} \leq h_m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Теория ортогональных рядов. М.: Изд-во АФЦ, 1999.

2. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen // Funktionensysteme. Math. Ann. 1910. V. 69. P. 331–371.

3. *Арутюнян Ф. Г.* О рядах по системе Хаара // Докл. АН Арм. ССР. 1964. Т. 38, № 3. С. 129–134.

4. *Петровская М. Б.* О нуль рядах по системе Хаара и множествах единственности // Изв. АН. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 4. С. 773–798.

5. *Скворцов В. А.* Теорема типа Кантора для системы Хаара // Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат. 1964. Т. 5, № 4. С. 3–6.

6. *Faber G.* Über die Orthogonalfunktionen des Herrn Haar // Deutsch. Math. Ver. 1910. V. 19. P. 104–112.

7. *О единственности рядов по системам Хаара и Уолша* // Изв. АН. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 6. С. 1391–1408.

8. *Арутюнян Ф. Г.* Восстановление коэффициентов рядов по системам Хаара и Уолша, сходящихся к функциям, интегрируемым по Данжуа // Изв. АН. Сер. мат. 1966. Т. 30, № 2. С. 325–344.

9. *Скворцов В. А.* Вычисление коэффициентов всюду сходящегося ряда Хаара // Мат. сб. 1968. Т. 75, № 3. С. 349–360.

10. *Скворцов В. А.* О рядах Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // Докл. АН СССР. 1968. Т. 183, № 4. С. 784–786.

11. *Скворцов В. А.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 6. С. 707–714.

12. *Геворкян Г. Г.* О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям к интегрируемым функциям // Изв. НАН Армении. Сер. мат. 2025. Т. 60, № 1. С. 3–9.

13. *Геворкян Г. Г. О единственности рядов Хаара, сходящихся по подпоследовательностям частичных сумм* // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 3. С. 407–416.

14. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Факториал Пресс, 2004.

Поступила в редакцию 10 мая 2025 г.
После доработки 30 октября 2025 г.
Принята к публикации 6 ноября 2025 г.

Геворкян Гегам Григорьевич
Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна 1, 0025 Ереван, Армения
`ggg@ysu.am`

Скворцов Валентин Анатольевич
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
`vaskvor2000@yahoo.com`

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.946

ПОЧТИ ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТЬ ОПЕРАТОРОВ С ВОЗРАСТАЮЩИМИ И НЕВОЗРАСТАЮЩИМИ СИМВОЛАМИ

Г. Г. Казарян, В. Н. Маргарян

Аннотация. Находятся необходимые и достаточные условия почти гипоэллиптичности линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами в случае, когда символы (характеристические многочлены) этих операторов бесконечно возрастают при стремлении модуля аргумента этих многочленов к бесконечности и когда они иногда могут быть ограниченными.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.204

Ключевые слова: почти гипоэллиптический дифференциальный оператор (многочлен), регулярность, устойчивость многочленов, элементарность центральных линий относительно многочлена.

Посвящается юбилею
Геннадия Владимировича Демиденко

0. Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ соответственно, $\mathbb{C}^n := \mathbb{R}^n \times i\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \dots \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех n-мерных мультииндексов, т. е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0 \ (i = 1, \dots, n)\}$.

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^{n,+} : \lambda_j > 0 \ (j = 1, \dots, n)$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $t > 0$. Положим $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}$, $|\lambda, \xi| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + \dots + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$, $t^\lambda := (t^{\lambda_1}, \dots, t^{\lambda_n})$, $t^\lambda \xi := (t^{\lambda_1}\xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\xi_n)$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = 1/i \ \partial/\partial x_j$ или $D_j = \partial/\partial \xi_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

Хёрмандером введено следующее понятие линейного гипоэллиптичекого дифференциального оператора (многочлена) (см. [1, определение 11.1.2, теорема 11.1.3]).

Определение 0.1. Дифференциальный оператор $P(D)$ и многочлен $P(\xi)$ называются *гипоэллиптическими*, если выполняются следующие эквивалентные условия:

1) если $\Omega \subset \mathbb{E}^n$, $u \in D'(\Omega)$ и $P(D)u = 0$, то $u \in C^\infty(\Omega)$,

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта 25 RG-1A205 научного комитета РА и тематического финансирования РАУ из средств МОБНРФ.

2) если $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$, то $P^{(\nu)}(\xi)/P(\xi) := D^\nu P(\xi)/P(\xi) \to 0$ при $|\xi| \to \infty$,

3) $d_P(\xi) \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, где $d_P(\xi)$ — расстояние от точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ до многообразия $\mathbb{D}(P) := \{\zeta \in \mathbb{C}^n, P(\zeta) = 0\}$,

4) существуют такие положительные постоянные c и C, что если $\xi \in \mathbb{R}^n$ и величина $|\xi|$ достаточно велика, то

$$|D^\alpha P(\xi)|/|P(\xi)| \leq C|\xi|^{-c|\alpha|}. \tag{0.1}$$

Пусть оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) удовлетворяет более слабому условие, чем условие 2, а именно, существует число $C = C(P) > 0$ такое, что

$$|D^\nu P(\xi)|/[|P(\xi)| + 1] \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \forall \nu \in \mathbb{N}_0^n, \tag{0.2}$$

или пусть условие 3 заменено более слабым условием

$$d_P(\xi) \geq \varepsilon > 0 \tag{0.3}$$

при достаточно больших $|\xi|$.

Известно (см. [2]), что если символ $P(\xi)$ дифференциального оператора $P(D)$ удовлетворяет условию (0.2) и бесконечно растет при $|\xi| \to \infty$, то все решения уравнения $P(D)u = 0$, которые «не слишком быстро» растут на бесконечности, являются бесконечно дифференцируемыми функциями в $\mathbb{E}^n$.

Цель настоящей работы — нахождение алгебраических условий, при которых $P(\xi)$ удовлетворяет условию (0.2) и бесконечно растет при $|\xi| \to \infty$.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, введем некоторые классы операторов и функций.

Прежде всего докажем, что при определенных (не очень жестких) ограничениях условия (0.2) и (0.3) эквивалентны.

Предложение 0.1. *Пусть существуют положительные числа κ и m такие, что*

$$|P(\xi)| \geq \kappa \quad \forall \xi, \ |\xi| \geq m. \tag{0.4}$$

Тогда условия (0.2) *и* (0.3) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть для многочлена P выполняются условия (0.3) и (0.4). Покажем, что многочлен P удовлетворяет также условию (0.2). Будем пользоваться леммой 11.1.4 монографии [1], согласно которой существует постоянная $C = C(P) > 0$ такая, что

$$C^{-1} \leq d_P(\xi) \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ P(\xi) \neq 0. \tag{0.5}$$

В силу условия (0.3) существует $M > 0$ такое, что при $|\xi| \geq M$ имеем

$$\varepsilon \sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|} \leq C \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ P(\xi) \neq 0,$$

т. е.

$$\sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq \left[\sum_{\alpha \neq 0} \left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\right] |P(\xi)| \quad \forall \xi, \ |\xi| \geq M.$$

Так как, очевидно, с некоторой постоянной $c_1 > 0$

$$\sum_{\alpha \neq 0} |P^{(\alpha)}(\xi)| \leq c_1 \quad \forall \xi, \ |\xi| \leq M,$$

отсюда получаем

$$\sum_{\alpha\neq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)|\le \max\left[c_1,\sum_{\alpha\neq 0}\left(\frac{C}{\varepsilon}\right)^{|\alpha|}\right][|P(\xi)|+1]\quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,$$

т. е. многочлен P удовлетворяет условию (0.2).

Докажем обратное утверждение, т. е. что при выполнении условий (0.2), (0.4) для многочлена P с некоторой постоянной $c>0$ выполняется оценка (0.3).

Из условий (0.2), (0.4) с некоторыми положительными постоянными c_2, c_3 при $|\xi|\ge m$ для любого мультииндекса α имеем

$$|P^{(\alpha)}(\xi)|\le c_2[|P(\xi)|+1]=\frac{c_2}{\kappa}[\kappa|P(\xi)|+\kappa]\le\frac{c_2}{\kappa}[\kappa|P(\xi)|+|P(\xi)|]$$
$$=\frac{c_2(1+\kappa)}{\kappa}|P(\xi)|=:c_3|P(\xi)|.$$

Отсюда и из левой части неравенств (0.5) выводим

$$C^{-1}\le d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}|P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi)|^{1/|\alpha|}\le d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}\left|\frac{c_3P(\xi)}{P(\xi)}\right|^{1/|\alpha|}$$
$$=d_P(\xi)\sum_{\alpha\neq 0}(c_3)^{1/|\alpha|}\quad\forall\xi,\ |\xi|\ge m,$$

откуда получаем утверждение нашего предложения при $\varepsilon=C^{-1}/\sum\limits_{\alpha\neq 0}(c_3)^{1/|\alpha|}$.

Предложение 0.1 доказано. $\square$

Замечание 0.1. Предложение 0.1 можно перефразировать так: при выполнении условия (0.4) многочлен P почти гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда

$$\rho(P):=\lim_{t\to\infty}\inf_{|\xi|=t}d_P(\xi)>0. \tag{0.6}$$

В связи с изучением общих линейных дифференциальных уравнений (операторов) многими авторами достаточно хорошо исследованы символы (характеристические многочлены), отвечающие этим уравнениям (операторам) (кроме упомянутой книги Хёрмандера см., например, [3–12]).

Введем понятие сравнения мощностей дифференциальных операторов (многочленов) и, в этих терминах, понятия гипоэллиптического и почти гипоэллиптического операторов (многочленов).

Определение 0.2 (см. [13] или [14]). Будем говорить, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *мощнее* оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и будем обозначать через $Q<P$, если существует постоянная $c>0$ такая, что $|Q(\xi)|\le c[|P(\xi)|+1]$ $\forall\xi\in\mathbb{R}^n$. Если $P<Q<P$, то будем говорить, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ *имеют одинаковую мощность*. Если $|Q(\xi)|/[|P(\xi)|+1]\to 0$ при $|P(\xi)|\to\infty$, то будем говорить, что оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *доминирует по мощности над оператором* $Q(D)$ (*над многочленом* $Q(\xi)$), и обозначать через $Q\ll P$.

Определение 0.3 (см.[1, 15–19]). Оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) называется

1) *гипоэллиптическим*, если $D^\alpha P\ll P$ для всех $0\neq\alpha\in\mathbb{N}_0^n$,
2) *почти гипоэллиптическим*, если $D^\alpha P<P$ для всех $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$.

Из этих определений следует, что гипоэллиптический многочлен является почти гипоэллиптическим. Обратное неверно, в чем можно убедиться на примере многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_1^2\xi_2^2$, которому соответствует оператор

$$P(D) = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2}.$$

Действительно, почти гипоэллиптичность этого многочлена очевидна, в то время как на последовательности $\{\xi^s\} = \{(1, s)\}_{s=1}^{\infty}$

$$D_1 P(\xi^s)/P(\xi^s) \to 2 \neq 0 \quad \text{при } s \to \infty.$$

1. Бесконечно возрастающие почти гипоэллиптические многочлены

В многомерном случае на поведение многочлена от $n > 1$ переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ решающее влияние на бесконечности могут оказать младшие члены. Как иллюстрацию сказанного рассмотрим следующие многочлены, где $n = 2$ и $a, b \in \mathbb{R}^1$.

Пример 1.1. $P^1(\xi) = (\xi_1 + \xi_2)^2 \xi_1^2 + a\xi_2^2$. Очевидно, при $a > 0$ имеем $P^1(\xi) \to \infty$ при $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \to \infty$. В то же время P^1 не обладает этим свойством при $a \leq 0$.

Пример 1.2. $P^2(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) + 2b(\xi_1 - \xi_2)\left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)$. Представляя этот многочлен в виде $P^2(\xi) = \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right)[(\xi_1 - \xi_2)^2 + 2b(\xi_1 - \xi_2) + 1]$, легко убедиться, что $|P^2(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, когда $|b| < 1$, в то время как $P^2(\xi^s) = 0$ на последовательности $\xi^s = [(s - b) + \sqrt{b^2 - 1}, s]$ $(s = 1, 2, \ldots)$, когда $|b| \geq 1$.

Исходя из этих примеров, введем два класса многочленов, обозначим через $\mathbb{I}_n$ множество многочленов $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ (с, вообще говоря, комплексными коэффициентами) таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$ (отметим, что таковыми являются, например, гипоэллиптические многочлены (см. также [2, 14, 15, 17]) и обозначим через $\mathbb{I}_n^+$ множество положительных многочленов с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$.

Очевидно, что в вышеприведенных примерах $P^1 \in \mathbb{I}_2^+$ при $a > 0$ и $P^1 \notin \mathbb{I}_2^+$ при $a \leq 0$, $P^2 \in \mathbb{I}_2$ при $|b| < 1$ и $P^2 \notin \mathbb{I}_2$ при $|b| \geq 1$.

Легко убедиться, что модуль символа (характеристического многочлена) $P(\xi)$ гипоэллиптического оператора $P(D)$ бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля его аргумента $|\xi|$. Этим свойством, вообще говоря, не обладают почти гипоэллиптические операторы, в чем можно убедиться на следующем простом примере: $P(\xi) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + 1$. Очевидно, что это почти гипоэллиптический многочлен, при этом $P(\xi^s) = 1$ на последовательности $\{\xi^s = (s, s)\}_{s=1}^{\infty}$.

Возникает естественный вопрос о нахождении условий, при которых почти гипоэллиптический оператор принадлежит классу $\mathbb{I}_n$. Для ответа на такой вопрос нам необходимы следующие понятия.

Определение 1.1. Будем говорить, что многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *по существу зависит от всех переменных* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, если существует точка $\xi \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\prod_{j=1}^{n} D_j P(\xi) \neq 0$.

Определение 1.2. Многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, по существу зависящий от всех переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$, назовем

1) *устойчивым относительно линейного невырожденного преобразования* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T\xi = \eta$ (относительно невырожденной матрицы $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$), если многочлен $Q_T(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ по существу зависит от всех переменных $\eta_1, \ldots, \eta_n$,

2) *неустойчивым относительно невырожденного преобразования* T, если многочлен $Q_T(\eta)$ зависит только от переменных $\eta_{1_1}, \ldots, \eta_{1_k}$, где $k < n$.

Приведем пример многочлена и относительно него неустойчивого преобразования.

Пусть $n = 2$, $m \in \mathbb{N}$, $a_m b \neq 0$,

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \sum_{j=0}^{m} a_j (\xi_1 + b\xi_2)^j.$$

Легко убедится, что

1) это почти гипоэллиптический многочлен,

2) $P \notin \mathbb{I}_2$,

3) линейным невырожденным преобразованием $\eta_1 = \xi_1 + b\xi_2$, $\eta_2 = \xi_2$ этот многочлен переходит в многочлен от одной переменной

$$Q(\eta) = Q(\eta_1) = \sum_{j=0}^{m} a_j \eta_1^j.$$

Лемма 1.1. *Пусть многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ степени m почти гипоэллиптичен, $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$ — невырожденная матрица и $\eta = T\xi$. Тогда многочлен $Q(\eta) = Q_T(\eta) = P(T^{-1}\eta)$ почти гипоэллиптический.*

Доказательство. Так как для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ многочлен

$$D_\eta^\alpha Q(\eta) = D_\eta^\alpha P(T^{-1}\eta)$$

является линейной комбинацией $\left\{\left(D_\xi^\beta P\right)(T^{-1}\eta)\right\}$ для $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| = |\alpha|$, то из почти гипоэллиптичности P следует существование положительных констант c_1 и c_2 таких, что

$$\sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\eta^\alpha Q(\eta)\right| = \sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\eta^\alpha P(T^{-1}\eta)\right| \le c_1 \sum_{|\alpha| \le m} \left|D_\xi^\beta P(T^{-1}\eta)\right|$$
$$\le c_2[1 + |P(T^{-1}\eta)|] = c_2[1 + |Q(\eta)| \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

Для однородного многочлена $R(\xi) = R(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ степени m введем обозначения

$$\Sigma_n(R) := \{\eta \in \mathbb{R}^n, R(\eta) = 0\}, \quad \Sigma_{n,m}(R) := \Big\{\eta \in \Sigma_n(R), \sum_{|\alpha| \le m-1} |D^\alpha R(\eta)| = 0\Big\}.$$

Замечание 1.1. Очевидно, что $0 \in \Sigma_{n,m}(R)$ для любого однородного многочлена R степени $m \ge 1$ от n переменных, и легко убедиться, что множество $\Sigma_{n,m}(R)$ является подпространством $\mathbb{R}^n$.

Через $\sigma_{n,m}(R)$ обозначим размерность пространства $\Sigma_{n,m}(R)$.

Представим многочлен

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha|\le m} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

степени $m \ge 1$ в виде суммы однородных многочленов, а именно

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{m} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{|\alpha|=j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{1.1}$$

Лемма 1.2. *Для почти гипоэллиптического многочлена $P \notin \mathbb{I}_n$ степени $m \ge 1$*

$$1 \le \sigma_{n,m}(P_m) \le n-1. \tag{1.2}$$

Доказательство. Правая часть неравенства очевидна, докажем левую часть. Так как множество $\Sigma_{n,m}(P_m)$ является линейным многообразием, для доказательства левой части (1.2) достаточно показать существование ненулевой точки $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$.

Так как $P \notin \mathbb{I}_n$, существуют последовательность $\{\xi^s\}$ и постоянная $a_1 > 0$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)| \le a_1 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.3}$$

Векторы $\eta^s := \xi^s/|\xi^s|$ $(s = 1, 2, \dots)$ являются единичными ($|\eta^s| = 1$), поэтому множество $\{\eta^s\}$ имеет точку сгущения $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| = 1$, и, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$. Легко видеть, что $\eta \in \Sigma_n(P_m)$. Покажем, что $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$.

Поскольку $D^\alpha(P - P_m)(\xi) = \mathrm{const} =: C_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m-1$, то ввиду почти гипоэллиптичности многочлена P имеем

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi)| = \sum_{|\alpha|=m-1} |[D^\alpha P_m(\xi) + C_\alpha] - C_\alpha|$$
$$= \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi) - C_\alpha| \le \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P(\xi)| + a_2 \le a_3[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

где $a_2 = \sum\limits_{|\alpha|=m-1} |C_\alpha|$, $a_3 = a_3(P, a_2) > 0$.

Отсюда и из (1.3) следует, что

$$\sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha P_m(\xi^s)| \le a_3(a_1 + 1) \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.4}$$

Так как $|\xi^s| \to \infty$, $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и для $|\alpha| = m-1$ многочлен $D^\alpha P_m$ является линейной однородной функцией, из (1.4) следует, что $D^\alpha P_m(\eta) = 0$ для $|\alpha| = m-1$.

Поскольку для однородного (порядка m) многочлена $R(\xi)$ в силу леммы Эйлера для любого $r \in \mathbb{N}$, $0 < r \le m$

$$R_m(\xi) = \frac{(m-r)!}{m!}(\xi_1 D_1 + \dots + \xi_n D_n)^r R_m(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

то для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $|\beta| \le m-1$, с некоторой постоянной $c > 0$ имеем (напомним, что через P_m обозначается главная m-однородная часть исследуемого многочлена P)

$$D^\beta P_m(\eta) = \frac{1}{(m-|\beta|)!}|(\eta_1 D_1 + \cdots + \eta_n D_n)^{m-|\beta|-1} D^\beta P_m(\eta)| \\ \le c \sum_{|\alpha|=m-1} |(D^\alpha P_m)(\eta)| = 0,$$

т. е. $\eta \in \Sigma_{n,m}(P_m)$, что доказывает левую часть (1.2). $\square$

Замечание 1.2. Требование почти гипоэллиптичности в доказанной лемме существенно. В самом деле, для 2-однородного не почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi) = \xi_1^2 - \xi_2^2 \notin \mathbb{I}_2$ будет $\Sigma_{2,2}(P) = \{0\}$, поэтому $\sigma_{2,2}(P) = 0$.

Далее будем пользоваться также следующими тремя утверждениями, в которых исследуемые многочлены могут и не быть почти гипоэллиптическими и которые, на наш взгляд, представляют определенный интерес.

Лемма 1.3. *Пусть $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — многочлен степени m, T — невырожденная $(n \times n)$-матрица, $\eta := T\xi$ и $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$. Тогда*

1) $\operatorname{ord} Q = m$, *при этом если многочлены P и Q представлены в виде* (1.1), *то $Q_j(\eta) = P_j(T^{-1}\eta)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$,*

2) *если P — однородный многочлен степени m, то таковым является и многочлен Q,*

3) $T^{-1} : \Sigma_{n,m}(P_m) \to \Sigma_{n,m}(Q_m)$.

Доказательство. Сначала докажем утверждение п. 2. Для любых $t > 0$ и $\eta \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$Q(t\eta) = P(T^{-1}(t\eta)) = t^m P(T^{-1}\eta) = t^m Q(\eta),$$

что доказывает п. 2.

Для доказательства п. 1 представим многочлены P и Q в виде суммы однородных многочленов. По линейности преобразования T и по уже доказанной части леммы имеем $Q_j(\eta) = P_j(T^{-1}\eta) = P_j(\xi)$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$ и $\operatorname{ord} Q = \max\limits_{0 \le j \le m} \{\operatorname{ord} Q_j\} = \operatorname{ord} P_m = m$, что доказывает п. 1.

Так как очевидно, что $T\tau \in \Sigma_n(Q_m)$ при $\tau \in \Sigma_n(P_m)$ и

$$\Sigma_{n,m}(P_m) = \bigcap_{|\alpha| \le m-1} \Sigma_n(D^\alpha P_m),$$

то $T^{-1}(\Sigma_{n,m}(P_m)) = \Sigma_{n,m}(Q_m)$, что доказывает п. 3. $\square$

Лемма 1.4. *Пусть многочлен P неустойчив относительно линейного невырожденного преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $Q < P$. Тогда Q неустойчив относительно T.*

Доказательство. Ввиду неустойчивости P существует число $k \in \mathbb{N}$, $k \le n-1$, такое, что (при необходимости после перенумеровки переменных) $p(\eta) := P(T^{-1}\eta) = p(\eta_1, \ldots, \eta_k)$. Так как $Q < P$, существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta = T\xi$

$$|q(\eta)| := |Q(T^{-1}\eta)| = |Q(\xi)| \le c[|P(\xi)| + 1] \\ = c[|P(T^{-1}\eta)| + 1] = c[|p(\eta_1, \ldots, \eta_k)| + 1].$$

Это показывает, что многочлен q зависит только от переменных $\eta_1, \ldots, \eta_k$, т. е. многочлен Q неустойчив относительно преобразования T. $\square$

Лемма 1.5. *Многочлен $P \in \mathbb{I}_n$ устойчив относительно любого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.*

Доказательство. Пусть, напротив, существует многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, неустойчивый относительного некоторой невырожденной $(n \times n)$-матрицы $T = \left(t_i^j\right)_{i,j=1}^n$, и $\eta = T\xi$. Тогда $p(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ является многочленом $k \le n-1$ переменных $\eta_1, \dots, \eta_k$.

Так как $k < n$, система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n t_i^j \xi_j = 0 \quad (i = 1, \dots, k) \tag{1.5}$$

имеет ненулевое решение $\tau \in \mathbb{R}^n$ и из однородности системы (1.5) следует, что $\xi^s = s\tau$ будет решением этой системы для любого $s \in \mathbb{N}$, при этом $P(\xi^s) = p(\eta^s) = \mathrm{const}$ $(s = 1, 2, \dots)$. Так как $|\xi^s| = s|\tau| \to \infty$ при $s \to \infty$, это противоречит условию $P \in \mathbb{I}_n$. $\square$

Лемма 1.6. *Пусть $R(\xi) = R(\xi_1, \dots, \xi_n)$ — однородный многочлен степени $m \ge 1$. Для того чтобы существовала постоянная $c > 0$ такая, что справедливо неравенство*

$$|\xi| \le c \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R(\xi)| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.6}$$

необходимо и достаточно условие $\Sigma_{n,m}(R) = \{0\}$.

Доказательство. Если множество линейных однородных многочленов $\{D^\alpha R; |\alpha| = m-1\}$ не имеет общего ненулевого корня, то

$$r(\xi) := \sum_{|\alpha|=m-1} |D^\alpha R(\xi)|^2$$

является однородным многочленом второй степени, для которого с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство $|\xi|^2 \le c_1 r(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, откуда следует оценка (1.6).

Докажем обратное, пусть $0 \ne \tau \in \mathbb{R}^n$ — общий корень многочленов $\{D^\alpha R; |\alpha| = m-1\}$. Тогда в силу леммы Эйлера с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем для любого $\beta \in \mathbb{N}_0^n$, $0 \le |\beta| \le m-1$

$$\begin{aligned} |(D^\beta R)(\eta)| = \frac{1}{(m-|\beta|)!} &|(\eta_1 D_1 + \dots + \eta_n D_n)^{m-|\beta|-1} D^\beta R(\eta)| \\ &\le c_2 \sum_{|\alpha|=m-1} |(D^\alpha R)(\eta)| = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\tau \in \Sigma_{n,m}(R)$. Это противоречит условию леммы и доказывает лемму. $\square$

Лемма 1.7. *Пусть $n \ge 2$, $1 \le k < n$, $\xi' := (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' := (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $\xi = (\xi', \xi'')$ и $P(\xi)$ — почти гипоэллиптический многочлен степени m, представленный в виде суммы однородных многочленов:*

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^m P_j(\xi) = \sum_{j=0}^m P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^m \sum_{|\alpha|=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{1.1$'$}$$

при этом многочлен P_m зависит только от переменных ξ', т. е. $P_m(\xi) = P_m(\xi', 0'')$ и $\Sigma_{k,m}(P_m) = \{0\}$. Тогда $P \in \mathbb{I}_n$ в том и только в том случае, когда $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$.

Доказательство. В силу условия леммы многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi) = P_m(\xi', 0'') + \sum_{\alpha' \in \mathbb{N}_0^k} (\xi')^{\alpha'} q_{\alpha'}(\xi''), \tag{1.7}$$

где $|\alpha'| + \operatorname{ord} q_{\alpha'} \le m - 1 \ \forall \alpha' \in \mathbb{N}_0^k$ и $q_{0'}(\xi'') = P(0', \xi'')$.

Если $P \in \mathbb{I}_n$, то, очевидно, $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$. Покажем, что если $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$, то в условиях леммы $P \in \mathbb{I}_n$. Предположим обратное: пусть при $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$ существуют последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$, и число $c_1 > 0$, для которых

$$|P(\xi^s)| \le c_1 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.8}$$

Отсюда в силу почти гипоэллиптичности P, условия $\Sigma_{k,m}(P_m) = \{0\}$ леммы и на основании леммы 1.6 с некоторой постоянной $c_2 > 0$ имеем

$$|(\xi')^s| \le c_2 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.9}$$

Покажем, что в условиях леммы из (1.8), (1.9) следует существование постоянной $c_3 > 0$ такой, что для всех $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $1 \le |\alpha'| \le m - 1$,

$$|q_{\alpha'}((\xi'')^s)| \le c_3 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.10}$$

Докажем оценку методом математической индукции по убыванию $|\alpha'|$. Для $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $|\alpha'| = m - 1$ оценка (1.10) непосредственно следует из представления (1.7), так как в этом случае $\operatorname{ord} q_{\alpha'} = 0$. Пусть оценка (1.10) верна для всех $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $2 \le r \le |\alpha'| \le m - 1$. Докажем ее для $\{\alpha'\} : |\alpha'| = r - 1$.

Из условия почти гипоэллиптичности P с некоторой постоянной $c_4 > 0$ для любого $\alpha' \in \mathbb{N}_0^k$, $|\alpha'| = r - 1$, имеем (см. представление (1.7))

$$|D^{\alpha'} P(\xi)| = \Bigg| D^{\alpha'} P_m(\xi', 0'') + \sum_{\beta' \ge \alpha', \beta' \ne \alpha'} \frac{\beta'!}{(\beta' - \alpha')!} (\xi')^{\beta' - \alpha'} q_{\beta'}(\xi'') \\ + (\alpha'!) q_{\alpha'}(\xi'') \Bigg| \le c_4 [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда по предположению индукции и на основании (1.8), (1.9) имеем с некоторыми положительными постоянными c_5 и c_6 для всех $s = 1, 2, \dots$

$$|q_{\alpha'}((\xi'')^s)| \le c_5 [|P(\xi^s)| + |D^{\alpha'} P_m((\xi')^s, 0'')| \\ + \sum_{\beta' \ge \alpha', \beta' \ne \alpha'} \frac{\beta'!}{(\beta' - \alpha')!} |((\xi')^s)^{\beta' - \alpha'}| |q_{\beta'}((\xi'')^s)| + 1] \le c_6,$$

что по индукции доказывает оценку (1.10).

Из оценок (1.8)–(1.10) имеем с некоторой постоянной $c_7 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$

$$|q_{0'}((\xi'')^s)| = \Bigg| P(\xi^s) - P_m((\xi')^s, 0'') - \sum_{|\alpha'| \ge 1} ((\xi')^s)^{\alpha'} q_{\alpha'}((\xi'')^s) \Bigg| \le c_7.$$

Так как $P(0', \xi'') = q_{0'}(\xi'')$, полученное неравенство противоречит предположению $P(0', \xi'') \in \mathbb{I}_{n-k}$ и доказывает лемму. $\square$

Из доказанной леммы непосредственно получаем

Следствие 1.1. *Пусть выполняются все условия леммы 1.7, кроме условия $P \in \mathbb{I}_n$. Тогда $P(0', \xi'') \notin \mathbb{I}_{n-k}$.*

Будем пользоваться также следующим очевидным утверждением.

Лемма 1.8. *Пусть вектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ представлен в виде $\xi = (\xi', \xi'')$, где $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $\xi'' = (\xi_{k+1}, \dots, \xi_n)$, $1 \le k < n$, и многочлен $P(\xi)$ почти гипоэллиптичен. Тогда $P(\xi', \xi'')$ как многочлен от ξ' для любого фиксированного ξ'' почти гипоэллиптичен.*

Лемма 1.9. *Пусть почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, по существу зависящий от всех переменных $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ (см. определение 1.1), устойчив относительно любого линейного невырожденного преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Тогда $P \in \mathbb{I}_n$.*

Доказательство будем вести по индукции по n. Пусть $n = 2$ и, напротив, существует почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi_1, \xi_2)$, устойчивый относительно любого линейного невырожденного преобразования, такой, что $P \notin \mathbb{I}_2$, т. е. существуют последовательность $\{\xi^s\} \subset R^2$ и число $c > 0$ такие, что $|\xi^s| \to \infty$ при $s \to \infty$ и

$$|P(\xi^s)| \le c \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{1.11}$$

Представим многочлен P в виде (1.1) и покажем, что P неустойчив относительно некоторого линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Применяя лемму 1.2, из (1.11) получаем, что $\sigma_{2,m}(P_m) = 1$, т. е. $\Sigma_{2,m}(P_m) \setminus \{0\} \ne \varnothing$. Так как $\Sigma_{2,m}(P_m)$ — линейное пространство, существует точка $\tau \in \Sigma_{2,m}(P_m)$, $|\tau| = 1$. Тогда либо $\tau = (1, 0)$, либо $\tau = (0, 1)$, либо $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\tau_1, \tau_2 \ne 0$. Так как случаи $\tau = (1, 0)$ и $\tau = (0, 1)$ рассматриваются аналогично, будем рассматривать только случаи 1) $\tau = (1, 0)$, 2) $\tau_1 \tau_2 \ne 0$. В случае 1 $P_m(\xi_1, \xi_2) = \gamma_{(0,m)} \xi_2^m$, где $\gamma_{(0,m)} \ne 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\gamma_{(0,m)} = 1$. Тогда многочлен P можно представить в виде

$$P(\xi) = \xi_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} \xi_2^j q_j(\xi_1), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \tag{1.12}$$

где $j + \operatorname{ord} q_j \le m - 1$, $j = 0, 1, \dots, m - 1$.

Из условия $P \notin \mathbb{I}_2$ и следствия 1.1 имеем $q_0(\xi_1) = P(\xi_1, 0) \notin \mathbb{I}_1$. Так как q_0 — многочлен от одной переменной, отсюда получаем, что $\operatorname{ord} q_0 = 0$, т. е. $q_0(\xi_1) \equiv \mathrm{const} =: c_0$. Тогда для любого $j : 1 \le j \le m - 1$ в силу условия леммы имеем с некоторой постоянной $\kappa_1 > 0$

$$|q_j(\xi_1)| = \frac{1}{j!} \big| \big(D_2^j P\big)(\xi_1, 0) \big| \le \kappa_1 [|P(\xi_1, 0)| + 1] = \kappa_1 [|q_0(\xi_1) + 1|]$$
$$\le \kappa_1 (|c_0 + 1) \quad \forall \xi_1 \in \mathbb{R}^1.$$

Следовательно, $q_j(\xi_1) \equiv \mathrm{const} =: c_j$, $j = 1, \dots, m-1$. Тогда из (1.12) следует равенство

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \xi_2^j, \quad \xi \in \mathbb{R}^2.$$

Это противоречит условию леммы, так как P не зависит от переменной ξ_1.

Рассмотрим случай 2. В этом случае в силу леммы 1.2 многочлен P_m представляется в виде

$$P_m(\xi) = \gamma (\tau_2 \xi_1 - \tau_1 \xi_2)^m, \quad \xi \in \mathbb{R}^2,$$

где $\gamma \neq 0$. Не умаляя общности, будем считать, что $\gamma = 1$.

Совершим следующую замену переменных: $\eta_1 = \tau_2\xi_1 - \tau_1\xi_2$, $\eta_2 = \tau_1\xi_1 + \tau_2\xi_2$. Очевидно, матрица T этого преобразования невырожденная. Обозначив $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$, получим

$$Q(\eta) = P(\tau_2\eta_1 + \tau_1\eta_2, -\tau_1\eta_1 + \tau_2\eta_2) = \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\eta_1, \eta_2), \tag{1.13}$$

где Q_j — однородный многочлен степени $j : j = 0, 1, \ldots, m-1$.

Так как матрица T обратима, по лемме 1.1 многочлен Q почти гипоэллиптичен, при этом, так как по предположению $P \notin \mathbb{I}_2$, имеем $Q \notin \mathbb{I}_2$.

Проводя аналогичные рассуждения, как и в случае 1, получим

$$Q(\eta) = \eta_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} c_j \eta_1^j, \quad \eta \in \mathbb{R}^2,$$

т. е. многочлен P неустойчив относительно линейного обратимого отображения $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения леммы при $n = 2$.

Пусть утверждение леммы верно при $n \leq r-1$ $(r \geq 3)$, докажем его для $n = r$. Предполагая обратное, т. е. что существуют последовательность $\{\xi^s\}$: $|\xi^s| \to \infty$, $s \to \infty$, и число $c > 0$ такие, что выполняется соотношение (1.11).

Из (1.11) в силу леммы 1.2 имеем $1 \leq \sigma_{r,m}(P_m) =: l \leq r-1$. Пусть $\tau^1, \ldots, \tau^l$ — базис в $\sigma_{r,m}(P_m)$ и $\tau^1, \ldots, \tau^l, \tau^{l+1}, \ldots \tau^r$ — базис в R^r. Обозначим $\Im := \left(\tau_i^j\right)_{i,j=1}^r$. Очевидно, $\Im$ — невырожденная матрица. Пусть $\eta := \Im^{-1}\xi$, $\xi \in R^r$. Тогда в силу леммы 1.1 многочлен $Q(\eta) := P(\Im\eta)$ почти гипоэллиптичен. Представим Q в виде (1.1) суммы однородных многочленов

$$Q(\eta) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\eta), \quad \eta \in R^r.$$

Из определения матрицы $\Im$ следует, что $e^j := \Im^{-1}\tau^j$, $j = 1, \ldots, r$, является базисом в $\mathbb{R}^n$, при этом в силу определения матрицы $\Im$ имеем $e_i^j = \delta_i^j$ $(i, j = 1, \ldots, r)$, где $\{\delta_i^j\}$ — символ Кронекера.

Так как $Q_m(\eta) = P_m(\Im\eta)$ (см. лемму 1.3), то $Q_m(e^j) = P_m(\Im e^j) = P_m(\tau^j) = 0$ при $j = 1, \ldots, l$. Покажем, что $Q_m(\eta) = Q_m(0, \ldots, 0, \eta_{l+1}, \ldots, \eta_r)$ для $\eta \in R^r$. Сначала покажем, что $Q_m(\eta) = Q_m(0, \eta_2, \ldots, \eta_r)$ для $\eta \in R^r$.

Представим многочлен Q_m в виде

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=0}^{m} \eta_1^{m-j} q_{j,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r), \quad \eta \in R^r, \tag{1.14}$$

где $q_{j,m}$ — однородный многочлен степени j $(j = 0, 1, \ldots, m)$, и покажем по индукции, что $q_{j,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r) \equiv 0$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Так как $q_{0,m}$ — однородный многочлен степени 0, то

$$q_{0,m}(\eta_2, \ldots, \eta_r) \equiv \mathrm{const} =: c_0 = q_{0,m}(0, \ldots, 0) \quad \forall(\eta_2, \ldots, \eta_r) \in \mathbb{R}^{r-1}. \tag{1.15}$$

Из условия $\tau^1 \in \Sigma_{r,m}(P_m)$, применяя лемму 1.3, получим, что $e^1 \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$. Отсюда, из представления (1.14), соотношения (1.15) и того факта, что однородный многочлен положительной степени в точке 0 принимает нулевое значение, имеем

$$0 = Q_m(e^1) = \sum_{j=0}^{m} 1^{m-j} q_{j,m}(0,\dots,0) = q_{0,m}(0,\dots,0) = c_0 = q_{0,m}(\eta_2,\dots,\eta_r),$$

т. е. $q_{0,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$.

Пусть $q_{j,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$ при $j \le k-1$ ($k \ge 1$). Докажем, что

$$q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0.$$

По предположению индукции многочлен Q_m представляется в виде

$$Q_m(\eta) = \sum_{j=k}^{m} \eta_1^{m-j} q_{j,m}(\eta_2,\dots,\eta_r), \quad \eta \in \mathbb{R}^r. \tag{1.16}$$

Пусть

$$q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) = \sum_{\alpha_2+\dots+\alpha_r=k} \delta_{(\alpha_2,\dots,\alpha_r)} \eta_2^{\alpha_2} \dots \eta_r^{\alpha_r} \tag{1.17}$$

— однородный многочлен степени k. Так как $e^1 \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$ и $k < m$, то, пользуясь соотношениями (1.16), (1.17), для любого $\beta = (\beta_2,\dots,\beta_r) \in \mathbb{N}_0^{r-1}$, $|\beta| = k$, имеем

$$0 = (D^\beta Q_m)(e^1) = \sum_{j=k}^{m} 1^{m-j} (D^\beta q_{j,m})(0,\dots,0) = (D^\beta q_{k,m})(0,\dots,0) = \beta!\delta_{(\beta_2,\dots,\beta_r)},$$

т. е. $\delta_{(\beta_2,\dots,\beta_r)} = 0$ для всех $(\beta_2,\dots,\beta_r) \in N_0^{r-1}$, $\beta_2 + \dots + \beta_r = k$, откуда и из (1.17) следует, что $q_{k,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) \equiv 0$. Тогда в силу индукции получим, что $Q_m(\eta) = q_{m,m}(\eta_2,\dots,\eta_r) = Q_m(0,\eta_2,\dots,\eta_r)$ $\forall \eta \in \mathbb{R}^n$.

Рассуждая аналогично и учитывая, что $e^j \in \Sigma_{r,m}(Q_m)$ ($j = 1,\dots,l$), получим $Q_m(\eta) \equiv Q_m(0,\dots,0,\eta_{l+1},\dots,\eta_r)$.

Обозначим $\eta' := (\eta_1,\dots,\eta_l)$ и $\eta'' := (\eta_{l+1},\dots,\eta_r)$. Тогда многочлен Q в силу уже доказанного можно представить в виде

$$\begin{aligned} Q(\eta) = \sum_{j=0}^{m} Q_j(\eta) = Q_m(0',\eta'') + \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(\eta) \\ = Q_m(0',\eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}(\eta'), \end{aligned} \tag{1.18}$$

где $|\alpha''| + \operatorname{ord} q_{\alpha''} \le m - 1$ для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}$ При этом в силу леммы 1.3 $\Sigma_{r-l,m}(Q_m) = \{0\}$, так как $\tau^1,\dots,\tau^l$ является базисом пространства $\Sigma_{r,m}(P_m)$. Применяя следствие 1.1, получим, что $q_{0''}(\eta') = Q(\eta',0'') \notin \mathbb{I}_l$. Учитывая, что многочлен одной переменной степени больше нуля принадлежит $\mathbb{I}_1$, отсюда получаем, что либо 1) $l = 1$, $q_0(\eta') = \mathrm{const} =: c_{0''}$, $\eta' \in \mathbb{R}^1$, либо 2) $2 \le l \le r-1$.

Так как Q почти гипоэллиптичен, то в случае 1 с некоторой постоянной $\kappa_2 > 0$ при всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}$ имеем

$$\begin{aligned} |q_{\alpha''}(\eta')| = \frac{1}{\alpha''!} |(D^{\alpha''} Q)(\eta',0'')| \le \kappa_2[|Q(\eta',0'')| + 1] \\ = \kappa_2[|q_{0''}(\eta')| + 1] = \kappa_2[|c_{0''}| + 1] \quad \forall \eta' \in \mathbb{R}^1. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что $q_{\alpha''}(\eta') \equiv \mathrm{const} =: c_{\alpha''}$ для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}$. Тогда из (1.18) получаем, что

$$Q(\eta) = Q_m(\eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-1}} c_{\alpha''}(\eta'')^{\alpha''} = Q(0', \eta'') \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^r,$$

т. е. многочлен P неустойчив относительно некоторого линейного обратимого отображения.

Рассмотрим случай 2 ($l \geq 2$). Так как многочлен P почти гипоэллиптичен, в силу леммы 1.8 многочлен $q_{0''}(\eta')$ также почти гипоэллиптичен. Более того, так как $\Sigma_{r-l,m}(Q_m) = \{0\}$ и $Q \notin \mathbb{I}_r$, то ввиду следствия 1.1 $q_{0''} \notin \mathbb{I}_l$.

С другой стороны, так как $l < r$, то в силу индукции по n существуют число $l_1 \in \mathbb{N} : l_1 \leq l-1$ и линейное обратимое отображение $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$ такие, что многочлен $q_{0''}(V^{-1}z')$ зависит только от переменных $z_1, \ldots, z_{l_1}$, т. е. при $\eta' \in \mathbb{R}^l$ и $z' = V\eta'$

$$q_{0''}(\eta') = q_{0''}(V^{-1}z') =: q_{0''}^V(z_1, \ldots, z_{l_1}).$$

Следовательно, многочлен $q_{0''}$ неустойчив относительно линейного обратимого отображения $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$.

В силу почти гипоэллиптичности многочлена Q существует постоянная $\kappa_3 > 0$ такая, что для всех $\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}$

$$|q_{\alpha''}(\eta')| = \frac{1}{\alpha''!}|(D^{\alpha''}Q)(\eta', 0'')| \leq \kappa_3[|Q(\eta', 0'')| + 1] = \kappa_3[|q_{0''}(\eta')| + 1] \quad \forall \eta' \in \mathbb{R}^l.$$

Отсюда, применяя лемму 1.4, получим, что многочлены $\{q_{\alpha''}(\eta') : \alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}\}$ неустойчивы относительно линейного обратимого отображения $V : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^l$. Поэтому

$$q_{\alpha''}(\eta') = q_{\alpha''}(V^{-1}z') =: q_{\alpha''}^V(z_1, \ldots, z_{l_1}) \quad \forall \alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l},\ \eta' \in \mathbb{R}^l,\ z' = V\eta'.$$

Имея это в виду, из (1.18) получаем

$$Q(\eta) = Q_m(0', \eta'') + \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}(V^{-1}z') = Q_m(0', \eta'')$$
$$+ \sum_{\alpha'' \in \mathbb{N}_0^{r-l}} (\eta'')^{\alpha''} q_{\alpha''}^V(z_1, \ldots, z_{l_1}), \quad \eta = (\eta', \eta'') \in R^r,\ \eta' \in R^l,\ z' = V\eta'.$$

Отсюда следует, что многочлен Q и тем самым многочлен P неустойчивы. Полученное противоречие доказывает лемму 1.9. $\square$

Определение 1.3. Прямую, проходящую через начало координат, назовем *центральной прямой.* Центральную прямую $L \subset \mathbb{R}^n$ назовем *элементарной* для многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, если $P(\xi) = \mathrm{const}\ \forall \xi \in L$.

Теорема 1.1. *Для почти гипоэллиптического многочлена* $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) $P \in \mathbb{I}_n$;

(2) P *устойчив относительно любого линейного обратимого преобразования* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

(3) P *не имеет элементарной центральной прямой.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (2) непосредственно следует из лемм 1.5 и 1.9.

Если P принадлежит $\mathbb{I}_n$, то, очевидно, для него не существует центральной прямой, являющейся элементарной для P, т. е. из (1) следует (3).

Покажем, что из (3) следует (1). Предполагая противное и проводя аналогичные рассуждения, как при доказательстве леммы 1.9, получим существование линейного обратимого преобразования $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, относительно которого P неустойчив, т. е. многочлен $Q(\eta) := P(T^{-1}\eta)$ зависит только от переменных $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$. Следовательно, $Q(0, \dots, 0, \eta_n) = Q(0, \dots, 0, 0)$. Так как $L := \{T^{-1}(0, \dots, 0, \eta_n)\eta_n \in R^1\}$ является центральной прямой и $P(\xi) = Q(0, \dots, 0)$ $\forall \xi \in L$, то L является элементарной для P. Это противоречит нашему предположению и доказывает, что из (3) следует (1). Теорема 1.1 доказана. $\square$

2. Почти гипоэллиптичность невырожденных дифференциальных операторов (многочленов)

Определение 2.1 (см. [4] или [5]). Пусть $\mathscr{A} = \{\nu^1, \dots, \nu^N\}$ — конечный набор точек из $\mathbb{N}_0^n$. Наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки (мультииндексы) множества $\mathscr{A}$, обозначим через $\Re(\mathscr{A})$ и назовем *многогранником Ньютона множества* $\mathscr{A}$.

Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ назовем *полным* (см. [4] или [13]), если $\Re$ имеет вершину в начале координат $\mathbb{R}^{n,+}$ и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат. k-Мерные грани многогранника $\Re$ обозначим через $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k', k = 0, 1, \dots, n-1)$. Грани многогранника Ньютона будем по определению считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется *внешней нормалью* (или $\Re$-нормалью) грани Γ многогранника $\Re$, если 1) $(\lambda, \alpha) = (\lambda, \beta)$ для произвольных α и β из Γ, 2) $(\lambda, \alpha) > (\lambda, \beta)$ для произвольных $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Re \setminus \Gamma$.

Другими словами, $\Re$-нормаль k-мерной грани Γ многогранника $\Re$ $(0 \le k \le n-1)$ это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\Re$, содержащей грань Γ и не содержащей какую-либо грань $\Re$, размерности больше чем k.

Таким образом, данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\Re$.

Обозначим через $\Lambda_i^k = \Lambda(\Re_i^k)$ множество внешних нормалей грани $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k',\ k = 0, 1, \dots, n-1)$. Отметим, что множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$) или является открытым множеством (когда $0 \le k < n-1$). Очевидно, что для каждого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$ $(1 \le i \le M_k',\ 0 \le k \le n-1)$ существует число $d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \ge 0$ такое, что $(\lambda, \alpha) = d_{i,k}$ для всех $\alpha \in \Re_i^k$ и $(\lambda, \alpha) < d_{i,k}$ для любого $\alpha \in \Re \setminus \Re_i^k$. Более того, $\Re$-нормаль $(n-1)$-мерной (и только $(n-1)$-мерной) грани $\Re_i^{n-1}$ многогранника $\Re$ и число $d_{i,n-1}(\lambda)$ $(1 \le i \le M_{n-1}')$ определяются однозначно.

Для многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ обозначим через $\Re^0$ множество его вершин, через $\Lambda^{n-1}(\Re)$ — множество (внешних относительно $\Re$) единичных нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней и через $\partial\Re$ обозначим множество точек $\{\nu \in \Re\}$, для которых существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ такой, что $(\lambda, \nu) = d_\Re(\lambda)$, где $d_\Re(\lambda) := \max\limits_{\nu \in \Re}(\lambda, \nu)$.

Грань $\Re_i^k$ $(1 \le i \le M_k';\ 0 \le k \le n-1)$ многогранника $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется *главной* (см. [4]), если среди ее внешних нормалей существует нормаль, хотя бы одна координата которой положительна. Главная грань $\Re_i^k$ называется *правильной* (вполне правильной) если среди ее внешних нормалей существует нормаль с неотрицательными (положительными) координатами.

Полный многогранник $\Re$ назовем *правильным* (*вполне правильным*), если все его главные грани являются правильными (вполне правильными).

Пусть

$$P(D) = P(D_1, \dots, D_n) = \sum_{\beta} \gamma_\beta D^\beta$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и

$$P(\xi) = \sum_{\beta} \gamma_\beta \xi^\beta$$

— его символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\beta \in \mathbb{N}_0^n; \gamma_\beta \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества точек $\{(P) \cup (0)\}$ называют *многогранником Ньютона оператора* $P(D)$ (*многочлена* $P(\xi)$) и обозначают через $\Re(P)$.

Многочлен $R(\xi)$ назовем *обобщенно однородным*, если существуют вектор $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и число $d = d(R, \lambda)$ такие, что

$$R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1}\xi_1, \dots, t^{\lambda_n}\xi_n) = t^d R(\xi)$$

для всех $t > 0$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$. В тех случаях, когда необходимо указать вектор λ и число d, такой многочлен назовем λ-*однородным* λ-*степени* d. Для обобщенно однородного (λ-однородного) многочлена $R(\xi)$ введем следующие обозначения:

$$\Sigma(R) := \{\eta \in \mathbb{R}^{n,0}, R(\eta) = 0\},$$

$$\Sigma(\lambda, R) := \{\eta \in \mathbb{R}^{n,0}, |\lambda, \eta| = 1, R(\eta) = 0\}, \quad \lambda > 0.$$

Многочлен

$$P^{i,k}(\xi) := \sum_{\alpha \in \Re_i^k(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha \quad (1 \le i \le M_k';\ 0 \le k \le n-1)$$

назовем *подмногочленом многочлена* $P(\xi)$, *отвечающим грани* $\Re_i^k(P)$ *многогранника* $\Re(P)$. В работе [4] доказано, что подмногочлен $P^{i,k}(\xi)$ является λ-однородным λ-степени $d_{i,k}(\lambda)$ для любого вектора $\lambda \in \Lambda_i^k$.

Очевидно, что для любого вектора $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$ существуют натуральное число $M = M(\lambda, \Re_i^k)$ и числа $d_j = d(\lambda, \Re_i^k)$ $(j = 0, 1, \dots, M)$ $(d_0 > d_1 > \dots > d_M)$ такие, что многочлен P можно представить в виде суммы λ-однородных многочленов:

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j} \gamma_\alpha \xi^\alpha. \tag{2.0}$$

Определение 2.2 (см. [4]). Грань $\Re_i^k = \Re_i^k(P)$ $(1 \le i \le M_k'; 0 \le k \le n-1)$ многогранника $\Re(P)$ называется *невырожденной*, если $\Sigma(P^{i,k}) = \varnothing$. Многочлен P называется *невырожденным*, если невырожденны все главные грани его многогранника Ньютона $\Re(P)$.

В. П. Михайловым доказано (см. [4]), что если многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ невырожденный, то существует постоянная $c > 0$ такая, что

$$\sum_{\alpha \in \Re^0(P)} |\xi^\alpha| \le c[|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Докажем, что справедливо в определенном смысле обратное утверждение.

Лемма 2.1. *Если многочлен $P(\xi)$ с полным многогранником Ньютона $\Re(P)$ удовлетворяет соотношению* (2.1), *то P невырожденный.*

Доказательство. Пусть, напротив, некоторая главная грань $\Re_i^k$ $(1 \leq i \leq M_k'; 0 < k \leq n-1)$ многогранника $\Re(P)$ вырожденная, т. е. существует точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ такая, что $P^{i,k}(\eta) = 0$. Докажем, что многочлен P не может удовлетворять соотношению (2.1) ни при какой постоянной c.

Пусть $\lambda \in \Lambda(\Re_i^k)$,

$$P^{i,k}(\xi) = \sum_{\alpha \in (\Re_i^k)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

— подмногочлен многочлена P, отвечающий этой грани, $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и $(\lambda, \alpha) = d_0$ — уравнение $(n-1)$-мерной опорной к $\Re(P)$ гиперплоскости, проходящей через грань $\Re_i^k$. При этом $(\lambda, \alpha) = d_0 = d_\Re(\lambda) > 0$, так как многогранник $\Re(P)$ полный.

Пользуясь представлением многочлена P в виде (2.0) по вектору λ, из условия $P^{i,k}(\eta) = 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$ при $\xi^s = s^\lambda \eta$ имеем

$$P(\xi^s) = P(s^\lambda \eta) = P^{i,k}(s^\lambda \eta) + \sum_{j=1}^{M} P_j(s^\lambda \eta)$$

$$= s^{d_0} P^{i,k}(\eta) + \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta) = \sum_{j=1}^{M} s^{d_j} P_j(\eta),$$

при этом $|(\xi^s)^\alpha| = s^{d_0} \left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right|$.

Так как $\left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right| \neq 0$ для точек $\eta \in \Sigma(P^{i,k})$ и $d_j < d_0$ для всех $j = 1, \dots, M$, то из этих двух соотношений получаем, что $|P(\xi^s)| = o(s^{d_0})$ при $s \to \infty$, в то время как $|(\xi^s)^\alpha|/s^{d_0} = \left|\eta_1^{\alpha_1} \dots \eta_n^{\alpha_n}\right| > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$. Это показывает, что оценка (2.1) не имеет места. □

Исходя из теоремы В. П. Михайлова и леммы 2.1, далее многочлен P назовем *невырожденным* также в том случае, когда для него справедливо соотношение (2.1).

Теорема 2.1. *Характеристический многогранник $\Re = \Re(P)$ гипоэллиптического* (*почти гипоэллиптического*) *многочлена $P(\xi)$ вполне правильный* (*правильный*).

Доказательство. Предположим противное, что многогранник $\Re(P)$ гипоэллиптического (почти гипоэллиптического) многочлена может не быть вполне правильным (правильным). Это означает, что существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$ с хотя бы одной неположительной координатой (с хотя бы одной отрицательной координатой). Ради определенности в обоих случаях предположим, что это первая координата. Итак, пусть $\lambda_1 \leq 0$ $(\lambda_1 < 0)$.

Представим по вектору λ многочлен P в виде (2.0), и пусть точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ такая, что $D_1 P_0(\eta) \neq 0$. Существование такой точки следует из того, что $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$.

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1 P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$. С некоторыми положительными постоянными c_1, c_2 для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$|P(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j} |P_j(\eta)| \leq c_1 s^{d_0}, \tag{2.2}$$

$$|D_1P(\xi^s)| \geq |D_1P_0(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} |D_1P_j(\xi^s)| = s^{d_0-\lambda_1}|D_1P_0(\eta)|$$

$$- \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j-\lambda_1}|D_1P_j(\eta)| \geq s^{d_0-\lambda_1}|D_1P_0(\eta)| - c_2s^{d_1-\lambda_1}. \quad (2.3)$$

Так как $d_0 \geq 0$ (напомним, что $0 \in \Re^0(P)$), то при $\lambda_1 \leq 0$ в силу выбора точки η из оценок (2.2), (2.3) при $s \to \infty$ имеем $|D_1P(\xi^s)|/|P(\xi^s)| \not\to 0$. Это значит, что многочлен P не является гипоэллиптическим, что противоречит условию теоремы.

Если же $\lambda_1 < 0$ в случае почти гипоэллиптического многочлена, то из соотношений (2.2), (2.3) при $s \to \infty$ получим $|D_1P(\xi^s)|/[|P(\xi^s)| + 1] \to \infty$, что противоречит почти гипоэллиптичности многочлена P.

Теорема 2.1 доказана. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ — n-мерный многогранник с вершинами $\alpha^1, \dots, \alpha^N$ и $\alpha \in \Re$, т. е.*

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N} \sigma_j\alpha^j, \ \text{где } \sigma_j \in [0,1] \ (j = 1, \dots, N), \quad \sum_{j=1}^{N} \sigma_j = 1.$$

Тогда для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$|\xi^\alpha| \leq h(\xi) := |\xi^{\alpha^1}| + \dots + |\xi^{\alpha^N}|.$$

Более того, если $\alpha \in \Re \setminus \partial\Re$, то $|\xi^\alpha|/h(\xi) \to 0$ при $h(\xi) \to \infty$.

Доказательство. По неравенству Юнга имеем

$$|\xi^\alpha| = |\xi^{\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\alpha^j}| = |\xi^{\alpha^1}|^{\sigma_1} \dots |\xi^{\alpha^N}|^{\sigma_N} \leq \sum_{j=1}^{N} \sigma_j|\xi^{\alpha^j}| \leq \sum_{j=1}^{N} |\xi^{\alpha^j}|.$$

Для доказательства второй части леммы заметим, что если α — внутренняя точка $\Re$, то для некоторого $t > 1$ точка $t\alpha$ также является внутренней точкой $\Re$, следовательно, $|\xi^{t\alpha}| = |\xi^\alpha|^t \leq ch(\xi)$, т. е. $|\xi^\alpha| \leq c^{1/t}h(\xi)^{1/t}$. Поэтому

$$|\xi^\alpha|/h(\xi) \leq c^{1/t}h(\xi)^{(1/t)-1} \to 0 \text{ при } h(\xi) \to \infty. \quad \square$$

Как дополнение к доказанной лемме докажем еще одно утверждение, которым также будем пользоваться.

Теорема 2.2. *Невырожденный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$)*

(1) *является гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда многогранник $\Re(P)$ вполне правильный,*

(2) *является почти гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда многогранник $\Re(P)$ правильный.*

Доказательство. Часть теоремы, относящаяся к необходимости, следует из теоремы 2.1. Докажем достаточность в п. (1).

Пусть P — невырожденный многочлен, $\Re = \Re(P)$ — вполне правильный многогранник. Докажем, что P гипоэллиптичен. Для этого достаточно доказать, что для любого мультииндекса $0 \neq \nu \in \mathbb{N}_0^n$

$$|D^\nu P(\xi)|/|P(\xi)| \to 0 \quad (2.4)$$

при $|\xi| \to \infty$.

Так как многогранник $\Re(P)$ вполне правильный, то из простых геометрических соображений следует, что $(D^\nu P) \subset \Re(P) \setminus \partial\Re(P)$ для любого ненулевого мультииндекса $\nu \in \mathbb{N}_0^n$.

С другой стороны, по лемме 2.2 для любого $\beta \in \Re(P) \setminus \partial\Re(P)$

$$|\xi^\beta| / \sum_{\alpha \in \Re^0} |\xi|^\alpha \to 0 \tag{2.5}$$

при $\sum\limits_{\alpha \in \Re^0} |\xi|^\alpha \to \infty$, поэтому соотношение (2.4) следует из (2.1) и (2.5).

Теперь докажем достаточность в п. (2). Так как $(D^\nu P) \subset \Re(P)$ для любого $\nu \in \mathbb{N}_0^n$ в силу правильности многогранника $\Re(P)$, то по лемме 2.2 имеем с некоторой постоянной $c > 0$

$$|D^\nu P(\xi)| \le c \sum_{\alpha \in \Re^0} |\xi^\alpha| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда в силу условия теоремы из оценки (2.1) получаем почти гипоэллиптичность P. $\square$

В завершение настоящего пункта докажем еще несколько свойств почти гипоэллиптических многочленов. Сначала в качестве дополнения теоремы 2.2 докажем

Предложение 2.1. *Многогранник Ньютона $\Re(P)$ почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \dots, \xi_n)$, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, является полным.*

Доказательство. Пусть, напротив, почти гипоэллиптический многочлен $P(\xi)$ указанного типа не имеет вершины, например, на оси координат $0\xi_1$. Докажем, что такой многочлен не может быть почти гипоэллиптическим. Из этого предположения и в силу условий нашего предложения имеем, что если $\alpha_1^0 \neq 0$ для вершины α^0 многогранника $\Re(P)$, то $(\alpha_2^0)^2 + \dots + (\alpha_n^0)^2 \neq 0$. Обозначим $F := \{\beta \in (P),\ \beta_j = \alpha_j^0\ (j = 2, \dots, n)\}$. Так как $\alpha^0 \in F$, в силу вышесказанного $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in F\} > 0$. Следовательно, $(m_1, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0) \in (P)$ и поэтому

$$B := \gamma_{(m_1, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0)} \alpha_2^0!, \dots, \alpha_n^0! \neq 0. \tag{2.6}$$

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0} P$ на последовательности $\xi^s := \{(s, 0, \dots, 0)\}$. Так как $\Re(P)$ не имеет вершины на оси $0\xi_1$, отличной от начала координат, то

$$P(\xi^s) = P(0, \dots, 0) \quad (s = 1, 2, \dots,). \tag{2.7}$$

Для $D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0} P$ в силу (2.6) и определений множества F и числа m_1 при $s \to \infty$ имеем

$$\left|\left(D_2^{\alpha_2^0} \dots D_n^{\alpha_n^0}\right) P(\xi^s)\right| = \left| \sum_{\beta \in F} \gamma_\beta \prod_{j=2}^n \left(\alpha_j^0!\right) s^{\beta_1} \right| = |B| s^{m_1} [1 + o(1)]. \tag{2.8}$$

Так как $m_1 > 0$, соотношения (2.6)–(2.8) вместе доказывают, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим. Предложение 2.1 доказано. $\square$

Предложение 2.2. *Пусть $\Re$ — многогранник Ньютона конечного набора точек из $\mathbb{R}^{n,+}$ и $\alpha \in \Re^0$, $\alpha_1 \neq 0$. Если $\alpha^1 := (0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \notin \Re$, то существует вектор $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, для которого $\lambda_1 < 0$.*

Доказательство. Так как

$$\Re = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+},\ (\lambda, \nu) \leq d_{\Re}(\lambda)\ \forall \lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re)\},$$

из условия $\alpha^1 \notin \Re$ следует, что

$$(\lambda^0, \alpha^1) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^0 \alpha_j > d_{\Re}(\lambda^0)$$

для некоторого $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$. Из условия $\alpha \in \Re^0 (\subset \Re)$ имеем

$$\lambda_1^0 \alpha_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j^0 \alpha_j = (\lambda^0, \alpha) \leq d_{\Re}(\lambda^0).$$

Следовательно, $\lambda_1^0 < 0$, так как $\alpha_1 > 0$.

Предложение 2.3. *Пусть $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена*

$$P(\xi) = \sum_{\beta \in (P)} \gamma_\beta \xi^\beta,$$

по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Re^0(P)$. Тогда для любого $j : 1 \leq j \leq n$

$$\alpha^j := (\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, 0, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n) \in \Re.$$

Доказательство. Предположим обратное, что $\alpha^{j_0} \notin \Re$ для некоторого $j_0 : 1 \leq j_0 \leq n$. За счет перенумеровки индексов можно считать, что $j_0 = 1$, т. е. $\alpha^1 = (0, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \notin \Re$. Так как из $\alpha_1 = 0$ следует, что $\alpha^1 = \alpha \in \Re^0(P) \subset \Re(P)$, отсюда имеем $\alpha_1 > 0$. Тогда из условия $\alpha^1 \notin \Re$ и в силу предложения 2.2 существует вектор $\lambda^0 \in \Lambda^{n-1}(\Re)$, для которого $(\lambda^0, \alpha^1) > d_{\Re(P)}(\lambda^0)$ и $\lambda_1^0 < 0$.

Пусть Γ — $(n-1)$-мерная грань $\Re(P)$ с внешней нормалью λ^0. Представим многочлен P по вектору λ^0 в виде суммы λ^0-однородных многочленов

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} \Big[\sum_{\beta \in (P), (\lambda^0, \beta) = d_j(\lambda^0)} \gamma_\beta \xi^\beta \Big], \tag{2.9}$$

где $d_0(\lambda^0) > \dots > d_M(\lambda^0)$, $d_0(\lambda^0) = d_{\Re(P)}(\lambda^0)$ и

$$P_0(\xi) = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} \Big[\sum_{\beta \in (P), (\lambda^0, \beta) = d_0(\lambda^0)} \gamma_\beta \xi^\beta \Big] =: P_\Gamma(\xi).$$

Так как (см. предложение 2.1) многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена полный, то $d_0(\lambda^0) > 0$. Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1^{\alpha_1} P$ на последовательности $\xi^s := s^{\lambda^0} \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$, где точка $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ выбрана так, чтобы

$$B(\eta) := \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 \geq \alpha_1} \gamma_\beta \frac{\beta_1!}{(\beta_1 - \alpha_1)!} \eta_1^{\alpha_1 - \beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} \neq 0. \tag{2.10}$$

Существование такой точки η следует из определений мультииндекса α и грани Γ, так как тогда $\alpha \in (P) \cap \Gamma$, следовательно, $\gamma_\alpha \neq 0$. Пользуясь представлением (2.9) многочлена P, с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $s = 1, 2, \dots$ имеем

$$|P(\xi^s)| \leq \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda^0)} s^{d_j(\lambda^0)} |P_j(\eta)| \leq c_1 s^{d_0(\lambda^0)}. \tag{2.11}$$

Для многочлена $D_1^{\alpha_1} P$, пользуясь представлением (2.7) и условием (2.10), при $s \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \big|\big(D_1^{\alpha_1} P\big)(\xi^s)| &\geq \big|\big(D_1^{\alpha_1} P_0\big)(\xi^s)\big| - \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} \big|\big(D_1^{\alpha_1} P_j\big)(\xi^s)\big| = |B(\xi^s)| \\ &- \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} \big|\big(D_1^{\alpha_1} P_j\big)(\xi^s)\big| = |B(\xi^s)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda^0)} s^{d_j(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} \big|\big(D_1^{\alpha_1} P_j\big)(\eta)\big| \\ &= s^{d_0(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} |B(\eta)| - c_2 s^{d_1(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} s^{d_0(\lambda^0) - \lambda_1^0 \alpha_1} |B(\eta)| [1 + o(1)]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Так как $\lambda_1 < 0$, $d_0(\lambda^0) > 0$ и $d_1(\lambda^0) < d_0(\lambda^0)$, то полученные оценки (2.11), (2.12) противоречат почти гипоэллиптичности многочлена P и доказывают предложение. $\square$

Для $\alpha \in N_0^n$ обозначим $\sqcap(\alpha) = \{\nu \in \mathbb{R}^{n,+}, \nu \leq \alpha\}$. Из предложения 2.3 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть $\Re(P)$ — многогранник Ньютона почти гипоэллиптического многочлена $P(\xi)$, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$. Тогда*

(a) $\sqcap(\alpha) \subset \Re(P)$ *для любого* $\alpha \in \Re^0(P)$;

(b) $\lambda \geq 0$ *для любого* $\lambda \in \Lambda^{n-1}(\Re(P))$;

(c) *если Γ — некоординатная грань $\Re(P)$, то $\lambda \geq 0$, $d_{\Re(P)}(\lambda) > 0$ $\forall \lambda \in \Lambda(\Gamma)$.*

Теорема 2.3. *Если все вполне правильные и главные координатные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$ почти гипоэллиптического многочлена P, по существу зависящего от всех переменных $\xi_1, \dots, \xi_n$, невырожденны, то P невырожденный.*

Доказательство. Предположим обратное, что многочлен P вырожденный. Тогда по условиям теоремы вырожденная грань может быть некоординатной и не вполне правильной главной гранью $\Re(P)$.

Через Γ обозначим одну из таких граней минимальной размерности, т. е. множество $\Sigma(P_\Gamma)$ непусто. Так как Γ — некоординатная главная грань $\Re(P)$, то в силу следствия 2.1 существуют вектор $\lambda \in \Lambda(\Gamma)$ и номер $k \in N$ $(k < n)$ такие, что (за счет перенумеровки индексов) $\lambda_j = 0$ $(j = 1, \dots, k)$ и $\lambda_j > 0$ $(j = k+1, \dots, n)$. Сначала рассмотрим случай, когда $k = 1$, т. е. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_j > 0$ $(j = 2, \dots, n)$.

Так как Γ — некоординатная грань, то $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in (P) \cap \Gamma\} > 0$.

Обозначим $\Gamma_1 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 = m_1\}$ и покажем, что в условиях теоремы $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Пусть, напротив, $\Gamma_1 = \Gamma$. Тогда $\lambda \in \Lambda(\Gamma_1)$. Так как $\lambda_1 = 0$, то

$$(\lambda, \beta) = \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j = d_{\Re(P)}(\lambda)$$

при всех $\beta \in (P) \cap \Gamma_1$. В силу конечности множества $(P) \setminus \Gamma$ из условия $\lambda \in \Lambda(\Gamma_1)$ имеем
$$\rho(\lambda) := \max_{\beta \in (P)\setminus\Gamma} (\lambda, \beta) < d_{\Re(P)}(\lambda).$$
Отсюда получаем, что $t_0 := [d_{\Re(P)}(\lambda) - \rho(\lambda)]/[2\max\{\beta_1, \beta \in (P)\}] > 0$.

Рассмотрим вектор $\mu(t_0) := (t_0, \lambda_2, \dots, \lambda_n) > 0$. Так как $\Gamma = \Gamma_1$, то для любого $\beta \in (P) \cap \Gamma$
$$(\mu(t_0), \beta) = t_0 m_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j = t_0 m_1 + d_{\Re(P)}(\lambda).$$

С другой стороны, в силу определения числа t_0 для любого $\beta \in (P) \setminus \Gamma$ имеем
$$(\mu(t_0), \beta)) = t_0 m_1 + \sum_{j=2}^{n} \lambda_j \beta_j \le t_0 \beta_1 + \rho(\lambda) \le t_0 \max_{\beta \in (P)} \beta_1 + \rho(\lambda) <$$
$$< 2t_0 \max_{\beta \in (P)} \beta_1 + \rho(\lambda) = d_{\Re(P)}(\lambda) < d_{\Re(P)}(\lambda) + t_0 m_1.$$

Отсюда следует, что $\lambda(t_0) := \mu(t_0)/|\mu(t_0)| \in \Lambda(\Gamma)$. Так как $\mu(t_0) > 0$, то грань является вполне правильной, что противоречит выбору грани Γ и доказывает, что $\Gamma_1 \subset \Gamma$, но $\Gamma_1 \neq \Gamma$. Отсюда в силу условий теоремы и выбора грани Γ (минимальной размерности) следует, что грань Γ_1 невырожденная. Следовательно,
$$0 \neq P_{\Gamma_1}(\eta) = \sum_{\beta \in (P)\cap\Gamma, \beta_1 = m_1} \gamma_\beta \eta^\beta = \eta_1^{m_1} \sum_{\beta \in (P)\cap\Gamma_1} \gamma_\beta \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} =: \eta_1^{m_1} B(\eta). \quad (2.13)$$

Рассмотрим поведение многочленов P и $D_1^{m_1} P$ на последовательности $\xi^s = s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$. Поступая, как при доказательстве предложения 2.3 (см. представление (2.9)), и учитывая, что $\eta \in \Sigma(P_\Gamma) = \Sigma(P_0)$, имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$
$$|P(\xi^s)| \le \sum_{j=0}^{M(\lambda)} |P_j(\xi^s)| = \sum_{j=0}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} |P_j(\eta)| \le c_1 s^{d_1(\lambda)}.$$

Учитывая, что $B(\eta) \neq 0$, $\lambda_1 = 0$, в силу определения множества Γ_1 для многочлена $D_1^{m_1} P$ имеем при $s \to \infty$
$$\left|D_1^{m_1} P(\xi^s)\right| \ge \left|D_1^{m_1} P_0(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\xi^s)\right|$$
$$= \left|D_1^{m_1} P_0(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right|$$
$$= \left|D_1^{m_1} P_{\Gamma_1}(\xi^s)\right| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right|$$
$$= s^{d_0(\lambda)} (m_1!) |B(\eta)| - \sum_{j=1}^{M(\lambda)} s^{d_j(\lambda)} \left|D_1^{m_1} P_j(\eta)\right| = s^{d_0(\lambda)} (m_1!) |B(\eta)| [1 + o(1)].$$

Так как $d_0(\lambda) > 0$ (см. следствие 2.1), полученные соотношения противоречат почти гипоэллиптичности многочлена P.

Пусть $k = 2$, $m_1 := \max\{\beta_1, \beta \in (P) \cap \Gamma\}$ и $\Gamma_1 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_1 = m_1\}$.

Рассмотрим следующие возможные случаи: (а) $\Gamma_1 = \Gamma$, (б) $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

В случае (а) обозначим

$$m_2 := \max\{\beta_2, \beta \in (P) \cap \Gamma_1\} = \max\{\beta_2, \beta \in (P) \cap \Gamma\}.$$

Аналогично тому, как это сделано в случае $k = 1$, можно доказать, что если

$$\Gamma = \Gamma_2 := \{\beta \in (P) \cap \Gamma_1, \beta_2 = m_2\} = \{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_2 = m_2\},$$

то грань Γ является вполне правильной, что противоречит выбору этой грани. Если $\Gamma_2 \subset \Gamma = \Gamma_1$, то из определения грани Γ (минимальность) в силу условия теоремы получаем, что грань Γ_2 невырожденная. Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 \neq P_{\Gamma_2}(\eta) &= \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma, \beta_2 = m_2} \gamma_\beta \eta^\beta = \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_1, \beta_2 = m_2} \gamma_\beta \eta^\beta \\ &= \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_2} \gamma_\beta \eta^\beta = \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} \sum_{\beta \in (P) \cap \Gamma_2} \gamma_\beta \eta_3^{\beta_3} \dots \eta_n^{\beta_n} =: \eta_1^{m_1} \eta_2^{m_2} B(\eta). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Проводя аналогичные рассуждения, как при $k = 1$ и $\Gamma_1 \subset \Gamma$ на последовательности $\xi^s := s^\lambda \eta$ $(s = 1, 2, \dots)$, в силу (2.14) получим, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим.

Рассмотрим случай (б) $\Gamma_1 \subset \Gamma$. Из определения грани Γ (минимальность) в силу условий теоремы получаем, что грань Γ_1 невырожденная. Проводя аналогичные рассуждения, как при $k = 1$, $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\Gamma_1 \neq \Gamma$, ввиду (2.14) опять получаем, что многочлен P не является почти гипоэллиптическим. Так как при $2 < k < n$ противоречие с условием теоремы получается аналогичным образом, то этого повторять не будем. Теорема 2.3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1986. Т. 2.

2. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On infinite differentiability of solutions of nonhomogeneous almost hypoelliptic equations // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 1. P. 54–72.

3. *Khovanskii A. G.* Newton polyhedra (algebra and geometry) // Am. Math. Soc. Transl. 1992. V. 153, N 2. P. 1–15.

4. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 59–81.

5. *Gindikin S. G., Volevich L. R.* The method of Newton's polyhedron in the theory of PDE. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.

6. *Демиденко Г. В.* Изоморфные свойства одного класса дифференциальных операторов и их приложения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1036–1956.

7. *Демиденко Г. В.* Об одном классе матричных дифференциальных операторов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 1. С. 103–118.

8. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдопараболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.

9. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* О робастной устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2025. Т. 18, № 4. С. 18–29.

10. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* О бесконечном возрастании одного класса многочленов // Изв. НАН Армении. Математика. 2020. Т. 55, № 4. С. 47–64.

11. *Маргарян В. Н., Казарян Г. Г.* Оценки снизу многочленов многих переменных // Изв. НАН Армении. Математика. 2017. Т. 52, № 5. С. 52–67.

12. *Казарян Г. Г.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 143–159.

13. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности // Изв. НАН Армении. Математика. 2011. Т. 46, № 6. С. 11–30.

14. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On the comparison of powers of differential operators (polynomials) // Boll. Unione Mat. Ital. 2023. V. 16, N 4. P. 703–740.

15. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе вырождающихся гипоэллиптических многочленов // Тр. Моск. мат. о-ва. В печати.

16. *Казарян Г. Г.* Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы // Тр. МИАН. 1976. Т. 140. С. 130–161.

17. *Казарян Г. Г.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1974. Т. 9, № 3. С. 189–211.

18. *Казарян Г. Г.* Об оценках производных многочленов многих переменных // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1999. Т. 34, № 3. С. 46–55.

19. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов // Тр. МИАН. 1979. Т. 150. С. 128–142.

Поступила в редакцию 20 декабря 2025 г.
После доработки 29 декабря 2025 г.
Принята к публикации 30 декабря 2025 г.

Казарян Гайк Гегамович
Математический институт НАН РА,
пр. Маршала Баграмяна, 24/5, Ереван 0019, Армения
haikghazaryan@mail.ru

Маргарян Вачаган Николаевич
Российско-Армянский университет,
ул. Овсепа Емина, 123, Ереван 0051, Армения
vachagan.margaryan@yahoo.com

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ С МЕТАБЕЛЕВЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА В СОМНОЖИТЕЛЯХ

М. Н. Коновалова, В. С. Монахов

Аннотация. Группой Шмидта называют конечную ненильпотентную группу, у которой все собственные подгруппы нильпотентны. Исследуется конечная группа $G = AB$ при условии, что все подгруппы Шмидта в A и в B имеют равные производные длины. В этой ситуации, в частности, доказано, что если A и B субнормальны в G, а индексы подгрупп A и B взаимно просты, то все подгруппы Шмидта в G имеют равные производные длины. Кроме того, получена характеризация конечных групп, в которых каждая метабелева подгруппа нильпотентна. В частности, такая группа 2-замкнута и производная длина каждой ее подгруппы Шмидта равна 3. Отсюда следует, что в каждой ненильпотентной группе с единичной подгруппой Фраттини существует метабелева подгруппа Шмидта.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.205

Ключевые слова: конечная группа, метабелева подгруппа, подгруппа Шмидта, производная длина, факторизуемая группа.

1. Введение

Рассматриваются только конечные группы. Коммутант группы G обозначается через G'. Подгруппа $G'' = (G')'$ называется *вторым коммутантом группы* G, а $G^{(i)} = (G^{(i-1)})'$ — *i-м коммутантом.* Если существует номер n такой, что $G^{(n)} = 1$, то наименьшее натуральное n, для которого $G^{(n)} = 1$, называется *производной длиной группы* G и обозначается через $d(G)$. Группа, у которой $d(G) \leq 2$, называется *метабелевой.*

Ненильпотентная группа, у которой все собственные подгруппы нильпотентны, называется *группой Шмидта.* Начало изучению таких групп положила известная работа О. Ю. Шмидта [1]. Группам Шмидта посвящены отдельные параграфы монографий [2, 3]. Любая группа Шмидта $S = P \rtimes Q$ является произведением нормальной силовской подгруппы P и ненормальной циклической силовской подгруппы Q, причем $d(P) \leq 2$. Поэтому производная длина любой группы Шмидта не больше 3. Если P абелева, то она элементарная абелева. Описание неабелевых нормальных силовских подгрупп в группах Шмидта получили В. Д. Мазуров, С. А. Сыскин и А. Х. Журтов [4, 5]. Неабелева группа, у которой все собственные подгруппы абелевы, называется *группой Миллера — Морено.* Ненильпотентная группа Миллера — Морено является метабелевой группой Шмидта.

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № Ф24КИ-021.

Пусть $\mathfrak{U}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Классы групп, в которых все подгруппы Шмидта сверхразрешимы и несверхразрешимы, предложены в [6] и обозначаются через $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ соответственно. В [6] установлено, что классы $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ являются разрешимыми наследственными радикальными насыщенными формациями, и полностью описаны группы в этих классах.

Группа Шмидта сверхразрешима тогда и только тогда, когда ее коммутант имеет простой порядок [6, лемма 1], в частности, производная длина сверхразрешимой группы Шмидта равна 2. Поэтому класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ можно определить как наследственную формацию, в которой каждая группа Шмидта метациклическая.

У несверхразрешимой группы Шмидта нормальная силовская подгруппа может быть как абелевой (примером служит знакопеременная группа A_4), так и неабелевой (примером служит группа $SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3$). В первом случае производная длина равна 2, а во втором равна 3. Поэтому формацию $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ можно разбить на два подкласса:

- $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс всех групп, в которых подгруппы Шмидта неметациклические и имеют производную длину, равную 2;
- $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс всех групп, в которых подгруппы Шмидта имеют производную длину, равную 3.

Ясно, что $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \cup \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \cap \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}$. Классы $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ замкнуты относительно подгрупп, но не являются формациями, см. лемму 2 настоящей работы.

Каждая группа из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ 2-нильпотентна и имеет силовскую башню сверхразрешимого типа. Группа из класса $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ 2-замкнута, поэтому каждая группа из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ разрешима. Минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$-группа является несверхразрешимой группой Шмидта [7, теорема 4 (3)], а минимальная не $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$-группа — сверхразрешимой группой Шмидта. В частности, $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — $\widetilde{S}$-формации [8, с. 229]. Экраны формации $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ также известны, [9, предложение 2; 10, теорема 1(2-3)].

Пусть $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ — класс всех групп с метабелевыми подгруппами Шмидта. Ясно, что $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \subset \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ и $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2 \cap \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} = \mathfrak{N}$. Класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ можно также определить как наследственный класс, в котором каждая группа Шмидта является группой Миллера — Морено. Группы из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ могут быть неразрешимыми, например, все простые группы с абелевыми силовскими подгруппами принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, $PSL_2(7) \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$.

Начало исследованию групп, факторизуемых $\mathbb{P}$-субнормальными подгруппами, было положено в работе А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой и В. Н. Тютянова [11], здесь $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Напомним, что подгруппа H группы G $\mathbb{P}$-субнормальна в G, если $H = G$ или существует цепь подгрупп

$$H = H_0 < H_1 < \ldots < H_n = G$$

такая, что все индексы $|H_{i+1} : H_i|$ принадлежат $\mathbb{P}$. Результаты этого направления, полученные до 2020 г., представлены в [12].

В 2022 г. было доказано [13, теорема 2.1], что $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, если A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G и принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.

В настоящей работе исследуется конечная факторизуемая группа $G = AB$ при условии, что сомножители A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G и принадлежат классу $\mathrm{Sch}_i\,\overline{\mathfrak{U}}$, $i = 2, 3$. В частности, доказано, что если A и B — субнормальные подгруппы группы G взаимно простых индексов, $A, B \in \mathrm{Sch}_i\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_i\,\overline{\mathfrak{U}}$. Кроме того, получена характеризация конечных групп, в которых каждая метабелева подгруппа нильпотентна. В частности, установлено, что такая группа принадлежит $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и каждая ее подгруппа с единичной подгруппой Фраттини абелева. Отсюда следует, что в каждой ненильпотентной группе с единичной подгруппой Фраттини существует метабелева подгруппа Шмидта.

2. Вспомогательные результаты

Если G — группа, то $\pi(G)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок G. Если $|\pi(G)| = 1$, то группа G называется *примарной*, при $|\pi(G)| = 2$ — *бипримарной*. Будем также придерживаться следующих обозначений: $A \rtimes B$ — полупрямое произведение нормальной в AB подгруппы A и подгруппы B; C_p — группа порядка p; C_p^n — элементарная абелева группа порядка p^n; Q_8 — группа кватернионов порядка 8: группа, в которой все силовские подгруппы циклические, называется *z-группой*. Класс всех разрешимых групп обозначается через $\mathfrak{S}$.

Лемма 1. (1) *Класс* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ *является наследственной насыщенной радикальной формацией.*

(2) *Группа G принадлежит* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ *тогда и только тогда, когда G 2-замкнута и для каждой пары простых чисел $p > q$, q делит $p-1$, бипримарная $\{p, q\}$-холлова подгруппа q-замкнута.*

(3) *В группе G все сверхразрешимые подгруппы нильпотентны тогда и только тогда, когда $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

(4) *В группе G каждая подгруппа Шмидта является минимальной несверхразрешимой подгруппой тогда и только тогда, когда $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

(5) *В группе G каждая бипримарная z-подгруппа циклическая тогда и только тогда, когда $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

(6) *Минимальная не* $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$*-группа является сверхразрешимой группой Шмидта.*

Доказательство. Утверждения (1), (2) доказаны в [6]. Утверждения (3)–(5) следуют из определения класса $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Проверим утверждение (6). Пусть группа G не принадлежит классу $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, а каждая ее собственная подгруппа содержится в $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Тогда в G есть сверхразрешимая подгруппа Шмидта S. Она не может быть собственной подгруппой в G, поэтому $G = S$.

Лемма 2. *Классы* $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ *и* $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ *наследственные, но не являются формациями.*

Доказательство. Ясно, что все три класса замкнуты относительно подгрупп, т. е. наследственные.

Предположим, что класс $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ является формацией. Пусть G — минимальная не $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$-группа. Так как $G \notin \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, то в G имеется подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q$ такая, что P неабелева. Если $S < G$, то $S \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, поскольку G — минимальная не $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$-группа, и подгруппа P должна быть абелевой. Противоречие, поэтому $S = G$ — группа Шмидта. А. Н. Скиба [14] доказал локальность разрешимой формации $\mathfrak{F}$, у которой всякая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа либо имеет простой порядок, либо является группой Шмидта.

Так как локальная формация является насыщенной [15, IV.4.6], то и формация $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ должна быть насыщенной. Группа $SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3$ является группой Шмидта с неабелевой силовской подгруппой Q_8, поэтому $SL_2(3) \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $SL_2(3) \notin \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Кроме того,

$$\Phi(SL_2(3)) \cong C_2,\ SL_2(3)/\Phi(SL_2(3)) \cong A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}.$$

Поскольку формация $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ насыщенная, то $SL_2(3)$ должна принадлежать $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$; противоречие. Поэтому предположение неверно и класс $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ не является формацией.

Класс $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ не замкнут относительно фактор-групп: $Q_8 \rtimes C_3 \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, а $(Q_8 \rtimes C_3)/C_2 \cong A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Поэтому $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ не является формацией.

Предположим, что класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ является формацией. Пусть G — минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$-группа. Так как $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, то в G имеется подгруппа Шмидта $S = P \rtimes Q$ такая, что P неабелева. Если $S < G$, то $S \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, поскольку G — минимальная не $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ и подгруппа P должна быть абелевой. Противоречие, поэтому $S = G$ — группа Шмидта. Согласно [14] формация $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ должна быть насыщенной. Теперь $SL_2(3)$ должна принадлежать $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$; противоречие. Поэтому предположение неверно и класс $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$ не является формацией.

Лемма 3. *Пусть A, B и C — подгруппы группы G и $G = AB = AC = BC$.*
(1) *Если A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.*
(2) *Если A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Оба утверждения получены в [16, следствие 7.4] как следствие их теоремы о N-критическом графе трижды факторизуемой группы. Приведем прямые доказательства этих утверждений.

(1) Ясно, что $G = AB = AC^g = BC^g$ для любого $g \in G$. Так как A, B, $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то A, B и C 2-замкнуты по лемме 1(2), а по теореме Кегеля [17, теорема 1] группа G 2-замкнута, в частности, G разрешима. Предположим, что $G \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. По лемме 1(2) существуют простые числа $p > q$, q делит $p-1$, такие, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ группы G не q-замкнута. Согласно [18, лемма (3)] существуют $\{p,q\}$-холловы подгруппы $G_{\{p,q\}}$, $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C^g_{\{p,q\}}$ соответственно в G, A, B и C^g для некоторого $g \in G$ такие, что $G_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}B_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}} = B_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}}$ — трижды факторизуемая группа. Поскольку $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$, $C_{\{p,q\}} \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C_{\{p,q\}}$ q-замкнуты по лемме 1(2), а согласно [17, теорема 1] группа $G_{\{p,q\}}$ q-замкнута; противоречие. Поэтому допущение неверно и $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(2) Согласно [5, теорема 1] группа G принадлежит $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$ тогда и только тогда, когда G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и для каждой пары простых чисел $p > q$, q не делит $p-1$, бипримарная $\{p,q\}$-холлова в G подгруппа нильпотентна. Поэтому подгруппы A, B и C имеют силовские башни сверхразрешимого типа, а согласно [17, следствие 1] группа G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, в частности, G разрешима. Предположим, что $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$. Тогда существуют простые числа $p > q$, q не делит $p-1$, такие, что $\{p,q\}$-холлова подгруппа $G_{\{p,q\}}$ группы G ненильпотентна. Так как $G_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}B_{\{p,q\}} = A_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}} = B_{\{p,q\}}C^g_{\{p,q\}}$ — трижды факторизуемая группа, $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$, $C_{\{p,q\}} \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $A_{\{p,q\}}$, $B_{\{p,q\}}$ и $C_{\{p,q\}}$ нильпотентны. Согласно [17, следствие 1] группа $G_{\{p,q\}}$ нильпотентна. Получили противоречие. Поэтому допущение неверно и $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$.

Лемма 4 [19, лемма 1.9]. *Пусть H, U — подгруппы разрешимой группы G.*

(1) *Если H $\mathbb{P}$-субнормальна в G, то $H \cap U$ $\mathbb{P}$-субнормальна в U.*

(2) *Если H — субнормальная подгруппа группы G, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G.*

В следующей лемме собраны используемые свойства групп Шмидта [1–3, 6].

Лемма 5. *Пусть S — группа Шмидта, т. е. минимальная ненильпотентная группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$S = P \rtimes Q$, где P — нормальная силовская p-подгруппа, $Q = \langle y \rangle$ — не нормальная силовская q-подгруппа, p и q — различные простые числа и $y^q \in Z(S)$;*

(2) *$S' = P$ и $|P/\Phi(P)| = p^m$, где m — показатель числа p по модулю q;*

(3) *группа S имеет точно два класса сопряженных максимальных подгрупп:*

$$P \times \langle y^q \rangle \lhd S,\ \{\Phi(P) \times \langle x^{-1}yx \rangle \mid x \in P \setminus \Phi(P)\};$$

(4) *группа S сверхразрешима тогда и только тогда, когда выполняется любое одно из следующих требований:*

(4.1) *q делит $(p-1)$;*

(4.2) *в S существует подгруппа индекса p;*

(4.3) *подгруппа Q $\mathbb{P}$-субнормальна в S.*

3. Группы, факторизуемые $\mathbb{P}$-субнормальными $\mathbf{Sch_2}\,\overline{\mathfrak{U}}$-подгруппами

Теорема 1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы группы G и $(|G:A|, |G:B| = 1)$. Если каждая подгруппа Шмидта в A и каждая подгруппа Шмидта в B метабелева, то каждая подгруппа Шмидта в G метабелева.*

Доказательство. Так как $G = AB$, A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы, то группа G разрешима [11, теорема 4.2]. Воспользуемся индукцией по порядку группы.

По условию подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G, поэтому существует в G подгруппа M такая, что $A \leq M$, A $\mathbb{P}$-субнормальна в M и $|G:M|$ — простое число. Так как $|G:A| = |G:M||M:A|$, то $|M:A|$ делит $|G:A|$. Поскольку $G = MB$, $|G:B| = |M:M\cap B|$, то $|M:M\cap B|$ делит $|G:B|$ и $(|M:A|, |M:M\cap B|) = 1$. По тождеству Дедекинда $M = A(M\cap B)$, а в A и в $M\cap B$ каждая подгруппа Шмидта метабелева. Так как группа G разрешима, то $M\cap B$ $\mathbb{P}$-субнормальна в M по лемме 4(1). Поэтому к M применима индукция, по которой в M каждая подгруппа Шмидта метабелева. Без ущерба для доказательства подгруппу A можно заменить максимальной в G подгруппой M простого индекса. Аналогично подгруппу B можно заменить максимальной в G подгруппой простого индекса. Следовательно, можно считать, что $|G:A| = p$, $|G:B| = q$, p и q — различные простые числа.

Предположим, что в G существует не метабелева подгруппа Шмидта. Тогда для некоторых $r, t \in \pi(G)$ в группе G существует r-замкнутая $\{r,t\}$-подгруппа Шмидта $S = R \rtimes T$ такая, что силовская r-подгруппа R неабелева. Если $p \notin \{r,t\}$, то $\{r,t\}$-холлова подгруппа в A является $\{r,t\}$-холловой подгруппой в G. По теореме Холла $S \leq A^x$ для некоторого $x \in G$ и S метабелева; противоречие. Поэтому $p \in \{r,t\}$. Аналогично $q \in \{r,t\}$ и $\{p,q\} = \{r,t\}$. Без ущерба для доказательства можно считать, что $p = r \neq t$ и $T \leq A$. По тождеству Дедекинда и лемме 5(3) получаем

$$A \cap S = (A \cap R) \times T, \quad A \cap S \leq \Phi(R) \times T.$$

Так как R неабелева, то из леммы 5(2–4) следует, что $|S : (A \cap S)| = r^n > r$ для некоторого натурального $n \geq 2$. Поскольку

$$|G| = |A|r \geq |AS| = |A||S|/|A \cap S| = |A||S : (A \cap S)| > |A|r,$$

получили противоречие. Поэтому предположение неверно и каждая подгруппа Шмидта в G метабелева.

Пример 1. Группа $G = C_7 \times SL_2(3)$ [20, SmallGroup(168,22)] содержит максимальные подгруппы $A \cong C_7 \times Q$, $|G : A| = 3$, и $B \cong C_{42}$, $|G : B| = 4$. Поскольку A и B нильпотентны, то A и B принадлежат $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Группа G содержит не метабелеву подгруппу Шмидта $SL_2(3)$, поэтому $G \notin \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Этот пример показывает, что требование «A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G» в теореме 1 отбросить нельзя.

В группах из класса $\mathrm{Sch}\,\mathfrak{U} \cup \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ каждая подгруппа Шмидта метабелева. Если A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G = AB$, $A, B \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, [13, теорема 2.1]. Для класса $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ получаем

Следствие 1.1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $(|G : A|, |G : B|) = 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$;*

(2) *если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$;*

(3) *если в G существует подгруппа $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $G = AC = BC$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. (1), (2) Согласно лемме 1(2) подгруппы A и B разрешимы, а по теореме 1 группа G разрешима и каждая ее подгруппа Шмидта метабелева, поэтому $G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$. Если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то в группе G каждая подгруппа Шмидта несверхразрешима и $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(3) Так как $G = AB = AC = BC$, $A,\ B,\ C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ по лемме 3. Теперь из (2) следует, что $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Пример 2. В следствии 1.1(2) требование «$G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$» убрать нельзя. Примером служит симметрическая группа S_4 степени 4:

$$S_4 = D_8A_4,\ |S_4 : D_8| = 3,\ |S_4 : A_4| = 2,\ D_8 \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}},\ A_4 \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}.$$

Так как S_4 содержит сверхразрешимую подгруппу Шмидта, изоморфную $S_3 \in \mathrm{Sch}\,\mathfrak{U}$, то $S_4 \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Но это требование можно убрать в случае, когда подгруппы A и B субнормальны в G.

Следствие 1.2. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G и $(|G : A|, |G : B|) = 1)$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}} \subseteq \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс Фиттинга по лемме 1(1), то $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ согласно [15, IX.1.1(a)]. Поскольку группа G разрешима, то подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G по лемме 4(2). По следствию 1.1(2) группа G принадлежит $\mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$. Следствие доказано.

Пусть A и B — подгруппы группы G. Если A перестановочна с каждой субнормальной подгруппой в B, а B перестановочна с каждой субнормальной подгруппой в A, то говорят, что подгруппы A и B *взаимно sn-перестановочны* [21].

Лемма 6. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G. Если подгруппа B разрешима, то подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в AB.*

Доказательство. Пусть $1 = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_{n-1} \leq B_n = B$ — композиционный ряд в подгруппе B. Так как B разрешима, то все индексы $|B_{i+1} : B_i|$ — простые числа. Из определения взаимно sn-перестановочных подгрупп следует, что существует цепь подгрупп

$$A = AB_0 \leq AB_1 \leq \ldots \leq AB_{n-1} \leq AB_n = AB.$$

Так как $|AB_{i+1} : AB_i|$ делит $|B_{i+1} : B_i|$, то A $\mathbb{P}$-субнормальна в AB.

Из теоремы 1 и следствия 1.1 с помощью леммы 6 получаем

Следствие 1.3. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G, и пусть $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $A, B \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$, то $G \in \mathfrak{S} \cap \mathrm{Sch}\,\mathfrak{A}^2$;*

(2) *если $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, $A, B \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_2\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

4. Группы, факторизуемые $\mathbb{P}$-субнормальными $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$-подгруппами

Класс $\mathscr{A}$ всех групп с абелевыми силовскими подгруппами является наследственной формацией и $G^{\mathscr{A}} \leq G'$ в любой группе G. Формация $\mathscr{A}$ не насыщенная и не радикальная.

Теорема 2. *Для группы G следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *$G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$;*

(2) *каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна;*

(3) *все $\mathscr{A}$-подгруппы в G абелевы.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть в группе G производная длина каждой подгруппы Шмидта группы G равна 3 и H — метабелева подгруппа группы G. Поскольку каждая подгруппа в H имеет производную длину не более 2, то в H нет подгрупп Шмидта. Поэтому H нильпотентна.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна и S — подгруппа Шмидта из G. Так как производная длина любой подгруппы Шмидта равна 2 (в этом случае она метабелева) или 3, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть каждая метабелева подгруппа группы G нильпотентна и H — $\mathscr{A}$-подгруппа группы G. Так как (1) $\Leftrightarrow$ (2), то группа G разрешима. По теореме Ито [2, VI.4.4] $\{p, q\}$-подгруппа $H_{\{p,q\}}$ в H метабелева для всех $p \in \pi(H)$ и $q \in \pi(H)$. По условию подгруппа $H_{\{p,q\}}$ нильпотентна. Поскольку силовские подгруппы H_p и H_q абелевы, то $H_{\{p,q\}}$ абелева. Отсюда следует, что подгруппа H абелева. Следовательно, все $\mathscr{A}$-подгруппы в G абелевы.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть все $\mathscr{A}$-подгруппы в группе G абелевы и $S = P \rtimes Q$ — подгруппа Шмидта группы G, где P — силовская p-подгруппа, Q — силовская q-подгруппа в S. Поскольку Q циклическая и S неабелева, то подгруппа P не может быть абелевой по условию. Из свойств групп Шмидта следует, что подгруппа P является коммутантом в S. Следовательно, коммутант каждой подгруппы Шмидта группы G неабелев и $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Следствие 2.1. (1) *Если $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\Phi(G)=1$, то G абелева.*
(2) *Если $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, $H \le G$ и $\Phi(H)=1$, то H абелева.*

Доказательство. (1) Пусть N — минимальная нормальная в G подгруппа. Так как $N\langle x\rangle$ метабелева, то $N\langle x\rangle$ нильпотентна для любого элемента $x \in G$ по теореме 2. Пусть N — r-подгруппа, $r \in \pi(G)$, G_r и $G_{r'}$ — силовская r-подгруппа и r'-холлова подгруппа группы G соответственно. Тогда

$$NG_{r'} = N \times G_{r'},\ N \cap Z(G_r) \ne 1,\ N \cap Z(G_r) \lhd G,\ |N| = r,\ N \le Z(G).$$

Таким образом, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G содержится в центре группы G. Если $\Phi(G)=1$, то $F(G)$ — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп и $F(G) \le Z(G)$. Поскольку $C_G(F(G)) \le F(G)$ в разрешимых группах, то G абелева.

Поскольку $\mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ — наследственный класс, то (2) следует из (1).

Следствие 2.2. *Если G — ненильпотентная группа с единичной подгруппой Фраттини, то в G существует метабелева подгруппа Шмидта.*

Пример 3. Утверждение (2) следствия 2.1 не допускает обращения. В группе Шмидта $C_3 \rtimes C_4$ [20, SmallGroup(12,1)] все собственные подгруппы абелевы, $\Phi(C_3 \rtimes C_4) \ne 1$ и $C_3 \rtimes C_4 \notin \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$. Утверждение следствия 2.2 также не допускает обращения, примером служит $SL_2(5)$.

Пример 4. Группа $GL_2(3) = (Sd_{16})(SL_2(3))$ [20, SmallGroup(48,29)] факторизуется подгруппами Sd_{16} индекса 3 и $SL_2(3)$ индекса 2. Здесь Sd_{16} — полудиэдральная группа порядка 16. Ясно, что

$$Sd_{16} \in \mathfrak{N} \subset \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}, \quad SL_2(3) = Q_8 \rtimes C_3 \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}},$$

$$|GL_2(3) : Sd_{16}| = 3, \quad |GL_2(3) : SL_2(3)| = 2.$$

Поскольку в $GL_2(3)$ есть подгруппа, изоморфная S_3, то $GL_2(3) \notin \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Поэтому в следующей теореме требование «$G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$» убрать нельзя.

Теорема 3. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $(|G:A|, |G:B| = 1)$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как $G = AB$, A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные разрешимые подгруппы, то группа G разрешима [11, теорема 4.2]. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Повторяя начальную часть доказательства теоремы 1, получаем, что $|G:A| = p$, $|G:B| = q$, p и q — различные простые числа.

Предположим, что в G существует $\{r,t\}$-подгруппа Шмидта $S = R \rtimes T$ такая, что силовская r-подгруппа R абелева. Если $p \notin \{r,t\}$, то $S \le A^x$ для некоторого $x \in G$ и S не метабелева; противоречие. Поэтому $p \in \{r,t\}$. Аналогично $q \in \{r,t\}$ и $\{p,q\} = \{r,t\}$. Без ущерба для доказательства можно считать, что $p = r \ne t$ и $T \le A$. По тождеству Дедекинда $A \cap S = (A \cap R) \times T$ и $A \cap S \le \Phi(R) \times T$ по лемме 5(3). По условию $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, поэтому подгруппа S несверхразрешима. Из леммы 5(2)–(4) заключаем, что $|S : (A \cap S)| = r^n > r$ для некоторого натурального n. Поскольку

$$|G| = |A|r \ge |AS| = |A||S|/|A \cap S| = |A||S : (A \cap S)| > |A|r,$$

получили противоречие. Поэтому предположение неверно и каждая подгруппа Шмидта в G не метабелева.

Следствие 3.1. *Пусть A и B — $\mathbb{P}$-субнормальные подгруппы группы G, $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $(|G : A|, |G : B| = 1)$. Если в G существует подгруппа $C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $G = AC = BC$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как

$$G = AB = AC = BC, \quad A, B, C \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}},$$

то $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ по лемме 3. Теперь из теоремы 3 следует, что $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Следствие 3.2. *Пусть A и B — субнормальные подгруппы группы G и $(|G : A|, |G : B| = 1)$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

Доказательство. Так как $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}} \subseteq \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ и $\mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ — класс Фиттинга по лемме 1, то $G = AB \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$ согласно [15, IX.1.1 (a)]. Поскольку группа G разрешима, то подгруппы A и B $\mathbb{P}$-субнормальны в G по лемме 4 (2). Согласно теореме 3 группа $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.

Из теоремы 1 с помощью леммы 6 получаем

Следствие 3.3. *Пусть A и B — взаимно sn-перестановочные подгруппы группы G, и пусть $(|G : A|, |G : B|) = 1$. Если $A, B \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$, $G \in \mathrm{Sch}\,\overline{\mathfrak{U}}$, то $G \in \mathrm{Sch}_3\,\overline{\mathfrak{U}}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31. С. 366–372.
2. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I.. Berlin: Springer-Verl., 1967.
3. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
4. *Мазуров В. Д., Сыскин С. А.* О конечных группах со специальными силовскими 2-подгруппами // Мат. заметки. 1973. Т. 14, № 2. С. 217–222.
5. *Журтов А. Х., Сыскин С. А.* О группах Шмидта // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 26, № 2. С. 74–78.
6. *Монахов В. С.* О конечных группах с заданным набором подгрупп Шмидта // Мат. заметки. 1995. Т. 58, № 5. С. 717–722.
7. *Монахов В. С.* О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.
8. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
9. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Симоненко Д. Н.* О MP-замкнутых насыщенных формациях конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 6. С. 9–17.
10. *Yia Xiaolan, Jiang Shunhuan, Kamornikov Sergey.* A new formation with Shemetkov property // Commun. Algebra. 2024. V. 52, N 12. P. 5180–5185.
11. *Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н.* О произведениях $\mathbb{P}$-субнормальных подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
12. *Трофимук А. А.* Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители. Минск: Издательский центр БГУ, 2021.
13. *Монахов В. С.* Конечные факторизуемые группы с $\mathbb{P}$-субнормальными v-сверхразрешимыми и sh-сверхразрешимыми сомножителями // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 403–410.
14. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 11. С. 982–985.
15. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
16. *Васильев А. Ф., Мурашко В. И.* Арифметические графы и классы конечных групп // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 1. С. 55–73.
17. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach factorisierbarer endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87, N 1. P. 42–48.
18. *Pennington E.* Trifactorisable groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1973. V. 8. P. 461–469.
19. *Монахов В. С.* Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.

20. *A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2* [Electronic resource]. Mode of access: https://www.gap-system.org. Date of Access: 10.09.2023.

21. *Alejandre M. J., Ballester-Bolinches A., Cossey J., Pedraza-Aguilera M. C.* On some permutable products of supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoamericana. 2004. V. 20. P. 413–425.

Поступила в редакцию 14 июля 2025 г.
После доработки 19 декабря 2025 г.
Принята к публикации 19 декабря 2025 г.

Коновалова Марина Николаевна (ORCID 0000-0002-0338-237X)
Брянский филиал Российской академии народного хозяйства
и государственной службы при Президенте РФ
ул. Дуки, 61, Брянск 241050
msafe83@mail.ru

Монахов Виктор Степанович (ORCID 0000-0003-0977-7396)
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь
victor.monakhov@gmail.com

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.957

О МНОГОМЕРНЫХ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ВОЛНОВЫМ ОПЕРАТОРОМ И ОПЕРАТОРОМ МОНЖА — АМПЕРА

А. А. Косов, Э. И. Семенов

Аннотация. Изучается эволюционное уравнение с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера. Предложен вариант метода редукции с использованием аддитивного и мультипликативного разделения переменных для построения точных многомерных решений. Получены параметрические семейства анизотропных по пространственным переменным точных решений, выражаемые явным образом через элементарные и специальные функции и/или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрен случай, когда для построения точных решений исследуемого нелинейного многомерного уравнения используются известные решения линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной. Приводится ряд примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.206

Ключевые слова: оператор Монжа — Ампера, волновое уравнение, многомерные точные решения.

1. Введение

В последнее время все больше внимания уделяется исследованию нелинейных эволюционных уравнений с оператором Монжа — Ампера и построению их точных решений. Так, в работах [1–5] проводится групповой анализ, исследуются редукции и находятся точные решения уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right], \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{\nu} = k\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2\right], \tag{2}$$

где k, ν — некоторые постоянные. Уравнение (1) возникает в магнитной гидродинамике при описании эволюции электронных вихрей в замагниченной плазме [6, 7] и является частным случаем (2). При $\nu = -1$ и $k = -1$ уравнение (2) есть известное параболическое уравнение Крылова [8]. В работе [9] встречается уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = [\det H(u)]^{\frac{1}{n}} + f(\mathbf{x}),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (темы FWEW-2026-0009 и FWEW-2026-0010).

где $u = u(\mathbf{x}, t)$ — искомая функция от $n+1$ независимых переменных; $t > 0$ — время, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — вектор пространственных переменных размерности $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ — матрица Гессе n-го порядка, $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе. В статье [10] методом разделения переменных ищутся точные решения эволюционного многомерного уравнения Монжа — Ампера вида

$$f(\mathbf{x}, t, u)\frac{\partial u}{\partial t} = \det H(u),$$

где функция $f(\mathbf{x}, t, u)$ является заданной. В работе авторов [11] строились точные решения обобщенного эволюционного уравнения Монжа — Ампера вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \det H(u) - f(u, \nabla u, \Delta u),$$

а также многомерного уравнения Крылова

$$-\frac{\partial u}{\partial t}\det H(u) = 1.$$

В данной статье изучается эволюционное уравнение с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \vartheta^2 \Delta u + \det H(u), \tag{3}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, $\vartheta \neq 0$ — некоторый числовой параметр. Основной задачей данной статьи является построение многомерных точных решений уравнения (3). Для решения поставленной задачи будем применять методы аддитивного и мультипликативного разделения переменных [12], метод редукции и следующую квадратичную функцию:

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

где A — ненулевая числовая симметрическая матрица размера $n \times n$. Ранее авторами квадратичная функция (4) успешно использовалась для построения точных многомерных решений систем уравнений реакции-диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [13], а также для отыскания многомерных решений обобщенного уравнения Монжа — Ампера [14, 15] и системы уравнений с оператором Монжа — Ампера [16].

2. Основные результаты

Для дальнейшего исследования нам понадобится формула, которая задается в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть $F(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы A, задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, для гессиана функции $F(\xi) = F(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ справедлива формула*

$$\det\left(\frac{\partial^2 F(\xi)}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=\overline{1,n}} = \det A \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right], \tag{5}$$

где $\det A$ — *определитель матрицы* A.

Доказательство леммы приведено в статье [14]. В этом разделе приведем результаты по построению точных многомерных решений уравнения (3) с применением формулы (5) и квадратичной функции (4).

2.1. Точные решения с аддитивным разделением переменных. Из формулы (5) следует, что гессиан функции $\phi(\mathbf{x}) = \xi + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, где ξ задается формулой (4), равен определителю симметричной матрицы A. В свою очередь, лапласиан функции $\phi(\mathbf{x})$ равен следу матрицы A. Вторая частная производная по переменной t от функции

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t^2}{2}(\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A) + \alpha_0 t + \xi + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \beta \tag{6}$$

равна $\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A$. Таким образом, мы показали, что функция (6) является многомерным решением уравнения (3) с аддитивным разделением переменных. В формуле (6) $\operatorname{tr} A$ — след матрицы A, α_j, $j = 0, 1 \ldots, n$, β — произвольные постоянные.

Перейдем к построению решений с аддитивным разделением переменных вида

$$u(\mathbf{x}, t) = \psi(t) + F(\xi), \tag{7}$$

где функции $\psi(t)$ и $F(\xi)$ подлежат определению. При построении точных решений уравнения (3) в виде (7) мы должны потребовать выполнение некоторых условий на матрицу A, а именно, мы должны подобрать матрицу A в классе симметрических матриц таким образом, чтобы для функции (4) выполнялось равенство

$$|\nabla \xi|^2 = \sigma \xi, \tag{8}$$

где ∇ — оператор взятия градиента по $x \in \mathbb{R}^n$, а $\sigma > 0$ — некоторая постоянная. Как показано в [15], необходимым свойством обладает симметрическая матрица

$$A = \frac{\sigma}{2} S E_m S^T, \tag{9}$$

где E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n - m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица. После подстановки анзаца (7) в уравнение (3) с учетом формул (5), (8) и несложных вычислений придем к равенству

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \vartheta^2 \left[\operatorname{tr} A \frac{dF}{d\xi} + \sigma\xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right] + \det A \left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right]. \tag{10}$$

Для дальнейшего исследования необходимо рассмотреть два случая: $m < n$ и $m = n$. Пусть имеет место первый случай. При $m < n$ определитель матрицы (9), очевидно, равен нулю. В этом случае равенство (10) упростится и запишется так:

$$\frac{1}{\vartheta^2} \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \sigma \left[\frac{m}{2} \frac{dF}{d\xi} + \xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right].$$

Если правая и левая части этого равенства равны некоторой постоянной μ, то мы получим решение с аддитивным разделением переменных вида (7) с вырожденной матрицей (9). При этом функция $F(\xi)$ удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) вида

$$\sigma \left[\frac{m}{2} \frac{dF}{d\xi} + \xi \frac{d^2F}{d\xi^2}\right] = \mu, \tag{11}$$

а функция $\psi(t)$ задается формулой

$$\psi(t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1 t + T_2, \tag{12}$$

где T_1, T_2 — произвольные постоянные. Общее решение ОДУ (11) в зависимости от значений параметра m задается формулами

$$F(\xi) = \frac{2\mu}{m\sigma}\xi + C_1\xi^{1-\frac{m}{2}} + C_2, \quad m \neq 2,$$

$$F(\xi) = \frac{\mu}{\sigma}\xi + C_1 \ln\xi + C_2, \quad m = 2.$$

Таким образом, мы пришли к справедливости следующего результата

Утверждение 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда уравнение* (3) *имеет точные решения*

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1 t + \frac{2\mu}{m\sigma}\left(\frac{\sigma}{2}SE_mS^T\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) + C_1\left(\frac{\sigma}{2}SE_mS^T\mathbf{x}, \mathbf{x}\right)^{1-\frac{m}{2}} + C_2, \quad m \neq 2, \tag{13}$$

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1 t + \frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{2}SE_mS^T\mathbf{x},\right) + C_1 \ln\left(\frac{\sigma}{2}SE_mS^T\mathbf{x}, \mathbf{x}\right) + C_2, \quad m = 2, \tag{14}$$

где $m < n$, E_m — диагональная матрица, у которой на диагонали произвольным образом расположены $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ единиц и $n-m$ нулей, S — произвольная ортогональная матрица, μ, $\sigma \neq 0$, T_1, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Замечание 1. Так как волновой оператор и оператор Монжа — Ампера являются операторами второго порядка, с учетом свойства аддитивности точными решениями уравнения (3) также будут функции (13), (14), в правые части которых можно добавить слагаемое $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$, где α_i — произвольные постоянные.

Пример 1. Пусть $n = 3$, $m = 2$ и матрица A задается соотношением

$$A = \frac{\sigma}{2}\begin{pmatrix} 197/200 & -21/200 & \sqrt{6}/40 \\ -21/200 & 53/200 & 7\sqrt{6}/40 \\ \sqrt{6}/40 & 7\sqrt{6}/40 & 3/4 \end{pmatrix}, \quad \det A = 0, \quad \operatorname{tr} A = \sigma. \tag{15}$$

Тогда по утверждению 1 уравнение (3) в трехмерном координатном пространстве имеет анизотропное по пространственным переменным точное решение

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2 + T_1 t + \frac{\mu}{800}\eta + C_1 \ln\eta + C_2,$$

где $\mu \neq 0$, T_1, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\eta = 197x_1^2 + 53x_2^2 + 150x_3^2 - 42x_1x_2 + 10\sqrt{6}x_1x_3 + 70\sqrt{6}x_2x_3.$$

Пример 2. Пусть $n = 4$, $m = 3$ и матрица A задается соотношением

$$A = \frac{\sigma}{2}\begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & 4/9 & 0 \\ 2/9 & 8/9 & -2/9 & 0 \\ 4/9 & -2/9 & 5/9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det A = 0, \quad \operatorname{tr} A = \frac{3\sigma}{2}. \tag{16}$$

Тогда по утверждению 1 уравнение (3) в четырехмерном координатном пространстве имеет анизотропное по пространственным переменным точное решение

$$u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)=\frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2+T_1t+\frac{\mu}{54}\eta+C_1\eta^{-1/2}+C_2,$$

где $\mu\neq 0$, T_1, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\eta=5x_1^2+8x_2^2+5x_3^2+9x_4^2+4x_1x_2+8x_1x_3-4x_2x_3.$$

Пусть теперь $m=n$, тогда имеем $E_m=E_n=E$ и $A=(\sigma/2)E$, где E — единичная матрица. При этом из формулы (4) получим $\xi=(\sigma/4)\|\mathbf{x}\|^2$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. В этом случае равенство (10) запишется так:

$$\frac{1}{\vartheta^2}\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}=\frac{\sigma}{2}\left[n\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]+\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right].$$

Если правая и левая части этого равенства равны некоторой постоянной μ, то получим решение с аддитивным разделением переменных вида (7) с матрицей $A=(\sigma/2)E$. При этом функция $F(\xi)$ удовлетворяет ОДУ вида

$$\frac{\sigma}{2}\left[n\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]+\left(\frac{\sigma}{2}\right)^n\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi}+2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]=\mu, \tag{17}$$

а функция $\psi(t)$ задается формулой (12). Таким образом, мы пришли к справедливости следующего утверждения

Утверждение 2. *Уравнение* (3) *имеет точное радиально-симметричное решение*

$$u(\mathbf{x},t)=\frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2+T_1t+T_2+F(\xi),\quad \xi=\frac{\sigma}{4}\|\mathbf{x}\|^2,\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n,$$

где μ, T_1, T_2 — произвольные постоянные, а функция $F(\xi)$ удовлетворяет нелинейному ОДУ *второго порядка* (17).

Пример 3. Пусть $n=2$, тогда уравнение (3) в двумерном координатном пространстве имеет точные радиально-симметричные решения

$$u_1(x_1,x_2,t)=\frac{\mu\vartheta^2}{2}t^2+T_1t+T_2+F_1(\xi),\quad \xi=\frac{\sigma}{4}\left(x_1^2+x_2^2\right),\quad \mu\neq-1,$$

$$u_2(x_1,x_2,t)=-\frac{\vartheta^2}{2}t^2+T_1t+T_2+F_2(\xi),\quad \xi=\frac{\sigma}{4}\left(x_1^2+x_2^2\right),\quad \mu=-1,$$

где функции $F_1(\xi)$, $F_2(\xi)$ задаются формулами

$$F_1(\xi)=\frac{C_1}{4\sigma\sqrt{1+\mu}}\ln\left(\sqrt{4(1+\mu)\xi^2+C_1\xi}+2\xi\sqrt{1+\mu}+\frac{C_1}{4\sqrt{1+\mu}}\right)$$
$$+\frac{2}{\sigma}\xi+\frac{1}{\sigma}\sqrt{4(1+\mu)\xi^2+C_1\xi}+C_2,\quad F_2(\xi)=\frac{2}{\sigma}\xi+C_1\sqrt{\xi}+C_2.$$

Здесь C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отметим, что частное решение ОДУ (17) для любого n имеет вид $F(\xi)=B\xi+C_1$, где C_1 — произвольная постоянная, а константа $B\neq 0$ удовлетворяет алгебраическому уравнению $(\sigma/2)^nB^n+n(\sigma/2)B=\mu$.

2.2. Редукция к линейному волновому уравнению для функции с одной пространственной переменной. В предыдущем разделе было показано, что исследуемое уравнение (3) имеет точное решение с аддитивным разделением переменных (6). Интересный результат получится, если в правую часть решения (6) добавить произвольную функцию $V(x_i,t)$, зависящую от одной пространственной переменной x_i, где индекс i принимает любое фиксированное значение от 1 до n. Так, имеет место

Утверждение 3. *Уравнение* (3) *обладает точным многомерным решением*

$$u(\mathbf{x},t) = \frac{t^2}{2}(\det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A) + \alpha_0 t + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \frac{1}{2}(A\mathbf{x},\mathbf{x}) + V(x_i,t), \quad i=\overline{1,n}, \tag{18}$$

где $\operatorname{tr} A$ *— след матрицы* A, α_j, $j=0,1,\dots,n$, *— произвольные постоянные, причем функция* $V(x_i,t)$ *удовлетворяет линейному волновому уравнению*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = (\vartheta^2 + M_{ii})\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}, \tag{19}$$

где M_{ii} *— минор элемента* a_{ii} *матрицы* A.

Доказательство. После подстановки функции (18) в левую часть уравнения (3) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \det A + \vartheta^2 \operatorname{tr} A + \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{20}$$

Оператор Лапласа от функции (18) приводит к соотношению

$$\Delta u = \operatorname{tr} A + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \tag{21}$$

Вычисляя матрицу Гессе для функции (18), получим матрицу вида

$$H(u) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ii} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем детерминант этой матрицы. Для этого воспользуемся формулой разложения определителя по элементам i-й строки. Тогда получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \det H(u) &= a_{i1}A_{i1} + \ldots + \left(a_{ii} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}\right) A_{ii} + \ldots + a_{in}A_{in} \\ &= (a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{ii}A_{ii} + \ldots + a_{in}A_{in}) + \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} A_{ii} = \det A + M_{ii}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A, а M_{ij} — минор элемента a_{ij}. Подставляя равенства (20) и (21), (22) соответственно в левую и правую части уравнения (3), придем к линейному волновому уравнению (19). Утверждение доказано. □

Замечание 2. Значимость утверждения 3 в том, что оно устанавливает связь между уравнением (3) и классическим линейным волновым уравнением (19), которое в случае $\vartheta^2 + M_{ii} > 0$ называется уравнением колебаний струны.

Как известно, общее решение уравнения (19) задается формулой

$$V(x_i,t) = \varphi(x_i + t\sqrt{\vartheta^2 + M_{ii}}) + \psi(x_i + t\sqrt{\vartheta^2 + M_{ii}}), \quad \vartheta^2 + M_{ii} > 0, \quad i=\overline{1,n},$$

где φ и ψ — произвольные функции. Частные точные решения уравнения (19) можно найти во многих учебниках и справочниках (см., например, [17]).

2.3. Точные решения с мультипликативным разделением переменных. В этом разделе рассмотрим точные решения с мультипликативным разделением переменных вида

$$u(\mathbf{x},t) = \psi(t)F(\xi), \tag{23}$$

где функции $\psi(t)$ и $F(\xi)$ подлежат определению. При этом аргумент ξ задается формулой (4), в которой матрица A имеет вид (9). После подстановки анзаца (23) в уравнение (3) с учетом формул (5), (8) и несложных вычислений придем к равенству

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2}F(\xi) = \frac{\sigma\vartheta^2}{2}\psi(t)\left[m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right] + \psi^n(t)\det A\left(\frac{dF}{d\xi}\right)^{n-1}\left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right]. \tag{24}$$

При выводе этого равенства мы также использовали следующее свойство определителя [18]: $\det(\lambda M_n) = \lambda^n \det M_n$, где M_n — матрица размера $n \times n$. Здесь также необходимо рассмотреть два случая: $m < n$ и $m = n$. Случай $m = n$ интереса не представляет, так как в этом случае при $n > 1$ разделить переменные невозможно. Пусть $m < n$, тогда имеем $\det A = 0$. В этом случае равенство (24) упростится и запишется так:

$$\frac{2}{\sigma\vartheta^2}\frac{1}{\psi(t)}\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \frac{1}{F(\xi)}\left[m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2}\right].$$

В этом соотношении переменные разделены и для определения функций $\psi(t)$, $F(\xi)$ получим следующие ОДУ:

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \mu\frac{\sigma\vartheta^2}{2}\psi(t), \quad m\frac{dF}{d\xi} + 2\xi\frac{d^2F}{d\xi^2} = \mu F(\xi). \tag{25}$$

Здесь μ — константа разделения. ОДУ (25) являются линейными и легко интегрируются. Таким образом, приходим к справедливости следующего утверждения.

Утверждение 4. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Тогда уравнение* (3) *имеет точные решения с мультипликативным разделением переменных*

$$u_1(\mathbf{x},t) = \left[T_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right) + T_2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right)\right]$$
$$\times\,[C_1\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}J_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}Y_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})],\ \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_mS^T\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

$$u_2(\mathbf{x},t) = \left[T_1\exp\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right) + T_2\exp\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right)\right]$$
$$\times[C_1\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}I_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2\xi^{\frac{1}{2}-\frac{m}{4}}K_{\frac{m}{2}-1}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})],\ \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_mS^T\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

$$u_3(\mathbf{x},t) = (T_1t + T_2)(C_1\xi^{1-\frac{m}{2}} + C_2), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_mS^T\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

$$u_4(\mathbf{x},t) = (T_1t + T_2)(C_1\ln\xi + C_2), \quad \xi = \frac{\sigma}{4}(SE_2S^T\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

где $m < n$, $J_{\frac{m}{2}-1}$, $Y_{\frac{m}{2}-1}$ — функции Бесселя первого и второго рода, $I_{\frac{m}{2}-1}$, $K_{\frac{m}{2}-1}$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода, $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 4. Пусть $n = 3$ и $m = 2$, а матрица A задается формулой (15). Тогда в силу утверждения 4 уравнение (3) в трехмерном координатном пространстве обладает следующим анизотропным по пространственным переменным точным периодическим по времени решением:

$$u(x_1,x_2,x_3,t) = \left[T_1\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right) + T_2\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\vartheta\sqrt{\mu}\sqrt{\sigma}t\right)\right]$$
$$\times\,[C_1J_0(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2Y_0(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})],$$

где $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\xi = \frac{\sigma}{800}\big(197x_1^2 + 53x_2^2 + 150x_3^2 - 42x_1x_2 + 10\sqrt{6}x_1x_3 + 70\sqrt{6}x_2x_3\big).$$

Здесь J_0, Y_0 — функции Бесселя первого и второго рода.

Пример 5. Пусть $n = 4$ и $m = 3$, а матрица A задается формулой (16). Тогда в силу утверждения 4 уравнение (3) в четырехмерном координатном пространстве обладает следующим анизотропным по пространственным переменным точным решением:

$$u(x_1, x_2, x_3, x_4, t) = \left[T_1 \exp\left(\vartheta\frac{\sqrt{2\mu}}{2}\sqrt{\sigma}t\right) + T_2 \exp\left(-\vartheta\frac{\sqrt{2\mu}}{2}\sqrt{\sigma}t\right)\right] \times \frac{C_1 \operatorname{sh}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi}) + C_2 \operatorname{ch}(\sqrt{2\mu}\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}},$$

где $\mu > 0$, $\sigma > 0$, T_1, T_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные и введено обозначение

$$\xi = \frac{\sigma}{36}\big(5x_1^2 + 8x_2^2 + 5x_3^2 + 9x_4^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 4x_2x_3\big).$$

3. Заключение

В статье предложен вариант метода редукции с использованием процедуры разделения переменных для построения точных многомерных решений эволюционного уравнения с волновым оператором и оператором Монжа — Ампера. Получены многомерные точные решения, выражаемые явным образом через элементарные и специальные функции и/или через решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Отдельно выделен случай, когда для построения точных решений исследуемого нелинейного многомерного уравнения используются известные решения линейного волнового уравнения с одной пространственной переменной. Полученные в статье результаты представляют теоретический интерес, так как найденные семейства точных решений можно использовать для качественного анализа, выявления колебательных и периодических решений, оценки скорости роста и выделения неограниченных решений, конструирования краевых условий и т. п. Они могут также использоваться для тестирования вычислительных методов, алгоритмов и программ решения прикладных задач с краевыми и начальными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полянин А. Д.* Точные решения и редукции нестационарных уравнений математической физики типа Монжа — Ампера // Вестн. Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ». 2023. Т. 12, № 5. С. 276–288.
2. *Аксенов А. В., Полянин А. Д.* Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 750–763.
3. *Polyanin A. D., Aksenov A. V.* Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: Symmetries, closed-Form solutions, and reductions // Mathematics. V. 2024. V. 12. 2127.
4. *Aksenov A. V., Polyanin A. D.* Symmetries, reductions and exact solutions of monstationary Monge–Ampére type equations // Mathematics. 2025. V. 13. 525.
5. *Dubinov A. E., Kitayev I. N.* New exact solutions of the equation of non-linear dynamics of a lattice of electronic vortices in plasma in the framework of electron magnetohydrodynamics // Magnetohydrodynamics. 2020. V. 56, N 4. P. 369–375.

6. *Smirnov V. V., Chukbar K. V.* «Phonons» in two–dimensional vortex lattices // J. Experimental and Theoret. Physics. 2001. V. 93, N 1. P. 126–135.

7. *Zaburdaev V. Yu., Smirnov V. V., Chukbar K. V.* Nonlinear dynamics of electron vortex lattices // Plasma Physics Reports. 2014. V. 30, N 3. P. 214–217.

8. *Крылов Н. В.* Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 2. С. 290–303.

9. *Zhang Wei, Bao Jiguang.* A Calabi theorem for solutions to the parabolic Monge–Ampére equation with periodic data // Ann. Inst. H. Poincaré. 2018. V. 35, N 5. P. 1143–1173.

10. *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное эволюционное уравнение типа Монжа — Ампера // Владикавк. мат. журн. 2023. Т. 25, № 1. С. 64–80.

11. *Косов А. А., Семенов Э. И.* О многомерных точных решениях обобщенных эволюционных уравнений Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 6. С. 748–762.

12. *Polyanin A. D., Zhurov A. I.* Separation of variables and exact solutions to nonlinear PDEs. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2021.

13. *Косов А. А., Семенов Э. И.* О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1619–1640.

14. *Косов А. А., Семенов Э. И.* О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1334–1349.

15. *Косов А. А., Семенов Э. И.* Обобщенное уравнение типа Монжа — Ампера и его многомерные точные решения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2025. Т. 35, № 2. С. 215–230.

16. *Косов А. А., Семенов Э. И.* Система уравнений с оператором Монжа — Ампера и ее многомерные точные решения // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 4. С. 669–682.

17. *Полянин А. Д.* Уравнения и задачи математической физики. Ч. 2. Справочник для вузов. М.: ЮРАЙТ, 2023.

18. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

Поступила в редакцию 6 июля 2025 г.
После доработки 6 июля 2025 г.
Принята к публикации 20 октября 2025 г.

Косов Александр Аркадьевич (ORCID 0000-0003-1352-1828)
Семенов Эдуард Иванович (ORCID 0000-0002-9768-9945)
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
`kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com`

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.518

ОЦЕНКИ НОРМ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРИМЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

К. Т. Мынбаев, Е. Н. Ломакина

Аннотация. Найдены альтернативные критерии ограниченности и компактности интегрального оператора типа Харди, действующего в весовых пространствах Лебега. Критерии сформулированы в терминах последовательностей, зависящих от весовых функций и мер пространств. Найдены условия, при которых идеалы компактных операторов совпадают с идеалами, порожденными последовательностями **s**-чисел рассматриваемого оператора. При этом получены оценки норм оператора в идеалах через интегральные выражения, зависящие от исходных весовых функций.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.207

Ключевые слова: интегральный оператор, измеримое пространство, топологическое пространство, **s**-числа, аппроксимативные числа, числа Гельфанда, числа Колмогорова, операторный идеал.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — σ-алгебра, содержащая борелевские подмножества открытого множества Ω в хаусдорфовом топологическом пространстве. Обозначим через $L^p_{vd\nu}(\Omega)$ пространство $\mathfrak{M}$-измеримых функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L^p_{vd\nu}(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |f|^p v\, d\nu\right)^{1/p},$$

весовой функцией v и $1 < p < \infty$. В данной работе изучаются свойства компактности и аппроксимируемости оператора типа Харди $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$,

$$Tf(y) = \int\limits_{\Omega(\tau(y))} f\, d\nu, \tag{1.1}$$

на множестве ν-измеримых функций, заданных на открытом подмножестве Ω хаусдорфова топологического пространства с σ-аддитивными мерами ν и μ. Весовые функции u, v предполагаются положительными и конечными почти всюду на Ω. Норму линейного оператора T, действующего из $L^p_{vd\nu}(\Omega)$ в $L^q_{ud\mu}(\Omega)$, обозначим через $\|T\| = \|T\|_{L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного Комитета Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19676673), а также в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ для ХФИЦ ДВО РАН.

Свойства оператора (1.1) в пространствах Лебега на полуоси достаточно полно изучены во многих статьях и монографиях. Некоторые обобщения для многомерных областей в банаховых функциональных пространствах рассматривались в [1]. В статьях [2, 3] авторы смогли свести многомерный случай к одномерному, применяя сферические координаты, в [4, 5] — используя полярное разложение, в [6, 7], а также [8], сделав предположение, что веса являются произведениями функций одной переменной.

Данная работа является продолжением исследований К. Т. Мынбаева и Е. Н. Ломакиной [9]. Для оператора (1.1) доказаны критерии ограниченности и компактности, также получены двусторонние оценки аппроксимативных чисел. Теоремы доказываются с использованием специальных разбиений, что позволяет получить обобщение многих одномерных результатов. Трехвесовое неравенство Харди в топологических измеримых пространствах было исследовано в статье [10].

Развитие теории интегральных операторов, которое началось с получения критериев ограниченности и компактности, имеет свое продолжение в направлении исследования поведения $\mathbf{s}$-чисел и принадлежности оператора различным операторным идеалам. Основы теории $\mathbf{s}$-чисел, представителями которых являются аппроксимативные числа, числа Колмогорова, Гельфанда и др., заложены в [11–16]. Следуя [11, п. 1], операторные идеалы будем обозначать заглавными готическими буквами.

Пусть $\mathfrak{L}$ — класс всех ограниченных линейных операторов, действующих между произвольными банаховыми пространствами; $\mathfrak{L}(X,Y)$ — банахово пространство операторов из X в Y для заданных пространств X, Y.

Операторным идеалом $\mathfrak{I}$ называется всякий подкласс в $\mathfrak{L}$ такой, что для любой его компоненты $\mathfrak{I}(X,Y)=\mathfrak{I}\cap\mathfrak{L}(X,Y)$ выполнены условия:

1) $I_{\mathscr{R}}\in\mathfrak{I}$, где $\mathscr{R}$ обозначает одномерное банахово пространство;

2) если $S_1,S_2\in\mathfrak{I}(X,Y)$, то $S_1+S_2\in\mathfrak{I}(X,Y)$;

3) если $T\in\mathfrak{L}(X_0,X)$, $S\in\mathfrak{I}(X,Y)$ и $Q\in\mathfrak{L}(Y,Y_0)$, то $QST\in\mathfrak{I}(X_0,Y_0)$.

Наименьшим операторным идеалом является класс всех конечномерных операторов $\mathfrak{F}$. Класс всех компактных операторов образует операторный идеал и обозначается через $\mathfrak{K}$.

Оператор $S\in\mathfrak{L}(X,Y)$ называется *аппроксимируемым*, если существуют операторы $S_1,S_2,\ldots\in\mathfrak{F}(X,Y)$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|S-S_n\|=0$. Класс всех аппроксимируемых операторов образует операторный идеал $\mathfrak{G}$, также хорошо известно вложение $\mathfrak{G}\subset\mathfrak{K}$ [11, 1.11.2]. Теория операторных идеалов подробно изложена в монографии [11].

Говорят, что банахово пространство X обладает *аппроксимационным свойством* [11, 10.1.1], если для всякого компактного подмножества $K\subset X$ и для любого $\varepsilon>0$ существует конечномерный оператор $L:X\to X$ такой, что $\|L\|\le M<\infty$ и $\|x-Lx\|\le\varepsilon$ для всех $x\in K$. В силу того, что пространство $L^q_{ud\mu}(\Omega)$ при $1\le q\le\infty$ обладает аппроксимационным свойством, имеем [11, 10.1.3]

$$\mathfrak{G}\big(L^p_{vd\nu}(\Omega),L^q_{ud\mu}(\Omega)\big)=\mathfrak{K}\big(L^p_{vd\nu}(\Omega),L^q_{ud\mu}(\Omega)\big).$$

Другой способ построения операторных идеалов связан с $\mathbf{s}$-числами операторов: последовательность $\mathbf{s}$-чисел определяет (квази)норму оператора в операторном идеале.

Рассмотрим отображение $\mathbf{s}:S\to\{\mathbf{s}_n(S)\}$, сопоставляющее каждому оператору $S\in\mathfrak{L}(X,Y)$ однозначно определенную числовую последовательность

$\{\mathbf{s}_n(S)\}$, называемую $\mathbf{s}$-*функцией* и удовлетворяющую следующим условиям:

(a1) $\|S\| = \mathbf{s}_1(S) \geq \mathbf{s}_2(S) \geq \mathbf{s}_3(S) \geq \cdots \geq 0$;

(a2) $\mathbf{s}_n(S+R) \leq \mathbf{s}_n(S) + \|R\|$ для $S, R \in \mathfrak{L}(X,Y)$, $n \in \mathbb{N}$;

(a3) $\mathbf{s}_n(BSA) \leq \|B\|\mathbf{s}_n(S)\|A\|$, если $A \in \mathfrak{L}(X_0, X)$, $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$, $B \in \mathfrak{L}(Y, Y_0)$, $n \in \mathbb{N}$;

(a4) $\mathbf{s}_n\big(\mathrm{Id} : l_2^n \to l_2^n\big) = 1$, $n \in \mathbb{N}$;

(a5) $\mathbf{s}_n(S) = 0$, если $\operatorname{rank} S < n$.

Будем называть $\mathbf{s}_n(S)$ *n-м $\mathbf{s}$-числом* оператора S. Примерами $\mathbf{s}$-чисел служат:

аппроксимативные числа ($\mathbf{a}$-числа), определяемые формулой

$$\mathbf{a}_n(S) = \inf\{\|S - L\|_{X \to Y} : L : X \to Y,\ \mathrm{rank} L \leq n-1\}, \quad n \in \mathbb{N};$$

числа Гельфанда

$$\mathbf{c}_n(S) = \inf\left\{\left\|SJ_M^X\right\| : M \subseteq X,\ \mathrm{codim}(M) < n\right\},$$

где J_M^X означает каноническую инъекцию из подпространства M на банахово пространство X, т. е. $M \xrightarrow{J_M^X} X \xrightarrow{S} Y$;

числа Колмогорова

$$\mathbf{d}_n(S) = \inf\left\{\left\|Q_N^Y S\right\| : N \subseteq Y,\ \dim(N) < n\right\},$$

где Q_N^Y — каноническая сюръекция из банахова пространства Y на фактор-пространство Y/N, т. е. $X \xrightarrow{S} Y \xrightarrow{Q_N^Y} Y/N$;

числа Гильберта

$$\mathbf{h}_n(S) = \sup\{\mathbf{a}_n(FSE) : E \in \mathfrak{L}(l_2, X),\ F \in \mathfrak{L}(Y, l_2),\ \|E\| \leq 1,\ \|F\| \leq 1\}.$$

Аксиоматическая теория $\mathbf{s}$-чисел разработана Пичем в монографиях [11, 12] и статье [14].

Обозначим через $\mathscr{K}(X,Y)$ класс всех компактных операторов из $\mathfrak{L}(X,Y)$. Пусть H является комплексным гильбертовым пространством и $S \in \mathscr{K}(H,H)$, тогда S^*S имеет положительный самосопряженный квадратный корень, $|S| = (S^*S)^{1/2} \in \mathscr{K}(H,H)$ и для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{s}_n(S) = \boldsymbol{\lambda}_n(|S|),$$

где собственные числа $\boldsymbol{\lambda}_n(|S|)$ берутся в убывающем порядке и с учетом кратности.

Соотношения между рассматриваемыми числами оператора $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$ содержатся в следующей теореме.

Теорема 1.1 [11, п. 11.12.2, 12.3.2; 12, п. 2.10.1, 2.10.2]. *Пусть $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$. Тогда*

(i) $\mathbf{h}_n(S) \leq \mathbf{c}_n(S) \leq \mathbf{a}_n(S)$, $\quad \mathbf{h}_n(S) \leq \mathbf{d}_n(S) \leq \mathbf{a}_n(S)$,

(ii) $\mathbf{a}_n(S) \leq 2n^{1/2}\mathbf{c}_n(S)$, $\quad \mathbf{a}_n(S) \leq 2n^{1/2}\mathbf{d}_n(S)$.

Если $S \in \mathscr{K}(H,H)$, то $\mathbf{a}_n(S) = \mathbf{d}_n(S) = \mathbf{c}_n(S) = \mathbf{h}_n(S)$.

Таким образом, получив оценки для аппроксимативных чисел и используя теорему 1.1, можно получить оценки для других характеристических чисел оператора $S \in \mathfrak{L}(X,Y)$.

Оператор $S \in \mathfrak{L}(X, Y)$ называется $\mathfrak{A}_\alpha$-*оператором*, если последовательность его **a**-чисел суммируема со степенью α. Обозначим

$$\|S\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \|\{\mathbf{a}_n(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(S)\right)^{1/\alpha}, \quad 1 < \alpha < \infty. \tag{1.2}$$

Класс операторов $\mathfrak{A}_\alpha$ с нормой (1.2) образует нормированный операторный идеал [11, 14.2.4]. Идеал $\mathfrak{A}_\alpha$ компактных операторов с нормой (1.2), действующих в гильбертовых пространствах, есть идеал Шаттена — фон Неймана [13].

Обозначим через $\mathbf{s}_n(S)$ одну из последовательностей характеристических чисел $\mathbf{c}_n(S)$ или $\mathbf{d}_n(S)$ оператора S. Соответствующий этой последовательности операторный идеал, следуя [11, 14.2.1], обозначается через $\mathfrak{S}_\alpha$ с нормой

$$\|S\|_{\mathfrak{S}_\alpha} = \|\{\mathbf{s}_k(S)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{s}_n^\alpha(S)\right)^{1/\alpha}, \quad 1 < \alpha < \infty.$$

Данная статья организована следующим образом. В разд. 2 рассматриваются ограничения на области Ω: это параметризация и условие монотонности. Интегрирование в Ω проводится по подмножествам $\Omega(t)$ произвольного открытого множества Ω в хаусдорфовом топологическом пространстве X с σ-аддитивными мерами μ, ν. Мы не накладываем требования на форму $\Omega(t)$ и не требуем связности $\Omega(t)$ и их дополнений $\Omega\backslash\Omega(t)$. Также в разд. 2 приведены основные результаты исследований [9], используемые в работе. В разд. 3 доказаны теоремы об ограниченности и компактности оператора (1.1) в терминах последовательностей, зависящих от весовых функций и мер пространств, в которых действует оператор T. Для данного оператора типа Харди (1.1) найдены необходимые и достаточные условия, при которых

$$\mathfrak{K}(X, Y) = \mathfrak{A}_\alpha(X, Y), \quad \mathfrak{K}(X, Y) = \mathfrak{S}_\alpha(X, Y),$$

где $X = L^p_{vd\nu}(\Omega)$, $Y = L^q_{ud\mu}(\Omega)$ в области параметров пространств $1 < p \leq q < \infty$. При этом получены оценки нормы T в идеалах через интегральные выражения, зависящие от исходных весовых функций пространств. Данное исследование обобщает полученные ранее результаты [17–19].

2. Ограниченность и компактность оператора

Предположение 1. *Пусть Ω — открытое подмножество хаусдорфова топологического пространства E с σ-аддитивными мерами μ, ν. Меры заданы на σ-алгебре $\mathfrak{M}$, содержащей борелевские множества. Весовые функции u, v предполагаются положительными и конечными почти всюду на Ω.*

Предположение 2. *Обозначим через $\{\Omega(t) : t \geq 0\}$ однопараметрическое семейство открытых подмножеств Ω, удовлетворяющих свойству монотонности:*

1. *$\Omega(t_1)$ является собственным подмножеством $\Omega(t_2)$ при $t_1 < t_2$.*
2. *$\Omega(t)$ начиная с пустого множества покрывает почти все Ω:*

$$\Omega(0) = \bigcap_{t>0} \Omega(t) = \varnothing, \quad \nu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{t>0} \Omega(t)\Big) = 0.$$

3. *Определим $\omega(t) = \overline{\Omega(t)} \cap \overline{(\Omega\backslash\Omega(t))}$ — границу $\Omega(t)$ в относительной топологии. Мы требуем, чтобы границы были непересекающимися и покрывали почти всё Ω:*

$$\omega(t_1) \cap \omega(t_2) = \varnothing, \ t_1 \neq t_2, \quad \nu\Big(\Omega\backslash \bigcup_{t>0} \omega(t)\Big) = 0. \tag{2.1}$$

4. *Переходя при необходимости к другой параметризации, считаем, что*

$$\nu\Big(\Omega\setminus\bigcup_{t\le N}\omega(t)\Big) > 0 \text{ для любого } N<\infty. \tag{2.2}$$

5. *Границы являются тонкими в том смысле, что*

$$\nu(\omega(t)) = 0 \text{ для всех } t>0. \tag{2.3}$$

Из этого предположения вытекают следствия.

1. В силу (2.1) для ν-почти каждого $y\in\Omega$ существует единственное $\tau(y)>0$, которое при $y\in\omega(\tau(y))$ позволяет определить оператор (1.1) для любой неотрицательной $\mathfrak{M}$-измеримой функции f.

На множестве $\Omega_0\subset\Omega$ тех y, у которых $\tau(y)$ не определено, полагаем $\tau(\Omega_0)=\varnothing$.

2. Условие (2.2) и $\omega(t)\neq\varnothing$ при $t>0$ приводят к равенству $\tau(\Omega)=(0,\infty)$.

3. Согласно предположению (2.3)

$$\int\limits_{\Omega(t)} f\,d\nu = \int\limits_{\overline{\Omega(t)}} f\,d\nu,$$

и с точностью до множества ν-меры нуль

$$\{x\in\Omega:\tau(x)>\tau(y)\} = \Omega\setminus\Omega(\tau(y)).$$

Для $0\le a<b\le\infty$ обозначим $\Omega([a,b]) = \Omega(b)\setminus\Omega(a)$.

Так как $\tau(y_1)=\tau(y_2)$ для любых $y_1,y_2\in\omega(t)$, значение $Tf(y)$ одинаково для всех $y\in\omega(t)$, и можно определить $Sf(t)=Tf(y)$, если $y\in\omega(t)$.

Для неотрицательного f функция Sf не убывает, а ее скачки равны нулю в силу (2.3). Таким образом, для каждого $f\ge 0$

$$Sf \text{ непрерывна там, где она конечна, и } \lim_{t\to 0} Sf(t)=0. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$, $p'=\frac{p}{p-1}$. *Оператор* $T: L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, *заданный формулой* (1.1), *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$A=\sup_{t>0}A(t)=\sup_{t>0}\bigg(\int\limits_{\Omega(t)} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'}\bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(t)} u\,d\mu\bigg)^{1/q}<\infty.$$

Более того, $A\le\|T\|\le 4A$.

Результаты теоремы об ограниченности рассматриваемого оператора T сохраняются при сужении на конечный интервал.

Замечание 1. Оператор $T_{[a,b]}: L^p_{vd\nu}(\Omega([a,b]))\to L^q_{ud\mu}(\Omega([a,b]))$, $1<p\le q<\infty$, заданный формулой

$$T_{[a,b]}f(y)=\int\limits_{\Omega(a<\tau(y)<b)} f\,d\nu,$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned}A_{[a,b]} &= \sup_{a<\tau(x)<b} A_{[a,b]}(\tau(x))\\ &= \sup_{a<\tau(x)<b}\bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\bigg)^{1/p'}\bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu\bigg)^{1/q}<\infty.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Более того, $A_{[a,b]} \le \|T_{[a,b]}\| \le 4A_{[a,b]}$.

Замечание 2. В статье [9] рассматривается также критерий ограниченности и компактности оператора Харди $T^* : L^p_{vd\nu}(D) \to L^q_{ud\mu}(D)$, $1 < p \le q < \infty$, вида

$$T^* f(y) = \int\limits_{D(\tau(y))} f\,d\nu, \quad y \in D, \tag{2.6}$$

где на область D в отличие от Ω накладываются предположения:

1) $\{D(t) : t \ge 0\}$ — однопараметрическое семейство открытых подмножеств D такое, что $D(t_2)$ — собственное подмножество $D(t_1)$ при $t_1 < t_2$;

2) $D(0) = D$, $D(\infty) = \bigcap\limits_{t>0} D(t) = \varnothing$, $\nu\big(D \setminus \bigcup\limits_{t>0} D(t)\big) = 0$.

В классическом случае это оператор $T^* f(y) = \int\limits_y^\infty f(t)\,dt$ и $D(t) = (t,\infty) \subset D(0,\infty)$, границей является $\omega(t) = t$ и $D(t) = \{s \in D : \omega(s) > \omega(t)\}$.

Теорема 2.2. *Оператор* $T^* : L^p_{vd\nu}(D) \to L^q_{ud\mu}(D)$, $1 < p \le q < \infty$, *заданный формулой* (2.6), *ограничен тогда и только тогда, когда*

$$A^* = \sup_{t>0} A^*(t) = \sup_{t>0} \bigg(\int\limits_{D \setminus D(t)} u\,d\mu \bigg)^{1/q} \bigg(\int\limits_{D(t)} v^{-p'/p}\,d\nu \bigg)^{1/p'} < \infty.$$

Более того, $A^* \le \|T^*\| \le 4A^*$.

Теорема 2.3. *Оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, *заданный формулой* (1.1), *компактен тогда и только тогда, когда* $A < \infty$ *и*

$$\varlimsup_{t\to 0} A(t) = \varlimsup_{t\to+\infty} A(t) = 0.$$

Далее, на $[a,b] \subseteq [0,\infty)$ рассмотрим вопрос о том, насколько хорошо оператор (1.1) аппроксимируется средним. Введем следующие обозначения:

$$\mu_u(\Omega([a,b])) = \int\limits_{\Omega([a,b])} u\,d\mu, \quad Ff = \frac{1}{\mu_u(\Omega([a,b]))} \int\limits_{\Omega([a,b])} (Tf)u\,d\mu,$$
$$\mathscr{T}_{[a,b]} f(x) = \chi_{\Omega([a,b])}(x)(Tf(x) - Ff). \tag{2.7}$$

Теорема 2.4. *Пусть оператор* $\mathscr{T}_{[a,b]} : L^p_{vd\nu}(\Omega([a,b])) \to L^q_{ud\mu}(\Omega([a,b]))$, $1 < p \le q < \infty$, *определен формулой* (2.7). *Точка d выбрана так, что* $\mu_u(\Omega([a,d])) = \mu_u(\Omega([d,b])) = \frac{1}{2}\mu_u(\Omega([a,b]))$, *и* $\mathbf{A}_{[a,b]} = \max\{A^*_{[a,d]}, A_{[d,b]}\}$, *где*

$$A^*_{[a,d]} = \sup_{a<\tau(x)<d} \bigg(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} u\,d\mu \bigg)^{1/q} \bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\,d])} v^{-p'/p}\,d\nu \bigg)^{1/p'},$$

$$A_{[d,b]} = \sup_{d<\tau(x)<b} \bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu \bigg)^{1/q} \bigg(\int\limits_{\Omega([d,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu \bigg)^{1/p'}.$$

Тогда

$$(1 - 2^{-1/q})\mathbf{A}_{[a,b]} \le \|\mathscr{T}_{[a,b]}\| \le 8\mathbf{A}_{[a,b]}.$$

Теорема 2.5. *Пусть оператор $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, заданный формулой* (1.1)*, компактен. Для $0 < \varepsilon < \|T\|$ найдутся точки $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N < t_{N+1} = \infty$ и промежутки $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \ldots, N$, такие, что*

$$\sup_{t\in\Delta_0} A_{\Delta_0}(t) = \varepsilon, \quad \max_{k=1,\ldots,N-2} \mathbf{A}_{\Delta_k} = \varepsilon, \quad \mathbf{A}_{\Delta_{N-1}} \le \varepsilon, \quad \sup_{t\in\Delta_N} A_{\Delta_N}(t) = \varepsilon. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{1/q}}\right)\varepsilon N^{1/q-1/p} \le \mathbf{a}_N(T), \quad \mathbf{a}_{N+1}(T) \le 8\varepsilon. \tag{2.9}$$

Обозначим через $\mathbf{s}_n(T)$ одну из последовательностей $\mathbf{c}_n(T)$ или $\mathbf{d}_n(T)$ оператора T. Используя соотношения между характеристическими числами (теорему 1.1), получаем следующее утверждение.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Тогда*

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{1/q}}\right)\varepsilon N^{1/q-1/p-1/2} \le \mathbf{s}_N(T), \quad \mathbf{s}_{N+1}(T) \le 8\varepsilon.$$

Теоремы 2.1–2.6 доказаны в статье [9].

3. Оценки норм оператора типа Харди в операторном идеале

Введем в рассмотрение последовательности $\{\sigma_n\}$ и $\{\delta_n\}$, секвенциальные нормы которых позволяют получить альтернативные критерии ограниченности и компактности исходного оператора и оценить норму оператора (1.1) в операторных идеалах $\mathfrak{A}_\alpha$ и $\mathfrak{S}_\alpha$.

Пусть $0 < \int\limits_\Omega v^{-p'/p}\, d\nu = \infty$. Согласно выводам (2.4) $Sf(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Определим разбиение $\{\beta_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: сначала выберем точку β_0 так, что

$$\int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p}\, d\nu = 1,$$

остальные точки разбиения определим согласно формуле

$$\beta_n = \begin{cases} \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_{n+1})\}, & n < 0; \\ \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_{n-1})\}, & n > 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

В случае $n > 0$ видим, что

$$\beta_1 = \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_0)\},$$

в силу непрерывности $Sv^{-p'/p}(t)$ получаем

$$Sv^{-p'/p}(\beta_1) = 2Sv^{-p'/p}(\beta_0), \quad \beta_0 < \beta_1,$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_1)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \cdot 1 = 2^1.$$

При $n = 2$

$$\beta_2 = \inf\{t > 0 : Sv^{-p'/p}(t) \ge 2Sv^{-p'/p}(\beta_1)\},$$

$$Sv^{-p'/p}(\beta_2) = 2Sv^{-p'/p}(\beta_1) \quad \text{и} \int\limits_{\Omega(\beta_2)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_1)} v^{-p'/p} d\nu = 2^2.$$

В результате

$$\int\limits_{\Omega(\beta_n)} v^{-p'/p} d\nu = 2 \int\limits_{\Omega(\beta_{n-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^n \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2^n,$$

когда $\beta_0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots$, при этом полагая $\Omega(\infty) = \infty$.

Для $n < 0$ по формуле (3.1) получаем

$$\beta_{-1} = \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_0)\},$$

в силу непрерывности $Sv^{-p'/p}(t)$ следует равенство

$$2Sv^{-p'/p}(\beta_{-1}) = Sv^{-p'/p}(\beta_0), \quad \beta_0 > \beta_{-1},$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \cdot 1 = 2^{-1}.$$

Далее,

$$\beta_{-2} = \sup\{t > 0 : 2Sv^{-p'/p}(t) \le Sv^{-p'/p}(\beta_{-1})\},$$
$$2Sv^{-p'/p}(\beta_{-2}) = Sv^{-p'/p}(\beta_{-1}), \quad \beta_0 > \beta_{-1} > \beta_{-2},$$

и

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-2})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_{-1})} v^{-p'/p} d\nu = 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-2}.$$

Таким образом, когда $\beta_0 > \beta_{-1} > \beta_{-2} > \dots$, имеем

$$\int\limits_{\Omega(\beta_{-n})} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-1} \int\limits_{\Omega(\beta_{-\{n-1\}})} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-n} \int\limits_{\Omega(\beta_0)} v^{-p'/p}\, d\nu = 2^{-n}.$$

Определим слои $s_n = \Omega(\beta_n) \backslash \Omega(\beta_{n-1})$ и рассмотрим последовательность

$$\sigma_n = \left(\int\limits_{s_n} v^{-p'/p}\, d\nu \right)^{1/p'} \left(\int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu \right)^{1/q}. \tag{3.2}$$

Из формул (3.1), (3.2) следует, что

$$\sigma_n = 2^{(n-1)/p'} \left(\int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu \right)^{1/q} \quad \text{и} \int\limits_{s_{n+1}} u\, d\mu = \frac{2^{q/p'} \sigma_n^q}{2^{nq/p'}}. \tag{3.3}$$

Аналогично для другой весовой функции, если $0 < \int\limits_{\Omega} u\, d\mu = \infty$, определим разбиение $\{\gamma_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, следующим образом: сначала выберем точку γ_0 так, чтобы

$$\int\limits_{\Omega \backslash \Omega(\gamma_0)} u\, d\mu = 1,$$

остальные точки разбиения согласно формуле

$$\gamma_n = \begin{cases} \inf\big\{t>0 : 2\int\limits_{\Omega\backslash\Omega(t)} u\,d\mu \le \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n-1})} u\,d\mu\big\}, & n>0; \\ \sup\big\{t>0 : 2\int\limits_{\Omega\backslash\Omega(t)} u\,d\mu \ge \int\limits_{\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n+1})} u\,d\mu\big\}, & n<0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Введем в рассмотрение последовательность

$$\delta_n = \Big(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu\Big)^{1/p'}\Big(\int\limits_{\widetilde{s}_{n+1}} u\,d\mu\Big)^{1/q}, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{s}_n = (\Omega\backslash\Omega(\gamma_{n-1}))\backslash(\Omega\backslash\Omega(\gamma_n)) = \Omega([\gamma_{n-1},\gamma_n])$.

Из (3.4), (3.5) следует, что

$$\delta_n = \frac{2^{-n/q}}{2^{1/q}}\Big(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu\Big)^{1/p'} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu = 2^{p'/q}2^{np'/q}\delta_n^{p'}. \tag{3.6}$$

Замечание 3. Если $0<\int\limits_{\Omega} v^{-p'/p}\,d\nu<\infty$ и $0<\int\limits_{\Omega} u\,d\mu<\infty$, то $\{\beta_n\}$ и $\{\gamma_n\}$ будут иметь одностороннюю ограниченность, вычисления проводятся аналогично.

Пусть $0\le a<b<\infty$ и $A_{[a,b]}$ определено в (2.5). В теореме 2.5 построено разбиение $\{\Delta_k\}$, $k=0,\dots,N$, с помощью которого были получены двусторонние оценки аппроксимативных чисел. В следующих двух технических леммах оценим величину A_{Δ_k} из замечания 1 через σ_n и δ_n в зависимости от расположения интервалов Δ_k и дизъюнктных промежутков $J_n=(\beta_n,\beta_{n+1})$, $n\in\mathbb{Z}$, разбиения (3.1) и соответственно промежутков $Z_n=(\gamma_{n-1},\gamma_n)$ разбиения (3.4).

Лемма 3.1. 1. *Пусть номера $n_1<n_2$ такие, что $\Delta_k=[t_k,t_{k+1})\subset\bigcup\limits_{n=n_1}^{n_2} J_n$, где $t_k\in J_{n_1}$, $t_{k+1}\in J_{n_2}$. Тогда*

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k<\tau(x)<t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\max_{n_1\le n\le n_2}\sigma_n. \tag{3.7}$$

2. *Пусть номера $n_1<n_2$ такие, что $\Delta_k=[t_k,t_{k+1})\subset\bigcup\limits_{n=n_1}^{n_2} Z_n$, где $t_k\in Z_{n_1}$, $t_{k+1}\in Z_{n_2}$. Тогда*

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k<\tau(x)<t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q}-1)}\max_{n_1\le n\le n_2}\delta_n. \tag{3.8}$$

Доказательство. 1. Пусть $\tau(x)\in J_n=(\beta_n,\beta_{n+1})$, где $n_1\le n\le n_2$. Согласно заданию последовательностей (3.1), (3.2), формуле (3.3) и неравенству Йенсена видим, что

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) = \Big(\int\limits_{\Omega([t_k,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\Big)^{1/p'}\Big(\int\limits_{\Omega([\tau(x),t_{k+1}])} u\,d\mu\Big)^{1/q}$$
$$\le \Big(\int\limits_{\Omega([\beta_{n_1},\beta_{n+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Big)^{1/p'}\Big(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\beta_{n_2+1}])} u\,d\mu\Big)^{1/q}$$

$$\le 2^{1/p'} 2^{n/p'} \Bigg(\int\limits_{s_n} u\,d\mu + \dots + \int\limits_{s_{n_2}} u\,d\mu \Bigg)^{1/q}$$

$$\le 2^{1/p'} 2^{n/p'} \left(\frac{2^{q/p'}\sigma_n^q}{2^{nq/p'}} + \dots + \frac{2^{q/p'}\sigma_{n_2}^q}{2^{n_2 q/p'}} \right)^{1/q}$$

$$\le 2^{2/p'} \max_{n_1 \le n \le n_2} \sigma_n \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{(n_2-n)/p'}} \right) \le 2^{2/p'} \max_{n_1 \le n \le n_2} \sigma_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/p'}} \right).$$

Следовательно,

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \sigma_n$$

и

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \sigma_n.$$

2. По условию $t_k \in (\gamma_{n_1-1}, \gamma_{n_1})$ и $t_{k+1} \in (\gamma_{n_2-1}, \gamma_{n_2})$. Допустим, что $\tau(x) \in (\gamma_{n-1}, \gamma_n)$, где $n_1 \le n \le n_2$. Тогда, используя формулы (3.4)–(3.6) и неравенство Йенсена, получаем

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \Bigg(\int\limits_{\Omega([\gamma_{n_1-1},\gamma_n])} v^{-p'/p}\,d\nu \Bigg)^{1/p'} \Bigg(\int\limits_{\Omega([\gamma_{n-1},\gamma_{n_2}])} u\,d\mu \Bigg)^{1/q}$$

$$\le 2^{1/q} 2^{-n/q} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_{n_1}} v^{-p'/p}\,d\nu + \dots + \int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\,d\nu \Bigg)^{1/p'}$$

$$\le 2^{2/q} 2^{-n/q} (2^{n_1 p'/q} \delta_{n_1}^{p'} + \dots + 2^{np'/q} \delta_n^{p'})^{1/p'}$$

$$\le 2^{2/q} \max_{n_1 \le n \le n_2} \delta_n \left(1 + \dots + \frac{1}{2^{(n-n_1)/q}} \right) \le 2^{2/q} \max_{n_1 \le n \le n_2} \delta_n \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/q}} \right).$$

Следовательно,

$$A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q}-1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \delta_n,$$

что приводит к оценке

$$A_{\Delta_k} = \sup_{t_k < \tau(x) < t_{k+1}} A_{\Delta_k}(\tau(x)) \le \frac{2^{3/q}}{(2^{1/q}-1)} \max_{n_1 \le n \le n_2} \delta_n. \quad \Box$$

Лемма 3.2. *Пусть* $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 1, \dots, l$.

1. *Если* $\bigcup\limits_{k=1}^{l} \Delta_k \subset J_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{l} A_{\Delta_k}^s \le 2^{s/p'} \sigma_n^s$.

2. *Если* $\bigcup\limits_{k=1}^{l} \Delta_k \subset Z_n$, *то* $\sum\limits_{k=1}^{l} A_{\Delta_k}^s \le 2^{s/q} \delta_n^s$.

Доказательство. 1. Применяя неравенство Гёльдера с показателями $\frac{p'+q}{q}$, $\frac{p'+q}{p'}$ и формулы (3.1), (3.3), видим, что

$$\sum_{k=1}^{l} \Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu \Bigg)^{s/p'} \Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),t_{k+1}])} u\,d\mu \Bigg)^{s/q}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{l}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q}$$

$$\leq \Bigg(\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\sum_{k=1}^{l}\int\limits_{\Omega([t_k,t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q}$$

$$\leq \Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\Bigg)^{s/q} = (2^n)^{s/p'}\left(\frac{2^{q/p'}\sigma_n^q}{2^{(nq)/p'}}\right)^{s/q} = 2^{s/p'}\sigma_n^s.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l}\sup_{\tau(x)\in\Delta_k}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t_k,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{s/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\tau(x),t_{k+1}])} u\,d\mu\Bigg)^{s/q} \leq 2^{s/p'}\sigma_n^s.$$

Доказательство п. 2 проводится аналогичными рассуждениями с использованием формул (3.4)–(3.6). $\square$

В терминах последовательностей $\{\sigma_n\}$ и $\{\delta_n\}$ охарактеризуем ограниченность и компактность оператора (1.1).

Теорема 3.1. *Ограниченность оператора $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \leq q < \infty$, вида (1.1) эквивалентна каждому из следующих условий:*

1) *последовательность $\{\sigma_n\}$ принадлежит ℓ^∞, при этом норма оператора удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n \leq \|T\| \leq \frac{2^{3/p'+2}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n; \tag{3.9}$$

2) $\{\delta_n\} \in \ell^\infty$ *и норма оператора удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n \leq \|T\| \leq \frac{2^{3/q+2}}{(2^{1/q}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\delta_n. \tag{3.10}$$

Доказательство. 1. Зададим $\varepsilon > 0$. При некотором фиксированном t видим, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} = \Bigg(\int\limits_{\Omega(t)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(t)} u\,d\mu\Bigg)^{1/q}.$$

Далее,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} = \sup_{t>0}A(t).$$

Применяя неравенство (3.7) леммы 3.1, оцениваем

$$A\left(\left(\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) = \sup_{\varepsilon<t<\frac{1}{\varepsilon}}\Bigg(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,t])} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{1/p'}\Bigg(\int\limits_{\Omega([t,1/\varepsilon])} u\,d\mu\Bigg)^{1/q} \leq \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}\sup_{n\in\mathbb{Z}}\sigma_n.$$

Следовательно,

$$A = \sup_{t>0} A(t) \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n.$$

Согласно оценке нормы оператора в теореме 2.1 получаем неравенство

$$\|T\| \le 4A \le \frac{2^{3/p'+2}}{(2^{1/p'}-1)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n. \tag{3.11}$$

С другой стороны, с помощью формулы (3.3) выводим

$$\sigma_n \le 2^{n/p'} \biggl(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_n)} u\,d\mu \biggr)^{1/q} = A(\beta_n).$$

Переходя в неравенстве к супремуму справа, а затем слева, заключаем, что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n \le \sup_{n\in\mathbb{Z}} A(\beta_n) \le A. \tag{3.12}$$

Из (3.11) и (3.12) согласно оценке нормы оператора в теореме 2.1 имеем эквивалентность $\|T\| \approx \|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty}$ и двустороннюю оценку (3.9). Доказательство (3.10) следует аналогичными рассуждениями. $\square$

Теорема 3.2. *Оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, *вида* (1.1) *компактен тогда и только тогда, когда*

$$\|\{\sigma_n\}\|_{\ell^\infty} < \infty \quad (\text{или } \|\{\delta_n\}\|_{\ell^\infty} < \infty) \quad \text{и} \quad \lim_{k\to+\infty} \sup_{k\le n} \sigma_n = \lim_{k\to-\infty} \sup_{n\le k} \delta_n = 0.$$

Доказательство. Достаточность. Оценка нормы оператора в теореме 2.1 и неравенство (3.9) позволяют оценить:

$$A \le \|T\| \le \frac{2^{3/p'+2}}{\bigl(2^{1/p'}-1\bigr)} \sup_{n\in\mathbb{Z}} \sigma_n,$$

что влечет $A < \infty$.

Используя равенство (3.3), видим, что

$$A(\beta_k) = \biggl(\int\limits_{\Omega(\beta_k)} v^{-p'/p}\,d\nu \biggr)^{1/p'} \biggl(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)} u\,d\mu \biggr)^{1/q} = 2^{k/p'} \biggl(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)} u\,d\mu \biggr)^{1/q}$$
$$= 2^{1/p'} \biggl(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\,d\nu \biggr)^{1/p'} \biggl(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\beta_k)} u\,d\mu \biggr)^{1/q}.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Применяя оценку (3.7) леммы 3.3 и выбирая $k(\varepsilon)$ при условии, что $1/\varepsilon \in J_{k_\varepsilon}$, получаем

$$A(\beta_k) = 2^{1/p'} \lim_{\varepsilon\to 0} \biggl(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\,d\nu \biggr)^{1/p'} \biggl(\int\limits_{\Omega([\beta_k,1/\varepsilon])} u\,d\mu \biggr)^{1/q}$$
$$\le \frac{2^{4/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \lim_{\varepsilon\to 0} \max_{k\le n\le k(\varepsilon)} \sigma_n \le \frac{2^{4/p'}}{(2^{1/p'}-1)} \sup_{k\le n} \sigma_n.$$

Таким образом, $\overline{\lim_{k\to+\infty}} A(\beta_k) = 0$ в том случае, если $\lim_{k\to+\infty} \sup_{k\le n} \sigma_n = 0$.

Аналогичными рассуждениями для последовательности $\{\gamma_k\}$, $k\in\mathbb{Z}$, выводим

$$A(\gamma_k)=\biggl(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}\biggl(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\gamma_k)} u\,d\mu\biggr)^{1/q}=2^{-k/q}\biggl(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}$$
$$=2^{1/q}\biggl(\int\limits_{\Omega(\gamma_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}\biggl(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\,d\mu\biggr)^{1/q}.$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$. Применяя неравенство (3.8) леммы 3.1 и выбирая $k(\varepsilon)$ при условии, что $\varepsilon\in Z_{k_\varepsilon}$, заключаем

$$A(\gamma_k)=2^{1/q}\lim_{\varepsilon\to0}\biggl(\int\limits_{\Omega([\varepsilon,\gamma_k])} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}\biggl(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\,d\mu\biggr)^{1/q}$$
$$\le\frac{2^{4/q}}{(2^{1/q}-1)}\lim_{\varepsilon\to0}\max_{k(\varepsilon)\le n\le k}\delta_n\le\frac{2^{4/q}}{(2^{1/q}-1)}\sup_{n\le k}\delta_n.$$

Следовательно, $\varlimsup\limits_{k\to-\infty}A(\gamma_k)=0$, если $\lim\limits_{k\to-\infty}\sup\limits_{n\le k}\delta_n=0$.

Необходимость условия теоремы следует из неравенства (3.11). $\square$

Положим на конечном интервале $I=(a,b)\subset(0,\infty)$

$$A_I^*=\sup_{a<\tau(x)<b}\biggl(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'},$$

$$A_I=\sup_{a<\tau(x)<b}\biggl(\int\limits_{\Omega([\tau(x),b])} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{\Omega([a,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $I=(a,b)\subset(0,\infty)$, $J_n=(\beta_n,\beta_{n+1})$, $Z_n=(\gamma_{n-1},\gamma_n)$, где последовательности $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ заданы формулами* (3.1), (3.4). *Тогда*

$$A^*_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}>\sigma_n,\quad A^*_{(\overline{Z_n}\cup\overline{Z_{n+1}})}>\delta_n,\quad A_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}\ge\sigma_n,\quad A_{(\overline{Z_n}\cup\overline{Z_{n+1}})}\ge\delta_n.$$

Доказательство. Используя формулы (3.1)–(3.3), находим, что

$$A^*_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}=\sup_{\beta_n<\tau(x)<\beta_{n+2}}\biggl(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\tau(x)])} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\beta_{n+2}])} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}$$
$$\ge\biggl(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{s_{n+2}} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}=2^{1/p'}2^{n/p'}\biggl(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\biggr)^{1/q}=4^{1/p'}\sigma_n>\sigma_n.$$

Аналогичным способом приходим к оценке

$$A_{(\overline{J_n}\cup\overline{J_{n+1}})}=\sup_{\beta_n<\tau(x)<\beta_{n+2}}\biggl(\int\limits_{\Omega([\tau(x),\beta_{n+2}])} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{\Omega([\beta_n,\tau(x)])} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}$$
$$\ge\biggl(\int\limits_{s_{n+1}} u\,d\mu\biggr)^{1/q}\biggl(\int\limits_{s_n} v^{-p'/p}\,d\nu\biggr)^{1/p'}=\sigma_n.$$

Для последовательности $\{\delta_n\}$ неравенства можно получить подобными рассуждениями, используя формулы (3.4)–(3.6). $\square$

Для $0 < \varepsilon < \|T\|$ зададим множество

$$M_I(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{Z} : \overline{J_n} \subset I,\ \sigma_n > \varepsilon\}. \tag{3.13}$$

Лемма 3.4. *Пусть* $0 \le a < b < \infty$, $I = [a,b]$ *и* $0 < \varepsilon < \|T\|$, *где оператор* T *задан в* (1.1). *Тогда если* $\operatorname{card}(M_I(\varepsilon)) \ge 4$, *то* $\mathbf{A}_{[a,b]} > \varepsilon$.

Доказательство. Выберем точку $s \in I$ согласно условиям теоремы 2.4. Так как мы предположили, что $\operatorname{card}(M_I(\varepsilon)) \ge 4$, то хотя бы один из промежутков $[a,s]$ или $(s,b]$ содержит два элемента $\overline{J_n}$. В первом случае, обозначая $n_1 = \min\{n :\ n \in M_I(\varepsilon)\}$, получаем, что $\overline{J_{n_1}} \cup \overline{J_{n_1+1}} \subset [a,s]$, и по лемме 3.3 оцениваем:

$$A^*_{[a,s]} \ge A^*_{(\overline{J_{n_1}} \cup \overline{J_{n_1+1}})} \ge 4^{\frac{1}{p'}} \sigma_{n_1} > \sigma_{n_1} > \varepsilon.$$

Если же два элемента разбиения $\{J_n\}$ попадают в $(s,b]$, то полагаем $n_2 = \max\{n : n \in M_I(\varepsilon)\}$. В этом случае $\overline{J_{n_2-1}} \cup \overline{J_{n_2}} \subset (s,b]$ и

$$A_{[s,b]} \ge A_{(\overline{J_{n_2-1}} \cup \overline{J_{n_2}})} \ge \sigma_{n_2} > \varepsilon.$$

Следовательно, $\mathbf{A}_{[a,b]} = \max\{A^*_{[a,s]}, A_{[s,b]}\} > \varepsilon$. $\square$

Замечание 4. Лемма 3.4 показывает, что в предположении $\operatorname{card} M_{\Delta_k}(\varepsilon) \ge 4$ мы приходим к неравенству $\mathbf{A}_{[a,b]} > \varepsilon$, что противоречит разбиению (2.8). Следовательно, на Δ_k возможно только $\operatorname{card}\, M_{\Delta_k}(\varepsilon) < 4$.

Лемма 3.5. *Пусть* $0 < \varepsilon < \|T\|$, *разбиение* $\{\Delta_k\}$, $k = 1, \dots, N = N(\varepsilon)$, *определено в соответствии с* (2.8). *Тогда*

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \sigma_n > \varepsilon\} \le 6N(\varepsilon). \tag{3.14}$$

Доказательство. Мы видим, что

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : t_k \in \overline{J_n} \text{ при } 1 \le k \le N\} \le 2N. \tag{3.15}$$

Далее, по выбору $\mathbf{A}_{\Delta_k}$ согласно (2.8) в силу условий леммы 3.4 и замечания 4 для номеров $n \in \mathbb{Z}$, не содержащихся в (3.15), т. е. когда $\overline{J_n} \subset \Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $1 \le k \le N$, заключаем, что

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \overline{J_n} \subset \Delta_k,\ \sigma_n > \varepsilon\} \le 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \sigma_n > \varepsilon\} &= \sum_{i=0}^{N} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \overline{J_n} \subset \Delta_i,\ \sigma_n > \varepsilon\} + 2N \\ &\le 3(N+1) + 2N \le 6N. \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 3.6. *Для любого* $t > 0$ *справедливо неравенство*

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \sigma_n > t\} \le 6 \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_k(T) k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ge c_1 t\},$$

где $c_1 = \frac{2^{1/q}-1}{2^{1/q+1}}$.

Доказательство. Согласно формуле (2.9) для номеров $k = 1, \dots, N$ с подходящим $\varepsilon(k)$ выполняется оценка $c_1 \varepsilon(k) \le \mathbf{a}_k(T) k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ с константой $c_1 = \frac{1}{2}\bigl(1 - \frac{1}{2^{1/q}}\bigr)$.

Выбирая $\varepsilon = \min \varepsilon(k)$, видим, что

$$\operatorname{card}\bigl\{k \in \mathbb{N}\ : a_k(T) k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ge c_1 \varepsilon\bigr\} \ge N(\varepsilon).$$

Используя неравенство (3.14) леммы 3.5, получаем

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z} : \sigma_n > t\} \le 6N(t) \le 6 \operatorname{card}\{k \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_k(T) k^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ge c_1 t\}. \quad \square$$

Теорема 3.3. *Пусть оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, $1 < p \le q < \infty$, *вида* (1.1) *компактен. Тогда для* $\alpha \in (0, \infty)$ *справедливы неравенства*

$$\|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 6^{1/\alpha} \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q} - 1} \right) \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}, \tag{3.16}$$

$$\|\{\delta_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 6^{1/\alpha} \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q} - 1} \right) \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}. \tag{3.17}$$

Доказательство. Используя определение нормы последовательности в пространстве ℓ^α через ее функцию распределения (см. [20, предложение 1.1.4]) и применяя лемму 3.6, находим

$$\|\{\sigma_j\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > t\}\, dt$$

$$\le 6\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ge c_1 t\}\, dt$$

(замена переменных $\tau = c_1 t$)

$$= 6(c_1)^{-\alpha} \alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \ge \tau\}\, d\tau$$

$$= 6 \left(\frac{2^{1/q+1}}{2^{1/q} - 1} \right)^\alpha \|\{\mathbf{a}_n(T) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\}\|^\alpha_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

Аналогичными рассуждениями доказывается оценка (3.17). □

Теорема 3.4. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $s < \alpha < \infty$ *и оператор* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$, *определенный формулой* (1.1), *компактен. Тогда*

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \le 2^{1/p'+3} \left(\frac{s}{\alpha - s} \right)^{1/\alpha} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}, \tag{3.18}$$

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \le 2^{1/q+3} \left(\frac{s}{\alpha - s} \right)^{1/\alpha} \|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, число $N = N(\varepsilon)$ определено в (2.8) теоремы 2.5. Рассматривая взаимное расположение промежутков $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, \dots, N$, разбиения (2.8) и дизъюнктных интервалов $J_j = (\beta_j, \beta_{j+1})$, $j \in \mathbb{Z}$, разбиения (3.1), имеем следующие два возможных варианта.

1. Когда $t_k \in J_l$, а $t_{k+1} \in J_{l+m}$ для некоторых $l, m \in \mathbb{Z}$, $m \ge 1$, т. е. если $\Delta_k = [t_k, t_{k+1}) \subset \bigcup_{j=l}^{l+m} J_j$. Используя замечание 1 и лемму 3.1, получаем, что

$$\varepsilon = \mathbf{A}_{\Delta_k} \le A_{\Delta_k} \le \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'} - 1)} \max_{l \le j \le l+m} \sigma_j = \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'} - 1)} \sigma_{j_k}$$

для некоторого $j_k \in [j_l, j_{l+m}]$.

2. Если $\bigcup\limits_{i=l}^{l+m_j} \Delta_i \subset J_j$, $l, m_j \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$, то, применяя результаты леммы 3.2, заключаем, что

$$\varepsilon^s m_j \leq \sum_{i=l}^{l+m_j} \mathbf{A}^s_{\Delta_i} \leq \sum_{i=l}^{l+m_j} A^s_{\Delta_i} \leq 2^{s/p'} \sigma^s_j.$$

Следовательно,

$$N(\varepsilon) \leq \operatorname{card}\left\{k: \ \sigma_{j_k} \geq \frac{\varepsilon}{C_1}\right\} + \sum_{j: m_j \geq 1} \operatorname{card}\left\{j : \sigma_j \geq \frac{\varepsilon m_j^{1/s}}{C_2}\right\}$$
$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{card}\left\{k : \sigma_k \geq \frac{n^{1/s}\varepsilon}{C_3}\right\}, \quad (3.20)$$

где $C_1 = \frac{2^{3/p'}}{(2^{1/p'}-1)}$, $C_2 = 2^{1/p'}$, $C_3 = \min\{C_1, C_2\} = 2^{1/p'}$.

Верхняя оценка (2.9) в теореме 2.5 показывает, что число номеров аппроксимативных чисел, для которых $\mathbf{a}_n(T) > 8\varepsilon$, не превосходит номера $N = N(\varepsilon)$, т. е.

$$\operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T)\} > 8\varepsilon\} \leq N(\varepsilon).$$

Используя свойство нормы [20, предложение 1.1.4] и оценку (3.20), заключаем, что

$$\|\{\mathbf{a}_n(T)\}\|^{\alpha}_{\ell^{\alpha}(\mathbb{N})} = \alpha \int\limits_0^{\infty} \tau^{\alpha-1} \operatorname{card}\{n \in \mathbb{N} : \mathbf{a}_n(T)\} > \tau\}\, d\tau$$
$$\leq 8^{\alpha} \alpha \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} N(t)\, dt \leq 8^{\alpha}\alpha \int\limits_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} t^{\alpha-1} \operatorname{card}\left\{k \in \mathbb{Z} : \sigma_k \geq \frac{n^{1/s} t}{C_3}\right\} dt$$
$$= 2^{\alpha/p'} 8^{\alpha} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/s}}\right) \int\limits_0^{\infty} \alpha\theta^{\alpha-1} \operatorname{card}\{k : \sigma_k \geq \theta\}\, d\theta$$
$$= 2^{\alpha(1/p'+3)} \left(\frac{s}{\alpha - s}\right) \|\{\sigma_k\}\|^{\alpha}_{\ell^{\alpha}(\mathbb{Z})},$$

что доказывает оценку (3.18). Второе неравенство (3.19) получается аналогичными рассуждениями. □

Из теорем 3.3, 3.4 вытекает

Следствие 3.1. 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$,

$$\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^{\alpha}(\mathbb{Z})} = \left(\sum_k \left(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\, d\nu\right)^{\alpha/p'} \left(\int\limits_{s_{k+1}} u\, d\mu\right)^{\alpha/p}\right)^{1/\alpha} < \infty$$

и оператор $T : L^p_{v d\nu}(\Omega) \to L^p_{u d\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *компактен. Тогда он принадлежит операторному идеалу* $\mathfrak{A}_{\alpha}$ *и выполняется неравенство*

$$\frac{2^{1/p} - 1}{2^{1/p+1} 6^{1/\alpha}} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^{\alpha}(\mathbb{Z})} \leq \|T\|_{\mathfrak{A}_{\alpha}} \leq 2^{1/p'+3} \left(\frac{1}{\alpha - 1}\right)^{1/\alpha} \|\{\sigma_k\}\|_{\ell^{\alpha}(\mathbb{Z})}. \quad (3.21)$$

2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \alpha < \infty$,

$$\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} = \Bigg(\sum_k \Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_n} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\alpha/p'} \Bigg(\int\limits_{\widetilde{s}_{k+1}} u\, d\mu\Bigg)^{\alpha/p}\Bigg)^{1/\alpha} < \infty$$

и оператор $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^p_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *компактен. Тогда он принадлежит операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и выполняется неравенство*

$$\frac{2^{1/p}-1}{2^{1/p+1}6^{1/\alpha}}\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le \|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} \le 2^{1/p+3}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1/\alpha}\|\{\delta_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}. \tag{3.22}$$

Введем следующие обозначения:

$$\mathbb{I}_\alpha = \Bigg(\int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\, d\mu\Bigg)^{\alpha/q} \Bigg(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\alpha/p'-1} v^{-p'/p}(t)\, d\nu(t)\Bigg)^{1/\alpha},$$

$$\mathbb{J}_\alpha = \Bigg(\int\limits_\Omega \Bigg(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\alpha/p'} \Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\, d\mu\Bigg)^{\alpha/q-1} u(t)\, d\mu(t)\Bigg)^{1/\alpha}.$$

Теорема 3.5. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $s = \frac{qp'}{q+p'}$, $s < \alpha < \infty$, $\mathbb{I}_\alpha < \infty$, $\mathbb{J}_\alpha < \infty$. *Для компактности оператора* $T : L^p_{vd\nu}(\Omega) \to L^q_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал операторному идеалу* $\mathfrak{A}_\alpha$ *и чтобы выполнялась одна из оценок*

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le C_1\mathbb{I}_\alpha,\ \text{где } C_1 = \begin{cases} 2^{\frac{1}{p'}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & p' \le \alpha,\\ 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s < \alpha < p', \end{cases} \tag{3.23}$$

или

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le C_2\mathbb{J}_\alpha,\ \text{где } C_2 = \begin{cases} 2^{\frac{1}{q}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & q \le \alpha,\\ 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, & s < \alpha < q. \end{cases} \tag{3.24}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть оператор компактен. Используя формулы (3.1)–(3.3), сначала докажем неравенство $\big(\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha\big)^{1/\alpha} \le \mathbb{I}_\alpha$, которое справедливо при $\alpha \ge p'$. Действительно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}_\alpha^\alpha &= \sum_k \int\limits_{s_k} \Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus\Omega(\tau(t))} u\, d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}-1} v^{-p'/p}(t)\, d\nu(t)\\
&\ge \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\, d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} \int\limits_{s_k} \Bigg(\int\limits_{\Omega(\tau(t))} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}-1} v^{-p'/p}(t)\, d\nu(t)\\
&\ge \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\, d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\int\limits_{\Omega(\beta_{k-1})} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}-1} \int\limits_{s_k} v^{-p'/p}(t)\, d\nu(t)\\
&= \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\, d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} 2^{(k-1)\alpha/p'} = \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\, d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} \Bigg(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\, d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le \mathbb{I}_\alpha$. Согласно неравенству (3.18) теоремы 3.4 и в силу ограничения на α, которое по условиям теоремы больше s, видим, что

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{I}_\alpha < \infty.$$

Если же $s<\alpha<p'$, то

$$\begin{aligned}\mathbb{I}_\alpha^\alpha &\ge \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}}\Bigg(\int\limits_{\Omega(\beta_k)} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}-1}\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}(t)\,d\nu(t)\\ &= \sum_k \Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}} 2^{k\alpha/p'-1} = 2^{\alpha/p'-1}\sum_k\Bigg(\int\limits_{s_{k+1}} u\,d\mu\Bigg)^{\frac{\alpha}{q}}\Bigg(\int\limits_{s_k} v^{-p'/p}\,d\nu\Bigg)^{\frac{\alpha}{p'}}\\ &= 2^{\alpha/p'-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha.\end{aligned}$$

Тем самым $\|\{\sigma_k\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \le 2^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{p'}}\,\mathbb{I}_\alpha$ и

$$\|T\|_{\mathfrak{A}_\alpha} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{1/p'+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le 2^{\frac{1}{\alpha}+3}\left(\frac{s}{\alpha-s}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{I}_\alpha < \infty.$$

Таким образом, интегральный оператор T вида (1.1) принадлежит идеалу $\mathfrak{A}_\alpha(L^p_{vd\nu}(\Omega), L^q_{ud\mu}(\Omega))$.

Аналогичными рассуждениями доказывается оценка (3.24).

Достаточность. Пусть выполняется оценка (3.23). Это означает, что оператор T принадлежит $\mathfrak{A}_\alpha\big(L^p_{vd\nu}, L^q_{ud\mu}\big)$. Сходимость ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{a}_n^\alpha(T)\right)^{1/\alpha}$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{a}_n(T)=0$, что согласно [11, предложение 10.1.3] выражает аппроксимируемость оператора T. Так как оператор действует в пространствах, обладающих аппроксимационным свойством, делаем вывод, что он компактен [11, п. 10.1.3]. $\square$

Обозначим через $\mathbf{s}_n(T)$ одну из последовательностей характеристических чисел $\mathbf{c}_n(T)$ или $\mathbf{d}_n(T)$ оператора (1.1).

Предложение 3.1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$, $p'=\frac{p}{p-1}$, $s=\frac{qp'}{q+p'}$, $s<\alpha<\infty$, $\mathbb{I}_\alpha<\infty$, $\mathbb{J}_\alpha<\infty$. *Для компактности оператора* $T: L^p_{vd\nu}(\Omega)\to L^q_{ud\mu}(\Omega)$ *вида* (1.1) *необходимо и достаточно, чтобы он принадлежал операторному идеалу* $\mathfrak{S}_\alpha$ *и чтобы выполнялась одна из оценок*

$$\|T\|_{\mathfrak{S}_\alpha} \le C_1\mathbb{I}_\alpha \quad \text{или} \quad \|T\|_{\mathfrak{S}_\alpha} \le C_2\mathbb{J}_\alpha, \tag{3.25}$$

где константы C_1 *и* C_2 *определены формулами* (3.23), (3.24).

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1.1(i) и теоремы 3.5.

Достаточность. Пусть выполняется одна из оценок (3.25). Сходимость ряда $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathbf{c}_n^\alpha(T)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{c}_n(T)=0$, что согласно [16, предложение 2.3.1] и определению [16, (2.3.5)] дает компактность оператора T. Так же рассматриваются числа Колмогорова. Сходимость ряда $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{d}_n^{\alpha}(T)\right)^{1/\alpha}$ влечет $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{d}_n(T) = 0$. В силу [16, предложение 2.5.5] имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{c}_n(T') = 0$, что дает компактность оператора $T' : L^{q'}_{ud\mu}(\Omega) \to L^{p'}_{vd\nu}(\Omega)$, двойственного к T. Применяя теорему Шаудера [16, теорема Шаудера, с. 82], заключаем, что оператор T компактен. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Edmunds D. E., Kokilashvili V., Meskhi A.* Bounded and compact integral operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002. (Math. Appl.; V. 543).

2. *Sinnamon G.* One-dimensional Hardy-type inequalities in many dimensions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 1998. V. 128, N 4. P. 833–848.

3. *Drábek P., Heinig H. P., Kufner A.* Higher-dimensional Hardy inequality // General inequalities. 1997. V. 7. P. 3–16.

4. *Ruzhansky M., Verma D.* Hardy inequalities on metric measure spaces. I // Proc. Roy. Soc. Sect. A. 2019. V. 475. 2223, 20180310. 15 pp.

5. *Ruzhansky M., Verma D.* Hardy inequalities on metric measure spaces. II: the case $p > q$ // Proc. Roy. Soc. Sect. A. 2021. V. 477. 2250, 20210136. 16 pp.

6. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* О двумерных билинейных неравенствах с прямоугольным оператором Харди в весовых пространствах Лебега // Функциональные пространства, теория приближения и смежные опросы анализа. М.: Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 2021. Т. 312. С. 251–258.

7. *Wedestig A.* Weighted inequalities of Hardy type and their limiting inequalities. Lulea University of Technology, Sweden. Doctoral thesis, Department of Mathematics. 2003.

8. *Persson L. E., Ushakova E. P.* Some multi-dimensional Hardy type integral inequalities // J. Math. Inequal. 2007. V. 1, N 3. P. 301–319.

9. *Mynbaev K., Lomakina E.* Two-weight Hardy inequality on topological measure spaces // Euras. Math. J. 2025. V. 16, N 1. P. 60–85.

10. *Mynbaev K.* Three weight Hardy inequality on measure topological spaces // Euras. Math. J. 2023. V. 14, N 2. P. 58–78.

11. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.

12. *Pietsch A.* Eigenvalues and s-numbers. Leipzig: Geest Porting, 1987.

13. *König H.* Eigenvalue distribution of compact operators. Basel: Birkhäuser Verl., 1986. (Operator Theory: Advances and Applications; V. 16).

14. *Pietsch A.* s-Numbers of operators in Banach spaces // Studia Math. 1974. V. 51. P. 201–223.

15. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987. (Oxford Math. Monogr.).

16. *Carl B., Stephani I.* Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge: Camb. Univ. Press., 1990.

17. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Approximation numbers of certain Volterra integral operators // London Math. Soc. (2). 1988. V. 37, N 2-3. P. 471–489.

18. *Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. J.* Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // Studia Math. 1997. V. 124, N 1. P. 59–80.

19. *Lomakina E., Stepanov V.* On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of the Hardy-type integral operators // Function spaces and application. New Delhi: Narosa Publishing Hause, 2000. P. 153–187.

20. *Grafakos L.* Classical Fourier analysis. New York: Springer-Verl., 2008.

Поступила в редакцию 12 мая 2025 г.
После доработки 25 ноября 2025 г.
Принята к публикации 25 ноября 2025 г.

Мынбаев Кайрат Турысбекович (ORCID 0000-0002-0367-8023)
Международная школа экономики,
Казахстанско-Британский технический университет,
Толеби, 59, Алматы 050000, Казахстан
k_mynbayev@ise.ac

Ломакина Елена Николаевна (ORCID 0000-0002-2301-8380)
Лаборатория приближенных методов и функционального анализа,
Вычислительный Центр ДВО РАН,
Ким Ю Чена 65, Хабаровск 680000
enlomakina@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.955

СПЕЦИАЛЬНАЯ СТРУКТУРА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

В. Г. Романов

Аннотация. Для уравнения параболического типа, главная часть которого представляет собой оператор теплопроводности, рассматривается задача Коши с точечным источником. Выписывается специальная структура решения этой задачи, в основе которой лежит представление решения через произведение фундаментального решения уравнения теплопроводности и полинома по степеням t с коэффициентами, зависящими от пространственных переменных. Выводятся формулы для вычисления этих коэффициентов, дается оценка остаточного члена. Далее ставятся две обратные задачи для исходного уравнения, которые затем исследуются на основе выписанной структуры решения задачи Коши. Формулируется теорема единственности для рассматриваемых обратных задач.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.208

Ключевые слова: уравнение параболического типа, задача Коши, структура решения, томография, обратная задача, единственность.

К 70-летию Геннадия Владимировича Демиденко

1. Постановка прямой задачи, структура ее решения

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots , x_n)$, $n \geq 2$, и $u = u(\mathbf{x}, t)$. Рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv u_t - \Delta u = q(\mathbf{x})u,\ (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad u(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0), \tag{1}$$

в которой $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $T > 0$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкая функция, относительно которой предположим, что

$$q(\mathbf{x}) \in C^{2m}(\mathbb{R}^n), \quad \|q\|_{C^{2m}(\mathbb{R}^n)} \leq q_0. \tag{2}$$

Здесь $m \geq 0$ — некоторое целое число.

Если $q(\mathbf{x}) = 0$, то решение задачи (1) дается формулой

$$u_0(\mathbf{x}, t) = \frac{e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{n/2}}. \tag{3}$$

Для решения задачи (1) имеет место следующая теорема о структуре ее решения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0029).

Теорема 1. *Пусть условие* (2) *выполнено. Тогда существует единственное непрерывное в области* $D_T = \{(\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)\}$ *решение задачи* (1) *и это решение представимо в виде*

$$u(\mathbf{x},t) = u_0(\mathbf{x},t)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k(\mathbf{x})\frac{t^k}{k!} + u_m(\mathbf{x},t), \tag{4}$$

в котором $u_m(\mathbf{x},t)$ — *непрерывная в* D_T *функция, и для нее выполняется оценка*

$$|u_m(\mathbf{x},t)| \le Cu_0(\mathbf{x},t)\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}, \quad (\mathbf{x},t) \in D_T, \tag{5}$$

с постоянной $C = C(q_0,T)$, $\alpha_0(\mathbf{x}) = 1$, *функции* α_k *принадлежат* $C^{2(m+1-k)}(\mathbb{R}^n)$, $k = \overline{1,m}$, *и вычисляются по формулам*

$$\alpha_1(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 q(\mathbf{x}^0 + s(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0))\,ds, \tag{6}$$

$$\alpha_k(\mathbf{x}) = \int\limits_0^1 s^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi) + k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}\,ds, \quad k = \overline{2,m}. \tag{7}$$

Замечание. Аналогичное (4) представление решения задачи Коши для уравнения параболического типа было получено в работе [1] при $n = 2$ и $n = 3$ с использованием давно известной формулы связи между решениями задачи Коши для гиперболических и параболических уравнений и асимптотического разложения фундаментального решения гиперболического уравнения в окрестности характеристического конуса, установленного в книге [2]. Ниже дается доказательство теоремы 1, основанное на использовании только уравнения (1), что избавляет от необходимости рассматривать задачу Коши для соответствующего гиперболического уравнение на бесконечном по t интервале и от предположения о поведении ее решения при $t \to \infty$. В этом состоит, в основном, новизна части статьи, связанной с представлением (4).

Доказательство. Будем искать решение задачи (1) в виде (4) с $\alpha_0(\mathbf{x}) = 1$. Так как имеют место равенства

$$u_t(\mathbf{x},t) = (u_0)_t(\mathbf{x},t)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k(\mathbf{x})\frac{t^k}{k!} + u_0(\mathbf{x},t)\sum_{k=1}^{m}\alpha_k(\mathbf{x})\frac{t^{k-1}}{(k-1)!} + (u_m)_t(\mathbf{x},t),$$

$$\begin{aligned}\Delta u(\mathbf{x},t) &= \Delta u_0(\mathbf{x},t)\sum_{k=0}^{m}\alpha_k(\mathbf{x})\frac{t^k}{k!}\\ &- u_0(\mathbf{x},t)\left[\sum_{k=1}^{m}\nabla\alpha_k(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)\frac{t^{k-1}}{k!} - \sum_{k=0}^{m}\Delta\alpha_k(\mathbf{x})\frac{t^k}{k!}\right] + \Delta u_m(\mathbf{x},t)\end{aligned}$$

и $Lu_0(\mathbf{x},t) = 0$ для $t > 0$, получаем, что

$$\begin{aligned}0 &= Lu - q(\mathbf{x})u\\ &= u_0(\mathbf{x},t)\sum_{k=1}^{m}\frac{t^{k-1}}{k!}[\nabla\alpha_k(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0) + k\alpha_k(\mathbf{x}) - k\Delta\alpha_{k-1}(\mathbf{x}) - q(\mathbf{x})\alpha_{k-1}(\mathbf{x})]\\ &+ Lu_m(\mathbf{x},t) - q(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x},t) - u_0(\mathbf{x},t)\frac{t^m}{m!}(\Delta\alpha_m(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x})\alpha_m(\mathbf{x})),\ (\mathbf{x},t) \in D_T.\end{aligned} \tag{8}$$

Приравнивая к нулю выражение, заключенное в квадратные скобки, получаем уравнения для отыскания функций $\alpha_k(\mathbf{x})$:

$$\nabla\alpha_k(\mathbf{x})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)+k\alpha_k(\mathbf{x})-k\Delta\alpha_{k-1}(\mathbf{x})-q(\mathbf{x})\alpha_{k-1}(\mathbf{x})=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{9}$$

Как результат, из (8) находим также, что функция $u_m(\mathbf{x},t)$ должна быть решением задачи Коши

$$Lu_m(\mathbf{x},t)=q(\mathbf{x})u_m(\mathbf{x},t)+h_m(\mathbf{x})u_0(\mathbf{x},t)\frac{t^m}{m!},\ (\mathbf{x},t)\in D_T;\quad u_m(\mathbf{x},0)=0, \tag{10}$$

в которой

$$h_m(\mathbf{x})=\Delta\alpha_m(\mathbf{x})+q(\mathbf{x})\alpha_m(\mathbf{x}).$$

Проинтегрируем уравнения (9). Рассмотрим луч $\mathbf{x}=\mathbf{x}^0+s\nu$, $s>0$, где $\nu(\mathbf{x})=(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)/|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$ — единичный вектор, $\nu\in\mathbb{S}^{n-1}$. Умножая уравнение (9) на s^{k-1}, перепишем его в виде

$$\frac{d}{ds}(s^k\alpha_k(\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})))-s^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})}=0,\quad k=\overline{1,m}. \tag{11}$$

Интегрируя (11) по отрезку $s\in[0,|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|]$, находим, что

$$\alpha_k(\mathbf{x})=\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^k}\int\limits_0^{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|}s^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s\nu(\mathbf{x})}\,ds$$

$$=\int\limits_0^1 s_1^{k-1}[q(\xi)\alpha_{k-1}(\xi)+k\Delta_\xi\alpha_{k-1}(\xi)]_{\xi=\mathbf{x}^0+s_1(\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)}\,ds_1,\quad k=\overline{1,m}. \tag{12}$$

Так как $\alpha_0(\mathbf{x})=1$, из (12) вытекают формулы (6) и (7). Из этих формул следует, что $\alpha_k\in C^{2(m+1-k)}(\mathbb{R}^n)$, $k=\overline{1,m}$. Тогда становится очевидной также оценка

$$\|h_m\|_{C(\mathbb{R}^n)}\le A_m q_0^{\eta_m}, \tag{13}$$

в которой A_m — некоторое положительное число, а $\eta_m=1$, если $q_0\le 1$, и $\eta_m=m+1$, если $q_0>1$. Задача (10) сводится к решению интегрального уравнения

$$u_m(\mathbf{x},t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\left[q(\xi)u_m(\xi,s)+h_m(\xi)u_0(\xi,s)\frac{s^m}{m!}\right]d\xi ds,\ (\mathbf{x},t)\in D_T. \tag{14}$$

Обозначим

$$u_m^0(\mathbf{x},t)=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}h_m(\xi)u_0(\xi,s)\frac{s^m}{m!}\,d\xi ds$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-[\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}+\frac{|\xi-\mathbf{x}^0|^2}{4s}]}s^m h_m(\xi)}{(4\pi)^n[s(t-s)]^{n/2}m!}\,d\xi ds. \tag{15}$$

Тогда уравнение (14) принимает вид

$$u_m(\mathbf{x},t)=u_m^0(\mathbf{x},t)+\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}q(\xi)u_m(\xi,s)\,d\xi ds. \tag{16}$$

Воспользуемся для уравнения (16) методом последовательных приближений. В силу линейности этого уравнения удобно представить его решение в виде ряда

$$u_m(\mathbf{x},t) = u_m^0(\mathbf{x},t) + \sum_{k=1}^{\infty} u_m^k(\mathbf{x},t),$$

в котором функции $u_m^k(\mathbf{x},t)$, $k=1,2,\dots$, определены формулой

$$u_m^k(\mathbf{x},t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}} q(\xi) u_m^{k-1}(\xi,s)\, d\xi ds, \quad k=1,2,\dots. \tag{17}$$

Оценим $u_m^k(\mathbf{x},t)$, $k=0,1,\dots$. Введем новую систему координат ξ', ξ_n', причем $\xi' = (\xi_1', \dots, \xi_{n-1}')$ и ξ_i', $i=1,2,\dots,n$, определены формулой

$$\xi = \mathbf{x}^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i' \mathbf{e}_i + \xi_n' \mathbf{e}_n,$$

в которой векторы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ ортогональны друг другу и $\mathbf{e}_n = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^0)/|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|$. Тогда

$$\begin{aligned} g(\xi,\mathbf{x},s,t) := \frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)} + \frac{|\xi-\mathbf{x}^0|^2}{4s} &= \frac{|\xi'|^2 + (\xi_n' - |\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|)^2}{4(t-s)} + \frac{|\xi'|^2 + |\xi_n'|^2}{4s} \\ &= \frac{t(|\xi'|^2 + |\xi_n'|^2) - 2s\xi_n'|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0| + s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4s(t-s)} \\ &= \frac{t(|\xi'|^2 + (\xi_n' - s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t)^2)}{4s(t-s)} + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}. \end{aligned} \tag{18}$$

Введем также сферические координаты $r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}$ вектора ξ' формулой

$$\xi' = r\nu'(\varphi), \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}),$$

в которой $\nu'(\varphi)$ — вектор единичной сферы $\mathbb{S}^{n-2}$. Положим

$$r = 2\sqrt{zs(t-s)/t}, \quad \xi_n' = s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t + 2(-1)^j \sqrt{\zeta s(t-s)/t},$$

где $j=1$, если $\xi_n' < s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t$, и $j=2$, если $\xi_n' > s|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|/t$. Тогда

$$\begin{gathered} g(\xi,\mathbf{x},s,t) = z + \zeta + \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}, \\ d\xi = d\xi' d\xi_n' = r^{n-2}\, dr d\omega d\xi_n' = 2^{n-2}[s(t-s)/t]^{n/2} z^{(n-3)/2} \zeta^{-1/2}\, dz d\omega d\zeta. \end{gathered} \tag{19}$$

В этой формуле $d\omega$ — элемент площади единичной сферы $\mathbb{S}^{n-2}$.

Из условия (2) и формул (13), (15) и (19) находим, что

$$\begin{aligned} |u_m^0(\mathbf{x},t)| &\le \frac{A_m q_0^{\eta_m}}{2^{n+1}\pi^n t^{n/2} m!} \\ &\quad\times e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}} \int_0^t \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{S}^{n-2}} e^{-z-\zeta} z^{(n-3)/2} \zeta^{-1/2}\, d\omega dz d\zeta\, s^m\, ds \\ &= \frac{A_m q_0^{\eta_m} t^{m+1}}{2\pi^{n/2}(m+1)!} u_0(\mathbf{x},t)\omega_{n-1}\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2), \end{aligned}$$

где $\omega_{n-1} = (n-1)\pi^{(n-1)/2}/\Gamma((n-1)/2)$ — площадь сферы $\mathbb{S}^{n-2} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ и $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция. Так как $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$, получаем окончательную оценку в виде

$$\left|u_m^0(\mathbf{x},t)\right| \le \frac{A_m q_0^{\eta_m}(n-1)t^{m+1}}{2(m+1)!}\,u_0(\mathbf{x},t). \tag{20}$$

Используя формулы (17), (19) и (20), получаем оценку последующего приближения

$$\begin{aligned}\left|u_m^1(\mathbf{x},t)\right| &\le \frac{A_m q_0^{\eta_m+1}(n-1)}{2^{2+n}\pi^n t^{n/2}(m+1)!}\\ &\quad\times e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}}\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}} e^{-z-\zeta}z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\,d\omega dz d\zeta\, s^{m+1}\,ds\\ &= \frac{A_m q_0^{\eta_m+1}(n-1)t^{m+2}}{4\pi^{n/2}(m+2)!}u_0(\mathbf{x},t)\omega_{n-1}\Gamma((n-1)/2)\Gamma(1/2)\\ &= A_m\,u_0(\mathbf{x},t)\frac{q_0^{1+\eta_m}(n-1)^2t^{(m+2)}}{2^2(m+2)!}.\end{aligned}$$

Методом математической индукции устанавливается общая оценка

$$\left|u_m^k(\mathbf{x},t)\right| \le A_m\,u_0(\mathbf{x},t)\frac{q_0^{k+\eta_m}(n-1)^{k+1}t^{m+k+1}}{2^{k+1}(m+k+1)!},\quad k=0,1,\dots. \tag{21}$$

Действительно, допустим, что эта оценка верна для всех $k \le k_0$, $k_0 \ge 1$. Тогда согласно (16) имеем

$$\begin{aligned}\left|u_m^{k_0+1}(\mathbf{x},t)\right| &\le q_0\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{e^{-\frac{|\xi-\mathbf{x}|^2}{4(t-s)}}}{(4\pi(t-s))^{n/2}}\left|u_m^{k_0}(\xi,s)\right|d\xi ds\\ &\le \frac{q_0}{(4\pi)^n}\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^n}e^{-g(\xi,\mathbf{x},s,t)}A_m\frac{q_0^{k_0+\eta_m}(n-1)^{k_0+1}s^{m+k_0+1}}{2^{k_0+1}(m+k_0+1)!}\,d\xi ds\\ &\le A_m\frac{q_0^{k_0+1+\eta_m}(n-1)^{k_0+1}e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}^0|^2}{4t}}}{\pi^n 2^{k_0+n+2}t^{n/2}(m+k_0+1)!}\\ &\quad\times\int\limits_0^t\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty\int\limits_{\mathbb{S}^{n-2}}e^{-z-\zeta}z^{(n-3)/2}\zeta^{-1/2}\,d\omega dz d\zeta\,s^{m+k_0+1}\,ds\\ &= A_m\frac{q_0^{k_0+1+\eta_m}(n-1)^{k_0+2}u_0(\mathbf{x},t)t^{m+k_0+2}}{2^{k_0+2}(m+k_0+2)!}.\end{aligned} \tag{22}$$

Формула (22) совпадает с формулой (21) при $k = k_0+1$. Тем самым формула (21) установлена.

Из формулы (21) следует, что ряд

$$u_m^0(\mathbf{x},t) + \sum_{k=1}^\infty u_m^k(\mathbf{x},t)$$

сходится в области D_T равномерно к функции $u_m(\mathbf{x},t)$ и для этой функции справедлива оценка

$$|u_m(\mathbf{x},t)| \le A_m q_0^{\eta_m}\,u_0(\mathbf{x},t)\frac{t^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^\infty\frac{q_0^k(n-1)^{k+1}t^k(m+1)!}{2^{k+1}(m+k+1)!}.$$

Отсюда выводится неравенство (5).

Таким образом, представление (4) обосновано. Заметим, что построенное решение задачи (1) единственно. Это следует из хорошо известных теорем для линейных параболических уравнений. $\square$

2. Постановка обратных задач

В этом разделе будем предполагать, что точка $\mathbf{x}^0$ может меняться, т. е. она является переменным параметром задачи (1). Поэтому решение этой задачи в дальнейшем обозначим через $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)$, а фундаментальное решение уравнения теплопроводности — через $u_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)$. Коэффициенты α_k разложения (4) обозначим через $\alpha_k(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$.

Пусть функция $F(\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^0)$ определена формулой

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \lim_{t \to +0} \left[\frac{1}{t} \left(\frac{u(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)}{u_0(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}^0)} - 1 \right) \right]. \tag{23}$$

Из теоремы 1 следует, что эта формула корректна, если функция $q(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (2) при $m = 1$. Более того, в этом случае имеет место равенство

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \int_0^1 q(\mathbf{x}^0 + s(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0))\, ds. \tag{24}$$

Пусть $r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ — сферические координаты точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, определяемые формулой

$$\mathbf{x} = r\nu(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

в которой координаты единичного вектора $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ заданы равенствами

$$\begin{aligned}
&\nu_1 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\nu_2 = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\nu_3 = \sin\varphi_2 \cos\varphi_3 \cdot \ldots \cdot \cos\varphi_{n-1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\nu_n = \sin\varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Пусть $n \geq 3$ и $\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \nu(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, 0)$ — единичный вектор. Определим векторы

$$\mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \frac{\partial}{\partial \varphi_k} \mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), \quad k = \overline{1, n-2}.$$

Все векторы $\mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$, $k = \overline{1, n-1}$, ортогональны друг другу и лежат в плоскости $x_n = 0$. Пусть $\mathbf{e}^n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ — единичный орт оси x_n. Зададим двумерную плоскость $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$:

$$\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}^k(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = 0,\ k = \overline{1, n-2}\}.$$

При $n = 2$ примем, что $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) = \mathbb{R}^2$. Рассмотрим окружность C_R, которая является пересечением плоскости $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ и сферы $S_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| = R\}$. Если точка $\mathbf{x}$ принадлежит C_R, то она может быть записана в виде

$$\mathbf{x} = R[\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos\psi + \mathbf{e}^n \sin\psi] := \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi), \quad \psi \in [0, 2\pi).$$

Аналогично любую точку $\mathbf{x}^0 \in C_R$ можно представить в виде

$$\mathbf{x}^0 = R(\mathbf{e}^{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}) \cos\psi_0 + \mathbf{e}^n \sin\psi_0) = \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi_0),\ \psi_0 \in [0, 2\pi).$$

Ниже формулируются две обратные задачи о восстановлении коэффициента $q(\mathbf{x})$ в уравнении (1) по функции $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$. Их формулировки отличаются только множествами, на которых задана функция $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0)$.

Задача 1. *Найти* $q(\mathbf{x})$ *в области* $B_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < R\}$ *по функции*

$$f_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi, \psi_0) = F(\chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi), \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi_0)) \qquad (25)$$
$$\forall(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), (\psi, \psi_0) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi).$$

Пусть теперь $q(\mathbf{x}) = 0$ для $\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^n \setminus B_R)$ и $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$, где $z \in (a, b), R < a < b$, а $\mathbf{x} \in C_R(z)$, где $C_R(z) = \{\mathbf{x} \in C_R \mid \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z)))\}$. Заметим, что $\mathbf{x} \in C_R(z)$ тогда и только тогда, когда отрезок прямой линии, соединяющий точки $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$ и $\mathbf{x} \in C_R$, пересекает область B_R.

Задача 2. *Найти* $q(\mathbf{x})$ *в области* $B_R = \{\mathbf{x} \mid |\mathbf{x}| < R\}$ *по функции*

$$f_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi, z) = F(\chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi), z\mathbf{e}^n) \qquad (26)$$
$$\forall(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z))), \quad z \in (a, b).$$

3. Анализ обратных задач

Используя формулы (24) и (25), приведем задачу 1 к решению уравнения

$$\int\limits_0^1 q(\chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi_0) + s[\chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi) - \chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi_0)])\, ds$$
$$= f_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi, \psi_0)\ \forall(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), (\psi, \psi_0) \in [0, 2\pi) \times [0, 2\pi). \qquad (27)$$

Это уравнение означает, что при каждом фиксированном наборе переменных φ_k, $k = \overline{1, n-2}$, на двумерной плоскости $\Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ заданы интегралы по всем отрезкам прямых линий, соединяющим точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^0$ окружности C_R, лежащей на той же самой плоскости. Следовательно, задача о восстановлении функции $q(\mathbf{x})$ в сечении $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ сводится к обычной задаче томографии. О ее применении в медицине смотрите лекцию нобелевского лауреата А. М. Кормака [3]. Методы ее решения хорошо разработаны (см. [4–10]) и существует множество ее численных реализаций. Таким образом, в каждом сечении $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$ функция $q(\mathbf{x})$ однозначно восстанавливается по данным обратной задачи. Объединение всех таких сечений образует область B_R. Следовательно, задание интегралов (27) позволяет однозначно найти искомый коэффициент $q(\mathbf{x})$ во всей области B_R.

Перейдем к анализу задачи 2. Используя формулы (24) и (26), приходим к уравнению

$$\int\limits_0^1 q(z\mathbf{e}^n + s[\chi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi) - z\mathbf{e}^n])\, ds = f_2(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}, \psi, z) \qquad (28)$$
$$\forall(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2}), \psi \in ([0, 2\pi) \setminus (\arccos(R/z), \pi - \arccos(R/z))), \quad z \in (a, b).$$

Рассмотрим опять двумерное сечение $B_R \cap \Sigma(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-2})$. Уравнение (28) означает, что в этом сечении заданы интегралы от $q(\mathbf{x})$ по отрезкам прямых линий, соединяющим точки $\mathbf{x}^0 = z\mathbf{e}^n$, $z \in (a, b)$, и $\mathbf{x} \in C_R$, причем на части этих отрезков, лежащей вне области B_R, функция $q(\mathbf{x})$ равна нулю. В результате приходим в этом сечении к так называемой *задаче томографии с неполными данными*. Эта задача отличается от предыдущей меньшей устойчивостью к данным задачи, но сохраняется единственность ее решения (см. [10]).

Резюмируя выполненный анализ обратных задач, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Обратные задачи* 1 *и* 2 *имеют не более одного решения. Задача* 1 *сводится к решению задачи рентгеновской томографии* (27), *задача* 2 — *к задаче томографии* (28) *с неполными данными.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Романов В. Г.* Асимптотическое разложение фундаментального решения параболического уравнения и обратные задачи // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 141–144.

2. *Романов В. Г.* Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005.

3. *Cormack A. M.* Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel lectures in physiology or medicine 1971.1980. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1992. P. 551–563.

4. *Хелгасон С.* Преобразование Радона. М.: Мир, 1966.

5. *Deans S. R.* The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.

6. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

7. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

8. *Finch D. V.* Cone beam reconstruction with sources on a curve // SIAM J. Appl. Math. 1985. V. 45, N 4. P. 665–673.

9. *Grangeat P.* Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991. (Mathematical methods in tomography).

10. *Palamodov V. P.* Reconstructive integral geometry. Basel: Birkhäuser, 2004.

Поступила в редакцию 31 декабря 2025 г.
После доработки 31 декабря 2025 г.
Принята к публикации 26 января 2026 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.925.5

РАДИАЛЬНЫЕ И ШАРОВЫЕ МЕРЫ СТАБИЛЬНОСТНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

И. Н. Сергеев

Аннотация. Рассматриваются стабильностные и осцилляционные свойства произвольной нелинейной дифференциальной системы с нулевым решением: устойчивость, асимптотическая устойчивость, полная неустойчивость (разных типов: ляпуновского, перроновского, верхнепредельного) и полные блуждаемость, колеблемость, вращаемость (а также полные противоположные им свойства: неблуждаемость, неколеблемость, невращаемость). Для такой системы определяются шаровые и радиальные меры этих свойств — понятия таких мер вероятностного характера были введены в рассмотрение совсем недавно. Изучаются взаимосвязи между значениями различных мер перечисленных свойств друг с другом.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.209

Ключевые слова: дифференциальная система, ляпуновская устойчивость, перроновская устойчивость, верхнепредельная устойчивость, блуждаемость, колеблемость, вращаемость, мера устойчивости, мера колеблемости, радиальная мера.

Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

1. Основные понятия

При $n \in \mathbb{N}$ для заданной фазовой области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей нуль и наделенной лебеговской мерой mes, на временном луче $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ рассматриваем дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad f(t, 0) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}_+,\ x \in G,\ f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times G), \tag{1}$$

с правой частью f, обеспечивающей существование и единственность решений задач Коши. Введем обозначения

$$\mathbb{S}_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = \delta\}, \quad B_\delta \equiv \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |x| < \delta\},$$

а $x_f(\cdot, x_0)$ — непродолжаемое решение системы (1) с начальным значением $x_f(0, x_0) = x_0 \in G$.

Прежде всего напомним определения мер разнообразных стабильностных свойств дифференциальной системы, восходящих к работам [1–5] и введенных в работах [6–9].

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-03-2026-395).

Определение 1. Для системы (1) определим следующие *меры стабильностных* свойств *устойчивости, асимптотической устойчивости* и *неустойчивости*, каждая из которых может быть одного из трех типов: *ляпуновского, перроновского, верхнепредельного* при *ассоциированном* значении $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$. Эти меры определются соответственно формулой

$$\mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \varkappa = \lambda, \pi, \sigma, \lambda_0, \pi_0, \sigma_0, \overline{\lambda}, \overline{\pi}, \overline{\sigma},$$

где $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta), \mathrm{M}_{\varkappa_0}(f,\varepsilon,\delta)$ и $\mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}(f,\varepsilon,\delta)$ — множества всех начальных значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\begin{aligned} \Phi_\varkappa(x_f(\cdot,x_0)) &\le \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_\varkappa), \\ \Phi_{\varkappa_0}(x_f(\cdot,x_0)) &\le \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\varkappa_0}), \\ \Phi_\varkappa(x_f(\cdot,x_0)) &> \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}), \end{aligned} \tag{2}$$

в котором функционалы при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ зададим для непрерывно дифференцируемой функции $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_* \ (\equiv \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ формулами

$$\Phi_\lambda(x) \equiv \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |x(t)|, \quad \Phi_\pi(x) \equiv \varliminf_{t\to+\infty} |x(t)|, \quad \Phi_\sigma(x) \equiv \varlimsup_{t\to+\infty} |x(t)|$$

(при этом если функция x определена не на всем луче $\mathbb{R}_+$, то считаем $\Phi_\varkappa(x) = +\infty$),

$$\Phi_{\varkappa_0} \equiv \operatorname{Sgn} \Phi_\varkappa \equiv \begin{cases} +\infty, & \Phi_\varkappa > 0, \\ 0, & \Phi_\varkappa = 0, \end{cases} \quad \varkappa = \pi, \sigma, \quad \Phi_{\lambda_0} \equiv \Phi_\lambda + \Phi_{\sigma_0}.$$

Напомним определения мер разнообразных осцилляционных свойств дифференциальной системы из работ [10–15].

Определение 2. При $n > 1$ для системы (1) определим следующие *меры осцилляционных* свойств *блуждаемости, неблуждаемости* и *колеблемости, неколеблемости*, а также *вращаемости, невращаемости.* Последние два свойства, в отличие от четырех предыдущих, будем считать *нестандартными.* Эти меры определяются формулой

$$\mu_\varkappa(f) = \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{t\to+\infty} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)}{\operatorname{mes} B_\delta}, \quad \varkappa = \rho, \overline{\rho}, \nu, \overline{\nu}, \theta, \overline{\theta},$$

где $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$ и $\mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}(f,\varepsilon,t,\delta)$ — множества всех начальных значений $x_0 \in B_\delta$, удовлетворяющих соответствующему требованию

$$\begin{aligned} \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \Phi_\varkappa(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t) &\ge \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_\varkappa), \\ \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \Phi_\varkappa(Lx_f(\,\cdot\,,x_0),t) &< \varepsilon \quad (\text{для } \mathrm{M}_{\overline{\varkappa}}), \end{aligned}$$

в котором при ассоциированном значении $\varkappa = \rho, \nu, \theta$ функционалы *блуждаемости, колеблемости, вращаемости* для непрерывно дифференцируемой функции $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n_*$ определяются так:

(а) $\Phi_\rho(t,x) \equiv \inf_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} \frac{1}{t}\int_0^t \left|\frac{d}{d\tau}\frac{Lx(\tau)}{|Lx(\tau)|}\right| d\tau$ — *минимизированная* (по L) *средняя вариация следа* функции Lx на единичной сфере за время t;

(б) $\Phi_\nu(t,x)$ — *минимизированное* (по $L \in \operatorname{Aut}\mathbb{R}^n$) *нормализованное* (множителем π/t) *число нулей* (неопределенное в случае, если хотя бы один этих нулей кратен) функции P_1Lx на промежутке $(0,t]$, где P_1 — проектор на фиксированную прямую в $\mathbb{R}^n$;

(в) $\Phi_\theta(t,x) \equiv \inf\limits_{L\in\operatorname{Aut}\mathbb{R}^n} |\varphi(t,P_2Lx)|/t$ — *минимизированная* (по L) *средняя угловая скорость* вектора $P_2Lx(\tau)$ за время t, где $\varphi(t,P_2Lx)$ — непрерывный *ориентированный* угол между вектором $P_2Lx(t)$ и начальным вектором $P_2Lx(0)$ (в случае $P_2Lx(\tau)=0$ хотя бы для одного $\tau\in[0,t]$ считаем этот угол неопределенным), а P_2 — проектор на фиксированную двумерную плоскость в $\mathbb{R}^n$.

Основываясь на определениях 1 и 2, которые фактически описывают *шаровые* меры различных свойств, определим далее их *радиальные* аналоги, связанные с соответствующими радиальными свойствами дифференциальной системы [16–18].

Определение 3. Для системы (1) *радиальными мерами* $\mu_{\varkappa,u}(f)$ данных свойств при ассоциированных значениях $\varkappa$ *в направлении* вектора $u\in\mathbb{S}_1$ назовем соответствующие меры, описанные в определениях 1 и 2, с заменой в них обозначений $\mu_\varkappa(f)$, $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,\delta)$, $\mathrm{M}_\varkappa(f,\varepsilon,t,\delta)$, B_δ,mes обозначениями $\mu_{\varkappa,u}(f)$, $\mathrm{M}_{\varkappa,u}(f,\varepsilon,\delta)$, $\mathrm{M}_{\varkappa,u}(f,\varepsilon,t,\delta)$, $B_{\delta,u}$, mes_u, а условия $x_0\in B_\delta$ — условием $x_0\in B_{\delta,u}\equiv B_\delta\cap l_u$, где $l_u\equiv\{x=cu : c>0\}$ и mes_u — лебеговская мера на луче l_u. Кроме того, для множеств направлений $u\in\mathbb{S}_1$ зададим на единичной сфере $\mathbb{S}_1$ также лебеговскую *сферическую меру* mes', причем *нормированную*, т. е. удовлетворяющую условию $\mathrm{mes}'\,\mathbb{S}_1=1$.

2. Формулировки результатов

Исследование взаимосвязей между характеристиками и понятиями, введенными в определениях 1–3 выше, оформлено в виде сформулированных ниже теорем 1–7 (доказанных в следующем разделе), которые отчасти развивают тематически связанные с ними результаты работ [18–40].

Естественные взаимосвязи между значениями различных радиальных и шаровых мер, а также их особенности в одномерном случае раскрывают следующие две теоремы (см. также работы [8, 15]).

Теорема 1. *При $n>1$ меры стабильностных и осцилляционных свойств любой системы* (1) *для каждого $u\in\mathbb{S}_1$ удовлетворяют соотношениям*

$$0\le\mu_{\varkappa,u}(f)\le 1-\mu_{\overline{\varkappa},u}(f)\le 1,\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,\rho,\nu,\theta,$$
$$0\le\mu_{\varkappa_0,u}(f)\le\mu_{\varkappa,u}(f),\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_{\lambda,u}(f)\le\mu_{\sigma,u}(f)\le\mu_{\pi,u}(f),\quad \mu_{\lambda_0,u}(f)\le\mu_{\sigma_0,u}(f)\le\mu_{\pi_0,u}(f),$$
$$\mu_{\overline{\lambda},u}(f)\ge\mu_{\overline{\sigma},u}(f)\ge\mu_{\overline{\pi},u}(f),$$
$$\mu_{\theta,u}(f)\le\mu_{\nu,u}(f)=\mu_{\rho,u}(f),\quad \mu_{\overline{\theta},u}(f)\ge\mu_{\overline{\nu},u}(f)=\mu_{\overline{\rho},u}(f).$$

Теорема 2. *При $n=1$ меры стабильностных свойств любой системы* (1) *для каждого $u\in\mathbb{S}_1$ удовлетворяют соотношениям*

$$\mu_{\varkappa,u}(f),\mu_{\varkappa_0,u}(f),\mu_{\overline{\varkappa},u}(f)\in\{0;1\},\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_{\varkappa_0,u}(f)\le\mu_{\varkappa,u}(f)=1-\mu_{\overline{\varkappa},u}(f),\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,$$
$$\mu_\varkappa(f)=\frac{\mu_{\varkappa,u}(f)+\mu_{\varkappa,-u}(f)}{2}\in\left\{0;\frac12;1\right\},\quad \varkappa=\lambda,\pi,\sigma,\lambda_0,\pi_0,\sigma_0,\overline{\lambda},\overline{\pi},\overline{\sigma},$$
$$\mu_{\lambda,u}(f)=\mu_{\sigma,u}(f),\quad \mu_{\lambda_0,u}(f)=\mu_{\sigma_0,u}(f),\quad \mu_{\overline{\lambda},u}(f)=\mu_{\overline{\sigma},u}(f).$$

Следующие четыре теоремы демонстрируют реализуемость естественных содержательных соотношений и взаимосвязей между радиальными и шаровыми мерами стабильностных или стандартных осцилляционных свойств (см. также работы [18–20]).

Теорема 3. *При $n = 2$ для любого $\mu \in [0, 1]$ существует система* (1), *у которой меры устойчивости и асимптотической устойчивости всех типов, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны μ, тогда как меры неустойчивости всех типов, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны $1 - \mu$.*

Теорема 4. *При $n = 2$ для любого $\mu \in [0, 1]$ существует система* (1), *у которой меры блуждаемости и колеблемости, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны μ, тогда как меры неблуждаемости и неколеблемости, а также сферические меры множеств направлений с единичными радиальными мерами этих свойств равны $1 - \mu$.*

Теорема 5. *При $n = 2$ для любого стабильностного или стандартного осцилляционного свойства существует система* (1) (*автономная или соответственно периодическая*) *с единичной мерой этого свойства, но с его же нулевой радиальной мерой в некотором направлении.*

Теорема 6. *При $n = 2$ для любого стабильностного или стандартного осцилляционного свойства существует система* (1) (*автономная или соответственно периодическая*) *с нулевой мерой этого свойства, но с его же единичной радиальной мерой в некотором направлении.*

Как показывает следующая теорема, если шаровая мера какого-либо стабильностного свойства равна нулю, то множество направлений с его же нулевыми радиальными мерами имеет полную сферическую меру. Заметим, что вопрос о справедливости аналогичного утверждения для осцилляционных мер пока открыт.

Теорема 7. *Если мера данного стабильностного свойства системы* (1) *равна нулю, то сферическая мера множества направлений с положительными радиальными мерами этого свойства тоже равна нулю.*

3. Доказательства утверждений

Приводимые ниже рассуждения частично пересекаются с некоторыми рассуждениями из работ [6–20] или используют их идеи.

Доказательство теорем 1 и 2, по существу, содержится в работах [8, 15], поскольку в основном опирается на идеи этих работ. Однако особенность любой радиальной стабильностной меры состоит в том, что в одномерном случае она может принимать лишь крайнее значение 0 или 1, а шаровая мера равна среднему арифметическому радиальных мер для двух противоположных направлений. Это связано с тем, что на конкретном луче для заданного $\varkappa$ обязательно выполнено ровно одно из следующих двух утверждений:

— либо для каждого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно решение удовлетворяет первому (или даже второму) условию (2), а значит, ему удовлетворяют и все решения, начинающиеся ближе к нулю, поэтому мера радиальной устойчивости (или соответственно асимптотической) равна 1;

— либо для некоторого $\varepsilon > 0$ сразу все решения удовлетворяют третьему условию (2), а значит, мера радиальной неустойчивости равна 1.

Доказательство теорем 3–6. Пусть $n = 2$. В первом пункте (ниже) докажем все утверждения, относящиеся к стабильностным свойствам, а во втором — к осцилляционным.

1. Для заданного $\mu \in [0;1]$ рассмотрим автономную систему (1) вида

$$\dot{x} = \zeta(x) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta(x) \equiv (\alpha x_1)^2 - ((1-\alpha)x_2)^2, \quad \alpha_1 \in [0;1],$$

у которой все фазовые кривые лежат на лучах вида l_u, $u \in \mathbb{S}_1$. Параметр $\alpha \in [0;1]$ для скалярной функции ζ подберем так, чтобы множество направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству $\zeta(x) < 0$, имело сферическую меру, равную μ (к примеру, в случаях $\mu = 0$ или $\mu = 1$ положим $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$ соответственно). Тогда множество всех направлений, удовлетворяющих противоположному неравенству $\zeta(x) > 0$, будет иметь сферическую меру, равную $1 - \mu$, а значит, будут выполнены все требования теоремы 3.

Далее, рассмотрим автономную систему (1) вида

$$\dot{x} = \zeta(x) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \zeta(x) \equiv x_1^4 - x_2^2,$$

у которой все фазовые кривые лежат на ветвях парабол вида $x_2 = cx_1^2$ или на осях координат. При этом во всей области $x_1^4 < x_2^2$ движение идет к нулю, причем доля той части этой области, которая лежит в круге с нулевым центром, сходится к 1 при убывании к 0 его радиуса. Более того, в этой области оказывается и достаточно близкая к нулю часть произвольного луча, отличного от двух *особых* лучей $l_{\pm u}$, $u = (1;0)$, которые целиком лежат в области $x_1^4 > x_2^2$, где движение идет от нуля. Поэтому мера асимптотической устойчивости этой системы равняется 1, равно как и ее же радиальные меры во всех направлениях, кроме двух особых. Таким образом, стабильностные свойства этой системы удовлетворяют всем требованиям теоремы 5, а если поменять знак ее правой части на противоположный, то они, наоборот, будут удовлетворять всем требованиям теоремы 6.

2. Рассмотрим *исходную* периодическую систему (1) вида

$$\dot{x} = \frac{\pi}{2} \sin t \cdot \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

у которой все решения 2π-периодичны и получаются поворотами каждого начального вектора x_0 за каждую половину периода ровно на половину целого оборота то в одну, то в другую сторону:

$$x_f(2m\pi, x_0) = x_0, \quad x_f(\pi + 2\pi m, x_0) = -x_0, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Для заданного $\mu \in [0;1]$ подберем значение $\alpha \in [0;1]$ из соображений, описанных в п. 1 выше, и возмутим исходную систему 2π-периодически так, чтобы все решения, начинающиеся в области $x_2^2 > x_1^2 \operatorname{tg}(\mu\pi/2)$, за каждую половину периода делали чуть меньше пол-оборота, оставаясь при этом 2π-периодичными, а все остальные решения не менялись. Тогда для блуждаемости, колеблемости и неблуждаемости, неколеблемости полученной системы будут выполнены все требования теоремы 4.

Наконец, если возмутить исходную систему 2π-периодически так, чтобы опять же все решения, начинающиеся в области $x_1^4 > x_2^2$, за каждую половину периода делали чуть меньше пол-оборота, оставаясь при этом 2π-периодичными, а все остальные решения не менялись, то с помощью рассуждений, аналогичных приведенным в п. 1 выше, получаем, что для стандартных осцилляционных свойств блуждаемости и колеблемости этой системы будут выполнены все требования теоремы 5, а если указанное возмущение применить, наоборот, к тем решениям, которые начинаются в области $x_1^4 < x_2^2$, то будут выполнены все требования теоремы 6.

Доказательство теоремы 7. Проведем рассуждение от противного. Пусть для системы (1) мера данного свойства определенного типа при ассоциированном значении $\varkappa$ равна 0, однако сферическая мера множества $U_\varkappa \subset \mathbb{S}_1$ всех направлений, имеющих положительные радиальные меры этого свойства, положительна. Рассмотрим два случая.

1. Если данное свойство есть устойчивость или асимптотическая устойчивость при ассоциированном $\varkappa \in \{\lambda, \pi, \sigma, \lambda_0, \pi_0, \sigma_0\}$, то:

(а) найдутся такие $\alpha, \gamma > 0$, что множество $U_\varkappa(\gamma) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, для каждого из которых при любом $\varepsilon > 0$ для некоторого $\Delta \equiv \Delta(\varepsilon, u) > 0$ выполнено неравенство

$$\inf_{0<\delta<\Delta} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_{\varkappa,u}(f, \varepsilon, \delta)}{\operatorname{mes} B_{\delta,u}} > \gamma, \tag{3}$$

имеет меру, превышающую α: действительно, в противном случае ни при каком $\gamma > 0$ мера множества $U_\varkappa(\gamma)$, расширяющегося (нестрого) при убывании γ, не превосходила бы никакого $\alpha > 0$, поэтому

$$\operatorname{mes}' U_\varkappa = \operatorname{mes}'\Big(\bigcup_{\gamma>0} U_\varkappa(\gamma)\Big) = \sup_{\gamma>0} \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) \le \alpha,$$

откуда в силу произвольности $\alpha > 0$ получилось бы противоречие: $0 < \operatorname{mes}' U_\varkappa = 0$;

(б) для найденного значения $\gamma > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ для некоторого $\Delta = \Delta(\varepsilon) > 0$ подмножество $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству (3), имеет меру, превышающую β: действительно, в противном случае при каждом $\beta > 0$ нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что ни для какого $\Delta > 0$ последнее требование не выполнялось, т. е. мера множества $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)$, расширяющегося (нестрого) как при убывании Δ (поскольку точная нижняя грань по множеству заведомо не больше, чем по его подмножеству), так и при возрастании ε, не превосходила бы β, поэтому

$$\operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = \operatorname{mes}'\Big(\bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{\Delta>0} U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)\Big) = \inf_{\varepsilon>0} \sup_{\Delta>0} \operatorname{mes}' U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \le \beta,$$

откуда в силу произвольности $\beta > 0$ получилось бы противоречие:

$$\alpha < \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = 0;$$

(в) при найденном $\gamma > 0$, каждом $\varepsilon > 0$ и всех $\delta \in (0, \Delta(\varepsilon))$ имеем

$$\frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\operatorname{mes} B_\delta} \ge \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) \cdot \frac{\operatorname{mes} B_{\gamma\delta}}{\operatorname{mes} B_\delta} > \beta \cdot \gamma^n, \tag{4}$$

а в итоге для меры данного свойства получаем противоречие:

$$0 = \mu_\varkappa(f) \equiv \lim_{\varepsilon\to+0} \varliminf_{\delta\to+0} \frac{\operatorname{mes} \mathrm{M}_\varkappa(f, \varepsilon, \delta)}{\operatorname{mes} B_\delta} \ge \beta \cdot \gamma^n > 0. \tag{5}$$

2. Если данное свойство есть неустойчивость при ассоциированном $\varkappa \in \{\overline{\lambda}, \overline{\pi}, \overline{\sigma}\}$, то:

(г) найдутся такие $\alpha, \gamma > 0$, что множество $U_\varkappa(\gamma) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, для каждого из которых при некоторых $\varepsilon > 0$ и $\Delta \equiv \Delta(u) > 0$ выполнено неравенство (3), имеет меру, превышающую α — в противном случае получается противоречие, аналогичное приведенному в рассуждении из п. (а) выше;

(д) для найденного значения $\gamma > 0$ найдется такое $\beta > 0$, что при некоторых $\varepsilon, \Delta > 0$ подмножество $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \subset U_\varkappa$ направлений $u \in \mathbb{S}_1$, удовлетворяющих неравенству (3), имеет меру, превышающую β: действительно, в противном случае при каждом $\beta > 0$ ни для каких $\varepsilon, \Delta > 0$ последнее требование не выполнялось бы, т. е. мера множества $U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)$, расширяющегося при убывании как Δ, так и ε, не превосходила бы β, поэтому

$$\operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = \operatorname{mes}'\Big(\bigcup_{\varepsilon>0}\bigcup_{\Delta>0} U_\varkappa(\varepsilon, \Delta)\Big) = \sup_{\varepsilon>0}\sup_{\Delta>0} \operatorname{mes}' U_\varkappa(\varepsilon, \Delta) \le \beta,$$

откуда в силу произвольности $\beta > 0$ получилось бы противоречие:

$$\alpha < \operatorname{mes}' U_\varkappa(\gamma) = 0;$$

(е) при найденном $\gamma > 0$ для всех $\varepsilon > 0$, не превосходящих значения, полученного в п. (д), и всех $\delta \in (0, \Delta)$ выполнены оценки (4), а в итоге опять же получается противоречие (5).

Теоремы 1–7 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.

2. *Perron O.* Die Ordnungszahlen linearer Differentialgleichungssysteme // Math. Z. 1930. V. 31, N 1. P. 748–766.

3. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости. М.: Наука, 1966.

4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

5. *Изобов Н. А.* Введение в теорию показателей Ляпунова. Минск: БГУ, 2006.

6. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские, перроновские и верхнепредельные свойства устойчивости автономных дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2020. Т. 56. С. 63–78.

7. *Сергеев И. Н.* О перроновских, ляпуновских и верхнепредельных свойствах устойчивости дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2023. № 33. С. 353–423.

8. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 6. С. 895–904.

9. *Сергеев И. Н.* Зависимость от начального момента мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы // Вестн. Удмуртского ун-та. Математики, Механика, Компьютерные науки. 2024. Т. 34, № 1. С. 80–90.

10. *Сергеев И. Н.* Полный набор соотношений между показателями колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 46, № 2. С. 171–183.

11. *Сергеев И. Н.* Ляпуновские характеристики колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2016. № 31. С. 177–219.

12. *Сергеев И. Н.* Показатели колеблемости, вращаемости и блуждаемости решений дифференциальных систем // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 5. С. 732–751.

13. *Сергеев И. Н.* Определение показателей колеблемости, вращаемости и блуждаемости нелинейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2021. № 3. С. 41–46.

14. *Сергеев И. Н.* Полные свойства блуждаемости, колеблемости и вращаемости дифференциальной системы и их связь с мерами этих свойств // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2025. Т. 65. С. 72–84.

15. *Сергеев И. Н.* Определение и свойства мер колеблемости, блуждаемости и вращаемости дифференциальной системы // Мат. заметки. 2025. Т. 117, № 2. С. 305–314.

16. *Сергеев И. Н.* О различных радиальных свойствах дифференциальной системы // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 5. С. 596–605.

17. *Сергеев И. Н.* Радиальная устойчивость и неустойчивость дифференциальной системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2025. № 2. С. 83–88.

18. *Бондарев А. А.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями радиальной устойчивости и неустойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2025. № 2. С. 36–43.

19. *Бондарев А. А., Сергеев И. Н.* Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями ляпуновских, перроновских и верхнепредельных свойств // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 506. С. 25–29.

20. *Сергеев И. Н.* Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, Механика. 2024. № 1. С. 50–54.

21. *Бондарев А. А.* Пример полной, но не глобальной неустойчивости по Перрону // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика Механика. 2021. № 2. С. 43–47.

22. *Бондарев А. А.* Пример дифференциальной системы с перроновской и верхнепредельной полной неустойчивостью, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 2. С. 147–152.

23. *Бондарев А. А.* Существование вполне неустойчивой по Ляпунову дифференциальной системы, обладающей перроновской и верхнепредельной массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2021. Т. 57, № 6. С. 858–859.

24. *Бондарев А. А.* Пример глобально неустойчивой по Ляпунову системы с перроновской и верхнепредельной глобальной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 6. С. 860–861.

25. *Бондарев А. А.* Три контрпримера двумерных автономных дифференциальных систем с тотальными радиальными свойствами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 11. С. 1573–1574.

26. *Бондарев А. А.* Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 8. С. 1011–1020.

27. *Денисов Н. В., Васильев В. Д.* Реализуемость нееденичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 11. С. 1574–1575.

28. *Гаргянц А. Г.* Возможные значения меры перроновской устойчивости линейных дифференциальных систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика Механика. 2025. № 5. С. 64–68.

29. *Васильев В. Д.* Реализуемость произвольной зависимости меры устойчивости дифференциальной системы от начального момента // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 11. С. 1572–1573.

30. *Денисов Н. В.* Пример системы с единичной мерой устойчивости и тотальной радиальной неустойчивостью // Дифференц. уравнения. 2025. Т. 61, № 11. С. 1573–1574.

31. *Горицкий А. Ю., Фисенко Т. Н.* Характеристические частоты нулей суммы двух гармонических колебаний // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 4. С. 479–486.

32. *Смоленцев М. В.* Существование периодического линейного дифференциального уравнения третьего порядка с континуальным спектром частот // Дифференц. уравнения. 2012. Т. 48, № 11. С. 1571–1572.

33. *Бурлаков Д. С., Цой С. В.* Совпадение полной и векторной частот решений линейной автономной системы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. 2014. № 30. С. 75–93.

34. *Кокушкин В. И.* Характеристики колеблемости и вращаемости решений линейных дифференциальных систем // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 10. С. 1406–1407.

35. *Миценко В. В.* О границах блуждаемости и колеблемости решений двумерных треугольных дифференциальных систем и линейных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50, № 6. С. 851–852.

36. *Лысак М. Д.* Оценки скорости блуждания решений некоторых типов систем линейных дифференциальных уравнений // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 46, № 2. С. 106–111.

37. *Барабанов Е. А., Войделевич А. С.* Спектры верхних частот Сергеева нулей и знаков линейных дифференциальных уравнений // Докл. НАН Беларуси. 2016. Т. 60, № 1. С. 24–31.
38. *Быков В. В.* О бэровской классификации частот Сергеева нулей и корней решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52, № 4. С. 419–425.
39. *Шишлянников Е. М.* Существование двумерной ограниченной системы с континуальными и совпадающими спектрами частот и показателей блуждаемости // Мат. сборник. 2018. Т. 209, № 12. С. 149–164.
40. *Сташ А. Х., Аллахвердян А. А., Артисевич А. Е., Лобода Н. А.* О нулевых спектрах характеристик колеблемости Сергеева уравнения Эйлера // Динамические системы. 2020. Т. 10, № 2. С. 216–224.

Поступила в редакцию 12 декабря 2025 г.
После доработки 12 декабря 2025 г.
Принята к публикации 15 декабря 2025 г.

Сергеев Игорь Николаевич (ORCID 0000-0001-8976-0732)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
igniserg@gmail.com

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 512.7+512.548

НЕКОТОРЫЕ КОНСТРУКЦИИ РАСШИРЕНИЯ ПОЧТИ–КОЛЕЦ

А. А. Симонов

Аннотация. Рассмотрены почти-кольца, связанные с ограниченно точно 2-транзитивными группами. Представлены конструкции расширения почти-колец с помощью биодулей, бимодулей и 2-псевдополей. Предложена схема удвоения размерности почти-колец. Приведены примеры почти-колец с неабелевыми аддитивными группами.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.210

Ключевые слова: поле, кольцо, почти-кольцо, 2-псевдополе, ограниченно точно 2-транзитивная группа, модуль, одуль, лупа.

Введение

В 1931 г. Кармайкл [1] пришел к выводу, что конечные точно 2-транзитивные группы перестановок являются группами аффинных преобразований конечного почти-поля. По теореме Цассенхауза все конечные почти-поля [2], за вычетом семи исключительных, исчерпываются почти-полями Диксона. В 1937 г. Виланд [3], расширяя понятие почти-поля, определил почти-кольцо.

Конструкция почти-кольца интересна сама по себе как алгебраический объект, представляющий собой частный случай группы с операторами, благодаря чему вошла в классические учебники (например, [4]). Кроме того, почти-кольца имеют много приложений. Имеются связи с геометрией [5, 6], группами [7–9], обобщениями векторных пространств [10, 11], теорией кодирования [12], комбинаторикой [13], теорией категорий [14] и узлов [15]. Такой интерес стимулирует поиск новых почти-колец, в частности, при помощи расширений почти-колец (например, [16]).

Определение 1. *Правым почти-кольцом* называется алгебра $\mathscr{R} = \langle R; \circ, +, -, 0\rangle$ с двумя бинарными операциями такими, что $\langle R; +, -, 0\rangle$ является группой, а $\langle R; \circ\rangle$ — полугруппой, для которых выполнена правая дистрибутивность:

$$(x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z.$$

Для уменьшения скобок по традиции будем считать, что полугрупповая операция имеет больший приоритет по сравнению с аддитивной. Операция $(-) : R \to R$ является унарной операцией взятия обратного элемента в группе R. Также введем упрощение для уменьшения скобок, считая $x + (-y) = x - y$.

Почти-кольцо является почти-полем, если полугруппа $\langle R \setminus \{0\}; \circ\rangle$ является группой. В общем случае можно рассмотреть и неассоциативные почти-кольца, когда операция умножения задает не обязательно ассоциативный группоид. Такие почти-кольца еще называют пред-почти-кольцами [17].

Пример 1. Неассоциативное почти-кольцо можно построить над произвольным кольцом $\langle R; \cdot, +, -, 0\rangle$, видоизменив операцию умножения при помощи произвольной функции $f : R \to R$ так, что $x \circ y = x \cdot f(y)$.

Если для функции f справедливы тождества $f(xy) = f(x)f(y)$ и $f^2(x) = f(x)$ для произвольных $x, y \in R$, то соответствующее почти-кольцо, построенное над ассоциативным кольцом, будет ассоциативным. Например [18], $f(x) = |x|$ для $x \in \mathbb{C}$, тогда операция $x \circ y = x \cdot |y|$ задает умножение в почти-кольце $\langle \mathbb{C}; \circ, +\rangle$.

В [17, 19] можно найти много других примеров почти-колец как ассоциативных, так и неассоциативных, как правило, рассматриваемых над конечными множествами.

Сначала дадим определение ограниченно точно 2-транзитивной группы.

Определение 2. Группа $T_2(B)$ преобразования множества B называется Ω-*ограниченно точно* 2-*транзитивной*, если для любых пар $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \Omega \subset B^2$ существует единственный элемент $g \in T_2$, для которого справедливо равенство $g(x_i) = y_i$ для каждого $i \in \{1, 2\}$.

Если $\Omega = B^2 \setminus \{(x, x) \mid x \in B\}$, то такая Ω-ограниченно точно 2-транзитивная группа является точно 2-транзитивной.

Сформулируем теорему о построении ограниченно точно 2-транзитивной группы над почти-кольцом.

В работе [9] установлен следующий результат.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{R} = \langle R; \circ, +, -, 0\rangle$ — почти-кольцо и $R^* \subset R$ — такое подмножество, что $\langle R^*; \circ, ^{-1}, 1\rangle$ — группа. Тогда над почти-кольцом $\mathscr{R}$ можно построить $\widehat{R^2}$-ограниченно точно 2-транзитивную группу преобразования множества R, где*

$$\widehat{R^2} = \{(x, y) \in R^2 \mid x - y \in R^*\}.$$

Нас в большей степени будет интересовать построение именно таких почти-колец с мультипликативной подполугруппой, которая является группой.

Основные результаты работы:

• представлены конструкции расширения почти-колец с использованием биодулей и бимодулей, доказаны теоремы о построении ассоциативных и неассоциативных почти-колец

• исследованы 2-псевдополя и их связь с почти-кольцами, включая условия, при которых почти-кольцо определяет 2-псевдополе;

• рассмотрены примеры расширенных почти-колец, а также процедура их удвоения.

Статья имеет следующую структуру: в первом разделе представлены методы расширения почти-колец с использованием биодулей и бимодулей, доказаны теоремы о построении ассоциативных и неассоциативных почти-колец. Второй раздел посвящен 2-псевдополям и их связи с почти-кольцами, включая условия, при которых почти-кольцо определяет 2-псевдополе. Рассмотрены примеры расширенных почти-колец, а также процедура их удвоения. В заключении сформулированы открытые вопросы, связанные с классификацией и дальнейшими обобщениями полученных конструкций.

1. Расширение почти-колец

Широко известна конструкция бимодуля.

Определение 3. Пусть L и R — два кольца, тогда M является (L,R)-*бимодулем*, если M — левый L-модуль и правый R-модуль. Кроме того, для любых $\ell \in L$, $r \in R$, $m \in M$ справедливо равенство $(\ell m)r = \ell(mr)$.

В нашем построении можно воспользоваться более слабой конструкцией над лупой, введенной Л. В. Сабининым [20].

Определение 4. *Левой лупой* называется алгебра $\langle G; \cdot, \setminus, e\rangle$ с двумя бинарными операциями и правым нейтральным элементом, для которых выполнены тождества $x \cdot (x \setminus y) = x \setminus (x \cdot y) = y$ и $x \cdot e = x$ для произвольных $x, y \in G$.

Определение 5. Левая лупа G называется *левым K-одулем над ассоциативным кольцом K*, если для произвольных $g \in G$, $\lambda \in K$ определено умножение $\lambda g \in G$ и справедливы равенства

(1) $(\lambda + \mu)g = (\lambda g) \cdot (\mu g)$;

(2) $(\lambda\mu)g = \lambda(\mu g)$ для произвольных $g \in G$, $\lambda, \mu \in K$.

Аналогичным образом определяется правая лупа и правый одуль. Если лупа является одновременно левой и правой, то она является лупой с единственным нейтральным элементом.

Определение 6. Пусть L и R — два кольца, тогда G является (L,R)-*биодулем*, если G — левый L-одуль и правый R-одуль. Кроме того, для любых $\ell \in L$, $r \in R$, $g \in G$ справедливо равенство $(\ell g)r = \ell(gr)$.

При помощи почти-кольца Q и (L,R)-биодуля G построим новое почти-кольцо K. Для удобства запишем лупу G в аддитивном виде $\langle G; \oplus, \ominus, 0\rangle$.

Теорема 2. *Мультипликативная операция*

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1 y_1, \psi(x_1) y_2 \oplus x_2 \phi(y_1)), \tag{1}$$

построенная при помощи отображений $\psi : Q \to L$ и $\phi : Q \to R$, и аддитивная операция

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 \oplus y_2), \tag{2}$$

справедливые для произвольных $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in Q \times G$, задают неассоциативное почти-кольцо $K = \langle Q \times G; \circ, +, -, (0,0)\rangle$, если:

(а) *$\psi(x) + \psi(y) = \psi(x + y)$, для произвольных $x, y \in Q$;*

(б) *в лупе G выполнено тождество медиальности, т. е. для произвольных $x, y, z, t \in G$ справедливо равенство*

$$(x \oplus y) \oplus (z \oplus t) = (x \oplus z) \oplus (y \oplus t).$$

Доказательство. Проверим выполнение правой дистрибутивности. С одной стороны,

$$\begin{aligned}((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) &= (x_1 + y_1, x_2 \oplus y_2) \circ (z_1, z_2) \\ &= ((x_1 + y_1) z_1, \psi(x_1 + y_1) z_2 \oplus (x_2 \oplus y_2)\phi(z_1)),\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2) \circ (z_1, z_2) + (y_1, y_2) \circ (z_1, z_2) \\ &\quad = (x_1 z_1 + y_1 z_1, (\psi(x_1) z_2 \oplus x_2 \phi(z_1)) \oplus (\psi(y_1) z_2 \oplus y_2 \phi(z_1))) \\ &\quad\quad = (x_1 z_1 + y_1 z_1, (\psi(x_1) + \psi(y_1)) z_2 \oplus (x_2 \oplus y_2)\phi(z_1)),\end{aligned}$$

где воспользовались медиальностью и первым тождеством для левого L-одуля и правого R-одуля. Учитывая условие (a) для ψ, получаем правую дистрибутивность. $\square$

При помощи почти-кольца Q и (L, R)-бимодуля M построим ассоциативное почти-кольцо K.

Теорема 3. *Мультипликативная операция* (1), *построенная при помощи гомоморфизма* $\psi : Q \to L$ *почти-кольца* Q *в кольцо* L *и отображения* $\phi : Q \to R$, *для которого выполнено тождество* $\phi(y)\phi(z) = \phi(yz)$ *для произвольных* $y, z \in Q$, *совместно с аддитивной операцией* (2) *задают ассоциативное почти-кольцо* $K = \langle Q \times M; \circ, +, -, (0, 0)\rangle$.

Доказательство. Правая дистрибутивность, доказанная в теореме 2 для биодуля, справедлива и для бимодуля. Проверим выполнение ассоциативности. Действительно, с одной стороны,

$$\begin{aligned}((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) &= (x_1y_1, \psi(x_1)y_2 \oplus x_2\phi(y_1)) \circ (z_1, z_2)\\ &= (x_1y_1z_1, \psi(x_1y_1)z_2 \oplus (\psi(x_1)y_2 \oplus x_2\phi(y_1))\phi(z_1)),\end{aligned}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned}(x_1, x_2) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)) &= (x_1, x_2) \circ (y_1z_1, \psi(y_1)z_2 \oplus y_2\phi(z_1))\\ &= (x_1y_1z_1, \psi(x_1)(\psi(y_1)z_2 \oplus y_2\phi(z_1)) \oplus x_2\phi(y_1z_1)).\end{aligned}$$

Равенство правых частей выполнено с учетом того, что $\phi(y_1)\phi(z_1) = \phi(y_1z_1)$ и $\psi(x_1)\psi(y_1) = \psi(x_1y_1)$. $\square$

Пример 2. Построим почти-кольцо [21] для $K, L, R, M = \mathbb{R}$ при помощи $\psi(x) = x$, $\varphi(x) = |x|^c$ для $x \in K$, где $c \in \mathbb{R}_0$ (здесь $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 + x_2|y_1|^c \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Для построения трехмерного почти-кольца рассмотрим $K = \mathbb{R}$ и $L, R, M = \mathbb{C}$, отображения $\psi(x) = x \in \mathbb{C}$ для $x \in \mathbb{R}$ и

$$\phi(x) = (|x|^a \cos(b \ln |x|), |x|^a \sin(b \ln |x|)) \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R},$$

где $a \in \mathbb{R}_+, b \in \mathbb{R}$.

В этом случае мультипликативная операция почти-кольца

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 \\ x_1y_2 + x_2|y_1|^a \cos(b \ln |y_1|) - x_3|y_1|^a \sin(b \ln |y_1|) \\ x_1y_3 + x_2|y_1|^a \sin(b \ln |y_1|) + x_3|y_1|^a \cos(b \ln |y_1|) \end{pmatrix}.$$

2-Псевдополе

Ограниченно точно 2–транзитивную группу можно построить не только над почти-кольцом, но и над 2–псевдополем, более того, категории ограниченно точно 2–транзитивных групп и 2–псевдополей категорно эквивалентны [9].

Рассмотрим группу преобразований $B_1(A)$ (обозначим $B_1 = B_1(A)$), действующую на множестве A справа так, что $\times : A \times B_1 \to A$, причем $A \cap B_1 = \varnothing$. На множестве $B = B_1 \cup A$ введем частичную операцию $\cdot : B \times B_1 \to B$,

$$x \cdot y = \begin{cases} xy, & \text{умножение в группе } B_1 \text{ для } x, y \in B_1, \\ x \times y, & \text{для } x \in A,\ y \in B_1, \end{cases} \tag{3}$$

здесь $x \times y$ обозначает действие элемента y на x. Пусть на B действует отображение $\varphi : B \to B$ такое, что $\varphi^2 = \mathrm{id}$, которое естественным образом разбивает множество на подмножества:

$$A_2 = \{x \in A \mid \varphi(x) \in B_1\}, \quad B_1^{\varphi} = \{x \in B_1 \mid \varphi(x) \in A_2\},$$
$$\overline{A_2} = A \setminus A_2, \quad B_0 = B_1 \setminus B_1^{\varphi}, \quad B_2 = B_1 \cup A_2.$$

Определение 7. Алгебраическую систему $\langle B; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1\rangle$ с частичной операцией (3) будем называть 2-*псевдополем*, если отображение φ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(\varphi(x)\varphi(y)) = \varphi(x\varphi(y^{-1}))y, \quad x \in B,\ y \in B_0. \tag{4}$$

В работе [21] показано, что при помощи инволютивного элемента группы $b \in B_1$ можно ввести аддитивную операцию и ей обратную:

$$x \oplus y = \varphi(x(by)^{-1})y \ \text{ и } x \ominus y = \varphi(xy^{-1})(by), \quad x \in B,\ y \in B_1. \tag{5}$$

В общем случае они задают частичную правую лупу, так как для них справедливы тождества

$$(x \oplus y) \ominus y = x, \quad (x \ominus y) \oplus y = x, \quad x \in B,\ y \in B_1.$$

Определение 8 [22]. Если в алгебре $\mathfrak{A}$ определены частичные операции $f_i^{(\tau)}$, действующие не на всем множестве, то такие алгебры называются *частичными.* Здесь τ — арность операции $f_i^{(\tau)}$.

Для определенных выше операций (4) справедлива правосторонняя дистрибутивность

$$(x \oplus y)z = xz \oplus yz, \quad (x \ominus y)z = xz \ominus yz, \quad x \in B,\ y, z \in B_1.$$

Лемма 1. *Для того чтобы почти-кольцо $\langle K; \cdot, +\rangle$, в котором мультипликативная операция на подмножестве $K_1 \subset K$, являющаяся групповой из группы $\langle K_1; \cdot, ^{-1}, 1\rangle$, определяло 2-псевдополе $\left\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\right\rangle$ с функцией*

$$\varphi_K(x) = x \cdot (-1) + 1, \tag{6}$$

необходимо и достаточно, чтобы $|K_0| > 0$.

Доказательство. В почти-кольце $\langle K; \cdot, +\rangle$ для функции (6) проверим выполнение тождества (4). Рассмотрим подмножество K_0 такое, что $y, \varphi_K(y) \in K_0$. Запишем левую часть тождества (4):

$$\varphi_K(\varphi_K(x)\varphi_K(y)) = ((x(-1) + 1)(y - 1) + 1) = x(-1)(y - 1) + y.$$

Правая часть:

$$\varphi_K(x\varphi_K(y^{-1}))y = (x(y^{-1}(-1) + 1)(-1) + 1)y = x(1 - y) + y.$$

Следовательно, для выполнения тождества (4) должно выполняться равенство

$$x(-1)(y - 1) = x(1 - y),$$

справедливое в силу ассоциативности умножения и того, что в аддитивной группе почти-кольца K для произвольного $y \in K$ будет $-y = (-1)y$. $\square$

О таких 2-псевдополях $\left\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\right\rangle$ будем говорить, как об ассоциированных с почти-кольцами $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$. В общем случае можно говорить об алгебраических системах $\mathscr{K} = \langle K; \cdot, \oplus, \ominus, 0\rangle$ и ассоциированных с ними 2-псевдополях, если по алгебраической системе $\mathscr{K}$ можно построить соответствующее 2-псевдополе. Тождества для аддитивной и мультипликативной операций в алгебраической системе $\mathscr{K}$ естественным образом переносятся на тождества для функции φ соответствующего 2-псевдополя.

Лемма 2. *Для 2-псевдополя $\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi, 1\rangle$, ассоциированного с алгебраической системой $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ для функции φ и $b \in K$, если:*

(1) *аддитивная операция (5) ассоциативна, то справедливо тождество*

$$\varphi E(x) bxbE\varphi(x) = b, \quad x \in K_0, \tag{7}$$

где $E(x) = x^{-1}$;

(2) *аддитивная операция (5) коммутативна, то*

$$\varphi E(bx)x = \varphi(xb^{-1}), \quad x \in K_1,$$

(3) $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ — *кольцо, то справедливо также тождество:*

$$x\varphi(y)x^{-1} = \varphi(xybx^{-1}b^{-1}), \quad x, y \in K_0.$$

Доказательство сводится к записи ассоциативности и коммутативности аддитивной операции, а также левой дистрибутивности при помощи функции φ с учетом определения аддитивной операции (5). Запишем ассоциативность для тройки $x, y, z \in K_1$ при условии, что $y(bz)^{-1} \in K_0$:

$$\varphi(\varphi(x(by)^{-1})y(bz)^{-1})z = \varphi(x(b\varphi(y(bz)^{-1})z)^{-1})\varphi(y(bz)^{-1})z.$$

Умножая тождество справа на z^{-1} и производя замену $y(bz)^{-1} = t$, придем к выражению

$$\varphi(\varphi(x(by)^{-1})t) = \varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1})\varphi(t).$$

Подействуем на обе части равенства функцией φ, а правую часть дополнительно распишем при помощи тождества (4):

$$\varphi(x(by)^{-1})t = \varphi(\varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1})\varphi(t)) = \varphi(x(b\varphi(t)z)^{-1}\varphi(t^{-1}))t.$$

Сокращая справа на t и действуя на обе части равенства функцией φ, придем к тождеству

$$x(by)^{-1} = x(b\varphi(t)z)^{-1}\varphi(t^{-1}),$$

откуда элементарными преобразованиями получим (7). Аналогично проверяются и два оставшиеся тождества. □

Расширение при помощи ассоциированного 2-псевдополя. Рассмотрим два почти-кольца $\langle R; \cdot, +, -, 0\rangle$, $\langle K; \cdot, +, -, 0\rangle$ и соответствующие им ассоциированные 2-псевдополя $\langle R; \cdot, ^{-1}, \varphi_R, 1\rangle$ в $\langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\rangle$ такие, для которых существует гомоморфизм

$$\theta : \langle R; \cdot, ^{-1}, \varphi_R, 1\rangle \to \langle K; \cdot, ^{-1}, \varphi_K, 1\rangle.$$

Для упрощения записи будем использовать обозначения $-1 = b$, $x^{-1} = E(x)$, $E\varphi_K E(y) = \varphi_K^E(y)$ для $x \in K_1$, $y \in K_0$.

Теорема 4. *Пусть заданы два почти-кольца R и K с ассоциированными 2-псевдополями и гомоморфизм θ между ними. Тогда при помощи операции*

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) = \big(x_1y_1, \theta(x_1y_1)\big(\theta\big(x_1^{-1}\big)x_2 + \theta\big(y_1^{-1}\big)y_2\big)\big) \tag{8}$$

и функции

$$\Phi(x_1, x_2) = \big(\varphi_R(x_1), \varphi_K\theta(x_1)\varphi_K^E\theta(x_1)E\theta(x_1)x_2\big) \tag{9}$$

можно построить почти-кольцо $\langle R \times K; \odot, \oplus, 0 \times 0\rangle$, если выполнены следующие условия.

1. *Справедливо равенство*

$$\varphi_K^E(\varphi_K(x)\varphi_K(y))\varphi_K\big(\varphi_K^E(x)z\varphi_K(y^{-1})b\big)\varphi_K^E(y)$$
$$= \varphi_K\big(\varphi_K^E(x\varphi_K(y^{-1}))\varphi_K(zb\varphi_K(y)b)E\varphi_K(y)\big) \quad (10)$$

для таких $x, y \in K_0$, $z \in K_1$, *для которых определены обе части равенства.*

2. *Для* Φ *выполняется тождество* (7).

3. *Действие мультипликативной операции* (8) *и аддитивной операции «*$\oplus$*» почти-кольца, построенной при помощи* Φ *по выражению* (5), *можно доопределить на всем множестве* $R \times K$.

Доказательство. Для того чтобы при помощи операций (8) и (9) по выражению (5) можно было построить почти-кольцо, необходимо выполнение тождеств (4) и (6).

Запишем тождество (4). Для удобства такой записи от операций (8) и (9) при помощи биекции $\psi : R_1 \times K \to R_1 \times K$ вида

$$\psi(x_1, x_2) = (x_1, x_1x_2), \quad \psi^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_1^{-1}x_2)$$

перейдем к операциям в изоморфной алгебраической системе:

$$(x_1, x_2) \odot' (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2), \quad \Phi'(x_1, x_2) = \big(\varphi_R(x_1), \varphi_R^E(\theta(x_1))x_2\big),$$

для которых запишем тождество (4). В силу того, что данное тождество справедливо для 2-псевдополя, ассоциированного с почти-кольцом R, по первой компоненте равенство будет выполнено. Запись тождества (4) по второй компоненте приведет к равенству

$$\varphi_K^E(\varphi_K\theta(x_1)\varphi_K\theta(y_1))\big(\varphi_K^E\theta(x_1)x_2 + \varphi_K^E\theta(y_1)y_2\big)$$
$$= \varphi_K^E\big(\theta(x_1)\varphi_K\theta(y_1^{-1})\big)(x_2 + E\varphi_K\theta(y_1)by_2) + y_2.$$

Записывая аддитивную операцию при помощи выражения (5) и производя замены $\theta(x_1) = x$, $\theta(y_1) = y$, $x_2y_2^{-1} = z$, придем к (10). Таким образом, п. 1 теоремы доказан.

Выполнение п. 2 (ассоциативности) и п. 3 (определения операции на всем множестве) теоремы необходимо для построения почти-кольца и зависит от конкретных R и K. $\square$

Пример 4. В качестве примера рассмотрим два одинаковых почти-кольца, построенных над $\mathbb{R}^2$, с умножением

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2),$$

сложением

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

и функцией $\varphi_K(x_1, x_2) = (1 - x_1, x_2)$, для которой выполняется тождество (10). Соответствующий гомоморфизм θ — тождественный. Воспользовавшись процедурой, описанной в теореме 4, получим умножение в новом почти-кольце:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1y_1, x_1y_2 + x_2, x_1y_3 + x_3y_1, (x_4 - x_2)y_1 + y_4x_1 + x_2),$$

с функцией $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-x_1 + 1, x_2, -x_3, -x_4 + x_2)$ и полученной некоммутативной аддитивной операцией (5), имеющей вид

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4 + x_1y_2 - x_2y_1).$$

Пример 5. Воспользуемся почти-кольцом из примера 4 и аналогичным образом построим новое почти-кольцо с умножением:

$$(x_1, \dots, x_8) \cdot (y_1, \dots, y_8) = (x_1y_1,\ x_1y_2 + x_2,\ x_1y_3 + x_3y_1, (x_4 - x_2)y_1 + y_4x_1 + x_2,\\ x_1y_5 + x_5y_1, (x_6 - x_2)y_1 + y_6x_1 + x_2,\ x_1y_7 + x_7y_1 + x_3y_5 + x_5y_3,\\ (y_6 - 2y_2 + y_4)x_5 + (x_8 - x_2)y_1 + (x_4 - x_6)y_5 + x_1y_8 + x_2)$$

и сложением:

$$(x_1, \dots, x_8) + (y_1, \dots, y_8) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3,\ x_1y_2 - x_2y_1 + x_4 + y_4,\\ x_5 + y_5,\ x_1y_2 - x_2y_1 + x_6 + y_6,\ x_7 + y_7,\ x_1y_2 - x_2y_1 + x_8 + y_8).$$

Заключение

Процедуру из теоремы 4, рассмотренную в примерах 4 и 5, условно можно назвать *удвоением почти-кольца.* Удвоение почти-кольца из примера 5 уже не приводит к получению не только нового почти-кольца, но и к получению 2-псевдополя, так как не выполняется тождество (4).

Кроме того, несмотря на то, что примеры получены над вещественным полем, их можно рассмотреть над некоторыми кольцами и конечными полями.

В [15] для построения квандлов Q рассматривались почти-кольца R с дополнительным условием.

Определение 9. *Квандлом* называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$ с операциями умножения «$\circ$» и правого деления «$/$», в которой для произвольных $x, y, z \in Q$ выполняются условия

1) $(x \circ y)/y = x$, $(x/y) \circ y = x$,
2) идемпотентности $x \circ x = x$,
3) дистрибутивности $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Было показано, что операции

$$x \circ y = a(x - y) + y \quad \text{и} \quad x/y = a^{-1}(x - y) + y \tag{11}$$

для $a \in R^*$ задают квандл $\langle R; \circ, / \rangle$ тогда и только тогда, когда выполнено тождество

$$a(a(u - t) + t) = a(au - at) + at \tag{12}$$

для произвольных $u, t \in R$.

Пример 6. Почти-кольцо из примера 4 удовлетворяет тождеству (12) для $a = (a_1, 0, a_3, a_4)$, где $a_1 \in \mathbb{R}_0$, $a_3, a_4 \in \mathbb{R}$. Почти-кольцо из примера 5 удовлетворяет тождеству (12) для

$$a = (1, 0, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8), \quad a = (a_1, 0, a_3, a_4, 0, a_6, a_7, a_8),$$

где $a_1 \in \mathbb{R}_0$, $a_3, \dots, a_8 \in \mathbb{R}$. Следовательно, над данными кольцами при помощи (11) можно построить операции, определяющие соответствующие квандлы.

Конструкции новых квандлов, подобные приведенным в примерах, могут быть использованы для построения представлений групп виртуальных кос и инвариантов виртуальных узлов (см., например, [23–25]).

Для дальнейших исследований есть несколько вопросов.

Вопрос 1. *Имеются ли другие почти-кольца, допускающую процедуру удвоения?*

Вопрос 2. *Можно ли изменить функцию* (9), *используемую в теореме* 4, *для получения новых почти-колец?*

Вопрос 3. *Как связаны полученные в примерах почти-кольца, если их рассмотреть над конечными множествами с почти-кольцами Диксона и Галуа?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carmichael R. D.* Algebras of certain doubly transitive groups // Am. J. Math. 1931. V. 53, N 3. P. 631–644.

2. *Zassenhaus H.* Über endliche Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11, N 1. P. 187–220.

3. *Wiclandt H.* Über Bereiche aus Gruppenabbildungen // Deutsche Mathematik. 1938. V. 3. P. 9–10.

4. *Курош А. Г.* Общая алгебра. М.: Наука, 1974.

5. *Karzel H., Maxson C. J.* Kinematic spaces with dilatations // J. Geometry. 1984. V. 22, N 2. P. 196–202.

6. *Kerby W. E.* Projektive und nicht-projektive Fastkörper // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1968. V. 32. P. 20–24.

7. *Karzel H., Maxson C. J.* Fibered groups with non-trivial centers // Results in Mathematics. 1984. V. 7, N 2. P. 192–208.

8. *Karzel H., Maxson C. J.* Fibered p-groups // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1986. V. 56. P. 70–81.

9. *Симонов А. А.* Обобщение точно транзитивных групп // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 6. С. 153–178.

10. *Karzel H., Kist G.* Determination of all near vector spaces with projective and affine fibrations // J. Geometry. 1984. V. 23, N 2. P. 124–127.

11. *Howell K.-T., Chistyakov D. S.* О теории почти-векторных пространств // Фундамент. и прикл. математика. 2015. V. 20, N 5. P. 197–202.

12. *Karzel H., Maxson C. J.* Affine MDS-codes on groups // J. Geometry. 1993. V. 47, N 1-2. P. 65–76.

13. *Kesava M. P.* Applications of near-rings to combinatorial problems // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. part A. 1975. V. 41. P. 189–194.

14. *Howell K.-T., Chistyakov D. S.* Аффинные почти-кольца и связанные с ними структуры // Мат. заметки. 2018. V. 103, N 6. P. 936–947.

15. *Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А.* Конструкции квандлов над группами, модулями и почти-кольцами // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 1. С. 24–35.

16. *Nayak H., Kukcham S. P., Kedukodi B. S.* Extensions of Boolean rings and nearrings // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2019. V. 12, N 1. P. 58–67.

17. *Lockhart R.* The theory of near-rings. Cham: Springer, 2021. (Lecture Notes Math.; V. 2295).

18. *Ke Wen-Fong.* On recent developments of planar nearrings // Nearrings and nearfields. Hamburg, Germany: Proc. Conference on Nearrings and Nearfields, 2005. P. 3–23.

19. *Pilz G.* Near-rings: The theory and its application. Amsterdam: Elsevier, 1983.

20. *Сабинин Л. В.* Одули как новый подход к геометрии со связностью // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 5. С. 800–803.

21. *Симонов А. А.* О соответствии между почтиобластями и группами // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 2. С. 239–251.

22. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

23. *Bardakov V., Nasybullov T.* Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.

24. *Bardakov V., Nasybullov T.* Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. 2021. V. 293. 107552.

25. *Бардаков В., Насыбуллов Т.* Мульти-переключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных узлов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 500–506.

Поступила в редакцию 4 июня 2025 г.
После доработки 5 ноября 2025 г.
Принята к публикации 6 ноября 2025 г.

Симонов Андрей Артёмович (ORCID 0000-0002-8619-6766)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.95

О РАДИАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $p(|x|)$–ЛАПЛАСИАНОМ

Ар. С. Терсенов, Р. Ч. Сафаров

Аннотация. Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения с $p(|x|)$-лапласианом и младшими членами, не удовлетворяющими условию Бернштейна — Нагумо. При условии, что $p(|x|)$ является непрерывно дифференцируемой невозрастающей функцией, доказано существование слабого радиально симметричного решения с непрерывной по Гёльдеру производной.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.211

Ключевые слова: уравнение с $p(|x|)$-лапласианом, условие Бернштейна — Нагумо, радиально симметричные решения, априорные оценки.

Посвящается юбилею
Геннадия Владимировича Демиденко

§ 1. Введение и основные результаты

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-div(|\nabla u|^{p(|x|)-2}\nabla u) = F(x,u,\nabla u) \quad \text{в} \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.2}$$

где Ω — некоторая ограниченная область, $\partial\Omega$ — граница Ω, $p(|x|) > 2$. Один из подходов для исследования краевых задач для (1.1) базируется на методах вариационного исчисления, что связано с вариационностью главной части указанных уравнений. Наличие в уравнении градиентных членов существенно осложняет применение этих методов. В этом случае для доказательства разрешимости краевых задач широко используются топологические и аппроксимационные методы.

Исследованию краевых задач для уравнения (1.1) посвящена обширная литература. Нас интересуют радиально симметричные решения краевых задач для (1.1) при наличии в уравнении градиентных членов. В связи с этим мы ограничимся ссылками на те работы, в которых такие исследования проводились. Если говорить о работах, в которых присутствуют градиентные члены, то можно отметить [1, 2], где с помощью аппроксимационных методов доказывается существование слабых решений краевых задач для (1.1) при постоянном p. Также при постоянном p в работах [3–7] с помощью различных топологических

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0028).

методов, основанных на теоремах лиувиллевского типа, на методе суб- /суперрешений с последующим применением теоремы Красносельского доказаны аналогичные результаты. Что касается работ, в которых исследовались радиально симметричные решения при $p = p(|x|)$, отметим работы [8, 9], в которых с помощью методов вариационного исчисления было доказано существование слабых соболевских радиально симметричных решений. В [10] рассматривалась задача с $p = p(|x|)$ и градиентными членами, в которой было доказано существование разрушающихся на границе радиально симметричных решений.

Во всех вышеперечисленных работах функция $F(x, u, q)$ удовлетворяет условию Бернштейна — Нагумо

$$|F(x, u, q)| \leq c(1 + |q|^{p(x)}) \quad \text{для} \quad (x, u, q) \in \overline{\Omega} \times [-M, M] \times \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

с некоторой постоянной c, при условии, что решение удовлетворяет условию $\max |u| \leq M$ с некоторой постоянной M. Нас интересует разрешимость краевых для задач для (1.1) в случае, когда функция $F(x, u, q)$ имеет произвольный рост по переменной q. В связи с этим отметим результаты статьи [11], где с помощью метода суб-/суперрешений были получены результаты о существовании решения при нарушении условия (1.3) при определенных условиях малости на коэффициенты уравнения. Нелинейность по градиенту предполагается не более чем полиномиальная.

В [12, 13] было доказано существование радиально симметричных решений задачи Дирихле для (1.1) без каких-либо условий малости, когда показатель p постоянен и условие (1.3) не имеет места. Новизна результатов данной работы заключается в получении аналогичных результатов в случае, когда показатель p зависит от $|x|$.

Итак, нас интересует существование ограниченных радиально симметричных решений задачи (1.1), (1.2), где $\Omega = B_R$ — шар радиуса R. Будем предполагать, что функция $F(x, u, \nabla u)$ может быть представлена в виде $F(r, u, u_r)$ при замене переменных $r = |x|$. Примерами таких функций являются, например, функции вида

$$F(|x|, u, |\nabla u|), \quad F(|x|, u, x \cdot \nabla u),$$

где $x \cdot \nabla u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i u_{x_i}$. В дальнейшем производную функции u по переменной r будем обозначать через u'. Как известно, ограниченное радиально симметричное решение (1.1), (1.2) удовлетворяет уравнению

$$-(|u'|^{p(r)-2}u')' - \frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u' = F(r, u, u'), \quad r \in (0, R), \tag{1.4}$$

и краевым условиям

$$u'(0) = 0, \quad u(R) = 0. \tag{1.5}$$

Дадим определение решения задачи (1.4), (1.5).

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(r)$ является *решением задачи* (1.4), (1.5), если $u'(r)$ непрерывна по Гёльдеру на $[0, R]$, удовлетворяет (1.5) и имеет место интегральное тождество

$$\int\limits_0^R |u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi'(r)\,dr = \int\limits_0^R \frac{n-1}{r}|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)\phi(r)\,dr + \int\limits_0^R F(r, u(r), u'(r))\phi(r)\,dr \quad \forall \phi(r) \in \mathbb{C}_0^\infty(0, R).$$

В силу указанной в определении гладкости искомого решения краевые условия (1.5) понимаются в обычном смысле.

Представим F в виде

$$F(r,u,u') = g_0(r,u) + g(r,u,u') + f(r),$$

причем $F(r,0,0)$ не обращается тождественно в нуль и

$$\lim_{|u|\to\infty} |g_0(r,u) + g(r,u,0)| = \infty, \tag{1.6}$$

$$u(g_0(r,u) + g(r,u,0)) < 0, \quad u \neq 0. \tag{1.7}$$

Например, $g_0(r,u) + g(r,u,q) = -u|u|^s - ue^{r|q|^\mu}$, $s > 0$, удовлетворяет условиям (1.6), (1.7).

Положим

$$\max_{r\in[0,R],|u|\le M} (g_0(r,u) + g(r,u,0) + f(r)) = M_*, \quad \max_{r\in[0,R]} |f| = f_*.$$

Предположим, что $g(r,u,u')$ удовлетворяет условиям

$$g(r,u,-q) \le 0, \quad u > 0, \quad g(r,u,q) \ge 0, \quad u < 0, \tag{1.8}$$

где $q \in [q_0,q_1]$, $1 \le q_0 < q_1$, $r \in [0,R]$, $|u| \le M$

$$|g(r,u,q) - g(s,u,q)| \le K(r,s,u,q)(r-s) \tag{1.9}$$

для $r,s \in (0,R)$, $0 < r-s$, $|u| \le M$, $|q| \in [q_0,q_1]$, где $K \ge 0$,

$$g(r,u_2,q) - g(r,u_1,q) \ge \gamma(r,u_1,u_2,q)(u_1-u_2) \tag{1.10}$$

для $r \in (0,R)$, $|u_1|,|u_2| \le M$, $u_1 > u_2$, $|q| \in [q_0,q_1]$, где $\gamma(r,u_1,u_2,q) \ge 0$.

Предположим, что неравенства

$$K(r,s,u_1,\pm q) - \gamma(r,u_1,u_2,\pm q)\widetilde{q} \le 0. \tag{1.11}$$

выполнены для любых r, s, u_1, u_2, $\widetilde{q}$ и q, удовлетворяющих условиям

$$(r,s) \in (0,R), s < r;\ |u_1|,|u_2| \le M, u_1 - u_2 \ge \widetilde{q}(r-s);\ \widetilde{q}, q \in [q_0,q_1], q < \widetilde{q}.$$

Теорема 1.2. *Пусть* $F(r,u,u') \in \mathbb{C}([0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^1[0,R]$, $p' \le 0$ *и выполнены условия* (1.6)–(1.11). *Тогда существует слабое решение задачи* (1.4), (1.5) *такое, что функция* $|u'(r)|^{p(r)-2}u'(r)$ *непрерывна по Липшицу на* $[0,R]$ *и* $u(r)$ *удовлетворяет следующим оценкам:*

$$|u(r)| \le M, \quad |u'(r)| \le q_1,$$

где M *зависит от* f_*, g_0 *и* g, *а* q_1 *зависит от* M *и* $\max\limits_{r\in[0,R]} |p'(r)|$.

Ниже мы приводим примеры функций, удовлетворяющих условиям (1.6)–(1.11) [14]:

$$g = rq^{2k+1} - u|q|^\nu,\ 2k > \nu; \quad g = -ue^{r|q|^\mu},\ \mu < 1; \quad g = rq^{2k+1} - ue^{|q|}.$$

Для того чтобы доказать теорему 1.2 регуляризуем уравнение (1.4) и докажем классическую разрешимость регуляризованной задачи, основываясь на технике, разработанной в [12, 13], и используя принцип неподвижной точки. Далее используем процедуру предельного перехода для получения слабого решения задачи (1.4), (1.5).

Статья организована следующим образом. В § 2 мы получаем априорную оценку классического решения регуляризованной задачи. Параграф 3 посвящен получению априорной оценки производной классического решения регуляризованной задачи. В § 4 доказывается теорема существования классического решения регуляризованной задачи (см. теорему 4.2), а также приведено доказательство существования слабого в смысле определения 1.1 решения задачи (1.4), (1.5) (см. теорему 1.2).

§ 2. Априорная оценка решения регуляризованной задачи

Рассмотрим следующую регуляризацию уравнения (1.4):

$$-((u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u')' - \frac{n-1}{r}(u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' = F(r,u,u'), \tag{2.1}$$

где постоянная $\alpha \in (0,1)$ такова, что $(u'^{\alpha})^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} = |u'|^{p(r)-2}$, $\varepsilon > 0$. В качестве α можно взять $\alpha = \frac{m}{k}$, где m — четное число, k — целое положительное число. Перепишем уравнение (2.1) в недивергентном виде

$$-a_{\varepsilon}(r,u')u'' - \frac{n-1}{r}(u'^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' - b_{\varepsilon}(r,u') = F(r,u,u'), \tag{2.2}$$

где

$$a_{\varepsilon}(r,z) = (z^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)z^{\alpha}+\varepsilon),\ b_{\varepsilon}(r,z) = \frac{1}{\alpha}p'(r)z(z^{\alpha}+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}\ln(z^{\alpha}+\varepsilon).$$

Нетрудно видеть, что $a_{\varepsilon}(r,z)$ является четной функцией по z. Будем исследовать существование классического решения задачи (2.2), (1.5). Для этого дадим определение этого понятия.

Определение 2.1. Функцию $u(r) \in \mathbb{C}^2(0,R) \cap \mathbb{C}^1[0,R]$, удовлетворяющую уравнению (2.2) в каждой точке интервала $(0,R)$, а также краевым условиям (1.5), понимаемым в обычном смысле, будем называть *классическим решением задачи* (2.2), (1.5).

Наша цель в этом параграфе получить априорную оценку решения задачи (2.2), (1.5), не зависящую от параметра регуляризации.

Лемма 2.1. *Пусть $F \in \mathbb{C}([0,R]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R})$ и выполнены условия* (1.6), (1.7). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *имеет место следующая оценка:*

$$|u(r)| \le M$$

с некоторой постоянной M, зависящей от f_*, $g_0(r,u)$, $g(r,u,0)$.

Доказательство. Пусть в точке $r = r_0 \in (0,R)$ функция $u(r)$ достигает положительного максимума и $f(r_0) > 0$, тогда $u'(r_0) = 0$ и $u''(r_0) \le 0$. Из (2.2), учитывая, что $b_{\varepsilon}(r,0) = 0$, получим

$$g_0(r_0,u(r_0)) + g(r_0,u(r_0),0) + f(r_0) \ge 0.$$

Принимая во внимание (1.7), получаем

$$|g_0(r_0,u(r_0)) + g(r_0,u(r_0),0)| \le f(r_0) \le f_*,$$

откуда в силу (1.6) немедленно вытекает существование постоянной $M_1 > 0$, зависящей от f_* и $g_0(r,u)$, $g(r,u,0)$, такой, что

$$u(r_0) \le M_1.$$

Если же $f(r_0) \le 0$, то r_0 не может быть точкой положительного максимума функции u.

Переходим к исследованию поведения u на границе. Если $r = 0$ является точкой положительного максимума функции u, то существует δ-окрестность точки $r = 0$ такая, что для любого $r \in (0, \delta)$ имеем $u(r) > 0$, $u'(r) \leq 0$ и $u''(r) \leq 0$. Тогда из (2.2) для указанных значений r получим

$$b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') \geq 0.$$

Устремляя $r \to 0$, учитывая (1.5), $b_\varepsilon(r, 0) = 0$, предполагая, что $f(0) > 0$, в пределе получаем

$$|g_0(0, u(0)) + g(0, u(0), 0)| \leq f(0) \leq f_*$$

и как следствие

$$u(0) \leq M_1.$$

Если $f(0) \leq 0$, то достижение функцией u положительного максимума в нуле невозможно. Так как $u(R) = 0$, то в итоге имеем

$$u(r) \leq M_1, \quad r \in [0, R]. \tag{2.3}$$

Предполагая, что в точке $r = r_1 \in (0, R)$ функция u достигает отрицательного минимума, и действуя аналогично предыдущим рассуждениям, легко показать, что существует постоянная $M_2 > 0$, зависящая от f_* и $g_0(r, u)$, $g(r, u, 0)$, такая, что

$$u(r) \geq -M_2. \tag{2.4}$$

Таким образом, из (2.3), (2.4) вытекает, что решения задачи (2.2), (1.5) удовлетворяют

$$|u(r)| \leq M \quad \forall r \in (0, R), \quad M = \max\{M_1, M_2\}. \quad \square$$

Введем неубывающую неотрицательную функцию $\psi(\rho) \in \mathbb{C}^1(0, +\infty)$ такую, что существуют постоянные q_0, q_1, которые удовлетворяют $1 \leq q_0 < q_1 < +\infty$, и выполнено

$$\int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)} = 2M. \tag{2.5}$$

Положим

$$\tau(\kappa) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)},$$

где параметр κ меняется в пределах $[q_0, q_1]$, а функция ψ определена в (2.5). Пусть

$$\tau_0 \equiv \tau(q_0) = \int\limits_{q_0}^{q_1} \frac{d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Введем функцию $\mathrm{h}(\tau)$ как решение следующей задачи:

$$\mathrm{h}'' + \psi(|\mathrm{h}'|) = 0, \quad \mathrm{h}(0) = 0, \quad \mathrm{h}(\tau_0) = 2M. \tag{2.6}$$

Легко видеть, что

$$\mathrm{h}(\tau(\kappa)) = \int\limits_{\kappa}^{q_1} \frac{\rho d\rho}{\psi(\rho)}.$$

Более того, $\mathrm{h}(\tau_0) = 2M$ (в силу (2.5)). Заметим, что $\mathrm{h}'(\tau) \geq 1$ для $\tau \in [0, \tau_0]$.

Лемма 2.2. *Пусть выполнены условия леммы* 2.1, *а также условия* (1.8), (2.5). *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *имеет место следующая оценка:*

$$|u(r)| \le h(R-r), \quad r \in [R-\tau_0, R] \cap [0, R].$$

Доказательство. Введем следующий оператор:

$$\mathrm{L} \equiv -a_\varepsilon(r, u'(r)) \frac{d^2}{dr^2}.$$

Тогда

$$\mathrm{L}u = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u')$$

и для $\zeta = R - r$, используя (2.6),

$$\mathrm{Lh}(\zeta) = -a_\varepsilon(r, u'(r))\mathrm{h}''(\zeta) = a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|).$$

Таким образом, для функции $v(r) \equiv u(r) - \mathrm{h}(\zeta)$ получаем

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') - a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|). \tag{2.7}$$

С другой стороны,

$$\mathrm{L}v = \mathrm{L}u - \mathrm{Lh} = -a_\varepsilon(r, u'(r))v''. \tag{2.8}$$

Следовательно, из (2.7), (2.8) получаем

$$-a_\varepsilon(r, u')v'' = \frac{n-1}{r}(u'^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u' + b_\varepsilon(r, u') + F(r, u, u') - a_\varepsilon(r, u'(r))\psi(|\mathrm{h}'(\zeta)|). \tag{2.9}$$

Предположим, что в некоторой точке $r_0 \in (R - \tau_0, R)$ функция $v(r)$ достигает положительного максимума. Тогда $u(r_0) > 0$, $v'(r_0) = 0$, откуда следует, что $u'(r_0) = -\mathrm{h}'(R - r_0)$ и $\mathrm{L}v|_{r=r_0} \ge 0$. Так как $p(r) \in \mathbb{C}^1[0, R]$, $\mathrm{h}' \ge 1$ и выполнено (1.8), то

$$\begin{aligned}
[b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + F(r, u, -\mathrm{h}')]\,|_{r=r_0} &\le [b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + g_0(r, u) + f(r)]\,|_{r=r_0} \\
&\le \frac{1}{\alpha}|p'(r)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} \ln((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)|_{r=r_0} + M_* \\
&\le \frac{1}{\alpha}|p'(r)|\,\mathrm{h}'((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}+1}|_{r=r_0} + M_*.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Можно заметить, что для любого $\mu > 0$ функция $\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) = \mu\mathrm{h}'^2(\zeta) + M_*$ удовлетворяет (2.5) с определенными $q_0 \ge 1$, q_1 за счет выбора q_1. Дифференцируя $a_\varepsilon(r, z)$, легко показать, что эта функция является возрастающей по параметру ε, откуда следует оценка

$$\begin{aligned}
a_\varepsilon(r, z) = ((-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}-1}((p(r)-1)(-\mathrm{h}')^\alpha + \varepsilon) \\
\ge (p(r)-1)(\mathrm{h}')^{p(r)-2} \ge q_0^{p(r)-2}(p(r)-1) \ge 1.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Учитывая (2.10), (2.11), взяв указанное ψ, легко получить, что для выполнения неравенства

$$[b_\varepsilon(r, -\mathrm{h}') + F(r, u, u')]\,|_{r=r_0} < a_\varepsilon(r, -\mathrm{h}')\psi(\mathrm{h}'(\zeta))|_{r=r_0} \tag{2.12}$$

достаточно, чтобы имело место неравенство (напомним, что $(-\mathrm{h}')^\alpha = (\mathrm{h}')^\alpha$)

$$\frac{1}{\alpha}|p'(r)|((\mathrm{h}')^\alpha+\varepsilon)|_{r=r_0} < \mu \mathrm{h}'|_{r=r_0}.$$

Это, очевидно, имеет место при $\frac{1}{\alpha}\max\limits_{r\in[0,R]}|p'(r)|(1+\varepsilon) < \mu$. Таким образом, из (2.5), (2.10) и (2.12) вытекает

$$-a_\varepsilon(r,u'(r))v'' \le \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' + b_\varepsilon(r,u') + F(r,u,u') - a_\varepsilon(r,u'(r))\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) < 0, \tag{2.13}$$

противоречие с тем, что v достигает положительного максимума внутри $(R-\tau_0, R)$.

Рассмотрим v на границе. Если $\tau_0 \ge R$, то на сегменте $[0,R]$ получаем

1) $v'(0) = u'(0) + \mathrm{h}'(R) = \mathrm{h}'(R) > 0$ при $r=0$, следовательно, на этом конце функция v не может достигать максимума;

2) $v(R) = u(R) - \mathrm{h}(0) = 0$ при $r = R$.

Если $\tau_0 < R$, то на сегменте $[R-\tau_0, R]$ получаем

3) $v(R-\tau_0) = u(R-\tau_0) - \mathrm{h}(\tau_0) < 0$ при $r = R-\tau_0$ из леммы 2.1 и (2.5);

4) $v(R) = u(R) - \mathrm{h}(0) = 0$ при $r = R$.

В итоге $v(r) \le 0$,

$$u(r) \le \mathrm{h}(R-r). \tag{2.14}$$

Перейдем к получению оценки снизу. Введем функцию $w(r) \equiv u(r) + \mathrm{h}(\zeta)$. Аналогично (2.9) получаем

$$\begin{aligned}-a_\varepsilon(r,u'(r))w'' \le \frac{n-1}{r}(u'^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u' + b_\varepsilon(r,u')\\ + F(r,u,u') - a_\varepsilon(r,u'(r))\psi(\mathrm{h}'(\zeta)) < 0.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Предположим, что в некоторой точке $r_1 \in (R-\tau_0, R)$ функция $w(r)$ достигает отрицательного минимума. Тогда $u(r_1) < 0$, $w_r(r_1) = 0$, откуда следует $u_r(r_1) = \mathrm{h}'(R-r_1)$ и $\mathrm{L}w|_{r=r_1} \le 0$. С другой стороны, используя второе условие в (1.8), а также (2.10), (2.12), которые также имеют место при замене $-\mathrm{h}'$ на h', из (2.15) (аналогично (2.13)) получаем

$$-a_\varepsilon(r,u_r)w_{rr}|_{r=r_1} > 0.$$

Это противоречит предположению о том, $w(r)$ достигает отрицательного минимума $r = r_1$. Рассмотрим w на границе. Если $\tau_0 \ge R$, то на сегменте $[0,R]$ получаем:

1) $w'(0) = u'(0) - \mathrm{h}'(R) = -\mathrm{h}'(R) < 0$ при $r = 0$, следовательно, на этом конце функция w не может достигать минимума;

2) $w(R) = u(R) + \mathrm{h}(0) = 0$ при $r = R$.

Если $\tau_0 < R$, то на сегменте $[R-\tau_0, R]$ получаем

3) $w(R-\tau_0) = u(R-\tau_0) + \mathrm{h}(\tau_0) > 0$ при $r = R-\tau_0$ из леммы 2.1 и (2.5);

4) $w(R) = u(R) + \mathrm{h}(0) = 0$ при $r = R$.

Значит, $w(r) \ge 0$,

$$u(r) \ge -\mathrm{h}(R-r). \tag{2.16}$$

Из (2.14), (2.16) заключаем, что

$$|u(r)| \le \mathrm{h}(R-r), \quad r \in [R-\tau_0, R]. \quad \square$$

§ 3. Априорная оценка производной решения регуляризованной задачи

Перейдем к оценке производной классического решения регуляризованной задачи.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия лемм* 2.1, 2.2, *а также условия* (1.9)–(1.11). *Предположим, что* $p'(r) \le 0$. *Тогда для любого классического решения задачи* (2.2), (1.5) *выполнена следующая оценка:*

$$|u'(r)| \le h'(0), \quad r \in [0, R].$$

Доказательство. Запишем уравнение (2.2) в двух различных точках $r = x$ и $r = y$

$$-a_\varepsilon(x, u'(x))u''(x) = \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x) + \varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) + b_\varepsilon(x, u'(x)) + F(x, u(x), u'(x)), \tag{3.1}$$

$$-a_\varepsilon(y, u'(y))u''(y) = \frac{n-1}{y}\big(u'^\alpha(y) + \varepsilon\big)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + b_\varepsilon(y, u'(y)) + F(y, u(y), u'(y)), \tag{3.2}$$

где $x, y \in (0, R)$. Вычитая (3.2) из (3.1), получаем

$$\begin{aligned}&-a_\varepsilon(x, u'(x))u''(x) + a_\varepsilon(y, u'(y))u''(y)\\ &\quad= b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y)) + \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x) + \varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x)\\ &\quad- \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

Положим $V(x, y) = u(x) - u(y)$. Принимая во внимание равенства $V_{xx} = u''(x)$, $V_{yy} = -u''(y)$, запишем (3.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&-a_\varepsilon(x, u'(x))V_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))V_{yy}\\ &\quad= b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y)) + \frac{n-1}{x}(u'^\alpha(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x)\\ &\quad- \frac{n-1}{y}(u'^\alpha(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)).\end{aligned}$$

Определим линейный оператор

$$\widetilde{L} \equiv -a_\varepsilon(x, u'(x))\frac{\partial^2}{\partial x^2} - a_\varepsilon(y, u'(y))\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Функция $\mathrm{h}(x-y)$ удовлетворяет равенству

$$\widetilde{L}\mathrm{h} = -a_\varepsilon(x, u'(x))\mathrm{h}_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))\mathrm{h}_{yy} = -(a_\varepsilon(x, u'(x)) + a_\varepsilon(y, u'(y)))\mathrm{h}''(x-y).$$

Для функции $W(x, y) = V(x, y) - \mathrm{h}(x-y)$ имеем

$$\begin{aligned}&\widetilde{L}W = -a_\varepsilon(x, u'(x))W_{xx} - a_\varepsilon(y, u'(y))W_{yy} = \widetilde{L}V - \widetilde{L}\mathrm{h}\\ &= \frac{n-1}{x}\big(u'^\alpha(x)+\varepsilon\big)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) - \frac{n-1}{y}\big(u'^\alpha(y)+\varepsilon\big)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y) + b_\varepsilon(x, u'(x)) - b_\varepsilon(y, u'(y))\\ &\quad+ F(x, u(x), u'(x)) - F(y, u(y), u'(y)) + (a_\varepsilon(x, u'(x)) + a_\varepsilon(y, u'(y)))\mathrm{h}''.\end{aligned} \tag{3.4}$$

Рассмотрим (3.4) в области $P = \{(x, y) : x \in (0, R), y \in (0, R), 0 < x - y < \tau_0\}$.

Пусть $\tau_0 < R$. Предположим, что в некоторой точке $Q_0 = (x_0, y_0) \in P$ функция $W(x, y)$ достигает положительного максимума. Тогда $W_{xx}(x_0, y_0) \leq 0$, $W_{yy}(x_0, y_0) \leq 0$ и как следствие

$$\widetilde{L}W|_{Q_0} \geq 0. \tag{3.5}$$

В то же время имеют место следующие соотношения

$$W_x(x_0, y_0) = W_y(x_0, y_0) = 0,\ u'(x_0) = u'(y_0) = \mathrm{h}'(x_0 - y_0),\ u(x_0) > u(y_0). \tag{3.6}$$

Используя тот факт, что $p' \leq 0$, $x_0 > y_0$, получаем

$$\left[\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x) + \varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}} u'(x) - \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y) + \varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}} u'(y)\right] |_{Q_0} < 0. \tag{3.7}$$

Из (2.12), (3.4), (3.6), (3.7) и четности функции a_ε следует, что

$$\begin{aligned}\widetilde{L}W|_{Q_0} < b_\varepsilon(x_0, u'(x_0)) - b_\varepsilon(y_0, u'(y_0)) + F(x_0, u(x_0), u'(x_0)) - F(y_0, u(y_0), u'(y_0))\\ - (a_\varepsilon(x_0, u'(x_0)) + a_\varepsilon(y_0, u'(y_0)))\psi(\mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ \leq g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\end{aligned}$$

Чтобы получить противоречие с неравенством (3.5), необходимо показать, что

$$g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) \leq 0. \tag{3.8}$$

Представим (3.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &= [g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))]\\ &+ [g(y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))].\end{aligned} \tag{3.9}$$

Используя условия (1.9), (1.10), из (3.9) получим

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &\leq [K(x_0, y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))(x_0 - y_0)\\ &- \gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))(u(x_0) - u(y_0))].\end{aligned} \tag{3.10}$$

В точке максимума

$$u(x_0) - u(y_0) > \mathrm{h}(x_0 - y_0) = \mathrm{h}(x_0 - y_0) - \mathrm{h}(0) = \mathrm{h}'(\xi)(x_0 - y_0), \quad 0 < \xi < x_0 - y_0. \tag{3.11}$$

Положим для упрощения записи

$$K(x_0, y_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) = K(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)),$$

$$\gamma(x_0, u(x_0), u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) = \gamma(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)).$$

Используя (1.11), (3.11), неравенство (3.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}&g(x_0, u(x_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - g(y_0, u(y_0), \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\\ &\leq [K(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0)) - \gamma(\cdot, \mathrm{h}'(x_0 - y_0))\mathrm{h}'(\xi)](x_0 - y_0) \leq 0.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Таким образом, $\widetilde{L}W|_{Q_0} < 0$ и, как следствие, W не может достигать положительного максимума внутри P.

Рассмотрим W на границе ∂P. Из леммы 2.2 следует, что

1) при $x = R$, $y \in [R-\tau_0, R]$ имеем

$$W(x,y)\Big|_{x=R} = u(R) - u(y) - \mathrm{h}(R-y) \le 0;$$

2) при $x = y$ имеем

$$W(x,y)|_{x=y} = u(x) - u(y) - \mathrm{h}(x-y)|_{x=y} = -\mathrm{h}(0) = 0;$$

3) при $x - y = \tau_0$, $x \in [\tau_0, R]$

$$W(x,y)|_{y=x-\tau_0} = u(x) - u(y) - \mathrm{h}(\tau_0) \le 0,$$

используя (2.5) и параметрическое представление функции h;

4) при $y = 0$, $x \in [0, \tau_0]$

$$W_y(x,y)|_{y=0} = -u_y(0) + \mathrm{h}'(x) = \mathrm{h}'(x) > 0.$$

Это означает, что W не может достигать положительного максимума на этой части границы. Итак, $W(x,y) \le 0$, откуда

$$u(x) - u(y) \le \mathrm{h}(x-y), \quad (x,y) \in \overline{P}. \tag{3.13}$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \ge R$. В этом случае $P = \{(x,y) : x \in (0,R), y \in (0,R), x > y\}$.

Оценим разность $u(x) - u(y)$ снизу. Пусть $\tau_0 < R$, рассмотрим функцию $\widetilde{W} = \widetilde{V}(x,y) - \mathrm{h}(x-y) = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(x-y)$. Вычитая (3.1) из (3.2), с учетом соотношений $\widetilde{V}_{xx} = -u''(x)$, $\widetilde{V}_{yy} = u''(y)$, получаем

$$\begin{aligned}
&- a_\varepsilon(y,u'(y))\widetilde{V}_{yy} - a_\varepsilon(x,u'(x))\widetilde{V}_{xx} \\
&\qquad = -\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x)+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y)+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u'(y) \\
&\qquad\quad - b_\varepsilon(x,u'(x)) + b_\varepsilon(y,u'(y)) - F(x,u(x),u'(x)) + F(y,u(y),u'(y)),
\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\widetilde{L}\widetilde{V} - \widetilde{L}\mathrm{h} = \widetilde{L}\widetilde{W} \\
&\qquad = -\frac{n-1}{x}(u'^{\alpha}(x)+\varepsilon)^{\frac{p(x)-2}{\alpha}}u'(x) + \frac{n-1}{y}(u'^{\alpha}(y)+\varepsilon)^{\frac{p(y)-2}{\alpha}}u'(y) \\
&\qquad - b_\varepsilon(x,u'(x)) + b_\varepsilon(y,u'(y)) - F(x,u(x),u'(x)) + F(y,u(y),u'(y)) \\
&\qquad\qquad - (a_\varepsilon(x,u'(x)) + a_\varepsilon(y,u'(y)))\psi(\mathrm{h}'(x-y)).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Предположим, что в некоторой точке $Q_1 = (x_1,y_1) \in P$ функция $\widetilde{W}(x,y)$ достигает своего положительного максимума. Тогда

$$\begin{gathered}
\widetilde{W}_x(x_1,y_1) = \widetilde{W}_y(x_1,y_1) = 0, \quad \widetilde{W}_{xx}(x_1,y_1) \le 0, \quad \widetilde{W}_{yy}(x_1,y_1) \le 0, \\
u'(x_1) = u'(y_1) = -\mathrm{h}'(x_1-y_1), \quad \widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} \ge 0.
\end{gathered} \tag{3.15}$$

С другой стороны, из (2.12), (3.7), (3.14), (3.15), $p' \le 0$ и четности функций a_ε следует, что

$$\widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} < -g(x_1,u(x_1),-\mathrm{h}'(x_1-y_1)) + g(y_1,u(y_1),-\mathrm{h}'(x_1-y_1))$$

Действуя так же, как в (3.8)–(3.12), учитывая, что здесь $u(y_1) > u(x_1)$, получаем

$$\widetilde{L}\widetilde{W}|_{Q_1} < 0.$$

Это противоречит предположению о том, что $\widetilde{W}$ достигает своего положительного максимума внутри P.

Рассмотрим $\widetilde{W}$ на ∂P. Из леммы 2.2 следует, что

1) при $x = R$, $y \in [R - \tau_0, R]$ имеем

$$\widetilde{W}(x, y)\Big|_{x=R} = u(y) - u(R) - \mathrm{h}(R - y) \le 0;$$

2) при $x = y$ имеем

$$\widetilde{W}(x, y)|_{x=y} = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(x - y)|_{x=y} = -\mathrm{h}(0) = 0;$$

3) при $x - y = \tau_0$, $x \in [\tau_0, R]$

$$\widetilde{W}(x, y)|_{y=x-\tau_0} = u(y) - u(x) - \mathrm{h}(\tau_0) \le 0,$$

используя (2.5) и параметрическое представление функции h;

4) при $y = 0$, $x \in [0, \tau_0]$

$$\widetilde{W}_y(x, y)|_{y=0} = u_y(0) + \mathrm{h}'(x) = \mathrm{h}'(x) > 0.$$

Это означает, что $\widetilde{W}$ не может достигать положительного максимума на этой части границы. Таким образом, $\widetilde{W}(x, y) \le 0$, откуда

$$u(y) - u(x) \le \mathrm{h}(x - y), \quad (x, y) \in \overline{P}. \tag{3.16}$$

Аналогичный результат легко получить подобным же образом и в случае $\tau_0 \ge R$. В этом случае $P = \{(x, y) : x \in (0, R), y \in (0, R), x > y\}$.

Из (3.13) и (3.16) следует, что

$$|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(x - y), \quad (x, y) \in \overline{P}.$$

В силу симметрии переменных x, y можно аналогичным образом рассматривать случай $x < y$, чтобы получить оценку $|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(y - x)$. Следовательно,

$$|u(x) - u(y)| \le \mathrm{h}(|x - y|), \quad x, y \in \overline{P}.$$

Замечая, что $\mathrm{h}(0) = 0$, можно переписать последнее неравенство в виде

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|} \le \frac{\mathrm{h}(|x - y|) - \mathrm{h}(0)}{|x - y|},$$

откуда сразу следует требуемая оценка градиента

$$|u'(x)| \le \mathrm{h}'(0), \quad x \in [0, R].$$

§ 4. Доказательство теорем существования

Рассмотрим решение u_ε регуляризованного уравнения (2.1)

$$-((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon')' - \frac{n-1}{r}((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon' = F(r, u_\varepsilon, u_\varepsilon') \tag{4.1}$$

вместе с краевым условием (1.5), которые запишем для u_ε:

$$u_\varepsilon'(0) = 0, \quad u_\varepsilon(R) = 0. \tag{4.2}$$

Для того чтобы доказать существование классического решения задачи (4.1), (4.2), необходимо показать, что выражение $\frac{n-1}{r}((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon'$ ограничено при $r \to 0$. Обозначим $Z(r) = ((u_\varepsilon')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}} u_\varepsilon'$. Имеет место следующая

Лемма 4.1. *Если* u_ε *является классическим решением задачи* (4.1), (4.2), *то* $Z(r) \in \mathbb{C}^1[0,R)$ *и*

$$Z'(0) = -\frac{F(0, u_\varepsilon(0), 0)}{n}.$$

Доказательство этой леммы без предварительной регуляризации в случае $F \equiv 0$ приведено в [15]. Для уравнения вида (4.1) с постоянным показателем p доказательство можно посмотреть в [14]. Но это же самое доказательство без каких-либо изменений может быть использовано и в случае $p = p(r)$, так как используется представление регуляризованного уравнения в дивергентном виде и член $b_\varepsilon(r, u'_\varepsilon)$ не возникает.

Перейдем к доказательству существования классического решения задачи (4.1), (4.2).

Теорема 4.2. *Пусть* $F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) \in \mathbb{C}([0,R] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $p(r) \in \mathbb{C}^1[0,R]$, $p'(r) \leq 0$ *и выполнены условия* (1.6)–(1.11). *Тогда существует классическое решение задачи* (4.1), (4.2) *такое, что функция* $|u'_\varepsilon(r)|^{p(r)-2}u'_\varepsilon(r)$ *непрерывна по Липшицу на* $[0,R]$ *и* $u_\varepsilon(r)$ *удовлетворяет следующим оценкам:*

$$|u_\varepsilon| \leq M, \quad |u'_\varepsilon| \leq q_1,$$

где M *зависит от* f_* *и* g_0, g, *а* $q_1 = h'(0)$.

Доказательство. Из леммы 4.1 вытекает равномерная по ε ограниченность функции Z' в $[0,R]$ и, как следствие, непрерывность по Липшицу функции $|u'_\varepsilon(r)|^{p(r)-2}u'_\varepsilon(r)$ с постоянной Липшица, не зависящей от ε. Положим

$$G(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) = F(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon) + b_\varepsilon(r, u'_\varepsilon)$$

и перепишем (4.1) в виде

$$-a_\varepsilon(r, u'_\varepsilon)u''_\varepsilon - \frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p-2}{\alpha}} u'_\varepsilon = G(r, u_\varepsilon, u'_\varepsilon).$$

Для любой $z \in \mathbb{C}^1[0,R]$ функции $G(r,z,z')$ и $a_\varepsilon(r,z')$ принадлежат $\mathbb{C}[0,R]$. Положим

$$g_{(z)}(r) = \frac{((z')^\alpha + \varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}}{a_\varepsilon(r,z')} = \frac{(z')^\alpha + \varepsilon}{(p(r)-1)(z')^\alpha + \varepsilon}, \quad G_{(z)}(r) = -\frac{G(r,z,z')}{a_\varepsilon(r,z')}.$$

Заметим, что функции $g_{(z)}(r)$, $G_{(z)}(r)$ непрерывны на $[0,R]$.

Рассмотрим линейное уравнение

$$u''_\varepsilon + \frac{n-1}{r} g_{(z)}(r) u'_\varepsilon = G_{(z)}(r)$$

вместе с краевыми условиями (4.2). Эта задача эквивалентна следующей:

$$u'_\varepsilon(r) = V(r), \quad V' + \frac{n-1}{r} g_{(z)}(r) V = G_{(z)}(r). \tag{4.3}$$

Легко видеть, что функция

$$u_\varepsilon = \int\limits_R^r \int\limits_0^s e^{-\int_t^s \frac{n-1}{\lambda} g_{(z)}(\lambda) d\lambda} G_{(z)}(t)\, dt ds \tag{4.4}$$

дает единственное решение задачи (4.3), (4.2) и принадлежит $\mathbb{C}^2(0,R)\cap\mathbb{C}^1[0,R]$. Результаты лемм 2.1, 2.2, 3.1 и упомянутое выше следствие из леммы 4.1 позволяют применить принцип неподвижной точки [16] для доказательства существования решения задачи (4.1), (4.2). Применение теоремы Лерэ — Шаудера требует наличия априорных оценок в семействе уравнений с параметром, где параметр входит в уравнение как множитель при младших членах, т. е. семейство имеет вид

$$-a_\varepsilon(r,u'_\varepsilon)u''_\varepsilon = \sigma\left(\frac{n-1}{r}({u'}^\alpha_\varepsilon+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon + G(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\right),$$

где $\sigma\in[0,1]$ [16, гл. 11, теорема 11.3]. Учитывая специфику вхождения параметра σ и его пределы изменения, выполнение всех оценок и условий легко можно проверить. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 1.2. Рассмотрим уравнение (4.1). Домножая (4.1) на $\phi\in\mathbb{C}_0^\infty(0,R)$ и интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^R((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi'\,dr - \int\limits_0^R\frac{n-1}{r}((u'_\varepsilon)^\alpha+\varepsilon)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_\varepsilon\phi\,dr = \int\limits_0^R F(r,u_\varepsilon,u'_\varepsilon)\phi(r)\,dr. \quad (4.5)$$

Из равномерной по ε ограниченности Z' в $[0,R]$ заключаем о существовании подпоследовательности $\varepsilon_n\to0$ такой, что

$$u_{\varepsilon_n}(r)\to u(r),\quad u'_{\varepsilon_n}(r)\to u'(r)\quad \text{в}\quad \mathbb{C}[0,R], \quad (4.6)$$

откуда в силу непрерывности функции G по совокупности своих переменных сразу следует, что

$$F(r,u_{\varepsilon_n},u'_{\varepsilon_n})\to F(r,u,u')\quad\text{в}\quad\mathbb{C}[0,R].$$

Также из (4.6) получаем

$$(u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n\to(u')^\alpha\quad\text{в}\quad\mathbb{C}[0,R],$$
$$((u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\to|u'|^{p(r)-2}u'\quad\text{в}\quad\mathbb{C}[0,R]. \quad (4.7)$$

Из (4.7) и того факта, что функция $\frac{\phi(r)}{r}$ непрерывна на $[0,R]$, вытекает, что

$$\int\limits_0^R\frac{n-1}{r}((u'_{\varepsilon_n})^\alpha+\varepsilon_n)^{\frac{p(r)-2}{\alpha}}u'_{\varepsilon_n}\phi\,dr\to\int\limits_0^R\frac{n-1}{r}|u'|^{p(r)-2}u'\phi\,dr.$$

Переходя к пределу в (4.5) при $\varepsilon\to0$, получаем, что $u=\lim\limits_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon$ является искомым слабым радиально-симметричным решением задачи (1.4), (1.5). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dall'Aglio A., Giachetti D., Segura de Leon S.* Global existence for parabolic problems involving the p-Laplacian and a critical gradient term // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 1. P. 1–48.

2. *Dall'Aglio A., De Cicco V., Giachetti D., Puel J.-P.* Existence of bounded solutions for nonlinear elliptic equations in unbounded domains // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2004. V. 11, N 4. P. 431–450.
3. *Bueno H., Ercole G., Ferreira W.M., Zumpano A.* Positive solutions for the p-Laplacian with dependence on the gradient // Nonlinearity. 2012. V. 25, N 4. P. 1211.
4. *Figueiredo D. G., Sanchez J., Ubilla P.* Quasilinear equations with dependence on the gradient // Nonlinear Anal. 2009. V. 71, N 10. P. 4862–4868.
5. *Iturriaga L., Lorca S., Sanchez J.* Existence and multiplicity results for the p-Laplacian with a p-gradient term // NoDEA Nonlinear Differ. Equ. Appl. 2008. V. 15. P. 729–743.
6. *Li Jinkai, Yin Jingxue, Ke Yuanyuan.* Existence of positive solutions for the p-Laplacian with p-gradient term // J. Math. Anal. Appl. 2011. V. 383, N 1. P. 147–158.
7. *Ruiz D.* A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems // J. Differ. Equ. 2004. V. 199, N 1. P. 96–114.
8. *Ragusa M. A., Razani A., Safari F.* Existence of radial solutions for a $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem // Adv. Differ. Equ. 2021. Art 215. P. 1–14.
9. *Zhang Q.* Existence of radial solutios for the $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 315. P. 506–516.
10. *Liang Y, Zhang Q. H., Zhao C. S.* On the boundary blow-up solutions of $p(x)$-Laplacian equations with gradient terms // Taiwanese J. Math. 2014. V. 18. P. 599–632.
11. *Bueno H., Ercole G.* A quasilinear problem with fast growing gradient // Appl. Math. Letters. 2013. V. 26, N 4. P. 520–523.
12. *Tersenov A. S.* Radially symmetric solutions of the p-Laplace equation with gradient terms // J. Appl. Industrial Math. 2018. V. 12, N 4. P. 770–784.
13. *Tersenov A. S.* On the existence of radially symmetric solutions for the p-Laplace equation with strong gradient nonlinearities // Sib. Math. J. 2023. V. 64, N 6. P. 1443–1454.
14. *Терсенов А. С., Сафаров Р.Ч.* О радиально-симметричных решениях третьей краевой задачи для эллиптического уравнения с р-лапласианом // Мат. заметки СВФУ. 2024. Т. 31, № 1. С. 64–81.
15. *Franchi B., Lanconelli E., Serrin J.* Existence and uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear equations in R^n // Adv. Math. 1996. V. 118, N . P. 177–243.
16. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1983.

Поступила в редакцию 2 июля 2025 г.
После доработки 2 июля 2025 г.
Принята к публикации 31 августа 2025 г.

Терсенов Арис Саввич (ORCID 0009-0005-2748-8020)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`aterseno@math.nsc.ru`

Сафаров Расул Чориёр Угли (ORCID 0009-0008-6247-1373)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Каршинский государственный университет,
ул. Кучабаг, 17, Карши 180119, Узбекистан
`r.safarov1@g.nsu.ru`

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.951+517.983

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ГИПОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Туманян

Аннотация. Исследуется фредгольмовость регулярных гипоэллиптических операторов со специальными переменными коэффициентами. Для данного класса операторов получены априорные оценки и установлен критерий фредгольмовости в мультианизотропных весовых соболевских пространствах на всем $\mathbb{R}^n$.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.212

Ключевые слова: фредгольмов оператор, регулярный гипоэллиптический оператор, априорная оценка, мультианизотропные весовые пространства.

Посвящается юбилею
Геннадия Владимировича Демиденко

1. Введение и основные определения

Данная работа посвящена исследованию регулярных гипоэллиптических операторов, которые являются специальным подклассом гипоэллиптических операторов по Хёрмандеру (см. [1]). Характеристические многочлены этих операторов являются мультиквазиэллиптическими, в силу чего данный класс операторов естественным образом обобщает эллиптические, параболические, $2b$-параболические и квазиэллиптические операторы. Регулярные гипоэллиптические операторы были введены в 1960–1970-х гг. и активно исследовались в работах С. М. Никольского [2], В. П. Михайлова [3], Фриберга [4], Л. Р. Волевича и С. Г. Гиндикина [5], Г. Г. Казаряна [6] и других авторов. Анализ регулярных гипоэллиптических операторов связан с определенными трудностями, поскольку соответствующие характеристические многочлены, в отличие от эллиптического и квазиэллиптического случаев, не являются однородными или обобщенно однородными. Условия разрешимости, априорные оценки, а также фредгольмовы и спектральные свойства регулярных гипоэллиптических операторов изучены лишь для отдельных классов операторов в специальных функциональных пространствах, при этом большинство известных результатов относится к эллиптическим и квазиэллиптическим операторам.

Фредгольмовы свойства эллиптических операторов в различных функциональных пространствах исследованы в работах Л. А. Багирова [7], Локкарта и

Работа выполнена при финансовой поддержке Комитета по высшему образованию и науке МОНКС РА №25RG-1A205.

Маккоуна [8, 9], Шроэ [10] и других авторов. Априорные оценки и фредгольмова разрешимость квазиэллиптических операторов изучены в работах Л. А. Багирова [11], Г. А. Карапетяна и А. А. Дарбиняна [12], А. А. Дарбиняна и А. Г. Туманян [13] и др.

Вопросы корректной разрешимости и изоморфизма квазиэллиптических операторов в специальной шкале весовых соболевских пространств изучены в работах Г. В. Демиденко (см. [14–16]).

В работах Родино, Боггиатто, Бузано (см. [17]) исследованы фредгольмовы и спектральные свойства специальных классов регулярных гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов в мультианизотропных пространствах с полиномиальными весами. Спектральные свойства гипоэллиптических псевдодифференциальных операторов типа Шредингера, а также операторов, являющихся относительно ограниченными возмущениями операторов с постоянными коэффициентами, изучены в работах Бузано и Зигиотто (см. [18, 19]). Условия фредгольмовости для регулярных гипоэллиптических операторов на соболевских шкалах $H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ со специальными весовыми функциями установлены в [20, 21].

В настоящей работе исследованы нормальная разрешимость, фредгольмовость и спектральные свойства одного класса регулярных гипоэллиптических операторов с переменными коэффициентами на всем $\mathbb{R}^n$. При некоторых условиях на коэффициенты получены априорные оценки для дифференциальных операторов, действующих в мультианизотропных весовых соболевских пространствах. Установлен критерий фредгольмовости для рассматриваемого класса операторов в мультианизотропных пространствах $H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с ограниченной весовой функцией q из специального класса. В работе также приводится описание существенного спектра таких операторов в случае $q \equiv 1$. Спектральные свойства рассматриваемых операторов отличаются от свойств операторов на весовых шкалах, изученных в предыдущих работах (см. [20–22]).

Определение 1.1. Линейный ограниченный оператор A, определенный на всем банаховом пространстве X и действующий в банахово пространство Y, назовем *n-нормальным оператором*, если выполняются следующие условия:

1) образ оператора A замкнут ($\operatorname{Im}(A) = \overline{\operatorname{Im}(A)}$);

2) ядро оператора A конечномерно ($\dim \operatorname{Ker}(A) < \infty$).

Оператор A назовем *фредгольмовым*, если выполняются условия 1, 2 и

3) коядро оператора A конечномерно ($\dim \operatorname{coker}(A) = \dim(Y/\operatorname{Im}(A)) < \infty$).

Определение 1.2. Пусть A — замкнутый оператор с плотной областью определения в банаховом пространстве X. *Существенным спектром* $\sigma_{ess}(A)$ назовем множество комплексных чисел λ, для которых $A-\lambda I$ не является фредгольмовым.

Разность между размерностями ядра и коядра оператора A называется индексом оператора:

$$\operatorname{ind}(A) = \dim \operatorname{Ker}(A) - \dim \operatorname{coker}(A).$$

Определение 1.3. Для линейного ограниченного оператора A, действующего из банахова пространства X в банахово пространство Y ($A : X \to Y$), линейные ограниченные операторы $R_1 : Y \to X$ и $R_2 : Y \to X$ назовем соответственно *левым и правым регуляризаторами*, если выполняются следующие условия: $R_1A = I_X + T_1, AR_2 = I_Y + T_2$, где I_X, I_Y — единичные операторы, а $T_1 : X \to X$ и $T_2 : Y \to Y$ — компактные операторы. Линейный ограниченный оператор $R : Y \to X$ назовем *регуляризатором* для оператора $A : X \to Y$, если он одновременно является и левым, и правым регуляризатором.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, $\mathbb{Z}_+^n$, $\mathbb{N}^n$ соответственно множества n-мерных мультииндексов и n-мерных мультииндексов с натуральными компонентами. Пусть $\mathscr{N} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — некоторое конечное множество мультииндексов, $\mathscr{R} = \mathscr{R}(\mathscr{N})$ — минимальный выпуклый многогранник, содержащий элементы из $\mathscr{N}$.

Определение 1.4. Многогранник $\mathscr{R}$ назовем *вполне правильным*, если выполняются следующие условия:

а) $\mathscr{R}$ является полным многогранником: $\mathscr{R}$ имеет вершины в начале координат и на каждой оси координат $\mathbb{R}^n$, отличные от начала координат;

б) все компоненты внешних нормалей $(n-1)$-мерных некоординатных граней $\mathscr{R}$ положительные.

Пусть $\mathscr{R}$ — вполне правильный многогранник. Обозначим через $\mathscr{R}_j^{n-1}$, $j = 1, \dots, I_{n-1}$, $(n-1)$-мерные некоординатные грани $\mathscr{R}$ с соответствующими внешними нормалями μ^j такими, что для всех мультииндексов $\alpha \in \mathscr{R}_j^{n-1}$ выполняется $(\alpha : \mu^j) = \frac{\alpha_1}{\mu_1^j} + \dots + \frac{\alpha_n}{\mu_n^j} = 1$, $\partial\mathscr{R} = \bigcup\limits_{j=1}^{I_{n-1}} \mathscr{R}_j^{n-1}$. Для $k > 0$ обозначим $k\mathscr{R} := \{k\alpha = (k\alpha_1, k\alpha_2, \dots, k\alpha_n) : \alpha \in \mathscr{R}\}$.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$P(x, \mathbb{D}) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{1.1}$$

где

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}, \; D_j = i^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}, \; x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \; a_\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим

$$P(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$|\xi|_{\mathscr{R}} = \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} |\xi^\alpha|, \quad |\xi|_{\partial\mathscr{R}} = \sum_{\alpha \in \partial\mathscr{R}} |\xi^\alpha|.$$

Определение 1.5. Дифференциальный оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовем *регулярным в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$1 + |P(x_0, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathscr{R}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Оператор $P(x, \mathbb{D})$ назовем *регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если $P(x, \mathbb{D})$ является регулярным в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$, и *равномерно регулярным в* $\mathbb{R}^n$, если существует постоянная $\delta > 0$ такая, что

$$1 + |P(x, \xi)| \geq \delta |\xi|_{\mathscr{R}} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим примеры таких операторов.

1. Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,\dots,0)$, $(m,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,m)$. В этом случае определения (определение 1.5) соответствуют определениям эллиптичности с $|\xi|_{\partial\mathscr{R}} = |\xi|_m = \sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i^m|$.

2. Пусть $\nu \in \mathbb{N}^n$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,\dots,0)$, $(\nu_1,0,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,\nu_n)$. В этом случае определения (определение 1.5) соответствуют определениям квазиэллиптичности с

$$|\xi|_{\partial\mathscr{R}} = |\xi|_\nu = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{\nu_i}|.$$

3. Пусть $n=2$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$ и $(6,4)$. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = a_1 D_1^8 + a_2 D_1^6 D_2^4 + a_3 D_2^8 + q(x),$$

где $a_1, a_2, a_3 > 0$ и $q \in C(\mathbb{R}^2)$, является регулярным в $\mathbb{R}^2$.

4. Пусть $n=3$ и $\mathscr{R}$ — многогранник Ньютона для точек $(0,0,0)$, $(8,0,0)$, $(0,8,0)$, $(6,4,0)$, $(6,0,6)$, $(0,6,6)$ и $(0,0,12)$. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = D_1^8 + D_1^6 D_2^4 + D_2^8 + D_1^6 D_3^6 + D_2^6 D_3^6 + D_3^{12} + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^3)$, является регулярным в $\mathbb{R}^3$.

5. Пусть $\mathscr{R}$ — вполне правильный многогранник с вершинами, имеющими четные координаты. Тогда

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} D^\alpha + q(x),$$

где $q \in C(\mathbb{R}^n)$, является регулярным в $\mathbb{R}^n$.

Пусть последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ такая, что $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = \infty$ и выполняется неравенство $a_{i+1} < \gamma a_i$, где $\gamma > 0$ и $i = 0,1,\dots$. Аналогично определениям из работ [7, 20], используя последовательность $\{a_i\}_{i=0}^\infty$, определим специальное покрытие $\{W_m\}_{m=1}^\infty$ пространства $\mathbb{R}^n$ с помощью конечного открытого покрытия $\{U_j\}_{j=1}^l$ единичной сферы, где l не зависит от m, а также системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$. Системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$ обладают следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp}\varphi_m \subset \operatorname{supp}\psi_m \subset W_m$;

2) $\psi_m(x)\varphi_m(x) = \varphi_m(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$;

3) для произвольного $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ существует постоянная $C_\alpha > 0$ такая, что

$$|D^\alpha \psi_m(x)| \le C_\alpha (a_{[\frac{m-1}{l}]})^{-|\alpha|},\ |D^\alpha \varphi_m(x)| \le C_\alpha (a_{[\frac{m-1}{l}]})^{-|\alpha|}\ \forall x \in \mathbb{R}^n, m = 1,2,\dots;$$

4) $\sum\limits_{m=1}^{\infty} \varphi_m(x) \equiv 1$.

Обозначим $Q := \{g \in C(\mathbb{R}^n) : g(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$.

Для вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ обозначим через $Q^{\mathscr{R}}$ множество функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\frac{1}{g(x)} \to 0$ при $|x| \to \infty$;

2) $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ для $\beta \in \mathscr{R}\beta \ne 0$ и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \le C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, $j = 1,\dots,I_{n-1}$;

3) для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \mathrm{diam} U_j < \delta$ выполняется

$$\max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \quad \max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{\max}}} a_{[\frac{m-1}{l}]}} < \varepsilon,$$

где $\mu_{\max} = \max\limits_{1\le i\le I_{n-1}} \max\limits_{1\le j\le n} \{\mu_j^i\}$.

Примеры весовых функций из множества $Q^{\mathscr{R}}$ включают как полиномиальные, так и экспоненциальные весовые функции, например, $|x|^l_{\mathscr{R}}$, $\exp(|x|^r_{\mathscr{R}})$ при $l, r > 0$.

Для вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ обозначим через $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ множество функций $g \in Q$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) существует постоянная $C > 0$ такая, что $0 < g(x) \le C$;

2) $D^\beta g(x) \in C(\mathbb{R}^n)$ для $\beta \in \mathscr{R}, \beta \ne 0$, и существует $C_\beta > 0$ такая, что $\frac{|D^\beta g(x)|}{g(x)^{1+(\beta:\mu^j)}} \le C_\beta$ для всех $x \in \mathbb{R}^n, j = 1,\dots, I_{n-1}$;

3) для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0 = m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для всех $m > m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l} \mathrm{diam} U_j < \delta$ выполняется

$$\max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{|g(x)-g(y)|}{g(y)} < \varepsilon, \quad \max_{x,y\in\overline{W}_m} \frac{1}{g(x)^{\frac{1}{\mu_{\min}}} a_{[\frac{m-1}{l}]}} < \varepsilon,$$

где $\mu_{\min} = \min\limits_{1\le i\le I_{n-1}} \min\limits_{1\le j\le n} \{\mu_j^i\}$.

Например, в класс весовых функций $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ входит $|x|^l_{\mathscr{R}}$, где $-\frac{\mu_{\min}}{\mu_{\max}} < l \le 0$.

Для $k \in \mathbb{R}$, вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \{u \in \mathscr{S}' : \|u\|_{k,\mathscr{R},p} := \|F^{-1}(1+|\xi|_{\partial\mathscr{R}})^k Fu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\},$$

где $\mathscr{S}'$ — пространство обобщенных функций медленного роста.

Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\dot{H}^{k,\mathscr{R},p}(\Omega)$ пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{k,\mathscr{R},p}$.

Для $k \in \mathbb{Z}_+$, $q \in Q$, вполне правильного многогранника $\mathscr{R}$ и $1 < p < \infty$ обозначим

$$H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \Big\{u : \|u\|_{H_q^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k,\mathscr{R},p,q} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\Big\}.$$

В случае $k \in \mathbb{Z}_+$ и $q \equiv 1$ введенные пространства совпадают.

Для $k = 1$ обозначим $H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := H_q^{1,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := H^{1,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$. Для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим

$$H_q^{k,\mathscr{R},p}(\Omega) := \Big\{u : \|u\|_{H_q^{k,\mathscr{R},p}(\Omega)} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\Omega)} < \infty\Big\},$$

$$H_{q(x_0)}^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) := \Big\{u : \|u\|_{H_{q(x_0)}^{k,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)} := \|u\|_{k,\mathscr{R},p,q(x_0)} := \sum_{\alpha\in k\mathscr{R}} \|D^\alpha u \cdot q(x_0)^{k-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \infty\Big\}.$$

Введенные пространства являются обобщением мультианизотропных соболевских пространств (см. [6]).

2. Априорные оценки и нормальная разрешимость

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(x,\mathbb{D})$ (см. (1.1)), представимый в следующем виде:

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha(x)D^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \left(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} + a^1_\alpha(x)\right)D^\alpha, \tag{2.1}$$

где $q\in Q$, $a^0_\alpha(x)$, $a^1_\alpha(x)$ — ограниченные непрерывные функции на $\mathbb{R}^n$, $a^1_\alpha(x) = o(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)})$ при $|x|\to\infty$ для всех $\alpha\in\mathscr{R}$.

Легко проверить, что $P(x,\mathbb{D})$ порождает линейный ограниченный оператор, действующий из $H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$.

Для $N>0$ и $x_0\in\mathbb{R}^n$ обозначим

$$K_N(x_0) := \{x\in\mathbb{R}^n : |x-x_0|\le N\}, \quad K_N := K_N(0).$$

В дальнейшем будем использовать следующую теорему, которая является следствием теоремы 7.1 из работы [23].

Теорема 2.1. *Пусть $q\in Q$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1). *Тогда $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)$ является n-нормальным тогда и только тогда, когда существуют постоянные $\kappa>0$ и $N>0$ такие, что имеет место оценка*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n).$$

Теорема 2.2. *Пусть $q\in\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\left|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)\right| = 0$ для всех $\alpha\in\mathscr{R}$. Пусть существуют постоянные $\kappa>0$ и $N>0$ такие, что*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.2}$$

Тогда $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta>0$ и $M>0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x)+|\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^n,\ |x|>M. \tag{2.3}$$

Доказательство. Из теоремы 3.1 работы [22] следует, что $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$. Докажем оценку (2.3).

Пусть $m\in\mathbb{N}$, $x_m\in W_m$, $\xi\in\mathbb{R}^n$ и $\widetilde{u}_m(x) := \exp(i(\xi,x))\psi_m(x)$.

В силу того, что $q\in\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$, для любого $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon)>0$ и $m_0(\varepsilon)>0$ такие, что для всех $m>m_0$ при $\max\limits_{j=1,\dots,l}\mathrm{diam}U_j<\delta$

$$|q(x)-q(y)|\le\varepsilon q(y) \quad \forall x,y\in W_m.$$

Тогда для любого $r>0$ имеет место неравенство

$$|q(x)^r - q(x_m)^r| \le \tau_r(\varepsilon)q(x_m)^r \quad \forall x\in W_m, \tag{2.4}$$

где $\tau_r(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Из неравенства (2.4) и того факта, что $\operatorname{supp}\widetilde{u}_m \subset W_m$, следует, что существует функция $\tau(\varepsilon)$ такая, что $\tau(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и имеют место неравенства

$$\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q} \geq (1-\tau(\varepsilon))\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)}.$$

Для достаточно большого m_0 и при достаточно малом значении $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j$ для $m > m_0$ имеет место неравенство

$$\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q} \geq \frac{1}{2}\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)}. \tag{2.5}$$

Учитывая свойства $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ и то, что $(\gamma : \mu^i) - \frac{|\gamma|}{\mu_{\min}} \leq 0$ для $\gamma \in \mathscr{R}$ и $i = 1,\dots,I_{n-1}$, получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ и $\gamma \in \mathscr{R}$, $\gamma \neq 0$, существуют $\delta(\varepsilon) > 0$ и $m_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для $m > m_0$ и $\max\limits_{j=1,\dots,l} \operatorname{diam} U_j < \delta$ выполняется неравенство

$$\frac{|D^\gamma \psi_m(x)|}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)}} = \frac{|D^\gamma \psi_m(x)| a_{[\frac{m-1}{l}]}^{|\gamma|}}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)-\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}} q(x)^{\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}} a_{[\frac{m-1}{l}]}^{|\gamma|}} \leq \omega_\gamma(\varepsilon), \tag{2.6}$$

где $\mu_{\min} = \min\limits_{1\leq i\leq I_{n-1}} \min\limits_{1\leq j\leq n} \{\mu_j^i\}$ и $\omega_\gamma(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Для $\beta \in \mathscr{R}$ с некоторой постоянной $C_1 > 0$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned}\|D^\beta \widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \geq |\xi^\beta| \|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \\ - C_1 \sum_{0\leq\gamma<\beta} |\xi^\gamma| \|D^{\beta-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}.\end{aligned}$$

Пусть $j = \arg\max\limits_i(\beta : \mu^i)$. Используя оценку (2.6), свойства $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$, нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned}|\xi^\gamma| \|D^{\beta-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-(\beta:\mu^j)} \\ \leq |\xi^\gamma| \omega_{\beta-\gamma}(\varepsilon) q(x_m)^{(\beta-\gamma:\mu^j)} \mu(W_m) q(x_m)^{1-(\beta:\mu^j)} \\ \leq \widetilde{\omega}_{\beta-\gamma}(\varepsilon) |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m),\end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\mu(W_m)$ — мера множества W_m, $\omega_{\beta-\gamma}(\varepsilon)$, $\widetilde{\omega}_{\beta-\gamma}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя оценку (2.7), получим

$$\begin{aligned}\|D^\beta \widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \geq |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \mu(W_m) \\ - \omega_1(\varepsilon) \sum_{0\leq\gamma<\beta} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m),\end{aligned}$$

где $\mu(W_m)$ — мера множества W_m, $\omega_1(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда нетрудно проверить, что выполняется оценка

$$\begin{aligned}\|\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)} \geq \sum_{\beta\in\mathscr{R}} |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \mu(W_m) \\ - \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m),\end{aligned} \tag{2.8}$$

где $\omega_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Имеем

$$\|P(x,\mathbb{D})\widetilde{u}_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha \widetilde{u}_m\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \widetilde{u}_m\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $a^1_\alpha(x) = o(q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)})$ при $|x| \to \infty$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$ и (2.6), (2.7), нетрудно проверить, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется оценка

$$\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^1_\alpha(x) D^\alpha \widetilde{u}_m\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \omega_3(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m), \tag{2.10}$$

где $\omega_3(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Используя (2.6), (2.7), (2.4) и условие $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \big|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\big| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$, по аналогии с доказательством теоремы 3.4 из работы [22] получим, что для достаточно большого m_0 и $m > m_0$ выполняется оценка

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha \widetilde{u}_m\Big\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad \le \Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \|\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\
&\qquad + C_2 \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \sum_{0\le\gamma<\alpha} |\xi^\gamma| \|D^{\alpha-\gamma}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \\
&\qquad + \omega_4(\varepsilon) \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \sum_{0\le\gamma_1+\gamma_2\le\alpha} |\xi^{\gamma_1}| \|D^{\gamma_2}\psi_m\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \\
&\qquad \le \Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \mu(W_m) \\
&\qquad + \widetilde{\omega_4}(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m),
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $\omega_4(\varepsilon) \to 0$, $\widetilde{\omega_4}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Из оценок (2.10), (2.11) для достаточно большого m_0 и всех $m > m_0$ получим

$$\|P\widetilde{u}_m\|_{\mathscr{R},p,q(x_m)} \le \Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \mu(W_m) + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \mu(W_m), \tag{2.12}$$

где $\omega_5(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда из (2.2), применяя (2.8) и (2.12), получим

$$\sum_{\beta\in\mathscr{R}} |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} - \omega_2(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \\ \leq \kappa\Big(\Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \\ + \omega_5(\varepsilon) \sum_{\gamma\in\mathscr{R}} |\xi^\gamma| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\gamma:\mu^i)} \Big).$$

Из полученной оценки, выбирая ε достаточно малым, получим, что для достаточно большого m_0 при $m > m_0$ с некоторой постоянной $C_3 > 0$ выполняется неравенство

$$C_3 \sum_{\beta\in\mathscr{R}} |\xi^\beta| q(x_m)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)} \leq \Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big|.$$

Из последнего неравенства, учитывая, что $\mathscr{R}$ вполне правильный многогранник, получим, что существует постоянная $\delta > 0$ такая, что для достаточно большого m_0 при $m > m_0$ имеет место неравенство

$$\Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x_m) q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \geq \delta(q(x_m) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}).$$

Так как последнее неравенство выполняется для всех x_m при $m > m_0$, заключаем, что существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \geq \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \quad \square$$

Далее установим, что полученные условия на символ оператора также являются достаточными для выполнения априорной оценки (2.2) в рассматриваемых пространствах.

Теорема 2.3. *Пусть $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор (2.1) с коэффициентами, удовлетворяющими*

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x,y\in\overline{W_m}} \big| a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y) \big| = 0$$

для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. Пусть $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big| \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha \Big| \geq \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{2.13}$$

Тогда существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \leq \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u \in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.14}$$

Доказательство. Обозначим

$$P_0(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} D^\alpha,$$

$$P^m(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} \big[\psi_m(x)\big(a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} - a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\big) + a^0_\alpha(x_m)q(x_m)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}\big]D^\alpha, \quad m=1,2,\dots.$$

Учитывая свойства системы функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, получим, что для $\gamma\in\mathscr{R}$, $\gamma\neq 0$, и произвольного $\varepsilon>0$ существуют $\delta(\varepsilon)>0$ и $m_0(\varepsilon)>0$ такие, что для всех $m>m_0$ и $\max\limits_{j=1,\dots,l}\operatorname{diam}U_j<\delta$ получим неравенство

$$\frac{|D^\gamma\varphi_m(x)|}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)}} = \frac{|D^\gamma\varphi_m(x)|a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}}{q(x)^{(\gamma:\mu^i)-\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}q(x)^{\frac{|\gamma|}{\mu_{\min}}}a^{|\gamma|}_{[\frac{m-1}{l}]}} \le \omega_\gamma(\varepsilon), \tag{2.15}$$

где $\omega_\gamma(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Аналогичные неравенства выполняются для функций $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$.

Используя эти оценки, лемму 3.1 из работы [24] и условия на коэффициенты $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\big|a^0_\alpha(x)-a^0_\alpha(y)\big|=0$, аналогично доказательству теоремы 2.2 из работы [12] можно проверить, что при достаточно большом m_0 для всех $m>m_0$ операторы $P^m(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)\to L_p(\mathbb{R}^n)$ имеют ограниченные обратные операторы, причем нормы этих обратных операторов равномерно ограничены благодаря условию (2.13).

Так как $P^m(\varphi_m u) = P_0(\varphi_m u)$ для всех $u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ и $m>m_0$, с некоторой постоянной $C_1>0$ выполняется оценка

$$\|\varphi_m u\|_{\mathscr{R},p,q} \le C_1\|P^m(\varphi_m u)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le C_1\|P_0(\varphi_m u)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n).$$

Используя свойства функций $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ и оценку (2.15), можно показать, что при достаточно большом m_0 и достаточно малом $\max\limits_{j=1,\dots,l}\operatorname{diam}U_j$ для $m>m_0$ существуют такие константы $C_2, C_3>0$, что имеет место оценка

$$\begin{aligned}\|\varphi_m P_0 u - P_0(\varphi_m u)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} &\le C_2\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}\sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\gamma|>0} a^0_\alpha(x)q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)}D^\beta u D^\gamma\varphi_m\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le C_3\Big\|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}}\sum_{\beta+\gamma=\alpha,|\gamma|>0} a^0_\alpha(x)D^\beta u D^\gamma\varphi_m\frac{1}{q(x)^{\max\limits_i(\gamma:\mu^i)}}q(x)^{1-\max\limits_i(\beta:\mu^i)}\Big\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} \\ &\le \omega(\varepsilon)\|u\|^p_{H^{\mathscr{R},p}_q(W_m)}.\end{aligned}$$

где $\omega(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$.

Суммируя по всем $m>m_0$ и учитывая свойства $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$, $\{W_m\}_{m=1}^\infty$, заключаем, что с некоторой постоянной $C_4>0$ выполняется оценка

$$\sum_{m=m_0+1}^\infty \|\varphi_m u\|^p_{\mathscr{R},p,q} \le C_4\big(\|P_0 u\|^p_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \omega(\varepsilon)\|u\|^p_{\mathscr{R},p,q}\big) \quad \forall u\in H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n). \tag{2.16}$$

Продолжение доказывается аналогично схеме из теоремы 2.3 в работе [20]. □

Из теорем 2.1–2.3 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Пусть* $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ — *дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими* $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \big|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\big| = 0$ *для всех* $\alpha \in \mathscr{R}$.

Тогда оператор $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ *является* n*-нормальным тогда и только тогда, когда* $P(x,\mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{2.17}$$

Замечание 2.1. Для функции $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ такой, что $q(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$, из следствия 2.1 имеем, что рассматриваемый оператор $P(x,\mathbb{D})$ не является n-нормальным как оператор из $H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$, но является n-нормальным как оператор из $H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ в $L_p(\mathbb{R}^n)$. Для оператора только с главной частью

$$P(x,\mathbb{D}) = \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} a_\alpha(x) D^\alpha : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$$

из теоремы 2.2 следует, что априорная оценка (2.2) не может выполняться. Тогда по теореме 2.1 оператор не является n-нормально разрешимым. Теорема 2.2 показывает, что для выполнения априорной оценки вида (2.2) наряду с регулярностью $P(x,\mathbb{D})$ необходимым также является условие (2.3). В работе [20] априорные оценки установлены в случае весовых пространств $H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in Q^{\mathscr{R}}$.

3. Критерий фредгольмовости

Теорема 3.1. *Пусть* $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ *и* $P(x,\mathbb{D})$ — *дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими*

$$\lim_{m\to\infty} \max_{x,y\in\overline{W_m}} \big|a^0_\alpha(x) - a^0_\alpha(y)\big| = 0$$

для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. *Оператор* $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}_q(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда* $P(x,\mathbb{D})$ *является регулярным в* $\mathbb{R}^n$ *и существуют постоянные* $\delta > 0$ *и* $M > 0$ *такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a^0_\alpha(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta\left(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{3.1}$$

Доказательство. Поскольку из фредгольмовости оператора сразу имеем его n-нормальность, необходимость утверждения следует из теорем 2.1 и 2.2.

Докажем достаточность. Приведем построение левого и правого регуляризаторов.

Пусть $x_m \in W_m$, $m = 1, 2, \ldots$. Обозначим

$$P^m(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\mathscr{R}} (\psi_m(x)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)) + a_\alpha(x_m)) D^\alpha,$$

$$P^{m,0}(x,\mathbb{D}) := \sum_{\alpha\in\partial\mathscr{R}} (\psi_m(x)(a_\alpha(x) - a_\alpha(x_m)) + a_\alpha(x_m)) D^\alpha,$$

$$R^{m,0} := F^{-1}\frac{|\xi|_{\partial\mathscr{R}}}{(1+|\xi|_{\partial\mathscr{R}})P^{m,0}(x_m,\xi)}F.$$

Пусть $m_0 \in \mathbb{N}$. Так как $P(x,\mathbb{D})$ регулярен в $\mathbb{R}^n$, то при достаточно малых диаметрах $\{W_m\}_{m=1}^{m_0}$ из леммы 3.1 работы [22] следует, что для $m \le m_0$ имеет место представление

$$R^{m,0}P^m(x,\mathbb{D}) = I + T_1^m + T_2^m, \tag{3.2}$$

где $T_1^m : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, а оператор $T_2^m : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2^m\| < 1$.

Обозначим

$$R^m := (I + T_2^m)^{-1}R^{m,0}.$$

Аналогично доказательству теоремы 2.3 можно взять m_0 достаточно большим, так что для $m > m_0$ операторы $P^m : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ имеют равномерно ограниченные обратные операторы $R^m : L_p(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим

$$Rf := \sum_{l=0}^{\infty}\psi_l R^l(\varphi_l f), \quad f \in L_p(\mathbb{R}^n). \tag{3.3}$$

Аналогично доказательству теоремы 3.6 из работы [22] нетрудно проверить, что имеет место равенство

$$RP(x,\mathbb{D})u = u + \phi T_1 u + T_2 u,$$

где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $T_1 : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$, $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, а оператор $T_2 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$.

Так как $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}\phi \subset K_{N_1}$ для некоторой постоянной $N_1 > 0$ и $T_1 : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$, то существуют постоянные $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$ такие, что

$$\begin{aligned}\|\phi T_1 u\|_{\mathscr{R},p,q} &\le C_1\|\phi T_1 u\|_{\dot H^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_2\|\phi T_1 u\|_{\dot H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(K_{N_1})}\\ &\le C_3\|u\|_{\dot H^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_4\|u\|_{H_q^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})} \le C_5\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \quad \forall u \in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

Из последней оценки в силу компактности вложений $\dot H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(K_{N_1})$ в $\dot H^{\mathscr{R},p}(K_{N_1})$ получим, что $\phi T_1 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ компактен.

Так как оператор $T_2 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\|T_2\| < 1$, существует $(I+T_2)^{-1}$. Применяя этот оператор к обеим частям, получим

$$\widetilde{R}P(x,\mathbb{D})u = u + \widetilde{T}u,$$

где $\widetilde{R} := (I+T_2)^{-1}R$, а $\widetilde{T} := (I+T_2)^{-1}\phi T_1 : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ является компактным оператором, так как ϕT_1 компактен.

Аналогичным образом строится правый регуляризатор. Из существования левого и правого регуляризаторов, используя теорему 3.14 из [25], заключаем, что $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ является фредгольмовым оператором. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $q \equiv 1$ и $P(x,\mathbb{D})$ — регулярный в $\mathbb{R}^n$ дифференциальный оператор вида* (2.1), *коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:* $\lim\limits_{m\to\infty}\max\limits_{x,y\in\overline{W_m}}\left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\right| = 0$ *для всех $\alpha \in \mathscr{R}$ и выполняется* (3.1).

Тогда ядро, коядро и индекс оператора не зависят от p.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 и построения регуляризатора существует оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n) \to H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ такой, что $RP(x,\mathbb{D})u = u + \phi T u$, где $\phi \in C_0^\infty(K_N)$ для некоторого $N > 0$, не зависящего от p, $T : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to H^{1+\sigma,\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n)$ с некоторой $\sigma = \sigma(\mathscr{R}) > 0$.

Используя последнее представление и следствие 3.2 из работы [24], нетрудно проверить, что ядро оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ содержится в $C^\infty(K_N)$, следовательно, не зависит от p. Аналогично можно доказать, что коядро не зависит от p. Тем самым получили, что индекс оператора $P(x,\mathbb{D}) : H^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ не зависит от p. □

Замечание 3.1. В общем случае для других шкал весовых соболевских пространств ядро, коядро и индекс оператора могут зависеть от p, как это установлено, в частности, в работах Локкарта, Маккоуна [9] и Г. В. Демиденко [16].

Из теорем 2.2, 2.3 и 3.1 непосредственно следует

Теорема 3.2. *Пусть $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\right| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ фредгольмов;*

(2) *существуют постоянные $\kappa > 0$ и $N > 0$ такие, что*

$$\|u\|_{\mathscr{R},p,q} \le \kappa(\|Pu\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_p(K_N)}) \quad \forall u \in H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n);$$

(3) *$P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что*

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha^0(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M.$$

В работе [21] получен аналогичный критерий фредгольмовости для регулярных гипоэллиптических операторов на шкале весовых пространств $H_q^{\mathscr{R},p}$ с неограниченной весовой функцией $q \in Q^{\mathscr{R}}$, а также исследованы их спектральные характеристики.

Теорема 3.3. *Пусть $q \in Q^{\mathscr{R}}$ и $P(x,\mathbb{D})$ — дифференциальный оператор* (2.1) *с коэффициентами, удовлетворяющими $\lim\limits_{m\to\infty} \max\limits_{x,y\in\overline{W_m}} \left|a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y)\right| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$.*

Тогда оператор $P(x,\mathbb{D}) : H_q^{\mathscr{R},p}(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $P(x,\mathbb{D})$ является регулярным в $\mathbb{R}^n$ и существуют постоянные $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что

$$\Big|\sum_{\alpha\in\mathscr{R}} a_\alpha^0(x) q(x)^{1-\max\limits_i(\alpha:\mu^i)} \xi^\alpha\Big| \ge \delta(q(x) + |\xi|_{\partial\mathscr{R}}) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,\ |x| > M. \tag{3.4}$$

При этом если $P(x,\mathbb{D})$ регулярный в $\mathbb{R}^n$ и выполняется (3.4), *то для произвольного $\lambda \in \mathbb{C}$ оператор $P - \lambda I$ фредгольмов и спектр $\sigma(P)$ имеет одну из следующих форм:*

(1) *$\sigma(P) = \mathbb{C}$;*

(2) $\sigma(P)$ — *дискретное множество, при этом* $\operatorname{ind}\bigl(P; H_q^{\mathscr{R},p}\bigr) = 0$.

Спектральные свойства операторов из теоремы 3.3 отличаются от случая $q \in \widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$: существенный спектр для таких операторов является пустым множеством. В случае $q \equiv 1$ из весового класса $\widetilde{Q}^{\mathscr{R}}$ на основе теоремы 3.1 нетрудно получить описание существенного спектра.

Предложение 3.1. *Пусть $q \equiv 1$ и $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в $\mathbb{R}^n$ дифференциальный оператор (2.1) и существуют постоянные $\widetilde{a}_\alpha$ такие, что $a_\alpha(x) \to \widetilde{a}_\alpha$ при $|x| \to \infty$, $\alpha \in \mathscr{R}$. Тогда*

$$\sigma_{ess}(P) = \Bigl\{ \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} \widetilde{a}_\alpha \xi^\alpha : \xi \in \mathbb{R}^n \Bigr\}.$$

При этом для $\lambda \notin \sigma_{ess}(P)$ имеет место $\operatorname{ind}(P - \lambda I) = 0$.

Предложение 3.2. *Пусть $q \equiv 1$ и $P(x, \mathbb{D})$ — регулярный в $\mathbb{R}^n$ дифференциальный оператор (2.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условиям $\lim\limits_{m \to \infty} \max\limits_{x,y \in \overline{W_m}} \bigl| a_\alpha^0(x) - a_\alpha^0(y) \bigr| = 0$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$.*

Тогда

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(P) = \bigcup_{(\widetilde{a}_\alpha) \in \mathscr{A}} \left\{ \sum_{\alpha \in \mathscr{R}} \widetilde{a}_\alpha \xi^\alpha \,:\, \xi \in \mathbb{R}^n \right\},$$

где $\mathscr{A}$ — множество всех семейств $(\widetilde{a}_\alpha)_{\alpha \in \mathscr{R}}$, для которых существует такая последовательность $\{x_k\}_{k=1}^\infty$, что $|x_k| \to \infty$ и $a_\alpha^0(x_k) \to \widetilde{a}_\alpha$ при $k \to \infty$ для всех $\alpha \in \mathscr{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.
2. *Никольский С. М.* Первая краевая задача для одного общего линейного уравнения // Докл. АН СССР. 1962. Т. 146, № 4. С. 767–769.
3. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 59–80.
4. *Friberg J.* Multi-quasielliptic polynomials // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 1967. V. 21. P. 239–260.
5. *Volevich L. R., Gindikin S. G.* The method of Newton′s polyhedron in the theory of partial differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992.
6. *Ghazaryan H. G.* The Newton polyhedron, spaces of differentiable functions and general theory of differential equations // Armenian J. Math. 2017. V. 9, N 2. P. 102–145.
7. *Багиров Л. А.* Эллиптические уравнения в неограниченной области // Мат. сб. 1971. Т. 86. С. 121–139.
8. *McOwen R. C.* On elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Commum. Partial Differ. Equ. 1980. V. 5, N 8-9. P. 913–933.
9. *Lockhart R. B., McOwen R. C.* On elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ // Acta Math. 1983. V. 150. P. 125–135.
10. *Schrohe E.* Spectral invariance, ellipticity, and the Fredholm property for pseudodifferential operators on weighted Sobolev spaces // Ann. Global Anal. Geom. 1992. V. 10, N 3. P. 237–254.
11. *Багиров Л. А.* Априорные оценки, теоремы существования и поведение на бесконечности решений квазиэллиптических уравнений в $\mathbb{R}^n$ // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 4. С. 475–492.
12. *Karapetyan G. A., Darbinyan A. A.* Index of semielliptic operator in $\mathbb{R}^n$ // Proc. NAS Armenia. Math. 2007. V. 42, N 5. P. 33–50.
13. *Darbinyan A. A., Tumanyan A. G.* On index stability of Noetherian differential operators in anisotropic Sobolev spaces // Euras. Math. J. 2019. V. 10, N 1. P. 9–15.

14. *Демиденко Г. В.* О квазиэллиптических операторах в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1028–1037.
15. *Демиденко Г. В.* Интегральные операторы, определяемые квазиэллиптическими уравнениями. I // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 52–67.
16. *Демиденко Г. В.* Квазиэллиптические операторы и уравнения, не разрешенные относительно старшей производной // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 3. С. 15–26.
17. *Boggiatto P., Buzano E., Rodino L.* Multi-quasi-elliptic operators in $\mathbb{R}^n$ // Partial Differential Operators and Mathematical Physics (Proc. Holzau). 1995. P. 31–42.
18. *Buzano E., Ziggioto A.* Weyl formula for multi-quasi-elliptic operators of Schrödinger type // Ann. Mat. 2001. V. 180. P. 223–243.
19. *Buzano E., Ziggioto A.* On the essential spectrum of hypoelliptic pseudodifferential operators // Math. Nachr. 2008. V. 281, N 1. P. 5–24.
20. *Tumanyan A. G.* A priori estimates and Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators // Sib. Adv. Math. 2023. V. 33, N 2. P. 151–164.
21. *Tumanyan A. G.* Normal solvability and Fredholm properties for special classes of hypoelliptic operators // Electron. J. Differ. Equ. Conf. 2025. V. 26. P. 201–217.
22. *Tumanyan A. G.* Fredholm criteria for a class of regular hypoelliptic operators in multianisotropic spaces in $\mathbb{R}^n$ // Ital. J. Pure Appl. Math. 2022. V. 48. P. 1009–1028.
23. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1971.
24. *Tumanyan A. G.* Fredholm property of regular hypoelliptic operators on the scales of multianisotropic spaces // ITM Web Conf. (ICAMNM 2022). 2022. V. 49. P. 1–13.
25. *Edmunds D. E., Evans W. D.* Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.

Поступила в редакцию 11 января 2026 г.
После доработки 11 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Туманян Ани Гагиковна (ORCID 0000-0003-3991-7900)
Российско-Армянский Университет
ул. О. Эмина 123, Ереван 0051, Армения;
Siemens Industry Software
ул. Алабяна 16, Ереван 0038, Армения
`ani.tumanyan@rau.am`

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 517.9

ПРИНЦИП СУБОРДИНАЦИИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ХИЛФЕРА

В. Е. Федоров, А. С. Скорынин

Аннотация. Принцип субординации для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах означает, что порождение линейным оператором A сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения порядка влечет порождение им разрешающего семейства операторов уравнения меньшего порядка. Ранее такой принцип был доказан для уравнений с производной Герасимова — Капуто, в том числе распределенной, дискретно распределенной, для уравнений с производной Римана — Лиувилля. В данной работе доказан принцип субординации по порядку производной для уравнений с дробными производными Хилфера вне зависимости от типов этих производных. Получены достаточные условия выполнения обратного принципа субординации. Кроме того, доказан принцип субординации по типу производных Хилфера в уравнениях, порядки которых равны. Абстрактные результаты использованы при изучении начальных задач в пространстве равномерно непрерывных и ограниченных на прямой функций для уравнений с дифференциальным или разностным по пространственным переменным оператором A для доказательства существования и единственности их решения и получения вида решения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.213

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Хилфера, разрешающее семейство операторов, принцип субординации, преобразование Лапласа, функция Райта, уравнение в частных производных.

Посвящается 70-летию
Геннадия Владимировича Демиденко

§ 1. Введение

Дробное интегро-дифференциальное исчисление в последние годы активно используется в задачах математического моделирования [1–3] и поэтому вызывает большой интерес у исследователей [4–6]. Его активно развивающимся направлением является теория разрешающих семейств операторов для уравнений с дробными производными в банаховых пространствах. Результаты этой теории позволяют с помощью операторов таких семейств получать представления решений начальных задач для линейных однородных и неоднородных уравнений, исследовать вопросы однозначной разрешимости начальных задач для квазилинейных уравнений методом сжимающих отображений, изучать различные аспекты качественного поведения решений. Абстрактные результаты для уравнений в банаховых или более общих локально выпуклых пространствах находят

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-20002, https://rscf.ru/project/24-11-20002/ и Правительства Челябинской области.

свои многочисленные приложения при исследовании начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных [7–9]. Теория разрешающих семейств операторов является обобщением теории полугрупп операторов и теории операторных косинус-функций для уравнений первого и второго порядков соответственно на случай интегральных, интегро-дифференциальных уравнений и уравнений с дробными производными [10–13].

Разрешающее семейство дифференциального (интегро-дифференциального) уравнения в банаховом пространстве состоит из операторов $S(t)$, зависящих от параметра t, которые отображают начальные данные задачи в решение соответствующей начальной задачи в момент времени t. Ключевыми результатами о разрешающих семействах операторов уравнения в банаховом пространстве $\mathscr{Z}$

$$D^\alpha z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1}$$

где D^α — некоторая дробная производная порядка α, являются теоремы об условиях на оператор A в терминах расположения его резольвентного множества и оценок на резольвенту, необходимых и достаточных для существования, к примеру, сильно непрерывного или аналитического в секторе, содержащем положительную полуось, разрешающего семейства $\{S(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$. Такие результаты для сильно непрерывных и аналитических разрешающих семейств операторов уравнения с дробной производной Герасимова — Капуто получены в работах [12, 14] (см. также [15]), для уравнений с производной Римана — Лиувилля — в работах [16] (аналитический случай), [17, 18] (сильно непрерывный случай), для уравнений с производной Хилфера — в [19] (аналитический случай), в работе [20] (сильно непрерывный случай).

Принцип субординации для уравнений вида (1) означает, что существование сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения (1) при $\alpha = \alpha_1$ влечет существование разрешающего семейства уравнения (1) с тем же оператором A при $\alpha = \alpha_2 < \alpha_1$. Для таких уравнений с дробной производной Герасимова — Капуто принцип субординации доказан в работах [12, 14, 21], для уравнений с производной Римана — Лиувилля — в [22], для различных уравнений с распределенной, в том числе дискретно, производной Герасимова — Капуто — в работах [23–25], для интегральных уравнений Вольтерры — в монографии [11]. Принцип субординации по двум параметрам α и γ в уравнениях вида $D^\alpha z(t) + (-A)^\gamma z(t) = 0$ изучен в работах [26, 27].

В данной работе исследуется принцип субординации для уравнений

$$D^{\alpha,\beta} z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{2}$$

где $D^{\alpha,\beta}$ — производная Хилфера [28, с. 113] порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$, и типа $\beta \in [0,1]$, которая для достаточно гладкой функции z имеет вид $D^{\alpha,\beta} z(t) = J^{\beta(m-\alpha)} D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)} z(t)$, где J^δ — оператор дробного интегрирования Римана — Лиувилля порядка $\delta > 0$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m.

В § 2 введено определение регуляризованной производной Хилфера, приведены вспомогательные результаты, доказана новая теорема 3 о существовании сильно непрерывного разрешающего семейства операторов уравнения (2), используемая в дальнейших рассуждениях. В § 3 приведены формулировка и доказательство основного результата данной работы — теоремы о принципе субординации по параметру α вне зависимости от типов β_1 и β_2 производных Хилфера в двух рассматриваемых уравнениях. В § 4 найдены достаточные условия выполнения обратной теоремы о принципе субординации. В § 5 доказан принцип субординации по параметру β при равных значениях порядка $\alpha_1 = \alpha_2$ дробных производных Хилфера. Это обобщение полученного ранее в работе [22] результата о том, что всякий оператор A, порождающий сильно непрерывное разрешающее семейство уравнения (1) с производной Римана — Лиувилля, порождает и сильно непрерывное разрешающее семейство уравнения (1) с производной Герасимова — Капуто. В последнем параграфе полученные результаты используются для рассмотрения некоторых начальных задач для уравнений вида (2) с $\alpha < 1$ и дифференциальным по пространственной переменной или разностным оператором A в пространстве $\mathscr{X}$ равномерно непрерывных и ограниченных на прямой функций, порождающим сильно непрерывную разрешающую полугруппу уравнения (1) при $\alpha = 1$. С помощью теоремы о принципе субординации доказана однозначная разрешимость рассмотренных задач и получены представления их решений.

§ 2. Сильно непрерывные и аналитические разрешающие семейства операторов

Пусть $\mathscr{X}$ — банахово пространство, $h \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{X})$. *Дробным интегралом Римана — Лиувилля порядка $\beta > 0$ для функции h* называется

$$J^\beta h(t) := \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^t (t-s)^{\beta-1}h(s)\,ds, \quad t > 0.$$

Дробная производная Римана — Лиувилля порядка α имеет вид $D^\alpha h(t) := D^m J^{m-\alpha}h(t)$, где $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, D^m — оператор дифференцирования целого порядка m. При $\alpha>0$ будем использовать обозначение $J^\alpha h(t) = D^{-\alpha}h(t)$.

Обозначим $D^\gamma h(0) := \lim\limits_{t\to 0+} D^\gamma h(t)$, $\gamma\in\mathbb{R}$. *Производную Хилфера* порядка $\alpha\in(m-1,m]$, $m\in\mathbb{Z}$, и типа $\beta\in[0,1]$ определим как

$$\begin{aligned} D^{\alpha,\beta}h(t) &= D^{m-\beta(m-\alpha)}\left(J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)\frac{t^k}{k!}\right) \\ &= D^m\left(J^{m-\alpha}h(t) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)t^{k+\beta(m-\alpha)}}{\Gamma(k+\beta(m-\alpha)+1)}\right). \end{aligned} \tag{3}$$

Для достаточно гладкого h равенство (3) влечет стандартную форму производной Хилфера $D^{\alpha,\beta}h(t) = J^{\beta(m-\alpha)}D^m J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h(t)$ [28, с. 113].

Замечание 1. Понятно, что при $\beta = 0$ дробная производная Хилфера совпадает с дробной производной Римана — Лиувилля, а при $\beta = 1$ — с дробной производной Герасимова — Капуто.

Замечание 2. При $\alpha = m$ имеем $D^{\alpha,\beta} = D^{m,\beta} = D^m$ при любом $\beta\in[0,1]$.

Преобразование Лапласа для функции $h:\mathbb{R}_+\to\mathscr{X}$ обозначим через $\widehat{h}$ или $\mathfrak{L}[h]$. Далее всюду будем использовать обозначение $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+\cup\{0\}$ и главную ветвь степенной функции комплексного переменного.

Лемма 1 [19]. *Пусть $m-1<\alpha\le m\in\mathbb{N}$, $\beta\in[0,1]$, $h:\mathbb{R}_+\to\mathscr{X}$ имеет преобразование Лапласа, $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}h\in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{X})$. Тогда*

$$\mathfrak{L}[D^{\alpha,\beta}h](\lambda) = \lambda^\alpha\mathfrak{L}[h](\lambda) - \sum_{k=0}^{m-1} D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}h(0)\lambda^{m-1-k-\beta(m-\alpha)}.$$

Символом $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$ будем обозначать банахово пространство всех линейных ограниченных операторов на пространстве $\mathscr{Z}$, а через $\mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathscr{Z}$ и действующих в это пространство. Снабдим область определения D_A оператора $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ нормой его графика $\|\cdot\|_{D_A} := \|\cdot\|_{\mathscr{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathscr{Z}}$ и получим тем самым банахово пространство D_A.

Через $AC^m(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$ обозначим множество всех функций $h \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{Z})$, имеющих абсолютно непрерывную на каждом отрезке $[t_0,T] \subset \mathbb{R}_+$ производную порядка $m-1$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_k, \quad k = 0,1,\dots,m-1, \tag{4}$$

для линейного уравнения

$$D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t), \ \ t \in \mathbb{R}_+, \tag{5}$$

где $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$. *Решением задачи* (4), (5) будем называть такую функцию $z \in C(\mathbb{R}_+;D_A) \cap L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, что $J^{(1-\beta)(m-\alpha)}z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+;\mathscr{Z}) \cap AC^m(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, $D^{\alpha,\beta}z \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, выполняются условия (4) и равенство (5) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Пусть $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. Семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *разрешающим семейством типа* $\omega \ge 0$ *для уравнения* (5), если выполняются следующие условия:

(i) существует такое $K > 0$, что $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$;

(ii) $S(t)z_0 \in C(\mathbb{R}_+;\mathscr{Z})$, $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0+} J^{(1-\beta)(m-\alpha)}S(t) = I$ при любом $z_0 \in \mathscr{Z}$;

(iii) $S(t)[D_A] \subset D_A$, $S(t)Az_0 = AS(t)z_0$ при всех $z_0 \in D_A$, $t \in \mathbb{R}_+$;

(iv) для любого $z_0 \in D_A$ функция $S(t)z_0$ является решением задачи типа Коши $D^{-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = z_0$, $D^{k-(1-\beta)(m-\alpha)}z(0) = 0$, $k = 1,2,\dots,m-1$, для уравнения (5).

Нетрудно показать, что $\sum\limits_{k=0}^{m-1} J^kS(t)z_k$ при любых $z_0,z_1,\dots,z_{m-1} \in D_A$ является решением задачи (4), (5).

Замечание 3. Для $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$ разрешающее семейство операторов уравнения (5) имеет вид (см., например, [29])

$$S(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha l+(1-\beta)(\alpha-m)}A^l}{\Gamma(\alpha l + (1-\beta)(\alpha-m)+1)} = t^{(1-\beta)(\alpha-m)}E_{\alpha,(1-\beta)(\alpha-m)+1}(t^\alpha A),$$

$t \in \mathbb{R}_+$, где $E_{\alpha,\beta}(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}$ — функция Миттаг-Леффлера.

При $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$ оператор $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$ будем называть *оператором класса* $\mathscr{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega)$ при $K > 0$, $\omega \ge 0$, если выполняются следующие два условия:

(i) если $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, то $\lambda^\alpha \in \rho(A) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu - A)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})\}$;

(ii) при всех $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ и $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\left\| \frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}) \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}.$$

Введем обозначения

$$\mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega) := \bigcup_{K>0} \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(K,\omega), \quad \mathscr{C}_{\alpha,\beta} := \bigcup_{\omega\ge 0} \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega).$$

Теорема 1 [20]. *Пусть* $\beta \in [0,1]$, $\alpha > 2$. *Тогда* $\mathscr{C}_{\alpha,\beta} \subset \mathscr{L}(\mathscr{Z})$.

Пусть $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$, $H_\beta(\lambda) := \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ для $\operatorname{Re}\lambda > \omega$, при $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ определим операторы

$$\mathscr{S}_n(t) := e^{-nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(n(n+\omega)t)^{k+1}}{k!(k+1)!}H_\beta^{(k)}(n+\omega).$$

Теорема 2 [20]. *Пусть* $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. *Тогда существует разрешающее семейство операторов уравнения* (5) *типа* $\omega \ge 0$ *в том и только в том случае, когда* $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$. *При этом* $S(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\mathscr{S}_n(t)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}_+$ *и существует преобразование Лапласа* $\widehat{S}(\lambda) = \lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ *при* $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Теорема 3. *Пусть* $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$. *Существует разрешающее семейство операторов* $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *типа* $\omega \ge 0$ *для уравнения* (5), *если и только если* $\{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\mu > \omega\} \subset \rho(A)$ *и имеется некоторое сильно непрерывное семейство операторов* $\{S_0(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *такое, что*

$$\exists K > 0\, \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \|S_0(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Kt^{-(1-\beta)(m-\alpha)}e^{\omega t}$$

и

$$\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}z_0 = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}S_0(t)z_0\,dt$$

для всех $z_0 \in \mathscr{Z}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. *В таком случае* $S(t) = S_0(t)$ *при всех* $t \in \mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть существует семейство $\{S_0(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ операторов с соответствующими свойствами. Тогда

$$\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}z_0) = \int\limits_0^\infty (-t)^n e^{-\lambda t}S_0(t)z_0\,dt, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\left\|\frac{d^n}{d\lambda^n}(\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1})\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le K\int\limits_0^\infty e^{(\omega-\operatorname{Re}\lambda)t}t^{n-(1-\beta)(m-\alpha)}\,dt$$
$$= \frac{K\Gamma((1-\beta)(\alpha-m)+n+1)}{(\operatorname{Re}\lambda-\omega)^{(1-\beta)(\alpha-m)+n+1}}, \quad \operatorname{Re}\lambda > \omega,\ n \in \mathbb{N}_0.$$

Следовательно, $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(\omega)$ и по теореме 2 существует разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ типа $\omega \ge 0$, а его преобразование Лапласа имеет вид $\lambda^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\lambda^\alpha - A)^{-1}$. Тогда равенство $S \equiv S_0$ следует из единственности обратного преобразования Лапласа.

Обратно, если существует разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ операторов, то можно взять $S_0 \equiv S$. $\square$

Обозначим $S_{\theta,\omega} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu-\omega)| < \theta, \mu \ne \omega\}$ при $\theta \in [\pi/2, \pi]$, $\omega \ge 0$, $\Sigma_\psi := \{t \in \mathbb{C} : |\arg t| < \psi, t \ne 0\}$ при $\psi \in (0,\pi]$.

Разрешающее семейство операторов называется *аналитическим*, если оно аналитически продолжимо в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Аналитическое в Σ_{ψ_0} разрешающее семейство $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ имеет тип

(ψ_0, ω_0) при $\psi_0 \in (0, \frac{\pi}{2}]$, $\omega_0 \geq 0$, если для любых $\psi \in (0, \psi_0)$, $\omega > \omega_0$ существует такое $C(\psi, \omega) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_\psi$ справедливо неравенство $\|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C(\psi, \omega)e^{\omega \operatorname{Re} t}$.

Следуя [12], рассмотрим класс $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$ при некоторых $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\omega_0 \geq 0$ как множество всех операторов $A \in \mathscr{C}l(\mathscr{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) при любом $\lambda \in S_{\theta_0, \omega_0}$ выполняется $\lambda^\alpha \in \rho(A)$;

(ii) при любом $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_0\right)$, $\omega > \omega_0$ существует такое $K(\theta, \omega) > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta, \omega}$

$$\|(\lambda^\alpha - A)^{-1}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K(\theta, \omega)}{|\lambda|^\alpha}.$$

Теорема 4 [19]. *Пусть $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0, 1]$. Тогда уравнение* (5) *имеет аналитическое разрешающее семейство операторов $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ типа $\left(\theta_0 - \frac{\pi}{2}, \omega_0\right)$, если и только если $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$. При этом*

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\mu^\alpha I - A)^{-1} e^{\mu t}\, d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\Gamma = \{\delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\} \cup \{re^{i\theta} : r \in [\delta, \infty)\} \cup \{re^{-i\theta} : r \in [\delta, \infty)\}$ при некоторых $\delta > 0$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_0\right)$.

Замечание 4. Из определения класса $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0)$ и теоремы 4 следует, что существование аналитического разрешающего семейства уравнения (5) не зависит от типа $\beta \in [0, 1]$ производной Хилфера. Обозначим

$$\mathscr{A}_\alpha := \bigcup_{\substack{\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi], \\ \omega_0 \geq 0}} \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, \omega_0).$$

§ 3. Принцип субординации по порядку производной Хилфера

Пусть $\alpha_1 > \alpha_2 > 0$, $\beta_1, \beta_2 \in [0, 1]$. Рассмотрим два уравнения с одним и тем же оператором A

$$D^{\alpha_1, \beta_1} z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{6}$$

$$D^{\alpha_2, \beta_2} z(t) = Az(t), \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7}$$

Найдем условия, при которых существование разрешающего семейства уравнения (6) влечет существование разрешающего семейства операторов для уравнения младшего порядка (7).

Разрешающее семейство для уравнения (6) и для уравнения (7) будем обозначать через $\{S_1(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ и $\{S_2(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ соответственно.

Если $\alpha_1 > 2$, $A \in \mathscr{C}_{\alpha_1, \beta_1}$, то в силу теоремы 1 оператор A ограничен. А значит, с учетом замечания 3 $A \in \mathscr{C}_{\alpha_2, \beta_2}$. Поэтому будем рассматривать только случай $\alpha_1 \in (0, 2]$.

Возьмем $\gamma := \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0, 1)$, функция Райта имеет вид [30]

$$\Phi_{\gamma, \delta}(\lambda) := \sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!\Gamma(\delta - \gamma n)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R, \varepsilon}} \nu^{-\delta} e^{\nu - \lambda \nu^\gamma}\, d\nu, \quad \gamma \in (0, 1),\ \delta \in \mathbb{R},$$

где $\Gamma_{R,\varepsilon}=\{Re^{i\varphi}:\varphi\in[-\frac{\pi}{2}-\varepsilon,\frac{\pi}{2}+\varepsilon]\}\cup\{re^{i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}:r\in(R,+\infty)\}\cup\{re^{-i(\frac{\pi}{2}+\varepsilon)}:r\in(R,+\infty)\}$ — контур Ганкеля, $R>0$, $\varepsilon\in(0,\frac{\pi}{2})$. Функция $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)$ целая.

Преобразование Меллина для функции $h:\mathbb{R}_+\to\mathscr{Z}$ имеет вид

$$\mathfrak{M}[h](\rho):=\int\limits_0^\infty t^{\rho-1}h(t)\,dt,$$

обратное преобразование Меллина есть

$$h(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\mathfrak{M}[h](\rho)t^{-\rho}\,d\rho,\quad d>0.$$

Введем обозначения для символов Похгаммера $(a)_0=1$, $(a)_1=a,\ \dots,$ $(a)_n=a(a+1)\dots(a+n-1)$ и для обобщенной функции Миттаг-Леффлера

$$E^{\rho}_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\rho)_n}{\Gamma(\alpha n+\beta)}\frac{z^n}{n!},\quad \alpha,\beta,\rho\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}.$$

Теорема 5. *Пусть* $m_1-1<\alpha_1\le m_1\in\{1,2\}$, $m_2-1<\alpha_2\le m_2\in\{1,2\}$, $\alpha_1>\alpha_2$, $\gamma=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\in(0,1)$, $\beta_1,\beta_2\in[0,1]$ *и* $A\in\mathscr{C}_{\alpha_1,\beta_1}$. *Тогда* $A\in\mathscr{A}_{\alpha_2}$, *при этом порождаемое оператором* A *аналитическое разрешающее семейство операторов имеет вид*

$$S_2(t)z_0=t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\,ds$$
$$=\frac{t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(1-\sigma)t^{-\gamma\sigma}\mathfrak{M}[S_1(t)z_0](\sigma)\,d\sigma}{\Gamma(\gamma(1-\sigma)+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)},\quad z_0\in\mathscr{Z},$$

где $\varsigma_i:=m_i-1-\beta_i(m_i-\alpha_i)$, $i=1,2$, $d\in(0,1)$. *Кроме того, если выполняется один из наборов соотношений*: $m_1=m_2=1$, $-\gamma\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2)\ge0$; $m_1=2$, $m_2=1$; $m_1=m_2=2$, $\gamma-1-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(2-\alpha_2)\ge0$, *то для всех* $t>0$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\le K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}\times\left|E^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}_{\gamma,(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}(\omega t^\gamma)\right|.\quad(8)$$

Доказательство. Известно асимптотическое представление функции Райта (см. [31, с. 238]), где $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)=W_{-\gamma,\delta}(-\lambda)$)

$$\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)\sim C\lambda^{\frac{\frac12-\delta}{1-\gamma}}e^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}(\gamma\lambda)^{\frac{1}{1-\gamma}}},\quad|\lambda|\to\infty,\ |\arg\lambda|<\psi,\quad(9)$$

при $\psi\in(0,\frac{\pi}{2})$. Так как $\frac{1}{1-\gamma}>1$, при $t\in\Sigma_{\psi_1}$, где $\psi_1:=\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}\in(0,\frac{\pi}{2})$, имеем

$$\left\|\int\limits_0^\infty s^\beta\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})S_1(s)\,ds\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\le K\int\limits_0^\infty s^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}|\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})|e^{\omega s}\,ds$$

$$= K|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty r^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)} |\Phi_{\gamma,\delta}(re^{-i\gamma\arg t})| e^{\omega r|t|^\gamma}\, dr$$

$$\leq C_1|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty r^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)} r^{\frac{\frac12-\delta}{1-\gamma}} e^{-\frac{1-\gamma}{\gamma}(\gamma r)^{\frac{1}{1-\gamma}}\cos\psi_1} e^{\omega r|t|^\gamma}\, dr$$

$$= C_2|t|^{\gamma(\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)} \int\limits_0^\infty u^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+\frac{\frac12-\delta}{1-\gamma}} e^{-u^{\frac{1}{1-\gamma}}} e^{\frac{\omega u|t|^\gamma}{(1-\gamma)^{1-\gamma}\gamma^\gamma\cos^{1-\gamma}\psi_1}}\, du$$

$$\leq C_3|t|^{\beta+(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+\gamma-\delta} \exp\left(\frac{C_4(\gamma)\omega^{1/\gamma}|t|}{\cos^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\psi_1}\right), \quad (10)$$

так как при $q > 1$ (см. [32, с. 141])

$$\int\limits_0^\infty s^p e^{ys-s^q}\, ds \sim C y^{\frac{2p-q+2}{2q-2}} e^{a(q)y^{\frac{q}{q-1}}}, \quad y \to +\infty.$$

Возьмем $\mu = \lambda^\gamma$, тогда

$$\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\widehat{S_1}(\lambda^\gamma) = \mu^{\frac{\varsigma_2}{\gamma}-\varsigma_1}\widehat{S_1}(\mu) = \mu^{\frac{\varsigma_2}{\gamma}}(\mu^{\alpha_1}-A)^{-1} = \lambda^{\varsigma_2}(\lambda^{\alpha_2}-A)^{-1} = \widehat{S_2}(\lambda).$$

Для достаточно большого $R > 0$ и $0 < \varepsilon < \min\left\{\frac{\pi}{2\gamma} - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right\}$ получим $\operatorname{Re}\lambda^\gamma > 0$ при любом $\lambda \in \Gamma_{R,\varepsilon}$. Поэтому для всех $t \in \Sigma_{\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$, $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\omega^{1/\gamma}+\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\widehat{S_1}(\lambda^\gamma)e^{\lambda t}z_0\, d\lambda$$

$$= \frac{t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}}{2\pi i} \int\limits_{t\cdot(\omega^{1/\gamma}+\Gamma_{R,\varepsilon})} \nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^\nu \int\limits_0^\infty S_1(s)z_0 e^{-\nu^\gamma s t^{-\gamma}}\, ds d\nu$$

$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\, ds.$$

Таким образом, обозначим для $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 := t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})S_1(s)z_0\, ds.$$

Имеем

$$\lim_{t\to0+} J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)}S_2(t)z_0$$

$$= \lim_{t\to0+} J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)}\left[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)S_1(rt^\gamma)z_0\, dr\right]$$

$$= \lim_{t\to0+}\int\limits_0^\infty J^{(1-\beta_2)(m_2-\alpha_2)}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)$$

$$\times\left[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\left(\frac{r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}t^{\gamma(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}+o(t^{\gamma(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)})\right)\right]z_0\,dr$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\Gamma(\gamma\alpha_1-m_2+\beta_2(m_2-\alpha_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\int_0^\infty(r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}+o(1))\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(r)z_0\,dr$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{\nu-r\nu^\gamma}\,d\nu\, r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}z_0\,dr$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\int_0^\infty r^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{-r\nu^\gamma}\,dr\,\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{\nu}z_0\,d\nu$$

$$=\frac{\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1)}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^\nu z_0\,d\nu}{\nu^{\gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}}=z_0$$

в силу формулы Ганкеля.

Далее,

$$t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})=\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{t\lambda-s\lambda^\gamma}\,d\lambda,$$

поэтому для $s>0$, $\operatorname{Re}\mu>0$, $\varepsilon\in\left(0,\min\left\{\frac{\pi}{2\gamma}-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}\right\}\right)$ и $R\in(0,|\mu|)$

$$\mathfrak{L}[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})](\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{-s\lambda^\gamma}\int_0^\infty e^{t\lambda-\mu t}\,dtd\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}}\lambda^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\frac{e^{-s\lambda^\gamma}}{\mu-\lambda}\,d\lambda=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}e^{-s\mu^\gamma},$$

где $\mathfrak{L}$ — преобразование Лапласа по переменной t. При этом мы учитываем, что контур $t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}$ обходит точку μ в отрицательном направлении и $-s\operatorname{Re}\lambda^\gamma=-s|\lambda|^\gamma\cos(\gamma\arg\lambda)<0$ для всех $\lambda\in t^{-1}\cdot\Gamma_{R,\varepsilon}$ в силу выбора параметра ε. По теореме Фубини при любом $z_0\in\mathscr{Z}$

$$\mathfrak{L}[S_2(t)z_0](\mu)=\int_0^\infty\mathfrak{L}[t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})](\mu)S_1(s)z_0\,ds$$

$$=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\int_0^\infty e^{-s\mu^\gamma}S_1(s)z_0\,ds=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\mathfrak{L}[S_1(t)z_0](\mu^\gamma)$$

$$=\mu^{\varsigma_2-\gamma\varsigma_1}\mu^{\gamma\varsigma_1}(\mu^{\alpha_2}-A)^{-1}z_0=\mu^{\varsigma_2}(\mu^{\alpha_2}-A)^{-1}z_0.$$

В силу теоремы 3 получаем первое из требуемых равенств.

Для функции Райта известны равенства $D^n\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda)=(-1)^n\Phi_{\gamma,\delta-\gamma n}(\lambda)$, $n\in\mathbb{N}$. Поэтому при $s>0$, $t\in\Sigma_{\min\{\psi,\frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$

$$D^1(t^\beta\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma}))=\beta t^{\beta-1}\Phi_{\gamma,\delta}(st^{-\gamma})+s\gamma t^{\beta-1-\gamma}\Phi_{\gamma,\delta-\gamma}(st^{-\gamma}).$$

Параметр $\delta(\beta_1,\beta_2):=\gamma\varsigma_1-\varsigma_2$ является линейной функцией по переменным $(\beta_1,\beta_2)\in[0,1]\times[0,1]$, поэтому экстремальные значения может принимать только в углах квадрата $[0,1]\times[0,1]$, т. е. в точках (0,0), (0,1), (1,0), (1,1). Имеем

$\delta(0,0) = \gamma(m_1 - 1) - m_2 + 1$. Возможны три случая различных значений пары m_1, m_2. Если $m_1 = m_2 = 1$, то $\delta(0,0) = 0$; если $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, то $\delta(0,0) = \gamma \in (0,1)$; если $m_1 = m_2 = 2$, то $\delta(0,0) = \gamma - 1 \in (-1,0)$. Далее рассматриваем значение $\delta(0,1) = \gamma(m_1-1) - m_2 + 1 + m_2 - \alpha_2 = \gamma(m_1-1) + 1 - \alpha_2$. Если $m_1 = 1$, то $\delta(0,1) = 1 - \alpha_2 \in (0,1)$; если $m_1 = 2$, то $\delta(0,1) = \gamma + 1 - \alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1^{-1} - 1) + 1 \in (0,1)$, поскольку при этом $\alpha_2 \in (0,2)$, $\alpha_1 \in (1,2]$, $\alpha_1^{-1} - 1 \in [-\frac{1}{2}, 0)$, $\alpha_2(\alpha_1^{-1} - 1) \in (-1,0)$. Для $\delta(1,0) = \gamma(\alpha_1 - 1) - m_2 + 1$ имеем: $\delta(1,0) = \gamma(\alpha_1 - 1) \in (-1,1)$ при $m_2 = 1$, $\delta(1,0) = \gamma(\alpha_1 - 1) - 1 \in (-1,0)$ при $m_2 = 2$, так как в этом случае $\alpha_1 \in (1,2]$. Наконец, $\delta(1,1) = \gamma(\alpha_1 - 1) - \alpha_2 + 1 = 1 - \gamma \in (0,1)$. Таким образом, при всех значениях $(\beta_1, \beta_2) \in [0,1] \times [0,1]$ имеем $|\delta(\beta_1, \beta_2)| < 1$. Следовательно, при $t \in \Sigma_{\min\{\psi, \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$

$$D^1 S_2(t) z_0 = (\gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - 1) t^{\gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - 2} \int\limits_0^\infty \Phi_{\gamma, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2}(st^{-\gamma}) S_1(s) z_0 \, ds$$
$$+ \gamma t^{\gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - \gamma - 2} \int\limits_0^\infty s \Phi_{\gamma, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - \gamma}(st^{-\gamma}) S_1(s) z_0 \, ds.$$

При этом принимается во внимание, что полученный интеграл сходится равномерно по t на компактных подмножествах сектора $\Sigma_{\min\{\psi, \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\}}$. Таким образом, семейство операторов $S_2(t)$ аналитично в секторе Σ_{ψ_1}. При малых по модулю $t \in \Sigma_{\min\left\{\psi, \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\right\}}$ имеем

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq |t|^{\gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - 1 + \gamma} \int\limits_0^\infty |\Phi_{\gamma, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2}(r)| \|S_1(rt^\gamma)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \, dr$$
$$\leq C_1 |t|^{\gamma\varsigma_1 - \varsigma_2 - 1 + \gamma + \gamma(1-\beta_1)(\alpha_1 - m_1)} \int\limits_0^\infty r^{(1-\beta_1)(\alpha_1 - m_1)} |\Phi_{\gamma, \gamma\varsigma_1 - \varsigma_2}(r)| \, dr$$
$$= C_2 |t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2 - m_2)}$$

в силу соотношения (9), аналитичности Φ в $\mathbb{C}$ и включения $(1 - \beta_1)(\alpha_1 - m_1) \in (-1, 0]$. С учетом (10) отсюда получаем, что при всех $t \in \Sigma_{\min\left\{\psi, \frac{\psi(1-\gamma)}{\gamma}\right\}}$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C_3 |t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2 - m_2)} \exp\left(\frac{C_4(\gamma) \omega^{1/\gamma} |t|}{\cos^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \psi_1} \right)$$
$$\leq C_3 |t|^{(1-\beta_2)(\alpha_2 - m_2)} e^{C_5(\gamma, \psi_1) \operatorname{Re} t}.$$

Поэтому $\{S_2(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ — аналитическое в секторе Σ_{ψ_1} разрешающее семейство операторов типа $(\psi_1, C_5(\gamma, \psi_1))$. По теореме 4 $A \in \mathscr{A}_{\alpha_2}(\psi_1 + \frac{\pi}{2}, C_5(\gamma, \psi_1))$.

Преобразование Меллина функции Райта, как известно, имеет вид

$$\mathfrak{M}[\Phi_{\gamma,\delta}](\rho) = \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma\rho + \delta)}, \quad \operatorname{Re} \rho > 0,$$

поэтому при $d \in (0,1)$ по формуле обратного преобразования Меллина

$$\Phi_{\gamma,\delta}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d - i\infty}^{d + i\infty} \frac{\Gamma(\rho)}{\Gamma(\gamma\rho + \delta)} t^{-\rho} \, d\rho.$$

А значит, для любого $z_0 \in \mathscr{Z}$

$$S_2(t)z_0 = t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(\rho)s^{-\rho}t^{\gamma\rho}d\rho}{\Gamma(\gamma\rho+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}S_1(s)z_0\,ds$$
$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty}\frac{\Gamma(\rho)t^{\gamma\rho}}{\Gamma(\gamma\rho+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}\int\limits_0^\infty s^{-\rho}S_1(s)z_0\,dsd\rho$$
$$= t^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1+\gamma}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{1-d-i\infty}^{1-d+i\infty}\frac{\Gamma(1-\sigma)t^{-\gamma\sigma}}{\Gamma(\gamma(1-\sigma)+\gamma\varsigma_1-\varsigma_2)}\int\limits_0^\infty s^{\sigma-1}S_1(s)z_0\,dsd\sigma.$$

Отсюда сразу следует второе представление $S_2(t)$ из формулировки теоремы.

В [30, формула (2.2.77)] показано, что

$$\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) = \frac{1}{\pi(1-\gamma)}\int\limits_0^\pi r(\varphi)^{1-\delta}\left(\frac{\gamma\sin((1-\gamma-\delta)\varphi)}{\sin(\gamma\varphi)}+\frac{\sin(\delta\varphi)}{\sin\varphi}\right)e^{-\lambda r(\varphi)^\gamma k(\varphi)}\,d\varphi$$

при некоторых неотрицательных функциях $r(\varphi)$ и $k(\varphi)$. Пусть выполняется один из наборов соотношений: $m_1 = m_2 = 1$, $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = -\gamma\beta_1(1-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2)\geq 0$; $m_1 = 2, m_2 = 1$, тогда $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = \gamma-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(1-\alpha_2)\geq 0$; $m_1 = m_2 = 2$, $\delta := \gamma\varsigma_1-\varsigma_2 = \gamma-1-\gamma\beta_1(2-\alpha_1)+\beta_2(2-\alpha_2)\geq 0$. В силу [30, лемма 2.2.4] $\Phi_{\gamma,\delta}(\lambda) > 0$ при $\lambda > 0$ и для $t > 0$

$$\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\int\limits_0^\infty|\Phi_{\gamma,\gamma\varsigma_1-\varsigma_2}(st^{-\gamma})|s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{\omega s}\,ds$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^{\nu-st^{-\gamma}\nu^\gamma}\,d\nu s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{\omega s}\,ds\right|$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\frac{1}{2\pi i}\left|\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\int\limits_0^\infty s^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)}e^{s(\omega-t^{-\gamma}\nu^\gamma)}ds\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^\nu\,d\nu\right|$$
$$= Kt^{\gamma\varsigma_1-\varsigma_2-1}\left|\frac{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{-\gamma\varsigma_1+\varsigma_2}e^\nu\,d\nu}{(t^{-\gamma}\nu^\gamma-\omega)^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}}\right|$$
$$= K\left|\frac{\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\frac{\nu^{-(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)-1}e^\nu\,d\nu}{(1-t^\gamma\nu^{-\gamma}\omega)^{(1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1}}\right|$$
$$= K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}$$
$$\times\left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^\infty\frac{\omega^n t^{\gamma n}}{n!}((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)_n\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}}\nu^{-(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)-1-\gamma n}e^\nu\,d\nu\right|$$
$$= K\Gamma((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)t^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)}\left|\sum_{n=0}^\infty\frac{((1-\beta_1)(\alpha_1-m_1)+1)_n\omega^n t^{\gamma n}}{n!\Gamma((1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1+\gamma n)}\right|.$$

Теорема доказана.

Замечание 5. Утверждение теоремы 5 при $\beta_1 = \beta_2 = 1$, т. е. для уравнений с производными Герасимова — Капуто разных порядков, ранее доказано в работе [12].

Замечание 6. Утверждение теоремы 5 при $\beta_1 = \beta_2 = 0$, т. е. для уравнений с производными Римана — Лиувилля разных порядков, ранее доказано в работе [22].

§ 4. Обращение принципа субординации по порядку производной

Пусть $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(0)$, $0 \in \rho(A)$. Тогда при $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, m-\beta(m-\alpha))$ можно определить дробные степени оператора $-A$:

$$(-A)^{-\sigma} := \frac{\sin \pi\sigma}{\pi} \int\limits_0^\infty s^{m-1-\beta(m-\alpha)-\sigma}(s^\alpha I - A)^{-1}\, ds.$$

Теорема 6. *Пусть* $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [0, 1]$, $A \in \mathscr{C}_{\alpha,\beta}(0)$, $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *— сильно непрерывное разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t)$, $0 \in \rho(A)$,

$$\exists K > 0 \ \exists \delta > m - \beta(m-\alpha) - \alpha \ \forall t \geq 0 \quad \|S(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{K}{1+t^\delta}. \tag{11}$$

Тогда при $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, \delta, m - \beta(m-\alpha)\})$

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{\mathfrak{M}[S](\sigma)}{\Gamma(\sigma)}.$$

Доказательство. В силу условий теоремы

$$\left\| \int\limits_0^\infty t^{\sigma-1} S(t) dt \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq K \int\limits_0^\infty \frac{t^{\operatorname{Re}\sigma - 1}\, dt}{1+t^\delta} < \infty,$$

так как $m - \beta(m-\alpha) - \alpha = (1-\beta)(m-\alpha) \in [0,1)$, $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, \delta)$. Согласно теореме 2 и в силу включения $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, m - \beta(m-\alpha)\})$ имеем

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)} \int\limits_0^\infty s^{-\sigma} \int\limits_0^\infty e^{-st} S(t)\, dt ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^\infty S(t) \int\limits_0^\infty \frac{e^{-st} s^{-\sigma}}{\Gamma(1-\sigma)} ds dt = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int\limits_0^\infty t^{\sigma-1} S(t)\, dt.$$

Лемма 2. *Пусть* $\alpha \in (0, 2]$, $\beta \in [0, 1]$, $A \in \mathscr{A}_\alpha(\theta_0, 0)$ *при некотором* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $0 \in \rho(A)$, $\{S(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *— аналитическое разрешающее семейство операторов для уравнения* $D^{\alpha,\beta}z(t) = Az(t)$, *удовлетворяющее условию* (11). *Тогда при* $\operatorname{Re}\sigma \in (m - \beta(m-\alpha) - \alpha, \min\{1, \delta, m - \beta(m-\alpha)\})$

$\forall \theta \in (\pi/2, \theta_0)\, \forall \omega > 0 \exists C(\theta, \omega) > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C(\theta, \omega) e^{(\pi-\theta)|\operatorname{Im}\sigma|} \int\limits_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\, dy}{1 + y^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}}.$$

Доказательство. Из теорем 4 и 6 следует, что при $\operatorname{Re}\sigma \in (m-\beta(m-\alpha)-\alpha, \min\{1,\delta,m-\beta(m-\alpha)\})$

$$(-A)^{-\sigma} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_0^\infty t^{\sigma-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \mu^{m-1-\beta(m-\alpha)}(\mu^\alpha I - A)^{-1}e^{\mu t}\,d\mu dt$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu^{m-1-\beta(m-\alpha)}}{(-\mu)^\sigma}(\mu^\alpha I - A)^{-1}\,d\mu,$$

поэтому при $\theta \in (\frac{\pi}{2},\theta_0)$, $\omega > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le \frac{K(\theta,\omega)}{2\pi}\int_\Gamma \frac{|d\mu|}{|\operatorname{Re}\mu-\omega|^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}|(-\mu)^\sigma|}$$
$$\le C(\theta,\omega)e^{(\pi-\theta)|\operatorname{Im}\sigma|}\int_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\,dy}{1+y^{(1-\beta)(\alpha-m)+1}} < \infty,$$

так как $0 \le (1-\beta)(m-\alpha) < \operatorname{Re}\sigma < 1$. $\square$

Как и прежде, будем использовать обозначения $\varsigma_i := m_i - 1 - \beta_i(m_i-\alpha_i)$, $i = 1, 2$.

Теорема 7. *Пусть* $m_1 - 1 < \alpha_1 \le m_1 \in \{1,2\}$, $m_2 - 1 < \alpha_2 \le m_2 \in \{1,2\}$, $\alpha_1 > \alpha_2$, $\gamma = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \in (0,1)$, $\beta_1,\beta_2 \in [0,1]$, $A \in \mathscr{A}_{\alpha_2}(\theta_0,0)$ *при некотором* $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2\gamma},\pi)$, $0 \in \rho(A)$, $\{S_2(t) \in \mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *удовлетворяет условию* (11) *при* $\delta > m_2 - \beta_2(m_2-\alpha_2) - \alpha_2$,

$$\max\{m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)-\alpha_2, \gamma\varsigma_1-\varsigma_2+1\} < \min\{1,\delta,m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)\}.$$

Тогда $A \in \mathscr{C}_{\alpha_1,\beta_1}(0)$ *и при* $z_0 \in \mathscr{Z}$ *и*

$$d \in (\max\{m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)-\alpha_2, \gamma\varsigma_1-\varsigma_2+1\}, \min\{1,\delta,m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)\})$$

будет

$$S_1(t)z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}(-A)^{-\sigma}z_0\,d\sigma$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}\mathfrak{M}[S_2(t)z_0](\sigma)\,d\sigma, \quad t > 0.$$

Доказательство. Для $\sigma = d+i\eta$, $\eta \in \mathbb{R}$ согласно (3.25) в [12] при $|\eta| \to \infty$ имеем

$$\Gamma(\sigma) = \sqrt{2\pi}|\eta|^{d-1/2}e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|}(1+O(1/\eta)), \tag{12}$$
$$\frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)}{\Gamma(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1)} = \sqrt{2\pi}|\eta|^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}}e^{-(1-\frac{1}{2\gamma})\pi|\eta|}(1+O(1/\eta)).$$

Согласно лемме 2 при $\operatorname{Re}\sigma = d \in (m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)-\alpha_2, \min\{1,\delta,m_2-\beta_2(m_2-\alpha_2)\})$, $\theta \in (\frac{\pi}{2\gamma},\theta_0)$, $\omega > 0$

$$\|(-A)^{-\sigma}\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le C(\theta,\omega)e^{(\pi-\theta)|\eta|}\int_0^\infty \frac{y^{-\operatorname{Re}\sigma}\,dy}{1+y^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}},$$

$$\left\| \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma)\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)}(-A)^{-\sigma}\,d\sigma \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}$$

$$\leq C_1 t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)-\varsigma_1-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi}{2\gamma}-\theta)|\eta|}\,d\eta \int\limits_0^{\infty} \frac{y^{-d}\,dy}{1+y^{(1-\beta_2)(\alpha_2-m_2)+1}}$$

$$= C_2 t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)-\varsigma_1-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1+|\eta|)^{-\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-d+1)+\varsigma_1+\frac{1}{2}} e^{(\frac{\pi}{2\gamma}-\theta)|\eta|}\,d\eta.$$

Последний интеграл сходится при всех $t>0$. С учетом теоремы 6 оператор-функция

$$S(t)z_0 := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1)} \mathfrak{M}[S_2(t)z_0](\sigma)\,d\sigma$$

определена при $t>0$. Заметим, что условие данной теоремы $d>\gamma\varsigma_1-\varsigma_2+1$ влечет неравенство $\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2+\operatorname{Re}\sigma-1)-\varsigma_1>0$.

Поскольку $\mathfrak{M}[e^{-t}](\rho)=\Gamma(\rho)$, то при $d\in(0,1)$, $t>0$

$$e^{-t} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1-d-i\infty}^{1-d+i\infty} \Gamma(\rho)t^{-\rho}\,d\rho = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \Gamma(1-\sigma)t^{\sigma-1}\,d\sigma. \tag{13}$$

В силу (12) последний интеграл сходится и бесконечно дифференцируем по параметру при всех $t\in\Sigma_\pi$, поэтому по теореме о единственности аналитической функции равенство (13) выполняется на Σ_π. Следовательно, при $\operatorname{Re}\lambda>0$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} S(t)z_0\,dt$$

$$= \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{\Gamma(1-\sigma)t^{\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1-1}}{\Gamma\big(\frac{1}{\gamma}(\varsigma_2-\sigma+1)-\varsigma_1\big)} \int\limits_0^{\infty} s^{\sigma-1}S_2(s)z_0\,ds d\sigma dt$$

$$= \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2} \int\limits_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{d-i\infty}^{d+i\infty} \Gamma(1-\sigma)(\lambda^{\frac{1}{\gamma}}s)^{\sigma-1}\,d\sigma S_2(s)z_0\,ds$$

$$= \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2} \int\limits_0^{\infty} e^{-s\lambda^{\frac{1}{\gamma}}} S_2(s)z_0\,ds = \lambda^{\varsigma_1-\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}\lambda^{\frac{1}{\gamma}\varsigma_2}(\lambda^{\frac{\alpha_2}{\gamma}}I-A)^{-1} = \lambda^{\varsigma_1}(\lambda^{\alpha_1}I-A)^{-1}.$$

Поэтому по теореме 3 $S(t)\equiv S_1(t)$.

§ 5. Принцип субординации по типу производной Хилфера

В [17] было напрямую доказано, что $\mathscr{C}_{\alpha,0}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,1}(\omega)$ при $\alpha\in(0,1)$, в [18, лемма 2.1] этот результат был распространен на случай любого $\alpha>0$.

Используя подход, аналогичный доказательству теоремы 5, покажем, что $\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ при $0\leq\beta_1<\beta_2\leq 1$.

Будем, как и в предыдущем параграфе, обозначать разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta_i}z(t)=Az(t)$ через $\{S_i(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}) : t\in\mathbb{R}_+\}$, $i=1,2$.

Теорема 8. *Пусть $m-1<\alpha\leq m\in\{1,2\}$, $0\leq\beta_1<\beta_2\leq 1$, $\omega\geq 0$, $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)$. Тогда $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ и $S_2(t)=J^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_1(t)$.*

Доказательство. При $\operatorname{Re}\lambda>\omega$ имеем

$$\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}\widehat{S}_1(\lambda)=\lambda^{m-1-\beta_2(m-\alpha)}(\lambda^\alpha-A)^{-1},$$

поэтому для $c>\omega$ и всех $t>0$, $z_0\in\mathscr{Z}$ определим

$$\begin{aligned}S_2(t)z_0 &:= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}\widehat{S}_1(\lambda)e^{\lambda t}z_0\,d\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\lambda t}\int\limits_0^\infty S_1(s)z_0e^{-\lambda s}\,dsd\lambda\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^\infty S_1(s)z_0\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\lambda^{(\beta_1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\lambda(t-s)}\,d\lambda ds\\ &= \int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}S_1(s)z_0\,ds=J^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_1(t).\end{aligned}$$

Тогда при $t>0$ имеем

$$\begin{aligned}\|S_2(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} &\leq \int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}\|S_1(s)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\,ds\\ &\leq Ke^{\omega t}\int\limits_0^t\frac{(t-s)^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)-1}}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}s^{-(1-\beta_1)(m-\alpha)}\,ds\\ &= Kt^{-(1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\omega t}\frac{B((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha),1-(1-\beta_1)(m-\alpha))}{\Gamma((\beta_2-\beta_1)(m-\alpha))}\\ &= \frac{K\Gamma(1-(1-\beta_1)(m-\alpha))t^{-(1-\beta_2)(m-\alpha)}e^{\omega t}}{\Gamma(1-(1-\beta_2)(m-\alpha))}.\end{aligned}$$

По теореме 3 отсюда следует, что $A\in\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)$ и $\{S_2(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\geq 0\}$ — разрешающее семейство операторов уравнения $D^{\alpha,\beta_2}z(t)=Az(t)$.

Замечание 7. Утверждение теоремы 8 при $\beta_1=0$, $\beta_2=1$, т. е. для уравнений с производной Римана — Лиувилля и Герасимова — Капуто соответственно, ранее доказано в работе [22].

Замечание 8. Обратное вложение $\mathscr{C}_{\alpha,\beta_2}(\omega)\subset\mathscr{C}_{\alpha,\beta_1}(\omega)$ при $0\leq\beta_1<\beta_2\leq 1$, вообще говоря, не выполняется. В частности, в [18] показано, что при $\alpha\in(0,1)$ оператор $A\{z_n\}=\{ne^{i\pi\alpha/2}z_n\}$ с областью определения $D_A=\{\{z_n\}\in l_1:\{nz_n\}\in l_1\}$ в пространстве последовательностей l_1 принадлежит классу $\mathscr{C}_{\alpha,1}(0)$, но не лежит в $\mathscr{C}_{\alpha,0}(0)$.

Однако в случае аналитического разрешающего семейства $\{S_2(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t>0\}$ оператор A лежит в классе $\mathscr{A}_\alpha(\theta_0,\omega)$, который не зависит от параметра β_2. Поэтому A порождает и аналитическое разрешающее семейство $\{S_1(t)\in\mathscr{L}(\mathscr{Z}):t\geq 0\}$, операторы которого в силу аналитичности по t и теоремы 8 имеют вид $S_1(t)=D^{(\beta_2-\beta_1)(m-\alpha)}S_2(t)$ при $t>0$.

§ 6. Примеры

При $\alpha \in (0,1)$, $\beta \in [0,1]$ рассмотрим задачу типа Коши

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi,t) = \frac{\partial v}{\partial \xi}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{14}$$

$$J_t^{(1-\beta)(1-\alpha)} v(\xi,0) = v_0(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

где нижний индекс t обозначает переменную, по которой вычисляется дробная производная или дробный интеграл. Выберем пространство $\mathscr{X} = C(\mathbb{R})$ ограниченных и равномерно непрерывных функций на $\mathbb{R}$. В таком пространстве оператор $A_1 = D_\xi^1 = \frac{\partial}{\partial \xi}$ с областью определения $D_{A_1} = \{w \in C(\mathbb{R}) : D_\xi^1 w \in C(\mathbb{R})\}$ является генератором сжимающей полугруппы операторов сдвига $S_1(t)v_0(\xi) = v_0(\xi + t)$ класса (C_0) [7, с. 325], т. е. $A_1 \in \mathscr{C}_{1,\delta}(0)$ при любом $\delta \in [0,1]$. По теореме 5 для $\alpha < 1$ будет $A_1 \in \mathscr{A}_\alpha$, а значит, при любом $v_0 \in D_{A_1}$ существует единственное решение задачи (14), (15), при этом оно имеет вид

$$v(\xi,t) = S_2(t)v_0(\xi) = t^{\beta(1-\alpha)-1} \int_0^\infty \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) v_0(\xi + s)\, ds, \tag{16}$$

так как в данном случае $\varsigma_1 = 0$, $\varsigma_2 = -\beta(1-\alpha)$, $\gamma = \alpha$.

Для уравнения

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi,t) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}(\xi,t), \quad (\xi,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

возьмем то же пространство $\mathscr{X} = C(\mathbb{R})$ и оператор $A_2 = \frac{1}{2} D_\xi^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$ с областью определения $D_{A_2} = \{w \in C(\mathbb{R}) : D_\xi^2 w \in C(\mathbb{R})\}$. Поскольку оператор A_2 порождает сжимающую (C_0)-непрерывную полугруппу операторов [7, с. 335]

$$S_1(t)v_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - r)^2}{2t}} v_0(r)\, dr, \quad t > 0,$$

по теореме 5 $A_2 \in \mathscr{A}_\alpha$. Следовательно, при любом $v_0 \in D_{A_2}$ существует единственное решение задачи (15), (17), при этом оно имеет вид

$$v(\xi,t) = \frac{t^{\beta(1-\alpha)-1}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\xi - r)^2}{2s}} v_0(r)\, dr ds. \tag{18}$$

При $\lambda, \mu > 0$ рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$D_t^{\alpha,\beta} v(\xi,t) = \lambda(v(\xi - \mu, t) - v(\xi,t)), \quad (\xi,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \tag{19}$$

В пространстве $\mathscr{X} = C(\mathbb{R})$ зададим оператор $A_3 w(\xi) = \lambda(w(\xi - \mu) - w(\xi))$ с областью определения $D_{A_3} = \{w \in C(\mathbb{R}) : w(\xi - \mu) - w(\xi) \in C(\mathbb{R})\}$, порождающий [7, с. 337] сжимающую (C_0)-непрерывную полугруппу операторов

$$S_1(t)v_0(\xi) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!} v_0(\xi - k\mu), \quad t > 0.$$

Следовательно, $A_3 \in \mathscr{A}_\alpha$ и при любом $v_0 \in D_{A_3}$ существует единственное решение задачи (15), (19), при этом оно имеет вид

$$v(\xi,t) = t^{\beta(1-\alpha)-1} \int_0^\infty \Phi_{\alpha,\beta(1-\alpha)}(st^{-\alpha}) e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k s^k}{k!} v_0(\xi - k\mu)\, ds. \tag{20}$$

Замечание 9. Из полученных результатов следует, что решения (16), (18), (20) аналитичны по t в секторе $\Sigma_{\theta_0 - \frac{\pi}{2}}$ при некотором $\theta_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.
2. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. New York: Springer, 2011.
3. *Uchaykin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers: I. Background and theory. II. Applications. Berlin: Springer, 2013.
4. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. Boston: Acad. Press, 1999.
6. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Sci. Publ., 2006.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
8. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 1999.
9. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
10. *Da Prato G., Iannelli M.* Linear integro-differential equations in Banach spaces // Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova. 1980. V. 62. P. 207–219.
11. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 1993.
12. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces. Ph. D. Dissertation. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, 2001.
13. *Kostić M.* Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2015.
14. *Bazhlekova E.* The abstract Cauchy problem for the fractional evolution equation // Fractional Calculus and Applied Analysis. 1998. V. 1, N 3. P. 255–270.
15. *Fedorov V. E., Skorynin A. S.* Strongly continuous resolving families of operators for equations with a fractional derivative // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 7. P. 2651–2659.
16. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.
17. *Глушак А. В.* О задаче типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробной производной // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. физика, математика. 2001. № 2. С. 74–77.
18. *Fedorov V. E., Vershinina D. A.* Strongly continuous resolving families of equations with Riemann–Liouville derivative // J. Math. Sci. 2025. V. 287, N 1. P. 52–68.
19. *Fedorov V. E., Skorynin A. S.* Analytic resolving families of operators for linear equations with Hilfer derivative // J. Math. Sci. 2023. V. 277, N 3. P. 385–402.
20. *Fedorov V. E., Du W.-Sh., Kostić M., Plekhanova M. V., Skorynin A. S.* Criterion of the existence of a strongly continuous resolving family for a fractional differential equation with the Hilfer derivative // Fractal and Fractional. 2025. V. 9, N 2. Article number 81.
21. *Bazhlekova E. G.* Subordination principle for fractional evolution equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2000. V. 3, N 3. P. 213–230.
22. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Vershinina D. A.* Subordination principle for equations with Riemann–Liouville derivative // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 11. P. 5578–5588.
23. *Bazhlekova E.* Subordination in a class of generalized time-fractional diffusion-wave equations // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2018. V. 21, N 4. P. 869–900.
24. *Bazhlekova E., Bazhlekov I.* Subordination approach to multi-term time-fractional diffusion-wave equation // J. Comput. Appl. Math. 2018. V. 339. P. 179–192.
25. *Fedorov V. E., Filin N. V.* Subordination principle for equations with proportional distributed Gerasimov–Caputo derivatives // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 1. P. 404–416.
26. *Bazhlekova E., Bazhlekov I.* Subordination approach to space-time fractional diffusion // Mathematics. 2019. V. 7, N 5. Article number 415.
27. *Luchko Yu.* Subordination principles for the multi-dimensional space-time-fractional diffusion-wave equation // Theory of Probability and Mathematical Statistics. 2019. V. 98. P. 127–147.
28. *Hilfer R.* Applications of fractional calculus in physics. Singapore: WSPC, 2000.
29. *Волкова А. Р., Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* О разрешимости некоторых классов уравнений с производной Хилфера в банаховых пространствах // Челяб. физ.-мат. журн. 2022. Т. 7, № 1. С. 11–19.
30. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

31. *Mainardi M.* Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models. Singapore: World Sci., 2010.

32. *Evgrafov M. A.* Asymptotic estimates and entire functions. New York: Gordon and Breach, 1961.

Поступила в редакцию 4 января 2026 г.
После доработки 4 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Федоров Владимир Евгеньевич (ORCID 0000-0002-0787-3272),
Антон Сергеевич Скорынин (ORCID 0009-0002-1260-7830)
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru, skorynin@csu.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2026. Том 67, № 2

УДК 531.911.5

МЕТОД ПРЕДЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСКОЛЬКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА

И. А. Финогенко

Аннотация. Метод предельных дифференциальных уравнений в сочетании с прямым методом функций Ляпунова со знакопостоянными производными является эффективным средством изучения асимптотического поведения решений неавтономных систем. В данной статье этот метод представлен в форме обобщений принципа инвариантности Ла-Салля для функционально-дифференциальных включений с запаздыванием с использованием набора дополнительных функционалов Ляпунова. Метод демонстрируется на механической системе с кулоновым трением в форме уравнений Лагранжа 2-го рода.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.214

Ключевые слова: предельное дифференциальное включение, запаздывание, функционал Ляпунова, принцип инвариантности, асимптотическое поведение решений, притяжение, механическая система с трением.

Статья посвящается
Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием

Введение

Метод функций Ляпунова является одним из основных в изучении качественных свойств решений различных классов дифференциальных уравнений. Это многочисленные вопросы устойчивости, притяжения, ограниченности, стабилизации и многие другие направления в различных областях теории дифференциальных уравнений. Обзор и классификацию качественных понятий и свойств, связанных с устойчивостью, можно найти в [1]. Одно из таких направлений относится к функциям Ляпунова со знакопостоянными производными. Оно восходит к известным теоремам Барбашина —- Красовского [2] для автономных систем

$$\dot{x} = f(x), \tag{1}$$

где $f : \Omega \to R^n$, $\Omega \subset R^n$ — некоторая область.

При этом дополнительное требование к множеству $E = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ нулей производной функции Ляпунова $V(x)$ об отсутствии в нем целых траекторий уравнения (1), кроме начала координат, обеспечивало асимптотическую устойчивость нулевого решения. Впоследствии выводы, которые вытекают лишь из знакопостоянства производной функции Ляпунова, были сделаны в

Работа выполнена в рамках госзадания Минобрнауки России (проект № 1210401300060-4).

теореме Ла-Салля [1], известной как принцип инвариантности, так как главную роль в ней играет свойство инвариантности ω-предельных множеств траекторий автономных уравнений (1).

Принцип инвариантности в том или ином виде распространен и на другие классы автономных систем, таких как функционально-дифференциальные уравнения [3, 4].

При рассмотрении неавтономных дифференциальных уравнений на этом пути возникают трудности, связанные с описанием множества нулей производной функции Ляпунова и с отсутствием свойств типа инвариантности у ω-предельных множеств решений неавтономных систем. Попытки преодолеть эти трудности привели к теории, известной в настоящее время как метод предельных уравнений (см. [5]), начало которому положили работы Селла [6] и Арштейна [7–9] по топологической динамике неавтономных дифференциальных уравнений. Для неавтономных функционально-дифференциальных уравнений этот метод развит в [10].

При рассмотрении неавтономных дифференциальных включений возникают еще дополнительные проблемы, связанные с построением предельных дифференциальных соотношений, так как нет подходящих теорем математического (в том числе многозначного) анализа о сходимости возникающих функциональных последовательностей многозначных отображений. Эта проблема была рассмотрена в [11], где впервые появилось понятие предельного дифференциального включения.

Следует отметить, что принцип инвариантности и его обобщения методом предельных дифференциальных уравнений не позволяют в полной мере решать задачу об асимптотическом поведении решений, так как дают весьма общую оценку ω-предельных множеств. Вопрос о точном описании аттрактора системы был бы решен, если бы удалось точно описать наибольшее инвариантное множество в множестве нулей производной функции Ляпунова. Он остается открытым и всякий раз требует дополнительного исследования. Для этого могут использоваться какие-либо предположения и любые подходящие средства и факты, такие как свойства ω-предельных множеств, свойства используемых функций Ляпунова, структура исходных и предельных дифференциальных уравнений и включений и т. п. В общем виде такие исследования не всегда возможны и вряд ли целесообразны. Но использование наборов вспомогательных функций Ляпунова для таких исследований может быть представлено в достаточно общем виде. Основная идея здесь состоит в том, что может оказаться проще уметь определять те точки из множества нулей производной функции Ляпунова, которые инвариантным множествам исследуемой системы заведомо не принадлежат.

Вспомогательные функции Ляпунова являются эффективным средством исследований в теории устойчивости и рассматривались в работах многих авторов. Теорема об асимптотической устойчивости нулевого решения неавтономной системы дифференциальных уравнений с использованием двух функций Ляпунова впервые дана В. М. Матросовым [12]. Для функционально-дифференциальных уравнений такие исследования имеются в [4]. Вопросы притяжения для механических систем с трением в форме уравнений Лагранжа второго рода с использованием принципа инвариантности и набора вспомогательных функций Ляпунова в автономном случае рассмотрены в [13]. Принцип инвариантности для автономных функционально-дифференциальных включений с наборами вспомогательных функционалов Ляпунова изучался в [14]. К неавтономным дифференциальным включениям (в том числе и уравнениям) метод предельных уравнений с несколькими функциями Ляпунова применен в [15].

Целью данной статьи является развитие метода предельных дифференциальных уравнений и обобщение принципа инвариантности с набором вспомогательных функционалов Ляпунова на неавтономные функционально-дифференциальные дифференциальные включения.

1. Предельные функционально-дифференциальные включения

Здесь приводится аналог принципа инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений, который является одним из основных методов локализации ω-предельных множеств и будет использоваться в дальнейшем.

Пусть R^n — n-мерное векторное пространство с нормой $\|\cdot\|$, $\operatorname{conv} R^n$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств из R^n. Для любых непустых ограниченных подмножеств A и B из R^n положим $\rho(B,A) = \sup\limits_{b\in B} d(b,A)$, где $d(b,A) = \inf\limits_{a\in A}\|b-a\|$. Через $A^\varepsilon = \{x : d(x,A) < \varepsilon\}$ обозначается ε-окрестность множества A и через $\overline{A}$ — замыкание множества A. Очевидно, что $\rho(B,A) < \varepsilon \Leftrightarrow B \subset A^\varepsilon$ и значение $\rho(B,A)$ не изменится, если множество A или B заменить его замыканием.

Через C_τ обозначается пространство всех непрерывных функций $\varphi(\cdot)$, определенных на отрезке $[-\tau,0]$, $\tau > 0$, со значениями в R^n, снабженное sup-нормой

$$\|\varphi(\cdot)\|_C = \sup_{-\tau\le\theta\le 0}\|\varphi(\theta)\|.$$

Для любой непрерывной функции $x : R^1 \to R^n$ определим функцию $x_t(\cdot) \in C_\tau$ равенством $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \le \theta \le 0$.

Будем рассматривать функционально-дифференциальное включение

$$\dot x \in F(t, x_t(\cdot)), \quad x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot), \tag{2}$$

где $F : R^1 \times C_\tau \to R^n$ — многозначное отображение, $\varphi_0(\cdot) \in C_\tau$ — начальная функция в момент времени $t = t_0$.

Под *решением* задачи (2) понимается непрерывная функция $x : [t_0-\tau,\omega) \to R^n$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[t_0,t_1]$, $t_1 < \omega$, такая, что выполняется начальное условие $x_{t_0}(\cdot) = \varphi_0(\cdot)$ и ее производная $\dot x(t)$ удовлетворяет включению (2) для почти всех $t \in [t_0,\omega)$.

Отображение $F : R^1 \times C_\tau \to \operatorname{conv} R^n$ называется *полунепрерывным сверху*, если для любых $(t,\varphi(\cdot)) \in R^1 \times C_\tau$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon,t,\varphi(\cdot)) > 0$ такое, что для всех $(t',\varphi'(\cdot))$, удовлетворяющих неравенствам $|t'-t| < \delta$, $\|\varphi'(\cdot)-\varphi(\cdot)\|_C < \delta$, выполняется $F(t',\varphi'(\cdot)) \subset F^\varepsilon(t,\varphi(\cdot))$. (Здесь и далее $F^\varepsilon(t,\varphi(\cdot))$ обозначает ε-окрестность множества $F(t,\varphi(\cdot))$.)

Отметим, что полунепрерывность сверху означает, что

$$\lim_{t'\to t,\varphi'(\cdot)\to\varphi(\cdot)} \rho(F(t',\varphi'(\cdot)), F(t,\varphi(\cdot))) = 0$$

и для ограниченных многозначных отображений необходимым и достаточным условием полунепрерывности сверху является замкнутость графика (см. [16, с. 35–40].

Сформулируем условия, которые используются при исследовании включения (2).

А1. *Значениями многозначного отображения* $F(t,\varphi(\cdot))$ *являются непустые, выпуклые и компактные множества.*

А2. *Многозначное отображение* $(t,\varphi(\cdot)) \to F(t,\varphi(\cdot))$ *полунепрерывно сверху.*

А3. *Для любого ограниченного множества* $Q \subset C_\tau$ *существует константа* L *такая, что для любых* $(t,\varphi(\cdot)) \in R^1 \times Q$ *и* $z \in F(t,\varphi(\cdot))$ *выполняется неравенство* $\|z\| \le L$.

Теорема 1 (см. [17]). *Если выполняются условия* А1–А3, *то задача* (2) *для любой начальной функции имеет локальное решение, любое решение может быть продолжено на правый максимальный промежуток существования* $[t_0-\tau,\omega)$ *и любое ограниченное непродолжимое решение определено на промежутке* $[t_0-\tau,+\infty)$.

Введем в рассмотрение два вида многозначных отображений, которые будем называть *предельными* для многозначного отображения F:

$$F^*(t,\varphi(\cdot)) = \bigcap_{b\ge 0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{a\ge b} F(t+a,\varphi(\cdot)), \quad F'(t,\varphi(\cdot)) = \bigcap_{n\ge 1} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k\ge n} F(t+t_k,\varphi(\cdot)),$$

где $a>0$, $t_k \to +\infty$ — произвольная последовательность, определяющая отображение F' (одна и та же для любых $(t,\varphi(\cdot))$), и $\overline{\mathrm{co}}$ — знак выпуклой замкнутой оболочки множества.

Следующая теорема описывает некоторые общие свойства предельных многозначных отображений из статьи [18], которые могут быть полезны для их построения и применения.

Теорема 2. *Пусть* $F : R^1 \times C_\tau \to \operatorname{conv} R^n$ *— ограниченное при каждом фиксированном* $\varphi(\cdot)$ *многозначное отображение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любых фиксированных* $(t,\varphi(\cdot))$ *множества* $F^*(t,\varphi(\cdot))$ *и* $F'(t,\varphi(\cdot))$ *непустые, выпуклые и компактные.*

2. *Для любой функции* $\varphi(\cdot)$ *множество* $F^*(t,\varphi(\cdot))$ *не зависит от* t.

3. *Для предельного относительно последовательности* $t_n \to +\infty$ *отображения выполняется* $F'(t,\varphi(\cdot)) \subset F^*(\varphi(\cdot))$ *для любых* $(t,\varphi(\cdot))$.

4. *Если отображение* $F = f(t,\varphi(\cdot))$ *однозначно, то его предельные отображения в общем случае многозначны. При этом значение* $f^*(\varphi(\cdot))$ *(соответственно* $f'(t,\varphi(\cdot))$*) будет однозначно тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t,\varphi(\cdot))$ *(соответственно тогда и только тогда, когда существует предел* $\lim\limits_{t_n\to+\infty} f(t+t_n,\varphi(\cdot))$*).*

5. *При любой фиксированной функции* $\varphi(\cdot)$ *множество* $F^*(t,,\varphi(\cdot))$ *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных значений функций* $h(t) \in F(t,\varphi(\cdot))$ *при условии, что* $t \to +\infty$.

6. *При любых фиксированных* $(t,\varphi(\cdot))$ *множество* $F'(t,\varphi(\cdot))$ *представляет собой выпуклую замкнутую оболочку всех предельных точек последовательностей векторов* $z_k \in F(t+t_k,\varphi(\cdot))$, *где* $\{t_k\}$ *— последовательность, которая определяет отображение* $F'(t,\varphi(\cdot))$.

Здесь и далее зависимость в обозначениях отображения F^* от переменной t не указывается и полагается, например, что $F^*(t,\varphi(\cdot)) = F^*(0,\varphi(\cdot))$.

Функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F^*(\varphi(\cdot)) \tag{3}$$

называется *предельным* для включения (2) и функционально-дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F'(t, \varphi(\cdot)) \tag{4}$$

называется *предельным относительно последовательности* $\{t_k\}$ для включения (2).

Предельные функционально-дифференциальные включения (3) и (4) будут изучаться при дополнительном условии

А4. *Для любых* $\varphi(\cdot)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют числа* $\delta = \delta(\varepsilon, \varphi(\cdot)) > 0$ *и* $\gamma = \gamma(\varepsilon, \varphi(\cdot))$ *такие, что*

$$F(t', \varphi'(\cdot)) \subset F^{\varepsilon}(t, \varphi(\cdot)) \tag{5}$$

для всех $t > \gamma$, t' *и* $\varphi'(\cdot)$ *таких, что* $|t' - t| < \delta$ *и* $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$.

Отметим, что условие (5) является некоторым усилением свойства полунепрерывности сверху многозначного отображения $(t, \varphi(\cdot)) \to F(t, \varphi(\cdot))$ и всегда выполняется, если это отображение полунепрерывно сверху в каждой точке $(t, \varphi(\cdot))$ равномерно относительно переменной t.

Теорема 3. *Если для многозначного отображения* F *выполняются условия* А1–А4, *то для предельных многозначных отображений* F^* *и* F' *выполняются условия* А1–А3.

Доказательство. Условия А1 и А3 для отображений F' и F^* вытекают непосредственно из условий А1 и А3 и определений. Так как многозначное отображение F^* не зависит от переменной t, его полунепрерывность по переменной $\varphi(\cdot)$ следует из [18, лемма 2].

Докажем А2 для предельного многозначного отображения $F'(t, \varphi(\cdot))$, определенного последовательностью $\{t_k\}$. Для этого достаточно показать, что для любых фиксированных $(t, \varphi(\cdot))$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(t, \varphi(\cdot), \varepsilon) > 0$ такое, что при условиях $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$ выполняется неравенство

$$\rho(F'(t', \varphi'(\cdot)), F'(t, \varphi(\cdot))) < \varepsilon. \tag{6}$$

Из условия А4 получаем, что для любой функции $\varphi(\cdot)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существуют число $\delta = \delta(\varphi(\cdot), \varepsilon) > 0$ и номер $m = m(\varphi(\cdot), \varepsilon)$ такие, что

$$\overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k \geq n} F(t' + t_k, \varphi'(\cdot)) \subset \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{k \geq n} (F(t + t_k, \varphi(\cdot)))^{\varepsilon} \tag{7}$$

для всех $n \geq m$, $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$. Здесь учтено, что для любого ограниченного множества $A \subset R^n$ выполняется (см. [19, с. 50])

$$\overline{\mathrm{co}} A = \mathrm{co}\, \overline{A}, \quad (\mathrm{co}\, A)^{\varepsilon} = \mathrm{co}(A^{\varepsilon}).$$

Из (7) получаем, что $F'(t', \varphi'(\cdot)) \subset \overline{(F'(t, \varphi(\cdot)))^{\varepsilon}}$ для всех $|t' - t| < \delta$ и $\|\varphi'(\cdot) - \varphi(\cdot)\|_C < \delta$, откуда вытекает (6) и теорема доказана.

2. Принцип инвариантности

Всюду в дальнейшем полагаем, что все ограниченные решения включений (2)–(4) определены на правых максимальных промежутках существования $[t_0 - \tau, +\infty)$.

Будем говорить, что множество $D \subset C_\tau$ *полуинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (3) такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Множество $D \subset C_\tau$ *квазиинвариантно*, если для любой функции $\psi(\cdot) \in D$ существует решение $y(t)$ включения (4) с некоторым предельным многозначным отображением $F'(t, \varphi(\cdot))$ в правой части такое, что $y_0(\cdot) = \psi(\cdot)$ и $y_t(\cdot) \in D$ для всех $t \geq 0$.

Функцию $\psi(\cdot)$ назовем *ω-предельной* для решения $x(t)$ включения (2), определенного на промежутке $[t_0 - \tau, +\infty)$, если существует последовательность $t_n \to +\infty$ такая, что $x_{t_n}(\cdot) \to \psi(\cdot)$. Множество всех ω-предельных функций обозначим через $\Lambda^+(x)$.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* A1–A4. *Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ включения (2) множество $\Lambda^+(x)$ непусто, компактно, связно, квазиинвариантно и $d_C(x_t(\cdot), \Lambda^+(x)) \to 0$ при $t \to +\infty$, где d_C означает расстояние от точки до множества в пространстве C_τ.*

В рамках сделанных предположений утверждение теоремы 4 вытекает из [18, теорема 3].

Замечание 1. Поскольку $F(t, \varphi(\cdot)) \subset F^*(\varphi(\cdot))$ при любых $(t, \varphi(\cdot))$, то свойство квазинвариантности влечет свойство полуинвариантности для множества $\Lambda^+(x)$. Существование и продолжимость решений включений (3) и (4) в рамках предположений теоремы 3 необходимы при рассмотрении произвольного квазиваинвариантного множества D

Для конструктивного описания множеств точек нулей производной (и самой производной) функционала Ляпунова в силу функционально-дифференциального включения будем использовать специальный класс инвариантно дифференцируемых функционалов, который был введен в [20] для решения задач теории устойчивости в рамках прямого метода Ляпунова.

Для произвольных функции $\varphi(\cdot) \in C_\tau$ и числа $\Delta > 0$ через $E_\Delta(\varphi(\cdot))$ обозначим множество всех непрерывных продолжений $\Phi(\cdot)$ функции $\varphi(\cdot)$ на отрезок $[-\tau, \Delta]$. Для каждых функции $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ и числа $\xi \in [0, \Delta)$ через $\Phi_\xi(\theta)$ обозначим $\Phi_\xi(\theta) = \Phi(\xi + \theta)$, где $-\tau \leq \theta \leq 0$.

Определение 1. Функционал $W : C_\tau \to R^1$ имеет *инвариантную производную* $\partial_\varphi W$ в точке $\varphi(\cdot) \in C_\tau$, если для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ функция $Y_\Phi(\xi) = W(\Phi_\xi(\cdot))$ имеет в нуле конечную правую производную $\partial Y_\Phi/\partial\xi|_{\xi=+0}$, инвариантную относительно функций $\Phi(\cdot)$. Последнее означает, что значение правой производной в нуле одно для всех $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$.

Определение 2. Функционал $W : R^1 \times R^n \times C_\tau \to R$ *инвариантно дифференцируем* в точке $p = (t, x, \varphi(\cdot)) \in R^1 \times R^n \times C_\tau$, если в этой точке существуют конечные $\partial W/\partial t, \nabla_x W, \partial_\varphi W$ и для любой $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\varphi(\cdot))$ выполняется равенство

$$W(t + \zeta, x + z, \Phi_\xi(\cdot)) - W(t, x, \varphi(\cdot)) = \frac{\partial W[p]}{\partial t} \cdot \zeta + \langle \nabla_x W[p], z \rangle + \partial_\varphi W[p] \cdot \xi + o(\sqrt{\|z\|^2 + \zeta^2 + \xi^2})$$

при каждых $z \in R^n$, $\xi \in [0, \Delta]$, $\zeta \geq 0$, причем $o(\cdot)$ зависит от выбора $\Phi(\cdot) \in E_\Delta(\psi(\cdot))$. (Здесь $\nabla_x W$ — градиент функционала W по переменной x, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного произведения.)

Замечание 2. Для того чтобы функционал W был инвариантно дифференцируем в точке $p = (t, x, \varphi(\cdot))$, необходимо, чтобы он имел в этой точке частные производные $\nabla_x W$, $\partial_\psi W$, и достаточно, чтобы они были инвариантно непрерывны в точке p. Эти и другие факты относительно инвариантно дифференцируемых функционалов, а также примеры имеются в [20].

Будем рассматривать инвариантно-дифференцируемый функционал Ляпунова $V(t, x, \varphi(\cdot))$. Его верхнюю $\dot V^+(t, \varphi(\cdot))$ и нижнюю $\dot V^-(t, \varphi(\cdot))$ производные в силу функционально-дифференциального включения (2) определим следующими равенствами:

$$\dot V^+ = \sup_{y \in F(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y\rangle + \partial_\varphi V + \partial_t V)|_{\,x=\varphi(0)},$$

$$\dot V^- = \inf_{y \in F(t,\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V, y\rangle + \partial_\varphi V + \partial_t V)|_{\,x=\varphi(0)}.$$

Замечание 3. Инвариантная производная функционала V не зависит от продолжения функции $\varphi(\cdot)$ вправо и, следовательно, не зависит от решения функционально-дифференциального включения (2). Функционал V рассматривается как функция трех переменных $(t, x, \varphi(\cdot))$, и это позволяет конструктивно вычислять полные производные функционала V в силу функционально-дифференциального включения (2), не зная решения. Иными словами, в производных $\dot V^+$ и $\dot V^-$ выделена бесконечномерная составляющая (инвариантная производная), не зависящая от правой части включения (2), и конечномерная (градиент), которая эту зависимость обеспечивает. Связь между производными вдоль решения и производными в силу исследуемых систем для функционально-дифференциальных уравнений установлена в [20]. Для функционально-дифференциальных включений эту связь обеспечивает следующая

Лемма 1 (см. [21, лемма 1]). *Пусть выполняются условия* A1–A3, $x(t)$ — *решение дифференциального включения* (2)*, определенное на некотором промежутке* $[t_0 - \tau, t_1)$*, и* $V(t, x, \varphi(\cdot))$ — *инвариантно-дифференцируемый функционал.*

Тогда справедливы неравенства

$$\dot V^-(t, x_t(\cdot)) \leq D_- v(t) \leq D^+ v(t) \leq \dot V^+(t, x_t(\cdot)) \tag{8}$$

для всех $t \in [t_0, t_1)$*, где* $D_- v(t)$ *и* $D^+ v(t)$ — *правое нижнее и соответственно правое верхнее производные числа Дини функции* $v(t) = V(t, x(t), x_t(\cdot))$.

Неравенства (8) позволяют установить связь между производной функционалов $V(p)$, $p = (t, x, \varphi(\cdot))$, вдоль решения и производной в силу включения (2).

Через $w(t, \varphi(\cdot)) \geq 0$ будем обозначать измеримую по t, непрерывную по $\varphi(\cdot)$ и ограниченную на каждом множестве $R^1 \times K$ функцию, где $K \subset C_\tau$ — компактное множество, для которой выполняется условие

$$\lim_{t \to +\infty, \varphi(\cdot)' \to \varphi(\cdot)} |w(t, \varphi(\cdot)') - w(t, \varphi(\cdot))| = 0. \tag{9}$$

Условие (9) означает, что для w выполняется условие A4. Для этого достаточно также, чтобы функция w была непрерывна по $\varphi(\cdot)$ равномерно относительно t.

Сформулируем две теоремы из [18], которые являются аналогами принципа инвариантности для функционально-дифференциальных включений, и будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* A1–A3 *и для включения* (2) *существует инвариантно-дифференцируемый функционал* $V(t, x, \varphi(\cdot))$, *ограниченный снизу на каждом множестве вида* $R^1 \times K[0] \times K$, *где* $K \subset C_\tau$ — *компактное множество,* $K[0] = \{\varphi(0) : \varphi(\cdot) \in K\}$, *такой, что выполняется условие*

$$\dot{V}^+(t, \varphi(\cdot)) \leq -w(t, \varphi(\cdot)). \tag{10}$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему квазиинвариантному подмножеству множества*

$$E_w = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \alpha(\varphi(\cdot)) = 0\}, \tag{11}$$

где $\alpha(\varphi(\cdot))$ — *нижний предел функции* $t \to w(t, \varphi(\cdot))$ *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что для каждого фиксированного $\varphi(\cdot)$ значение функции $\alpha(\varphi(\cdot))$ реализуется на некоторой последовательности $w(t_k, \varphi(\cdot))$ при $t_k \to +\infty$. Поэтому формуле (11) можно придать вид

$$E_w = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \exists t_k \to +\infty,\ \lim_{k \to +\infty} w(t_k, \varphi(\cdot)) = 0\}.$$

Теорема 6. *Пусть в условиях теоремы* 5 *инвариантно-дифференцируемый функционал* $V(x, \varphi(\cdot))$ *не зависит от переменной* t. *Введем обозначения:*

$$\dot{V}^{*+}(\varphi(\cdot)) = \sup_{y \in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V(x, \varphi(\cdot)))|_{\,x=\varphi(0)},$$

$$\dot{V}'^+(t, \varphi(\cdot)) = \sup_{y \in F'(t, \varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V(x, \varphi(\cdot)))|_{\,x=\varphi(0)}.$$

Тогда для любого ограниченного решения включения (2) *с* ω*-предельным множеством* $\Lambda^+(x)$ *справедливы следующие утверждения.*

1. *Для любой начальной функции* $\varphi_0(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ *существуют предельное относительно некоторой последовательности* $\{t_k\}$ *отображение* $F'(t, \varphi(\cdot))$ *и решение* $y(t)$ *включения* (4) *с начальным условием* $y_0 = \varphi_0(\cdot)$ *такие, что выполняется равенство*

$$\dot{V}'^+(t, y_t(\cdot)) = 0$$

для п. в. $t \geq 0$.

2. *Множество* $\Lambda^+(x)$ *принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества*

$$E^* = \{\varphi(\cdot) \in C_\tau : \dot{V}^{*+}(\varphi(\cdot)) = 0\}. \tag{12}$$

Множества (11) и (12) являются аналогами множества нулей производной функции Ляпунова в принципе инвариантности Ла-Салля для автономных дифференциальных уравнений.

3. Принцип инвариантности с набором вспомогательных функционалов Ляпунова

Пусть $V_j(x, \varphi(\cdot))$ — инвариантно-дифференцируемые функционалы, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Введем обозначения:

$$\dot{V}'^+_j(t, \varphi(\cdot)) = \sup_{y \in F'(t, \varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V_j(x, \varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)},$$

$$\dot{V}^{*+}_j(\varphi(\cdot)) = \sup_{y \in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V_j(x, \varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)}$$

и

$$\dot{V}'^-_j(t, \varphi(\cdot)) = \inf_{y \in F'(t, \varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V_j(x, \varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)},$$

$$\dot{V}^{*-}_j(\varphi(\cdot)) = \inf_{y \in F^*(\varphi(\cdot))} (\langle \nabla_x V_j(x, \varphi(\cdot)), y \rangle + \partial_\varphi V_j(x, \varphi(\cdot)))|_{x=\varphi(0)}.$$

Теорема 7. *Пусть выполняются все предположения теоремы 5, условие* А4, $M \subset E_w$ *— замкнутое множество и существуют инвариантно-дифференцируемые функционалы* $V_j(x,\varphi(\cdot))$, $j = 1,\dots,m$, *такие, что для любой функции* $\varphi(\cdot) \in E_w \backslash M$ *найдется индекс* $j \in \{1,\dots,m\}$ *такой, что*

$$V_j(\varphi(0),\varphi(\cdot)) = 0 \tag{13}$$

и выполняется одно из условий:

$$\dot{V}_j'^{+}(0,\varphi(\cdot)) < 0, \quad \dot{V}_j'^{-}(0,\varphi(\cdot)) > 0 \tag{14}$$

для любого предельного отображения $F'(t,\varphi(\cdot))$ *и для каждой функции* $\varphi(\cdot) \in E_w \backslash M$.

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *выполняется*

$$\Lambda^+(x) \subset M. \tag{15}$$

Доказательство. Предположим, что условие (15) не выполняется. Тогда существует функция $\varphi_0(\cdot) \in \Lambda^+(x)\backslash M$. В соответствии с теоремой 4 множество $\Lambda^+(x)$ квазиинвариантно. Тогда существует решение $y^1(t)$ включения (4) с начальным условием $y_0^1(\cdot) = \varphi_0(\cdot)$, удовлетворяющее $y_t^1(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$. Поскольку множество M замкнуто, то $y_t^1(\cdot) \notin M$ для всех $t \in [0,h_0)$ для некоторого достаточно малого $h_0 > 0$, а в соответствии с теоремой 5 выполняется $y_t^1(\cdot) \in E_w$ для всех $t \geq 0$. Тогда в соответствии с неравенствами (14) и леммой 1, примененной к включению (4), найдутся функционал V_{j_1} и число $0 < h_1 < h_0$ такие, что

$$V_{j_1}(y^1(0),y_0^1(\cdot)) = 0, \quad V_{j_1}(y^1(h_1),y_{h_1}^1(\cdot)) \neq 0, \quad y_{h_1}^1(\cdot) \in \Lambda^+(x)\backslash M.$$

Аналогично вышесказанному существуют решение $y^2(t)$ включения (4) с начальным условием $y_0^2(\cdot) = y_{h_1}^1(\cdot)$, удовлетворяющее $y_t^2(\cdot) \in \Lambda^+(x)$ для всех $t \geq 0$, число $h_2 > 0$ и функционал V_{j_2}, $j_1 \neq j_2$, такие, что

$$V_{j_2}\big(y^2(0),y_0^2(\cdot)\big) = 0, \quad V_{j_2}\big(y^2(h_2),y_{h_2}^2(\cdot)\big) \neq 0, \quad y_{h_2}^2(\cdot) \in \Lambda^+(x)\backslash M.$$

Так как $V_{j_1}(y^1(h_1),y_{h_1}^1(\cdot)) \neq 0$, то число h_2 можно взять настолько малым, что будет выполняться $V_{j_1}\big(y^2(h_2),y_{h_2}^2(\cdot)\big) \neq 0$. Продолжая этот процесс, получим точку h_m такую, что $y_{h_m}^m(\cdot) \in E_w\backslash M$ и $V_j(y^m(h_m),y_{h_m}^m(\cdot)) \neq 0$ для всех $j = 1,\dots,m$. Последнее противоречит условию (13), и теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть выполняются все условия теоремы* 5, *множество* E^* *определено равенством* (12), $M \subset E^*$ *— замкнутое множество. Предположим, что существуют инвариантно-дифференцируемые функционалы* $V_j(\varphi(\cdot))$, $j = 1,\dots,m$, *такие, что для любого* $\varphi(\cdot) \in E^*\backslash M$ *найдется индекс* $j \in \{1,\dots,m\}$ *такой, что выполняются* (13) *и одно из условий*

$$\dot{V}_j^{*+}(\varphi(\cdot)) < 0, \quad \dot{V}_j^{*-}(\varphi(\cdot)) > 0. \tag{16}$$

Тогда для любого ограниченного решения $x(t)$ *включения* (2) *выполняется* (15).

Доказательство повторяет доказательство теоремы 7 с заменой производных $\dot{V}'^{+}(t,\varphi(\cdot))$ и $\dot{V}'^{-}(t,\varphi(\cdot))$ на $\dot{V}^{*+}(\varphi(\cdot))$ и $\dot{V}^{*-}(\varphi(\cdot))$, множества E_w на множество E^* соответственно и использовании неравенств (16) вместо неравенств (14).

Следствие 1. *В рамках предположений теоремы* 7 *или теоремы* 8 *для любого ограниченного решения дифференциального включения* (2) *выполняется* $d(x_t(\cdot), M) \to 0$ *при* $t \to +\infty$.

Доказательство вытекает из теорем 7, 8 и теоремы 4.

Замечание 4. Полученные результаты могут применяться к обыкновенным дифференциальным уравнениям и включениям без запаздывания. Отметим, что важным условием при этом является ограниченность решений. Основы теории ограниченности решений систем дифференциальных уравнений на основе метода функций Ляпунова заложены в работе Иосидзавы [22]. Различные типы ограниченности решений и их сравнительный анализ имеются в [1]. В [23] к теории ограниченности решений применяются методы вектор-функций Ляпунова. Достаточные условия существования ограниченных и периодических решений дифференциальных включений представлены в [19].

Для функционально-дифференциальных включений здесь приведем лишь одно простое утверждение.

Функционал $V(t, x, \varphi(\cdot))$ будем называть *бесконечно большим*, если для любого числа $A > 0$ существует число $B > 0$ такое, что $|V(t, \varphi(0), \varphi(\cdot))| > A$ для всех $t \leq B$ и $\|\varphi(\cdot)\|_C > B$.

Следствие 2. *В рамках предположений теорем* 7 *или* 8 *с бесконечно большим и ограниченным снизу функционалом* $V(t, x, \varphi(\cdot))$ *утверждения этих теорем и следствия* 1 *справедливы для любого решения* $x(t)$ *включения* (2).

Доказательство. Из неравенства (10) и леммы 1 вытекает, что для любого решения $x(t)$ включения (2) функция $t \mapsto V(t, x(t), x_t(\cdot))$ не возрастает. Кроме того, она ограничена снизу и поэтому для неограниченного решения $x(t)$ эта функция ограничена, что противоречит условию быть бесконечно большим для функционала V. Следовательно, любое решение функционально-дифференциального включения (2) ограничено и утверждения теорем 7, 8 и следствия 1 справедливы для всех решений включения (2).

Замечание 5. В теоремах 7, 8 множества E_w и E^* могут быть заменены любым содержащим их множеством E и при этом останутся справедливыми утверждения следствий 1 и 2.

4. Притяжение для механических систем с трением

Принцип инвариантности не позволяют в полной мере решать задачу притяжения для включения (2), так как множество M заранее неизвестно и может формироваться, по сути дела, лишь в ходе анализа множеств нулей верхних производных функционала V. В результате этого и появляются вспомогательные функционалы V_j, определяющие те области из множеств E_w и E^*, которым притягивающее множество заведомо не принадлежит. Продемонстрируем это для механической системы в форме уравнений Лагранжа 2-го рода с k степенями свободы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i^A + Q_i^T, \quad i = 1, \ldots, k, \tag{17}$$

под действием потенциальных и диссипативных активных сил Q_i^A и сил трения скольжения Q_i^T. Для таких систем функция Ляпунова в форме энергии имеет знакопостоянную производную. Детальное описание и исследование вопросов притяжения для (17) в автономном случае имеется в [23].

Используются следующие обозначения: $q = (q_1, \dots, q_k)'$, $q = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^k)'$, $q = (\ddot{q}^1, \dots, \ddot{q}^k)'$, $Q^A = (Q_1^A, \dots, Q_k^A)'$ — векторы обобщенных координат, скоростей, ускорений и активных сил. (Здесь $'$ — знак транспонирования.)

Исследование системы (17) проводится с целью показать детали предлагаемого метода, связанные со вспомогательными функционалами Ляпунова. Поэтому мы ограничиваемся случаем, когда кинетическая энергия T системы представляет собой положительно определенную квадратичную форму

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$$

обобщенных скоростей с симметричной положительно определенной матрицей $A(q) = [a_{ij}(q)]_1^k$, а от переменной t зависят лишь коэффициенты трения.

Активные силы Q^A представляют собой сумму потенциальных сил $K = (K_1(q), \dots, K_k(q))'$, $K_i(q) = -\partial\Pi(q)/\partial q^i$, где $\Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, и диссипативных сил

$$D = (D_1(q,\dot{q}), \dots, D_k(q,\dot{q}))', \quad D(q,0) = 0, \quad \sum_{i=1}^{k} D_i(q,\dot{q})\dot{q}^i \le 0,$$

которые могут представлять силы вязкого трения или силы сопротивления среды. Здесь предполагаем также, что на систему действуют активные силы, зависящие от предшествующего состояния системы. Это могут быть возмущения или разрывные позиционные управляющие силы любой физической природы с запаздыванием. Они выделяются в отдельный класс внешних сил $G(\dot{q}(t-\tau))$.

Обобщенные силы трения скольжения при условии $\dot{q}^i \ne 0$ имеют вид

$$Q_i^T(q,\dot{q}) = -f_i(t,q,\dot{q})|N_i(q,\dot{q})|\operatorname{sgn}\dot{q}^i, \tag{18}$$

где $|N_i(q,\dot{q})|$ — модули нормальных реакций в точках соприкосновения трущихся тел, $f_i(t,q,\dot{q}) > 0$ — коэффициенты трения, $1 \le s \le k$.

Отметим, что если активные силы, действующие на систему, известны, то реакции связей с трением $N_i(q,\dot{q})$ неизвестны и подлежат определению (см. [23, 24]. В данной статье эти вопросы не затрагиваются.

Применим к силам трения в точках разрыва простейшее выпуклое доопределение в смысле А. Ф. Филиппова [19] и тогда вместе с (18) получим общее выражение сил трения в виде

$$Q_i^T(t,q,\dot{q}) = \begin{cases} -f_i|N_i|\operatorname{sgn}\dot{q}, & \text{если } \dot{q}^i \ne 0,\\ [-f_i|N_i|, f_i|N_i|], & \text{если } \dot{q}^i = 0, \end{cases}$$

для каждого $i = 1, \dots, k$.

Введем в рассмотрение функцию $g = (g_1, \dots, g_k)'$, определенную равенствами

$$g_i(q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial a_{\nu j}}{\partial q^i}\dot{q}^\nu\dot{q}^j - \sum_{j=1}^{k}\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial a_{ij}}{\partial q^\nu}\dot{q}^\nu\dot{q}^j.$$

Тогда (17) в развернутом виде запишется так:

$$A(q)\ddot{q} \in g(q,\dot{q}) + D(q,\dot{q}) + K(q) + G(\dot{q}(t-\tau)) + Q^T(t,q,\dot{q}). \tag{19}$$

Полагая $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q}$, $x = (x_1, x_2)$ и $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \le \theta \le 0$, стандартными преобразованиями включение (18) можно привести к виду

$$\dot{x} \in F(t, x_t(\cdot)). \tag{20}$$

Применительно к включению (20) могут использоваться результаты предыдущих разделов данной статьи. Далее рассматриваем систему (17) в удобной для нас форме (19).

Положим

$$a_i(x) = \varliminf_{t\to+\infty} f_i(t,x), \quad b_i(x) = \varlimsup_{t\to+\infty} f_i(t,x), \quad i = 1,\ldots,k,$$

и определим многозначную функцию со значениями $Q^*(x) = Q_1^*(x)\times\ldots\times Q_k^*(x)$ равенствами

$$Q_i^*(x) = \begin{cases} [a_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i < 0, \\ [-b_i|N_i|, -a_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i > 0, \\ [-b_i|N_i|, b_i|N_i|], & \text{если } \dot q^i = 0. \end{cases}$$

Предельное функционально-дифференциальное включение, построенное с использованием теоремы 2, имеет вид

$$A(q)\ddot q \in g(q,\dot q) + D(q,\dot q) + K(q) + G(\dot q(t-\tau)) + Q^*(q,\dot q). \tag{21}$$

Функционал Ляпунова возьмем в виде

$$V(x,\varphi(\cdot)) = c(T(x)+\Pi(x)) + \int\limits_{-\tau}^{0} G^2(\varphi_2(\theta))\,d\theta, \tag{22}$$

где $\varphi(\cdot) = (\varphi_1(\cdot),\varphi_2(\cdot))$, $c > 0$ и

$$G^2(\varphi_2(\theta)) = \sum_{i=1}^{k} G_i^2(\varphi_2(\theta))$$

для всех $\theta\in[-\tau,0]$. Функционал (22) инвариантно дифференцируем, и его инвариантная производная по переменной $\varphi(\cdot)$ при условии $x = \varphi(0)$ определяется равенством [20]

$$\partial_\varphi V = G^2(\varphi_2(0)) - G^2(\varphi_2(-\tau)).$$

Используя леммы 3 и 4 из [25], заключаем, что

$$\dot V^+(t,\varphi(\cdot)) = c\Bigg(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} f_i(t,x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| \\ + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\Bigg)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial_\varphi V,$$

$$\dot V^{*+}(\varphi(\cdot)) = c\Bigg(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} a_i(x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| \\ + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0)\Bigg)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial_\varphi V.$$

Если $\dot V^+(t,\varphi(\cdot)) \le 0$, то в соответствии с теоремой 8 множество $\Lambda^+(x)$ любого ограниченного решения $x(t) = (q(t),\dot q(t))$ включения (21) принадлежит наибольшему полуинвариантному подмножеству множества

$$E^* = \left\{ \varphi(\cdot) : c \left(\sum_{i=1}^{k} D_i(x)\varphi_{2i}(0) - \sum_{i=1}^{k} a_i(x)|N_i(x)||\varphi_{2i}(0)| \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0) \right)\Bigg|_{x=\varphi(0)} + \partial V_\varphi = 0 \right\}. \quad (23)$$

Таким образом, принцип инвариантности для системы (17) в форме включения (21) сводится к условиям знакопостоянства производной $\dot{V}^+(t, \varphi(\cdot))$, а вспомогательные функционалы должны определяться в результате анализа множества (23).

Предположим, что диссипация является полной относительно всех обобщенных скоростей $q^1, \dots, q^k$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{k} D_i(q, \dot{q}^i)\dot{q}^i \le -\gamma \sum_{i=1}^{k} \dot{q}^{i2}, \quad (24)$$

и рассмотрим множество

$$E_0^* = \left\{ \varphi(\cdot) : -c \left(\gamma \sum_{i=1}^{k} \varphi_{2i}^2(0) + \sum_{i=1}^{k} a_i(\varphi(0))|N_i(\varphi(0))||\varphi_{2i}(0)| \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sum_{i=1}^{k} G_i(\varphi_2(-\tau))\varphi_{2i}(0) \right) + \partial V_\varphi = 0 \right\}.$$

Из условия (24) вытекает, что $E^* \subset E_0^*$, и, как отмечено в замечании 5, в теореме 8 может быть использовано вместо множества E^* множество E_0^*.

Выберем $c = 2$ и $\gamma > 1/2$. Тогда

$$E_0^* = \left\{ \varphi(\cdot) : -\sum_{i=1}^{k} \big(\varphi_{2i}(0) - G_i(\varphi_2(-\tau))\big)^2 - 2\sum_{i=1}^{k} a_i(\varphi(0))\,|N_i(\varphi(0))|\,|\varphi_{2i}(0)| \right.$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{k} \big(\alpha^2 \varphi_{2i}^2(0) - G_i^2(\varphi_2(0))\big) = 0 \right\}, \quad (25)$$

где $\alpha^2 = 2\gamma - 1$.

Пусть для любого $z \in R^k$ выполняется $\|G(z)\| \le \alpha\|z\|$ и

$$a_i(x)|N_i(x)| \ne 0 \quad (26)$$

для всех $i = 1, \dots, k$, и $x \in R^{2k}$. Тогда множество (25), очевидно, определяется условием

$$\varphi(\cdot) \in E_0^* \iff \varphi_2(0) = 0 \text{ и } G(\varphi_2(-\tau)) = 0. \quad (27)$$

Далее предположим, что $A = E$ — единичная матрица. Некоторые вопросы общей теории для такого случая исследовались в [26]. Здесь рассмотрим асимптотическое поведение решений с использованием теоремы 8. Определим множество

$$M = \{\varphi(\cdot) : \varphi_{2i}(0) = 0,\ G(\varphi_2(-\tau)) = 0,$$
$$|K_i(\varphi_1(0))| \le b_i(\varphi(0))|N_i(\varphi(0))|,\ i = 1, \dots, k\} \quad (28)$$

и возьмем в качестве вспомогательных функционалов $V_i(x, \varphi(\cdot)) = \dot{x}_{2i}$, $i = 1, \dots, k$. Тогда $M \subset E_0^*$. Если $\varphi(\cdot) \in E_0^* \backslash M$, то для некоторого индекса i выполняется $|K_i(\varphi_1(0)| > b_i(\varphi(\cdot))|N_i(\varphi(\cdot))|$ и непосредственно из определений вытекает, что $V_i(\varphi(0), \varphi(\cdot)) = 0$ и выполняется одно из условий: $\dot{V}^{*+} = b_i - K_i < 0$ или $\dot{V}^{*-} = -b_i - K_i > 0$. Поэтому в соответствии с теоремой 8 заключаем, что $\Lambda^+(x) \subset M$ для любого ограниченного решения включения (19). В силу следствия 1 $d(x_t(\cdot), M) \to 0$ и поэтому $\Lambda^+(x) \subset \{\varphi(\cdot) : \varphi_2(\theta) \equiv 0\}$. Следовательно,

$$\Lambda^+(x(\cdot)) \subset \{\varphi(\cdot) : \varphi_2(\cdot) = 0,\ |K_i(\varphi_1(0)| \le b_i(\varphi(\cdot))|N_i(\varphi(\cdot))|,\ i = 1, \dots, k\},$$

Функционал V является бесконечно большим и ограниченным снизу. В силу следствия 2 в терминах исходной системы (19) заключаем, что любое ее решение $x(t) = (q(t), \dot{q}(t)))$ стремится к множеству

$$M^* = \{(q, \dot{q}) : \dot{q}^i = 0,\ |K_i(q)| \le b_i(q, \dot{q})|N_i(q, \dot{q})|,\ i = 1, \dots, k\}. \tag{29}$$

В заключение отметим, что множество (28) оказалось возможным описать достаточно конструктивно, используя неравенства (24) и (26), так как они обеспечивали структуру множества E^* и выбор вспомогательных функционалов V_i. Множество (29) представляет собой множество неизолированных положений равновесия предельного включения (21) с нулевой функцией G. Если все коэффициенты трения $f_i(t, q, \dot{q})$ являются невозрастающими по переменной t функциями, то, как нетрудно видеть, стационарные множества исходной и предельной систем совпадают. Тогда из следствия 2 вытекает, что при всех сделанных выше предположениях система (19) дихотомична, т. е. любое ее ограниченное решение стремится к стационарному множеству M^*. Вопрос о том, стремится ли это решение к какому-либо конкретному положению равновесия, остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руш Н., Абетс М., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980.
2. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970.
3. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983.
4. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981.
5. *Мартынюк А. А., Като Д., Шестаков А. А.* Устойчивость движения: метод предельных уравнений. Киев: Наук. думка, 1990.
6. *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Am. Math. Soc. 1967. V. 127, N 2. P. 241–283.
7. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation // J. Differ. Equ. 1977. V. 23, N 2. P. 216–223.
8. *Artstein Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equations and Kurzweil equations // J. Differ. Equ. 1977. V. 23, N 2. P. 224–243.
9. *Artstein Z.* The limiting equations of nonautonomous ordinary differential equations // J. Differ. Equ. 1977. V. 25. P. 184–202.
10. *Андреев А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Автоматика и телемеханика. 2009. № 9. С. 4–55.
11. *Финогенко И. А.* Предельные дифференциальные включения и принцип инвариантности неавтономных систем // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 454–471.
12. *Матросов В. М.* Об устойчивости движения // Прикл. математика и механика. 1962. Т. 26, № 6. С. 992–1002.
13. *Матросов В. М., Финогенко И. А.* О притяжении для автономных механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 1. С. 100–120.

14. *Финогенко И. А.* О притяжении и слабом притяжении для автономных функционально-дифференциальных включений с использованием нескольких функционалов Ляпунова // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 12. С. 213–221.
15. *Финогенко И. А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономных дифференциальных включений с набором нескольких функций Ляпунова // Вестн. российских университетов. Математика. 2025. Т. 30, № 150. С. 170–182.
16. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
17. *Куржанский А. Б.* О существовании решений уравнений с последействием // Дифференц. уравнения. 1980. Т. 6, № 10. С. 1800–1809.
18. *Финогенко И. А.* Принцип инвариантности для неавтономных функционально-дифференциальных включений // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 271–184.
19. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
20. *Ким А. В.* i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 1996.
21. *Сурков А. В.* Об устойчивости функционально-дифференциальных включений с использованием инвариантно дифференцируемых функционалов Ляпунова // Дифференц. уравнения. 2007. Т. 43, № 8. С. 1055–1063.
22. *Yoshizawa T.* Liapunov′s function and boundedness of solutions // Funkcialaj Ekvacioj. 1959. V. 2. P. 95–142.
23. *Матросов В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2001.
24. *Матросов В. М., Финогенко И. А.* О разрешимости уравнений движения механических систем с трением скольжения // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 6. С. 3–10.
25. *Finogenko I. A.* On the asymptotic behavior of mechanical systems with friction // Sib. Math. J. 2022. V. 63, N 5. P. 974–982.
26. *Lamarque C-H., Bastien J., Holland M.* Study of maximal monotone model with a delay term // SIAM J. Numer. Anal. 2003. V. 41, N 4. P. 1286–1300.

Поступила в редакцию 15 января 2026 г.
После доработки 15 января 2026 г.
Принята к публикации 12 февраля 2026 г.

Иван Анатольевич Финогенко (ORCID 0000-0001-6821-3385)
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
fin2709@mail.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 27.02.2026. Уч.-изд. л. 16,5. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.03.2026. Объем файла 1.85 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.