

ISSN 2310-001X

# СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 66

6

2025

НОВОСИБИРСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

## **РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ**

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, А. Е. Гутман

Редакторы:

В. Л. Береснев,	В. Д. Мазуров,
А. А. Боровков,	А. Е. Миронов,
А. Ю. Веснин,	Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко,	А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов,	П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин
А. А. Лаптев,	

УЧРЕДИТЕЛИ  
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

# СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА      НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ      ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД  
Том 66, № 6 (394)      Ноябрь—декабрь, 2025

## СОДЕРЖАНИЕ

Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г. Критерий положительной определенности квадратичного функционала и его приложение ...	1001
Берестовский В. Н., Мустафа А. Радиус инъективности вытянутого эллипсоида вращения .....	1015
Бородин О. В., Иванова А. О. Описание инцидентных 3-граням ребер в 3-многогранниках без смежных 3-граней .....	1030
Веснин А. Ю., Егоров А. А. Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве .....	1037
Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Два примера квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^N$ .....	1057
Демиденко Г. В., Ма С. Об одном классе псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами .....	1063
Дубинин В. Н. Шварцман и критические значения полинома с вещественными критическими точками .....	1074
Лу С., Данилов О. А., Медных А. Д. Дискретные параболические функции и ряды Тейлора .....	1079
Карманова М. Б. Метрические свойства отображений, задающих липшицевы графики на двухступенчатых группах Карно .....	1094
Назаров С. А. Множественность асимптотических серий собственных чисел третьей краевой задачи с большим отрицательным коэффициентом Робэна .....	1108
Романов А. С. Отображения соболевского типа между метрическими пространствами с мерой. Операторы композиции .....	1134

НОВОСИБИРСК  
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ  
2025

<b>Романов В. Г.</b>	<i>Обратная задача для уравнений электродинамики</i>	
<i>с памятью</i>	.....	<b>1153</b>
<b>Указатель</b>	.....	<b>1162</b>

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

## КРИТЕРИЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ

Е. Р. Аваков, Г. Г. Магарил-Ильяев

**Аннотация.** Доказывается критерий положительной определенности квадратичного функционала на гильбертовом пространстве и приводится его приложение к доказательству достаточных условий слабого минимума второго порядка в простейшей задаче классического вариационного исчисления.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.601

**Ключевые слова:** положительная определенность, вариационное исчисление, условия второго порядка.

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе*

**Введение.** В теории экстремальных задач в вопросах, связанных с достаточными условиями экстремума, принципиальную роль играют условия положительной определенности некоторого квадратичного функционала, тесно связанного с исходной экстремальной задачей. В конечномерной ситуации положительность и положительная определенность данного функционала равносильны. В бесконечномерном случае это не так. В работе доказывается общий результат, представляющий собой критерий положительной определенности квадратичного функционала на произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве, связывающий, в определенном смысле, положительность и положительную определенность этого функционала. Мы применяем этот результат к доказательству достаточных условий слабого минимума в терминах условий Лежандра и Якоби в простейшей задаче вариационного исчисления. Такой подход нам представляется достаточно естественным, поскольку позволяет избежать обращений к теории поля, или гамильтонову формализму, или введению понятия лежандровой формы, или завышению гладкости (см. [1–4]).

### Критерий положительной определенности.

**Теорема 1** (критерий положительной определенности). Пусть  $H$  — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$ ,  $\Lambda$  — линейный непрерывный самосопряженный оператор на  $H$ ,  $L$  — замкнутое подпространство  $H$  и  $\text{codim } L < \infty$ . Тогда квадратичный функционал  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  положительно определен на  $L$  в том и только в том случае, когда он положителен на  $L$ , а подпространство  $\Lambda L$  замкнуто.

**Доказательство НЕОБХОДИМОСТЬ.** Пусть функционал  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  положительно определен на  $L$ , т. е. существует  $\alpha > 0$  такое, что

$$(\Lambda h, h) \geq \alpha \|h\|_H^2 \quad \forall h \in L. \quad (1)$$

Ясно, что этот функционал положителен на  $L$ . Докажем, что пространство  $\Lambda L$  замкнуто.

Для любых  $x, y \in L$  положим

$$(x, y)_0 = (\Lambda x, y).$$

Элементарно проверяется, что  $(\cdot, \cdot)_0$  определяет скалярное произведение на  $L$ . Обозначим через  $L_0$  пространство  $L$  с этим скалярным произведением. Соответственно обозначаем  $\|h\|_0^2 = (h, h)_0$ . Согласно (1)

$$\alpha \|h\|_H^2 \leq (\Lambda h, h) = (h, h)_0 = \|h\|_0^2 \leq \|\Lambda\| \|h\|_H^2. \quad (2)$$

Поскольку подпространство  $L$  замкнуто, оно гильбертово, а так как в силу (2) нормы в  $L$  и  $L_0$  эквивалентны, то  $L_0$  также гильбертово.

Обозначим через  $L^\perp$  ортогональное дополнение к  $L$ . Тогда  $H = L \oplus L^\perp$  и существуют линейные непрерывные операторы  $P_i$  на  $H$ ,  $i = 1, 2$ , такие, что  $\text{Im } P_1 = L$ ,  $\text{Im } P_2 = L^\perp$ ,  $\text{Ker } P_1 = L^\perp$  и  $\text{Ker } P_2 = L$ .

Пусть  $y \in L$ . Линейный непрерывный функционал  $x \mapsto (y, x)$  на  $L$  непрерывен и на  $L_0$  в силу (2). По теореме об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве найдется элемент  $z(y) \in L_0$  такой, что для любого  $x \in L$  (подпространства  $L$  и  $L_0$  как множества совпадают)

$$(y, x) = (z(y), x)_0 = (\Lambda z(y), x).$$

Следовательно,  $\Lambda z(y) - y \in L^\perp$  и так как  $y \in L$ , то

$$P_1 \Lambda z(y) = y. \quad (3)$$

Рассмотрим линейный оператор  $G : L \rightarrow P_1 H \times P_2 H$ , определенный формулой

$$Gx = (P_1 \Lambda x, P_2 \Lambda x).$$

Ясно, что это непрерывный оператор. Из (3) следует, что  $P_1 \Lambda L = L$ , а так как  $L$  — подпространство конечной размерности, то размерность пространства  $L^\perp$  конечна и тем самым размерность подпространства  $P_2 H$  конечна. Следовательно, по лемме о замкнутости образа (см. [2, § 2.1]) заключаем, что подпространство  $GL$  замкнуто.

Докажем, что отсюда следует замкнутость  $\Lambda L$ . Пусть  $y$  — предельная точка  $\Lambda L$  и последовательность  $y_k \in \Lambda L$  сходится к  $y$  при  $k \rightarrow \infty$ . Найдутся  $x_k \in L$  такие, что  $\Lambda x_k = y_k$ . Тогда

$$Gx_k = (P_1 \Lambda x_k, P_2 \Lambda x_k) \rightarrow (P_1 y, P_2 y)$$

при  $k \rightarrow \infty$ . Но  $(P_1 y, P_2 y) \in GL$ , так как  $GL$  замкнуто, и поэтому существует такое  $x \in L$ , что  $\Lambda x = y$ , т. е. подпространство  $\Lambda L$  замкнуто.

Достаточность. Пусть квадратичный функционал  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  положителен на  $L$  и подпространство  $\Lambda L$  замкнуто. Покажем, что этот функционал положительно определен на  $L$ , т. е. справедливо соотношение (1). Доказываем от противного.

Если (1) не выполняется, то для каждого  $n \in \mathbb{N}$  найдется элемент  $h_n \in L$ ,  $\|h_n\| = 1$ , такой, что  $(\Lambda h_n, h_n) < 1/n$ . Так как единичный шар в гильбертовом пространстве слабо компактен и слабая топология на этом шаре метризуема в силу сепарабельности  $H$  (см. [5, теорема 3.16]), то можно считать, что  $h_n$  слабо

сходится к некоторому элементу  $h_0$ . Поскольку подпространство  $L$  выпукло и замкнуто, то оно и слабо замкнуто (см. [6, гл. IV, п. 3]) и поэтому  $h_0 \in L$ .

Можно считать, что  $h_n \neq h_0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда

$$0 < (\Lambda(h_n - h_0), h_n - h_0) = (\Lambda h_n, h_n) - 2(\Lambda h_0, h_n) + (\Lambda h_0, h_0).$$

Первое слагаемое справа при  $n \rightarrow \infty$  стремится по предположению к нулю, второе стремится к  $-2(\Lambda h_0, h_0)$  в силу слабой сходимости  $h_n$  к  $h_0$  и, значит, в пределе получаем, что  $0 \leq -(\Lambda h_0, h_0) \leq 0$ , т. е.  $(\Lambda h_0, h_0) = 0$ . Отсюда следует, что  $h_0 = 0$ , так как функционал  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  положителен на  $L$  и тем самым обращается в нуль только в нуле.

Поскольку последовательность  $h_n$  ограничена, последовательность  $P_2(\Lambda h_n)$  также ограничена в конечномерном пространстве  $L^\perp$ , поэтому можно считать, что она сходится при  $n \rightarrow \infty$  к некоторому элементу  $x_0 \in L^\perp$ .

Учитывая, что  $P_1 = I - P_2$ , где  $I$  — тождественный оператор, для любого  $n$  будем иметь

$$\begin{aligned} |(\Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n)| &= |(\Lambda h_n, \Lambda h_n) - (\Lambda h_n, P_2 \Lambda h_n)| \\ &\geq \|\Lambda h_n\|^2 - |(\Lambda h_n, P_2 \Lambda h_n - x_0)| - |(\Lambda h_n, x_0)|. \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через  $\Lambda_L$  сужение  $\Lambda$  на  $L$ . Пространства  $L$  и  $\Lambda L$  замкнуты по предположению и тем самым банаховы (как нормированные пространства), оператор  $\Lambda_L$ , очевидно, сюръективен и в силу положительности  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  на  $L$  инъективен. Следовательно, по теореме Банаха об обратном операторе существует обратный линейный непрерывный оператор  $\Lambda_L^{-1} : \Lambda L \rightarrow L$ .

Поскольку

$$1 = \|h_n\| \leq \|\Lambda_L^{-1}\| \|\Lambda_L h_n\|,$$

то  $\|\Lambda_L h_n\|^2 \geq \|\Lambda_L^{-1}\|^{-2}$ .

Далее, в силу того, что

$$|(\Lambda h_n, P_2 \Lambda h_n - x_0)| \leq \|\Lambda h_n\| \|P_2 \Lambda h_n - x_0\|,$$

$P_2 \Lambda h_n \rightarrow x_0$  и  $(\Lambda h_n, x_0) = (h_n, \Lambda x_0) \rightarrow (h_0, \Lambda x_0) = 0$  ( $h_0 = 0$ ) при  $n \rightarrow \infty$ , из (4) следует, что для достаточно больших  $n$

$$|(\Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n)| > \frac{\|\Lambda h_n\|^2}{2} = \frac{\|\Lambda_L h_n\|^2}{2} \geq \frac{1}{2\|\Lambda_L^{-1}\|^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим для таких  $n$  уравнение относительно переменной  $t \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} &(\Lambda(h_n + tP_1 \Lambda h_n), h_n + tP_1 \Lambda h_n) \\ &= (\Lambda h_n, h_n) + 2t(\Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n) + t^2(\Lambda P_1 \Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n) = 0. \end{aligned}$$

Из оценки (5), неравенства

$$(\Lambda P_1 \Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n) \leq \|\Lambda\|^3 \|P_1\|^2$$

и того, что  $(\Lambda h_n, h_n) < 1/n$ , следует, что дискриминант этого уравнения

$$\Delta = (\Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n)^2 - (\Lambda P_1 \Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n)(\Lambda h_n, h_n)$$

больше величины

$$\frac{1}{4\|\Lambda_L^{-1}\|^4} - \frac{\|\Lambda\|^3 \|P_1\|^2}{n}$$

и тем самым положителен для достаточно больших  $n$ . Следовательно, для каждого такого  $n$  существует  $t_n$ , для которого

$$(\Lambda(h_n + t_n P_1 \Lambda h_n), h_n + t_n P_1 \Lambda h_n) = 0.$$

Поскольку  $h_n + t_n P_1 \Lambda h_n \in L$  и оператор  $\Lambda$  на  $L$  инъективен, то необходимо  $h_n + t_n P_1 \Lambda h_n = 0$ , т. е. векторы  $P_1 \Lambda h_n$  и  $h_n$  пропорциональны и, значит,

$$|(P_1 \Lambda h_n, h_n)| = \|P_1 \Lambda h_n\| \|h_n\| = \|P_1 \Lambda h_n\|.$$

Учитывая это обстоятельство, снова оценку  $(\Lambda h_n, h_n) < 1/n$  и то, что  $P_1 = I - P_2$ , а также ортогональность  $x_0$  и  $h_n$ , получим

$$\begin{aligned} |(\Lambda h_n, P_1 \Lambda h_n)| &\leq \|\Lambda\| \|P_1 \Lambda h_n\| = \|\Lambda\| |(P_1 \Lambda h_n, h_n)| \leq \|\Lambda\| (\Lambda h_n, h_n) \\ &+ \|\Lambda\| |(P_2 \Lambda h_n, h_n)| < \frac{\|\Lambda\|}{n} + \|\Lambda\| |(P_2 \Lambda h_n - x_0, h_n)| + \|\Lambda\| |(x_0, h_n)| \\ &\leq \frac{\|\Lambda\|}{n} + \|\Lambda\| \|P_2 \Lambda h_n - x_0\|. \end{aligned}$$

Выражение справа стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , что противоречит оценке (5). Теорема доказана.  $\square$

Покажем, что предположение о замкнутости  $\Lambda L$  существенно для того, чтобы квадратичный функционал  $h \mapsto (\Lambda h, h)$  был положительно определен на  $L$ .

Пусть  $H = L_2([0, 1])$ ,  $L = H$  и оператор  $\Lambda : H \rightarrow H$  для п. в.  $t \in [0, 1]$  задается формулой

$$(\Lambda x(\cdot))(t) = tx(t).$$

Очевидно, что это линейный непрерывный самосопряженный оператор на  $H$ . Проверим, что подпространство  $\Lambda H$  незамкнуто.

Действительно, нетрудно проверить, что последовательность функций  $x_n(t) = t^{1/2+1/n}$ ,  $t \in [0, 1]$ , из  $H$  сходится в  $H$  при  $n \rightarrow \infty$  к  $x_0(t) = \sqrt{t} = t(1/\sqrt{t})$ . Так как функция  $1/\sqrt{t}$  не принадлежит  $H$ , то  $x_0(\cdot)$  не принадлежит подпространству  $\Lambda H$  и тем самым это подпространство незамкнуто.

Покажем теперь, что в этом случае для любого  $\alpha > 0$  найдется функция  $h_\alpha(\cdot) \in H$  такая, что неравенство (1) не выполняется. Пусть  $\alpha > 0$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  и  $\varepsilon < 2\alpha$ . Положим  $h_\alpha(t) = 1$ , если  $0 \leq t \leq \varepsilon$ , и  $h_\alpha(t) = 0$ , если  $0 < t \leq 1$ . Тогда

$$(\Lambda h_\alpha(\cdot), h_\alpha(\cdot)) = \int_0^\varepsilon th_\alpha^2(t) dt = \frac{\varepsilon^2}{2} < \alpha\varepsilon = \alpha \int_0^1 h_\alpha^2(t) dt = \alpha \|h_\alpha\|_H^2.$$

**Предварительные сведения и формулировка основного результата.** Пусть  $[t_0, t_1]$  — отрезок числовой прямой,  $L : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  — функция переменных  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i = 0, 1$ . Задача

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \rightarrow \min, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1 \quad (Pr)$$

называется *простейшей задачей (классического) вариационного исчисления*.

Эта задача рассматривается на пространстве  $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  (непрерывно дифференцируемых вектор-функций на отрезке  $[t_0, t_1]$  со значениями в  $\mathbb{R}^n$ ), и локальный минимум в данной задаче называется *слабым минимумом*.



Далее мы предполагаем, что функция  $L$  непрерывна вместе со всеми своими частными производными второго порядка по  $x$  и  $\dot{x}$ .

Если фиксирована функция  $\hat{x}(\cdot)$ , то для сокращения записи используем обозначения:  $\hat{L}(t) = L(t, \hat{x}(t), \dot{\hat{x}}(t))$  и аналогично для частных производных  $L$  по  $x$  и  $\dot{x}$ .

Через  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\cdot)$ ,  $\hat{L}_{\dot{x}x}(\cdot)$  и  $\hat{L}_{xx}(\cdot)$  обозначаем матричные функции на  $[t_0, t_1]$  вторых частных производных функции  $L$  в точке  $\hat{x}(\cdot)$ . Эти функции непрерывны, симметричны при каждом  $t \in [t_0, t_1]$ , и ясно, что  $\hat{L}_{\dot{x}x}(\cdot) = \hat{L}_{x\dot{x}}(\cdot)$ .

Для формулировки теоремы, которую мы хотим доказать, понадобятся некоторые стандартные определения, связанные с классическим вариационным исчислением.

Пусть  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ . Дифференциальное уравнение

$$-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t) + \hat{L}_{\dot{x}x}(t)h(t)) + \hat{L}_{xx}(t)h(t) + \hat{L}_{x\dot{x}}(t)\dot{h}(t) = 0 \quad (6)$$

называется *уравнением Якоби* для задачи  $(Pr)$ .

Напомним, что симметричная матрица  $A$  размера  $n \times n$  называется неотрицательно (положительно) определенной, и пишут  $A \geq 0$  ( $A > 0$ ), если  $(Ax, x) \geq 0$  ( $(Ax, x) > 0$ ) для всех  $x \in \mathbb{R}^n$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x \neq 0$ ) или, равносильно, главные миноры матрицы  $A$  неотрицательны (положительны).

- (а) Говорят, что на функции  $\hat{x}(\cdot)$  выполнено *условие Лежандра*, если  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) \geq 0$  для всех  $t \in [t_0, t_1]$ , и *усиленное условие Лежандра*, если  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t) > 0$  для всех  $t \in [t_0, t_1]$ .
- (б) Пусть на  $\hat{x}(\cdot)$  выполнено усиленное условие Лежандра. Точка  $\tau \in (t_0, t_1]$  называется *сопряженной точкой к точке  $t_0$* , если существует нетривиальное решение  $h(\cdot)$  уравнения Якоби такое, что  $h(t_0) = h(\tau) = 0$ .
- (с) Говорят, что на функции  $\hat{x}(\cdot)$  выполнено *условие Якоби*, если в интервале  $(t_0, t_1)$  нет точек, сопряженных к  $t_0$ , и *усиленное условие Якоби*, если в полуинтервале  $(t_0, t_1]$  нет точек, сопряженных к  $t_0$ .

Теперь мы можем сформулировать тот результат, который хотим доказать.

**Теорема 2** (достаточные условия слабого минимума в задаче  $(Pr)$  в терминах условий Лежандра и Якоби). Пусть функция  $\hat{x}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  такова, что  $\hat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ , для всех  $t \in [t_0, t_1]$  выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt}\hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$

и выполнены усиленные условия Лежандра и Якоби. Тогда  $\hat{x}(\cdot)$  доставляет слабый минимум в задаче  $(Pr)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы будет опираться на теорему 1 и один известный результат о достаточных условиях минимума в задаче  $(Pr)$  (см., например, [1]), который сейчас сформулируем.

Обозначим через  $W_2^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  пространство абсолютно непрерывных вектор-функций  $x(\cdot)$  на  $[t_0, t_1]$ , у которых  $\dot{x}(\cdot)$  принадлежит  $L_2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , банахову пространству измеримых и суммируемых с квадратом вектор-функций  $x(\cdot)$  на  $[t_0, t_1]$  с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} = \left( \int_{t_0}^{t_1} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Пространство  $W_2^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$  является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x(\cdot), y(\cdot))_1 = (x(t_0), y(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^n$ .

Очевидно, что  $C^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \subset W_2^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ .

**Теорема 3** (квадратичные достаточные условия слабого минимума в задаче  $(Pr)$ ). Пусть функция  $\hat{x}(\cdot)$  допустима в задаче  $(Pr)$ . Если  $\hat{L}_{\dot{x}}(\cdot) \in C^1([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$ , для каждого  $t \in [t_0, t_1]$  выполнено уравнение Эйлера

$$-\frac{d}{dt} \hat{L}_{\dot{x}}(t) + \hat{L}_x(t) = 0$$

и существует константа  $\alpha > 0$  такая, что для всех  $h(\cdot) \in W_2^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ , для которых  $h(t_0) = h(t_1) = 0$ , справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t_1} ((\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(t)\dot{h}(t), \dot{h}(t)) + 2(\hat{L}_{\dot{x}x}(t)\dot{h}(t), h(t)) + (\hat{L}_{xx}(t)h(t), h(t))) dt \geq \alpha \|h(\cdot)\|_{W_2^1([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)}^2, \quad (7)$$

то  $\hat{x}(\cdot)$  доставляет слабый минимум в задаче  $(Pr)$ .

**Доказательство теоремы 2.** Схема доказательства следующая. Сформулируем одну известную теорему и докажем четыре леммы, которые позволят получить утверждение теоремы 2 как непосредственное следствие теоремы 3.

Пусть  $T \in (t_0, t_1]$ . Обозначим через  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  и  $C(\cdot)$  матрицы  $\hat{L}_{\dot{x}\dot{x}}(\cdot)$ ,  $\hat{L}_{\dot{x}x}(\cdot)$  и  $\hat{L}_{xx}(\cdot)$  соответственно и рассмотрим квадратичный функционал  $Q_T$  на  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ , определенный равенством

$$Q_T(h(\cdot)) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T ((A(t)\dot{h}(t), \dot{h}(t)) + 2(B(t)\dot{h}(t), h(t)) + (C(t)h(t), h(t))) dt. \quad (8)$$

**Теорема 4** (Лежандра). Пусть выполнено усиленное условие Лежандра. Тогда найдется число  $0 < \bar{\varepsilon} \leq T - t_0$  такое, что для любого  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$  существует число  $\gamma = \gamma(\varepsilon) > 0$ , обладающее тем свойством, что для каждого  $h(\cdot) \in W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ ,  $h(t_0) = 0$ , выполняется неравенство

$$Q_{t_0+\varepsilon}(h(\cdot)) \geq \gamma \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon} |\dot{h}(t)|^2 dt. \quad (9)$$

Эта теорема доказана в [4].

Положим

$$\overset{\circ}{H}_T = \{h(\cdot) \in W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n) : h(t_0) = h(T) = 0\}.$$

Так как линейные отображения  $x(\cdot) \mapsto x(t_0)$  и  $x(\cdot) \mapsto x(T)$ , очевидно, непрерывны на  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ , то подпространство  $H_0$  замкнуто в  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  и тем самым гильбертово.

Будем говорить, что функционал  $Q_T$  неотрицателен (положителен) на  $\mathring{H}_T$ , если  $Q_T(h(\cdot)) \geq 0$  ( $Q_T(h(\cdot)) > 0$ ) для всех  $h(\cdot) \in \mathring{H}_T$  ( $h(\cdot) \in \mathring{H}_T$ ,  $h(\cdot) \neq 0$ ).

Будем также говорить, что функционал  $Q_T$  положительно определен на  $\mathring{H}_T$ , если существует такое  $\alpha > 0$ , что

$$Q_T(h(\cdot)) \geq \alpha \|h(\cdot)\|_{\mathring{H}_T}^2 \quad \forall h(\cdot) \in \mathring{H}_T.$$

Положим

$$\tau_0 = \sup\{\tau \in (t_0, t_1] : Q_\tau \text{ положительно определен на } \mathring{H}_\tau\}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 4 следует, что множество в фигурных скобках непусто и, следовательно, определение  $\tau_0$  корректно.

Перед формулировками и доказательствами лемм сделаем несколько замечаний общего характера.

Пусть  $X$  — гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_X$  и  $\mathcal{B}$  — билинейная симметричная непрерывная функция на  $X \times X$ . Тогда найдется самосопряженный оператор  $\Lambda \in \mathcal{L}(X, X)$  такой, что для любых  $x, y \in X$

$$\mathcal{B}(x, y) = (\Lambda x, y)_X. \quad (10)$$

Действительно, для каждого  $y \in X$  функция  $x \mapsto \mathcal{B}(x, y)$  есть линейный непрерывный функционал на  $X$  и поэтому по теореме об общем виде линейного непрерывного функционала на гильбертовом пространстве найдется элемент  $\gamma(y) \in X$  такой, что для всех  $x \in X$

$$\mathcal{B}(x, y) = (x, \gamma(y))_X.$$

Элементарная проверка показывает, что отображение  $y \mapsto \gamma(y)$  есть линейный оператор. Обозначим его через  $\Lambda$ . Для любого  $y \in X$  в силу определения  $\Lambda$  и непрерывности  $\mathcal{B}$  для некоторого  $c > 0$  имеем

$$\|\Lambda y\|_X^2 = (\Lambda y, \Lambda y)_X = \mathcal{B}(y, \Lambda y) \leq c \|y\|_X \|\Lambda y\|_X.$$

Деля это неравенство на  $\|\Lambda y\|_X$ , получаем, что  $\Lambda$  — непрерывный оператор. Его самосопряженность следует из симметричности билинейной функции. Равенство (10) доказано.

Отметим еще, что линейный оператор  $\Lambda$  (не обязательно непрерывный), удовлетворяющий равенству (10), единствен. Действительно, если для операторов  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  справедливо (10), то для любых  $x, y \in X$  выполняется равенство

$$((\Lambda_1 - \Lambda_2)x, y)_X = 0.$$

Подставляя сюда  $y = (\Lambda_1 - \Lambda_2)x$ , получаем, что  $\Lambda_1 = \Lambda_2$ .

Обозначим

$$Q(x) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(x, x), \quad x \in X.$$

Простая проверка показывает, что функция  $Q$  дифференцируема в каждой точке  $x \in X$  и для любого  $h \in X$

$$Q'(x)h = \mathcal{B}(x, h) = (\Lambda x, h)_X.$$

Положим

$$H_T = \{h(\cdot) \in W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n) : h(t_0) = 0\}.$$

По тем же причинам, что и для  $\overset{\circ}{H}_T$ , подпространство  $H_T$  замкнуто в  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  и тем самым гильбертово со скалярным произведением и соответствующей нормой:

$$(x(\cdot), y(\cdot))_{H_T} = \int_{t_0}^T (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) dt, \quad \|x(\cdot)\|_{H_T} = \left( \int_{t_0}^T |\dot{x}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

**Лемма 1.** 1. Квадратичный функционал (8) дифференцируем на  $H_T$  и в каждой точке  $x(\cdot) \in H_T$  для любого  $h(\cdot) \in H_T$  справедливо равенство

$$Q'_T(x(\cdot))h(\cdot) = (\Lambda_T(x(\cdot)), h(\cdot))_{H_T},$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_T(x(\cdot))(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( A(\tau) \dot{x}(\tau) + B(\tau) x(\tau) \right. \\ \left. + \int_{\tau}^T (B(s) \dot{x}(s) + C(s) x(s)) ds \right) d\tau \end{aligned} \quad (11)$$

для всех  $t \in [t_0, T]$ .

2. Квадратичный функционал (8) дифференцируем на  $\overset{\circ}{H}_T$  и в каждой точке  $x(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_T$  для любого  $h(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_T$  справедливо равенство

$$Q'_T(x(\cdot))h(\cdot) = (\overset{\circ}{\Lambda}_T(x(\cdot)), h(\cdot))_{\overset{\circ}{H}_T},$$

где

$$\overset{\circ}{\Lambda}_T(x(\cdot))(t) = \Lambda_T(x(\cdot))(t) - \frac{t - t_0}{T - t_0} \Lambda_T(x(\cdot))(T) \quad (12)$$

для всех  $t \in [t_0, T]$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** 1. Рассмотрим билинейную функцию на  $H_T \times H_T$ :

$$\mathcal{B}(x(\cdot), y(\cdot)) = \int_{t_0}^T ((A(t) \dot{x}(t), \dot{y}(t)) + 2(B(t) \dot{x}(t), y(t)) + (C(t) x(t), y(t))) dt.$$

Ясно, что эта функция симметрична в силу симметричности матриц  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$  и  $C(\cdot)$  и что

$$Q_T(x(\cdot)) = \frac{1}{2} \mathcal{B}(x(\cdot), x(\cdot)).$$

Проверим, что функция  $\mathcal{B}(x(\cdot), y(\cdot))$  непрерывна. Обозначив через  $a$  максимум нормы  $\|A(t)\|$  на отрезке  $[t_0, T]$  (имеется в виду операторная норма и она непрерывна в силу непрерывности матрицы  $A(\cdot)$ ), по неравенству Коши — Буняковского будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^T (A(\tau) \dot{x}(\tau), \dot{y}(\cdot)) d\tau \right| &\leq a \left( \int_{t_0}^T |\dot{x}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_{t_0}^T |\dot{y}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &= a \|x(\cdot)\|_{H_T} \|y(\cdot)\|_{H_T}. \end{aligned}$$

Далее, если  $x(\cdot) \in H_T$ , то для любого  $t \in [t_0, t_1]$ , снова по неравенству Коши — Буняковского, получим

$$|x(t)| = \left| \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau \right| \leq \int_{t_0}^T |\dot{x}(t)| dt \leq \sqrt{T-t_0} \left( \int_{t_0}^T |\dot{x}(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \sqrt{T-t_0} \|x(\cdot)\|_{H_T}. \quad (13)$$

Имея в виду эту оценку и предыдущую и совершенно аналогично оценивая второе и третье слагаемые в определении билинейной функции  $\mathcal{B}$ , приходим к тому, что существует константа  $\kappa > 0$  такая, что

$$|\mathcal{B}(x(\cdot), y(\cdot))| \leq \kappa \|x(\cdot)\|_{H_T} \|y(\cdot)\|_{H_T},$$

т. е. билинейная функция непрерывна на  $H_T \times H_T$  и тем самым функция  $x(\cdot) \mapsto Q_T(x(\cdot))$  непрерывна на  $H_T$ .

Представим теперь функцию  $\mathcal{B}$  в виде (10). Положим

$$\Lambda_T(x(\cdot))(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \left( A(\tau) \dot{x}(\tau) + B(\tau) x(\tau) + \int_{\tau}^T (B(s) \dot{x}(s) + C(s) x(s)) ds \right) d\tau, \quad (14)$$

где  $t \in [t_0, T]$ . Ясно, что это линейный оператор из  $H_T$  в  $H_T$  и, интегрируя по частям, получаем, что для любых  $x(\cdot)$  и  $y(\cdot)$  из  $H_T$

$$(\Lambda_T x(\cdot), y(\cdot))_{H_T} = \int_{t_0}^T \left( \frac{d}{dt} \Lambda_T x(t), \dot{y}(t) \right) dt = \mathcal{B}(x(\cdot), y(\cdot)).$$

Оператор  $\Lambda_T$  самосопряжен в силу симметричности билинейной функции и непрерывен в силу единственности представления (10).

Для любого  $x(\cdot) \in H_T$  квадратичный функционал  $Q_T$  имеет вид

$$\begin{aligned} Q_T(x(\cdot)) &= \frac{1}{2} \mathcal{B}(x(\cdot), x(\cdot)) = \frac{1}{2} (\Lambda_T x(\cdot), x(\cdot))_X \\ &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \left( A(t) \dot{x}(t) + B(t) x(t) + \int_t^T (B(\tau) \dot{x}(\tau) + C(\tau) x(\tau)) d\tau, \dot{x}(t) \right) dt. \end{aligned} \quad (15)$$

По доказанному для любых  $x(\cdot)$  и  $h(\cdot)$  из  $H_T$

$$Q'_T(x(\cdot))h(\cdot) = (\Lambda_T x(\cdot), h(\cdot))_{H_T}. \quad (16)$$

Доказательство второго утверждения леммы совершенно аналогично первому, и поэтому мы его опускаем.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Билинейная функция  $\mathcal{B}$  непрерывна и на более широком пространстве, а именно, на  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n) \times W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ . Доказательство точно такое же, нужно только вместо оценки (13) воспользоваться следующей оценкой для  $x(\cdot) \in W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ :

$$\begin{aligned} |x(t)| &= \left| x(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}(\tau) d\tau \right| \leq |x(t_0)| + \sqrt{T-t_0} \|x(\cdot)\|_{L_2([t_0, T], \mathbb{R}^n)} \\ &\leq \max(1, \sqrt{T-t_0}) (|x(t_0)| + \|x(\cdot)\|_{L_2([t_0, T], \mathbb{R}^n)}), \end{aligned}$$

где в круглых скобках — норма  $x(\cdot)$ , эквивалентная норме  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ , которая порождается скалярным произведением. Таким образом, оператор  $\Lambda_T$  можно рассматривать как оператор, действующий из  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  в  $H$ .

**Лемма 2.** Функционал  $Q_{\tau_0}$  неотрицателен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $h(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  и  $\varepsilon \in (0, (\tau_0 - t_0)/2)$ . Положим

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} h(t), & t \in [t_0, \tau_0 - 2\varepsilon], \\ -\frac{t - \tau_0 + \varepsilon}{\varepsilon} h(\tau_0 - 2\varepsilon), & t \in (\tau_0 - 2\varepsilon, \tau_0 - \varepsilon], \\ 0, & t \in (\tau_0 - \varepsilon, \tau_0]. \end{cases}$$

Ясно, что  $h_\varepsilon(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  для указанных  $\varepsilon$ . Покажем, что  $h_\varepsilon(\cdot)$  сходится к  $h(\cdot)$  в метрике  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon(\cdot) - h(\cdot)\|_{\overset{\circ}{H}_{\tau_0}}^2 &= \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0} |\dot{h}_\varepsilon(t) - \dot{h}(t)|^2 dt = \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0} (\dot{h}_\varepsilon(t) - \dot{h}(t), \dot{h}_\varepsilon(t) - \dot{h}(t)) dt \\ &= \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0 - \varepsilon} |\dot{h}_\varepsilon(t)|^2 dt - 2 \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0 - \varepsilon} (\dot{h}_\varepsilon(t), \dot{h}(t)) dt + \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0} |\dot{h}(t)|^2 dt. \end{aligned} \quad (17)$$

Оценим слагаемые справа. Используя вид функции  $h_\varepsilon(\cdot)$  и неравенство Коши — Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0 - \varepsilon} |\dot{h}_\varepsilon(t)|^2 dt &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0 - \varepsilon} |h(\tau_0 - 2\varepsilon)|^2 dt = \frac{1}{\varepsilon} |h(\tau_0 - 2\varepsilon)|^2 \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0} |\dot{h}(t)| dt \right)^2 \leq 2 \int_{\tau_0 - 2\varepsilon}^{\tau_0} |\dot{h}(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Величина справа стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в силу абсолютной непрерывности интеграла.

Из полученной оценки и неравенства Коши — Буняковского следует, что второй интеграл справа в (17) стремится к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Третий интеграл стремится к нулю в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Итак,  $h_\varepsilon(\cdot) \rightarrow h(\cdot)$  в метрике  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поскольку функционал  $Q_{\tau_0}(h_\varepsilon(\cdot)) = Q_{\tau_0 - \varepsilon}(h_\varepsilon(\cdot))$  положителен в силу определения  $\tau_0$ , то из его непрерывности на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  (см. лемму 1) следует, что этот функционал неотрицателен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ .  $\square$

**Лемма 3.** Пусть  $\tau \in (t_0, t_1)$  и функционал  $Q_\tau$  положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_\tau$ . Тогда найдется  $0 < \varepsilon \leq t_1 - \tau$  такое, что функционал  $Q_{\tau + \varepsilon}$  будет положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau + \varepsilon}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $0 < \varepsilon < \min(t_1 - \tau, \tau - t_0)$ ,  $\hat{h}_\varepsilon(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_{\tau + \varepsilon}$  и  $\|\hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\overset{\circ}{H}_{\tau + \varepsilon}} = 1$ . Положим

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} \hat{h}_\varepsilon(t), & t \in [t_0, \tau - \varepsilon], \\ -\frac{t - \tau}{\varepsilon} \hat{h}_\varepsilon(\tau - \varepsilon), & t \in (\tau - \varepsilon, \tau], \\ 0, & t \in (\tau, \tau + \varepsilon]. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|h_\varepsilon(\cdot) - \hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}}^2 &= \int_{t_0}^{\tau+\varepsilon} |\dot{h}_\varepsilon(t) - \dot{\hat{h}}_\varepsilon(t)|^2 dt \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} |\dot{h}_\varepsilon(t)|^2 dt - 2 \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} (\dot{h}_\varepsilon(t), \dot{\hat{h}}_\varepsilon(t)) dt + \int_{t_0}^{\tau+\varepsilon} |\dot{\hat{h}}_\varepsilon(t)|^2 dt. \end{aligned}$$

Оценивая интегралы справа аналогично тому, как это сделано в предыдущей лемме, получим, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|h_\varepsilon(\cdot) - \hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}} = 0. \quad (18)$$

Как показано в лемме 1, квадратичный функционал  $Q_{\tau+\varepsilon}$  является значением на диагонали непрерывной симметричной билинейной функции  $\mathcal{B}$  на  $\mathring{H}_{\tau+\varepsilon} \times \mathring{H}_{\tau+\varepsilon}$ , т. е.

$$Q_{\tau+\varepsilon}(h(\cdot)) = \mathcal{B}_{\tau+\varepsilon}(h(\cdot), h(\cdot)) \quad \forall h(\cdot) \in \mathring{H}_{\tau+\varepsilon}.$$

В силу положительной определенности  $Q_\tau$  на  $\mathring{H}_\tau$  существует  $\alpha > 0$  такое, что

$$\begin{aligned} Q_{\tau+\varepsilon}(\hat{h}_\varepsilon(\cdot)) &\geq Q_{\tau+\varepsilon}(h_\varepsilon(\cdot)) - |Q_{\tau+\varepsilon}(h_\varepsilon(\cdot)) - Q_{\tau+\varepsilon}(\hat{h}_\varepsilon(\cdot))| \geq \alpha \|h_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}}^2 \\ &\quad - |\mathcal{B}(h_\varepsilon(\cdot) + \hat{h}_\varepsilon(\cdot), h_\varepsilon(\cdot) - \hat{h}_\varepsilon(\cdot))| \geq \alpha + \alpha (\|h_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}}^2 - \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}}^2) \\ &\quad - \|\mathcal{B}\| \|h_\varepsilon(\cdot) + \hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}} \|h_\varepsilon(\cdot) - \hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Последние два слагаемых стремятся к нулю при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Следовательно, для достаточно малых  $\varepsilon > 0$  величина слева будет не меньше, скажем, чем  $\alpha/2$ .

Тогда для таких  $\varepsilon$  и любого  $\hat{h}_\varepsilon(\cdot) \in \mathring{H}_{\tau+\varepsilon}$  получим, что

$$Q_{\tau+\varepsilon}(\hat{h}_\varepsilon(\cdot)) \geq \frac{\alpha}{2} \|\hat{h}_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}},$$

т. е. квадратичный функционал  $Q_{\tau+\varepsilon}$  положительно определен на  $\mathring{H}_{\tau+\varepsilon}$ .  $\square$

**Лемма 4.** Пусть матрица  $A(t)$  положительно определена для любого  $t \in [t_0, T]$ . Если квадратичный функционал  $Q_T$  положителен на пространстве  $\mathring{H}_T$ , то он положительно определен на этом пространстве.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Гильбертово пространство  $H_T$  сепарабельно, поскольку является замкнутым подпространством сепарабельного пространства  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$ . Как показано в лемме 1 (см. (15)),

$$Q_T(h(\cdot)) = \frac{1}{2}(\Lambda_T h(\cdot), h(\cdot)) \quad \forall h(\cdot) \in H_T,$$

где  $\Lambda_T$  — линейный непрерывный самосопряженный оператор на  $H_T$ , определенный формулой (14).

Обозначим  $L = \mathring{H}_T$ . Ясно, что  $\text{codim } L = 1$ .

Оператор  $\Lambda_T$ , как отмечено в замечании после доказательства леммы 1, можно рассматривать как оператор из  $W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  в  $H$ . Покажем, что в этом случае

$$\text{Im } \Lambda_T = H_T. \quad (19)$$

Для этого достаточно доказать, что для любой функции  $z(\cdot) \in H_T$  найдется функция  $x(\cdot) \in W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n)$  такая, что для п. в.  $t \in [t_0, T]$  справедливо равенство

$$A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) + \int_t^T (B(\tau)\dot{x}(\tau) + C(\tau)x(\tau)) d\tau = \dot{z}(t). \quad (20)$$

Пусть  $z(\cdot) \in H_T$ , и пусть  $x(\cdot)$  удовлетворяет уравнению (20). Положим для п. в.  $t \in [t_0, T]$

$$y(t) = A(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) - \dot{z}(t). \quad (21)$$

Из (20) следует, что

$$y(t) = - \int_t^T (B(\tau)\dot{x}(\tau) + C(\tau)x(\tau)) d\tau, \quad y(T) = 0,$$

и тем самым

$$\dot{y}(t) = B(t)\dot{x}(t) + C(t)x(t), \quad y(T) = 0.$$

По условию матрица  $A(t)$  положительно определена для любого  $t \in [t_0, T]$  и, значит, обратима. Умножая равенство (21) на  $(A(t))^{-1}$ , получим, что

$$\dot{x}(t) = -(A(t))^{-1}B(t)x(t) + (A(t))^{-1}y(t) + (A(t))^{-1}\dot{z}(t).$$

Подставляя это выражение в формулу для  $\dot{y}(\cdot)$ , приходим к тому, что пара  $(x(\cdot), y(\cdot))$  удовлетворяет следующему уравнению на отрезке  $[t_0, T]$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(A(t))^{-1}B(t)x + (A(t))^{-1}y + (A(t))^{-1}\dot{z}(t), \\ \dot{y} = (C(t) - B(t)(A(t))^{-1}B(t))x + B(t)(A(t))^{-1}y + (A(t))^{-1}\dot{z}(t), \end{cases} \quad y(T) = 0.$$

Но это линейное уравнение и, как известно, у него существуют решения на  $[t_0, T]$ , удовлетворяющие условию  $y(T) = 0$ . Следовательно, существуют решения уравнения (20) и тем самым справедливо равенство (19).

Определим теперь линейное отображение

$$G : W_2^1([t_0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow H_T \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

действующее по правилу

$$(Gx)(t) = ((\Lambda_T x)(t), x(t_0), x(T)) \quad \forall t \in [t_0, T].$$

Так как  $\text{Im } \Lambda_T = H_T$ , то по лемме о замкнутости образа (см. [2, п. 2.1.6]) подпространство  $\text{Im } G$  замкнуто. Покажем, что отсюда следует замкнутость подпространства  $\Lambda_T L$  в  $H_T$ .

Действительно, пусть  $w(\cdot)$  — предельная точка  $\Lambda_T L$ . Существует последовательность элементов  $x_k(\cdot) \in L$  такая, что  $\Lambda_T x_k(\cdot) \rightarrow w(\cdot)$  при  $k \rightarrow \infty$ . Но тогда последовательность  $(\Lambda_T x_k(\cdot), 0, 0) \in \text{Im } G$  сходится к элементу  $(w(\cdot), 0, 0) \in \text{Im } G$  в силу замкнутости  $\text{Im } G$  и, значит, существует  $x(\cdot) \in L$ , для которого  $\Lambda_T x(\cdot) = w(\cdot)$ . Таким образом,  $w(\cdot) \in \Lambda_T L$  и тем самым подпространство  $\Lambda_T L$  замкнуто.

Итак, для пространства  $H_T$ , его подпространства  $L$  и отображения  $\Lambda_T$  выполнены все предположения теоремы 1 о положительной определенности, из которой следует утверждение данной леммы.  $\square$



Приступим непосредственно к доказательству теоремы 2. Для этого, как уже было указано выше, надо показать согласно теореме 3, что квадратичный функционал  $Q_{t_1}$  положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_{t_1}$ .

Покажем сначала, что функционал  $Q_{\tau_0}$  положителен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ . Допустим, что это не так, т. е. существует ненулевая функция  $\hat{h}(\cdot) \in \overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  такая, что  $Q_{\tau_0}(\hat{h}(\cdot)) = 0$ . Поскольку в силу леммы 2 функционал  $Q_{\tau_0}$  неотрицателен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ , то эта функция доставляет ему глобальный минимум и, значит,  $Q'_{\tau_0}(\hat{h}(\cdot)) = 0$  или согласно выражению (12)

$$\overset{\circ}{\Lambda}_{\tau_0}(x(\cdot))(t) = \Lambda_{\tau_0}(x(\cdot))(t) - \frac{t - t_0}{\tau_0 - t_0} \Lambda_{\tau_0}(x(\cdot))(\tau_0) = 0$$

для всех  $t \in [t_0, \tau_0]$ , т. е.

$$\int_{t_0}^t \left( A(\tau) \dot{\hat{h}}(\tau) + B(\tau) \hat{h}(\tau) + \int_{\tau_0}^{t_1} (B(s) \dot{\hat{h}}(s) + C(s) \hat{h}(s)) ds \right) d\tau - \frac{t - t_0}{\tau_0 - t_0} \Lambda_{\tau_0}(x(\cdot))(\tau_0) = 0$$

для всех  $t \in [t_0, \tau_0]$ .

В больших скобках стоит суммируемая функция, поэтому функция слева п. в. дифференцируема. Дифференцируя ее, получим, что для п. в.  $t \in [t_0, t_1]$  справедливо равенство

$$A(t) \dot{\hat{h}}(t) + B(t) \hat{h}(t) + \int_t^{t_1} (B(\tau) \dot{\hat{h}}(\tau) + C(\tau) \hat{h}(\tau)) d\tau = \frac{1}{\tau_0 - t_0} \Lambda_{\tau_0}(x(\cdot))(\tau_0).$$

Третье слагаемое слева в этом равенстве — абсолютно непрерывная функция и, значит, сумма первых двух слагаемых также абсолютно непрерывна. Дифференцируя равенство, приходим к тому, что ненулевая функция  $\hat{h}(\cdot)$  удовлетворяет уравнению

$$-\frac{d}{dt}(A(t) \dot{\hat{h}}(t) + B(t) \hat{h}(t)) + B(t) \dot{\hat{h}}(t) + C(t) \hat{h}(t) = 0,$$

которое есть уравнение Якоби (6).

Таким образом, ненулевая функция удовлетворяет уравнению Якоби и обращается в нуль в  $\tau_0$ , т. е.  $\tau_0$  — сопряженная точка к  $t_0$ , что невозможно в силу предположения о выполнении усиленного условия Якоби и тем самым функционал  $Q_{\tau_0}$  положителен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ .

Покажем, что  $\tau_0 = t_1$ . Действительно, если  $\tau_0 < t_1$ , то из положительности функционала  $Q_{\tau_0}$  на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$  последовало бы согласно лемме 4, что он и положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0}$ . Тогда по лемме 3 этот функционал положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_{\tau_0 + \varepsilon}$ , где  $0 < \varepsilon \leq t_1 - \tau_0$ , что противоречит определению  $\tau_0$ .

Итак,  $\tau_0 = t_1$ . По доказанному функционал  $Q_{t_1}$  положителен на  $\overset{\circ}{H}_{t_1}$  и, значит, по лемме 4, он положительно определен на  $\overset{\circ}{H}_{t_1}$ . Следовательно, выполнены предположения теоремы 3, что доказывает теорему 2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Иосифе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 2005.
3. Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
4. Hestenes M. R. Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations // Pacific J. Math. 1951. V. 1. P. 525–581.
5. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1971.
6. Шефер Х. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1975.

*Поступила в редакцию 15 августа 2025 г.*

*После доработки 15 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 7 сентября 2025 г.*

Аваков Евгений Рачиевич (ORCID 0000-0002-6951-2106)

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,

Профсоюзная ул., 65, Москва 117997

eramag@mail.ru

Магарил-Ильяев Георгий Георгиевич (ORCID 0000-0003-4960-8255)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

Ленинские горы, 1, Москва 119991;

Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,

Большой Каретный пер., 19, стр. 1, Москва 127994;

Южный математический институт — филиал ВНИИ РАН,

ул. Ватутина, 53, Владикавказ 362025

georgii.magaril@math.msu.ru

## РАДИУС ИНЪЕКТИВНОСТИ ВЫТЯНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Берестовский, А. Мустафа

**Аннотация.** Найден радиус инъективности вытянутого эллипсоида вращения в трехмерном евклидовом пространстве. Он равен в точности расстоянию вдоль двойного меридиана между его сопряженными симметричными относительно полюса точками и меньше половины длины экватора. Найден и применен метод сколь угодно точных компьютерных вычислений радиуса инъективности произвольного вытянутого эллипсоида вращения.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.602

**Ключевые слова:** геодезическая, поле Якоби, радиус инъективности, сопряженные точки, экспоненциальное отображение, эллипсоид вращения, эллиптические интегралы.

### § 1. Введение

Радиус инъективности  $i_p$  (соответственно число  $\sigma_p$ ) полного риманова многообразия  $M$  в его точке  $p$  определяется как точная верхняя граница чисел  $r > 0$  таких, что экспоненциальное отображение  $\text{Exp}_p$  многообразия  $M$  в точке  $p$  (соответственно его дифференциал  $d(\text{Exp}_p)$ ) является диффеоморфизмом на открытом шаре  $U(0, r)$  радиуса  $r$  с центром в нуле касательного евклидова пространства  $M_p$  к  $M$  в точке  $p$  (соответственно невырожденный на  $U(0, r)$ ).

Радиус инъективности  $i(M)$  (соответственно число  $\sigma$ ) многообразия  $M$  есть точная нижняя граница чисел  $i_p$  (соответственно  $\sigma_p$ ) для всех  $p \in M$ .

В следствии 4.14 из [1] доказано (формула Клингенберга), что радиус инъективности  $i(M)$  компактного риманова многообразия  $M$  равен

$$i(M) = \min\{\sigma, l_0/2\}, \quad (1)$$

где  $l_0$  — минимум длин нетривиальных геодезических петель на  $M$ .

Пусть  $M$  — эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, \quad (2)$$

в трехмерном евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  с индуцированной из  $\mathbb{R}^3$  римановой метрикой. Эллипсоид (2) задается параметрическими уравнениями

$$(x, y, z) = (\cos u \cos \varphi, \cos u \sin \varphi, a \sin u), \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (3)$$

---

Работа первого автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006. Работа второго автора выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

Здесь  $u$  — широта,  $\varphi$  — долгота или полярный угол.

Если  $a = 1$ , то хорошо известно, что  $i(M) = \sigma = l_0/2 = \pi$ .

Эллипсоид вращения (2) называется *сплюснутым*, если  $0 < a < 1$ , и *вытянутым*, если  $a > 1$ .

Максимум гауссовой кривизны сплюснутого эллипсоида вращения достигается на его экваторе и равен  $1/a^2$ . Поэтому вследствие известных результатов римановой геометрии  $\sigma$  равно  $\pi a$ , т. е. первому сопряженному значению вдоль экватора. Главный результат статьи [2]:  $i(M) = \pi a < l_0/2 < \pi$ , если  $0 < a < 1$ .

Основной результат этой статьи — следующая

**Теорема 1.** Для радиуса инъективности  $i(M)$  каждого вытянутого эллипсоида вращения  $M$ , заданного уравнением (2) при  $a > 1$  имеют место соотношения  $i(M) = \sigma < \min(\pi, l_0/2)$ . При этом  $\sigma = \sigma_p$  для любой точки  $p \in M$ , отличной от полюсов эллипсоида и такой, что  $p$  и ближайшая к  $p$  сопряженная относительно проходящего через  $p$  двойного меридиана  $m(p)$  точка  $p'$  находятся на расстоянии  $\sigma(p)/2 = \sigma(p')/2$  вдоль  $m(p)$  от одного из полюсов эллипсоида.

Она является непосредственным следствием предложения 1, теоремы 3, ее следствия 2 и теорем 4, 5 о ближайших сопряженных точках.

Кроме того, в этой статье составлен алгоритм для построения последовательности чисел  $\sigma_n(a)$ , сходящейся сверху к  $\sigma = \sigma(a) = \sigma_p = \sigma_p(a)$  для  $p$  из теоремы 1 и каждого  $a > 1$ ; даны примеры приближенного вычисления  $\sigma(a)$  посредством этого алгоритма с использованием приложения “Wolfram Mathematica”.

В данной статье на основании [2] доказывается, что  $l_0/2 = \pi$ , если  $1 < a \leq 2$ . Чему равно  $l_0$ , если  $a > 2$ , авторам неизвестно.

Отметим сильное отличие применяемых методов в этой статье и статье [2].

В статье [2] доказательства и необходимые оценки основаны чаще всего на применении правила Клеро для поиска геодезических и первой вариации длин геодезических; поля Якоби не используются.

Используемые в этой статье результаты из [2] суммированы в теореме 2.

Кроме этого, основную роль в доказательствах ключевых теорем 3–5, предложений 2, 4 и их следствий играют выражение гауссовой кривизны (5) эллипсоида (2), два вида (10) и (14) линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка для ориентированных длин  $b(s)$  и  $b(u)$  как функций длины дуги  $s$  или широты  $u$  ортогональных к геодезическим полям Якоби, якобиевы вариации, теорема Штурма о нулях решений линейных однородных ОДУ 2-го порядка и теорема о неявной функции.

В доказательстве теоремы 3 достаточно уравнения (10). Далее требуется общее решение уравнения (14), полученное в предложении 2. Это решение содержит эллиптические интегралы первого и второго рода. Проводить какие-либо вычисления с ними невозможно. Поэтому использующее предложение 2 и теорему 4 доказательство теоремы 5 сводит их к вычислениям с элементарными функциями и применению теоремы о неявной функции.

Предложение 4 позволяет вычислить приближенно с любой точностью  $\sigma(a)$ , равное радиусу инъективности эллипсоида (2) при разных  $a > 1$ . Примеры таких вычислений представлены в конце статьи.

Заметим, что решить задачу для достаточно простого объекта было непросто.

## § 2. Некоторые следствия результатов из [2]

Вследствие (3) верхнюю половину эллипсоида (2) можно задать уравнением

$$z = a\sqrt{1-r^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \cos u, \quad 0 \leq r \leq 1. \quad (4).$$

В [2] установлено, что

$$K(r) = \frac{a^2}{(1+(a^2-1)r^2)^2}, \quad (5)$$

$$a^2 = K(0) \leq K(r) \leq K(1) = \frac{1}{a^2}, \quad 0 < a < 1, \quad (6)$$

$$\frac{1}{a^2} = K(1) \leq K(r) \leq K(0) = a^2, \quad 1 < a, \quad (7)$$

где  $K(r)$  — гауссова кривизна эллипсоида (2).

Доказанные в теореме 1, предложении 1, следствии 3 и предложении 3 из [2] результаты можно собрать в следующую теорему.

**Теорема 2.** Для любой геодезической на эллипсоиде (2), отличной от экватора и двойных меридианов, разность  $v$  двух последующих значений полярного угла  $\varphi$  при пересечении этой геодезической с экватором заключена в интервале  $(\pi a, \pi)$ , если  $0 < a < 1$ , и в интервале  $(\pi, \pi a)$ , если  $a > 1$ . При этом  $v$  может быть любым числом в указанных интервалах, а длина соответствующей дуги геодезической  $l = l(v)$  является строго возрастающей функцией от  $v$  при  $0 < a < 1$  и  $1 < a$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** На самом деле в теореме 2 подразумевается не  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , а  $\tilde{\varphi} \in \mathbb{R}$ , для которого существует локально изометричное накрывающее отображение  $\Psi: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  на единичную окружность  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  с полярным углом  $\varphi$  такое, что  $\Psi(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi} = \varphi$ , если  $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi)$ . При этом для любой рассматриваемой в [2] геодезической  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , на эллипсоиде (2),  $a \neq 1$ , не включающей его полюса, определена строго возрастающая функция  $\tilde{\varphi}(s) := \tilde{\varphi}(\gamma(s))$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .

**Следствие 1.** Если  $1 < a \leq 2$ , то минимальная длина петли геодезической эллипсоида (2) равна  $l_0 = 2\pi$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Длина экватора эллипсоида (2) равна  $2\pi$ . Так как  $a > 1$ , то длина  $l_m$  двойного меридиана  $m$  эллипсоида (2) больше  $2\pi$ . Вследствие теоремы 2 при  $a \leq 2$  максимальная по включению расположенная в полупространстве  $z \geq 0$  или  $z \leq 0$  дуга любой геодезической эллипсоида (2), отличной от экватора и двойных меридианов, не имеет самопересечений, а ее длина больше  $l_m/2$ . Стало быть, длина петли такой геодезической больше  $l_m > 2\pi$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Вследствие теоремы 2 для любого числа  $a > 2$  расположенные в полупространстве  $z > 0$  или  $z < 0$  дуги некоторых геодезических эллипсоида (2), отличных от экватора и двойных меридианов, имеют самопересечения.

**Предложение 1.** Если  $a > 1$ , то радиус инъективности эллипсоида (2) меньше  $\pi$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Существует непродолжаемая кратчайшая эллипсоида, проходящая через полюс  $p$  эллипсоида и соединяющая симметричные относительно  $p$  точки  $p_1, p_2$ . Она не имеет общих точек с экватором, иначе ее длина  $l$  будет больше  $\pi$ , длины полуэкватора, соединяющего эти точки. Тогда  $l$  меньше  $l_1$ , половины длины параллели (полуокружности), соединяющей точки  $p_1, p_2$ , так как параллель, отличная от экватора, не является геодезической эллипсоида. Следовательно,  $l < l_1 < \pi$ .

### § 3. Якобиевы вариации и векторные поля Якоби

Далее в этом параграфе  $M$  — произвольное полное риманово многообразие со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)$  на касательном расслоении  $TM$ , в частном случае рассматриваемый нами вытянутый эллипсоид вращения.

Название раздела и терминология соответствуют параграфу 8.3 из [3].

*Якобиевой вариацией* геодезической (точнее, геодезического отрезка)  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in [\alpha, \beta]$ , называется дифференцируемое отображение  $V : [\alpha, \beta] \times J \rightarrow M$ ,  $\alpha < \beta$ , где  $J$  — открытый интервал в  $\mathbb{R}$ ,  $0 \in J$ , такое, что  $V(s, t_0)$  для каждого  $t_0 \in J$  — геодезическая,  $V(s, 0) = \gamma(s)$ .

Определение из [3] отличается от данного здесь тем, что  $[\alpha, \beta]$  заменено на  $\mathbb{R}$ .

Якобиева вариация  $V$  называется *нормальной*, если для каждого  $t_0 \in J$  геодезическая  $V(s, t_0)$  нормальна, т. е. параметризована длиной дуги.

Число  $\sigma > 0$  называется *первым сопряженным значением* нормальной геодезической  $\gamma$ , если существует ее якобиева вариация  $V$  такая, что  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \sigma$ ,  $V(0, t) \equiv \gamma(0)$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t}(s, 0) \neq 0$ ,  $0 < s < \beta$ , и  $\frac{\partial V}{\partial t}(\beta, 0) = 0$ . При этом  $\gamma(0)$ ,  $\gamma(\sigma)$  называются (ближайшими) *сопряженными точками*  $\gamma$  [1, 3, 4].

В разд. 4.2 «Поля Якоби» из [4] гладкое векторное поле  $Y = Y(s)$  вдоль геодезической  $\gamma = \gamma(s)$ , параметризованной длиной дуги, на гладком римановом многообразии называется *векторным полем Якоби вдоль  $\gamma$* , если для тензора кривизны  $R$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y + R(Y, \dot{\gamma}) \dot{\gamma} = 0. \quad (8)$$

Векторное поле  $Y(s)$  на геодезической  $\gamma(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , называется в параграфе 8.3 из [3] *полем Якоби*, если существует якобиева вариация  $V$  геодезической  $\gamma$ :

$$Y(s) = \frac{\partial V}{\partial t}(s, 0) \quad \text{для любого } s \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Далее в [3] доказывается, что любое поле Якоби  $Y(s)$  (в смысле [3]) на геодезической  $\gamma(s)$  удовлетворяет уравнению (8). В [3] дан набросок доказательства утверждения, что любое решение уравнения (8) является полем Якоби.

Из этих результатов нетрудно вывести, что поля Якоби на данной геодезической риманова многообразия  $M^n$  составляют линейное пространство размерности  $2n$  над  $\mathbb{R}$  (см. [3]); для нормальных вариаций геодезической векторные поля вида (9) образуют линейное пространство размерности  $2n - 1$  над  $\mathbb{R}$ . В последнем случае есть 1-мерное пространство касательных к геодезической параллельных векторных полей и  $2(n - 1)$ -мерное пространство ортогональных к геодезической векторных полей вида (9).

Пусть  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , — нормальная геодезическая эллипсоида (2) и  $X = X(s)$  — гладкое единичное векторное поле вдоль  $\gamma$ , ортогональное  $\dot{\gamma}(s)$ . Тогда любое векторное поле Якоби  $Y(s)$  вдоль  $\gamma(s)$ , ортогональное  $\dot{\gamma}(s)$ , можно записать в виде  $Y(s) = (X(s), Y(s))X(s)$  и

$$(\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y + R(Y, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y) = (\nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_{\dot{\gamma}} Y, Y) + (R(Y, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y) = 0.$$

Пусть  $b(s) = (X(s), Y(s))$ . Тогда

$$(R(Y, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}, Y) = K(\gamma) |\dot{\gamma}|^2 |Y|^2 = K(\gamma) b^2(\gamma),$$

где  $K(s) := K(\gamma(s)) = a^2 / (1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s))^2$  — гауссова кривизна эллипсоида в точке  $\gamma(s)$ . Используя свойства ковариантной производной векторных полей и учитывая, что  $(Y, \dot{\gamma}) = (X, \dot{\gamma}) = 0$ ,  $|X| = |\dot{\gamma}| = 1$ , получаем

$$\nabla_{\dot{\gamma}} Y = \nabla_{\dot{\gamma}} (bX) = \dot{b}X + b \nabla_{\dot{\gamma}} X = \dot{b}X,$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}Y &= \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{b}X) = \ddot{b}X + \dot{b}\nabla_{\dot{\gamma}}X = \ddot{b}X, \\ (\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}Y, Y) + (R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}, Y) &= (\ddot{b}X, bX) + K(\gamma)b^2 = \ddot{b}b + K(\gamma)b^2 = 0, \\ \ddot{b}(s) + K(s)b(s) &= 0.\end{aligned}\tag{10}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В замечании (iii) разд. 4.2 из [4] рассматриваются риманово многообразие  $M^2$ , поле Якоби  $Y$  на нормальной геодезической  $\gamma$ , ортогональное  $\gamma$ , и выписано уравнение для  $Y$ , совпадающее с (10) с точностью до обозначений. После этого говорится, что линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка (10) есть уравнение свободных колебаний. Его решения при  $K \geq \varkappa > 0$  (как и у нас) имеют осциллирующий характер.

#### § 4. Реализация радиуса инъективности на двойном меридиане $m$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Далее в доказательстве теоремы 3 будут использоваться без специальных ссылок теорема Штурма из разд. 38 книги [5] и задача 3 после этого параграфа для О.Д.У. (10).

**Лемма 1.** *Каждая нормальная кратчайшая  $\gamma(s)$ ,  $\alpha \leq s \leq \beta$ , в (2) допускает нормальную вариацию Якоби  $V(t, s)$ ,  $(t, s) \in [\alpha, \beta] \times J$ , такую, что  $V(\alpha, t) \equiv \gamma(\alpha)$ ,  $\frac{\partial V}{\partial t}(s, 0) \neq 0$ ,  $\alpha < s < \beta$ . Если  $\gamma(\alpha)$ ,  $\gamma(\beta)$  не сопряжены, то  $\frac{\partial V}{\partial t}(\beta, 0) \neq 0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что  $\alpha = 0$ . Положим  $p := \gamma(0)$ ,  $v_0 := \dot{\gamma}(0)$ . Определим кривую единичных векторов  $v = v(t) \in M_p$ ,  $t \in J := (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ , так, что ориентированный угол  $\angle(v_0, v(t)) = t$ . Тогда отображение  $V(s, t) := \text{Exp}_p(sv(t))$ ,  $(s, t) \in [0, \beta] \times J$ , — нормальная вариация Якоби кратчайшей  $\gamma$ . При этом справедливо первое утверждение, так как  $\gamma(0)$  не сопряжена с  $\gamma(s)$ ,  $0 < s < \beta$ , и второе утверждение, если  $\gamma(\alpha)$ ,  $\gamma(\beta)$  не сопряжены.

Радиус инъективности  $i(p)$ ,  $p \in M$ , для полного риманова многообразия  $M$  — непрерывная положительная функция [4]. Поэтому если  $M$  компактно, то  $i(M) = \min\{i(p), p \in M\} := \delta > 0$ .

**Теорема 3.** *Если  $M$  — вытянутый эллипсоид вращения в  $\mathbb{R}^3$ , то непродолжаемая кратчайшая длины  $\delta$  — некоторая дуга двойного меридиана эллипсоида.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существует параметризованная длиной дуги непродолжаемая кратчайшая  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in [0, \delta]$ , не равная дуге меридиана. Тогда определены  $\varphi(\gamma(s))$ ,  $0 \leq s \leq \delta$ ;  $\varphi(\gamma(0)) \neq \varphi(\gamma(\delta))$ . Применяя, если нужно, некоторые из следующих изометрий эллипсоида: вращение эллипсоида, отражение относительно плоскости экватора, отражение относительно плоскости некоторого двойного меридиана, можно считать, что

$$\varphi(\gamma(0)) = 0 < \varphi(\gamma(\delta)) \leq \pi, \quad z(\gamma(\delta)) \geq |z(\gamma(0))|.\tag{11}$$

На основании предложения 1 имеем  $\delta < \pi$  и  $\gamma$  не может быть дугой экватора. Ввиду теоремы 2  $\gamma$  не более одного раза пересекает экватор и для некоторого числа  $\varepsilon \in (0, \delta]$  функция  $u(s) := u(\gamma(s))$  строго возрастает на  $[0, \varepsilon]$  и строго убывает на  $[\varepsilon, \delta]$ , если  $\varepsilon < \delta$ .

Вследствие сказанного из (11) вытекает, что  $z(\gamma(\delta)) > 0$ .

Кроме того,  $\varphi(\gamma(s))$ ,  $0 \leq s \leq \delta$ , — строго возрастающая функция.

Для произвольной нормальной якобиевой вариации  $V(s, t)$ ,  $(s, t) \in [0, \delta] \times J$ , геодезической  $\gamma = \gamma(s)$  такой, что  $V(\tilde{s}, t) \equiv \gamma(\tilde{s})$ ,  $t \in J$ , для некоторого  $\tilde{s}$  из  $[0, \delta]$ , все геодезические  $\gamma_t$  вариации  $V$  — кратчайшие, и  $\frac{\partial V}{\partial t}(s, t_0) \neq 0$  ортогонально  $\gamma_{t_0}$ ,  $t_0 \in J$ , если  $(s, t_0) \in ((0, \delta) \setminus \{\tilde{s}\}) \times J$ .

Если верно предположение в начале доказательства, то возможны два случая:

- 1)  $\gamma(0)$ ,  $\gamma(\delta)$  не сопряжены относительно  $\gamma$ , но существует другая кратчайшая  $\gamma_1(s)$ ,  $0 \leq s \leq \delta$  с теми же концами, что  $\gamma$ ;
- 2)  $\gamma(0)$ ,  $\gamma(\delta)$  сопряжены относительно  $\gamma$ .

1) Прежде всего должно быть  $\varphi(\gamma(\delta)) < \pi$ . Иначе, применяя упомянутую выше нормальную якобиеву вариацию  $V(s, t)$  геодезической  $\gamma(s)$ ,  $0 \leq s \leq \delta$ , при  $\tilde{s} = \delta$ , получим для некоторого фиксированного  $t > 0$  или  $t < 0$ , достаточно близкого к 0, кратчайшую  $\gamma_t$  с  $\varphi(\gamma_t(0)) < 0$ ,  $\varphi(\gamma_t(\delta)) = \pi$ , чего не может быть.

Так как  $\varphi(\gamma(\delta)) < \pi$ , то в этом случае для некоторого фиксированного  $t > 0$  или  $t < 0$ , достаточно близкого к 0, кратчайшие  $\gamma_1(s)$  и  $V(s, t)$ ,  $s \in [0, \delta]$ , пересекутся помимо  $s = 0$  при единственном  $\tilde{s} \in (0, \delta)$ . Это противоречит тому, что эти кривые — кратчайшие.

- 2) Предположим сначала, что  $z(\gamma(0)) \geq 0$ .

Применим упомянутую выше нормальную якобиеву вариацию  $V(s, t)$  геодезической  $\gamma(s)$ ,  $0 \leq s \leq \delta$ , при  $\tilde{s} = 0$ .

Вследствие сказанного, в особенности выделенного выше утверждения,  $r(V(s, t)) < r(\gamma(s))$ , следовательно  $K(V(s, t)) > K(\gamma(s))$  для фиксированного  $t > 0$  или  $t < 0$ , достаточно близкого к 0, и всех  $s \in (0, \delta)$ . Поэтому относительно геодезической  $V(s, t)$ ,  $s \in [0, \delta]$ , точка  $V(0, t)$  сопряжена некоторой точке  $V(s, t)$ , где  $0 < s < \delta$ . Это противоречит определению  $\delta$ .

Предположим теперь, что  $z(\gamma(0)) < 0$ . Тогда существует единственное  $\tilde{s} \in (0, \delta)$  такое, что  $z(\gamma(\tilde{s})) = 0$ . Следовательно, точка  $p := \gamma(\tilde{s})$  не сопряжена относительно  $\gamma$  ни с  $\gamma(0)$ , ни с  $\gamma(\delta)$  согласно определению  $\delta$ .

Применяя доказательство леммы 1, определим вариацию Якоби кратчайших

$$V(s, t) = \text{Exp}_p((s - \tilde{s})v(t)), \quad (s, t) \in [0, \delta] \times J.$$

Тогда  $r(V(s, t)) < r(\gamma(s))$ , следовательно,  $K(V(s, t)) > K(\gamma(s))$  для фиксированного  $t > 0$  или  $t < 0$ , достаточно близкого к 0, и всех  $s \in [0, \delta] \setminus \{\tilde{s}\}$ . Поэтому относительно геодезической  $V(s, t)$ ,  $s \in [0, \delta]$ , точка  $V(0, t)$  сопряжена некоторой точке  $V(s, t)$ , где  $0 < s < \delta$ . Это противоречит определению  $\delta$ .

**Следствие 2.** Если  $M$  — эллипсоид (2),  $a > 1$ , то  $i(M) = \delta = \sigma < l_0/2$ .

**Доказательство.** В теореме 3 доказано, что радиус инъективности  $\delta$  достигается на двойном меридиане. Тогда если  $\delta = l_0/2$ , то  $l_0/2$  — длина меридиана,  $l_0/2 > \pi$ , что противоречит неравенству  $\delta < \pi$  из предложения 1.

## § 5. Решения О.Д.У. (10) для двойного меридиана $m$

Найти общие решения О.Д.У. (10) для  $m$  как функции параметра  $s$  не удается.

Найдем эти решения как функции  $b(u)$  от модифицированной широты  $u \in [-\pi/2, 3\pi/2)$  двойного меридиана  $m$  вытянутого эллипсоида вращения: на одном из его меридианов  $u$  есть обычная широта из (3), а если  $p$  — внутренняя точка другого его меридиана, то  $u(p) = u(-p) + \pi$ .



Пусть на эллипсоиде (2) при  $a > 1$  в плоскости с  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$  задан двойной меридиан  $\gamma(u) = (\cos u, 0, a \sin u)$ ,  $u \in [0, 2\pi]$ . Тогда его длина дуги равна

$$s(u) = \int_0^u \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \tau} d\tau = a \int_0^u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau} d\tau, \quad k = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}, \quad (12)$$

$$s'(u) = \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u}, \quad \dot{u}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s)}},$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}(s) &= \frac{d}{ds} (1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s))^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} (1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s))^{-\frac{3}{2}} (-2\dot{u}(s)(a^2 - 1) \sin u \cos u) \\ &= \frac{(a^2 - 1) \sin 2u(s)}{2(1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s))^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $\gamma = \gamma(s) := \gamma(u(s))$ ,  $b(s) := (X(s), Y(s))$ , где  $X = X(s)$  — гладкое единичное векторное поле вдоль  $\gamma$ , ортогональное  $\dot{\gamma}(s)$ ,  $Y(s) = (X(s), Y(s))X(s)$  — векторное поле Якоби вдоль  $\gamma(s)$ , ортогональное  $\dot{\gamma}(s)$ . Тогда согласно дифференциальному уравнению (10) получаем

$$\ddot{b}(s) + K(s)b(s) = 0, \quad (13)$$

где

$$K(s) := K(\gamma(s)) = K(u(s)) = a^2 / (1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s))^2.$$

При этом

$$\begin{aligned} \dot{b}(s) &= \dot{u}(s)b'_u(u(s)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u(s)}} b'_u(u(s)), \\ \ddot{b}(s) &= \ddot{u}(s)b'_u(u(s)) + (\dot{u}(s))^2 b''_u(u(s)). \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (13) и убрав  $s$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - 1) \sin 2u}{2(1 + (a^2 - 1) \cos^2 u)^2} b' + \frac{b''}{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u} + \frac{a^2}{(1 + (a^2 - 1) \cos^2 u)^2} b &= 0, \\ b'' + \frac{(a^2 - 1) \sin 2u}{2(1 + (a^2 - 1) \cos^2 u)} b' + \frac{a^2}{1 + (a^2 - 1) \cos^2 u} b &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Получили снова линейное однородное обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка для функции  $b(u)$ .

**Предложение 2.** Общим решением уравнения (14) является функция

$$b(u) = c_1 \cos u + c_2 (a \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + a \cos u (F(u, k) - E(u, k))), \quad (15)$$

где  $k = \sqrt{a^2 - 1}/a$ ,  $E(u, k)$ ,  $F(u, k)$  — эллиптические интегралы Лежандра второго и первого рода соответственно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из теории известно, что общее решение такого О.Д.У. является линейной комбинацией двух независимых решений того же уравнения

[5]. В частности, если известно частное решение  $y_1$  уравнения  $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ , то функция

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x) dx}}{y_1^2} dx$$

является частным независимым от  $y_1$  решением этого же уравнения [5].

Видно, что  $b_1(u) = \cos u$  является частным решением уравнения (14), тогда второе частное решение  $b_2(u)$ , независимое от  $b_1(u)$ , можно вычислить так:

$$\begin{aligned} b_2(u) &= \cos u \int \frac{e^{-\int \frac{(a^2-1)\sin 2u}{2(1+(a^2-1)\cos^2 u)} du}}{\cos^2 u} du = \cos u \int \frac{e^{\frac{1}{2} \ln(1+(a^2-1)\cos^2 u)}}{\cos^2 u} du \\ &= \cos u \int \frac{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}{\cos^2 u} du = b_2(u). \end{aligned} \quad (16)$$

Вычислим интеграл

$$I_1 = \int \frac{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}}{\cos^2 u} du = \int \sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u} (\tan u)' du.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \tan u \sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u} + \int \frac{(a^2-1)\sin u \cos u}{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}} \tan u du \\ &= \tan u \sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u} + \int \frac{(a^2-1)\sin^2 u}{\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}} du \\ &= a \tan u \sqrt{1-k^2 \sin^2 u} + I_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{(a^2-1)\sin^2 u}{\sqrt{1+(a^2-1)-(a^2-1)\sin^2 u}} du = a \int \frac{k^2 \sin^2 u}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} du \\ &= a \int \left( \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 u}} - \sqrt{1-k^2 \sin^2 u} \right) du. \end{aligned}$$

Неопределенный интеграл  $I_2$  символически обозначает некоторое семейство решений О.Д.У. (14), каждое из которых получается выбором нижнего предела интегрирования как произвольного конкретного числа, а верхнего предела — переменной  $u$  (при замене переменной интегрирования). Каждое такое решение годится для предложения 2. Заменяя  $I_2$  на  $a(F(u, k) - E(u, k))$ , где, как обычно,

$$F(u, k) = \int_0^u (1/\sqrt{1-k^2 \sin^2 v}) dv, \quad E(u, k) = \int_0^u \sqrt{1-k^2 \sin^2 v} dv, \quad (17)$$

получаем предложение 2.

Учитывая (15), (17), полагая  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 1/a$  в (15) и рассматривая  $b(u)$ ,  $0 \leq u \leq \pi$ , на двойном меридиане  $m$ , видим, что  $b(0) = 0$ ,  $F(u, k) - E(u, k) > 0$  при  $0 < u \leq \pi$ ,  $b(u) > 0$  при  $0 < u \leq \pi/2$ ,  $b(\pi) < 0$ . Поэтому существует  $\tilde{u} \in (\pi/2, \pi)$  такое, что  $b(\tilde{u}) = 0$ .

**Теорема 4.** Функция

$$b(u) = \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \cos u [(F(u, k) - F(\pi/2, k)) - (E(u, k) - E(\pi/2, k))],$$

$u \in [0, \pi]$ , симметрична относительно  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}$  и является решением О.Д.У. (14).  
 При этом  $b(u) = 0$  при  $u = u_1 \in (0, \pi/2)$  и  $u = u_2 = \pi - u_1$ , где

$$\tan u_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1}} [(F(\pi/2, k) - F(u_1, k)) - (E(\pi/2, k) - E(u_1, k))]. \quad (18)$$

Кроме того, длина дуги между двумя соответствующими сопряженными точками на двойном меридиане равна  $2a(E(\pi/2, k) - E(u_1, k))$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Положим  $c_2 = 1/a$ . Тогда условие симметричности функции (15) при  $u \in [0, \pi]$  относительно  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}$  запишется в виде

$$\begin{aligned} \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} + \cos u (c_1 + F(u, k) - E(u, k)) \\ = \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} - \cos u (c_1 + F(\pi - u, k) - E(\pi - u, k)). \end{aligned}$$

Следовательно,  $c_1 \equiv \frac{1}{2}[(E(u, k) + E(\pi - u)) - (F(u, k) + F(\pi - u, k))]$ . Из определения функций  $E(u, k)$ ,  $F(u, k)$  и симметричности функции  $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}$  относительно  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}$  вытекает, что суммы  $E(u, k) + E(\pi - u, k)$  и  $F(u, k) + F(\pi - u, k)$  постоянны. Поэтому

$$c_1 = \frac{1}{2}[(E(\pi/2, k) + E(\pi/2, k)) - (F(\pi/2, k) + F(\pi/2, k))] = E(\pi/2, k) - F(\pi/2, k).$$

Следовательно, указанная функция  $b(u)$ , являющаяся решением ОДУ (14), симметрична относительно  $\bar{u} = \frac{\pi}{2}$ .

Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Из второго утверждения и равенства (12) следует последнее утверждение.

**ЗАМЕЧАНИЕ 5.** Величины  $F(\pi/2, k)$  и  $E(\pi/2, k)$  называются соответственно полными эллиптическими интегралами Лежандра первого и второго рода.

## § 6. Непродоляемая кратчайшая длины $\delta$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Далее без специальных ссылок будет использоваться следствие 2 теоремы Штурма из разд. 38 в [5]: Если  $u_1$  и  $u_2$  — два последовательных нуля какого-нибудь решения уравнения типа (14), то всякое другое решение этого уравнения имеет на интервале  $(u_1, u_2)$  ровно один нуль, если отношение этих двух решений не постоянно.

**Теорема 5.** Длина дуги двойного меридиана между ближайшими нулями  $u_1 < u_2$  решения  $b(u)$  уравнения (14) для эллипсоида (2) минимальна, если  $a > 1$  и

$$0 < u_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \frac{1}{2}(u_1 + u_2) = \frac{\pi}{2}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим семейство решений уравнения (14)

$$b(v, u) = \cos u [F(u, k) - E(u, k) - (F(v, k) - E(v, k))] + \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \quad (19)$$

(вида (15) при  $c_1 = -(F(v, k) - E(v, k))$ ,  $c_2 = 1/a$ ), где  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .

Для каждого  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$  есть в точности два последовательных нуля  $u_l(v)$ ,  $l = 1, 2$ , функции  $b(v, u)$  таких, что  $0 \leq u_1(v) < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < u_2(v) \leq \pi - u_1(v)$ , причем

равенство в последнем неравенстве достигается только при  $v = \frac{\pi}{2}$ . Поэтому  $u_l(\frac{\pi}{2})$ ,  $l = 1, 2$ , — нули  $u_l$  из теорем 4, 5. Пусть  $0 = b(u(v)) := b(v, u(v))$ , где  $u(v)$  какой-то из нулей  $u_l(v)$ ,  $l = 1, 2$ , функции  $b(v, u)$ .

Тогда  $\cos(u(v)) \neq 0$  и из (19) следует равенство

$$\begin{aligned} f(v, u(v)) &:= F(v, k) - E(v, k) - (F(u(v), k) - E(u(v), k)) \\ &= \tan u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Кроме того, вследствие (19), (20) при всех  $v \in [0, \pi/2]$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial u} b \right) (v, u(v)) &= \sin u(v) f(v, u(v)) + \cos u(v) \left( \frac{k^2 \sin^2 u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \right) \\ &\quad + \cos u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} + \sin u(v) \frac{-k^2 \sin u(v) \cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \\ &= \sin u(v) \left[ \operatorname{tg} u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} - \frac{k^2 \sin u(v) \cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \right] + \frac{\cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \\ &= \frac{1}{\cos u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} [\sin^2 u(v) (1 - k^2 \sin^2 u(v) - k^2 \cos^2 u(v)) + \cos^2 u(v)] \\ &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}}{\cos u(v)} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\partial}{\partial u} b \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $(v, u(v))$ .

Тогда по теореме о неявной функции (теорема 2.12 в [6])  $u(v)$ ,  $v \in [0, \pi/2]$ , — непрерывно дифференцируемая функция, и на основании (19), (20)

$$0 = b'_v(u(v)) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} u'(v)}{\cos u(v)} - \frac{k^2 \sin^2 v \cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}}.$$

Стало быть,

$$u'(v) = \frac{k^2 \sin^2 v}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} \frac{\cos^2 u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}}.$$

Пусть

$$l(v) := a(E(u_2(v), k) - E(u_1(v), k)) = a \int_{u_1(v)}^{u_2(v)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du$$

— длина дуги двойного меридиана между соответствующими сопряженными точками,

$$\begin{aligned} l'(v) &= a[u'_2(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_2(v)} - u'_1(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1(v)}] \\ &= \frac{ak^2 \sin^2 v}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 v}} [\cos^2 u_2(v) - \cos^2 u_1(v)] \leq 0 \end{aligned}$$

и в последнем неравенстве достигается равенство только при  $v = \frac{\pi}{2}$  и  $v = 0$ .

Как следствие функция  $l(v)$  строго убывает на отрезке  $0 \leq v \leq \pi/2$ .

Ввиду (15), (19)  $b(0, u)$  получается из (15) при  $c_1 = 0$  и  $c_2 = 1/a$ .

Нули  $u_1(v)$  рассмотренного выше семейства функций  $b(v, u)$ ,  $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , заполняют весь отрезок  $[0, u_1]$ , где  $u_1$  было в теореме 4, и  $u = u_1(0) = 0$ .

Рассмотрим теперь при  $v \in [-1, 0]$  семейство решений уравнения (14)

$$b(v, u) = -v \cos u + (1 + v)[(F(u, k) - E(u, k)) \cos u + \sin u \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}]. \quad (21)$$

Заметим, что функции  $b(v, u)$  из (19) и (21) совпадают при  $v = 0$ .

Есть в точности два последовательных нуля  $u_1(v)$  и  $u_2(v)$  функции  $b(v, u)$  для каждого  $v \in (-1, 0]$  таких, что  $-\frac{\pi}{2} < u_1(v) \leq 0$ ,  $\frac{\pi}{2} < u_2(v) < \frac{3\pi}{2}$ .

Пусть  $0 = b(u(v)) := b(v, u(v))$ , где  $u(v)$  — какой-то из нулей  $u_l(v)$ ,  $l = 1, 2$ . Тогда  $\cos(u(v)) \neq 0$  при  $v \in (-1, 0]$  и из (21) получаем равенство

$$g(v, u(v)) := E(u(v), k) - F(u(v), k) = \frac{-v}{1+v} + \tan u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}. \quad (22)$$

Кроме того, вследствие (21), (22) при всех  $v \in (-1, 0]$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial u} b \right) (v, u(v)) &= \frac{(1+v)k^2 \sin^2 u(v) \cos u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \\ &\quad + (1+v) \tan u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} \sin u(v) \\ &\quad + (1+v) \cos u(v) \left( \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} - \frac{k^2 \sin^2 u(v)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}} \right) \\ &= \frac{(1+v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}}{\cos u(v)} \neq 0. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\frac{\partial}{\partial u} b \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $(v, u(v))$ .

По теореме о неявной функции  $u(v)$ ,  $v \in (-1, 0]$ , — непрерывно дифференцируемая функция и на основании (21), (22)

$$\begin{aligned} 0 = b'_v(u(v)) &= \frac{(1+v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} u'(v)}{\cos u(v)} - [1 + g(v, u(v))] \cos u(v) \\ &\quad + \sin u(v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} = \frac{(1+v) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)} u'(v)}{\cos u(v)} - \frac{\cos u(v)}{1+v}. \end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$u'(v) = \frac{\cos^2 u(v)}{(1+v)^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u(v)}}.$$

Пусть

$$l(v) := a(E(u_2(v), k) - E(u_1(v), k)) = a \int_{u_1(v)}^{u_2(v)} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} du$$

— длина дуги двойного меридиана между соответствующими сопряженными точками,

$$l'(v) = a[u_2'(v)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_2(v)} - u_1'(v)\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1(v)}] \\ = \frac{a(\cos^2 u_2(v) - \cos^2 u_1(v))}{(1 + v)^2}.$$

Последнее выражение отрицательно по крайней мере для  $v$ , достаточно близких к нулю. Оно может равняться нулю, только если  $u_2(v) - u_1(v) = \pi$ , т. е. когда  $l(v)$  равно длине  $L$  меридиана (половины двойного меридиана), и положительно тогда и только тогда, когда  $l(v) > L$ . Это неравенство невозможно, поскольку тогда  $l'(v) > 0$ , что приводит к противоречию.

Следовательно,  $l'(v) \leq 0$ ,  $-1 < v < 0$ .

Для завершения доказательства заметим, что нули  $u_1(v) < u_2(v)$  семейства решений  $b(v, u)$ ,  $v \in [-1, \pi/2]$ , и нули  $\pi - u_2(v) < \pi - u_1(v)$  полученного из него зеркальной симметрией двойного меридиана (относительно полюсов) семейства решений уравнения (14) дают ближайшие нули  $u_1 < u_2$  всех ненулевых решений  $b(u)$  уравнения (14). А такая симметрия двойного меридиана индуцируется зеркальной симметрией эллипсоида относительно некоторой плоскости в  $\mathbb{R}^3$ , включающей полюсы.

## § 7. Вычисление радиуса инъективности

**Предложение 3.** Для любого  $k \in [0, 1)$  существует единственное решение  $u_1 = u_1(k)$  уравнения (18) на полуинтервале  $[0, \frac{\pi}{2})$ .

**Доказательство.** Наличие двух решений уравнения (18) на полуинтервале  $[0, \frac{\pi}{2})$  эквивалентно тому, что функция  $b(u)$  из теоремы 4 (другими словами, векторное поле Якоби) обращается в нуль в двух различных (сопряженных) точках дуги меридиана, соединяющей верхнюю вершину эллипсоида с экватором. Этого не может быть, так как каждый меридиан является кратчайшей.

**Лемма 2.** Если в уравнении (18)  $0 \leq k = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$  и  $u_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$ , то  $u_1 = 0$  тогда и только тогда, когда  $k = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $k = 0$ . Тогда

$$\tan u_1 = F(\pi/2, 0) - F(u_1, 0) - (E(\pi/2, 0) - E(u_1, 0)) \\ = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - u_1\right)\right) = 0$$

и  $u_1 = 0$ , поскольку  $u_1 \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

Если же  $u_1 = 0$ , то

$$0 = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \Rightarrow k^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} du = 0 \Rightarrow k = 0.$$

Лемма доказана.

**Лемма 3.** Существует непрерывно дифференцируемая строго возрастающая функция  $u_1 = u_1(k)$ ,  $0 \leq k < 1$ , где  $u_1$  — решение уравнения  $b(u) = 0$  в теореме 4.

**Доказательство.** Вследствие (18)

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1} \tan u_1 - (F(\pi/2, k) - F(u_1, k)) + E(\pi/2, k) - E(u_1, k) = 0.$$

Но

$$F(\pi/2, k) - F(u_1, k) + E(\pi/2, k) - E(u_1, k) = k^2 \int_{u_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau.$$

Следовательно,

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u_1} \tan u_1 - k^2 \int_{u_1}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau = 0.$$

Пусть

$$f = f(k, u) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \tan u - k^2 \int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau.$$

Тогда

$$f_u(k, u) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{\cos^2 u} - \frac{k^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} + \frac{k^2 \sin^2 u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}{\cos^2 u} > 0.$$

По теореме о неявной функции существует непрерывно дифференцируемая функция  $u_1 = u_1(k)$ , так как  $f$  непрерывно дифференцируема на  $(0, 1) \times (0, \frac{\pi}{2})$ . Кроме того,  $u'_1(k) = -f_k(k, u_1(k))/f_u(k, u_1(k))$ . Теперь достаточно доказать, что  $f_k < 0$ . Имеем

$$f_k = \frac{-k \sin^2 u \tan u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} - 2k \int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau - k^2 \int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{-1}{2}(-2k \sin^2 \tau) \sin^2 \tau}{(1 - k^2 \sin^2 \tau)^{\frac{3}{2}}} d\tau < 0.$$

Лемма доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 7.** Из доказательства леммы 3 следует, что равенство (18) эквивалентно равенству  $\tan(u_1(k)) = g_k(u_1(k))$ , где

$$g_k(u) = \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \int_u^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \tau}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \tau}} d\tau, \quad u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad k \in (0, 1).$$

Ясно, что  $0 < g_k(u)$  для всех  $(u, k) \in [0, \frac{\pi}{2}] \times (0, 1)$ .

**Лемма 4.** Пусть  $k \in (0, 1)$  фиксировано. Тогда  $\arctan(g_k(u)) < u_1(k)$  для всех  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $u \neq u_1(k)$ , где  $u_1(k)$  — решение уравнения (18).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что

$$\frac{dg_k(u)}{du} = g'_k(u) = \frac{k^2 \sin u \cos u}{1 - k^2 \sin^2 u} (g_k(u) - \tan u).$$

Поэтому  $g'_k(u_1(k)) = 0$ . Вследствие предложения 3 последнее равенство выполняется для единственного  $u \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $u = u_1(k)$ . Далее,

$$g'_k(u) = \frac{k^2 \sin u}{1 - k^2 \sin^2 u} (\cos u g_k(u) - \sin u).$$

Следовательно,  $g'_k(\frac{\pi}{2}) < 0$ . При этом

$$g'_k(u) > 0, \quad u \in (0, u_1(k)), \quad g'_k(u) < 0, \quad u \in \left(u_1(k), \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е.  $g_k(u) < g_k(u_1(k)) = \tan u_1(k)$ , если  $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ,  $u \neq u_1(k)$ .

**Следствие 3.** Если  $G(k) := F(\frac{\pi}{2}, k) - E(\frac{\pi}{2}, k)$ ,  $k \in (0, 1)$ , то

$$\arctan(g_k(0)) = \arctan(G(k)) < u_1(k).$$

**Предложение 4.** Если  $x_0 := 0$  и  $x_n := \arctan(g_k(x_{n-1}))$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $x_n \nearrow u_1(k)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для каждого  $k \in (0, 1)$  имеем  $x_1 - x_0 = \arctan(G(k)) > 0$ .

Предположим, что  $x_n - x_{n-1} > 0$ . Тогда

$$x_{n+1} - x_n = \arctan(g_k(x_n)) - \arctan(g_k(x_{n-1})) = \arctan\left(\frac{g_k(x_n) - g_k(x_{n-1})}{1 + g_k(x_n)g_k(x_{n-1})}\right).$$

Вследствие леммы 4  $x_1 = \arctan(g_k(0)) < \arctan(g_k(u_1(k))) = u_1(k)$  для каждого  $k \in (0, 1)$ . Предположим, что  $x_n < u_1(k)$ . Тогда

$$x_{n+1} = \arctan(g_k(x_n)) < \arctan(g_k(u_1(k))) = u_1(k).$$

Поэтому  $x_n < u_1(k)$  для всех натуральных  $n$ . Из предположения индукции и того, что функция  $g_k(u)$  строго возрастает на полуинтервале  $u \in [0, u_1(k))$ , следует, что  $g_k(x_n) - g_k(x_{n-1}) > 0$ . Аналогично

$$\arctan\left(\frac{g_k(x_n) - g_k(x_{n-1})}{1 + g_k(x_n)g_k(x_{n-1})}\right) = x_{n+1} - x_n > 0.$$

Поэтому  $x_n \nearrow \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n =: x(k)$ . Поскольку функции  $g_k(u)$ ,  $\arctan$  непрерывны, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \arctan(g_k(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1})),$$

т. е.  $x(k) = \arctan(g_k(x(k)))$  и  $\tan(x(k)) = g_k(x(k))$ . Так как решение  $u_1(k)$  уравнения (18) единственно, то  $x(k) = u_1(k)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 8.** Определенная в предложении 4 последовательность  $x_n$  позволяет получить хорошую оценку для  $u_1(k)$  снизу.

**Следствие 4.** Пусть

$$\sigma_n(a) := 2 \int_{x_n(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \tau} d\tau.$$

Тогда  $\sigma_n(a) \searrow \sigma(a)$  (см. введение), где

$$\sigma(a) = 2 \int_{u_1(k)}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + (a^2 - 1) \cos^2 \tau} d\tau,$$

$x_n(k)$  — последовательность из предложения 4 и  $u_1(k)$  — корень уравнения (18) для любого  $k = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ ,  $a > 1$ .

Пусть  $n = 100$ .

**ПРИМЕР 1.**  $\sigma_{100}(3) = 0.74959$ ,  $\sigma_{100}(4) = 0.431298$ ,  $\sigma_{100}(5) = 0.288134$ ,  $\sigma_{100}(6) = 0.211236$ ,  $\sigma_{100}(7) = 0.164441$ ,  $\sigma_{100}(8) = 0.133409$ ,  $\sigma_{100}(9) = 0.111522$ ,  $\sigma_{100}(10) = 0.0953589$ .



ПРИМЕР 2.  $\sigma_{100}(20) = 0.036365$ ,  $\sigma_{100}(30) = 0.0214715$ ,  $\sigma_{100}(40) = 0.0149387$ ,  
 $\sigma_{100}(50) = 0.0113311$ ,  $\sigma_{100}(60) = 0.00906516$ ,  $\sigma_{100}(70) = 0.00751939$ ,  $\sigma_{100}(80) =$   
 $0.00640234$ ,  $\sigma_{100}(90) = 0.00556003$ ,  $\sigma_{100}(100) = 0.0049038$ .

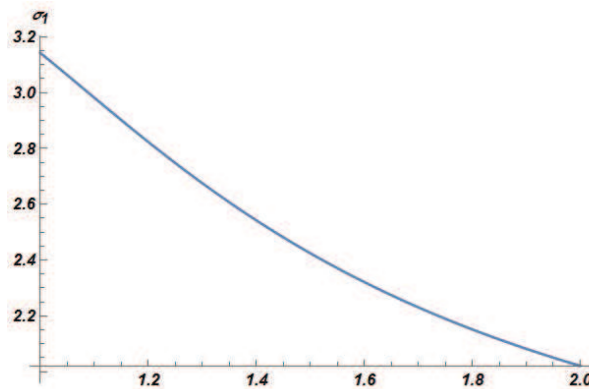


Рис. 1.. График функции  $\sigma_1(a)$ ,  $a \in [1, 2]$ .

**Предложение 5.** Если  $1 < a \leq 2$ , то  $\sigma_1(a) < \pi$ .

Это предложение подтверждает график функции  $\sigma_1(a)$ ,  $1 \leq a \leq 2$ , на рис. 1, полученный в результате компьютерных вычислений по программе с использованием “Wolfram Mathematica”.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sakai T. Riemannian geometry. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr.; V. 149).
2. Берестовский В. Н., Мустафа А. Радиус инъективности и кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 15–26.
3. Постников М. М. Введение в теорию Морса. М.: Наука, 1971.
4. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. Риманова геометрия в целом. М.: Мир, 1971.
5. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984.
6. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Мир, 1968.

Поступила в редакцию 10 июня 2024 г.

После доработки 30 июня 2025 г.

Принята к публикации 7 июля 2025 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)  
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
 vberestov@inbox.ru

Мустафа Али (ORCID 0009-0007-7586-4398)  
 Новосибирский государственный университет,  
 ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
 alimostafa1996777@gmail.com

ОПИСАНИЕ ИНЦИДЕНТНЫХ 3-ГРАНЯМ  
РЕБЕР В 3-МНОГОГРАННИКАХ  
БЕЗ СМЕЖНЫХ 3-ГРАНЕЙ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

**Аннотация.** Вес  $w(e)$  ребра  $e$  в 3-многограннике это сумма степеней его концевых вершин. Ребро  $e = uv$  есть  $(i, j)$ -ребро, если  $d(u) \leq i$  и  $d(v) \leq j$ . В 1940 г. Лебег доказал, что каждый 3-многогранник содержит  $(3, 11)$ -ребро, или  $(4, 7)$ -ребро, или  $(5, 6)$ -ребро, где 7 и 6 неуплучшаемы. В 1955 г. Коциг доказал, что каждый 3-многогранник содержит ребро с суммой степеней концевых вершин не более 13, причем граница точна. О. В. Бородин (1987), отвечая на вопрос Эрдеша, доказал, что каждый плоский граф без вершин степени меньше 3 содержит такое ребро. Более того, О. В. Бородин (1991) усилил этот результат, доказав, что найдется либо  $(3, 10)$ -ребро, или  $(4, 7)$ -ребро, или  $(5, 6)$ -ребро.

Для 3-многогранников получены верхние оценки минимального веса (суммы степеней концевых вершин) всех его ребер, обозначаемого  $w$ ; инцидентных 3-границ,  $w^*$ ; и инцидентных двум 3-граням,  $w^{**}$ . В частности, О. В. Бородин (1996) доказал, что если  $w^{**} = \infty$ , т. е. не существует ребер, инцидентных двум 3-граням, то либо  $w^* \leq 9$ , либо  $w \leq 8$ , где обе оценки неуплучшаемы.

Недавно мы усилили этот факт, доказав, что  $w^{**} = \infty$  влечет наличие либо  $(3, 6)$ -ребра, либо  $(4, 4)$ -ребра, инцидентных с 3-гранью, либо иначе  $(3, 5)$ -ребра, причем описание точно. (Хорошо известно, что если  $(3, 5)$ -ребра присутствуют, то может вообще не быть 3-граней.)

Цель нашей статьи — усилить вышеуказанный результат, доказав, что  $w^{**} = \infty$  влечет либо  $(3, 6)$ -ребро, окруженное 3-гранью и 4-гранью, либо  $(4, 4)$ -ребро, окруженное 3-гранью и 7-гранью, либо  $(3, 5)$ -ребро, где ни один из параметров не может быть улучшен. Главной трудностью было построение 3-многогранника, подтверждающего точность 7 в данном описании.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.603

**Ключевые слова:** планарный граф, структурные свойства, 3-многогранник, ребро, вес, точное описание.

Посвящается светлой памяти  
Семёна Самсоновича Кутателадзе

## 1. Введение

Степень вершины или грани  $x$ , т. е. число инцидентных ей ребер, обозначим через  $d(x)$ .  $k$ -Вершина это вершина  $v$  с  $d(v) = k$ .  $k$ -Грань  $f$  имеет  $d(f) = k$ . Через  $k^+$  или  $k^-$  обозначим любое целое число, не меньшее или не большее, чем

---

Работа первого автора поддержана Министерством науки и высшего образования России (проект FWNF-2022-0017). Работа второго автора поддержана Министерством науки и высшего образования России, грант FSRG-2023-0025.

$k$ , соответственно. Следовательно,  $k^+$ -вершина  $v$  удовлетворяет неравенству  $d(v) \geq k$ , и т. д.

Ребро  $uv$  есть  $(i, j)$ -ребро, если  $d(u) \leq i$  и  $d(v) \leq j$ . Вес  $w(e)$  ребра  $e$  в 3-многограннике это сумма степеней его концевых вершин. Через  $\delta(G)$  и  $w(G)$  обозначим минимальную вершинную степень и минимальный вес ребер графа  $G$  соответственно. Будем опускать аргумент всякий раз, когда он ясен из контекста.

Еще в 1904 г. Вернике [1] доказал, что каждый 3-многогранник с  $\delta = 5$  удовлетворяет неравенству  $w \leq 11$ . В 1940 г. Лебег [2] доказал, что каждый 3-многогранник содержит либо (3, 11)-ребро, либо (4, 7)-ребро, либо (5, 6)-ребро, где параметры 7 и 6 наилучшие из возможных. В 1955 г. Коциг [3] доказал, что для каждого 3-многогранника верно неравенство  $w \leq 13$ , причем оценка точна.

В 1972 г. Эрдеш (см. [4]) предположил, что оценка Коцига  $w \leq 13$  верна для всех планарных графов с  $\delta \geq 3$ . Первое доказательство гипотезы Эрдеша дал О. В. Бородин [5]. В [6, 7] О. В. Бородин уточнил этот результат, доказав, что каждый 3-многогранник содержит либо (3, 10)-, либо (4, 7)-, или (5, 6)-ребро (как простое следствие из некоторых более сильных структурных фактов, имеющих приложения к раскраске плоских графов).

В некоторых приложениях к раскраске важно найти легкое ребро, инцидентное одной или двум 3-граням. Для 3-многогранников минимальный вес всех его ребер обозначим через  $w$ , инцидентных 3-границ — через  $w^*$ , а инцидентных двум 3-граням — через  $w^{**}$ .

О. В. Бородин [8] доказал, что для каждого 3-многогранника верно либо  $w^{**} \leq 13$ , либо  $w^* \leq 10$ , или  $w \leq 8$ , где все оценки являются наилучшими из возможных. Некоторые другие связанные с этим результаты, а также гипотезы и ссылки можно найти в обзорах [9, 12] и работах [1–8, 13–25].

За последние почти три десятилетия множество исследований было посвящено структурным задачам и задачам раскраски плоских графов, разреженных в том или ином смысле. Нам кажется, что наиболее плотные среди разреженных плоских графов — те, у которых нет 3-граней, имеющих общее ребро, т. е. удовлетворяющие равенству  $w^{**} = \infty$ .

В частности, новые результаты о структуре плоских графов с минимальной степенью 3 и 4 и  $w^{**} = \infty$  при различных дополнительных ограничениях находят применение в 3-раскраске (как правильной, так и неправильной), 3- и 4-выбираемости, а также в недавно введенных 3-DP- и 4-DP-раскрасках (для получения такой информации см. ссылки в выдающейся работе Дворжака и Постля [26] и на нее). Кроме того, в тотальной и вершинно-реберно-граневой раскрасках плоских графов мы часто имеем дело со случаем  $w^{**} = \infty$ .

Ранее доказанное в [16] утверждение, что каждый 3-многогранник с  $w^{**} = \infty$  удовлетворяет точной оценке  $w \leq 9$ , было усилено О. В. Бородиным в [17] до  $w^* \leq 9$  или  $w \leq 8$ , причем обе оценки точны.

Недавно мы [27] усилили этот результат, доказав, что факт  $w^{**} = \infty$  влечет наличие либо (3, 6)-, либо (4, 4)-ребра, инцидентных 3-границ, либо (3, 5)-ребра, причем описание точно. Заметим, что, как хорошо известно, если (3, 5)-ребра допускаются, то может вообще не быть 3-граней.

Целью нашей статьи является доказательство следующего более сильного результата.

**Теорема 1.** *Каждый 3-многогранник без смежных 3-граней содержит либо (4, 4)-ребро, инцидентное 3-границ и 7-границ, либо (3, 6)-ребро, инцидентное*

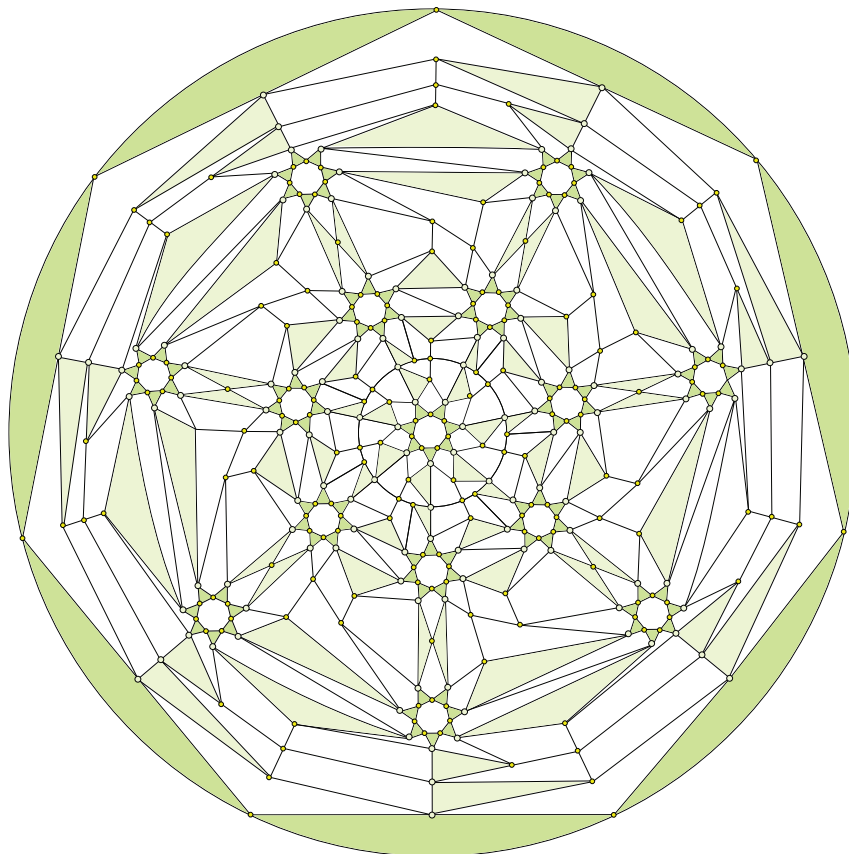


Рис. 1. Каждое полуслабое  $(4, 4)$ -ребро инцидентно 7-грани.

3-грани и 4-грани, либо  $(3, 5)$ -ребро, где ни один из параметров не может быть усилен.

Главной трудностью было построение 3-многогранника, подтверждающего точность 7 в данном описании.

## 2. Доказательство теоремы 1

Ребро называется *полуслабым*, если оно инцидентно 3-грани. На рис. 1 мы видим граф без 3-вершин, в котором каждое полуслабое  $(4, 4)$ -ребро инцидентно 7-грани, что подтверждает необходимость и неумлучшаемость первого варианта в теореме 1.

В [17] получен плоский граф (с  $w^{**} = \infty$ , что также предполагается в доказательстве ниже) с вершинами степеней только 3 и 6, в котором каждое ребро является полуслабым и соединяет  $3^+$ -вершину с 6-вершиной. Это подтверждает необходимость и неумлучшаемость второго варианта в теореме 1.

Третий вариант подтверждается двойственным многогранником известного архимедова тела, в котором каждое ребро соединяет 3-вершину с 5-вершиной и инцидентно двум 4-граням.

**2.1. Перераспределение зарядов и его следствия.** Через  $P$  обозначим контрпример к теореме 1. Пусть  $V$ ,  $E$  и  $F$  — множества вершин, ребер и граней

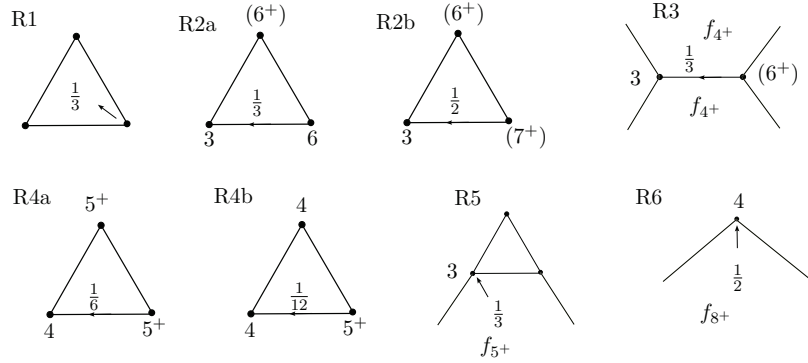


Рис. 2. Перераспределение зарядов.

графа  $P$  соответственно. Формулу Эйлера  $|V| - |E| + |F| = 2$  для  $P$  перепишем в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8. \quad (1)$$

Каждая вершина и грань  $x$  вносит заряд  $\mu(x) = d(x) - 4$  в формулу (1), так что только заряды 3-вершин и 3-граней отрицательны. Используя свойства контрпримера  $P$ , перераспределим заряды  $\mu$ , сохранив их сумму так, что *новый заряд*  $\mu'(x)$  окажется неотрицательным для всех  $x \in V \cup F$ . Это будет противоречить тому, что сумма новых зарядов по формуле (1) равна  $-8$ .

В дальнейшем обозначим вершины, смежные (инцидентные) вершине (гранни)  $x$  в циклическом порядке, через  $v_1, \dots, v_{d(x)}$ . Ребро назовем *сильным*, если оно не инцидентно 3-гранни.

Мы применяем следующие правила распределения зарядов (рис. 2).

**R1.** Каждая 3-грань получает  $\frac{1}{3}$  от каждой инцидентной вершины.

**R2.** Каждая 3-вершина  $v_1$  получает от смежной вершины  $v_2$  вдоль слабого ребра:

- (a)  $\frac{1}{3}$ , если  $d(v_2) = 6$ , и
- (b)  $\frac{1}{2}$ , если  $d(v_2) \geq 7$ .

**R3.** Каждая 3-вершина получает  $\frac{1}{3}$  от смежной вершины вдоль каждого сильного ребра.

**R4.** Каждая 4-вершина  $v$ , инцидентная грани  $f_1 = v_1 v v_2$ , получает от каждой смежной  $5^+$ -вершины  $v_2$ :

- (a)  $\frac{1}{6}$ , если  $d(v_1) \geq 5$ , и
- (b)  $\frac{1}{12}$ , если  $d(v_1) = 4$ .

**R5.** Каждая 3-вершина, инцидентная 3-гранни и  $5^+$ -гранни  $f$ , получает  $\frac{1}{3}$  от  $f$ .

**R6.** Каждая 4-вершина получает  $\frac{1}{2}$  от каждой инцидентной  $8^+$ -гранни.

**2.2. Проверка того, что  $\mu'(x) \geq 0$  для всех  $x \in V \cup F$ .**

СЛУЧАЙ 1.  $f \in F$ . Если  $d(f) = 3$ , то  $\mu'(f) = 4 - 3 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$  по R1. Если  $d(f) = 4$ , то  $f$  не участвует в R1–R6, поэтому  $\mu'(f) = \mu(f) = 0$ .

Подслучай 1.1.  $5 \leq d(f) \leq 7$ . Заметим, что  $f = v_1 v_2 \dots$  может участвовать только в R5. Предположим,  $f$  дает  $\frac{1}{3}$  вершине  $v_2$ , где  $d(v_1) \geq 6$  и  $d(v_3) \geq 6$  благодаря отсутствию (3, 5)-ребер в  $P$ , и ребро  $v_1 v_2$  инцидентно 3-границе. Чтобы оценить общую передачу от грани  $f$ , перебросим  $\frac{1}{12}$  от  $v_2$  на каждую из вершин  $v_1, v_3$ . Теперь каждая вершина, инцидентная грани  $f$ , получает от  $f$  не более  $\frac{1}{6} = 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - 2 \times \frac{1}{12}$ . Как результат,  $\mu'(f) = d(f) - 4 - d(v) \times \frac{1}{6} = \frac{5d(v)-24}{6} > 0$ , что и требовалось.

Подслучай 1.2.  $d(f) \geq 8$ . Теперь каждая инцидентная вершина получает не более  $\frac{1}{2}$  от грани  $f$  по R5 или R6, откуда следует  $\mu'(f) = d(f) - 4 - d(f) \times \frac{1}{2} = \frac{d(f)-8}{2} \geq 0$ .

СЛУЧАЙ 2.  $v \in V$ .

Подслучай 2.1.  $d(v) = 3$ . Если  $v$  не инцидентна 3-граням, то  $\mu'(v) = 4 - 3 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$  по R3.

Пусть  $v$  инцидентна 3-грани  $f = v_1 v v_2$  (в точности одной, поскольку  $w^{**} = \infty$ ). Тогда  $v$  получает  $\frac{1}{3}$  от  $6^+$ -соседа  $v_3$  по R3 и дает  $\frac{1}{3}$  грани  $f$  по R1.

Если  $d(v_1) \geq 7$ , то  $v$  получает  $\frac{1}{2}$  от  $v_1$  по R2b. Если  $d(v_1) = 6$ , то  $v$  получает  $\frac{1}{3}$  от  $v_1$  по R2a и  $\frac{1}{3}$  от  $5^+$ -грани  $f_3 = v_1 v v_3 \dots$  по R5 ввиду свойств нашего контрпримера  $P$ . В обоих случаях  $v_1$  вместе с  $f_3$  приносит вершине  $v$  не менее  $\frac{1}{2}$ . То же самое верно для  $v_2$  и  $f_2 = v_2 v v_3 \dots$ , откуда  $\mu'(v) \geq 3 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$ .

Подслучай 2.2.  $d(v) = 4$ . Заметим, что если  $v$  не инцидентна 3-грани, то  $v$  не участвует в R1 и  $\mu'(v) \geq 0$  с учетом R6.

Допустим, что найдется 3-грань  $f_1 = v_1 v v_2$ . Если  $d(v_1) \geq 5$  и  $d(v_2) \geq 5$ , то  $v$  получает  $2 \times \frac{1}{6}$  от  $v_1$  и  $v_2$  по R4a и отдает  $\frac{1}{3}$  грани  $f_1$  по R1, поэтому 3-грань  $f_1$  ничего не забирает от вершины  $v$ . Остается предположить, что  $d(v_1) = 4$ . Теперь  $v$  получает  $\frac{1}{2}$  по R6 от  $8^+$ -грани  $f_4 = v_1 v v_4 \dots$  по свойствам  $G$ . Поскольку  $v$  инцидентна не более чем двум 3-граням, остается рассмотреть случай, когда найдется  $f_3 = v_3 v v_4$ .

Теперь, если найдется 4-вершина в  $\{v_2, v_3\}$ , то  $v$  получает еще  $\frac{1}{2}$  от  $8^+$ -грани  $f_2 = v_2 v v_3 \dots$ , откуда следует  $\mu'(v) = 4 - 4 + 2 \times \frac{1}{2} - 2 \times \frac{1}{3} > 0$  по R1, R6. Наконец, пусть  $d(v_2) \geq 5$  и  $d(v_3) \geq 5$ , что означает, что каждая из  $v_2, v_3$  дает вершине  $v$  заряд  $\frac{1}{12}$  по R4b, следовательно,  $\mu'(v) \geq \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{12} - 2 \times \frac{1}{3} = 0$  с учетом R4a.

Подслучай 2.3.  $d(v) = 5$ . Здесь  $v$  инцидентна не более двум 3-граням, и каждая 3-грань  $f_1 = v_1 v v_2$  получает  $\frac{1}{3}$  от  $v$  по R1, тогда как  $v_1$  и  $v_2$  забирают у  $v$  либо  $2 \times \frac{1}{12}$  по R4b, когда  $d(v_1) = d(v_2) = 4$ , либо не более чем  $\frac{1}{6}$  по R4a в противном случае. Отсюда  $\mu'(v) = 5 - 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$ .

Подслучай 2.4.  $d(v) = 6$ . Теперь каждая 3-грань  $v_1 v v_2$  уносит от  $v$  не более  $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$  по R1, R2a и R4. Здесь мы перераспределим передачу в  $\frac{1}{3}$  по R1 следующим образом. Если  $d(v_1) = d(v_2) = 4$ , то переведем  $\frac{1}{6}$  на каждую из 4-вершин  $v_1$  и  $v_2$ . В противном случае переводим  $\frac{1}{3}$  на  $5^+$ -вершину в грани  $v_1 v v_2$ . Заметим, что после такого усреднения каждое инцидентное полуслабое ребро собирает не более  $\frac{1}{3}$  от  $v$ , а 3-грани ничего не забирают. С учетом правила R3 каждое ребро при  $v$  уносит от  $v$  не более  $\frac{1}{3}$ . Следовательно,  $\mu'(v) \geq 6 - 4 - 6 \times \frac{1}{3} = 0$ .

Подслучай 2.5.  $d(v) \geq 7$ . Здесь 3-грань при  $v$  забирает не более  $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$  от  $v$  по R1, R2b и R4. Кроме того,  $v$  отдает  $\frac{1}{3}$  по R3 каждой смежной 3-вершине по сильному ребру.

Пусть  $T$  — число 3-граней при  $v$ . Нетрудно видеть, что  $T \leq \frac{d(v)}{2}$ , откуда  $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - T \times \frac{5}{6} - (d(v) - 2T) \times \frac{1}{3} = \frac{2d(v)}{3} - 4 - T \times \frac{1}{6} \geq \frac{2d(v)}{3} - 4 - \frac{d(v)}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{7d(v) - 48}{12} > 0$ , что и требовалось.

Таким образом, мы доказали, что  $\mu'(x) \geq 0$  для всех  $x \in V \cup F$ , а это противоречит формуле (1) и завершает доказательство теоремы 1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Wernicke P. Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58, N 3. P. 413–426.
2. Lebesgue H. Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. Kotzig A. Contribution to the theory of Eulerian polyhedra (Slovak) // Mat. Čas. 1955. V. 5. P. 101–103.
4. Grünbaum B. New views on some old questions of combinatorial geometry // Int. Theorie Combinatorie, Rome (1973). 1976. V. 1. P. 451–468.
5. Бородин О. В. Совместные раскраски графов на плоскости // Дискрет. анализ. 1987. Т. 45. С. 21–27.
6. Borodin O. V. Joint extension of two Kotzig's theorems on 3-polytopes // Combinatorica. 1992. V. 13, N 1. P. 121–125.
7. Бородин О. В. Строение окрестностей ребра в плоском графе и совместная раскраска вершин, ребер и граней // Мат. заметки. 1993. Т. 53, № 5. С. 35–47.
8. Бородин О. В. Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
9. Borodin O. V. Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
10. Borodin O. V., Ivanova A. O. New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conference Proceedings. 2017. N 1907. 030051.
11. Cranston D. W., West D. B. An introduction to the discharging method via graph coloring // Discrete Math. 2017. V. 340, N 4. P. 766–793.
12. Jendrol' S., Voss H.-J. Light subgraphs of graphs embedded in the plane – a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
13. Aksenov V. A., Borodin O. V., Ivanova A. O. An extension of Kotzig's theorem // Discussiones Math. Graph Theory. 2016. V. 36, N 4. P. 889–897.
14. Batueva Ts. Ch-D., Borodin O. V., Bykov M. A., Ivanova A. O., Kazak O. N., Nikiforov D. V. Refined weight of edges in normal plane maps // Discrete Math. 2017. V. 340, N 11. P. 2659–2664.
15. Borodin O. V. On the total coloring of planar graphs // J. Reine Angew. Math. 1989. V. 394. P. 180–185.
16. Borodin O. V. Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.
17. Borodin O. V. More about the weight of edges in planar graphs // Tatra Mountains Math. Publ. 1996. V. 9. P. 11–14.
18. Borodin O. V., Hartke S. G., Ivanova A. O., Kostochka A. V., West D. B. (5, 2)-Coloring of sparse graphs // Sib. Electron. Mat. Izv. 2008. V. 5. P. 417–426.
19. Borodin O. V., Glebov A. N., Raspaud A. Planar graphs without triangles adjacent to cycles of length from 4 to 7 are 3-colorable // Thomassen's special issue of Discrete Math. 2010. V. 310, N 20. P. 2584–2594.
20. Borodin O. V., Ivanova A. O. Weight of edges in normal plane maps // Discrete Math. 2016. V. 339, N 5. P. 1507–1511.
21. Borodin O. V., Ivanova A. O. An improvement of Lebesgue's description of edges in 3-polytopes and faces in plane quadrangulations // Discrete Math. 2019. V. 342, N 6. P. 1820–1827.
22. Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V., Sheikh N. N. Minimax degrees of quasiplane graphs without 4-faces // Sib. Electron. Mat. Izv. 2007. V. 4. P. 435–439.
23. Borodin O. V., Kostochka A. V., Woodall D. R. List edge and list total colourings of multi-graphs // J. Combin. Theory (B). 1997. V. 71, N 2. P. 184–204.
24. Ferencová B., Madaras T. Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.

- 25. Jendrol' S., Maceková M. Describing short paths in plane graphs of girth at least 5 // Discrete Math. 2015. V. 338, N 2. P. 149–158.
- 26. Dvořák Z., Postle L. Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8 // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 129. P. 38–54.
- 27. Borodin O. V., Ivanova A. O. Describing edges in normal plane maps having no adjacent 3-faces // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 1. P. 495–500.

*Поступила в редакцию 4 июня 2025 г.*

*После доработки 4 июня 2025 г.*

*Принята к публикации 15 августа 2025 г.*

Бородин Олег Вениаминович  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна (ORCID 0000-0002-6179-3740)  
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,  
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000  
`shmgnanna@mail.ru`



УДК 514.13+512.817

## ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ГРУППА КОКСЕТЕРА МИНИМАЛЬНОГО КООБЪЕМА В ТРЕХМЕРНОМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

**Аннотация.** Доказано, что среди всех прямоугольных групп Коксетера в трехмерном гиперболическом пространстве наименьший кообъем имеет группа, порожденная отражениями в гранях прямоугольной треугольной бипирамиды. Эта бипирамида имеет три идеальные и две конечные вершины. Группа является арифметической и кообъем равен константе Каталана  $G = 0,915965\dots$

DOI 10.33048/smzh.2025.66.604

**Ключевые слова:** гиперболический многогранник, прямоугольный многогранник, прямоугольная группа Коксетера.

Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

### § 1. Введение

Фундаментальной проблемой в гиперболической геометрии является изучение дискретных подгрупп группы  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  изометрий  $n$ -мерного гиперболического пространства  $\mathbb{H}^n$ , в частности, групп, порожденных отражениями. При этом дискретные группы изометрий, не содержащие кручений, соответствуют гиперболическим  $n$ -мерным многообразиям. Во многих конструкциях такие группы возникают как подгруппы конечного индекса в группах, порожденных отражениями [1–3].

Напомним [4, 5], что группа Коксетера  $W$  определяется конечным представлением вида  $W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = 1, \forall s, t \in S \rangle$ , где  $m_{ss} = 1$  и  $m_{st} \in \{2, 3, \dots, \infty\}$ , если  $s \neq t$ . Здесь  $m_{st} = \infty$  означает, что между  $s$  и  $t$  соотношений нет. Группа Коксетера  $W$  называется прямоугольной, если  $m_{st} \in \{2, \infty\}$  для  $s \neq t$ .

Выпуклый многогранник  $P \subset \mathbb{H}^n$  с двугранными углами вида  $\pi/m$  для целого  $m \geq 2$  при  $(n-2)$ -мерных гранях называют *гиперболическим многогранником Коксетера*. Группа  $\Gamma(P)$ , порожденная отражениями в  $(n-1)$ -мерных гранях  $P$ , является группой Коксетера. *Кообъемом* группы  $\Gamma(P)$  будем называть объем многогранника  $\text{vol}(P)$ . Будем говорить, что группа  $\Gamma(P)$  *кокомпактна*, если  $P$  — компактный многогранник, и что  $\Gamma(P)$  *конечного кообъема*, если  $P$  имеет конечный объем. Как показал Винберг [6], если  $n \geq 30$ , то в  $\mathbb{H}^n$  не существует кокомпактных групп Коксетера. Примеры известны только если  $n \leq 8$  (см. [7]). Согласно [8, 9], если  $n > 995$ , то в  $\mathbb{H}^n$  не существует групп

---

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН: А. Ю. Веснин поддержан проектом No. FWNF-2022-0004, А. А. Егоров поддержан проектом No. FWNF-2022-0017.

Коксетера конечного кообъема. Примеры известны только для  $n \leq 19$  [10] и  $n = 21$  [11]. Как показано в [12], существует бесконечно много групп Коксетера конечного кообъема (соответственно компактных) в  $\mathbb{H}^n$  для каждого  $n \leq 19$  (соответственно  $n \leq 6$ ).

В данной работе рассматриваются прямоугольные многогранники конечного объема в трехмерном гиперболическом пространстве  $\mathbb{H}^3$  и соответствующие им прямоугольные группы Коксетера. Многогранник  $P$  называется *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . В этом случае соответствующая группа отражений  $\Gamma(P)$  является прямоугольной группой Коксетера. Известно, что не существует компактных прямоугольных гиперболических групп Коксетера, если  $n > 4$  [13], и прямоугольных гиперболических групп Коксетера конечного кообъема, если  $n > 12$  [14]. В последнем случае примеры известны в размерностях  $n \leq 8$  (см. [15]).

Данбар и Мейергофф [16] показали, что множество объемов трехмерных гиперболических орбифолдов конечного объема имеет порядковый тип  $\omega^\omega$  и число орбифолдов заданного объема конечно. Традиционно объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляют в терминах следующей функции Лобачевского (см. [17]):

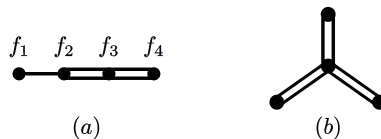
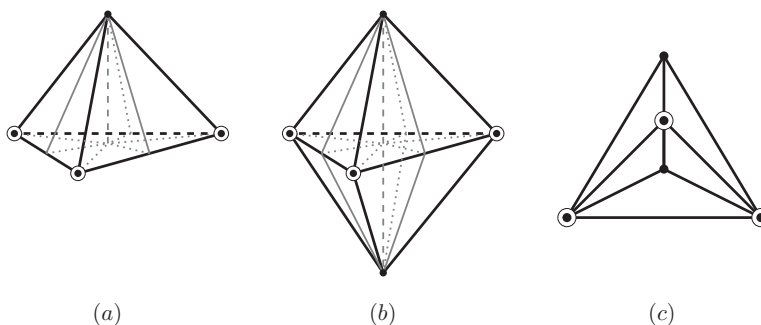
$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| dt.$$

Ниже мы будем использовать величину  $v_{oct} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663862$ , равную объему правильного идеального октаэдра в  $\mathbb{H}^3$ , и величину  $v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941$ , равную объему правильного идеального тетраэдра в  $\mathbb{H}^3$ . Здесь и далее все приближенные значения функции Лобачевского и значения объемов приводятся с точностью до шести знаков после запятой.

Дискретные группы отражений удобно описывать при помощи схем Коксетера [5, 18]. Каждому многограннику Коксетера, в частности лежащему в  $\mathbb{H}^3$ , соответствует граф, называемый его *схемой Коксетера*. Вершины схемы Коксетера соответствуют граням многогранника. Если две грани многогранника взаимно перпендикулярны, то вершины схемы не соединяются ребром. Если угол между гранями равен  $\pi/m$ ,  $m \geq 3$ , то соответствующие вершины соединяются ребром кратности  $m - 2$  (как правило, если  $m \in \{3, 4, 5\}$ ) или обычным ребром с меткой  $m$ . Схемы Коксетера также используются для обозначения групп Коксетера, порожденных отражениями в гранях многогранника Коксетера.

Обозначим через  $\Delta_{3,4,4}$  тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  с гранями  $f_1, f_2, f_3, f_4$ , у которого двугранные углы  $\alpha_i$  между гранями  $f_i$  и  $f_{i+1}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , имеют значения  $\alpha_1 = \pi/3$ ,  $\alpha_2 = \pi/4$ ,  $\alpha_3 = \pi/4$ , а все остальные двугранные углы равны  $\pi/2$ . Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$ , порожденной отражениями в гранях  $\Delta_{3,4,4}$ , приведена на рис. 1(a), где указаны обозначения граней.

Тетраэдр  $\Delta_{3,4,4}$  имеет три конечные вершины и одну идеальную вершину, которая принадлежит граням  $f_2, f_3$  и  $f_4$ . Под действием диэдральной группы порядка шесть, порожденной отражениями в гранях  $f_1$  и  $f_2$ , из шести экземпляров  $\Delta_{3,4,4}$  получаем тетраэдр  $\Delta'_{3,4,4}$  на рис. 2(a), у которого три идеальные вершины лежат в одной плоскости, которая содержит грань  $f_4$ , а в конечной вершине встречаются три прямых угла (тетраэдры с таким свойством называют *трипрямоугольными* [19]). Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta'_{3,4,4})$ , порожденной отражениями в гранях  $\Delta'_{3,4,4}$ , приведена на рис. 1(b). Объединяя тетраэдр


 Рис. 1. Схемы Кокстера для групп  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  и  $\Gamma(\Delta'_{3,4,4})$ .

 Рис. 2. Тетраэдр  $\Delta'_{3,4,4}$ , многогранник  $\mathcal{P}_{(3,2)}$  и диаграмма Шлегеля для  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ .

$\Delta'_{3,4,4}$  с его зеркальным образом относительно плоскости, содержащей грань  $f_4$ , получим треугольную бипирамиду с шестью гранями, у которой все двугранные углы равны  $\pi/2$ . Поскольку эта бипирамида имеет три идеальных и две конечные вершины, будем обозначать ее через  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ . Многогранник  $\mathcal{P}_{(3,2)}$  и его диаграмма Шлегеля приведены на рис. 2(b), (c). Отметим, что многогранник  $\mathcal{P}_{(3,2)}$  появлялся в различных контекстах в работах [8, 13, 20, 21].

По построению объем прямоугольного многогранника  $\mathcal{P}_{(3,2)}$  равен

$$\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,2)}) = 2 \text{vol}(\Delta'_{3,4,4}) = 12 \text{vol}(\Delta_{3,4,4}) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

где объем тетраэдра  $\Delta_{3,4,4}$  вычислен через функцию Лобачевского по приведенной ниже формуле (1). Хорошо известно [22], что  $2\Lambda(\frac{\pi}{4}) = G$ , где

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$$

— константа Каталана, появившаяся в 1867 г. в его работе [23]. С точностью до шести знаков имеем  $G = 0,915965$ . Более точные приближения константы Каталана  $G$  приведены в [24].

Основным результатом данной работы является следующая

**Теорема 1.1.** Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный многогранник в  $\mathbb{H}^3$ . Тогда имеет место неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G$ , где  $G = 2\Lambda(\frac{\pi}{4})$  — константа Каталана. При этом треугольная бипирамида  $\mathcal{P}_{(3,2)}$  является единственным прямоугольным многогранником, для которого достигается равенство.

Хорошо известно, что арифметичность групп трехмерных гиперболических многообразий и орбифолдов имеет важное значение при изучении их свойств [25]. Вопрос, восходящий к Зигелю [26], состоит в следующем: какие гиперболические многообразия и орбифолды имеют наименьший объем в ориентируемом и неориентируемом случаях? Как отмечено в [27], имеет место фольклорная

гипотеза, состоящая в том, что минимальные объемы всегда достигаются на арифметических многообразиях или орбифолдах. К настоящему времени эта гипотеза полностью подтверждена для  $n = 3$  (см. [28–34]). Отметим, что аналогичное свойство арифметичности минимальных объемов имеет место и для прямоугольных групп Кокстера. А именно, минимальная кокомпактная прямоугольная гиперболическая группа Кокстера арифметична в силу [35, 36]. Минимальная прямоугольная гиперболическая группа Кокстера конечного объема также арифметична, что следует из теоремы 1.1.

**Следствие 1.1.** *Прямоугольная гиперболическая группа Кокстера в  $\mathbb{H}^3$  минимального кообъема является арифметической.*

Статья имеет следующую структуру. В § 2 напомним некоторые результаты о прямоугольных многогранниках в пространстве  $\mathbb{H}^3$  и их объемах. Более подробную информацию о геометрии пространства  $\mathbb{H}^3$  и о гиперболических многообразиях и орбифолдах можно найти в [3]. В § 3 приведем доказательство теоремы 1.1, представленное последовательностью лемм 3.1–3.4. В § 4 обсудим арифметичность прямоугольных групп отражений, появившихся при доказательстве теоремы 1.1. Завершим статью некоторыми открытыми вопросами, сформулированными в § 5.

## § 2. Предварительные сведения

**2.1. Существование прямоугольных гиперболических многогранников.** Обозначим через  $\mathbb{R}^{n,1}$  векторное пространство  $\mathbb{R}^{n+1}$ , снабженное скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  сигнатуры  $(n, 1)$ , а через  $f_n$  — ассоциированную с этим произведением квадратичную форму. В подходящем базисе эта форма выражается следующим образом:

$$f_n(x) = -x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

Пространством Лобачевского  $\mathbb{H}^n$  размерности  $n$  называется верхняя связная компонента гиперboloида, заданного уравнением  $f_n(x) = -1$ :

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid f_n(x) = -1 \text{ и } x_0 > 0\}.$$

В данной модели точки на абсолюте соответствуют изотропным векторам:

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n,1} \mid f_n(x) = 0 \text{ и } x_0 > 0\}/\mathbb{R}_+.$$

*Выпуклым гиперболическим многогранником* размерности  $n$  называется пересечение конечного семейства замкнутых полупространств в  $\mathbb{H}^n$ , которое содержит непустое открытое множество. Выпуклый гиперболический многогранник называется *гиперболическим многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы являются целыми частями  $\pi$ , т. е. имеют вид  $\pi/t$  для некоторого целого  $t \geq 2$ . Гиперболический многогранник Кокстера называется *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны  $\pi/2$ . Если все двугранные углы обобщенного<sup>1)</sup> многогранника не превосходят  $\pi/2$ , то говорят, что этот многогранник *остроугольный*.

<sup>1)</sup> Обобщенным выпуклым многогранником  $P$  называется пересечение (с непустой внутренностью), возможно бесконечного числа, полупространств в  $\mathbb{H}^n$ , такое, что каждый замкнутый шар пересекает лишь конечное число граничных гиперплоскостей, задающих  $P$ .

Известно, что обобщенные многогранники Кокстера являются естественными фундаментальными областями для дискретных групп, порожденных отражениями в пространствах постоянной кривизны (см. [18]).

Выпуклый  $n$ -мерный многогранник имеет конечный объем тогда и только тогда, когда он является выпуклой оболочкой конечного числа точек в компактификации  $\overline{\mathbb{H}^n} = \mathbb{H}^n \cup \partial\mathbb{H}^n$ . Многогранник размерности  $n$  компактен тогда и только тогда, когда он является выпуклой оболочкой конечного числа точек пространства  $\mathbb{H}^n$ , которые называются *конечными*. Выпуклый многогранник называется *идеальным*, если все его вершины лежат на абсолюте  $\partial\mathbb{H}^n$  (такие вершины называются *идеальными*). Известно [37, теорема 1] что для компактного остроугольного многогранника конечного объема  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^3$  каждая вершина имеет симплициальный тип.

Говорят, что два многогранника  $P$  и  $P'$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{E}^n$  *комбинаторно эквивалентны*, если существует биекция между множествами их граней, которая сохраняет отношение инцидентности. Класс комбинаторно эквивалентных многогранников называется *комбинаторным типом* многогранника. Отметим, что если гиперболический многогранник  $P \subset \mathbb{H}^n$  имеет конечный объем, то его замыкание  $\overline{P} \subset \overline{\mathbb{H}^n}$  комбинаторно эквивалентно некоторому компактному многограннику в  $\mathbb{E}^n$ .

Следующая теорема является частным случаем теорем Андреева для компактного случая [38] и случая конечного объема [37], см. также [39]. Теоремы Андреева дают необходимые и достаточные условия для реализации в пространстве Лобачевского абстрактного многогранника заданного комбинаторного типа с предписанными двугранными углами. Мы сформулируем эти условия для прямоугольных многоугольников, следуя [40, теорема 2.1]. Обозначим через  $P^*$  плоский граф, двойственный одномерному скелету  $P^{(1)}$  многогранника  $P$ .

**Теорема 2.1** [38, 37]. *Абстрактный многогранник  $P$  реализуется как прямоугольный многогранник  $\mathcal{P}$  в  $\mathbb{H}^3$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1)  $P$  имеет не менее шести граней;
- (2) в каждой вершине  $P$  сходятся три или четыре грани;
- (3) для любой тройки граней  $(F_i, F_j, F_k)$  такой, что  $F_i \cap F_j$  и  $F_j \cap F_k$  — ребра в  $P$  с различными концами, выполняется  $F_i \cap F_k = \emptyset$ ;
- (4) двойственный граф  $P^*$  не содержит призматических  $k$ -обходов, где  $k \leq 4$ .

При этом каждая вершина валентности три в  $P$  соответствует конечной вершине в  $\mathcal{P}$ , каждая вершина валентности четыре в  $P$  соответствует идеальной вершине в  $\mathcal{P}$ , и реализация  $\mathcal{P}$  единственна с точностью до изометрии.

Здесь для плоского графа  $G$  и двойственного ему графа  $G^*$   $k$ -обходом называется простая замкнутая кривая, состоящая из  $k$  ребер в графе  $G^*$ . Призматическим  $k$ -обходом называется такой  $k$ -обход  $\gamma$ , в котором никакие два ребра графа  $G$ , соответствующие ребрам, через которые проходит  $\gamma$ , не имеют общей вершины.

**2.2. Объем бипрямоугольного гиперболического тетраэдра.** Тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  называется *бипрямоугольным* (или *ортосхемой*), если его вершины можно обозначить через  $A, B, C, D$  таким образом, что ребро  $AB$  ортогонально грани  $BCD$ , а грань  $ABC$  ортогональна ребру  $CD$ . В этом случае получаем следующее равенство двугранных углов:  $\angle AC = \angle BC = \angle BD = \pi/2$ . Величины

остальных двугранных углов обозначим через  $\angle AB = \alpha$ ,  $\angle AD = \beta$ ,  $\angle CD = \gamma$ , где  $\alpha + \beta \geq \pi/2$  и  $\beta + \gamma \geq \pi/2$ . В этом случае бипрямоугольный тетраэдр будем обозначать символом  $R(\alpha, \beta, \gamma)$ . Формула для его объема получена в [41]:

$$\begin{aligned} \text{vol}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{1}{2} \Big[ & \Lambda(\alpha + \delta) + \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta + \delta\right) \\ & + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \Big], \quad (1) \end{aligned}$$

где

$$0 \leq \delta = \arctan \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \alpha \cos \gamma} < \frac{\pi}{2}.$$

С помощью формулы (1) вычислим кообъем группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$ , схема Коксетера которой приведена на рис. 1(а), и группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$ , схема Коксетера которой приведена на рис. 3. А именно, поскольку  $\Delta_{3,4,4} = R(\pi/3, \pi/4, \pi/4)$ , то  $\text{vol}(\Delta_{3,4,4}) = \frac{1}{6}\Lambda(\pi/4)$ , и аналогично, поскольку  $\Delta_{4,4,4} = R(\pi/4, \pi/4, \pi/4)$ , то  $\text{vol}(\Delta_{4,4,4}) = \frac{1}{2}\Lambda(\pi/4)$ .



Рис. 3. Схема Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$ .

**2.3. Компактные прямоугольные многогранники.** Поскольку условия реализации абстрактного многогранника как компактного прямоугольного многогранника в  $\mathbb{H}^3$  впервые были сформулированы А. В. Погореловым [42], иногда эти многогранники называют *многогранниками Погорелова*.

Опишем одно важное бесконечное семейство компактных прямоугольных многогранников. Для  $n \geq 5$  рассмотрим  $(2n+2)$ -гранник  $L_n$ , у которого верхнее и нижнее основания являются  $n$ -угольниками, а боковая поверхность состоит из двух циклов по  $n$  пятиугольников [2], в частности,  $L_5$  является додекаэдром (рис. 4(а)). По теореме 2.1 многогранник  $L_n$  реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как компактный прямоугольный многогранник  $\mathcal{L}_n$ . Следуя [2], многогранники  $\mathcal{L}_n$  называют *многогранниками Лёбелля*, а трехмерные гиперболические многообразия, соответствующие подгруппам без кручения индекса восемь в  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$ ,  $n \geq 5$ , — *многообразиями Лёбелля*, см. [43].

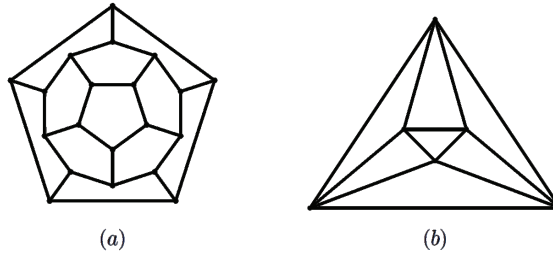


Рис. 4. Додекаэдр  $L_5$  и октаэдр  $A_3$ .

**Теорема 2.2** [44, следствие 9.2]. *Компактным прямоугольным гиперболическим многогранником наименьшего объема является додекаэдр  $\mathcal{L}_5$ , а следующим — многогранник  $\mathcal{L}_6$ .*

Приведенная ниже формула выражает объемы прямоугольных гиперболических многогранников  $\mathcal{L}_n$  через функцию Лобачевского.

**Теорема 2.3** [45]. Для  $n \geq 5$  имеет место равенство

$$\text{vol}(\mathcal{L}_n) = \frac{n}{2} \left( 2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) \right),$$

где  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right)$ .

Непосредственными вычислениями получаем приближенные значения объемов с точностью до шести знаков после запятой:  $\text{vol}(\mathcal{L}_5) = 4,306207$  и  $\text{vol}(\mathcal{L}_6) = 6,023046$ . Нетрудно видеть, что  $\text{vol}(\mathcal{L}_n)$  является возрастающей функцией от  $n$  (см. [44, теорема 4.2]) и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{L}_n)}{n} = \frac{5}{4}v_{tet}$  (см. [46, предложение 2.10]). В работе [47] дан список первых 825 объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников, а также приведены изображения первых соответствующих многогранников. Вычисления объемов проводились с помощью компьютерной программы Orb [48].

Верхние и нижние оценки объемов компактных прямоугольных многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном в [40].

**Теорема 2.4** [40, теорема 2.3]. Пусть  $\mathcal{P}$  — компактный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Тогда

$$\frac{v_{oct}}{32}(V - 8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{5v_{tet}}{8}(V - 10). \quad (2)$$

Более того, существует последовательность компактных прямоугольных многогранников  $\mathcal{P}_i$  с  $V_i$  вершинами такая, что  $\text{vol}(\mathcal{P}_i)/V_i$  стремится к  $\frac{5}{8}v_{tet}$ , когда  $i$  стремится к бесконечности.

В силу теоремы 2.1 в теореме 2.4 подразумевается, что  $V \geq 20$ . В [49] верхняя оценка в (2) была улучшена для компактных прямоугольных гиперболических многогранников с числом вершин  $V \geq 24$ , а в [50] — с числом вершин  $V \geq 81$ .

**2.4. Идеальные прямоугольные многогранники.** Напомним, что многогранник в  $\mathbb{H}^3$  называется *идеальным*, если все его вершины являются идеальными.

Опишем одно важное семейство идеальных прямоугольных многогранников. Для  $n \geq 3$  рассмотрим  $(2n+2)$ -гранник с верхним и нижним  $n$ -угольными основаниями и с боковой поверхностью из двух слоев по  $n$  треугольников, у которого в каждой вершине сходится по четыре ребра. Такой многогранник будем называть  *$n$ -антипризмой* и обозначать через  $A_n$ . Отметим, что  $A_3$  является октаэдром (рис. 4(b)).

По теореме 2.1 для каждого  $n \geq 3$  многогранник  $A_n$  реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как идеальный прямоугольный многогранник  $\mathcal{A}_n$ . В [51, предложение 5] показано, что если многогранник имеет минимальное число граней среди всех идеальных прямоугольных многогранников в  $\mathbb{H}^3$ , у которых хотя бы одна  $n$ -угольная, то он является антипризмой  $\mathcal{A}_n$ .

Следующая формула выражает объемы многогранников  $\mathcal{A}_n$  через функцию Лобачевского.

**Теорема 2.5** [52]. Для  $n \geq 3$  имеет место равенство

$$\text{vol}(\mathcal{A}_n) = 2n \left[ \Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right) \right]. \quad (3)$$

Верхние и нижние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном в [40].

**Теорема 2.6** [40, теорема 2.2]. Пусть  $\mathcal{P}$  — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с  $V$  вершинами. Тогда

$$\frac{v_{oct}}{4}(V-2) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{v_{oct}}{2}(V-4). \quad (4)$$

Оба неравенства превращаются в равенства, если  $\mathcal{P}$  является правильным идеальным гиперболическим октаэдром. Более того, существует последовательность идеальных прямоугольных многогранников  $\mathcal{P}_i$  с  $V_i$  вершинами такая, что  $\text{vol}(\mathcal{P}_i)/V_i$  стремится к  $\frac{1}{2}v_{oct}$ , когда  $i$  стремится к бесконечности.

В силу теоремы 2.1 в теореме 2.6 подразумевается, что  $V \geq 6$ . В [49] верхняя оценка в (4) была улучшена для идеальных прямоугольных гиперболических многогранников с числом вершин  $V \geq 8$ , а в [50] — с числом вершин  $V \geq 25$ .

**2.5. Прямоугольные многогранники с конечными и идеальными вершинами.** Предположим, что прямоугольный гиперболический многогранник  $\mathcal{P}$  имеет  $V_f$  конечных и  $V_\infty$  идеальных вершин. Обозначим через  $E$  число его ребер, а через  $F$  — число его граней. Эйлерова характеристика  $\chi(\mathcal{P})$  многогранника  $\mathcal{P}$  равна

$$\chi(\mathcal{P}) = V_\infty + V_f - E + F = 2.$$

Поскольку каждая конечная вершина инцидентна трем ребрам, а идеальная — четырем, то  $3V_f + 4V_\infty = 2E$ . Значит,

$$F = V_\infty + \frac{1}{2}V_f + 2, \quad (5)$$

откуда следует, что число  $V_f$  конечных вершин всегда четно. Учитывая, что по п. (1) теоремы 2.1 выполнено неравенство  $F \geq 6$ , получаем

$$V_\infty + \frac{1}{2}V_f \geq 4. \quad (6)$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $f$  — грань прямоугольного многогранника  $\mathcal{P} \subset \mathbb{H}^3$ . Если  $f$  треугольная, то она содержит не менее двух идеальных вершин, а если  $f$  четырехугольная, то она содержит не менее одной идеальной вершины.

**Доказательство.** Напомним, что сумма внутренних углов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$   $n$ -угольника в  $\mathbb{H}^2$  удовлетворяет неравенству  $\sum_{i=1}^n \alpha_i < (n-2)\pi$ . При этом в конечной вершине грани  $f$  внутренний угол равен  $\pi/2$ , а в идеальной — равен 0. Если  $f$  — треугольная грань с  $k$  конечными вершинами, то  $k \cdot \frac{\pi}{2} < \pi$ , откуда  $k \leq 1$ . Если  $f$  — четырехугольная грань с  $k$  конечными вершинами, то  $k \cdot \frac{\pi}{2} < 2\pi$ , откуда  $k \leq 3$ .  $\square$

Аткинсон [40] установил следующие верхнюю и нижнюю оценки на объем прямоугольного гиперболического многогранника, имеющего хотя бы одну идеальную вершину.

**Теорема 2.7** [40, теорема 2.4]. Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный гиперболический многогранник с  $V_\infty \geq 1$  идеальными и  $V_f$  конечными вершинами. Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{v_{oct}}{8} \cdot V_\infty + \frac{v_{oct}}{32} \cdot V_f - \frac{v_{oct}}{4} \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot V_\infty + \frac{5v_{tet}}{8} \cdot V_f - \frac{v_{oct}}{2}. \quad (7)$$

В [50] верхняя оценка в (7) была улучшена для прямоугольных гиперболических многогранников таких, что  $V_\infty \geq 1$  и  $V_\infty + V_f \geq 18$ . Пользуясь тем, что  $v_{oct} = 4G$ , перепишем нижнюю оценку из (7) в следующем виде:

$$\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \frac{G}{8} (4V_\infty + V_f - 8). \quad (8)$$



### § 3. Доказательство основной теоремы

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Пусть  $\mathcal{P}$  — прямоугольный многогранник конечного объема в  $\mathbb{H}^3$ . Обозначим через  $V_\infty \geq 0$  число его идеальных вершин, а через  $V_f \geq 0$  — число его конечных вершин. Выясним, при каких  $V_\infty$  и  $V_f$  может иметь место неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$ .

**Лемма 3.1.** *Предположим, что для многогранника  $\mathcal{P}$  имеет место один из следующих случаев: (1)  $V_f = 0$ ; (2)  $V_\infty = 0$ ; (3)  $V_\infty = 1$ . Тогда  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .*

**Доказательство.** (1) В этом случае  $\mathcal{P}$  является идеальным прямоугольным многогранником и по теореме 2.6  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq v_{oct} = 4G > G$ .

(2) В этом случае  $\mathcal{P}$  является компактным прямоугольным многогранником и по теореме 2.2 его объем ограничен снизу объемом прямоугольного додекаэдра, следовательно,  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq 4,306207 > G$ .

(3) Как показал Нонака [53, лемма 3.1], в этом случае  $F \geq 12$ , а из равенства (5) следует, что  $V_f \geq 18$ . Тогда по формуле (8) получаем, что

$$\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \frac{G}{8}G(4 \cdot 1 + 18 - 8) = \frac{14G}{8} > G. \quad \square$$

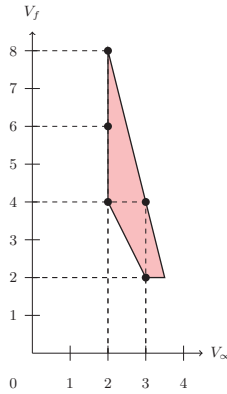


Рис. 5. Замкнутая область  $\Omega$ .

**Лемма 3.2.** *Пусть  $\Omega$  — замкнутая область, ограниченная четырехугольником с вершинами  $(2, 4)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(3.5, 2)$  и  $(2, 8)$  (рис. 5). Пусть многогранник  $\mathcal{P}$  такой, что  $(V_\infty, V_f) \notin \Omega$ . Тогда  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .*

**Доказательство.** В силу леммы 3.1 и четности  $V_f$  можем считать, что если  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$ , то  $\mathcal{P}$  имеет  $V_\infty \geq 2$  идеальных и  $V_f \geq 2$  конечных вершин. В силу теоремы 2.1 величины  $V_\infty$  и  $V_f$  удовлетворяют неравенству (6). А в силу неравенства (8) для выполнения неравенства  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$  величины  $V_\infty$  и  $V_f$  должны удовлетворять неравенству  $4V_\infty + V_f \leq 16$ . Система неравенств

$$\begin{cases} V_\infty \geq 2, \\ V_f \geq 2, \\ V_\infty + \frac{1}{2}V_f \geq 4, \\ 4V_\infty + V_f \leq 16 \end{cases}$$

задает замкнутую область  $\Omega$ , изображенную на рис. 5.  $\square$

В силу лемм 3.1 и 3.2 неравенство  $\text{vol}(\mathcal{P}) \leq G$  может выполняться только если  $(V_\infty, V_f) \in \{(2, 4), (2, 6), (2, 8), (3, 2), (3, 4)\}$ . Каждый из пяти указанных случаев мы рассмотрим ниже.

Для многогранника  $\mathcal{P}$  определим величину  $W(\mathcal{P})$ , равную суммарному числу вершин по всем его граням. Поскольку в  $\mathcal{P}$  каждая идеальная вершина имеет валентность 4, а каждая конечная вершина — валентность 3, то

$$W(\mathcal{P}) = W(V_\infty, V_f) = 4V_\infty + 3V_f. \quad (9)$$

**Лемма 3.3.** Если число идеальных вершин в многограннике  $\mathcal{P}$  равно  $V_\infty = 2$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}) > G$ .

**Доказательство.** В силу леммы 3.2 для доказательства утверждения осталось рассмотреть три случая:  $(V_\infty, V_f) \in \{(2, 4), (2, 6), (2, 8)\}$ .

**СЛУЧАЙ 1:**  $(V_\infty, V_f) = (2, 4)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 6$  и  $W(\mathcal{P}) = 20$ . Обозначим через  $p_n$ ,  $n \geq 3$ , число  $n$ -угольных граней в  $\mathcal{P}$ . Тогда  $\sum_{n \geq 3} p_n = F = 6$  и  $\sum_{n \geq 3} np_n = W(\mathcal{P}) = 20$ . Отметим, что число треугольных граней удовлетворяет неравенству  $p_3 \leq 2$ . В самом деле, по лемме 2.1 каждая треугольная грань должна содержать две идеальные вершины, которые принадлежат общему ребру. Так как  $V_\infty = 2$ , то все треугольные грани должны содержать одно и то же ребро. Значит, таких граней не более двух, а каждая из оставшихся четырех граней имеет не менее чем четыре вершины. Получаем оценку  $W(\mathcal{P}) \geq 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 22$ , что противоречит равенству  $W(\mathcal{P}) = 20$ . Таким образом, случай 1 не реализуется.

**СЛУЧАЙ 2:**  $(V_\infty, V_f) = (2, 6)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 7$  и

$$W(\mathcal{P}) = 4V_\infty + 3V_f = 26. \quad (10)$$

Рассмотрим все возможные варианты расположения двух идеальных вершин  $v_1$  и  $v_2$ .

**Подслучай 2.1.** Предположим, что  $v_1$  и  $v_2$  не лежат в одной треугольной грани. Тогда по лемме 2.1 в  $\mathcal{P}$  нет треугольных граней. Значит, каждая грань содержит не менее четырех вершин и  $W(\mathcal{P}) \geq 4F = 28$ , что противоречит равенству (10).

**Подслучай 2.2.** Предположим, что  $v_1$  и  $v_2$  лежат в одной треугольной грани (и, следовательно, соединены ребром). Тогда, как и в случае 1,  $p_3 \leq 2$ . В силу леммы 2.1 каждая четырехугольная грань содержит хотя бы одну идеальную вершину. Поскольку  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром, то число граней, которые содержат хотя бы одну идеальную вершину (а значит, могут быть треугольными или четырехугольными), не превосходит 6. Следовательно, имеется хотя бы одна грань, которая не содержит идеальных вершин, и число вершин в этой грани не менее 5. Получаем  $W(\mathcal{P}) \geq 3p_3 + 4(6 - p_3) + 5 \cdot 1 = 29 - p_3 \geq 27$ , что противоречит (10). Таким образом, случай 2 не реализуется.

**СЛУЧАЙ 3:**  $(V_\infty, V_f) = (2, 8)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 8$  и

$$W(\mathcal{P}) = 4V_\infty + 3V_f = 32. \quad (11)$$

Рассмотрим все возможные варианты расположения двух идеальных вершин  $v_1$  и  $v_2$ .

**Подслучай 3.1.** Предположим, что обе идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  лежат в  $k$ -угольной грани  $f$ ,  $k \geq 4$ , но не соединены ребром. В силу леммы 2.1

каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину. Следовательно, помимо грани  $f$  вершина  $v_1$  может содержаться не более чем в трех четырехугольных гранях. Аналогичное свойство имеет место и для вершины  $v_2$ . Таким образом,  $\mathcal{P}$  имеет  $k$ -угольную грань  $f$  и не более чем 6 других четырехугольных граней. Следовательно, восьмая грань многогранника  $\mathcal{P}$  имеет только конечные вершины и число вершин в этой грани не менее 5. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq k + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 1 \geq 33$  с учетом  $k \geq 4$ , что противоречит (11).

**Подслучай 3.2.** Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  лежат в  $k$ -угольной грани  $f$ ,  $k \geq 4$ , и соединены ребром  $e$ . Тогда грань  $f_1$ , смежная грани  $f$  по ребру  $e$ , также содержит бесконечные вершины  $v_1$  и  $v_2$ . В силу леммы 2.1 каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину. Следовательно, помимо граней  $f$  и  $f_1$  вершина  $v_1$  может содержаться не более чем в двух четырехугольных гранях. Аналогичное свойство имеет место для вершины  $v_2$ . Таким образом, в  $\mathcal{P}$  число граней, имеющих хотя бы одну идеальную вершину, не превосходит 6 (при этом  $f_1$  может оказаться треугольной). Значит, найдутся хотя бы две грани, у которых все вершины конечны, и тем самым каждая из этих граней имеет не менее 5 вершин. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq k + 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 \geq 33$  с учетом  $k \geq 4$ , что противоречит (11).

**Подслучай 3.3.** Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром  $e$  и каждая из них лежит в двух треугольных гранях  $T_1$  и  $T_2$ . Обозначим через  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  грани, смежные  $T_1$  или  $T_2$ . Заметим, что  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$  являются четырехугольниками, расположенными, как на рис. 6. В самом деле, так как каждая из граней  $Q_i$  содержит не более одной идеальной вершины, то  $Q_i$  имеет не менее 4 вершин. Предположим, что хотя бы одна из граней  $Q_i$  является  $k$ -угольной, где  $k \geq 5$ . Поскольку идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  соединены ребром  $e$ , то число граней в  $\mathcal{P}$ , которые содержат хотя бы одну идеальную вершину, не превосходит 6. Следовательно, в  $\mathcal{P}$  найдутся хотя бы две грани, у которых все вершины являются конечными и число вершин в каждой грани не менее 5. Таким образом,  $W(\mathcal{P}) \geq 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + k + 5 \cdot 2 \geq 33$  с учетом  $k \geq 5$ , что противоречит (11). Следовательно, все грани  $Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$  являются четырехугольниками.

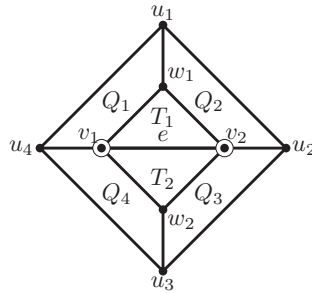
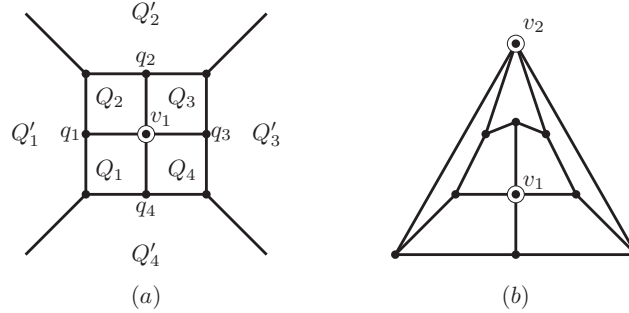


Рис. 6. Два смежных треугольника, окруженные четырехугольниками.

Для  $i = 1, 2, 3, 4$  обозначим через  $u_i$  вершину, принадлежащую общему ребру граней  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ , где индексы берутся по модулю 4, которая не лежит в  $T_1$  или  $T_2$ . Через  $w_1$  и  $w_2$  обозначим конечные вершины треугольников  $T_1$  и  $T_2$  соответственно (см. рис. 6).

Рассмотрим следующие случаи.

Рис. 7. Многогранник  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  и его диаграмма Шлегеля.

(i) Предположим, что вершины  $u_1, u_2, u_3, u_4$  попарно различны. Тогда все вершины, лежащие в гранях  $T_1, T_2, Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ , имеют максимально возможную валентность, а именно, конечные вершины имеют валентность 3, а идеальные вершины — валентность 4. Следовательно, восемь вершин, изображенных на рис. 6, не соединены ребрами с оставшимися двумя вершинами многогранника  $\mathcal{P}$ , что противоречит связности одномерного остова многогранника.

(ii) Предположим, что совпали две последовательные вершины  $u_i$  и  $u_{i+1}$ . Тогда  $Q_{i+1}$  превращается в треугольник, что противоречит его четырехугольности, установленной выше.

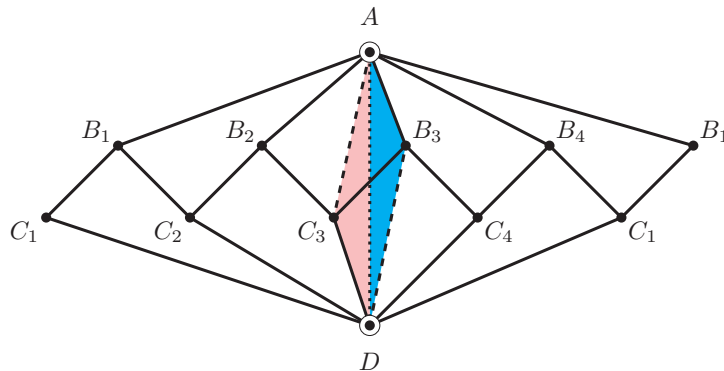
(iii) Предположим, что совпали две непоследовательные вершины  $u_i$  и  $u_{i+2}$ , а вершины  $u_{i+1}$  и  $u_{i+3}$  различны. Если  $i \in \{1, 3\}$ , то получим, что вершина  $u_1 = u_3$  смежна четырем вершинам  $w_1, w_2, u_2$  и  $u_4$ , что противоречит ее трехвалентности. Аналогично, если  $i \in \{2, 4\}$  то получим, что вершина  $u_2 = u_4$  смежна четырем вершинам  $v_1, v_2, u_1$  и  $u_3$ , что противоречит ее трехвалентности.

(iv) Предположим, что попарно совпали вершины  $u_i$  и  $u_{i+2}$ , а также вершины  $u_{i+1}$  и  $u_{i+3}$ . Тогда все вершины, лежащие в гранях  $T_1, T_2, Q_1, Q_2, Q_3$  и  $Q_4$ , имеют максимально возможную валентность, а именно, конечные вершины  $\{w_1, w_2, u_i = u_{i+2}, u_{i+1} = u_{i+3}\}$  являются трехвалентными, а идеальные вершины  $\{v_1, v_2\}$  — четырехвалентными. Следовательно, указанные шесть вершин не соединены ребрами с остальными четырьмя вершинами многогранника  $\mathcal{P}$ , что противоречит связности одномерного остова многогранника.

**Подслучай 3.4.** Предположим, что идеальные вершины  $v_1$  и  $v_2$  не лежат в общей грани и в  $\mathcal{P}$  имеется  $k$ -угольная грань, где  $k \geq 5$ . По лемме 2.1 многогранник  $\mathcal{P}$  не может иметь треугольные грани. Следовательно,  $W(\mathcal{P}) \geq 5 + 7 \cdot 4 = 33$ , что противоречит (11).

**Подслучай 3.5.** Предположим, что все восемь граней многогранника  $\mathcal{P}$  являются четырехугольными. Тогда каждая грань содержит ровно одну идеальную вершину.

Обозначим идеальные вершины в  $\mathcal{P}$  через  $v_1$  и  $v_2$ . Пусть  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  — четырехугольные грани, которые содержат  $v_1$  (см. рис. 7(a)). Обозначим через  $q_i, i = 1, \dots, 4$ , конечную вершину, общую для  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ , где индексы берутся по модулю 4. Пусть  $Q'_i$  — 4-угольная грань, имеющая общую вершину  $q_i$  с гранями  $Q_i$  и  $Q_{i+1}$ . Поскольку  $\mathcal{P}$  имеет 16 ребер, то четыре ребра, по которым пересекаются грани  $Q'_i$  и  $Q'_{i+1}$ , должны встретиться в идеальной вершине  $v_2$ ,


 Рис. 8. Многогранник  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  и тетраэдр  $\Delta_{4,4,4}$ .

которая на рис. 7(a) предполагается бесконечно удаленной. Таким образом, рассматриваемому случаю соответствует единственный многогранник. Диаграмма Шлегеля этого же многогранника приведена на рис. 7(b). Поскольку для этого многогранника  $V_\infty = 2$  и  $V_f = 8$ , будем обозначать его через  $\mathcal{P}_{(2,8)}$ . На рис. 8 приведено изображение многогранника  $\mathcal{P}_{(2,8)}$ , где левый и правый края должны быть отождествлены вдоль  $AB_1C_1D$ . Из рисунка видно, что у  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  имеется диэдральная группа симметрий порядка восемь, порожденная отражениями в плоскостях  $(AC_3D)$  и  $(AB_3D)$ , пересекающихся по прямой  $AD$ .

При факторизации  $\mathcal{P}_{(2,8)}$  по этой диэдральной группе симметрий получим тетраэдр  $\Delta_{4,4,4} = ADB_3C_3$ , у которого двугранные углы при ребрах  $AD$ ,  $AB_3$  и  $C_3D$  равны  $\pi/4$ , а остальные углы равны  $\pi/2$ . Диаграмма Коксетера для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  приведена на рис. 3.

Поскольку  $\text{vol}(\Delta_{4,4,4}) = \frac{1}{2}\Lambda(\frac{\pi}{4})$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(2,8)}) = 4\Lambda(\frac{\pi}{4}) = 2G > G$ , что завершает доказательство леммы 3.3.  $\square$

**Лемма 3.4.** Если число идеальных вершин в прямоугольном многограннике  $\mathcal{P}$  равно  $V_\infty = 3$ , то  $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq G$ . Более того, равенство достигается тогда и только тогда, когда  $\mathcal{P}$  является прямоугольной треугольной бипирамидой  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** В силу леммы 3.2 осталось рассмотреть два случая:  $(V_\infty, V_f) = (3, 2)$  и  $(V_\infty, V_f) = (3, 4)$ . Чтобы следовать общему порядку перечисления случаев, принадлежащих области  $\Omega$ , будем называть эти случаи четвертым и пятым.

**СЛУЧАЙ 4:**  $(V_\infty, V_f) = (3, 2)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 6$  и  $W(P) = 18$ . Предположим, что у  $\mathcal{P}$  имеется хотя бы одна грань с не менее чем четырьмя вершинами. Тогда  $W(\mathcal{P}) \geq 4 + 5 \cdot 3 = 19$ , что приводит к противоречию. Следовательно, все грани многогранника  $\mathcal{P}$  являются треугольниками. Обозначим идеальные вершины многогранника  $\mathcal{P}$  через  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ . Поскольку каждая из шести треугольных граней должна содержать не менее двух идеальных вершин, то  $\mathcal{P}$  должен иметь не менее трех ребер, соединяющих идеальные вершины  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$ . Значит, эти ребра образуют цикл длины три в одномерном остове многогранника, а шесть треугольных граней попарно инцидентны ребрам этого цикла. Следовательно,  $\mathcal{P}$  совпадает с многогранником  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ , приведенным на рис. 2(b), объем которого равен  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,2)}) = 2\Lambda(\frac{\pi}{4}) = G$ .

СЛУЧАЙ 5:  $(V_\infty, V_f) = (3, 4)$ . Из формул (5) и (9) получаем, что  $F = 7$  и

$$W(\mathcal{P}) = 3V_f + 4V_\infty = 24. \quad (12)$$

Прежде всего заметим, что  $\mathcal{P}$  имеет только треугольные и четырехугольные грани. В самом деле, предположим от противного, что найдется такая  $k$ -угольная грань  $f$ , что  $k \geq 5$ . Заметим, что грань  $f$  имеет хотя бы 2 идеальные вершины. В противном случае у  $f$  найдутся по крайней мере 3 ребра, которые имеют только конечные вершины. Тогда три грани, смежные с  $f$  по этим ребрам, имеют не менее чем по 4 вершины. Следовательно,  $W(P) \geq k + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 3 \geq 26$  с учетом  $k \geq 5$ , что противоречит (12). Однако если  $f$  имеет не менее двух идеальных вершин, то  $f$  имеет общее ребро или общую вершину с не менее, чем семью гранями. Значит, число граней в  $\mathcal{P}$  не менее восьми, что противоречит условию  $F = 7$ . Таким образом,  $\mathcal{P}$  содержит только треугольные и четырехугольные грани. Более того, из  $W(\mathcal{P}) = 3p_3 + 4p_4 = 24$  и  $p_3 + p_4 = 7$  следует, что  $p_3 = 4$  и  $p_4 = 3$ .

Рассмотрим все возможные варианты расположения треугольных и четырехугольных граней.

Подслучай 5.1. Предположим, что  $\mathcal{P}$  имеет треугольную грань  $T_0$ , которая содержит все три идеальные вершины  $v_1, v_2$  и  $v_3$ . Тогда оставшиеся треугольные грани  $T_i, i = 1, 2, 3$ , смежны с  $T_0$  по ребрам (рис. 9(a)). Для  $i = 1, 2, 3$  обозначим через  $Q_i$  4-угольную грань, которая имеет общую идеальную вершину с треугольниками  $T_0, T_i$  и  $T_{i+1}$ .

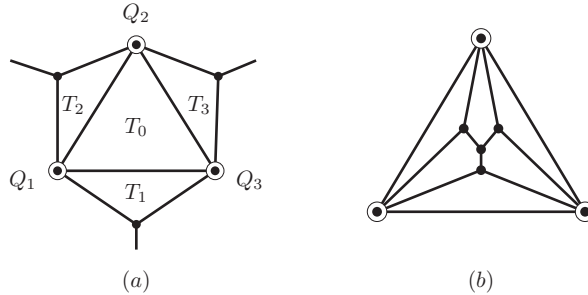
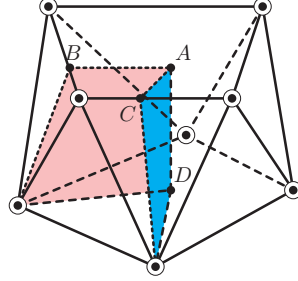
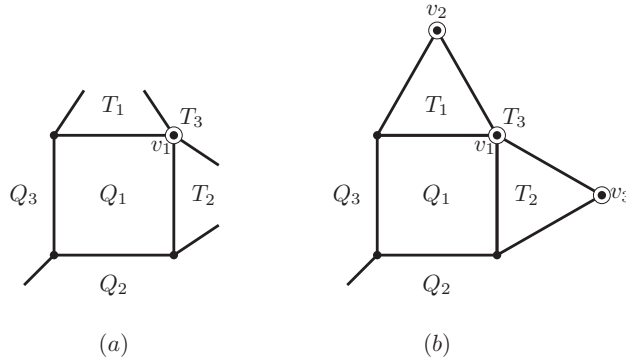


Рис. 9. Многогранник  $\mathcal{P}_{(3,4)}$  и его диаграмма Шлегеля.

Поскольку  $\mathcal{P}$  имеет 12 ребер, то три ребра, по которым пересекаются пары граней  $Q_i, Q_{i+1}$ , должны иметь общую конечную вершину. На рис. 9(a) эта вершина предполагается расположенной достаточно далеко. Диаграмма Шлегеля этого же многогранника приведена на рис. 9(b). Поскольку многогранник имеет 3 идеальных и 4 конечных вершины, будем обозначать его через  $\mathcal{P}_{(3,4)}$ .

Чтобы найти объем  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)})$ , заметим, что под действием группы диэдра порядка 4, порожденной отражениями в гранях многогранника  $\mathcal{P}_{(3,4)}$ , проходящих через конечные вершины  $A, B, D$  и конечные вершины  $A, C, D$ , получим прямоугольную четырехугольную антипризму  $\mathcal{A}_4$  (рис. 10). Таким образом,  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)}) = \frac{1}{4} \text{vol}(\mathcal{A}_4)$ . Используя формулу (3), получаем приближенное значение с точностью до шести знаков после запятой:  $\text{vol}(\mathcal{P}_{(3,4)}) = 1,505361 > G$ .

Далее будем предполагать, что  $\mathcal{P}$  не имеет треугольной грани, которая содержит все три идеальные вершины. Напомним, что в рассматриваемом случае  $\mathcal{P}$  имеет только 4 треугольные и 3 четырехугольные грани.


 Рис. 10. Многогранник  $\mathcal{P}_{(3,4)}$  как  $\frac{1}{4}$ -долька антипризмы  $\mathcal{A}_4$ .

 Рис. 11. Подслучай 5.2: грань  $Q_1$  с одной идеальной вершиной  $v_1$ .

Подслучай 5.2. Предположим, что в  $\mathcal{P}$  существует четырехугольная грань  $Q_1$ , которая имеет ровно одну идеальную вершину, скажем  $v_1$ . Далее будем следовать обозначениям на рис. 11(a).

Так как грани  $Q_2$  и  $Q_3$  содержат ребра, обе вершины которых конечные, то  $Q_2$  и  $Q_3$  не могут быть треугольниками, следовательно, они являются четырехугольниками. Таким образом,  $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$  — полный список четырехугольных граней в  $\mathcal{P}$ , а оставшиеся четыре грани треугольные. Обозначим три из них через  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ , как на рис. 11(a). Тогда в  $T_1$  имеется идеальная вершина  $v_2$ , смежная  $v_1$ , а в  $T_2$  имеется идеальная вершина  $v_3$ , смежная  $v_1$  (рис. 11(b)). Поскольку  $T_3$  является треугольником, то вершины  $v_2$  и  $v_3$  соединены ребром. Таким образом, у  $\mathcal{P}$  имеется треугольная грань  $T_3$ , которая содержит все три идеальные вершины  $v_1, v_2, v_3$ , и мы пришли к ситуации, которая уже была изучена в подслучае 5.1.

Подслучай 5.3. Предположим, что в  $\mathcal{P}$  не существует четырехугольной грани, которая имеет ровно одну идеальную вершину. Поскольку по лемме 2.1 каждая четырехугольная грань должна содержать хотя бы одну идеальную вершину, то каждая четырехугольная грань в  $\mathcal{P}$  имеет хотя бы по две идеальные вершины. Обозначим через  $Q_1$ ,  $Q_2$  и  $Q_3$  четырехугольные грани в  $\mathcal{P}$ , а через  $k_1 \geq 2$ ,  $k_2 \geq 2$  и  $k_3 \geq 2$  — число идеальных вершин в каждой из них. Для многогранника  $\mathcal{P}$  обозначим через  $WI(\mathcal{P})$  величину, равную суммарному числу идеальных вершин по всем граням многогранника. Поскольку  $V_\infty = 3$  и каждая идеальная вершина имеет валентность 4, получаем  $WI(\mathcal{P}) = 4 \cdot 3 = 12$ . С другой стороны, поскольку  $\mathcal{P}$  помимо  $Q_1, Q_2, Q_3$  имеет также четыре треугольные грани, каждая из которых содержит ровно по две

идеальные вершины, то суммарное число идеальных вершин по всем граням равно  $WI(\mathcal{P}) = 2 \cdot 4 + k_1 + k_2 + k_3 \geq 8 + 6 = 14$ ; противоречие.  $\square$

Из лемм 3.1–3.4 следует, что объем произвольного прямоугольного гиперболического многогранника ограничен снизу константой Каталана  $G$ , причем равенство достигается только для многогранника  $\mathcal{P}_{(3,2)}$ . Таким образом, теорема 1.1 доказана.

#### § 4. Арифметичность прямоугольных групп Коксетера

Хорошо известно, что арифметичность дискретных групп  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  конечного кообъема имеет важную роль при изучении гиперболических многообразий и орбиформов  $\mathbb{H}^3/\Gamma$ , см. [25]. Отметим здесь лишь следующее важное свойство: по теореме Маргулиса (см., например, [25, теорема 10.3.5]) соизмеритель

$$\text{Comm}(\Gamma) = \{\gamma \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \text{ и } \Gamma \text{ соизмеримы}\}$$

является дискретной группой тогда и только тогда, когда  $\Gamma$  неарифметическая.

Для дискретных групп движений пространства  $\mathbb{H}^n$ , порожденных конечным числом отражений и имеющих фундаментальный многогранник конечного объема, необходимые и достаточные условия арифметичности были получены Винбергом в 1967 г. (см. [5]). Поскольку предметом наших обсуждений являются прямоугольные группы Коксетера, напомним, что в [54] было отмечено, что группа  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$ , порожденная отражениями в гранях компактного прямоугольного многогранника Лебелля, при  $n \notin \{5, 6, 7, 8, 10, 12, 18\}$  является неарифметической, а затем в [35] было показано, что  $\Gamma(\mathcal{L}_n)$  является арифметической тогда и только тогда, когда  $n \in \{5, 6, 8\}$  (см. также [36]). С использованием критерия Винберга в [55] установлено, что группа  $\Gamma(\mathcal{A}_n)$ , порожденная отражениями в гранях прямоугольной идеальной антипризмы, является арифметической тогда и только тогда, когда  $n \in \{3, 4\}$ .

Известно [5], что условия арифметичности Винберга сильно упрощаются, если фундаментальный многогранник  $P$  группы  $\Gamma(P)$  не является компактным. А именно, пусть  $A(P) = (a_{ij})_{i,j=1}^N$  — матрица Грама многогранника  $P$ . Обозначим через  $\text{Cyc}(A)$  множество всех циклических произведений вида  $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{m-1} i_m} a_{i_m i_1}$ . Тогда для арифметичности группы  $\Gamma(P)$  необходимо и достаточно, чтобы все циклические произведения из  $\text{Cyc}(2 \cdot A(P))$  лежали в  $\mathbb{Z}$ . Арифметичность группы  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  была отмечена в [5]. Например, для группы  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  удвоенная матрица Грама имеет вид

$$2 \cdot A(\Delta_{4,4,4}) = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix},$$

что позволяет легко убедиться в арифметичности этой группы.

Хорошо известно, что  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  и  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  соизмеримы с группой Пикара  $\text{PSL}(2, \mathbb{Z}\sqrt{-1})$  (см., например, [25, рис. 13.3]). Поскольку  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$  соизмерима с группой  $\Gamma(\Delta_{3,4,4})$  (см. рис. 2), группа  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  соизмерима с группой  $\Gamma(\Delta_{4,4,4})$  (см. рис. 8), а группа  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$  соизмерима с группой, порожденной отражениями в гранях идеальной прямоугольной антипризмы  $\mathcal{A}_4$  (см. рис. 10), то все три группы  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$ ,  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  и  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$  являются арифметическими. Зафиксируем этот факт в виде следующего замечания.



ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Прямоугольные гиперболические группы Коксетера  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,2)})$ ,  $\Gamma(\mathcal{P}_{(3,4)})$  и  $\Gamma(\mathcal{P}_{(2,8)})$  являются арифметическими.

## § 5. Открытые вопросы

В заключение сформулируем некоторые открытые вопросы.

**Вопрос 5.1.** Классифицировать арифметические прямоугольные гиперболические группы Коксетера.

В [51, предложение 5] установлено, что антипризма  $\mathcal{A}_n$ ,  $n \geq 3$ , является минимальной по числу граней в классе прямоугольных идеальных гиперболических многогранников, имеющих  $n$ -угольную грань. Естественно возникает вопрос о многограннике с аналогичным свойством в классе компактных многогранников.

**Вопрос 5.2.** Верно ли, что многогранник Лёбелля  $L(n)$ ,  $n \geq 5$ , является минимальным по числу граней в классе кокомпактных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих хотя бы одну  $n$ -угольную грань.

В [56] была найдена минимальная по кообъему неарифметическая гиперболическая группа Коксетера, имеющая некомпактный фундаментальный многогранник. Естественно возникает вопрос о прямоугольной группе Коксетера с аналогичным свойством. Напомним известные результаты для случаев компактных и идеальных прямоугольных многогранников Коксетера. Согласно [44] многогранник Лёбелля  $\mathcal{L}_7$  является четвертым по объему компактным прямоугольным многогранником в  $\mathbb{H}^3$  с  $\text{vol}(\mathcal{L}_7) = 7,563249$ . В [35] было показано, что группы отражений, соответствующие трем предшествующим многогранникам, являются арифметическими, а  $\Gamma(\mathcal{L}_7)$  неарифметическая. Следовательно,  $\Gamma(\mathcal{L}_7)$  является компактной неарифметической прямоугольной гиперболической группой Коксетера минимального объема. Согласно [57] идеальная антипризма  $\mathcal{A}_5$  является четвертым по объему идеальным прямоугольным многогранником в  $\mathbb{H}^3$  с  $\text{vol}(\mathcal{A}_5) = 8,137885$ . В [55] было показано, что два многогранника наименьшего объема  $\mathcal{A}_3$  и  $\mathcal{A}_4$  являются арифметическими. Более того, легко заметить, что третий многогранник наименьшего объема получается склеиванием двух копий  $\mathcal{A}_3$  по одной из его граней, поэтому он также арифметический. Следовательно,  $\Gamma(\mathcal{A}_5)$  является идеальной неарифметической прямоугольной гиперболической группой Коксетера минимального объема. Случай, когда прямоугольный многогранник Коксетера имеет как конечные, так и идеальные вершины, остается открытым.

**Вопрос 5.3.** Какая неарифметическая прямоугольная гиперболическая группа Коксетера в  $\mathbb{H}^3$  имеет наименьший кообъем?

Напомним также вопрос, сформулированный в [13, с. 66].

**Вопрос 5.4.** Верно ли, что наименьшее число гиперграней в компактном прямоугольном многограннике в  $\mathbb{H}^4$  равно 120?

## ЛИТЕРАТУРА

1. Best L. A. On torsion-free discrete subgroups of  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  with compact orbit space // Canad. J. Math. 1971. V. 23, N 3. P. 451–460.
2. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 50–53.

3. Ratcliffe J. Foundations of hyperbolic manifolds. Berlin: Springer, 2006. (Graduate Text in Mathematics; V. 149).
4. Coxeter H.S.M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35, N 3. P. 588–621.
5. Винберг Э. Б. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского // Мат. сб. 1967. Т. 114, № 3. С. 471–488.
6. Винберг Э. Б. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности // Тр. Моск. мат. о-ва. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. Т. 47. С. 68–102.
7. Bugaenko V. Arithmetic crystallographic groups generated by reflections, and reflective hyperbolic lattices // Lie groups, their discrete subgroups, and invariant theory. Adv. Sov. Math. 1992. V. 8. P. 33–55.
8. Прохоров М. Н. Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространстве Лобачевского большой размерности // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1986. Т. 50, № 2. С. 413–424.
9. Хованский А. Г. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского // Функцион. анализ и его прил. 1986. Т. 20, № 1. С. 50–61.
10. Винберг Э. Б., Каплинская И. М. О группах  $O_{18,1}(\mathbb{Z})$  и  $O_{19,1}(\mathbb{Z})$  // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 6. С. 1273–1275.
11. Borcherds R. Coxeter groups, Lorentzian lattices, and  $K3$  surfaces // Internat. Math. Res. Notices. 1998. N 19. P. 1011–1031.
12. Allcock D. Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19 // Geometry & Topology. 2006. V. 10. P. 737–758.
13. Potyagailo L., Vinberg E. On right-angled reflection groups in hyperbolic spaces // Comment. Math. Helv. 2005. V. 80. P. 63–73.
14. Dufour G. Notes on right-angled Coxeter polyhedra in hyperbolic spaces // Geom. Dedicata. 2010. V. 147. P. 227–282.
15. Винберг Э. Б. Некоторые примеры кристаллографических групп в пространствах Лобачевского // Мат. сб. 1969. Т. 120, № 4. С. 633–639.
16. Dunbar W. D., Meyerhoff G. R. Volumes of hyperbolic 3-orbifolds // Indiana Univ. Math. J. 1994. V. 43, N 2. P. 611–637.
17. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
18. Винберг Э. Б. Гиперболические группы отражений // Успехи мат. наук. 1985. Т. 40, № 1. С. 29–66.
19. Abrosimov N. V., Stepanishchev S. V. The volume of a trirectangular hyperbolic tetrahedron // Sib. Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 275–284.
20. Everitt B., Ratcliffe J. G., Tschantz S. Right-angled Coxeter polytopes, hyperbolic six-manifolds, and a problem of Siegel // Math. Ann. 2012. V. 354. P. 871–905.
21. Ratcliffe J., Tschantz S. The volume spectrum of hyperbolic 4-manifolds // Experimental Mathematics. 2000. V. 9, N 1. P. 101–125.
22. OEIS. The on-line encyclopedia of integers sequences. Available at <https://oeis.org/A006752>.
23. Catalan E. Sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies // Mémoires de l'Académie royale de Belgique. 1867. V. 33. P. 1–50.
24. Papanikolaou T. Catalan's Constant to 1,500,000 Places. <https://www.gutenberg.org/ebooks/812>.
25. Maclachlan C., Reid A. W. The arithmetic of hyperbolic 3-manifolds. Berlin: Springer, 2003. (Graduate Text Math.; V. 219).
26. Siegel C. L. Some remarks on discontinuous groups // Ann. Math. 1945. V. 46, N 2. P. 708–718.
27. Belolipetsky M. Hyperbolic orbifolds of small volume // Proc. ICM 2014. V. 2. P. 837–851. The preprint version is available at <https://arxiv.org/abs/1402.5394>.
28. Adams C. C. The non-compact hyperbolic 3-manifold of small volume // Proc. Am. Math. Soc. 1987. V. 100, N 4. P. 601–606.
29. Chinburg T., Friedman E. The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold // Invent. Math. 1986. V. 86. P. 507–527.
30. Chinburg T., Friedman E., Jones K. J., Reid A. W. The arithmetic hyperbolic 3-manifold of smallest volume // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 2001. V. 30, N 4. P. 1–40.
31. Gabai D., Meyerhoff R., Milley P. Minimal volume cusped hyperbolic three-manifolds // J. Am. Math. Soc. 2009. V. 22. P. 1157–1215.

32. Gehring F. W., Martin G. J. Minimal co-volume hyperbolic lattices. I. The spherical points of a Kleinian group // *Ann. Math.* 2009. V. 170, N 1. P. 123–161.
33. Marshall T., Martin G. J. Minimal covolume lattices II // *Annals of Math.* 2012. V. 176. P. 261–301.
34. Meyerhoff R. The cusped hyperbolic 3-orbifold of minimum volume // *Bull. Am. Math. Soc.* 1985. V. 13, N 2. P. 154–156.
35. Antolin-Camarena O., Maloney G. R., Roeder R. K. W. Computing arithmetic invariants for hyperbolic reflection groups // *Complex dynamics*. Wellesley, MA: A K Peters, 2009. P. 597–631.
36. Bogachev N., Douba S. Geometric and arithmetic properties of Löbell polyhedra // *Algebr. Geom. Topol.* 2025. V. 25, N 4. P. 2281–2295.
37. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // *Мат. сб.* 1970. Т. 83, № 2. С. 256–260.
38. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // *Мат. сб.* 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.
39. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra // *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*. 2007. V. 57. P. 825–882.
40. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // *Algebraic & Geometric Topology*. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
41. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // *Math. Ann.* 1989. V. 285. P. 541–569.
42. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского // *Мат. заметки*. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
43. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия // *Успехи мат. наук.* 2017. Т. 72, № 2. С. 147–190.
44. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // *Algebraic & Geometric Topology*. 2008. V. 8. P. 1523–1565.
45. Веснин А. Ю. Объемы трехмерных многообразий Лебелля // *Мат. заметки*. 1998. Т. 64, № 1. С. 17–23.
46. Matveev S., Pertorio C., Vesnin A. Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds // *J. Aust. Math. Soc.* 2009. V. 86. P. 205–219.
47. Inoue T. Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra // *Experimental Mathematics*. 2022. V. 31, N 1. P. 165–183.
48. Heard D. Orb. A computer program for creating and studying 3-orbifolds. Available at <http://www.ms.unimelb.edu.au/snap/orb.html>.
49. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*. 2020. V. 52. P. 565–576.
50. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // *Мат. сб.* 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
51. Kolpakov A. On the optimality of the ideal right-angled 24-cell // *Algebraic & Geometric Topology*. 2012. V. 12. P. 1941–1960.
52. Thurston W. P. The geometry and topology of 3-manifolds. Princeton, NJ: Princeton Univ. Notes, 1980.
53. Nonaka J. The number of cusps of right-angled polyhedra in hyperbolic spaces // *Tokyo J. Math.* 2015. V. 38, N 2. P. 539–560.
54. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия с общим фундаментальным многогранником // *Мат. заметки*. 1991. Т. 49, № 6. С. 29–32.
55. Kellerhals R. A polyhedral approach to the arithmetic and geometry of hyperbolic link complements // *J. Knot Theory and Its Ramifications*. 2023. V. 32. 2350052 (24 pp.).
56. Drewitz S. T., Kellerhals R. The non-arithmetic cusped hyperbolic 3-orbifold of minimal volume // *Trans. Am. Math.* 2023. V. 376. P. 3819–3866.
57. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Идеальные прямоугольные многогранники в пространстве

Лобачевского // Чебышевский сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 65–83.

*Поступила в редакцию 4 августа 2025 г.*

*После доработки 4 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 11 сентября 2025 г.*

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-00001-7553-1269)

Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

vesnin@math.nsc.ru, a.egorov2@ng.nsu.ru

## ДВА ПРИМЕРА КВАЗИПЛОТНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ $\mathbb{R}^N$

А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко

**Аннотация.** Доказано, что классы экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных векторных подпространств  $\mathbb{R}^N$  попарно различны.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.605

**Ключевые слова:** локально выпуклое пространство, слабая топология, архимедов конус, пространство последовательностей

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе  
с любовью и благодарностью*

В работе [1] было инициировано исследование вопроса о том, в каких хаусдорфовых локально выпуклых пространствах все архимедовы конусы замкнуты. (Такие пространства приятны тем, что при любом определении в них архимедова векторного порядка линейные неравенства выдерживают переход к пределам сетей.) Конечномерные пространства, как хорошо известно, обладают этим свойством (см., например, [2, 3.4]). В [1] было показано, что пространства, имеющие несчетную размерность, этим свойством не обладают, а для счетномерных пространств вопрос был оставлен открытым.

В работе [3] было введено понятие квазиплотности и получено исчерпывающее описание счетномерных хаусдорфовых локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. Таковыми оказались в точности те счетномерные пространства  $X$ , у которых топологически сопряженное пространство  $X'$  квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве  $X^\#$ , снабженном слабой\* топологией.

Благодаря работе [3] квазиплотные пространства стали объектом тщательного изучения, а поскольку в счетномерном случае пространство  $X^\#$  линейно и топологически изоморфно  $\mathbb{R}^N$ , класс исследуемых объектов естественным образом сузился до квазиплотных векторных подпространств  $\mathbb{R}^N$ . В работе [4] такие подпространства были охарактеризованы в терминах их связи с проективными параллелотопами и автоморфизмами. Эти результаты в значительной степени прояснили устройство квазиплотных подпространств  $\mathbb{R}^N$  с геометрической и алгебраической точек зрения, но не привели к немедленному обнаружению новых примеров и сохранили открытым вопрос о совпадении класса таких пространств с другими классами, допускающими существенно более простые определения.

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

В данной заметке в теоремах 1 и 2 построены примеры, подтверждающие сформулированную в [3, 9.8] гипотезу о несовпадении трех видов квазиплотных векторных подпространств  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  — экспоненциально плотных, декартово плотных и рекурсивно плотных.

Символ  $\mathbb{N}$  обозначает множество натуральных чисел  $\{1, 2, \dots\}$ . Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R}$ . Векторное пространство  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  числовых последовательностей  $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  снабжается тихоновской топологией (также называемой топологией поточечной сходимости). Кортежи  $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$ , где  $n \in \mathbb{N}$ , считаются функциями  $x : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$ . Линейный оператор  $\pi_n : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$  определяется формулой

$$\pi_n s = s|_{\{1, \dots, n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \quad (1)$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , но и для кортежей  $s \in \mathbb{R}^m$ , где  $m \geq n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** [3, 4.1]. *Квазивнутренность*  $\text{qi } S$  подмножества  $S$  локально выпуклого пространства  $X$  определяется как совокупность элементов  $x \in S$ , для которых клин

$$\mathbb{R}^+(S - x) = \{\lambda(s - x) : s \in S, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0\}$$

плотен в  $X$ .

**Предложение 1** [3, 4.13]. *Для любого выпуклого множества  $S \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  справедливо равенство*

$$\text{qi } S = \{s \in S : \pi_n s \in \text{int } \pi_n S \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\},$$

где  $\text{int } \pi_n S$  — внутренность  $\pi_n S$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2** [3]. Рассмотрим следующие свойства множества  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

- (a)  $Y$  содержит степень  $\Lambda^{\mathbb{N}}$  для некоторого плотного подмножества  $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ ;
- (b)  $Y$  содержит произведение  $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$  для некоторой последовательности плотных подмножеств  $\Lambda_n \subseteq \mathbb{R}$  ( $n \in \mathbb{N}$ );
- (c)  $Y$  содержит некоторое подмножество  $P \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , удовлетворяющее следующим трем условиям:
  - (i) если  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и  $\pi_n s \in \pi_n P$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , то  $s \in P$ ;
  - (ii) множество  $\{p(1) : p \in P\}$  плотно в  $\mathbb{R}$ ;
  - (iii) для всех  $n \in \mathbb{N}$  и  $q \in P$  множество  $\{p(n+1) : p \in P, \pi_n p = \pi_n q\}$  плотно в  $\mathbb{R}$ ;
- (d)  $Y$  имеет непустое пересечение с любым замкнутым ограниченным выпуклым подмножеством  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , имеющим непустую квазивнутренность.

Множество  $Y$ , обладающее свойством (a), (b), (c), (d), называется соответственно *экспоненциально плотным*, *декартово плотным*, *рекурсивно плотным* и *квазиплотным* (см. [3, 6.2, 8.9, 9.8]).

**Предложение 2** [3, 8.9]. *Для любого подмножества  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  имеют место следующие импликации:*

$$(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d).$$

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** В [3, 6.4] доказано, что каждое из условий (a)–(d) влечет плотность  $Y$  в  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  относительно тихоновской топологии. Там же приведен пример плотного векторного подпространства  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , не обладающего свойствами (a)–(d).

До недавнего времени список примеров собственных квазиплотных векторных подпространств  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  включал лишь экспоненциально плотные пространства  $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ ,  $\text{lin } \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  и их образы при проективных автоморфизмах (см. [3, 8.10; 4, 4.2]). (Здесь и ниже  $\text{lin } S$  — линейная оболочка множества  $S$  в векторном пространстве  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .) Для векторных подпространств  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  также оставался открытым вопрос об эквивалентности условий (a)–(d) (см. [3, 9.8]). Приведенные ниже теоремы частично проясняют этот вопрос.

**Теорема 1.** Условия (a) и (b) не эквивалентны для векторных подпространств  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  — последовательность попарно различных алгебраически независимых над  $\mathbb{Q}$  вещественных чисел. Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  рассмотрим плотное подмножество

$$\mathbb{Q} t_n = \{q t_n : q \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{R}$$

и докажем, что декартово плотное векторное подпространство

$$Y = \text{lin } \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q} t_n \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

не является экспоненциально плотным.

Достаточно показать, что  $Y$  не содержит ни одной ненулевой постоянной последовательности. Допустим, это не так. Тогда  $(1, 1, \dots) \in Y$ , а значит, найдутся  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}^m$  и последовательность  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  в  $\mathbb{Q}^m$  такие, что для каждого  $n \in \mathbb{N}$  справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^m x(i) q_n(i) t_n = 1$$

или, что то же самое,  $\langle q_n | x \rangle = t_n^{-1}$ , где  $\langle u | v \rangle = \sum_{i=1}^m u(i) v(i)$  для  $u, v \in \mathbb{R}^m$ .

Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \langle q_1 | x \rangle = t_1^{-1}, \\ \dots, \\ \langle q_m | x \rangle = t_m^{-1} \end{cases}$$

в виде  $Qx = y$ , где матрица  $Q \in \mathbb{Q}^{m \times m}$  состоит из элементов  $Q_{ij} = q_i(j)$ , а вектор  $y \in \mathbb{R}^m$  полагается равным  $(t_1^{-1}, \dots, t_m^{-1})$ .

Заметим, что матрица  $Q$  обратима. Действительно, в противном случае транспонированная матрица  $Q^T$  удовлетворяет равенству  $Q^T q = 0$  для некоторого ненулевого вектора  $q \in \mathbb{Q}^m$ , и тогда

$$\sum_{i=1}^m q(i) t_i^{-1} = \langle q | y \rangle = \langle q | Qx \rangle = \langle Q^T q | x \rangle = 0,$$

что противоречит алгебраической независимости чисел  $t_1, \dots, t_m$  над  $\mathbb{Q}$ .

Наконец, используя обратимость матрицы  $Q$  и полагая

$$p = (Q^{-1})^T q_{m+1} \in \mathbb{Q}^m,$$

заключаем, что

$$\sum_{i=1}^m p(i) t_i^{-1} = \langle (Q^{-1})^T q_{m+1} | y \rangle = \langle q_{m+1} | Q^{-1} y \rangle = \langle q_{m+1} | x \rangle = t_{m+1}^{-1}$$

вопреки алгебраической независимости чисел  $t_1, \dots, t_m, t_{m+1}$  над  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

**Теорема 2.** Условия (b) и (c) не эквивалентны для векторных подпространств  $Y \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Введем обозначение  $\mathbb{Q}_o = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  и рассмотрим какую-либо инъективную функцию

$$t : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}_o^n \rightarrow \mathbb{R},$$

образ которой является алгебраически независимым над  $\mathbb{Q}$  подмножеством  $\mathbb{R}$ . Для произвольной последовательности  $\rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$  определим  $\hat{\rho} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  формулой

$$\hat{\rho} = (\rho(1), \rho(2)t(\pi_1\rho), \rho(3)t(\pi_2\rho), \dots, \rho(n)t(\pi_{n-1}\rho), \dots)$$

и покажем, что множество

$$P = \{\hat{\rho} : \rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}\}$$

удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Прежде всего заметим, что для любых  $\rho, \sigma \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$  равенства  $\rho = \sigma$  и  $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$  эквивалентны и, более того,

$$\pi_n \rho = \pi_n \sigma \Leftrightarrow \pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma} \quad (2)$$

для каждого  $n \in \mathbb{N}$ . Действительно, импликация « $\Rightarrow$ » тривиальна, так как для всякой функции  $\rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$  кортеж  $\pi_n \hat{\rho}$  однозначно определяется числами  $\rho(1), \dots, \rho(n)$  и значениями функции  $t$  на кортежах, составленных из этих чисел. Импликацию « $\Leftarrow$ » несложно установить индукцией по  $n$ . Для  $n = 1$  она обеспечивается равенствами  $\hat{\rho}(1) = \rho(1)$  и  $\hat{\sigma}(1) = \sigma(1)$ . Если же эта импликация справедлива для  $n$  и имеет место равенство  $\pi_{n+1} \hat{\rho} = \pi_{n+1} \hat{\sigma}$ , то в силу  $\pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma}$  имеем  $\pi_n \rho = \pi_n \sigma$ , а недостающее равенство  $\rho(n+1) = \sigma(n+1)$  следует из соотношений

$$\rho(n+1)t(\pi_n \rho) = \hat{\rho}(n+1) = \hat{\sigma}(n+1) = \sigma(n+1)t(\pi_n \sigma) = \sigma(n+1)t(\pi_n \rho)$$

и отсутствия нуля в образе функции  $t$ .

(i) Пусть  $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  и пусть  $\pi_n s \in \pi_n P$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ , т.е. имеется такая последовательность  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  элементов  $\mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$ , что  $\pi_n s = \pi_n \widehat{\rho_n}$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Покажем, что  $s \in P$ .

Определим последовательность  $\rho \in \mathbb{Q}_o^{\mathbb{N}}$ , полагая  $\rho(n) = \rho_n(n)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ .

Индукцией по  $n$  установим равенство

$$\pi_n \widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n \hat{\rho} \quad (3)$$

для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Действительно, для  $n = 1$  равенство (3) сразу вытекает из (2). Если же (3) справедливо для  $n$ , то

$$\pi_n \widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n \pi_{n+1} \widehat{\rho_{n+1}} = \pi_n \pi_{n+1} s = \pi_n s = \pi_n \widehat{\rho_n} = \pi_n \hat{\rho},$$

откуда в силу (2) следует соотношение  $\pi_n \rho_{n+1} = \pi_n \rho$ , обеспечивающее недостающее равенство

$$\widehat{\rho_{n+1}}(n+1) = \rho_{n+1}(n+1)t(\pi_n \rho_{n+1}) = \rho(n+1)t(\pi_n \rho) = \hat{\rho}(n+1).$$

Благодаря (3) для всех  $n \in \mathbb{N}$  имеем

$$s(n) = (\pi_n s)(n) = (\pi_n \widehat{\rho_n})(n) = (\pi_n \hat{\rho})(n) = \hat{\rho}(n),$$

т.е.  $s = \hat{\rho}$  и тем самым  $s \in P$ .



(ii) Множество

$$\{p(1) : p \in P\} = \{\hat{\rho}(1) : \rho \in \mathbb{Q}_o^N\}$$

совпадает с  $\mathbb{Q}_o$  и поэтому плотно в  $\mathbb{R}$ .

(iii) С учетом (2) для любых  $n \in \mathbb{N}$  и  $\sigma \in \mathbb{Q}_o^N$  множество

$$\begin{aligned} \{p(n+1) : p \in P, \pi_n p = \pi_n \hat{\sigma}\} &= \{\hat{\rho}(n+1) : \rho \in \mathbb{Q}_o^N, \pi_n \hat{\rho} = \pi_n \hat{\sigma}\} \\ &= \{\rho(n+1) t(\pi_n \rho) : \rho \in \mathbb{Q}_o^N, \pi_n \rho = \pi_n \sigma\} \end{aligned}$$

совпадает с  $\mathbb{Q}_o t(\pi_n \sigma)$  и поэтому плотно в  $\mathbb{R}$ .

Таким образом, векторное подпространство

$$Y = \text{lin } P \subseteq \mathbb{R}^N$$

рекурсивно плотно. Покажем, что оно не является декартово плотным.

Предположим вопреки доказываемому, что  $Y$  удовлетворяет условию (b). В этом случае существуют последовательности  $y, z \in Y$ , для которых  $y(1) \neq z(1)$  и  $y(n) = z(n)$  при  $n > 1$ , а значит,

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots) = \frac{1}{y(1) - z(1)}(y - z) \in Y = \text{lin } P.$$

Следовательно, найдутся  $n \in \mathbb{N}$ , ненулевые числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$  и попарно различные последовательности  $\rho_1, \dots, \rho_n \in \mathbb{Q}_o^N$  такие, что

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\rho}_i = e_1.$$

Пусть  $I$  — множество всех пар  $(i, j)$ , где  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  и  $i \neq j$ . Учитывая, что  $\rho_1, \dots, \rho_n$  попарно различны, рассмотрим натуральные числа

$$m_{ij} = \min\{k \in \mathbb{N} : \rho_i(k) \neq \rho_j(k)\}, \quad (i, j) \in I,$$

и положим

$$m = \max\{m_{ij} : (i, j) \in I\}.$$

Тогда  $\pi_k \rho_i \neq \pi_k \rho_j$  при  $k \geq m$  и  $(i, j) \in I$ . В частности, числа  $t(\pi_k \rho_i)$  различны для различных пар  $(k, i)$  таких, что  $k \geq m$  и  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Поскольку при  $k > m$  справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(k) t(\pi_{k-1} \rho_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{\rho}_i(k) = e_1(k) = 0,$$

имеет место система равенств

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(m+1) t(\pi_m \rho_i) = 0, \\ \dots, \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i \rho_i(m+n) t(\pi_{m+n-1} \rho_i) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу

$$M = \begin{pmatrix} \rho_1(m+1)t(\pi_m\rho_1) & \rho_2(m+1)t(\pi_m\rho_2) & \dots & \rho_n(m+1)t(\pi_m\rho_n) \\ \rho_1(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_1) & \rho_2(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_2) & \dots & \rho_n(m+2)t(\pi_{m+1}\rho_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_1) & \rho_2(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_2) & \dots & \rho_n(m+n)t(\pi_{m+n-1}\rho_n) \end{pmatrix}$$

размера  $n \times n$ . Ее определитель  $|M|$  представляет собой значение однородного многочлена степени  $n$  от попарно различных алгебраически независимых над  $\mathbb{Q}$  чисел  $t(\pi_{m+j-1}\rho_i)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , причем коэффициенты этого многочлена рациональны и отличны от нуля, так как с точностью до знака они являются произведениями чисел вида  $\rho_i(m+j) \in \mathbb{Q}_0$ . Следовательно,  $|M| \neq 0$ . С другой стороны, система (4) означает равенство  $Mx = 0$  для ненулевого вектора  $x = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .  $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вопрос об эквивалентности условий (с) и (d) для векторных подпространств  $Y \subseteq \mathbb{R}^N$  на данный момент остается открытым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавказ. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.
2. Aliprantis C. D., Tourky R. Cones and duality. Providence, RI: American Mathematical Society, 2007.
3. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
4. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Квазиплотность в  $\mathbb{R}^N$  и проективные параллелотопы // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 2. С. 258–276.

Поступила в редакцию 14 августа 2025 г.

После доработки 21 августа 2025 г.

Принята к публикации 25 сентября 2025 г.

Гутман Александр Ефимович (ORCID 0000-0003-2030-7459)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
gutman@math.nsc.ru

Емельяненко Иван Александрович (ORCID 0009-0002-0914-6412)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
i.emelianenkov@yandex.ru

УДК 517.955

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ  
ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ  
С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Г. В. Демиденко, С. Ма

**Аннотация.** Рассматривается класс строго псевдогиперболических операторов шестого порядка с переменными коэффициентами. В этот класс входит, в частности, обобщенный оператор Буссинеска. При некоторых условиях на коэффициенты установлены энергетические оценки.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.606

**Ключевые слова:** уравнения, не разрешенные относительно старшей производной, псевдогиперболические операторы, энергетические оценки, весовые соболевские пространства.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

1. Введение

В настоящее время имеется большое число работ, посвященных изучению линейных уравнений с частными производными следующего вида:

$$L_0(D_x)D_t^l u + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x). \quad (1.1)$$

Такие уравнения возникают при решении многих прикладных задач гидродинамики, физики атмосферы, физики плазмы, теории упругости и др. (см., например, монографии [1, 2] и имеющуюся там библиографию). В литературе уравнения вида (1.1) зачастую называются уравнениями *соболевского типа*, поскольку первое глубокое исследование свойств решений уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, проводилось в работах С. Л. Соболева (см. [3, с. 333–463]). Исследования С. Л. Соболева были продолжены его учениками Р. А. Александряном, Н. Н. Ваханией, Г. В. Вирабяном, А. А. Дезиным, Р. Т. Денчевым, Т. И. Зеленьком, В. И. Лебедевым, В. Н. Масленниковой, С. Г. Овсебяном и др.

Монография [1] является первой монографией, целиком посвященной теории краевых задач для уравнений вида (1.1). В этой монографии была введена некоторая классификация таких уравнений в случае, когда оператор  $L_0(D_x)$  являлся квазиэллиптическим оператором. В частности, был определен класс

---

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

© 2025 Демиденко Г. В., Ма С.

псевдогиперболических уравнений (см. [1, гл. 2]). В этот класс входят многомерное уравнение Власова — Релея — Бишопа [4–7]

$$(\alpha I - \beta \Delta) D_t^2 u - \gamma \Delta u + \sigma \Delta^2 u = f(t, x) \quad (1.2)$$

( $\Delta$  — оператор Лапласа по  $x \in \mathbb{R}^n$ ), уравнение Гальперна [8]

$$\Delta D_t^2 u - \sum_{k=1}^n a_k D_{x_k}^4 u = f(t, x), \quad a_k > 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

обобщенное уравнение Буссинеска [9–11]

$$(a_0 I + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2) D_t^2 u + (b_0 I + b_1 \Delta + b_2 \Delta^2) D_t u + (d_0 I + d_1 \Delta + d_2 \Delta^2 + d_3 \Delta^3) u = f(t, x), \quad (1.4)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^2 - 4a_0 a_2 < 0, \quad a_2 b_0 \geq 0, \quad a_2 b_1 \leq 0, \quad a_2 b_2 \geq 0, \\ a_2 d_0 \geq 0, \quad a_2 d_1 \leq 0, \quad a_2 d_2 \geq 0, \quad a_2 d_3 < 0. \end{aligned}$$

Для некоторых классов уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, известен ряд важных результатов по теории краевых задач (см., например, монографии [1, 2, 12]). Для класса псевдогиперболических уравнений достаточно хорошо изучена задача Коши в случае с постоянными коэффициентами (см., например, [13–16]), в случае с переменными коэффициентами для таких уравнений в литературе имеется только один результат по энергетическим оценкам [17], а по теории краевых задач имеются лишь результаты для конкретных уравнений (см., например, [11, 18–22]).

## 2. Основные результаты

В настоящей работе мы продолжаем изучение свойств псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами. Рассматривается класс дифференциальных операторов шестого порядка, не разрешенных относительно старшей производной,

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = \mathcal{L}^1(D_t, D_x) + \mathcal{L}^2(x; D_t, D_x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

где  $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$  — однородный строго псевдогиперболический оператор с постоянными вещественными коэффициентами следующего вида:

$$\mathcal{L}^1(D_t, D_x) = L_0^1(D_x) D_t^2 + L_1^1(D_x) D_t + L_2^1(D_x), \quad (2.2)$$

$$L_0^1(D_x) = \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0 D_x^\beta, \quad L_1^1(D_x) = \sum_{|\beta|=5} a_\beta^1 D_x^\beta, \quad L_2^1(D_x) = \sum_{|\beta|=6} a_\beta^2 D_x^\beta, \quad (2.3)$$

при этом  $L_0^1(D_x)$  — эллиптический оператор и его символ удовлетворяет оценке

$$q_2 |\xi|^4 \geq L_0^1(i\xi) \equiv \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0 \xi^\beta \geq q_1 |\xi|^4, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

где  $q_2 \geq q_1 > 0$  — постоянные. Будем предполагать, что

$$-(L_1^1(i\xi))^2 + 4 L_2^1(i\xi) L_0^1(i\xi) > 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (2.5)$$

Отметим, что из (2.5) в силу однородности полиномов  $L_0^1(i\xi)$ ,  $L_1^1(i\xi)$ ,  $L_2^1(i\xi)$  вытекает неравенство

$$p_2 |\xi|^{10} \geq d(\xi) \equiv -(L_1^1(i\xi))^2 + 4 L_2^1(i\xi) L_0^1(i\xi) \geq p_1 |\xi|^{10}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

где  $p_2 \geq p_1 > 0$  — постоянные.

Согласно определению псевдогиперболических операторов [1, гл. 2] оператор  $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$  действительно является строго псевдогиперболическим, поскольку выполнены следующие условия:

**Условие 1.** Символ  $\mathcal{L}^1(i\eta, i\xi)$  оператора  $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$  однороден относительно вектора  $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (1/6, 1/6, \dots, 1/6)$ .

**Условие 2.** Оператор  $L_0^1(D_x)$  эллиптический.

**Условие 3.** Уравнение

$$(i\eta)^2 + \frac{L_1^1(i\xi)}{L_0^1(i\xi)}(i\eta) + \frac{L_2^1(i\xi)}{L_0^1(i\xi)} = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad (2.7)$$

в силу (2.4), (2.5) имеет только вещественные и различные корни  $\eta_1(\xi)$ ,  $\eta_2(\xi)$ .

Второй дифференциальный оператор в (2.1) с вещественнозначными переменными коэффициентами  $\mathcal{L}^2(x; D_t, D_x)$  имеет вид

$$\mathcal{L}^2(x; D_t, D_x) = (L_0^2(x; D_x) + (a(x) + a)I)D_t^2 + L_1^2(x; D_x)D_t + L_2^2(x; D_x), \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} L_0^2(x; D_x) &= \sum_{|\beta|=4} a_\beta^0(x) D_x^\beta, \quad L_1^2(x; D_x) = \sum_{|\beta|=5} a_\beta^1(x) D_x^\beta, \\ L_2^2(x; D_x) &= \sum_{|\beta|=6} a_\beta^2(x) D_x^\beta, \end{aligned} \quad (2.9)$$

при этом

$$a(x), a_\beta^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad a(x) \approx 0, \quad a_\beta^k(x) \approx 0, \quad k = 0, 1, 2,$$

$a > 0$  — константа.

Оператор  $\mathcal{L}^2(x; D_t, D_x)$  можно рассматривать как возмущение псевдогиперболического оператора  $\mathcal{L}^1(D_t, D_x)$ .

Рассматриваемый оператор (2.1)–(2.3), (2.8), (2.9) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = (L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)D_t^2 + L_1(x; D_x)D_t + L_2(x; D_x), \quad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned} L_0(x; D_x) &= \sum_{|\beta|=4} (a_\beta^0 + a_\beta^0(x)) D_x^\beta, \quad L_1(x; D_x) = \sum_{|\beta|=5} (a_\beta^1 + a_\beta^1(x)) D_x^\beta, \\ L_2(x; D_x) &= \sum_{|\beta|=6} (a_\beta^2 + a_\beta^2(x)) D_x^\beta. \end{aligned}$$

Очевидно, при достаточно малых  $a_\beta^k(x) \approx 0$  оператор  $L_0(x; D_x)$  является эллиптическим.

Наша цель — получение энергетических оценок для строго псевдогиперболических операторов (2.10) с переменными коэффициентами.

В дальнейшем символом  $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > 0$ , будем обозначать соболевское пространство с экспоненциальным весом  $e^{-\gamma t}$ , т. е. функция  $u(t, x)$  принадлежит  $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ , если

$$u_\gamma(t, x) = e^{-\gamma t} u(t, x) \in W_2^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1}).$$

По определению положим

$$\|u(t, x), W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})\| = \|u_\gamma(t, x), W_2^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})\|.$$

Символом  $\hat{u}_\gamma(\eta, \xi)$  будем обозначать преобразование Фурье функции

$$u_\gamma(t, x) \in L_2(\mathbb{R}^{n+1}).$$

Отметим, что из [1, 14] вытекает энергетическая оценка для псевдогиперболического оператора  $(\mathcal{L}^1(D_t, D_x) + aI)$ ,  $a \geq 0$ , с постоянными коэффициентами. А именно, справедлива

**Теорема 1.** Для любой функции  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > 0$ , такой, что

$$D_t^2 D_x^\beta u(t, x) \in L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1}), \quad |\beta| = 4, \quad (2.11)$$

имеет место оценка

$$\begin{aligned} \gamma \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ \leq c \|(\mathcal{L}^1(D_t, D_x) + aI)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \end{aligned} \quad (2.12)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u(t, x)$ .

В настоящей работе аналогичный результат будет доказан для операторов вида (2.10) с переменными коэффициентами.

**Теорема 2.** Существует  $\gamma_0 > 0$  такое, что если коэффициенты  $a_\beta^k(x)$  и  $a(x)$  оператора (2.10) вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы, то для любой функции  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > \gamma_0$ , такой, что выполнено (2.11), имеет место оценка

$$\gamma \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \leq c \|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \quad (2.13)$$

с константой  $c > 0$ , не зависящей от  $u(t, x)$ .

Оценки (2.12), (2.13) являются аналогами энергетических неравенств для строго гиперболических операторов [23, 24].

Отметим, что энергетические оценки вида (2.13) можно использовать для изучения корректности задачи Коши для строго псевдогиперболических уравнений с переменными коэффициентами

$$\mathcal{L}(x; D_t, D_x) = f(t, x), \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad D_t u|_{t=0} = \varphi_2(x) \quad (2.14)$$

в весовом соболевском пространстве  $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > 0$ . В частности, из теоремы 2 вытекает теорема о единственности решения задачи (2.14).

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда задача Коши (2.14) не может иметь более одного решения  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $\gamma > \gamma_0$ , удовлетворяющего (2.11).

### 3. Энергетические оценки для операторов с переменными коэффициентами

В этом разделе докажем энергетические оценки (2.13) для строго псевдогиперболических операторов (2.10).

Будем предполагать, что переменные коэффициенты  $a(x)$  и  $a_\beta^k(x)$  оператора (2.10) вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы. Их малость будет определена в дальнейшем.

В [1, гл. 2] при получении энергетических оценок для строго псевдогиперболических операторов с постоянными коэффициентами вида

$$L(D_t, D_x) = L_0(D_x)D_t^l + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k u = f(t, x), \quad (3.1)$$

где  $L_0(D_x)$  — квазиэллиптический оператор, использовался аналог схемы Лере [24], предложенной для изучения корректности задачи Коши для строго гиперболических уравнений. В частности, в [1, гл. 2] рассматривался полином

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) = -\operatorname{Im}(L(i\eta + \gamma, i\xi)\overline{D_\eta L(i\eta + \gamma, i\xi)}), \quad (3.2)$$

где  $L(i\eta, i\xi)$  — символ строго псевдогиперболического оператора (3.1). В [1] предполагалось, что символ однороден относительно некоторого вектора

$$(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_0 > 0, \quad 1/\alpha_j \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n,$$

и в этом случае была получена оценка

$$M(i\eta + \gamma, i\xi) \geq c_1 \gamma \langle \xi \rangle^{2(1-l\alpha_0)} (|i\eta + \gamma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{2(l-1)}, \quad \gamma > 0,$$

$$(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \langle \xi \rangle^2 = \sum_{j=1}^n \xi_j^{2/\alpha_j}, \quad c_1 = \text{const} > 0.$$

Из этого неравенства вытекает энергетическая оценка для оператора (3.1)

$$\begin{aligned} \gamma \|\langle \xi \rangle^{(1-l\alpha_0)} (|i\eta + \gamma| + \langle \xi \rangle^{\alpha_0})^{(l-1)} \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ \leq c_2 \|L(D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\|, \quad \gamma > 0, \end{aligned}$$

с константой  $c_2 > 0$ , не зависящей от  $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ . Отсюда, в частности, следует неравенство (2.12) при  $a = 0$ .

В работе [17] такой подход был использован для получения энергетической оценки для одного частного случая строго псевдогиперболического оператора четвертого порядка с переменными коэффициентами следующего вида:

$$\widehat{L}(x; D_t, D_x) = (\widehat{L}_0(D_x) + aI)D_t^2 + \widehat{L}_1(x; D_x)D_t + \widehat{L}_2(x; D_x), \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{L}_0(D_x) &= \sum_{|\beta|=2} a_\beta^0 D_x^\beta, \quad \widehat{L}_1(x; D_x) = \sum_{|\beta|=3} (a_\beta^1 + a_\beta^1(x)) D_x^\beta, \\ \widehat{L}_2(x; D_x) &= \sum_{|\beta|=4} (a_\beta^2 + a_\beta^2(x)) D_x^\beta, \quad a_\beta^k(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad a_\beta^k(x) \approx 0, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

при этом оператор  $\widehat{L}_0(D_x)$  эллиптический с постоянными коэффициентами. Отметим, что в качестве аналога *разделяющего оператора* в [17] использовался такой же оператор, как в [1] и [14] для случая постоянных коэффициентов.

Будем развивать подход из работы [17] для получения энергетической оценки для оператора (2.10), применяя аналог схемы Лере, но в отличие от [17] будем использовать аналог разделяющего оператора с учетом переменных коэффициентов. А именно, для любой функции  $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  рассмотрим следующий аналог формы (3.1) из [17]:

$$\mathcal{M}u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x) \overline{(e^{-\gamma t} \mathcal{L}_1^1(x; D_t, D_x)u(t, x))} dz, \quad (3.4)$$

где  $\gamma > 0$ ,

$$\mathcal{L}_1^1(x; D_t, D_x) = 2i(L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)D_t + iL_1(x; D_x), \quad z = (t, x). \quad (3.5)$$

Очевидно, (3.4) можно переписать в виде

$$\mathcal{M}u = -\text{Im} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}(x; D_t + \gamma I, D_x)u_\gamma(t, x) \overline{(\mathcal{L}_1^1(x; D_t + \gamma I, D_x)u_\gamma(t, x))} dz.$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать следующее обозначение для скалярного произведения в  $L_2(\mathbb{R}^{n+1})$ :

$$\langle v, \omega \rangle = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} v(z) \overline{\omega(z)} dz,$$

и для сокращения записи будем писать

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}(x; D_t + \gamma I, D_x) &= (L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)(D_t + \gamma I)^2 \\ &\quad + L_1(x; D_x)(D_t + \gamma I) + L_2(x; D_x), \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_1^1(x) = \mathcal{L}_1^1(x; D_t + \gamma I, D_x) = 2i(L_0(x; D_x) + (a(x) + a)I)(D_t + \gamma I) + iL_1(x; D_x).$$

Тогда  $\mathcal{M}u$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}u &= -\operatorname{Im} \langle \mathcal{L}(x)u_\gamma, \mathcal{L}_1^1(x)u_\gamma \rangle \\ &= -\frac{1}{2i} (\langle \mathcal{L}(x)u_\gamma, \mathcal{L}_1^1(x)u_\gamma \rangle - \langle \mathcal{L}_1^1(x)u_\gamma, \mathcal{L}(x)u_\gamma \rangle) \\ &= -\frac{1}{2i} \langle ((\mathcal{L}_1^1(x))^* \mathcal{L}(x) - (\mathcal{L}(x))^* \mathcal{L}_1^1(x))u_\gamma, u_\gamma \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем дифференциальный оператор

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = -\frac{1}{2i} ((\mathcal{L}_1^1(x))^* \mathcal{L}(x) - (\mathcal{L}(x))^* \mathcal{L}_1^1(x)). \quad (3.7)$$

Тогда выражение (3.6) будет иметь вид

$$\mathcal{M}u = \langle \mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle. \quad (3.8)$$

Учитывая вещественнозначность коэффициентов оператора (2.10) и вид оператора (3.5), сопряженные к ним операторы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}(x))^* v(x) &= (D_t - \gamma I)^2 \left[ \sum_{|\beta|=4} D_x^\beta ((a_\beta^0(x) + a_\beta^0)v(x)) + (a(x) + a)v(x) \right] \\ &\quad + (D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=5} D_x^\beta ((a_\beta^1(x) + a_\beta^1)v(x)) + \sum_{|\beta|=6} D_x^\beta ((a_\beta^2(x) + a_\beta^2)v(x)), \\ (\mathcal{L}_1^1(x))^* v(x) &= 2i(D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=4} D_x^\beta ((a_\beta^0(x) + a_\beta^0)v(x)) \\ &\quad + 2i(D_t - \gamma I)(a(x) + a)v(x) + i \sum_{|\beta|=5} D_x^\beta ((a_\beta^1(x) + a_\beta^1)v(x)). \end{aligned}$$

Тогда дифференциальный оператор (3.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma &= -(D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=4} D_x^\beta ((a_\beta^0(x) + a_\beta^0)\mathcal{L}(x)u_\gamma) \\ &\quad - (D_t - \gamma I)(a(x) + a)\mathcal{L}(x)u_\gamma - \frac{1}{2} \sum_{|\beta|=5} D_x^\beta ((a_\beta^1(x) + a_\beta^1)\mathcal{L}(x)u_\gamma) \\ &\quad + (D_t - \gamma I)^2 \sum_{|\beta|=4} D_x^\beta ((a_\beta^0(x) + a_\beta^0)\mathcal{L}_1^1(x)u_\gamma) + (D_t - \gamma I)^2(a(x) + a)\mathcal{L}_1^1(x)u_\gamma \end{aligned}$$



$$+ (D_t - \gamma I) \sum_{|\beta|=5} D_x^\beta ((a_\beta^1(x) + a_\beta^1) \mathcal{L}_1^1(x) u_\gamma) + \sum_{|\beta|=6} D_x^\beta ((a_\beta^2(x) + a_\beta^2) \mathcal{L}_1^1(x) u_\gamma).$$

Учитывая гладкость коэффициентов оператора (2.10), дифференциальный оператор (3.7) по аналогии с (3.4) из [17] можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{P}(x; D_t, D_x, \gamma) = P(x; D_t, D_x, \gamma) + p(x; D_t, D_x, \gamma), \quad (3.9)$$

где

$$\begin{aligned} P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma &= -2\gamma(D_t^2 - \gamma^2 I) \left( \sum_{|\alpha|=4} (a_\alpha^0(x) + a_\alpha^0) D_x^\alpha + (a(x) + a) I \right) \\ &\quad \circ \left( \sum_{|\beta|=4} (a_\beta^0(x) + a_\beta^0) D_x^\beta + (a(x) + a) I \right) u_\gamma \\ &\quad + 2\gamma \left( \sum_{|\alpha|=4} (a_\alpha^0(x) + a_\alpha^0) D_x^\alpha + (a(x) + a) I \right) \left( \sum_{|\beta|=6} (a_\beta^2(x) + a_\beta^2) D_x^\beta \right) u_\gamma \\ &\quad - 2\gamma D_t \left( \sum_{|\alpha|=5} (a_\alpha^1(x) + a_\alpha^1) D_x^\alpha \right) \left( \sum_{|\beta|=4} (a_\beta^0(x) + a_\beta^0) D_x^\beta + (a(x) + a) I \right) u_\gamma \\ &\quad - \gamma \left( \sum_{|\alpha|=5} (a_\alpha^1(x) + a_\alpha^1) D_x^\alpha \right) \left( \sum_{|\beta|=5} (a_\beta^1(x) + a_\beta^1) D_x^\beta \right) u_\gamma, \quad (3.10) \end{aligned}$$

а оператор  $p(x; D_t, D_x, \gamma)$  имеет десятый порядок. В дальнейшем будем считать, что оператор умножения на параметр  $\gamma^k$  является оператором  $k$ -го порядка. С учетом этого оператор  $P(x; D_t, D_x, \gamma)$  имеет одиннадцатый порядок.

В силу (3.9) выражение (3.8) можно записать в виде

$$\mathcal{M}u = \langle P(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle + \langle p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle. \quad (3.11)$$

Представим оператор (3.10) в виде двух дифференциальных операторов:

$$P(x; D_t, D_x, \gamma) = P_0(D_t, D_x, \gamma) + P_1(x; D_t, D_x, \gamma), \quad (3.12)$$

где оператор  $P_0(D_t, D_x, \gamma)$  имеет только постоянные коэффициенты, а коэффициенты в  $P_1(x; D_t, D_x, \gamma)$ , стоящие перед операторами дифференцирования  $D_x^{\alpha+\beta}$ , зависят от  $x$ . Такое представление можно получить, используя определения дифференциальных операторов (2.3). Тогда для оператора  $P_0(D_t, D_x, \gamma)$  получим представление

$$\begin{aligned} P_0(D_t, D_x, \gamma) &= \gamma(-2(D_t^2 - \gamma^2 I)(L_0^1(D_x) + a)(L_0^1(D_x) + a) \\ &\quad + 2(L_0^1(D_x) + a)L_2^1(D_x) - 2D_t(L_0^1(D_x) + a)L_1^1(D_x) - L_1^1(D_x)L_1^1(D_x)). \quad (3.13) \end{aligned}$$

При таком определении оператора  $P_0(D_t, D_x, \gamma)$  все коэффициенты в операторе  $P_1(x; D_t, D_x, \gamma)$  из (3.12) содержат члены  $a_\alpha^0(x)$ ,  $a_\alpha^1(x)$ ,  $a_\alpha^2(x)$ , которые вместе со своими производными до пятого порядка включительно достаточно малы. Поэтому для любой функции  $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  справедлива оценка

$$|\langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle| \leq \gamma \varepsilon c_1 \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad (3.14)$$

где  $c_1 > 0$  — константа, зависящая от  $a$  и коэффициентов оператора (2.2),  $\varepsilon > 0$  определяется малостью коэффициентов  $a_\alpha^k(x)$  и их производных до пятого порядка включительно.

Аналогичная оценка имеет место для второго слагаемого из (3.11):

$$|\langle p(x; D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle| \leq c_2 \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad (3.15)$$

где  $c_2 > 0$  — константа, зависящая от  $a$  и коэффициентов оператора (2.10).

Рассмотрим форму

$$\langle P_0(D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle, \quad u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1}), \quad \gamma > 0.$$

В силу равенства Парсеваля имеем

$$\begin{aligned} \langle P_0(D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle &= \gamma \langle (2(\eta^2 + \gamma^2)(L_0^1(i\xi) + a)^2 \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)) \rangle \\ &+ \langle 2(L_0^1(i\xi) + a)L_2^1(i\xi) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle - \langle 2i\eta(L_0^1(i\xi) + a)L_1^1(i\xi) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle \\ &- \langle (L_1^1(i\xi))^2 \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle. \end{aligned}$$

Учитывая определение операторов (2.3), это можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \langle P_0(D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle &= \gamma \langle [2(\eta^2 + \gamma^2)(L_0^1(i\xi) + a)^2 - 2(L_0^1(i\xi) + a)L_2^1(\xi) \\ &+ 2\eta(L_0^1(i\xi) + a)L_1^1(\xi) + (L_1^1(\xi))^2] \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\begin{aligned} M(\eta, \gamma, \xi, a) &= \gamma [2(\eta^2 + \gamma^2)(L_0^1(\xi) + a)^2 - 2(L_0^1(\xi) + a)L_2^1(\xi) \\ &+ 2\eta(L_0^1(\xi) + a)L_1^1(\xi) + (L_1^1(\xi))^2]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тогда предыдущую формулу можно переписать в виде

$$\langle P_0(D_t, D_x, \gamma) u_\gamma, u_\gamma \rangle = \langle M(\eta, \gamma, \xi, a) \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle. \quad (3.17)$$

Запишем функцию (3.16) в виде

$$\begin{aligned} M(\eta, \gamma, \xi, a) &= 2\gamma(L_0^1(\xi) + a)^2 \left( \left( \eta + \frac{L_1^1(\xi)}{2(L_0^1(\xi) + a)} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(L_1^1(\xi))^2 - 4(L_0^1(\xi) + a)L_2^1(\xi)}{4(L_0^1(\xi) + a)^2} + \gamma^2 \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$Q(\eta, \gamma, \xi, a) = \left( \eta + \frac{L_1^1(\xi)}{2(L_0^1(\xi) + a)} \right)^2 + \frac{(L_1^1(\xi))^2 - 4(L_0^1(\xi) + a)L_2^1(\xi)}{4(L_0^1(\xi) + a)^2} + \gamma^2. \quad (3.18)$$

Тогда полином (3.16) можно представить в виде

$$M(\eta, \gamma, \xi, a) = 2\gamma(L_0^1(\xi) + a)^2 Q(\eta, \gamma, \xi, a). \quad (3.19)$$

Заметим, что функция  $Q(\eta, \gamma, \xi, 0)$ ,  $(\eta, \gamma, \xi) \in \mathbb{R}^{n+2}$ , однородная степени 2 и в силу условий (2.4), (2.5) обращается в 0 только при  $\eta = \gamma = |\xi| = 0$ . Поэтому существуют положительные константы  $r_2 \geq r_1$ , для которых выполнена оценка

$$r_2(\eta^2 + \gamma^2 + |\xi|^2) \geq Q(\eta, \gamma, \xi, 0) \geq r_1(\eta^2 + \gamma^2 + |\xi|^2), \quad (3.20)$$

или

$$r_2 \geq Q(\eta', \gamma', \xi', 0) \geq r_1 > 0,$$

$$\eta' = \eta/\Delta, \quad \gamma' = \gamma/\Delta, \quad \xi' = \xi/\Delta, \quad \Delta = \sqrt{\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2}.$$

Рассмотрим функцию (3.18) при  $a > 0$  и запишем ее следующим образом:

$$Q(\eta, \gamma, \xi, a) = \Delta^2 Q\left(\eta', \gamma', \xi', \frac{a}{\Delta^4}\right).$$

Тогда в силу равномерной непрерывности функции

$$Q(\eta', \gamma', \xi', \alpha), \quad (\eta')^2 + (\gamma')^2 + |\xi'|^2 = 1, \quad \alpha \in [0, \alpha_0],$$

из оценки (3.20) следует, что существует  $\gamma_1 > 0$  такое, что при всех  $(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $\gamma \geq \gamma_1$  будет выполняться неравенство

$$2r_2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq Q(\eta, \gamma, \xi, a) \geq \frac{r_1}{2}(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Отсюда в силу (3.19) получаем

$$4r_2\gamma(L_0^1(\xi) + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) \geq M(\eta, \gamma, \xi, a) \geq r_1\gamma(L_0^1(\xi) + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2).$$

Следовательно, учитывая (2.4), имеем

$$\begin{aligned} 4r_2\gamma(q_2|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2) &\geq M(\eta, \gamma, \xi, a) \\ &\geq r_1\gamma(q_1|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2), \quad \gamma \geq \gamma_1, \quad (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Поэтому для (3.17) получаем оценку снизу

$$\begin{aligned} \langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle \\ \geq r_1\gamma((q_1|\xi|^4 + a)^2(\eta^2 + |\xi|^2 + \gamma^2)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi)) \\ \geq \rho\gamma\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2, \quad \gamma \geq \gamma_1, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $\rho > 0$  — константа, зависящая от  $a, r_1, q_1$ .

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Учитывая формулы (3.6), (3.8), (3.11), (3.12), (3.17), форму (3.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M}u &= \langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle \\ &\quad + \langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle + \langle p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{M}u &\geq \langle M(\eta, \gamma, \xi, a)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), \widehat{u}_\gamma(\eta, \xi) \rangle \\ &\quad - |\langle P_1(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle| - |\langle p(x; D_t, D_x, \gamma)u_\gamma, u_\gamma \rangle|. \end{aligned}$$

Используя оценки (3.14), (3.15) и (3.21), при  $\gamma \geq \gamma_1$  получим неравенство

$$\mathcal{M}u \geq \gamma\left(\rho - \varepsilon c_1 - \frac{c_2}{\gamma}\right)\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2. \quad (3.22)$$

Пусть  $\gamma_2 = 4c_2/\rho$ , и предположим, что коэффициенты оператора (2.8) вместе с производными до пятого порядка включительно настолько малы, что  $4c_1\varepsilon \leq \rho$ . Тогда из оценки (3.22) при  $\gamma \geq \gamma_0 = \max\{\gamma_1, \gamma_2\}$  для любой  $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  вытекает неравенство

$$\mathcal{M}u \geq \gamma \frac{\rho}{2} \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|^2. \quad (3.23)$$

Оценим форму (3.4) сверху. В силу неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}u| &\leq \|e^{-\gamma t} \mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ &\quad \times \|e^{-\gamma t} \mathcal{L}_1^1(x; D_t, D_x)u(t, x), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ &= \|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \|\mathcal{L}_1^1(x; D_t + \gamma I, D_x)u_\gamma(t, x), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|. \end{aligned}$$

Поскольку все коэффициенты оператора (2.10) постоянны вне некоторого компакта, из определения оператора (3.5) следует оценка

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}u| &\leq c_3 \|\mathcal{L}(x; D_t, D_x)u(t, x), L_{2,\gamma}(\mathbb{R}^{n+1})\| \\ &\quad \times \|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{u}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\|, \end{aligned}$$

где  $c_3 > 0$  — константа, зависящая от коэффициентов (3.5).

Из этого неравенства и (3.23) при достаточно малых возмущениях коэффициентов оператора (2.10) при  $\gamma \geq \gamma_0$  вытекает энергетическая оценка (2.13) для любых функций  $u(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ . Следовательно, в силу теоремы о всюду плотности  $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  в соболевском пространстве  $W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$  эта оценка справедлива для любых функций  $u(t, x) \in W_{2,\gamma}^{2,6}(\mathbb{R}^{n+1})$ , удовлетворяющих условию (2.11).

Теорема 2 доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Учитывая доказанную теорему и используя теорему о разбиении единицы, нетрудно установить энергетическую оценку для операторов вида (2.10), являющихся строго псевдогиперболическими при любом  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  и имеющих достаточно гладкие коэффициенты, постоянные вне компакта.

Из теоремы 2 вытекает теорема 3 о единственности решения задачи Коши (2.14) в указанном классе функций. Действительно, если  $u(t, x)$  — решение задачи Коши с нулевыми данными

$$f(t, x) = \varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0,$$

то, продолжая его нулем при  $t < 0$ , получим функцию  $\bar{u}(t, x)$ , удовлетворяющую условиям теоремы 2. Следовательно, из оценки (2.13) получим

$$\|(|\xi|^4 + a)(|\eta| + \gamma + |\xi|)\widehat{\bar{u}}_\gamma(\eta, \xi), L_2(\mathbb{R}^{n+1})\| = 0, \quad \gamma > \gamma_0.$$

Отсюда, очевидно, вытекает, что  $u(t, x) = 0$ , т. е. двух различных решений задачи (2.14) не существует.

Теорема 3 доказана.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
2. Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. Соболев С. Л. Избранные труды. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; Филиал «Гео» Изд-ва СО РАН, 2003. Т. I.
4. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. (2-е изд., перераб. и доп.).
5. Герасимов С. И., Ерофеев В. И. Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саратов: ФГУП РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2014.
6. Bishop R. E. D. Longitudinal waves in beams // Aeronautical Quarterly. 1952. V. 3, N 4. P. 280–293.

7. Rao J. S. Advanced theory of vibration. New York: John Wiley and Sons, 1992.
8. Гальперн С. А. Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 1963. Т. 18, № 2. С. 239–249.
9. Wang Y., Guo B. Blow-up of solution for a generalized Boussinesq equation // Appl. Math. Mech. 2007. V. 28, N 11. P. 1437–1443.
10. Polat N., Piskin E. Existence and asymptotic behavior of solution of Cauchy problem for the damped sixth-order Boussinesq equations // Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser. 2015. V. 31, N 3. P. 735–746.
11. Бондарь Л. Н., Ма С. О краевой задаче в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения шестого порядка // Мат. тр. 2024. Т. 27, № 3. С. 30–51.
12. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston; Koln: VSP, 2003.
13. Fedotov I., Volevich L. R. The Cauchy problem for hyperbolic equations not resolved with respect to the highest time derivative // Russian J. Math. Physics. 2006. V. 13, N 3. P. 278–292.
14. Демиденко Г. В. Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
15. Fedotov I., Shatalov M., Marais J. Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mechanica. 2016. V. 227, N 11. P. 3315–3324.
16. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В. О корректности задачи Коши для псевдогиперболических уравнений в весовых соболевских пространствах // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 895–911.
17. Демиденко Г. В. Энергетические оценки для одного класса псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 8. С. 1466–1475.
18. Pereira P. J. S., Lopes N. D., Trabuco L. Soliton-type and other travelling wave solutions for an improved class of nonlinear sixth-order Boussinesq equations // Nonlinear Dynam. 2015. V. 82, N 1–2. P. 783–818.
19. Zhang Z., Huang J., Sun M. Well-posedness and decay property for the generalized damped Boussinesq equation with double rotational inertia // Kodai Math. J. 2016. V. 39, N 3. P. 535–551.
20. Умаров Х. Г. Разрушение и глобальная разрешимость задачи Коши для псевдогиперболического уравнения, связанного с обобщенным уравнением Буссинеска // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 3. С. 672–689.
21. Бондарь Л. Н., Демиденко Г. В., Нурмахматов В. С. Краевая задача в цилиндре для одного псевдогиперболического уравнения // Челябинск. физ.-мат. журн. 2023. Т. 8, № 4. С. 469–482.
22. Шеметова В. В. Одна краевая задача для псевдогиперболического уравнения в четверти пространства // Мат. тр. 2025. Т. 28, № 2. С. 102–123.
23. Петровский И. Г. Избранные труды. Системы уравнений с частными производными. Алгебраическая геометрия. М.: Наука, 1986.
24. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 1 августа 2025 г.

После доработки 1 августа 2025 г.

Принята к публикации 27 августа 2025 г.

Демиденко Геннадий Владимирович (ORCID 0000-0001-6338-7247),  
Ма Синь

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
demidenko@math.nsc.ru, s.ma2@ng.nsu.ru

УДК 512.62+517.54

## ШВАРЦИАН И КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ ПОЛИНОМА С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

В. Н. Дубинин

**Аннотация.** Для комплексного полинома степени не меньше двух, сохраняющего начало координат и имеющего все свои критические точки на вещественной положительной либо отрицательной полуоси, устанавливается точная нижняя граница для наибольшего модуля критических значений. Данная оценка включает производную Шварца этого полинома в начале координат и не зависит от степени полинома. Аналогичная оценка приводится в случае, когда все критические точки полинома вещественные и расположены по разные стороны от начала координат.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.607

**Ключевые слова:** полиномы, критические точки, критические значения, шварциан.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

### § 1. Введение и формулировка результатов

Исследование неравенств для критических точек и критических значений комплексных полиномов во многом инициировала известная статья Смейла [1]. К настоящему времени этой тематике посвящено немало публикаций (см., например, библиографию в обзорах [2, 3]). В частности, в работе [4] (см. также [5]) показано, что для любого полинома вида  $P(z) = c_1 z + \dots + c_n z^n$ ,  $c_1 c_n \neq 0$ ,  $n \geq 2$ , справедливо неравенство

$$\max\{|P(\zeta)| : P'(\zeta) = 0\} \geq 2 \left( \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^{\frac{n}{n-1}} \left| \frac{c_1^n}{c_n} \right|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Равенство достигается в случае  $P(z) = aT_n(bz - \cos(\pi/(2n)))$  при подходящих комплексных значениях  $a$  и  $b$ , зависящих от  $c_1$  и  $c_n$ , где  $T_n(z) = 2^{n-1}z^n + \dots$  — полином Чебышева первого рода. Естественно поставить вопрос о нижней оценке модуля критического значения, не зависящей от степени полинома  $P$ . Впервые неравенства для модулей критических значений, не зависящие от степени полинома, появились в работе Хинкканена и Каюмова [6]. Следуя [6], ограничимся полиномами с вещественными критическими точками. Такие полиномы представляют интерес при решении различных задач теории функций [6–10].

---

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИПМ ДВО РАН № 075-00459-25-00.

Всюду ниже рассматриваются полиномы вида

$$P(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n, \quad n \geq 2. \quad (1)$$

Полученные в данной статье точные оценки модуля  $|P(\zeta)|$  в критической точке  $\zeta$ , т. е. точке, где  $P'(\zeta) = 0$ , являются одновременно неравенствами для производной Шварца (шварциана)  $S_P(0)$  полинома  $P$ , вычисленной в начале координат:

$$S_P(0) = 6(c_3 - c_2^2).$$

Справедливы следующие утверждения.

**Теорема 1.** *Предположим, что все критические точки полинома (1) степени  $n \geq 2$  расположены на вещественной положительной либо отрицательной полуоси. Тогда  $S_P(0) < 0$  и существует критическая точка  $\zeta$  такая, что*

$$|P(\zeta)| \geq \left(-2\frac{2}{3}S_P(0)\right)^{-1/2}. \quad (2)$$

Равенство в (2) достигается для полинома  $P(z) = z - cz^2$  при любом вещественном  $c \neq 0$ .

**Теорема 2.** *Если все критические точки полинома (1) степени  $n \geq 3$  вещественные и расположены по разные стороны от начала координат, то  $S_P(0) < 0$  и существует критическая точка  $\zeta$ , для которой*

$$|P(\zeta)| \geq \left(-1\frac{1}{8}S_P(0)\right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Равенство в (3) имеет место при  $P(z) = z - cz^3$  при любом  $c > 0$ .

Ранее [11] нами было показано, что в условиях теоремы 1 либо теоремы 2 справедливо неравенство

$$S_P(0) \leq 0.$$

Заметим, что неравенства для шварциана во внутренних точках области определения голоморфной неоднолистной функции появились сравнительно недавно [12], а неравенства для производной Шварца с учетом критического значения в литературе не рассматривались.

## § 2. Доказательство теоремы 1

Поскольку все критические точки полинома (1) вещественные, значения  $P(z)$  также вещественные при всех вещественных  $z$ . Обозначим через  $\mathcal{R}(P)$  риманову поверхность функции  $\mathcal{P}$ , обратной заданному полиному  $P$ . Мы рассматриваем  $\mathcal{P}$  как отображение поверхности  $\mathcal{R}(P)$  на комплексную сферу  $\mathbb{T}_z$ . Всевозможные радиальные лучи на поверхности  $\mathcal{R}(P)$ , соединяющие ее точки разветвления с бесконечностью, разбивают эту поверхность на конечное число листов  $\{U\}$ . Пусть  $U_0, U_0 \in \{U\}$ , — тот лист, который содержит прообраз точки  $z = 0$  при отображении  $\mathcal{P}$ . Полагая, что все критические точки полинома  $P$  отрицательные, обозначим через  $\zeta$  наибольшую критическую точку. Из соображений непрерывности можно считать, что  $P''(\zeta) \neq 0$ . В силу  $P(0) = 0, P'(0) > 0$  выполняется  $P(\zeta) < 0$  и вещественная функция  $P$  отображает луч  $[\zeta, +\infty]$  в луч  $[P(\zeta), +\infty]$ . Отсюда следует, что проекция области  $U_0$  есть  $w$ -плоскость с разрезом  $L := [-\infty, P(\zeta)]$ .

Покажем, что на границе области  $\mathcal{P}(U_0)$  нет критических точек полинома  $P$ , отличных от  $\zeta$ . Предположим противное. Тогда найдется критическая точка  $\zeta' \in \partial\mathcal{P}(U_0)$ ,  $\zeta' < \zeta$  (пусть  $\zeta'$  — ближайшая к  $\zeta$  такая точка), и соответствующая точка разветвления  $\mathcal{P}^{-1}(\zeta')$  принадлежит  $\partial U_0$ . Замкнутая жорданова кривая на поверхности  $\mathcal{R}(P)$  вида  $\mathcal{P}^{-1}([\zeta', \zeta]) \cup [\mathcal{P}^{-1}(\zeta'), \mathcal{P}^{-1}(\zeta)]$  разбивает эту поверхность на две области, каждая из которых содержит бесконечно удаленную точку. Здесь  $[\mathcal{P}^{-1}(\zeta'), \mathcal{P}^{-1}(\zeta)]$  — отрезок на границе области  $U_0$ . Полученное противоречие показывает, что точка  $\zeta$  является единственной критической точкой на границе  $\mathcal{P}(U_0)$ .

В силу вышесказанного и условия  $P''(\zeta) \neq 0$  определен единственный лист из совокупности  $\{U\}$ , пусть  $U'$ , который имеет с  $U_0$  общие берега разрезов над лучом  $L$  и на границе которого лежит точка  $\mathcal{P}^{-1}(\zeta)$ . Кроме того, у листов  $U_0$  и  $U'$  нет других примыкающих к ним общих точек разветвления, лежащих над  $L$ , исключая точку  $\mathcal{P}^{-1}(\zeta)$ .

Обозначим через  $G_1$  риманову область на  $\mathcal{R}(P)$ , полученную склеиванием листов  $U_0$  и  $U'$  крест-накрест по берегам разрезов над  $L$  с последующим разрезанием приклеенного листа  $U'$  вдоль радиального луча, лежащего над  $[P(\zeta), +\infty]$ . Положим

$$Q_1(z) := z - \frac{1}{4P(\zeta)}z^2.$$

Непосредственно из определения видно, что функция  $w = Q_1(z)$  отображает полуплоскость  $\operatorname{Re} z > 2P(\zeta)$  ( $\operatorname{Re} z < 2P(\zeta)$ ) на  $w$ -плоскость с разрезом по лучу  $L$ . Таким образом,  $Q_1$  отображает сферу  $\overline{\mathbb{C}}_z$  на риманову поверхность  $\mathcal{R}(Q_1)$ , образованную склеиванием двух экземпляров области  $\mathbb{C}_w \setminus L$  крест-накрест по берегам разреза  $L$ . Построенную выше область  $G_1$  можно рассматривать как подмножество поверхности  $\mathcal{R}(Q_1)$ . Функция  $Q_1$  отображает область

$$H = \mathbb{C}_z \setminus \{z : \operatorname{Re} z \leq 2P(\zeta), \operatorname{Im} z = 0\}$$

конформно и однолистно на область  $G_1$ . Следовательно, суперпозиция функций

$$f_1 := \mathcal{P} \circ Q_1$$

является однолистной в области  $H$ ,  $f_1(0) = 0$ . Применение к функции  $f_1$  теоремы 3 работы [11], где  $g(z) \equiv z$ , ведет к неравенству

$$\operatorname{Re} S_{f_1}(0) \geq 0. \quad (4)$$

Для вычисления шварциана от суперпозиции  $f_1$  удобно воспользоваться формулой

$$S_{\alpha \circ \beta} = (S_\alpha \circ \beta)(\beta')^2 + S_\beta.$$

После элементарных преобразований неравенство (4) перепишется так:

$$\frac{3}{8P^2(\zeta)} \leq -S_P(0).$$

Отсюда вытекает, что  $S_P(0) < 0$ , и справедливо неравенство (2).

Достижимость равенства в (2) проверяется непосредственно либо простым замечанием, что при  $P(z) = z - cz^2$  будет  $f_1(z) \equiv z$  и, следовательно, в (4) и (2) имеет место знак равенства.

Случай, когда все критические точки полинома  $P$  положительные, сводится к предыдущему рассмотрению полинома  $-P(-z)$ . Теорема 1 доказана.



## § 3. Доказательство теоремы 2

Пусть  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — ближайшие к началу координат критические точки полинома  $P$ ,  $\zeta_1 < 0 < \zeta_2$ . Можно считать, что  $P''(\zeta_k) \neq 0$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда  $P(\zeta_1) < 0 < P(\zeta_2)$  и вещественная функция  $P$  отображает отрезок  $[\zeta_1, \zeta_2]$  в  $[P(\zeta_1), P(\zeta_2)]$ . Отсюда следует, что проекция области  $U_0$  есть  $w$ -плоскость с разрезами  $L_1 = [-\infty, P(\zeta_1)]$  и  $L_2 = [P(\zeta_2), +\infty]$ . Здесь вновь используются обозначения  $U_0$ ,  $\mathcal{R}(P)$ ,  $\mathcal{P}$  и разбиение поверхности  $\mathcal{R}(P)$  на листы радиальными разрезами из § 2. Повторяя соответствующую часть доказательства теоремы 1 (где  $L = L_1$ ,  $\zeta = \zeta_1$ ), убеждаемся в существовании единственного листа (пусть  $U'$ ), который имеет с  $U_0$  общие берега разрезом над  $L_1$  и на границе которого нет других точек разветвления поверхности  $\mathcal{R}(P)$ , отличных от  $\mathcal{P}^{-1}(\zeta_1)$ . Аналогично существует лист  $U''$ , который имеет с  $U_0$  общие берега разрезом над  $L_2$  и на границе которого нет точек разветвления  $\mathcal{R}(P)$ , кроме  $\mathcal{P}^{-1}(\zeta_2)$ . Обозначим через  $G_2$  риманову область на  $\mathcal{R}(P)$ , полученную склеиванием листов  $U_0$  и  $U'$  крест-накрест по берегам разрезом над  $L_1$  с последующим разрезанием по листу  $U'$  вдоль луча, лежащего над  $[P(\zeta_1), +\infty]$ , а затем приклеиванием к  $U_0$  листа  $U''$  крест-накрест по берегам разрезом над  $L_2$  с последующим разрезанием по листу  $U''$  вдоль луча, лежащего над  $[-\infty, P(\zeta_2)]$ .

Положим

$$Q_2(z) := \frac{1}{ab} \int_0^z (u-a)(u-b) du = z - \frac{a+b}{2ab} z^2 + \frac{1}{3ab} z^3,$$

где числа  $a, b$  заданы условиями  $a < 0 < b$ ,  $Q_2(a) = P(\zeta_1)$ ,  $Q_2(b) = P(\zeta_2)$ . Несложно показать, что риманова поверхность  $\mathcal{R}(Q_2)$ , на которую полином  $Q_2$  отображает комплексную сферу  $\overline{\mathbb{C}}_z$ , образована приклеиванием крест-накрест к  $w$ -плоскости с двумя разрезами  $L_1, L_2$  двух областей  $\mathbb{C}_w \setminus L_1$  и  $\mathbb{C}_w \setminus L_2$  вдоль берегов разрезом  $L_1$  и  $L_2$ . Построенную выше область  $G_2$  можно рассматривать как подмножество поверхности  $\mathcal{R}(Q_2)$ . Функция  $Q_2$  отображает область

$$T = \mathbb{C}_z \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z \leq a \text{ либо } \operatorname{Re} z \geq b\}$$

конформно и однолистно на область  $G_2$ . Поэтому суперпозиция функций

$$f_2 := \mathcal{P} \circ Q_2$$

однолисна в области  $T$ ,  $f_2(0) = 0$ . Применение вновь теоремы 3 работы [11] приводит к неравенству

$$\operatorname{Re} S_{f_2}(0) \geq 0. \quad (5)$$

Прямые вычисления дают

$$\operatorname{Re} S_{f_2}(0) = S_{f_2}(0) = -S_P(0) + \frac{2}{ab} - \frac{3}{2} \left( \frac{a+b}{ab} \right)^2.$$

Предположим, что  $|a| \leq b$ . Тогда неравенство (5) влечет

$$-S_P(0) \geq \frac{3}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{1}{|ab|} = \frac{3}{2} \frac{1}{|ab|} \left[ \frac{|a|}{b} + \frac{b}{|a|} - \frac{2}{3} \right] \geq \frac{2}{b^2}.$$

С другой стороны,

$$P(\zeta_2) = Q_2(b) = \frac{b}{2} - \frac{b^2}{6a} = \frac{b}{2} \left[ 1 + \frac{b}{3|a|} \right] \geq \frac{2}{3}b.$$

Следовательно,

$$-S_P(0) \geq \frac{8}{9} \frac{1}{(P(\zeta_2))^2}.$$

Отсюда вытекает, что  $S_P(0) < 0$  и справедливо неравенство (3) при  $\zeta = \zeta_2$ .

Случай  $|a| \geq b$  рассматривается аналогично.

Утверждение о знаке равенства в (3) проверяется прямым вычислением. Теорема 2 доказана.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Smale S. The fundamental theorem of algebra and complexity theory // Bull. Am. Math. Soc. 1981. V. 4, N 1. P. 1–36.
2. Дубинин В. Н. Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // Успехи мат. наук. 2012. Т. 67, № 4. С. 3–88.
3. Авхадиев Ф. Г., Каюмов И. Р., Насыров С. Р. Экстремальные проблемы в геометрической теории функций // Успехи мат. наук. 2023. Т. 78, № 2. С. 3–70.
4. Дубинин В. Н. Об одной экстремальной задаче для комплексных полиномов с ограничениями на их критические значения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 1. С. 79–69.
5. Дубинин В. Н. Неравенство марковского типа и нижняя оценка модулей критических значений полиномов // Докл. АН. 2013. Т. 451, № 5. С. 495–497.
6. Hinkkanen A., Kayumov I. On critical values of polynomials with real critical points // Constructive Approximation. 2010. V. 32, N 2. P. 385–392.
7. Epstein A. Symmetric rigidity for real polynomials with real critical points // Contemp. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2002. V. 311. P. 107–114.
8. Brown J. E., Powell V. F. A result on real polynomials with real critical points // J. Anal. Appl. 2007. V. 5, N 1. P. 41–52.
9. Kozlovski O., Shen W., van Strien S. Rigidity for real polynomials // Ann. Math. 2007. V. 2, N 3. P. 749–841.
10. Bishop D. L. Approximation by polynomials with only real critical points // Rev. Mat. Iberoam. 2024. V. 40, N 6. P. 2251–2290.
11. Дубинин В. Н. Об одном классе однолистных функций // Дальневост. мат. журн. 2012. Т. 12, № 2. С. 184–194.
12. Bolotnikov V. Several inequalities for the Schwarzian derivative of a bounded analytic function // Complex Var. Elliptic Equ. 2019. V. 64, N 7. P. 1093–1102.

Поступила в редакцию 15 июля 2025 г.

После доработки 15 июля 2025 г.

Принята к публикации 30 июля 2025 г.

Дубинин Владимир Николаевич (ORCID 0000-0002-4403-155X)

Институт прикладной математики ДВО РАН,

ул. Радио, 7, Владивосток 690041

dubinin@iam.dvo.ru

## ДИСКРЕТНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ И РЯДЫ ТЕЙЛОРА

С. Лу, О. А. Данилов, А. Д. Медных

**Аннотация.** Доказано, что любая дискретная параболическая функция, определенная в положительном квадранте гауссовой плоскости, допускает разложение в абсолютно сходящийся ряд Тейлора по системе псевдостепеней.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.608

**Ключевые слова:** Целая функция, дискретная параболическая функция, ряд Тейлора, теорема Гельфонда — Шеффера.

### § 1. История вопроса

**1.1. Основные понятия.** Обозначим через  $\mathbb{G}$  гауссову плоскость  $\mathbb{G} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{Z}\}$  и через  $\mathbb{G}^+$  — положительный квадрант гауссовой плоскости  $\mathbb{G}^+ = \{z \in \mathbb{G} : x \geq 0, y \geq 0\}$ . Комплекснозначная функция  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *дискретной аналитической функцией первого рода* на тройке  $\{z; z+1; z+i\}$ , если справедливо соотношение

$$\frac{f(z+i) - f(z)}{i} = f(z+1) - f(z). \quad (1)$$

Если соотношение (1) верно для любой тройки  $\{z; z+1; z+i\} \subset E$  для некоторого множества  $E \subset \mathbb{G}$ , то  $f$  является *дискретной аналитической функцией первого рода на  $E$* . Множество всех таких функций обозначим через  $\mathcal{D}_1(E)$ .

Соотношение (1) является дискретным аналогом уравнений Коши — Римана для классических аналитических функций.

Действительно, для векторов  $z_1 = (z+1) - z = 1$ ,  $z_2 = (z+i) - z = i$ ,  $w_1 = f(z+1) - f(z)$  и  $w_2 = f(z+i) - f(z)$  из равенства (1) получим

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{f(z+i) - f(z)}{f(z+1) - f(z)} = \frac{i}{1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (2)$$

Так как  $|z_2| = |z_1| = 1$ , из (2) следует

$$|w_2| = |w_1|, \quad w_2 = iw_1, \quad (3)$$

откуда

$$\widehat{w_1, w_2} = \frac{\pi}{2} = \widehat{z_1, z_2}. \quad (4)$$

---

Работа С. Лу выполнена при поддержке Китайского Стипендиального Фонда, проект 202110100026. Работа А. Д. Медных выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0005.

Равенства (3) и (4) утверждают постоянство искажения масштаба отображением  $f$  и свойство консерватизма углов на тройке  $\{z; z+1; z+i\}$ . Это аналог конформности для классических аналитических функций.

Комплекснозначная функция  $f: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$  называется *дискретной аналитической функцией второго рода* на квадрате  $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$  если справедливо равенство

$$\frac{f(z+1+i) - f(z)}{1+i} = \frac{f(z+i) - f(z+1)}{i-1} \quad (5)$$

или, что то же самое,

$$\bar{\partial}f(z) = f(z) + if(z+1) + i^2f(z+1+i) + i^3f(z+i) = 0. \quad (6)$$

Если соотношение (5) верно на любом квадрате  $\{z; z+1; z+1+i; z+i\} \subset E$  для некоторого множества  $E \subset \mathbb{G}$ , то  $f$  называется *дискретной аналитической функцией второго рода на  $E$* . Множество всех таких функций обозначим через  $\mathcal{D}_2(E)$ .

Соотношение (5) также является дискретным аналогом уравнений Коши — Римана.

Для векторов

$$\begin{aligned} z_1 &= (z+1+i) - z = 1+i, & z_2 &= (z+i) - (z+1) = i-1, \\ w_1 &= f(z+1+i) - f(z), & w_2 &= f(z+i) - f(z+1) \end{aligned}$$

из (5) имеем равенство

$$\frac{w_2}{w_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{i-1}{1+i} = i. \quad (7)$$

Так как  $|z_2| = |z_1| = \sqrt{2}$ , получаем из (7), что

$$|w_2| = |w_1|, \quad w_2 = iw_1, \quad (8)$$

откуда

$$\widehat{w_1, w_2} = \frac{\pi}{2} = \widehat{z_1, z_2}. \quad (9)$$

И в этом случае из равенств (8) и (9) получается свойство постоянства искажения масштаба отображения  $f$  и свойство консерватизма углов на четверке  $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$ .

**1.2. Линейная теория.** Теория дискретных аналитических функций восходит к работам Айзекса 40-х гг. прошлого столетия. В своих исследованиях Айзекс [1] ввел дискретные аналитические функции первого и второго рода и исследовал функции первого рода. Все работы, основанные на линейных соотношениях (1) и (5), получили название «линейная теория дискретных аналитических функций».

Далее, в 1944 г. Ферран [2] начала исследовать дискретные аналитические функции второго рода. Базисные свойства для дискретных аналитических функций второго рода, аналогичные свойствам классических аналитических функций, были установлены в работе Даффина [3]. С. Л. Соболев [4] получил важные результаты, связанные с поведением дискретных аналитических и гармонических функций на бесконечности.

Новые комбинаторные и аналитические идеи Цайльбергера [5] дали импульс к развитию теории. Эти идеи развил и обобщил А. Д. Медных в исследовании [6].

Новое понимание природы дискретных аналитических функций было предложено Даффиным в [7]. Здесь гауссова решетка  $\mathbb{G}$  была заменена графом с ромбическими гранями. Эти идеи далеко продвинул Мерка [8], где линейная теория дискретных аналитических функций была распространена на случай дискретных римановых поверхностей. Кэниён [9] построил функцию Грина для оператора Дирака на ромбических графах. Этот подход позволил получить важные результаты в теории кодирования Идальго [10]. В работах И. А. Дынникова и С. П. Новикова [11] изучены дискретные аналитические функции на треугольных и шестиугольных решетках.

**1.3. Нелинейная теория.** Помимо дискретных аналитических функций первого и второго рода, определенных формулами (1) и (5), развивалась нелинейная теория, основанная на идеях Тёрстона [12] и его учеников.

Пусть  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{C}$  — функция, удовлетворяющая на каждой четверке  $\{z; z+1; z+1+i; z+i\}$  соотношению

$$\frac{(f(z+1) - f(z))(f(z+1+i) - f(z+i))}{(f(z+i) - f(z))(f(z+1+i) - f(z+1))} = -1. \quad (10)$$

Нелинейное соотношение (10) введено в работе [13] и определяет шаровые упаковки. Более глубокие комбинаторные идеи и обобщения шаровых упаковок на произвольные четырехугольные графы даны в работе [14]. Этот подход показывает, что шаровые упаковки являются естественным дискретным аналогом аналитических функций [15–18].

Одним из важнейших результатов в этом направлении является доказательство того, что голоморфное отображение в классической теореме Римана может быть аппроксимировано шаровыми упаковками [19–21].

Вариационный подход к шаровым упаковкам обсуждается в работе [22].

До недавнего времени линейная и нелинейная теории развивались отдельно. В [23] показано, что в некотором точном смысле первая теория является линеаризацией второй теории.

После 2000-х число работ в области дискретных аналитических функций значительно выросло, поэтому очень трудно упомянуть все замечательные результаты с этого момента.

В 2010 г. С. Смирнов получил медаль Филдса. В своих исследованиях он активно использовал идеи и методы теории дискретных аналитических функций.

**1.4. Применение в численных методах.** История развития численных методов решения уравнения теплопроводности начинается с первой работы немецкого математика Рунге [24], вышедшей в 1908 г. В ней был описан метод сеток, основанный на замене производных, входящих в дифференциальное уравнение, разностными отношениями.

Одной из важнейших работ в этой области стала монография советского математика Ш. Е. Микеладзе [25], вышедшая в свет в 1936 г. С 1932 г. начали печататься работы Д. Ю. Панова, а в 1938 г. вышла его книга, в которой собраны ценные практические результаты [26]. С появлением этих работ задача численного интегрирования уравнений в частных производных получила твердые основания для своего теоретического и практического развития.

**1.5. Основные результаты.** Пусть  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  — пространство целых аналитических функций, а  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  — пространство дискретных параболических функций, определенное ниже.

В § 2 введены псевдостепени  $\pi_k(z)$  в пространстве  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ . Установлено, что для них выполнены свойства (A1)–(A3) (теоремы 1 и 2).

В § 3 доказано, что оператор  $\Theta : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  корректно определен, удовлетворяет свойству (A4) и таким образом является оператором эволюции (теоремы 3 и 4).

Теорема 5 устанавливает сюръективность отображения  $\Theta : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ , откуда следует существование разложения в ряд Тейлора произвольной дискретной параболической функции.

Теорема 6 дает описание ядра отображения  $\Theta : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .

## § 2. Дискретные параболические функции

**2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\mathbb{G}$  — гауссова плоскость,  $f(z) = f(x, y)$  — комплекснозначная функция, определенная на  $\mathbb{G}$ . Тогда  $f$  — *дискретная параболическая функция* на  $\mathbb{G}$ , если для любой четверки

$$\Gamma = \{z + i, z, z + 1, z + 2\} \in \mathbb{G}$$

справедливо соотношение

$$f(z + i) - f(z) = f(z + 2) - 2f(z + 1) + f(z) \quad (11)$$

или, что то же самое,

$$Lf(z) = -f(z + i) + f(z + 2) - 2f(z + 1) + 2f(z) = 0. \quad (12)$$

Если соотношение (11) верно для любой четверки  $\Gamma = \{z + i; z; z + 1; z + 2\}$ , принадлежащей некоторому подмножеству  $E \subset \mathbb{G}$ , то  $f$  — *дискретная параболическая функция* на  $E \subset \mathbb{G}$ . Обозначим множества всех дискретных параболических функций на  $E$  и  $\mathbb{G}$  через  $\mathcal{D}(E)$  и  $\mathcal{D}(\mathbb{G})$  соответственно. Оператор  $L$ , определенный формулой (12), является дискретным аналогом оператора теплопроводности  $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ , определенного на классических гладких функциях.

Интересен случай схемы, которая определяется уравнением  $f(z + 1) - 2f(z) + f(z - 1) = f(z + i) - f(z)$ . Он приводит к изучению дискретных параболических функций, заданных в нижней половине положительного квадранта гауссовой плоскости. Однако в такой ситуации не получается корректно определить оператор эволюции и восстановить на положительном квадранте дискретную параболическую функцию по начальным значениям, заданным на положительной полуоси.

**2.2. От разностного уравнения к экспоненте.** Воспользуемся фундаментальным фактом (см. [27]), что решение большинства разностных уравнений является линейной комбинацией экспонент. Покажем, как естественным образом прийти к понятию экспоненты разностного уравнения. Будем искать решение уравнения (12) в виде

$$f(\zeta, z) = a^x(\zeta) \cdot b^y(\zeta) \quad (13)$$

для некоторых аналитических функций  $a(\zeta)$ ,  $b(\zeta)$ , где  $\zeta \in \mathcal{U}(0, r)$  для некоторого  $r > 0$ ,  $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$ . Подставив выражение из (13) для  $f(\zeta, z)$  в формулу (12), получим

$$Lf(z) = a^x b^y (-b + a^2 - 2a + 2) = 0 \quad (14)$$

при всех  $z = x + iy \in \mathbb{G}^+$ . Отсюда следует, что

$$b(\zeta) = a^2(\zeta) - 2a(\zeta) + 2 = (a(\zeta) - 1)^2 + 1. \quad (15)$$

Потребуем дополнительно, чтобы

$$a(\zeta) \sim 1 + \zeta \text{ при } \zeta \rightarrow 0.$$

В частности, подходит  $a(\zeta) = e^\zeta$ . Тогда из формулы (15)

$$b(\zeta) = (e^\zeta - 1)^2 + 1 = e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2 \quad (16)$$

и, значит, в качестве  $f(\zeta, z)$  подходит функция

$$f(\zeta, z) = e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}((e^\zeta - 1)^2 + 1)^y. \quad (17)$$

Функция  $e(\zeta, z)$ , определяемая формулой (17), называется *экспонентой разностного уравнения* (12). Для нее при всех  $z_1, z_2 \in \mathbb{G}^+$  и  $\zeta \in \mathbb{C}$  верно соотношение

$$e(\zeta, z_1 + z_2) = e(\zeta, z_1) \cdot e(\zeta, z_2). \quad (18)$$

### 2.3. Псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ и их свойства.

**2.3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ .** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{G}^+$ . Положим

$$\partial_0^k e(\zeta, z) = \left. \frac{d^k e(\zeta, z)}{d\zeta^k} \right|_{\zeta=0}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \partial_0^0 e(\zeta, z) = e(0, z), \quad k = 0.$$

Рассмотрим разложение функции  $e(\zeta, z)$  с центром в  $\zeta_0 = 0$  по степеням  $\zeta$ , где  $\zeta \in \mathbb{C}$ :

$$e(\zeta, z) = e(\zeta, x, y) = e^{\zeta x}((e^\zeta - 1)^2 + 1)^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!} \zeta^k, \quad \text{где } \pi_k(x, y) := \pi_k(x + iy). \quad (19)$$

Очевидно, что верны равенства

$$\pi_k(z) = \partial_0^k e(\zeta, z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \pi_0(z) = \partial_0^0 e(\zeta, z) = e(0, z) \equiv 1. \quad (20)$$

В частности, для  $k = 0, 1, 2$  имеем  $\pi_0(z) = 1$ ,  $\pi_1(z) = x$ ,  $\pi_2(z) = x^2 + 2y$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Для экспоненты

$$e_1(\zeta, z) = e_1(\zeta, x, y) = ((1+i)e^{\frac{\zeta}{1+i}} - i)^x \cdot ((1-i)e^{\frac{\zeta}{1-i}} + i)^y, \quad (21)$$

где  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{G}^+$ , многочлены  $p_k(z)$ , определенные по формулам

$$p_k(z) = \partial_0^k e_1(\zeta, z), \quad k = 1, 2, \dots, \quad p_0(z) = \partial_0^0 e_1(\zeta, z) = e(0, z) \equiv 1, \quad (22)$$

введены в [5].

### 2.3.2. Рекуррентные соотношения для псевдостепеней $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ .

**Теорема 1.** Для функций  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ , определенных формулой (20), справедливо рекуррентное соотношение

$$\pi_{k+1}(x, y) = x\pi_k(x, y) + 2y\pi_k(x, y) + 2y\pi_k(x+1, y-1) - 4y\pi_k(x, y-1). \quad (23)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Выполним цепочку преобразований при  $k = 0, 1, 2, \dots$  по формуле (20):

$$\pi_{k+1}(z) = \partial_0^{k+1} e(\zeta, z) = \partial_0^k \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} e(\zeta, z) \right) = \partial_0^k ((e^{\zeta x} \cdot (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^y)'_\zeta)$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_0^k (x e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^y + e^{\zeta x} \cdot y (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^{y-1} \cdot (2e^{2\zeta} - 2e^\zeta)) \\
&= \partial_0^k (x e(\zeta, z) + 2y e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^{y-1} \cdot (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + e^\zeta + 2 - 2)) \\
&= x \partial_0^k e(\zeta, z) + 2y \partial_0^k e(\zeta, z) + 2y \partial_0^k (e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^{y-1} \cdot (e^\zeta - 2)) \\
&= x \pi_k(z) + 2y \pi_k(z) + 2y \partial_0^k (e^{\zeta(x+1)} \cdot (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^{y-1}) - 4y \partial_0^k (e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^\zeta + 2)^{y-1}) \\
&= x \pi_k(z) + 2y \pi_k(z) + 2y \pi_k(x+1, y-1) - 4y \pi_k(x, y-1).
\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы 1 по индукции получим равенства  $\pi_k(x, 0) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ .

**2.3.3. Свойства системы функций  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ .** В этом пункте установим основные свойства системы функций  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ .

**Теорема 2.** Для системы функций  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$ , определенной формулой (20), справедливы следующие утверждения:

(A1)  $\pi_k(0) = 0$  при  $k = 1, 2, \dots$ ;

(A2) для любых  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{G}^+$ , при любом целом неотрицательном  $k$

$$\pi_k(z_1 + z_2) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \pi_s(z_1) \pi_{k-s}(z_2); \quad (24)$$

(A3)  $\pi_0(z) = 1$ ,  $\pi_k(z)$  — многочлен, для которого верно следующее равенство:

$$\pi_k(z) = \pi_k(x, y) = x^k + \sigma_{k-1}(x, y), \quad (25)$$

где  $\sigma_{k-1}(x, y)$  — многочлен степени  $\leq k-1$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Свойство (A1) очевидно. При вычислении производных  $\partial^k e(\zeta, z)$  получим слагаемые, содержащие  $x$  и  $y$ , которые при  $x = 0$  и  $y = 0$  обращаются в нуль.

Свойство (A2) установим по формуле Лейбница:

$$\begin{aligned}
\pi_k(z_1 + z_2) &= \partial_0^k e(\zeta, z_1 + z_2) = \partial_0^k [e(\zeta, z_1) \cdot e(\zeta, z_2)] \\
&= \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \partial_0^s e(\zeta, z_1) \cdot \partial_0^{k-s} e(\zeta, z_2) = \sum_{s=0}^k \binom{k}{s} \pi_s(z_1) \cdot \pi_{k-s}(z_2).
\end{aligned}$$

Методом математической индукции установим свойство (A3). Имеем  $\pi_0(z) = e(0, z) = 1$ .

**БАЗА.** Для  $k = 1$  по формуле (23) получим

$$\begin{aligned}
\pi_1(x, y) &= x \pi_0(x, y) + 2y \pi_0(x, y) + 2y \pi_0(x+1, y-1) - 4y \pi_0(x, y-1) \\
&= x \cdot 1 + 2y \cdot 1 + 2y \cdot 1 - 4y \cdot 1 = x.
\end{aligned}$$

Предположим, что для  $k \in \mathbb{N}$  верно

$$\pi_k(x, y) = x^k + \sigma_{k-1}(x, y).$$

Тогда для  $k+1$  из формулы (23) следует:

$$\begin{aligned}
\pi_{k+1}(x, y) &= x \pi_k(x, y) + 2y \pi_k(x, y) + 2y \pi_k(x+1, y-1) - 4y \pi_k(x, y-1) \\
&= x(x^k + \sigma_{k-1}(x, y)) + 2y(x^k + \sigma_{k-1}(x, y)) + 2y((x+1)^k + \sigma'_{k-1}(x, y)) \\
&\quad - 4y(x^k + \sigma''_{k-1}(x, y)) = x^{k+1} + 2yx^k + 2yx^k - 4yx^k + \tilde{\sigma}_k(x, y) = x^{k+1} + \tilde{\sigma}_k(x, y),
\end{aligned}$$



где

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_k(x, y) = x \cdot \pi_{k-1}(x, y) + 2y\sigma_{k-1}(x, y) + 2y\sigma'_{k-1}(x, y) - 4y\sigma''_{k-1}(x, y) + 2y \cdot k \cdot x^{k-1} \\ + \text{слагаемые степени } \leq k-1. \end{aligned}$$

Таким образом, свойство (A3) доказано.

Теоремы 1, 2 аналогичны лемме 1 работы [28].

**2.3.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $\mathcal{B} = \{p_k(z)\}_{k=0}^\infty$  — система полиномов  $p_k(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Система  $\mathcal{B}$  называется *системой псевдостепеней*, если для нее выполнены свойства (A1), (A2), (A3).

**ЗАМЕЧАНИЕ 3.** В частности, система  $\{\pi_k(z)\}_{k=0}^\infty$  является системой псевдостепеней. Псевдостепени  $\{p_k(z)\}_{k=0}^\infty$  являются дискретным аналогом классических аналитических функций  $\{\zeta^k\}_{k=0}^\infty$  и будут активно использоваться в дальнейшем.

### § 3. Соотношения между классическими аналитическими и дискретными аналитическими функциями

**3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $f(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ ,  $p_k(z)$  — некоторая система псевдостепеней. По аналогии с классической теорией равенство

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z) \quad (26)$$

называется *тейлоровским разложением* функции  $f(z)$  на  $\mathbb{G}^+$ , если оно выполнено для всех  $z \in \mathbb{G}^+$  и ряд, стоящий в правой части (26), сходится абсолютно.

Цайльбергер [5] поставил следующие два вопроса.

(Q1) Всякая ли дискретная аналитическая функция второго рода разлагается в абсолютно сходящийся ряд по псевдостепеням  $p_k(z)$  на  $\mathbb{G}^+$ ?

(Q2) Является ли данное разложение однозначным?

Ответ дан А. Д. Медных в работе [6]. Оказалось, что для дискретных аналитических функций 2-го рода формула (26) имеет место, однако само разложение не является однозначным. Там же в [6] указана степень неединственности. Всякая тождественно нулевая дискретная аналитическая функция  $f(z) \equiv 0$  представима нетривиальным рядом

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_k(z),$$

где  $\{a_k\}_{k=0}^\infty$  — коэффициенты тейлоровского разложения аналитической функции

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left( \frac{\zeta}{1+i} \right)^k$$

такой, что  $F(s) = 0$  при всех  $s \in \mathbb{Z}$ . Такие функции  $F(\zeta)$  принадлежат идеалу  $I$ , порожденному функцией  $\sin \pi \zeta (1+i)$  на множестве целых аналитических функций.

Аналогичные результаты были получены О. А. Даниловым в работе [28] для случая дискретных аналитических функций второго рода, определенных

на дискретных квадратах  $Q_R$ ,  $R > 0$ . Цель данной статьи — установить соответствующие результаты для дискретных параболических функций.

**3.2. Каноническое отображение.** Приведем следующее определение. Целая функция

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$$

является *функцией экспоненциального типа*, если для некоторого действительного  $v > 0$  найдется действительное  $r_0 > 0$  такое, что для каждого действительного  $r \geq r_0$  выполнено неравенство  $M_F(r) < e^{vr}$ , где  $M_F(r) = \sup_{|\zeta| \leq r} |F(\zeta)|$ .

Заметим, что для функции  $e(\zeta, z) = e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y$  при  $\zeta \in \mathbb{C}$ ,  $z \in \mathbb{G}^+$ ,  $r_0 = 2$ ,  $r \geq r_0$  выполнена цепочка неравенств

$$\begin{aligned} M_{e(\zeta, z)} &= \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y| \leq \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{\zeta}|^x \cdot \sup_{|\zeta| \leq r} |e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2|^y \\ &\leq e^{rx} (e^{2r} + 2e^r + 2)^y \leq e^{rx} (e^{2r} + 3e^r)^y \leq e^{rx} (e^{2r} + e^{2r})^y \leq e^{rx} \cdot e^{3ry} = e^{r(x+3y)}. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано, что экспонента  $e(\zeta, z)$  является целой функцией экспоненциального типа переменной  $\zeta$ . Для оценки ее тейлоровских коэффициентов нам понадобится следующая

**Лемма 1** [29, лемма 1, с. 264]. Пусть  $F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k$  и  $M_F(r) = \sup_{|\zeta| \leq r} |F(\zeta)|$ .

Если найдется действительное  $r_0 > 0$  такое, что для каждого действительного  $r \geq r_0$  выполнено неравенство  $M_F(r) < e^{vr}$  для некоторого положительного  $v \in \mathbb{R}$ , то для коэффициентов  $c_k$  ее тейлоровского разложения найдется целое  $k_0$  такое, что для всех целых  $k \geq k_0$  справедлива оценка

$$|c_k| < \left( \frac{ev}{k} \right)^k. \quad (27)$$

Зададим отображение  $\Theta : F(\zeta) \mapsto f(z)$  формулой

$$\Theta \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z). \quad (28)$$

**Теорема 3.** Отображение  $\Theta$  обладает свойством (A4) для любой целой функции

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$$

ассоциированный с ней дискретный ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$$

сходится абсолютно на множестве  $\mathbb{G}^+$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** По лемме 1 для функции  $e(\zeta, z)$  в качестве  $v$  годится  $v = x + 3y$ . Значит, из равенства

$$e(\zeta, z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \zeta^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi_k(z)}{k!} \zeta^k$$

следует оценка

$$|c_k| = \frac{|\pi_k(z)|}{k!} \leq \left( \frac{e(x+3y)}{k} \right)^k \quad (29)$$

при всех целых  $k \geq k_0$ . Из асимптотической формулы Стирлинга  $k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$  при  $k \rightarrow \infty$  получим из (29) неравенство

$$|c_k| \leq \frac{(x+3y)^k}{\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k} \cdot \sqrt{2\pi k}.$$

Отсюда при  $k \geq k_1$  для некоторого  $k_1 \in \mathbb{Z}^+$  получим

$$|c_k| \leq \frac{\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k}{k!} \Rightarrow \frac{|\pi_k(z)|}{k!} \leq \frac{\sqrt{2\pi k}(x+3y)^k}{k!},$$

$$|\pi_k(z)| \leq \sqrt{2\pi k}(x+3y)^k. \quad (30)$$

Так как  $F(\zeta) = \sum a_k \zeta^k$  целая, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = 0$ , откуда для дискретного ряда  $f(z)$  верна оценка

$$|f(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| |\pi_k(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sqrt{2\pi k}(x+3y)^k.$$

Отсюда по признаку Коши получим сходимость ряда  $f(z)$ :

$$0 \leq \sqrt[k]{|a_k| |\pi_k(z)|} \leq \sqrt[k]{|a_k|} \sqrt[2k]{2\pi k}(x+3y). \quad (31)$$

Правая часть  $\sqrt[k]{|a_k|} \sqrt[2k]{2\pi k}(x+3y)$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$  для любого  $z \in \mathbb{G}^+$ , значит, ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \sqrt{2\pi k}(x+3y)^k$  сходится, откуда вытекает сходимость дискретного ряда  $f(z)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ 4.** В силу линейности оператора  $\Theta$  и абсолютной сходимости ряда  $(\Theta F)(z)$  при  $z \in \mathbb{G}^+$  можно утверждать, что  $\Theta$  является оператором эволюции на  $\mathbb{G}^+$ , т. е.  $f(z) = (\Theta F)(z)$  является решением разностного уравнения  $f(z+i) - f(z) = f(z+2) - 2f(z+1) + f(z)$  с начальным условием  $f(x, 0) = (\Theta F)(x, 0) = F(x)$ , где  $x \in \mathbb{Z}^+$ , а  $F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$  — целая функция.

Действительно, из абсолютной сходимости ряда

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad \zeta \in \mathbb{C},$$

имеем абсолютную сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

при  $x = 0, 1, \dots$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} Lf(z) &= -f(z+i) + f(z+2) - 2f(z+1) + 2f(z) \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+i) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+2) - 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+1) + 2\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\pi_k(z+i) + \pi_k(z+2) - 2\pi_k(z+1) + 2\pi_k(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L\pi_k(z) = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $L\pi_k(z) = 0$ .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Следующее замечание принадлежит рецензенту. Абсолютную сходимость функции  $(\Theta F)(z)$  при  $z \in \mathbb{G}^+$  можно показать следующим образом. Повторно применяя формулу  $f(z+i) - f(z) = f(z+2) - 2f(z+1) + f(z)$ , представим  $f(x, y)$  в виде

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{2y} \alpha_k f(x+k, 0),$$

где  $\alpha_k$  — некоторые константы, не зависящие от  $x$ .

В силу абсолютной сходимости ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

при  $x = 0, 1, \dots$  получим, что ряд

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(x, y)$$

абсолютно сходится как конечная сумма абсолютно сходящихся рядов.

**3.3. Соотношение между классическими аналитическими и дискретными параболическими функциями.** Обозначим через  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  множество целых функций. Свойство (A4) теоремы 3, установленное для канонического отображения  $\Theta$  из множества  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  в множество дискретных рядов, является ключевым в дальнейшем изложении. Оно позволяет установить соотношение между значениями функций  $\{F(\zeta), \zeta = 0, 1, \dots\}$  и  $\{f(z), z = 0, 1, \dots\}$ .

**Теорема 4.** Пусть  $F(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ,

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k, \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z), \quad z \in \mathbb{G}^+,$$

— ассоциированный с  $F(\zeta)$  дискретный ряд. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) имеет место равенство

$$f(z) = f(x+iy) = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) F(s), \quad (32)$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\xi^x (\xi^2 - 2\xi + 2)^y}{\xi^{s+1}} d\xi, \quad (33)$$

а  $\Gamma$  — контур, содержащий внутри себя 0;

2)  $f(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим тейлоровское разложение для функции  $e(\zeta, z) = e^{\zeta x} (e^{2\zeta} - 2e^{\zeta} + 2)^y$  по степеням  $\xi = e^{\zeta}$ . Получим равенство

$$e(\xi, z) = \xi^x (\xi^2 - 2\xi + 2)^y = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) \xi^s, \quad (34)$$

где

$$c(x, y, s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\xi^x (\xi^2 - 2\xi + 2)^y}{\xi^{s+1}} d\xi,$$

а  $\Gamma$  — контур, содержащий внутри  $\xi = 0$ . По формуле (20) с помощью равенства (34) получим

$$\pi_k(z) = \partial_0^k e(\zeta, z) = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) \partial_0^k (e^{\zeta^s}) = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) s^k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) s^k \\ &= \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = \sum_{s=0}^{x+2y} c(x, y, s) F(s). \end{aligned}$$

Этот ряд сходится как конечная сумма сходящихся рядов для любого  $z \in \mathbb{G}^+$ , поскольку  $F(\zeta)$  — целая функция.

Докажем утверждение 2. Имеем

$$\begin{aligned} Lf(z) &= -f(z+i) + f(z+2) - 2f(z+1) + 2f(z) \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+i) + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+2) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z+1) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-\pi_k(z+i) + \pi_k(z+2) - 2\pi_k(z+1) + 2\pi_k(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k L\pi_k(z) = 0, \end{aligned}$$

поскольку  $L\pi_k(z) = 0$ .

**3.3.1.** Отметим следующее важное следствие теоремы 4.

**Следствие 1.** Пусть верны условия теоремы 4. Тогда для всех целых неотрицательных  $k$  верны соотношения

$$f(k) = F(k). \quad (35)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку ряд  $F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$  абсолютно сходится при любом  $\zeta \in \mathbb{C}$  и по замечанию 2  $\pi_k(x, 0) = x^k$ , имеем

$$F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k = f(s)$$

для всех  $s = 0, 1, 2, \dots$

Теорема 4 дает регулярный способ получения функций  $f(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ . Для этого достаточно взять произвольную функцию

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$$

и с помощью отображения  $\Theta$  получить

$$f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Полученный дискретный ряд принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  по теореме 4.

Возникает вопрос: всякая ли функция  $f(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  может быть образом  $(\Theta F)(z)$  при некоторой целой функции  $F(\zeta)$ , т. е. является ли отображение

$$\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$$

сюрьективным?

### 3.4. Сюръективность отображения $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .

**3.4.1.** Заметим, что всякая функция  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  однозначно восстанавливается по своим значениям на множестве  $z = 0, 1, 2, \dots$ . Действительно, по формуле (12), зная  $f(k)$ ,  $f(k+1)$ ,  $f(k+2)$ , последовательно вычисляем  $f(k+i)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Аналогично по значениям  $f(k+i)$ ,  $f(k+1+i)$ ,  $f(k+2+i)$  вычисляем  $f(k+2i)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и т. д. Поэтому если  $f(z)$  и  $g(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  и  $f(z) = g(z)$  при  $z = 0, 1, 2, \dots$ , получим совпадение  $f(z) = g(z)$  при всех  $z \in \mathbb{G}^+$ .

Для доказательства утверждения, что отображение  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  сюръективно, нам понадобится следующая теорема 1 из [30, с. 335]. Аналогичный результат есть в [31, с. 202].

**Теорема Гельфонда — Шеффера.** Для любой последовательности чисел  $a_l \in \mathbb{C}$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ , существует бесконечное множество целых функций  $\varphi(\zeta)$  таких, что  $\varphi(l) = a_l$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$ .

### 3.4.2. Основные результаты.

**Теорема 5.** Отображение  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ , определенное формулой (28), сюръективно.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $f(z) \in \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ . Рассмотрим множество значений  $\{f(0), f(1), f(2), \dots\}$ . По теореме Гельфонда — Шеффера найдется целая функция  $F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k$  такая, что  $F(k) = f(k)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . По следствию 1 из п. 3.3.1 для функции

$$\tilde{f}(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z)$$

из (23) получим равенства  $\tilde{f}(k) = F(k)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Функция  $\tilde{f}(z)$  принадлежит  $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  по теореме 4 и, значит,  $f(k) = \tilde{f}(k)$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , т. е. функции  $f(k)$  и  $\tilde{f}(k)$  совпадают при всех  $z \in \mathbb{G}^+$ .  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ 6.** Пусть

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k \in \mathcal{A}(\mathbb{C}), \quad f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k(z).$$

Соотношение (35) и теорема 5 показывают, что  $f(z) = (\Theta F)(z) \equiv 0$  при  $z \in \mathbb{G}^+$  тогда и только тогда, когда  $F(s) = 0$  при  $s = 0, 1, 2, \dots$ .

Для линейного отображения  $\Theta: \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$  дадим полное описание ядра  $\text{Ker } \Theta$ . Воспользуемся классической функцией  $\Gamma(\zeta) = \int_0^{+\infty} t^{\zeta-1} e^{-t} dt$ . Тогда функция  $\frac{1}{\Gamma(-\zeta)}$  целая и имеет простые нули только в точках  $\zeta = 0, 1, 2, \dots$ .

**Теорема 6.** Ядро  $\text{Ker } \Theta$  отображения  $\Theta : \mathcal{A}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ , определенного формулой (28), состоит из целых функций  $F(\zeta)$ , имеющих вид

$$F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}, \quad (36)$$

где  $H(\zeta)$  — произвольная целая функция.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}$ , то очевидно, что  $F(k) = 0$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$  и по (35)  $(\Theta F)(k) = 0$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , следовательно,  $(\Theta F)(z) \equiv 0$  при  $z \in \mathbb{G}^+$ .

Обратно, пусть  $F(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$  такова, что  $F(k) = 0$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Положим

$$H(\zeta) = F(\zeta) \cdot \Gamma(-\zeta). \quad (37)$$

В точках  $\zeta = k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , функция  $H(\zeta)$  имеет устранимые особенности. Положим  $H(k) = \lim_{\zeta \rightarrow k} F(\zeta) \cdot \Gamma(-\zeta)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Функция  $H(\zeta)$  принадлежит  $\mathcal{A}(\mathbb{C})$  и тем самым  $F(\zeta) = \frac{H(\zeta)}{\Gamma(-\zeta)}$ , где  $H(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ .  $\square$

Таким образом, ядро  $\text{Ker } \Theta$  можно записать в виде

$$\text{Ker } \Theta = \frac{1}{\Gamma(-\zeta)} \mathcal{A}(\mathbb{C}). \quad (38)$$

### 3.5. Примеры тейлоровского разложения в $\mathcal{D}(\mathbb{G}^+)$ .

#### 3.5.1. Пусть

$$F(\zeta) = \sin \pi \zeta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\pi \zeta)^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Поскольку  $\sin \pi k = 0$  при  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то  $(\Theta(\sin \pi \zeta))(z) \equiv 0$  при  $z \in \mathbb{G}^+$ . Следовательно,

$$0 \equiv (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \pi_{2k+1}(z). \quad (39)$$

Формула (39) дает пример функции  $f(z) \equiv 0$ ,  $z \in \mathbb{G}^+$ , имеющей нетривиальное разложение Тейлора.

**3.5.2.** Определим  $f(k) = (-1)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и построим ее продолжение на  $\mathbb{G}^+$  по формуле (12). Тогда

$$f(k+i) = 5(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad f(k+2i) = 5^2(-1)^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

и аналогично для других слоев.

Для функции  $F(\zeta) = e^{i\pi\zeta}$ , очевидно,  $F(k) = e^{i\pi k} = (-1)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Поскольку

$$F(\zeta) = e^{i\pi\zeta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi\zeta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k \zeta^k}{k!},$$

имеем

$$f(z) = (\Theta F)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^k}{k!} \cdot \pi_k(z).$$

**Благодарность.** Авторы глубоко признательны рецензенту за качественный анализ нашей работы. Его замечания способствовали значительному улучшению текста статьи и упрощению доказательств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Isaacs R. F.* A finite difference function theory // Univ. Nac. Tucuman. Revista A. 1941. V. 2. P. 177–201.
2. *Ferrand J.* Fonctions preharmoniques et fonctions preholomorphes // Bull. Sci. Math., 2<sup>nd</sup> Ser. 1944. V. 68. P. 152–180.
3. *Duffin R. J.* Basic properties of discrete analytic functions // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 335–363.
4. *Соболев С. Л.* Об одном разностном аналоге полигармонического уравнения // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 1. С. 54–57.
5. *Zeilberger D.* A new basis for discrete analytic polynomials // J. Austral. Math. Soc. 1977. V. 23 (Ser. A). P. 95–104.
6. *Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции и ряд Тейлора // Теория отображений, ее обобщения и приложения. Киев: Наук. думка, 1982. С. 137–144.
7. *Duffin R. J.* Potential theory on a rhombic lattice // J. Combinatorial Theory. 1968. V. 5. P. 258–272.
8. *Mercat Ch.* Discrete Riemann surfaces and the Ising model // Commun. Math. Phys. 2001. V. 218. P. 177–216.
9. *Kenyon R.* The Laplacian and Dirac operators on critical planar graphs // Invent. Math. 2002. V. 150, N 2. P. 409–439.
10. *Hidalgo R. A. Godoy M. M.* Introduccion a las estructuras de superficies de Riemann discretas. 2007. <http://docencia.mat.utfsm.cl/~rhidalgo/files/discreta.pdf>.
11. *Dynnikov I. A., Novikov S. P.* Geometry of triangle equation on two-manifolds // Moscow Math. J. 2003. V. 3, N 2. P. 419–438.
12. *Thurston W. P.* The finite Riemann mapping theorem // Invited talk at international symposium on the occasion of the proof of the Bieberbach conjecture. Purdue University, 1985.
13. *Nijhoff F., Capel H.* The discrete Korteweg-de Vries equation // Acta Appl. Math. 1995. V. 39, N 1–3. P. 133–158.
14. *Bobenko A. I., Suris Y. B.* Integrable equations on quad-graphs // Internat. Math. Res. Notices. 2002. V. 11. P. 573–611.
15. *Beardon A. F., Stephenson K.* The uniformization theorem for circle packings // Indiana Univ. Math. J. 1990. V. 39, N 4. P. 1383–1425.
16. *Dubejko T., Stephenson K.* Circle packing: experiments in discrete analytic function theory // Experiment. Math. 1995. V. 4, N 4. P. 307–348.
17. *Schramm O.* Circle patterns with the combinatorics of the square grid // Duke Math. J. 1997. V. 86, N 2. P. 347–389.
18. *Stephenson K.* Circle packing and discrete analytic function theory // Handbook of complex analysis: geometric function theory. Amsterdam: North-Holland., 2002. V. 1. P. 333–370.
19. *Rodin B., Sullivan D.* The convergence of circle packings to the Riemann mapping // J. Differ. Geom. 1987. V. 26, N 2. P. 349–360.
20. *Rodin B., Marden A.* On Thurston's formulation and proof of Andreiev's theorem // Lect. Notes Math. 1990. V. 1435. P. 103–115.
21. *He Z.-X., Schramm O.* The  $C^\infty$ -convergence of hexagonal disk packings to the Riemann map // Acta Math. 1998. V. 180, N 2. P. 219–245.
22. *Bobenko A., Springborn B.* Variational principles for circle patterns and Koebe's theorem // Trans. Am. Math. Soc. 2004. V. 356, N 2. P. 659–689.
23. *Bobenko A. I., Mercat Ch., Suris Y. B.* Linear and nonlinear theories of discrete analytic functions. Integrable structure and isomonodromic Green's function // J. Reine Angew. Math. 2005. V. 583. P. 117–161.
24. *Runge C.* Über eine Methode, die partielle Differentialgleichung  $\Delta u = \text{constant}$  numerisch zu integrieren. (German) JFM 38.0433.01 // Zs. für Math. u. Phys. 1908. V. 56. P. 225–232.
25. *Микеладзе Ш. Е.* О численном решении дифференциального уравнения // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 4. С. 177–179.
26. *Панов Д. Ю.* Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. М.: АН СССР, 1938.
27. *Годунов С. К., Рябенский В. С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1972.
28. *Данилов О. А.* Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, № 4. С. 33–39.
29. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976.



30. Sheffer I. M. On entire function interpolation // Am. J. Math. 1927. V. 49, N 3. P. 329–342.  
31. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

*Поступила в редакцию 27 декабря 2024 г.*

*После доработки 12 мая 2025 г.*

*Принята к публикации 25 мая 2025 г.*

Лу Сяоцин (ORCID 0009-0000-2715-9861)  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
lsaocin@gmail.com

Данилов Олег Александрович  
Новосибирский государственный университет,  
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090  
my@odanilov67.ru

Медных Александр Дмитриевич (ORCID 0000-0003-3084-1225)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
smedn@mail.ru

## МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ, ЗАДАЮЩИХ ЛИПШИЦЕВЫ ГРАФИКИ НА ДВУХСТУПЕНЧАТЫХ ГРУППАХ КАРНО

М. Б. Карманова

**Аннотация.** Выведен явный вид субримановых дифференциалов отображений-графиков, являющихся липшицевыми во внутреннем смысле, на двухступенчатых группах Карно, и описаны дифференциальные и метрические свойства отображений, задающих такие графики.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.609

**Ключевые слова:** липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, двухступенчатая группа Карно, субриманов дифференциал.

Статья продолжает исследования [1] о свойствах липшицевых графиков на двухступенчатых группах Карно. В задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [2–5] и цитируемых источниках) локально представимы в виде графиков. Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [6–8]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [9–16] и др.). Нетрудно проверить, что в силу особенностей строения групп Карно и других субримановых структур свойство липшицевости (во внутреннем смысле) отображения не переносится на его график, и наоборот. В частности, график липшицевой функции не всегда является таковым даже на модельных случаях групп Гейзенберга. В связи с этим возникают проблемы при выводе аналогов дифференциальных и метрических свойств поверхностей-образов. Автором предложен новый подход к решению такой проблемы в [17–20] и др. работах.

В [1] (см. также [21], где исследован модельный случай) решается обратный вопрос: если график некоторого отображения является липшицевым, то какими свойствами обладает определяющее его отображение? В результате получено аналитическое описание классов отображений, гарантирующих липшицевость во внутреннем смысле построенных по ним графиков. С помощью выведенного в [1] критерия мы в данной работе получаем явный вид субриманова дифференциала липшицева отображения-графика и формулу для вычисления меры соответствующей поверхности-образа, а также выводим в явном виде новые

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

дифференциальные свойства определяющего такой график отображения. Кроме того, при некоторых дополнительных предположениях установлена формула площади для образов таких отображений.

Прежде всего опишем основные объекты исследования и их свойства.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [22]. *Двухступенчатая группа Карно* — это связная односвязная стратифицированная группа Ли  $\mathbb{G}$ , алгебра Ли  $V$  которой представима в виде  $V = V_1 \oplus V_2$ ,  $[V_1, V_1] = V_2$ ,  $[V_1, V_2] = \{0\}$ .

Если базисное поле  $X_l$  принадлежит  $V_k$ , то его *степень*  $\deg X_l$  равна  $k$ ,  $l = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, 2$ . Здесь и далее  $N$  — топологическая размерность группы  $\mathbb{G}$ .

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств  $V_1$  или  $V_2$ . Размерность каждого  $V_k$  обозначается символом  $\dim V_k$ ,  $k = 1, 2$ . Групповая операция определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа. Если  $x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(\mathbf{0})$ ,  $y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(\mathbf{0})$ , где  $\mathbf{0}$  — единица группы  $\mathbb{G}$ , то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x) = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(\mathbf{0}), \quad (1)$$

где  $z_j = x_j + y_j$  для  $\deg X_j = 1$ ,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\mu, \beta: \deg X_\mu = \deg X_\beta = 1} F_{\mu, \beta}^j x_\mu y_\beta \quad (2)$$

при  $\deg X_j = 2$ . Значения  $\{F_{\mu, \beta}^j\}_{j, \mu, \beta}$  называются *структурными константами* и не зависят от точек.

Аналог расстояния на группе Карно вводится следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см., например, [17]). Пусть  $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$ ,  $v, w \in \mathbb{G}$ . Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j = 1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j = 2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Множество  $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$  называется *шаром относительно  $d_2$  радиуса  $r > 0$  с центром в точке  $v$*  и обозначается символом  $\text{Box}_2(v, r)$ .

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что  $d_2$  является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности, и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Рассмотрим точку  $u \in \mathbb{G}$  и  $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ . Определим отображение  $\theta_u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$  следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что  $\theta_u$  — гладкий диффеоморфизм. Набор  $\{v_i\}_{i=1}^N$  называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода (относительно  $u \in \mathbb{G}$ )* точки  $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть  $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$  — группы Карно,  $E \subset \mathbb{G}$  и  $\varphi : E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ . Будем говорить, что оно *липицево во внутреннем смысле*, или *липицево в субримановом смысле*, если существует константа  $0 < L < \infty$  такая, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) < L d_2(x, y),$$

где  $\tilde{d}_2$  — квазиметрика на  $\tilde{\mathbb{G}}$ , построенная по такому же принципу, как в определении 2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 ([23]; см. также [24]). Пусть  $\mathbb{G}$  и  $\tilde{\mathbb{G}}$  — группы Карно,  $\Omega \subset \mathbb{G}$  и  $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ . Отображение  $\varphi$  является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке  $x \in \Omega$ , если существует горизонтальный гомоморфизм  $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$  такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

*hc-Дифференциал* (или *субриманов дифференциал*)  $\mathcal{L}_x$  обозначается символом  $\tilde{D}\varphi(x)$ .

Хаусдорфова размерность  $\mathbb{G}$  относительно  $d_2$  равна  $\sum_{k=1}^2 k \dim V_k$  и обозначается символом  $\nu$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Значение *субримановой меры* для  $A \subset \mathbb{G}$  равно

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^2 \omega_{\dim V_k} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где  $\omega_m$  обозначает объем единичного шара в  $\mathbb{R}^m$ , а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества  $A$ .

Несмотря на нестандартное определение (в определение  $\mathcal{H}^\nu(A)$  добавляется условие  $x_i \in A, i \in \mathbb{N}$ ), функция множества  $\mathcal{H}^\nu$  является мерой. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств (см., например, [25]).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 7. Пусть  $\tilde{\mathbb{G}}$  — группа Карно. Обозначим ее топологическую размерность и размерности составляющих алгебру Ли подпространств, отображение нормальных координат, а также, определенную аналогично  $d_2$  квазиметрику теми же символами, что и для  $\mathbb{G}$ , только со знаком  $\sim$ .

Опишем условия решения задачи.

**Предположение 8.** Пусть  $\mathbb{G}$  и  $\tilde{\mathbb{G}}$  — двухступенчатые группы Карно с базисными полями  $\{X_i\}_{i=1}^N$  и  $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$  соответственно, которые являются подмножествами двухступенчатой группы Карно  $\hat{\mathbb{G}}$  топологической размерности  $\hat{N} = N + \tilde{N}$  со структурными константами  $\{F_{\mu,\beta}^j\}_{j,\mu,\beta}$  и квазиметрикой  $\hat{d}_2$ , заданной, как в определении 2. Пусть еще базисные векторные поля  $\{\hat{X}_i\}_{i=1}^{\hat{N}}$  на  $\hat{\mathbb{G}}$  таковы, что, во-первых,  $\dim \hat{V}_k = \dim V_k + \dim \tilde{V}_k, k = 1, 2$ , и, во-вторых,

$$\begin{aligned} \hat{X}_1|_{\mathbb{G}} &= X_1, \dots, \hat{X}_{\dim V_1}|_{\mathbb{G}} = X_{\dim V_1}, \\ \hat{X}_{\dim \hat{V}_1+1}|_{\mathbb{G}} &= X_{\dim V_1+1}, \dots, \hat{X}_{\dim \hat{V}_1+\dim V_2}|_{\mathbb{G}} = X_N \end{aligned}$$

и

$$\hat{X}_{\dim V_1+1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_1, \dots, \hat{X}_{\dim \hat{V}_1}|_{\tilde{\mathbb{G}}} = \tilde{X}_{\dim \tilde{V}_1},$$

$$\widehat{X}_{\dim \widehat{V}_1 + \dim V_2 + 1}|_{\widehat{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\dim \widetilde{V}_1 + 1}, \dots, \widehat{X}_{\widehat{N}}|_{\widehat{\mathbb{G}}} = \widetilde{X}_{\widetilde{N}}.$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 9. Пусть  $\mathbb{G}$  и  $\widetilde{\mathbb{G}}$  — двухступенчатые группы Карно,  $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$  и  $u, w \in \mathbb{G}$ . Обозначим координаты элемента  $\varphi(w)$  относительно  $\varphi(u)$  символами  $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$ . Иными словами,

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widetilde{N}} \varphi_u^k(w) \widetilde{X}_k\right)(\varphi(u)).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 10. Положим

$$w_H = \exp\left(\sum_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta X_\beta\right)(u) \quad \text{и} \quad w_T = \exp\left(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N w_\lambda X_\lambda\right)(u)$$

для  $w = \exp\left(\sum_{j=1}^N w_j X_j\right)(u)$ . Положим также

$$\varphi_u^H(w_H) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\dim \widetilde{V}_1} \varphi_u^k(w_H) \widetilde{X}_k\right)(\varphi(u))$$

и

$$\varphi_u^T(w_T) = \exp\left(\sum_{k=\dim \widetilde{V}_1+1}^{\widetilde{N}} \varphi_u^k(w_T) \widetilde{X}_k\right)(\varphi(u)).$$

Следующий результат является основой для решения поставленной задачи о дифференциальных свойствах.

**Теорема 11** [1]. Пусть для двухступенчатых групп Карно  $\mathbb{G}$ ,  $\widetilde{\mathbb{G}}$  и  $\widehat{\mathbb{G}}$  выполнены условия предположения 8 и  $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$  — некоторое отображение. Тогда график  $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ , построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{j=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} \varphi_{j-\dim V_1}(w) \widehat{X}_j + \sum_{j=\dim \widehat{V}_1+\dim V_2+1}^{\widehat{N}} \varphi_{j-N}(w) \widehat{X}_j\right)(w),$$

где

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{N}} \varphi_j(w) \widetilde{X}_j\right)(\mathbf{0}),$$

является липшицевым относительно  $d_2$  и  $\widehat{d}_2$  тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции  $\varphi_j$  липшицевы во внутреннем смысле, если  $j \leq \dim \widetilde{V}_1$ .
2. Если  $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ , то верно

$$\sum_{\mu: \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu - \dim V_1}(u) = 0 \quad (3)$$

для всех  $\beta = 1, \dots, \dim V_1$  и  $u \in \mathbb{G}$ .

3. Для  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$  и точек  $u, w_H \in \mathbb{G}$  таких, что

$$w_H = \exp \left( \sum_{\beta=1}^{\dim V_1} w_\beta X_\beta \right) (u),$$

функция  $w_H \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_H)$  дифференцируема (в классическом смысле) в  $u$ , ее дифференциал равен

$$\sum_{\beta=1}^{\dim V_1} \left( \sum_{\mu: \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]} 2F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu - \dim V_1}(u) \right) w_\beta,$$

а величина  $o(1)$  из определения дифференцируемости не превосходит

$$Q \cdot \sqrt{\sum_{\beta=1}^{\dim V_1} (w_\beta)^2}, \text{ где константа } 0 < Q < \infty \text{ не зависит от } u.$$

Если же

$$w_T = \exp \left( \sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N w_\lambda X_\lambda \right) (u),$$

то

$$|\varphi_u^{k-N}(w_T)| \leq C \cdot \sqrt{\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N (w_\lambda)^2}, \quad C < \infty.$$

Перейдем к описанию и доказательству основного результата работы.

**Теорема 12.** Пусть для двухступенчатых групп Карно  $\mathbb{G}$ ,  $\widetilde{\mathbb{G}}$  и  $\widehat{\mathbb{G}}$  выполнены условия предположения 8 и  $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$  — такое отображение, что его график  $\varphi_\Gamma: \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$  является липшицевым во внутреннем смысле, а  $u \in \mathbb{G}$  — произвольная точка области определения  $\varphi$ . Тогда функции  $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widetilde{N}}$  обладают следующими свойствами.

1. Если  $k = 1, \dots, \dim \widetilde{V}_1$ , то каждая функция  $w \mapsto \varphi_u^k(w)$  является  $hc$ -дифференцируемой в точках  $hc$ -дифференцируемости  $\varphi_\Gamma$  и значение ее  $hc$ -дифференциала в точке  $u \in \mathbb{G}$  на элементе  $w$  совпадает с  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_{k+\dim V_1}$ .

2. Если  $k = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ , то каждая функция  $w_H \mapsto \varphi_u^k(w_H)$  дифференцируема по  $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$  дважды, причем значение второго дифференциала в точке  $u$  на элементе  $w_H$  равно

$$\sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^{k+N} (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_\mu w_\beta.$$

3. Если  $k = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ , то функция  $w_T \mapsto \varphi_u^k(w_T)$  дифференцируема по  $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$  в точках  $u$   $hc$ -дифференцируемости отображения-графика  $\varphi_\Gamma$ . Кроме того, значение дифференциала каждой такой функции в точке  $u \in \mathbb{G}$  на элементе  $w_T$  равно  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_{k+N} = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T \rangle)_{k+N}$ .

Кроме того, субриманов дифференциал липшицева отображения-графика в точках, где он существует, имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 \\ D\varphi_u^H(u) & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} \\ 0 & D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix},$$

где  $E_l$  — единичная матрица размера  $l$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $u, w \in \mathbb{G}$ , где  $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(u)$ . Тогда [1]

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widehat{N}} s_k \widehat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где  $s_k = w_k$ , если  $k = 1, \dots, \dim V_1$ , и  $s_k = \varphi_{k-\dim V_1}(w) - \varphi_{k-\dim V_1}(u) = \varphi_u^{k-\dim V_1}(w)$ , если  $k = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ . Тогда, так как

$$s_k = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k + o(d_2(u, w)),$$

то

$$\varphi_u^{k-\dim V_1}(w) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k + o(d_2(u, w)) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_k + o(d_2(u, w)),$$

где

$$w_H = \exp\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} w_i X_i\right)(u), \quad k = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1.$$

Иными словами, каждая функция  $\varphi_u^{k-\dim V_1}(w)$  дифференцируема в субримановом смысле в точках субримановой дифференцируемости  $\varphi_\Gamma$ , и значение ее  $h$ -дифференциала на элементе  $w$  равно  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_k$ ,  $k = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ . Кроме того, полагая  $w = w_H$ , выводим

$$\varphi_u^{k-\dim V_1}(w_H) = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_k + o(d_2(u, w_H)),$$

где  $d_2(u, w_H) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2}$ . Отсюда следует, что отображение  $w_H \mapsto \varphi_u^H(w_H)$  дифференцируемо в точке  $u$  и поэтому первый блок матрицы субриманова дифференциала  $\varphi_\Gamma$  размера  $\dim \widehat{V}_1 \times \dim V_1$  равен

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} \\ D\varphi_u^H(u) \end{pmatrix}.$$

Если же  $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ , то

$$s_k = w_{k-\dim \widehat{V}_1} - \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta.$$

Но так как для этих значений  $k$  верно (3), то справедливо и

$$\sum_{\mu: \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu-\dim V_1}(w) = 0$$

для всех  $\beta = 1, \dots, \dim V_1$ , поэтому  $s_k = w_{k-\dim \widehat{V}_1}$  для  $k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ .

Пусть теперь  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} s_k = \varphi_u^{k-N}(w) - \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k(\varphi_{\mu-\dim V_1}(w) - \varphi_{\mu-\dim V_1}(u))w_\beta \\ - 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu-\dim V_1}(u)w_\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда для  $w$  и  $w_H$  в силу (2) верно  $w = \exp\left(\sum_{i=\dim V_1+1}^N w_i X_i\right)(w_H)$ . Преобразуем (4) через значения  $\varphi(w_H)$ . Так как

$$\begin{aligned} \varphi_u^{k-N}(w) &= \varphi_u^{k-N}(w_H) + \varphi_{w_H}^{k-N}(w) \\ &+ \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \lambda}^k \varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H) \varphi_{w_H}^{\lambda-\dim V_1}(w), \end{aligned} \quad (5)$$

то выводим

$$\begin{aligned} s_k &= \varphi_u^{k-N}(w_H) + \varphi_{w_H}^{k-N}(w) + \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \lambda}^k \varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H) \varphi_{w_H}^{\lambda-\dim V_1}(w) \\ &- \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H) w_\beta - \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{w_H}^{\mu-\dim V_1}(w) w_\beta \\ &- 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu-\dim V_1}(u) w_\beta. \end{aligned}$$

Предположим, что  $u$  — точка, в которой существует субриманов дифференциал  $\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)$ . Тогда из определения 5 и из (2) следует, что

$$|s_k - (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k| = o(d_2(u, w)^2).$$

Полагая  $w = w_H$ , получаем  $d_2(u, w_H)^2 = \sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2$ , и  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k = 0$  для всех  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ , поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_u^{k-N}(w_H) - 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{\mu-\dim V_1}(u) w_\beta \\ - \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H) w_\beta = o\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_u^{\mu-\dim V_1}(w_H) w_\beta \\ &= \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k ((\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_\mu + o(d_2(u, w_H))) w_\beta \\ &= \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_\mu w_\beta + o(d_2(u, w_H)^2), \end{aligned} \quad (7)$$

то из (6) выводим усиление теоремы 11, а именно, что каждая функция  $w_H \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_H)$  дифференцируема по  $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$  дважды, причем значение второго дифференциала в точке  $u$  на элементе  $w_H$  равно

$$\sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_H \rangle)_\mu w_\beta$$



для всех  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ .

Далее, имеем

$$\begin{aligned} s_k &= \varphi_{w_H}^{k-N}(w) + \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \lambda}^k \varphi_u^{\mu - \dim V_1}(w_H) \varphi_{w_H}^{\lambda - \dim V_1}(w) \\ &\quad - \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1 + 1, \dim \widehat{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^k \varphi_{w_H}^{\mu - \dim V_1}(w) w_\beta + o\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2\right) \\ &= (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k + o(d_2(u, w)^2). \end{aligned}$$

В полученном соотношении  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k$  не зависит от координат элемента  $w_H$ . Поэтому рассмотрим случай, когда все эти координаты равны нулю. Тогда получим  $w_H = u$ ,  $w = w_T$  и поэтому

$$(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k + o(d_2(u, w_T)^2) = \varphi_u^{k-N}(w_T), \quad (8)$$

где  $w_T = \exp\left(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N w_\lambda X_\lambda\right)(u)$  (см. также теорему 11). Так как  $d_2(u, w_T)^2 = \sqrt{\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N (w_\lambda)^2}$ , то (8) означает, что функция

$$w_T \mapsto \varphi_u^{k-N}(w_T)$$

дифференцируема по  $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$  в точках  $u$  субримановой дифференцируемости отображения-графика  $\varphi_\Gamma$  для всех  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ . Кроме того, значение ее дифференциала в точке  $u$  на элементе  $w_T$  равно  $(\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_k = (\widehat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T \rangle)_k$ ,  $k = \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2, \dots, \widehat{N}$ .

Отсюда и из (2) следует, что отображение  $w_T \mapsto \varphi_u^T(w_T)$  является дифференцируемым в точке  $u$ , и поэтому второй блок матрицы субриманова дифференциала  $\varphi_\Gamma$  размера  $\dim \widehat{V}_2 \times \dim V_2$  равен

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_2} \\ D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, мы вывели дифференциальные свойства функций  $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\widehat{N}}$ , и получили вид субриманова дифференциала отображения-графика  $\varphi_\Gamma$  в точках  $u \in \mathbb{G}$  его  $hc$ -дифференцируемости:

$$\begin{pmatrix} E_{\dim V_1} & 0 \\ D\varphi_u^H(u) & 0 \\ 0 & E_{\dim V_2} \\ 0 & D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Теорема доказана.

**ПРИМЕР 13.** Пусть  $\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}} \subset \widehat{\mathbb{G}}$  таковы, что  $[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = 0$ , если  $i = 1, \dots, \dim V_1$  и  $j = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$ , а  $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$  липшицево во внутреннем смысле. Тогда (6) имеет вид

$$\varphi_u^{k-N}(w_H) = o\left(\sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2\right).$$

ПРИМЕР 14. Пусть  $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \widehat{\mathbb{G}}$  таковы, что существует ненулевое решение  $(t_{\dim V_1+1}, \dots, t_{\dim \widehat{V}_1})$  у системы уравнений

$$\sum_{\mu=\dim V_1+1}^{\dim \widehat{V}_1} F_{\mu,\beta}^k t_\mu = 0, \quad k = \dim \widehat{V}_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2, \quad \beta = 1, \dots, \dim V_1.$$

Для  $\mu = \dim V_1 + 1, \dots, \dim \widehat{V}_1$  положим  $\varphi_{\mu-\dim V_1} \equiv t_\mu$ . Если же  $\mu = \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2 + 1, \dots, \widehat{N}$ , то для  $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(\mathbf{0})$  определим

$$\varphi_{\mu-N}(w) = \sum_{\beta=1}^{\dim V_1} \left( \sum_{\lambda: \lambda \in [\dim V_1+1, \dim \widehat{V}_1]} 2F_{\lambda,\beta}^\mu \varphi_{\lambda-\dim V_1} \right) w_\beta.$$

для всех  $k > \dim \widehat{V}_1 + \dim V_2$ . Тогда вторые производные  $\varphi_{\mu-N}(w)$  по  $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$  и первые производные  $\varphi_{\mu-N}(w)$  по  $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$  равны нулю.

Из теоремы 12 в качестве следствия получаем формулу площади для липшицевых отображений-графиков. Обратим внимание, что ее вид является аналогичным классическому.

**Теорема 15.** В условиях теоремы 12 справедлива формула площади для отображений-графиков

$$\int_A \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x) d\mathcal{H}^\nu(x) = \mathcal{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где  $A \subset \mathbb{G}$  — измеримое множество,  $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, x)$  совпадает со значением

$$\sqrt{\det(E_{\dim V_1} + (D\varphi_x^H)^*(x)D\varphi_x^H(x)) \cdot (E_{\dim V_2} + (D\varphi_x^T)^*(x)D\varphi_x^T(x))},$$

а  $\mathcal{H}^\nu$  на  $\varphi_\Gamma(\mathbb{G})$  задается аналогично определению 6 и является мерой.

Для получения второго основного результата нам потребуется следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16 [26]. Пусть  $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$  — группы Карно и  $\xi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ . Пусть еще  $\mathfrak{d} : \xi(\mathbb{G}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Будем говорить, что  $\xi$  полиномиально субриманово дифференцируемо, или полиномиально  $h$ -дифференцируемо в  $x \in \mathbb{G}$ , если существует отображение  $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$  такое, что

1)  $\mathfrak{d}(\xi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(d_2(x, y))$  при  $y \rightarrow x$ ;

2)  $\mathcal{L}_x(y) = \theta_{\xi(x)} \circ L_x \circ \theta_x^{-1}(y)$ , где  $L_x$  — оператор с полиномиальными по  $y_1, \dots, y_N$  коэффициентами, а  $y = \theta_x(y_1, \dots, y_N)$ .

Отображение  $\mathcal{L}_x$  называется полиномиальным субримановым дифференциалом, или полиномиальным  $h$ -дифференциалом, отображения  $\xi$  в точке  $x$  и обозначается символом  $\widehat{D}_P \xi(x)$ .

Предположим теперь, что отображение-график  $\varphi_\Gamma$  является контактным отображением класса  $C_H^1$  и липшицевым, т. е. производные  $\varphi_\Gamma$  вдоль горизонтальных полей существуют и непрерывны и, кроме того,  $\text{span}\{X_1\varphi_\Gamma, \dots, X_{\dim V_1}\varphi_\Gamma\} \subset \widehat{V}_1$ . Такие отображения являются непрерывно  $h$ -дифференцируемыми всюду [24]. В этом случае аналог дифференциальных свойств  $\varphi$  можно описать в явном виде.

**Теорема 17.** Пусть выполнены условия теоремы 12 и отображение-график  $\varphi_\Gamma$  является контактным отображением класса  $C_H^1$  и липшицевым.

Тогда  $\varphi$  является полиномиально субриманово дифференцируемым всюду, и для  $u \in \mathbb{G}$  и  $w$  из окрестности точки  $u$  верно

$$\widehat{D}_P \varphi(u) \langle w \rangle = \exp \left( \sum_{k=1}^{\widetilde{N}} P_u^k(w) \widetilde{X}_k \right) (\varphi(u)),$$

где

$$P_u^k(w) = (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_{k+\dim V_1}, \text{ если } k = 1, \dots, \dim \widetilde{V}_1,$$

и

$$\begin{aligned} P_u^k(w) = & 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu+\dim V_1, \beta}^{k+N} \varphi_\mu(u) w_\beta \\ & + \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^{k+N} (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_\mu w_\beta + (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_{k+N}, \end{aligned}$$

если  $k = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $u, w \in \mathbb{G}$ , где  $w = \exp \left( \sum_{i=1}^N w_i X_i \right) (u)$ . В теореме 12 установлено, что

$$\varphi_u^k(w) = (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_{k+\dim V_1} + o(d_2(u, w)) \quad (10)$$

для  $k = 1, \dots, \dim \widetilde{V}_1$ . Обозначим

$$P_u^k(w) = (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_{k+\dim V_1}. \quad (11)$$

Заметим, что для всех  $k = 1, \dots, \dim \widetilde{V}_1$  верно  $P_u^k(w_H) = P_u^k(w)$ , где  $w_H = \exp \left( \sum_{i=1}^{\dim V_1} w_i X_i \right) (u)$ .

Пусть теперь  $k = \dim \widetilde{V}_1 + 1, \dots, \widetilde{N}$ . Из (6) и (7) следует, что для  $w_H$  выполняется

$$\begin{aligned} \varphi_u^k(w_H) = & 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu+\dim V_1, \beta}^{k+N} \varphi_\mu(u) w_\beta \\ & + \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^{k+N} (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w_H \rangle)_\mu w_\beta + o \left( \sum_{i=1}^{\dim V_1} (w_i)^2 \right), \end{aligned}$$

причем  $\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w_H \rangle = \widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle$ . Положим

$$\begin{aligned} P_u^{k,1}(w) = & 2 \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu+\dim V_1, \beta}^{k+N} \varphi_\mu(u) w_\beta \\ & + \sum_{\substack{\mu, \beta: \beta \in [1, \dim V_1], \\ \mu \in [\dim V_1+1, \dim \widetilde{V}_1]}} F_{\mu, \beta}^{k+N} (\widehat{D} \varphi_\Gamma(u) \langle w \rangle)_\mu w_\beta. \quad (12) \end{aligned}$$

Из (5) выводим

$$\begin{aligned} \varphi_u^k(w) &= P_u^{k,1}(w) + \varphi_{w_H}^k(w) \\ &+ \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [1, \dim \tilde{V}_1]}} F_{\mu + \dim V_1, \lambda + \dim V_1}^{k+N} P_u^\mu(w_H) P_{w_H}^\lambda(w) + o(d_2(u, w)^2). \end{aligned}$$

Так как  $P_{w_H}^\lambda(w) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w \rangle)_{\lambda + \dim V_1}$ , то  $P_{w_H}^\lambda(w) = 0$ . Тогда

$$\varphi_u^k(w) = P_u^{k,1}(w) + \varphi_{w_H}^k(w) + o(d_2(u, w)^2). \quad (13)$$

Далее, из (8) следует, что

$$\varphi_{w_H}^k(w) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w \rangle)_{k+N} + o(d_2(w_H, w)^2). \quad (14)$$

По предположению значения  $\hat{D}\varphi_\Gamma(s)$  непрерывны по  $s \in \mathbb{G}$ , поэтому для всякого элемента  $v$  такого, что  $d_2(\mathbf{0}, v) = 1$ , верно (см. обозначение и описание умножения в (1))

$$\tilde{d}_R(\hat{D}\varphi_\Gamma(s)\langle s \cdot v \rangle, \hat{D}\varphi_\Gamma(s')\langle s' \cdot v \rangle) = o(1),$$

где  $\tilde{d}_R$  — расстояние, построенное по риманову тензору на  $\mathbb{G}$ , и  $o(1) \rightarrow 0$  при  $s' \rightarrow s$  равномерно на компактных подмножествах  $\mathbb{G}$ . Следовательно, для  $w_T = \exp\left(\sum_{\lambda=\dim V_1+1}^N w_\lambda X_\lambda\right)(u)$  верно

$$d_R(\hat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w \rangle, \hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T \rangle) = o(1) \cdot d_R(u, w_T),$$

где  $o(1)$  равномерно на компактных подмножествах  $\mathbb{G}$ . Так как  $d_R(u, w_T) \leq K \cdot (d_2(u, w_T)^2)$  для  $K < \infty$  на компактных подмножествах  $\mathbb{G}$ , то

$$|(\hat{D}\varphi_\Gamma(w_H)\langle w \rangle)_{k+N} - (\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T \rangle)_{k+N}| = o(1) \cdot d_2(u, w_T)^2 \quad (15)$$

для  $k = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ . Из (14) и (15) выводим

$$\varphi_{w_H}^k(w) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w_T \rangle)_{k+N} + o(d_2(u, w)^2) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_{k+N} + o(d_2(u, w)^2).$$

Полагая

$$P_u^{k,2}(w) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_{k+N} \quad (16)$$

и  $P_u^k(w) = P_u^{k,1}(w) + P_u^{k,2}(w)$ , с учетом (13) получаем

$$\varphi_u^k(w) = P_u^k(w) + o(d_2(u, w)^2) \quad (17)$$

для всех  $k = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ .

Таким образом, мы получили аппроксимацию функций  $\{\varphi_u^k(w)\}_{k=1}^{\tilde{N}}$  для произвольных  $u \in \mathbb{G}$  и  $w$  из окрестности  $u$ . Осталось показать, что отображение  $w \mapsto \hat{D}_P\varphi(u)\langle w \rangle$ , определенное как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}} P_u^k(w) \tilde{X}_k\right)(\varphi(u)), \quad (18)$$

аппроксимирует значение  $\varphi(w)$  относительно  $\tilde{d}_2$ , т. е. что

$$\tilde{d}_2(\varphi(w), \hat{D}_P\varphi(u)\langle w \rangle) = o(d_2(u, w)),$$

где  $o(1) \rightarrow 0$  при  $w \rightarrow u$ . Для этого воспользуемся формулами групповой операции (см. (2)) и применим их к выражениям (11), (12) и (16).

Пусть

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{l=1}^{\tilde{N}} \delta_l \tilde{X}_l\right) (\hat{D}_P \varphi(u)(w)).$$

Тогда если  $l = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$ , то из (10) и (11) следует, что  $|\delta_l| = o(d_2(u, w))$ .

Пусть теперь  $l = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ . Тогда

$$\delta_l = \varphi_u^l(w) - P_u^l(w) - \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [1, \dim \tilde{V}_1]}} F_{\mu + \dim V_1, \lambda + \dim V_1}^{l+N} \varphi_u^\mu(w) P_u^\lambda(w).$$

Из (17) следует, что  $|\varphi_u^l(w) - P_u^l(w)| = o(d_2(u, w)^2)$ . Далее, из (10), (11), антисимметричности  $F_{\alpha, \beta}^j = -F_{\beta, \alpha}^j$  всех структурных констант и того, что в силу теоремы 11

$$\max\{|\varphi_u^\mu(w)|, |P_u^\lambda(w)|\} \leq L \cdot d_2(u, w)$$

для всех  $\mu, \lambda = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$  и некоторого  $L < \infty$ , вытекает

$$\left| \sum_{\substack{\mu, \lambda: \\ \mu, \lambda \in [1, \dim \tilde{V}_1]}} F_{\mu + \dim V_1, \lambda + \dim V_1}^{l+N} \varphi_u^\mu(w) P_u^\lambda(w) \right| = o(d_2(u, w)^2).$$

Поэтому и  $|\delta_l| = o(d_2(u, w)^2)$  для  $l = \dim \tilde{V}_1 + 1, \dots, \tilde{N}$ .

Таким образом, отображение  $\varphi$  является полиномиально субриманово дифференцируемым всюду. Явный вид описан в (11), (12), (16), а также в (10), (17) и (18). Теорема доказана.

**ЗАМЕЧАНИЕ 18.** Как видно из доказательства теоремы 17, липшицевость во внутреннем смысле координатных функций  $\varphi$  при горизонтальных полях существенна для полиномиальной субримановой дифференцируемости.

Из результатов теоремы 17 следует, что для  $\tilde{N} \geq N$  при дополнительных предположениях гладкости класса  $C^2$  по  $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$  и класса  $C^1$  по  $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$  функций  $\varphi_u^k(w)$ ,  $k = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$ , а также биективности на свой образ отображения  $\varphi$ , выполняются условия работы [26]. Поэтому для  $\varphi$  применимы результаты об адаптированном базисе и формуле площади.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19** [26]. Пусть  $\mathbb{G}$  и  $\tilde{\mathbb{G}}$  — группы Карно и  $\xi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ ,  $x \in \mathbb{G}$ . Если координаты  $\{\kappa_i\}_{i=1}^{\tilde{N}}$  полиномиального субриманова дифференциала  $\hat{D}_P \xi(x)(y)$ , рассмотренные относительно  $\xi(x)$ , в некотором базисе  $\{Y_k\}_{k=1}^{\tilde{N}}$  обладают свойством  $|\kappa_i| = O(\rho_2(x, y)^{\deg X_i})$ , то базис  $\{Y_k\}_{k=1}^{\tilde{N}}$  называется *внутренним*, или *адаптированным*, в точке  $x \in \mathbb{G}$ .

Из результатов [26] вытекает

**Предложение 20.** Пусть выполнены условия теоремы 12 и отображение-график  $\varphi_\Gamma$  является контактным отображением класса  $C_H^1$  и липшицевым. Предположим дополнительно, что  $\tilde{N} \geq N$ , а функции  $\varphi_u^k(w)$  принадлежат классу  $C^2$  по  $w_1, \dots, w_{\dim V_1}$  и классу  $C^1$  по  $w_{\dim V_1+1}, \dots, w_N$ ,  $k = 1, \dots, \dim \tilde{V}_1$  для всех  $u \in \mathbb{G}$ , а  $\varphi$  биективно на свой образ. Тогда верны следующие утверждения.

1. В окрестности образа каждой точки  $u \in \mathbb{G}$  существует такой адаптированный базис  $\{\tilde{X}_l^u\}_{l=1}^{\tilde{N}}$ , что полиномиальный субриманов дифференциал отображения  $\varphi$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} D\varphi_u^H(u) & 0 \\ 0 & D\varphi_u^T(u) \end{pmatrix}$$

(ср. (9)).

2. Функция множества, определяемая как  $\mathbb{G} \supset A \mapsto \mathcal{H}_\varphi^\nu(\varphi(A))$ , является мерой.

Здесь значение  $\mathcal{H}_\varphi^\nu(D)$ ,  $D = \varphi(A)$ , равно

$$\omega_{\mathbb{G}} \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2^{\varphi^{-1}(w_i)}(w_i, r_i) \supset D, w_i \in D, r_i < \delta \right\}, \quad (19)$$

$\omega_{\mathbb{G}} = \omega_{\dim V_1} \omega_{\dim V_2}$ ,  $\text{Box}_2^{\varphi^{-1}(w)}(w, r) = \{v \in \tilde{\mathbb{G}} : \tilde{d}_2^{\varphi^{-1}(w)}(v, w) < r\}$ , величина  $\tilde{d}_2^{\varphi^{-1}(w)}$  построена так же, как в определении 2, с заменой исходного базиса на  $\{\tilde{X}_l^{\varphi^{-1}(w)}\}_{l=1}^{\tilde{N}}$ , а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества  $D = \varphi(A)$ .

Также [26] для  $\varphi$  верна формула площади для адаптированной меры, определенной в (19).

**Теорема 21.** В условиях предложения 20 справедлива формула площади

$$\int_A \sqrt{\det((D\varphi_x^H)^*(x)D\varphi_x^H(x))} \cdot \sqrt{\det((D\varphi_x^T)^*(x)D\varphi_x^T(x))} d\mathcal{H}^\nu(x) = \mathcal{H}_\varphi^\nu(\varphi(A)).$$

Здесь  $D\varphi_x^H(x)$  и  $D\varphi_x^T(x)$  такие же, как в (9).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Карманова М. Б. О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 882–900.
2. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
3. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
4. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
5. Fomenko A. T. (ed.) Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993. V. 15.
6. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2004. V. 24, N 3. P. 307–326.
7. Hladky R. K., Pauls S. D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging and Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
8. Petitot J. Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
9. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$  // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
10. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group  $\mathbb{H}^n$ ,  $n > 1$  // J. für Reine Angew. Mathematik. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
11. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.

12. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group  $\mathbb{H}^1$  // J. Differ. Geom. 2009. V. 81, N 1. P. 251–295.
13. Garofalo N., Pauls S. D. The Bernstein problem in the Heisenberg group. West Lafayette, Indiana: Purdue Univ., 2005.
14. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.
15. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301, N 2. P. 1369–1406.
16. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. 2023. arXiv:2311.06638v1 [math.MG].
17. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
18. Карманова М. Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
19. Карманова М. Б. Двуступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
20. Карманова М. Б. Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.
21. Карманова М. Б. Липшицевы графики на группах Гейзенберга и связанные задачи // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 1. С. 154–158.
22. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
23. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Math. Ann. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
24. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
25. Карманова М. Б. Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.
26. Карманова М. Б. О полиномиальной субримановой дифференцируемости некоторых гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 305–332.

Поступила в редакцию 28 июля 2025 г.

После доработки 28 июля 2028 г.

Принята к публикации 7 сентября 2025 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

УДК 517.956.8:517.956.227

МНОЖЕСТВЕННОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ  
СЕРИЙ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ТРЕТЬЕЙ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С БОЛЬШИМ  
ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ РОБЭНА

С. А. Назаров

**Аннотация.** Изучается асимптотика собственных чисел и функции спектральной задачи для оператора Лапласа в плоской области с третьим краевым условием на границе, причем (переменный) коэффициент Робэна в нем отрицательный и большой. Приведены известные и новые асимптотические формулы для собственных чисел, как отрицательных, так и положительных, и для собственных функций, выявляющие разнообразные способы их локализации. Помимо формального асимптотического анализа и краткого обзора предшествующих результатов изложена процедура обоснования асимптотики в не изученном ранее случае неизменного коэффициента Робэна и глобального вырожденного максимума кривизны границы, реализующегося в нескольких точках.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.610

**Ключевые слова:** третья краевая задача, большой отрицательный коэффициент Робэна, асимптотика собственных чисел, локализация собственных функций, множественность асимптотических серий.

*Посвящаю статью Семёну Самсоновичу Кутателадзе  
с благодарностью за подарок<sup>1)</sup> в виде слова «околовершинная».*

**1. Постановки задач.** Пусть  $\Omega$  — область на плоскости, ограниченная простым замкнутым гладким (класса  $C^\infty$ , см. разд. 10, 1°) контуром  $\Gamma$ , в  $d$ -окрестности  $\mathcal{V}_d$  которого введем систему криволинейных координат  $(n, s)$ , где  $d > 0$ ,  $s$  — длина дуги на контуре, измеряемая против часовой стрелки, а  $n$  — ориентированное расстояние до него, причем  $n < 0$  на  $\Omega \cap \mathcal{V}_d$ . Собственные числа краевой задачи

$$-\Delta u^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (1)$$

$$\partial_n u^\varepsilon(x) - \varepsilon^{-1} a(s) u^\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (2)$$

или соответствующего интегрального тождества [1]

$$(\nabla u^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1} (a u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma = \lambda^\varepsilon (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall \psi^\varepsilon \in H^1(\Omega) \quad (3)$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).

<sup>1)</sup> Семён Самсонович подсказал, как исправить первоначально корявое название статьи [29].



образуют монотонную неограниченную последовательность

$$\lambda_1^\varepsilon < \lambda_2^\varepsilon \leq \lambda_3^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_p^\varepsilon \leq \dots \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Здесь  $\varepsilon \in (0, 1]$  — малый параметр,  $\nabla = \text{grad}$ ,  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\partial_n$  — производная вдоль внешней нормали,  $(\cdot, \cdot)_\Omega$  и  $(\cdot, \cdot)_\Gamma$  — скалярные произведения в пространствах Лебега  $L^2(\Omega)$  и  $L^2(\Gamma)$ ,  $H^1(\Omega)$  — пространство Соболева, а  $a \in C^\infty(\Gamma)$  — положительный (вообще говоря, переменный) коэффициент, часто называемый коэффициентом Робэна (после добавления знака минус — на это далее не обращаем внимания). Собственные функции  $u_p^\varepsilon \in C^\infty(\bar{\Omega})$  сформулированной задачи подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_p^\varepsilon, u_q^\varepsilon)_\Omega = \delta_{p,q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где  $\delta_{p,q}$  — символ Кронекера, а  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  — натуральный ряд.

Основная цель работы — указать асимптотику собственных пар {число; функция} задачи (1), (2) при стремлении малого параметра  $\varepsilon > 0$  к нулю. Асимптотическое строение ее собственных чисел из нижнего диапазона спектра давно привлекает внимание математиков и далее при рассмотрении разных ситуаций будут перечислены публикации с основными результатами в этом направлении, однако пристальное внимание уделяется двум вопросам: во-первых, обоснованию асимптотических формул в так называемом «вырожденном» случае (разд. 7–9) и, во-вторых, выявлению множественности серий собственных чисел с «устойчивыми асимптотиками» (разд. 6). Схема обоснования асимптотики, отличающаяся от опубликованных ранее для задач с большим отрицательным коэффициентом Робэна и легко приспособляемая для других рассмотренных в работе случаев, — основное техническое нововведение, так как сами алгоритмы построения асимптотики известны с прошлого века и достаточно нетрудоемки.

Сформировать асимптотику положительных членов последовательности (4) совсем несложно (разд. 5), однако билинейная форма из левой части интегрального тождества (3) не является положительной, а значит, в спектре имеются и отрицательные собственные числа — именно им и отвечают собственные функции, которым характерны различные типы локализации. Приведем предварительные и краткие пояснения.

Оператор Лапласа в криволинейных координатах принимает вид

$$\Delta = \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_n \mathcal{J}(n, s) \partial_n + \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_s \mathcal{J}(n, s)^{-1} \partial_s, \quad (6)$$

где  $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n\kappa(s)$  — якобиан, а  $\kappa$  — кривизна контура  $\Gamma$ , вообще говоря, знакопеременная, т. е. отрицательная на вогнутых дугах. Именно поведение функций  $a$  и  $\kappa$  определяет асимптотическое строение собственных чисел и разномасштабные эффекты локализации. На множестве  $\Omega \cap \mathcal{V}_d$  вводится растянутая нормальная координата  $n \mapsto \zeta = -\varepsilon^{-1}n \geq 0$ , придающая дифференциальному оператору (6) расщепление

$$\Delta = \varepsilon^{-2} \partial_\zeta^2 - \varepsilon^{-1} \kappa(s) \partial_\zeta + \partial_s^2 - \zeta \kappa(s)^2 \partial_\zeta + \dots \quad (7)$$

Здесь и далее многоточие заменяет младшие асимптотические члены, которыми можно пренебречь при формальном асимптотическом анализе. Кроме того, замена  $\lambda^\varepsilon \mapsto \varepsilon^{-2}\mu$  спектрального параметра, «заморозка» коэффициентов в какой-либо точке  $s_0 \in \Gamma$  и переход к  $\varepsilon = 0$  преобразуют соотношения (1), (2) в краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\partial_\zeta^2 w(\zeta) = \mu w(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty), \quad -\partial_\zeta w(0) = a(s_0)w(0), \quad (8)$$

у которой имеется собственная пара

$$\{\mu_0 = -a(s_0)^2; w_0(\zeta) = e^{-a(s_0)\zeta}\} \in \mathbb{R}_- \times H^1(\mathbb{R}_+), \quad (9)$$

характеризующаяся экспоненциальной скоростью затухания функции при  $\zeta \rightarrow +\infty$  или при удалении от границы вдоль внутренней нормали. Вместе с тем при вариации точки  $s_0$  величина  $\mu_0$  может изменяться, и это обстоятельство вынуждает каким-либо способом произвести еще одно растяжение координаты

$$s \mapsto \eta = \varepsilon^{-\theta}(s - s_0) \in \mathbb{R} \quad (10)$$

с сопутствующим выбором показателя  $\theta > 0$ , обеспечивающим разные темпы концентрации собственных функций  $u_k^\varepsilon$  около точки  $s_0$  (разд. 4, 5 и 7). При этом, как окажется, в качестве  $s_0$  выступают точки экстремумов коэффициента Робэна  $a$  и кривизны  $\kappa$ , а наличие нескольких таких точек вызывает множественность асимптотических серий отрицательных собственных чисел  $\{\lambda_{m_k}^\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  в последовательности (4) в дополнение к уже упоминавшейся серии положительных собственных чисел, не провоцирующих эффект локализации.

Величина показателя  $\theta$  зависит от многих обстоятельств и, в частности, постоянство коэффициента  $a(s)$  при  $s \in \Gamma$  вовсе не обеспечивает локализацию собственных функций около всего контура (разд. 2, 3). Показатель определяется и качеством экстремума, а в разд. 7–9 подробно исследуется случай вырожденных экстремумов, ранее не рассмотренный в литературе. Наконец, в разд. 10 перечислены легкодоступные обобщения и оставленные открытыми вопросы.

## 2. Локализация около всей границы. Пусть сначала $\Omega$ — круг и

$$a(s) = a_0, \quad \text{причем, разумеется, } \kappa(s) = \kappa_0 > 0. \quad (11)$$

Кроме того,  $n = r$  и  $s = R\varphi$  — полярные координаты и  $\Gamma = \{x : |x| = R\}$  — окружность радиусом  $R = \kappa_0^{-1} > 0$ . Подставим в задачу (1), (2) расщепление (7) и асимптотические анзацы

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mu_0 + \varepsilon^{-1}\mu' + \mu'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (12)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x)(v(s)(w_0(\zeta) + \varepsilon w'(\zeta)) + w''(\zeta, s)) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad (13)$$

где  $\chi_\Omega \in C_c^\infty(\bar{\Omega} \cap \mathcal{V}_d)$  — срезающая функция, зависящая только от переменной  $n$ ,

$$\chi_\Omega = 1 \text{ при } n \geq -d/2 \text{ и } \chi_\Omega = 0 \text{ при } n \leq -d. \quad (14)$$

В результате сбора множителей при одинаковых степенях малого параметра  $\varepsilon$  получим задачу (8) для главных асимптотических членов и следующую для первых поправок:

$$-\partial_\zeta^2 w'(\zeta) - \mu_0 w'(\zeta) = \mu' w_0(\zeta) - \kappa_0 \partial_\zeta w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \quad -\partial_\zeta w'(0) = a_0 w'(0). \quad (15)$$

Поскольку решение определено с точностью до слагаемого  $cw_0$ , можно считать, что

$$\mu' = -\kappa_0 a_0 \quad \text{и} \quad w'(\zeta) = 0. \quad (16)$$

Следовательно, задача для вторых поправок выглядит так:

$$\begin{aligned} & -\partial_\zeta^2 w''(\zeta, s) - \mu_0 w''(\zeta, s) \\ & = f(\zeta, s) := \mu'' w_0(\zeta) v(s) + w_0(\zeta) \partial_s^2 v(s) - \kappa_0^2 \zeta \partial_\zeta w_0(\zeta) v(s), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \\ & -\partial_\zeta w''(0) = a_0 w''(0). \end{aligned} \quad (17)$$

Условием ее разрешимости (взаимная ортогональность функций  $f$  и  $w_0$  в пространстве  $L^2(\mathbb{R}_+)$ ) служит простейшее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-\partial_s^2 v(s) = \sigma v(s), \quad s \in \Gamma,$$

которое порождает собственные пары  $\{\sigma_p; v_p\}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , заданные формулами

$$\{0; 2^{-1/2}\} \text{ при } p = 1,$$

$$\{(2\pi\kappa_0 q)^2; \sin(2\pi\kappa_0 s)\}, \{(2\pi\kappa_0 q)^2; \cos(2\pi\kappa_0 s)\} \text{ при } p = 2q, 2q + 1, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Вторая поправка в представлении (12) собственного числа  $\lambda_p^\varepsilon$  имеет вид  $\mu_p'' = \sigma_p - \kappa_0^2/2$  (первые два асимптотических члена не зависят от  $p$ ; см. первые равенства в списках (9) и (16)), а анзац (13) для собственной функции  $u_p^\varepsilon$  начинается с произведения  $c_p v_p(s) w_0(\zeta)$ , за которым следует нуль и решение ставшей разрешимой задачи (17).

Алгоритм построения асимптотики мало чем отличается от классического метода Вишика — Люстерника [2–4]. Обоснование асимптотики также приводится при помощи известных приемов (см., например, [5, 6]), причем благодаря симметрии круга  $\Omega$  двукратные собственные числа можно расщепить искусственными краевыми условиями на диаметре круга. Собственные функции  $u_p^\varepsilon$ , нормированные<sup>2)</sup> равенством (5), можно зафиксировать так, чтобы выполнялись оценки

$$\|\tilde{\lambda}_p^\varepsilon\| \leq c_p \varepsilon^{1/2} \text{ и } \varepsilon \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \leq C_p \varepsilon^{1/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \quad (18)$$

где  $\varepsilon_p$  и  $c_p$ ,  $C_p$  — положительные величины, зависящие от номера  $p \in \mathbb{N}$ ; кроме того,

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = (4a_0\varepsilon)^{-1/2} \kappa_0^{1/2} \chi_\Omega(x) v_p(s) w_0(-\varepsilon^{-1}n).$$

### 3. Локализация около точки. Первый случай. Пусть теперь

$$a(s) = a_0, \quad \kappa(s) = \kappa_0 - K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3), \quad K > 0 \text{ и } \kappa(s) < \kappa_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}. \quad (19)$$

Иными словами, коэффициент Робэна постоянен, а кривизна имеет строгий (т. е. невырожденный) глобальный максимум в одной точке  $s_0 \in \Gamma$ . Тогда, как известно из множества публикаций (см. ссылки ниже, но также далее разд. 7 и, в частности, формулу (42)), следует ввести растянутую координату (10) с показателем  $\theta = 1/4$  и принять такие асимптотические анзацы для собственных пар задачи (1), (2):

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mu_0 + \varepsilon^{-1} \mu' + \varepsilon^{-1/2} \mu'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (20)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x) \chi_\Gamma(x) (v(\eta)(w_0(\zeta) + \varepsilon w'(\zeta)) + \varepsilon^{3/2} w''(\zeta, \eta)) + \tilde{u}^\varepsilon(x). \quad (21)$$

Здесь помимо срезки (14) присутствует срезающая функция  $\chi_\Gamma \in C^\infty(\Gamma)$ , равная единице в фиксированной окрестности точки  $s_0$  и нулю на расстоянии от нее. Числа  $\mu_0$ ,  $\mu'$  и функции  $w_0$ ,  $w'$  определены прежними формулами (9), (16), однако при этом из-за переменности кривизны в дифференциальном уравнении осталась невязка

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) w_0(\zeta) &= \varepsilon^{-1} a_0 (K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3)) \\ &= \varepsilon^{-1/2} a_0 K \eta^2 + O(\varepsilon^{-1/4} |\eta|^3). \end{aligned} \quad (22)$$

<sup>2)</sup> В формальных конструкциях на нормировку собственных функций внимание не обращаем и потому не пишем номер собственной пары в асимптотических анзацах.

Сбор множителей при  $\varepsilon^{-1/2}$  в формулах  $\varepsilon^{3/2}\partial_n^2 w''(\zeta) = \varepsilon^{-1/2}\partial_\zeta^2 w''(\zeta)$ ,  $\partial_s^2 v(\eta) = \varepsilon^{-1/2}\partial_\eta^2 v(\eta)$  и соотношении (22) приводит к такой задаче для вторых поправочных членов в анзацах (20) и (21):

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w''(\zeta, \eta) - \mu_0 w''(\zeta, \eta) &= ((\mu'' - a_0 K \eta^2) v(\eta) + \partial_\eta^2 v(\eta)) w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \\ -\partial_\zeta w''(0, \eta) &= a_0 w''(0, \eta). \end{aligned} \quad (23)$$

Условие разрешимости задачи (23) сводится к уравнению гармонического осциллятора [7]

$$-\partial_\eta^2 V(\eta) + A^2 \eta^2 V(\eta) = M V(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (24)$$

с дискретным спектром  $\{M_k = A(2k - 1)\}_{k \in \mathbb{N}}$  и параметром

$$A = \sqrt{a_0 K}. \quad (25)$$

Соответствующие собственные функции  $V_k$ , нормированные в  $L^2(\mathbb{R})$ , затухают на бесконечности как  $O(|\eta|^{k-1} e^{-A\eta^2/2})$ , — громоздкие выражения для них не понадобятся (см., например, [7]).

Итак, вторые поправки в асимптотическом анзаце (20) принимают вид

$$\mu_k'' = (2k - 1) \sqrt{a_0 K}, \quad k \in \mathbb{N},$$

а множителями  $v_k$  в анзаце (21) служат упомянутые собственные функции  $V_k$  обыкновенного дифференциального уравнения (24).

На этом построение формальных асимптотик заканчивается. Зависимость похожих асимптотических конструкций от кривизны и возникновение уравнения гармонического осциллятора были ранее<sup>3)</sup> замечены в публикации [8] для смешанной краевой задачи в тонкой области со скошенной боковой поверхностью. Сама задача (1), (2) изучалась во многих статьях (см. [9–16] и др.), где поочередно были получены результаты разного свойства: оценка снизу, главный, первый и второй поправочные члены для первого собственного числа, оценки и старшие члены асимптотики всех собственных чисел из низкочастотного диапазона спектра и, наконец, полные асимптотические разложения спектральных пар. Несколько более общая чем (19) ситуация будет обсуждаться и далее, но здесь сформируем известный результат именно для нее: при любом  $p \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные  $\varepsilon_p$  и  $c_p$ ,  $C_p$ , что для остатков в асимптотических анзацах (11) и (12) верны оценки

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}_p^\varepsilon| &\leq c_p \varepsilon^{-1/4}, \\ \varepsilon \|\nabla_x u_p^\varepsilon - \nabla_x u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| &\leq C_p \varepsilon^{1/4} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \end{aligned} \quad (26)$$

где при учете нормировки всех собственных функций главный асимптотический член приобретает вид

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-5/8} (2a_0)^{-1/2} \chi_\Gamma(s) \chi_\Omega(x) v_p(\varepsilon^{-1/4}(s - s_0)) w_0(-\varepsilon^{-1}n).$$

**4. Локализация около точки. Второй случай.** Пусть теперь контур и его кривизна любые, но коэффициент  $a$  имеет единственный глобальный строгий максимум в точке  $s_0 \in \Gamma$ , т. е.

$$a(s) = a_0 - K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3), \quad K > 0 \text{ и } a(s) < a_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}. \quad (27)$$

<sup>3)</sup> Оставляем в стороне многочисленные исследования задач акустики и дифракции.

После замены (10) с показателем  $\theta = 1/2$  примем асимптотические анзацы для собственных пар

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\mu_0 + \varepsilon^{-1}\mu' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (28)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(x)\chi_\Gamma(x)(v(\eta)w^0(\zeta, s) + \varepsilon w'(\zeta, \eta)) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad (29)$$

где  $\mu_0 = -a_0^2$ , но в сравнении с разд. 3 показатель экспоненциальной функции

$$w^0(\zeta, s) = e^{-a(s)\zeta} \quad (30)$$

зависит от переменной  $s$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w^0(\zeta, s) + a_0^2 w^0(\zeta, s) &= e^{-a(s)\zeta} (a_0^2 - a(s)^2) \\ &= e^{-a(s)\zeta} (2a_0 K(s - s_0)^2 + O(|s - s_0|^3)) = \varepsilon e^{-a(s)\zeta} (2a_0 K \eta^2 + O(\varepsilon^{1/2} |\eta|^3)). \end{aligned} \quad (31)$$

Итак, собираем члены порядка  $\varepsilon^{-1}$ , возникшие в результате подстановки анзацев (28) и (29) в уравнение (1), и выводим похожую на (23) задачу для первых поправочных членов

$$\begin{aligned} -\partial_\zeta^2 w'(\zeta, \eta) - \mu_0 w'(\zeta, \eta) &= ((\mu' - 2a_0 K \eta^2)v(\eta) + \partial_\eta^2 v(\eta))w_0(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{R}_+, \\ -\partial_\zeta w'(0, \eta) &= a_0 w'(0, \eta). \end{aligned} \quad (32)$$

Условие ее разрешимости превращается в уравнение гармонического осциллятора (24) с отличающимся от (25) параметром

$$A = \sqrt{2a_0 K}. \quad (33)$$

В результате основной поправкой в асимптотическом анзаце (28) служит собственное число

$$\mu'_k = (2k - 1)\sqrt{2a_0 K}, \quad k \in \mathbb{N},$$

обыкновенного дифференциального уравнения (24), а множителем  $v_k$  в анзаце (29) — соответствующая собственная функция  $V_k$ .

Представленная выше формальная асимптотика решений задачи (1), (2) в ситуации (27) была выписана в статье [17] среди прочих, однако большое количество работ (см. [18–23] и др.) содержит вполне аналогичные подходы и относится к родственным задачам Дирихле для оператора Лапласа в тонких областях переменного сечения. В этих работах, в частности, помимо главных членов построены полные асимптотические разложения собственных пар и выведены асимптотически точные оценки погрешностей.

Для остатков в представлениях (28) и (29) выполнены неравенства

$$\begin{aligned} |\tilde{\lambda}_p^\varepsilon| &\leq c_p \varepsilon^{-1/4}, \\ \varepsilon \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| + \|u_p^\varepsilon - u_{p0}^\varepsilon; L^2(\Omega)\| &\leq C_p \varepsilon^{1/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \end{aligned} \quad (34)$$

где положительные величины  $\varepsilon_p$  и  $c_p$ ,  $C_p$  зависят от номера  $p \in \mathbb{N}$  и, кроме того,

$$u_{p0}^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-3/4} (2a_0)^{-1/2} \chi_\Gamma(s) \chi_\Omega(x) v_p(\varepsilon^{-1/2}(s - s_0)) w^0(-\varepsilon^{-1}n, s).$$

Отметим, что поправочные слагаемые из анзацев (29) и (21), (13) не включены в финальные оценки точности (36) и (26), (18) потому, что они (слагаемые) не определены полностью: например, остался произвол  $sw_0$  в выборе решений  $w'$  и  $w''$  обеих задач (15) и (17), который удастся устранить лишь путем построения младших асимптотических членов (см. разд. 10, 3°). Соответствующие итерационные процессы известны в полной мере (см. [4, 24, 25] и др.).

**5. Положительные собственные числа.** Алгоритм построения асимптотики собственных чисел задачи (1), (2) на положительной полуоси  $\mathbb{R}_+$  элементарен, причем единственным препятствиями в интерпретации возмущения как регулярного (ср. монографию [5]) — малый параметр и «неправильный» знак (см. статью [3]) при старшей производной в преобразованном краевом условии (2)

$$u^\varepsilon(x) = \varepsilon a(s)^{-1} \partial_n u^\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma. \quad (35)$$

Приведем краткие пояснения для  $\varkappa_\ell$ -кратного собственного числа  $\beta_\ell$  задачи Дирихле

$$-\Delta v(x) = \beta v(x), \quad x \in \Omega, \quad v(x) = 0, \quad x \in \Gamma;$$

иными словами, считаем, что  $\beta_{\ell-1} < \beta_\ell = \dots = \beta_{\ell+\varkappa_\ell-1} < \beta_{\ell+\varkappa_\ell}$ . Соответствующие собственные функции  $v_\ell, \dots, v_{\ell+\varkappa_\ell-1}$  подчиним условиям ортогональности и нормировки вида (5) в пространстве  $L^2(\Omega)$ .

В качестве асимптотических представлений собственных пар  $\{\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon; u_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon\}$  задачи (1), (2) в количестве  $\varkappa_\ell$  штук (т. е.  $p = \ell, \dots, \ell + \varkappa_\ell - 1$ ) возьмем выражения

$$\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon = \beta_\ell + \varepsilon \beta'_{\ell p} + \tilde{\lambda}_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon, \quad (36)$$

$$u_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon(x) = \sum_{q=\ell}^{\ell+\varkappa_\ell-1} b_q^p v_q(x) + \varepsilon v'_{\ell p}(x) + \tilde{u}_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon(x). \quad (37)$$

Здесь  $b^{\ell p} = (b_\ell^{\ell p}, \dots, b_{\ell+\varkappa_\ell-1}^{\ell p})$  — ортонормированные в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^{\varkappa_\ell}$  столбцы и  $\{\beta'_{\ell p}; v'_{\ell p}\}$  — пары, подлежащие определению. Причины появления «странного» индекса  $N_p^\varepsilon$  поясняются в очередном разделе.

Подставив анзацы (36) и (37) в задачу (1), (35), видим, что члены порядка единицы взаимно уничтожаются, а коэффициенты при  $\varepsilon$  формируют следующую задачу Дирихле:

$$\begin{aligned} -\Delta v'_{\ell p}(x) - \beta_\ell v'_{\ell p}(x) &= \beta'_{\ell p} \sum_{q=\ell}^{\ell+\varkappa_\ell-1} b_q^p v_q(x), \quad x \in \Omega, \\ v'_{\ell p}(x) &= \frac{1}{a(s)} \sum_{q=\ell}^{\ell+\varkappa_\ell-1} b_q^p \frac{\partial v_q}{\partial n}(x), \quad x \in \Gamma. \end{aligned} \quad (38)$$

Посредством формулы Грина превратим условия разрешимости задачи (38) в количестве  $\varkappa_\ell$  штук в систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}^\ell b^q = \beta'_{\ell p} b^q,$$

где  $\mathcal{M}^\ell$  — симметричная  $(\varkappa_\ell \times \varkappa_\ell)$ -матрица с элементами

$$\mathcal{M}_{pq}^\ell = \int_\Gamma \frac{1}{a(s)} \frac{\partial v_p}{\partial n}(x) \frac{\partial v_q}{\partial n}(x) ds, \quad p, q = \ell, \dots, \ell + \varkappa_\ell - 1.$$

Матрица  $\mathcal{M}^\ell$  положительно определенная, так как  $a > 0$  и следы нормальных производных собственных функций не могут стать линейно зависимыми на контуре  $\Gamma$  по теореме о единственности продолжения (см., например, [26]). Собственные числа названной матрицы

$$\beta'_{\ell+\varkappa_\ell-1} \geq \dots \geq \beta'_\ell > 0 \quad (39)$$

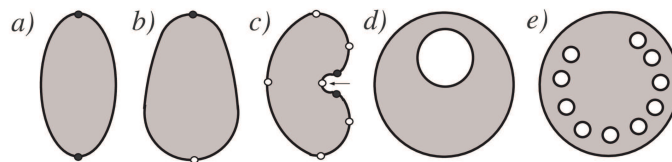


Рис. 1. Эллипс («огурец»), «яйцо» и «боб» (а–с). Глобальные максимумы кривизны указаны значком  $\bullet$ , а локальные — значком  $\circ$ , причем отрицательный — дополнительной стрелкой. Асимметричное кольцо («номерок в гардеробе») (d) и перфорированный круг («телефонный диск») (e).

конкретизируют поправочные члены асимптотических анзацев (36), а для фигурирующих в них остатков можно получить оценки  $|\tilde{\lambda}_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon| \leq c_\ell \varepsilon^2$ . Осложнения с оправданием асимптотик собственных функций поясняются далее в замечании 1.

**6. О множественности асимптотических серий.** В любой из ситуаций (19), (27) или (11) предельный переход  $\varepsilon \rightarrow +0$  сопровождается насыщением отрицательной полуоси  $\mathbb{R}_-$  собственными числами (4). При фиксированном номере  $k \in \mathbb{N}$  член  $\lambda_k^\varepsilon$  этой последовательности уходит на отрицательную бесконечность со скоростью  $O(\varepsilon^{-2})$ . Таким образом, номера  $N_p^\varepsilon$  обнаруженных в разд. 4 положительных чисел  $\lambda_{N_p^\varepsilon}^\varepsilon$  неограниченно возрастают при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Вместе с тем при увеличении параметра  $\varepsilon$  собственные числа согласно формулам (36) и (39) смещаются вверх от их предельных значений  $\beta_p$ , а значит, никак не могут осуществить упомянутое насыщение, происходящее, как будет пояснено на примере из разд. 10, 2°, из-за пересечения начала координат  $\lambda = 0$  собственными числами, которым отвечают быстроосциллирующие собственные функции.

Асимптотические конструкции из разд. 3 или 4 приспособлены не только к глобальным, но и к локальным максимумам коэффициента Робэна  $a$  или кривизны  $\kappa$ . Если в первом случае максимумы обусловлены графиком положительной функции  $\Gamma \ni s \mapsto a(s)$  и потому сами остаются положительными, то у функции  $\Gamma \ni s \mapsto \kappa(s)$  помимо положительных (рис. 1, a и b) могут появиться и отрицательные (локальные) максимумы кривизны на вогнутых участках границы (рис. 1, c). Каждый из локальных максимумов по прежним формулам порождает серию  $\{\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon\}_{k \in \mathbb{N}}$  собственных чисел с устойчивыми асимптотиками, причем, как и в разд. 5, их номера  $N_k^\varepsilon$  приобретают рост при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Разумеется, может случиться, что обе функции  $a$  и  $\kappa$  имеют строгие глобальные максимумы на контуре  $\Gamma$ . Сравнивая анзацы (20) и (28), а также оценки (26) и (34), видим, что основной (самой нижней) асимптотической серией собственных чисел задачи (1), (2) всегда служит построенная в разд. 4. Именно поэтому в требование (19) включено постоянство коэффициента Робэна  $a$ .

Задача (1), (2) на круге допускает разделение переменных и поэтому, как и в разд. 10, 2°, появляется лишь одна серия отрицательных собственных чисел с устойчивой асимптотикой. Впрочем, отказ от односвязности области  $\Omega$  (рис. 1, d и e) приводит к образованию нескольких асимптотических серий. Формулы (12) и (16) показывают, что собственные числа, отвечающие внутренним окружностям, имеющим меньшие радиусы, расположены выше тех, которые построены в разд. 2, т. е. их номера растут при  $\varepsilon \rightarrow +0$ .

Если глобальный максимум (непостоянных) функций  $\kappa$  или  $a$  реализуется

в нескольких точках на контуре  $\Gamma$  (для эллипса на рис. 1,  $a$ , их две), то собственные числа из нескольких первых серий могут приобрести пару одинаковых асимптотических членов и тем самым серии перемешиваются (ср. разд. 7). Это обстоятельство не сказывается на строении асимптотических формул, так как носители главных частей собственных функций удалены один от другого (в противоположность анализу из разд. 5). Вместе с тем кратность собственного числа несколько влияет на процедуру обоснования асимптотики.

**ЗАМЕЧАНИЕ 1.** Асимптотические серии собственных чисел из низкочастотного диапазона спектра, порожденные в рассматриваемых случаях глобальными максимумами, называются *основными*, а остальные, расположенные выше основной, — *вторичными*. Для основной серии возможно обоснование асимптотик как собственных чисел, так и собственных функций (см. далее теоремы 3 и 4). Для вторичных серий классическая [2] и формулируемая в разд. 9 лемма 2 обнаруживает в малой окрестности построенного асимптотического приближения собственное число исходной задачи, однако идентифицировать все собственные числа в этой окрестности не удастся по причине эпизодического или даже частого появления членов основной серии, «сторонних» для конструируемой асимптотики, получить приемлемые представления для собственных функций невозможно, точнее, формулы, гарантируемые леммой 2, оказываются абсолютно неинформативными.

**7. Вырожденный экстремум — формальная асимптотика.** Изменим ограничения, введенные в разд. 3, и допустим, что  $a(s) = a_0$ , но при  $j = 1, \dots, J$  выполнены соотношения

$$e|\kappa(s) - \kappa_0 + K_j(s - s_j)^{2m}| \leq \mathcal{K}_j |s - s_j|^{2m+1} \text{ с коэффициентами } K_j, \mathcal{K}_j > 0, \\ \text{а также } \kappa(s) < \kappa_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_1, \dots, s_J\}. \quad (40)$$

При этом  $m \in \mathbb{N}$  и  $m > 1$ , однако величина  $\kappa_0$  не зависит от номера  $j$ , т. е. вырожденный глобальный максимум кривизны достигается в (попарно различных) точках  $s_1, \dots, s_J := s_0 \in \Gamma$  — обсуждаем именно кратные собственные числа (см. рис. 2,  $b$ ). Подберем показатель  $\theta$  в формуле (10) для растянутых координат на дуге  $\Gamma$ . Главные члены асимптотики по-прежнему имеют вид (9) и (16), однако теперь формулы (40) изменяют невязку (22) следующим образом:

$$\varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) w_0(\zeta) = \varepsilon^{-1} a_0 (K_j (s - s_j)^{2m} + O(|s - s_j|^{1+2m})) \\ = \varepsilon^{-1+2m\theta} a_0 K_j \eta_j^{2m} + O(\varepsilon^{-1-(1+2m)\theta} |\eta_j|^{1+2m}), \quad (41)$$

где  $\eta_j = \varepsilon^{-\theta}(s - s_j)$ . Сравнение выражения (41) с еще одним соотношением  $\partial_s^2 v(\eta_j) = \varepsilon^{-2\theta} \partial_{\eta_j}^2 v(\eta_j)$  требует соблюдения равенства  $1 - 2m\theta = 2\theta$ , а значит,

$$\theta = \frac{1}{2(1+m)} \quad \left( \text{отметим, что } \theta = \frac{1}{4} \text{ при } m = 1; \text{ ср. разд. 3} \right). \quad (42)$$

В итоге примем похожие на (20) и (21) асимптотические анзацы

$$\lambda^\varepsilon = -\varepsilon^{-2} a_0^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 + \varepsilon^{-1/(1+m)} \mu_j'' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (43)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_j(x) v(\eta) (w_0(\zeta) + \varepsilon^{2-1/(1+m)} w''(\zeta, \eta_j)) + \tilde{u}^\varepsilon(x) \text{ в окрестности точки } s_j, \quad (44)$$



где  $j = 1, \dots, J$ , коэффициенты при  $\varepsilon^{-2}$  и  $\varepsilon^{-1}$  взяты из формул (9) и (16), а  $\chi_j(s) = \chi_\Omega(n)\chi_\Gamma^j(s)$  — гладкие срезающие функции,  $\chi_\Omega$  — срезка из представления (21) и  $\chi_\Gamma^j \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\chi_\Gamma^j(s) = 1 \text{ при } |s - s_j| \leq d_\Gamma/2 \text{ и } \chi_\Gamma^j(s) = 0 \text{ при } |s - s_j| \geq d_\Gamma, \quad (45)$$

$$d_\Gamma = \min\{s_j - s_{j-1} \mid j = 1, \dots, J\}.$$

В результате получим для поправочной пары  $\{\mu_j''; w_j''\}$  набор задач (23) с заменами  $a_0 K \eta^2 \mapsto a_0 K_j \eta^{2m}$  и индексами  $j = 1, \dots, J$ . Условием разрешимости таких задач служат обыкновенные дифференциальные уравнения аналогичного (24) строения:

$$-\partial_{\eta_j}^2 V_j(\eta_j) + A_j^2 \eta_j^{2m} V_j(\eta_j) = M_j V_j(\eta_j), \quad \eta_j \in \mathbb{R}, \quad \text{с коэффициентом } A_j = \sqrt{a_0 K_j}. \quad (46)$$

У этих уравнений по-прежнему дискретные спектры  $\wp_j = \{M_{pj}\}_{p \in \mathbb{N}}$ , а собственные функции  $V_{jp}$  можно нормировать в  $L^2(\mathbb{R})$ , так как они затухают на бесконечности со степенно-экспоненциальной скоростью  $O(|\eta_j|^{\phi_{pj}} e^{-A_j |\eta_j|^{1+m}/(1+m)})$  — точная формула далее не понадобится, но ее можно получить при помощи известных приемов (см. [7, 27] и др.).

Итак, в качестве предельной задачи выступает совокупность ( $j = 1, \dots, J$ ) дифференциальных уравнений (46). Подчеркивая это наблюдение, выберем новую литеру « $\Lambda$ » для членов упорядоченной последовательности  $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}} \simeq \{M_{pj}\}_{p,j \in \mathbb{N}}$ , т. е. объединения спектров  $\wp_1 \cup \dots \cup \wp_J$ .

Очередные разделы статьи посвящены обоснованию асимптотических разложений (43) и (44), но здесь приведем еще формальный анализ ситуации, в которой, как и в разд. 4, кривизна безразлична, а коэффициент  $a$  в краевом условии (2) достигает глобальный, но вырожденный максимум в одной точке  $s_0$  (обобщение на несколько точек вполне очевидно):

$$a(s) = a_0 - K(s - s_0)^{2m} + O(|s - s_0|^{2m+1}), \quad K > 0 \text{ и } a(s) < a_0 \text{ при } s \in \Gamma \setminus \{s_0\}.$$

Показатели степеней малого параметра в поправочных членах из асимптотических анзацев

$$\lambda^\varepsilon = \varepsilon^{-2} \mu_0 + \varepsilon^{-2/(1+m)} \mu' + \tilde{\lambda}^\varepsilon, \quad (47)$$

$$u^\varepsilon(x) = \chi_0(x)(v(\varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))w^0(\zeta, s) + \varepsilon^{2m(1+m)}w'(\zeta, \varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))) + \tilde{u}^\varepsilon(x), \quad (48)$$

в которых  $\mu_0 = -a_0^{-2}$  и  $w^0$  — экспонента (30), подобраны так, чтобы модифицированная (замена  $(s - s_0)^2 \mapsto (s - s_0)^{2m}$ ) выкладка (31) привела к похожему на (32) задаче для пары  $\{\mu'; w'\}$ , условием разрешимости которой (задачи) служит уравнение (46) с параметром (33). Собственные числа этого уравнения дают выражения для поправок  $\mu'$  в анзаце (47), а соответствующие собственные функции указывают множители  $v(\varepsilon^{-1/(1+m)}(s - s_0))$  в анзаце (48). Оценки асимптотических остатков в принятых анзацах выводятся при помощи упрощенной схемы обоснования асимптотики для ситуации (40).

**8. Экспоненциальное затухание собственных функций и сходимость атрибутов собственных пар.** В соответствии с формулой (42) поло-

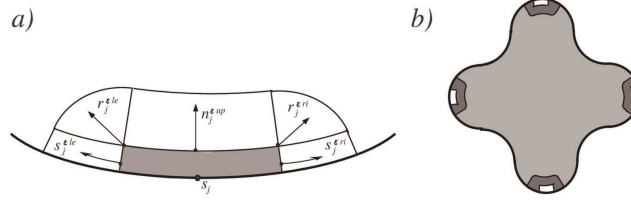


Рис. 2. Левые (le) и правые (ri) искривленные «прямоугольники»  $\square_j^{\varepsilon le/ri}$  и секторы  $\triangle_j^{\varepsilon le/ri}$ , а также верхний (up) «прямоугольник»  $\square_j^{\varepsilon up}$  (пропорции нарушены); стрелки указывают оси координат, участвующих в определении весовой функции  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ , а исходный «прямоугольник»  $\square_j^\varepsilon$  с точкой  $s_j$  на середине основания тонирован на рис. (a). На рис. (b) область изменения весовой функции тонирована сильно, а область, где она экспоненциально велика, — слабо; высветлены участки равенства ее единице.

жим  $\theta = (2(1+m))^{-1}$  и начнем с рассмотрения простой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta^2}(\zeta) + \frac{\mathbf{k}}{1-\zeta \mathbf{k}} \frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(\zeta) &= \boldsymbol{\mu}^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon(\zeta), \quad \zeta \in (0, \varepsilon^\theta h), \\ -\frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(0) &= \frac{\mathbf{a}}{\varepsilon} \mathbf{w}^\varepsilon(0), \quad \frac{d\mathbf{w}^\varepsilon}{d\zeta}(\varepsilon^{-\theta} h) = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

со спектральным параметром  $\boldsymbol{\mu}^\varepsilon$  и положительными величинами  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{a}$  и  $h$ .

**Лемма 1.** *Существуют такие положительные  $\mathbf{c}$  и  $\varepsilon$ , что первое собственное число задачи (49) удовлетворяет соотношению*

$$|\boldsymbol{\mu}_1^\varepsilon + \varepsilon^{-2} \mathbf{a}^2 + \varepsilon^{-1} \mathbf{k} \mathbf{a}| \leq \mathbf{c} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon]. \quad (50)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для вывода асимптотической формулы достаточны вычисления из конца разд. 1 и начала разд. 2: основное приближение к собственной функции  $\mathbf{w}_1^\varepsilon$  имеет вид  $e^{-\mathbf{a}\zeta/\varepsilon}$ , но оставляет невязки — ограниченную  $\zeta \mathbf{k}^2/(1-\zeta \mathbf{k})$  в уравнении и экспоненциально малую  $-\varepsilon^{-1} \mathbf{a} e^{-\mathbf{a}h\varepsilon^{-\theta-1}}$  в (последнем) краевом условии Неймана. Первая и определяет оценку остатка в представлении (50), а схема обоснования традиционна (см. [4; 5, гл. 6; 6, гл. 9] и др.).

Для проверки экспоненциального затухания собственной функции задачи (1), (2) в условиях из разд. 6, отвечающей собственному числу

$$\lambda_p^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2} a_0^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 + \Lambda_p \varepsilon^{-2\theta}, \quad (51)$$

определим непрерывную и кусочно-гладкую весовую функцию  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon > 0$  в замыкании  $\overline{\Omega}$ ; здесь  $\Lambda_p > 0$  — некоторое число (см. далее формулу (84)). С этой целью около точек  $s_j \in \Gamma$  нарисуем искаженные (в криволинейных координатах) «прямоугольники»  $\square_j^\varepsilon = \{x \in \Omega \cap \mathcal{V}_d : |s - s_j| < \varepsilon^\theta h, n \in (-h\varepsilon^\theta, 0)\}$ , на которых положим  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x) = 1$ , а размер  $h$  зафиксируем так, чтобы

$$a_0 K_j h^{2m} \geq \Lambda_p + 2, \quad j = 1, \dots, J. \quad (52)$$

На рис. 2, а, к «прямоугольнику»  $\square_j^\varepsilon$  примыкают три «прямоугольника»  $\square_j^{\varepsilon le/ri}$  и  $\square_j^{\varepsilon up}$  с размерами  $H \times h\varepsilon^\theta$  и  $2h\varepsilon^\theta \times H$  соответственно, а также две четверти

«кругов»  $\triangleleft_j^{\varepsilon le/ri}$  с центрами в вершинах  $\mathcal{P}_j^{\varepsilon le/ri} \notin \Gamma$  первого «прямоугольника» и радиусом  $H \leq \min\{d/2, d_\Gamma/3\}$  (см. формулы (14) и (45)). Считаем, что на указанных пяти множествах функция  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$  принимает соответственно значения  $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}s_j^{le/ri}}$ ,  $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}n_j^{up}}$  и  $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}r_j^{le/ri}}$  (см. рис. 2, а, с продольными  $s_j^{le/ri}$ , поперечной  $n_j^{up}$  и радиальными  $r_j^{le/ri}$  координатами, отмеренными от границы  $\partial\Box_j^\varepsilon$ ), а вне названных фигур и, разумеется, вне «прямоугольников»  $\Box_j^\varepsilon$ ,  $j = 1, \dots, J$ , она равна большой постоянной  $e^{\gamma\varepsilon^{-\theta}h}$ . Построенная весовая функция кусочно-гладкая и непрерывная, так как объединения  $\mathbb{M}_j^\varepsilon$  шести фигур, отвечающие каждой из точек  $s_1, \dots, s_J$ , содержатся в окрестности  $\mathcal{V}_d$  и не пересекаются одна с другой (рис. 2, б). Подчеркнем еще раз, что вне множества  $\Omega \setminus \mathbb{M}^\varepsilon$  функция  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$  становится экспоненциально большой. Через  $\mathbb{M}^\varepsilon$  и  $\Box^\varepsilon$  обозначаем объединения  $\mathbb{M}_1^\varepsilon \cup \dots \cup \mathbb{M}_J^\varepsilon$  и  $\Box_1^\varepsilon \cup \dots \cup \Box_J^\varepsilon$  соответственно.

В интегральное тождество (3) для пары  $\{\lambda_p^\varepsilon; u_p^\varepsilon\}$  подставим пробную функцию  $\psi^\varepsilon = \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_{p\gamma}^\varepsilon$ , где  $u_{p\gamma}^\varepsilon = \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_p^\varepsilon$ , — обе функции принадлежат пространству  $H^1(\Omega)$  благодаря свойствам веса  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$ . После двукратного его коммутирования с оператор-градиентом  $\nabla$  получим равенство

$$\begin{aligned} \|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \lambda_p^\varepsilon \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \\ = \|u_{p\gamma}^\varepsilon (\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2. \end{aligned} \quad (53)$$

Для оценки правой части заметим, что

$$|\nabla \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x)| \leq \gamma \varepsilon^{-\theta} \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x), \quad \text{но } \nabla \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon(x) = 0 \text{ при } x \in (\Omega \setminus \mathbb{M}^\varepsilon) \cup \Box^\varepsilon, \quad (54)$$

и, следовательно,

$$\|u_{p\gamma}^\varepsilon (\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon)^{-1} \nabla_x \mathcal{R}_\gamma^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \gamma^2 \varepsilon^{-2\theta} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\mathbb{M}^\varepsilon)\|^2.$$

Правую часть обработаем при помощи леммы 1, в которой положим  $\mathbf{a} = a_0$ ,  $\mathbf{k} = \kappa(s)$ , и, обратившись к вариационной постановке задачи (49) при учете якобиана  $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n\kappa(s)$ , придем к такому неравенству для функции  $u_{p\gamma}^\varepsilon$ , записанной в локальных координатах  $n$  и  $s$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon^\theta h}^0 \left( |\partial_n u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 + \left( \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa(s) \right) |u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 \right) \mathcal{J}(n, s) dn - \frac{a_0}{\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(0, s)|^2 \\ \geq -\mathbf{c} \int_{-\varepsilon^\theta h}^0 |u_{p\gamma}^\varepsilon(n, s)|^2 \mathcal{J}(n, s) dn. \end{aligned}$$

Проинтегрируем его по мелким дугам  $\Gamma_j^\varepsilon = \{s \in \Gamma : |s - s_j| \leq \varepsilon^\theta h\} = \Gamma \cap \partial\Box_j^\varepsilon$  и продырявленному ими контуру  $\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon = \Gamma \setminus \partial\Box^\varepsilon$ , где  $\Gamma^\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon \cup \dots \cup \Gamma_J^\varepsilon$ . В силу формул (40) и (52) на множестве  $\Gamma^\varepsilon$  при малом  $\varepsilon$  выполнено соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} a_0 (\kappa_0 - \kappa(s)) \geq \varepsilon^{-1} a_0 \min\{K_1, \dots, K_J\} (\varepsilon^\theta h)^{2m} \\ - \max\{\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_J\} \varepsilon^{\theta(2m+1)} \geq \varepsilon^{-2\theta} (\mathbf{A}_p + 2), \end{aligned}$$

а значит, ограничение (51) гарантирует оценку

$$\int_{(\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \Box^\varepsilon} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) dx - \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Gamma \setminus \Gamma^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 ds$$

$$\begin{aligned}
&\geq \left( -\lambda_p^\varepsilon - \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} - \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa_0 + \varepsilon^{-2\theta} (\Lambda_p + 1) + \mathbf{c} \right) \int_{(\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \square^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 dx \\
&\geq (\varepsilon^{-2\theta} - \mathbf{c}) \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2((\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h} \cap \Omega) \setminus \square^\varepsilon)\|^2. \quad (55)
\end{aligned}$$

Кроме того, на исключенных «прямоугольниках»  $\square_j^\varepsilon$  верны равенства  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon = 1$  и  $u_{p\gamma}^\varepsilon = u_p^\varepsilon$ , а значит, ввиду нормировки  $\|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\| = 1$  (см. условие (5)) находим, что

$$\begin{aligned}
&\int_{\square_j^\varepsilon} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) dx - \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Gamma_j^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 ds \\
&\geq - \left( \lambda_p^\varepsilon + \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0}{\varepsilon} \kappa_0 + K_j h^{2m} \varepsilon^{-2\theta} + \mathbf{c} \right) \int_{\square_j^\varepsilon} |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 dx \\
&\geq -C_j \varepsilon^{-2\theta} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\square_j^\varepsilon)\|^2 = -C_j \varepsilon^{-2\theta} \|u_p^\varepsilon; L^2(\square_j^\varepsilon)\|^2 \geq -\varepsilon^{-2\theta} C_j. \quad (56)
\end{aligned}$$

Наконец, вне окрестности  $\mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h}$  контура  $\Gamma$  следующая примитивная формула очевидна:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h}} (|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2 - \lambda_p^\varepsilon |u_{p\gamma}^\varepsilon(x)|^2) \\
&\geq \|u_{p\gamma}^\varepsilon; H^1(\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h})\|^2 + c_a \varepsilon^{-2} \|u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega \setminus \mathcal{V}_{\varepsilon^\theta h})\|^2, \quad c_a > 0.
\end{aligned}$$

Собрав полученные оценки, превращаем соотношение (53) в неравенство

$$\|\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon u_p^\varepsilon; L^2(\Omega \setminus \square^\varepsilon)\|^2 \leq c_p, \quad (57)$$

причем ключевыми оказываются оценки (55) и (56), определяющие левую и правую части этого неравенства после сокращения множителя  $\varepsilon^{-2\theta} \leq \varepsilon^{-2}$ .

**Теорема 1.** Если собственное число  $\lambda_p^\varepsilon$  задачи (1), (2) удовлетворяет ограничению (51), то найдутся такие положительные величины  $\gamma_p$  и  $\varepsilon_p$ ,  $\mathbf{c}_p$ , что соответствующая собственная функция, нормированная в  $L^2(\Omega)$ , подчинена оценке

$$\varepsilon^2 \|\mathcal{R}_{\gamma_p}^\varepsilon \nabla u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|\mathcal{R}_{\gamma_p}^\varepsilon u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \mathbf{c}_p \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_p], \quad (58)$$

где  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$  — введенная выше экспоненциальная весовая функция.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Добавив к формуле (57) соотношение  $\|u_p^\varepsilon; L^2(\square^\varepsilon)\|^2 \leq \|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = 1$ , приходим к нужной оценке для квадрата второй нормы в (58). Эта оценка, ограничение (51) и известное следовое неравенство [1, гл. 1]

$$\|v; L^2(\Gamma)\|^2 \leq C_\Omega \|v; H^1(\Omega)\| \|v; L^2(\Omega)\| \quad (59)$$

позволяют вывести из равенства (53) оценку  $\|\nabla u_{p\gamma}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq C_p \varepsilon^{-2}$ , а затем вынести вес  $\mathcal{R}_\gamma^\varepsilon$  из-под градиента при помощи формул (54), заканчивая тем самым доказательство теоремы.

Если выполнено неравенство (51), то найдется положительная бесконечно малая последовательность  $\{\varepsilon_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , вдоль которой имеет место сходимость

$$\varepsilon^{2\theta} (\lambda_p^\varepsilon + \varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0) \rightarrow \hat{\mu}_p \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +0 \quad (60)$$

(индекс  $i$  у малого параметра не пишем для краткости). Соответствующую собственную функцию  $u_p^\varepsilon$ , нормированную в  $L^2(\Omega)$  и гладкую вместе со своим следом  $\Gamma \ni s \mapsto u_p^\varepsilon(0, s)$ , умножим на срезки (45) и заметим, что в силу экспоненциального ее затухания при удалении от точек  $s_1, \dots, s_J$  (теорема 1) для произведений  $u_{pj}^\varepsilon = \chi_j u_p^\varepsilon$  справедливо соотношение

$$\|u_{p1}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \dots + \|u_{pJ}^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = 1 - \dots \quad (61)$$

Здесь и далее многоточие замещает экспоненциально малые при  $\varepsilon \rightarrow +0$  величины. Запишем функции в криволинейных координатах и на множествах  $\Omega_j = \bar{\Omega} \cap \text{supp } \chi_j$  введем представления

$$u_{pj}^\varepsilon(x) = \chi_\Omega(n) u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n / \varepsilon} + u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s). \quad (62)$$

Пусть еще  $\Gamma_j = \Gamma \cap \Omega_j$ . Вычислим левую часть равенства

$$\sum_{j=1}^J (\|\nabla u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2 - \varepsilon^{-1} a_0 \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2 - \lambda_p^\varepsilon \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2) = \dots,$$

обеспеченного интегральным тождеством (3), при помощи простых формул

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} \right|^2 dn &= \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 e^{2a_0 n / \varepsilon} dn = \frac{a_0}{2\varepsilon}, \\ \int_{-\infty}^0 n \left| \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} \right|^2 dn &= \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 n e^{2a_0 n / \varepsilon} dn = -\frac{1}{4}, \\ 2 \int_{-\infty}^0 \frac{\partial u_{pj}^{\varepsilon 0}}{\partial n}(n, s) \frac{d}{dn} e^{a_0 n / \varepsilon} dn &= -2 \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^0 u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) e^{a_0 n / \varepsilon} dn \quad (\text{так как } u_{pj}^{\varepsilon 0}(0, s) = 0), \\ \int_{-\infty}^0 e^{a_0 n / \varepsilon} \left( n \kappa(s) \partial_n u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) + \left( n \kappa(s) \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) \right) dn \\ &= \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{-\infty}^0 (\kappa_0 - \kappa(s)) e^{a_0 n / \varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dn. \end{aligned}$$

При учете якобиана  $\mathcal{J}(n, s) = 1 + n \kappa(s)$  и формулы (51) обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^J \left( \frac{1}{2} \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|^2 + \|\partial_n u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 + \|\mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2 \right) \\ &\leq \varepsilon^{-2\theta} \mathbf{\Lambda}_p + \sum_{j=1}^J \left( \mathbf{\Gamma}_{pj}^\varepsilon + \frac{a_0}{\varepsilon} \int_{\Omega_j} \frac{|n| \kappa(s)}{1 + n \kappa(s)} e^{2a_0 n / \varepsilon} |u_{pj}^\varepsilon(0, s)|^2 dx \right) + \mathbf{c}_p e^{-\gamma_p \varepsilon^{-\theta}}, \quad (63) \end{aligned}$$

где  $\gamma_p$  — некоторый положительный показатель (см. теорему 1) и

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{pj}^\varepsilon &\leq \frac{a_0}{\varepsilon} \left( 2 \left| \int_{\Omega_j} \frac{\kappa_0 - \kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dx \right| \right. \\ &\quad \left. + \kappa_0 \left| \int_{\Omega_j} \frac{n\kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} u_{pj}^\varepsilon(0, s) e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^{\varepsilon 0}(n, s) dx \right| \right) \\ &\leq C_\kappa (\varepsilon^{-1/2} \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\| + \varepsilon^{1/2} \|u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|) \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|. \end{aligned}$$

Благодаря ограничению (51), условию нормировки (5), исходному интегральному тождеству (3) и следовому неравенству (59) верны соотношения

$$\|\nabla u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq C_p \varepsilon^{-2} \|u_p^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 = C_p, \quad \|u_p^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2 \leq c_p \varepsilon^{-1}.$$

Таким образом, во-первых,

$$\mathbf{I}_{pj}^\varepsilon \leq C_\kappa (\|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\| + c_p \varepsilon) \varepsilon^{-1/2} \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|$$

и, во-вторых, последний интеграл в формуле (63) (без множителя  $a_0/\varepsilon$ ) оценивается сверху величиной  $c_p \varepsilon \varepsilon^2 \|u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2$ . В итоге видим, что при малом  $\varepsilon > 0$  левая часть неравенства (63) не превосходит  $c_p \varepsilon^{-\theta}$  — далее ссылаемся на обсуждаемую оценку именно с такой мажорантой.

В силу формул (61) и (63) имеем

$$\left| \frac{\varepsilon}{2a_0} \sum_{j=1}^J \|u_{pj}^\varepsilon(0, s); L^2(\Gamma_j)\|^2 - 1 \right| \leq c\varepsilon. \quad (64)$$

Определим еще функции  $u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s) = u_p^\varepsilon(n, s) - r_\varepsilon^{-1/2} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) e^{a_0 n/\varepsilon}$  и

$$\bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) = \frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} u_p^\varepsilon(n, s) dn, \quad \text{где } r_\varepsilon = \int_{-\varepsilon}^0 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn = \frac{\varepsilon}{2a_0} (1 - e^{-2a_0}) > 0. \quad (65)$$

Заметим, что согласно оценке (63) для  $L^2(\Omega_j)$ -нормы функции  $u_{pj}^{\varepsilon 0}$  (ее появление отмечено фигурной скобкой снизу) выполнено соотношение

$$\begin{aligned} c_\kappa \|(\kappa_0 - \kappa)^{1/2} (\bar{u}_{pj}^\varepsilon - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot)); L^2(\Gamma_j)\|^2 &\leq \|\bar{u}_{pj}^\varepsilon - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, \cdot); L^2(\Gamma_j)\|^2 \\ &= \int_{\Gamma_j} \left( \frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} u_p^\varepsilon(n, s) dn - \sqrt{r_\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, s) \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{r_\varepsilon} \int_{\Gamma_j} \left( \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} \underbrace{(u_p^\varepsilon(n, s) - e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(0, s))}_{u_{pj}^{\varepsilon \perp}(n, s)} dn \right)^2 ds \\ &\leq \frac{c_\mathcal{J}}{r_\varepsilon} \|u_{pj}^{\varepsilon 0}; L^2(\Omega_j)\|^2 \leq c_j \varepsilon^{1-\theta} \quad (66) \end{aligned}$$

с положительным множителем  $c_\kappa$ . Кроме того, вытекающая из определений

(65) ортогональность

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) u_{pj}^{\varepsilon\perp}(n, s) dn ds \\ &= \int_{\Gamma_j} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) \left( \int_{-\varepsilon}^0 e^{a_0 n/\varepsilon} u_{pj}^\varepsilon(n, s) dn - \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) \frac{1}{\sqrt{r_\varepsilon}} \int_{-\varepsilon}^0 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right) ds = 0 \end{aligned}$$

конечно же сохраняется для производных функций  $\bar{u}_{pj}^\varepsilon$  и  $u_{pj}^{\varepsilon\perp}$  по переменной  $s$ , а значит,

$$\begin{aligned} & (1 - \varepsilon \kappa_0) \|\mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Omega_j)\|^2 \\ & \geq \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 (r_\varepsilon^{-1/2} \partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s) e^{a_0 n/\varepsilon} + \partial_s u_{pj}^{\varepsilon\perp}(n, s))^2 dn ds \\ &= \int_{\Gamma_j} \int_{-\varepsilon}^0 (|\partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s)|^2 + |\partial_s u_{pj}^{\varepsilon\perp}(n, s)|^2) dn ds \geq \|\partial_s \bar{u}_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2. \quad (67) \end{aligned}$$

Теперь введем функции  $v_{pj}^\varepsilon$  «быстрых» переменных  $\varepsilon^{-\theta}(s - s_j) = \eta_j \in \mathbb{R}$ ,

$$v_{pj}^\varepsilon(\eta_j) = \varepsilon^{\theta/2} \bar{u}_{pj}^\varepsilon(s_j + \varepsilon^\theta \eta_j), \quad (68)$$

продолжив  $\bar{u}_{pj}^\varepsilon$  нулем на всю вещественную ось. Формулы (64) и (66) влекут за собой соотношение

$$\left| \sum_{j=1}^J \|v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R})\|^2 - 1 \right| \leq c_p \varepsilon^{1-\theta}. \quad (69)$$

Кроме того, оценки (66) и (67) показывают, что

$$\begin{aligned} & \|v_{pj}^\varepsilon; \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R})\|^2 := \|\partial_{\eta_j} v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R})\|^2 + \|\eta_j^m v_{pj}^\varepsilon; L^2(\mathbb{R})\|^2 \\ & \leq c_{pj}^j (\varepsilon^{2\theta-\theta} \varepsilon^\theta \|\mathcal{J}^{-1} \partial_s u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2 + \varepsilon^{-2m\theta} \varepsilon^\theta r_\varepsilon \|(s - s_j)^m u_{pj}^\varepsilon; L^2(\Gamma_j)\|^2). \end{aligned}$$

Поскольку  $r_\varepsilon = O(\varepsilon)$ , оба суммарных показателя степеней малого параметра равны  $2\theta$  (см. формулы (65) и (42)). Следовательно, оценка (63) гарантирует равномерную ограниченность сумм  $\mathcal{W}_m^1(\mathbb{R})$ -норм функций (68), а понятная компактность вложения (гильбертова) весового пространства Соболева в пространство Лебега  $L^2(\mathbb{R})$  означает, что вдоль бесконечно малой положительной подпоследовательности  $\{\varepsilon_i\}_{i \in N}$  (сохранили обозначение) имеет место сходимость

$$v_{pj}^{\varepsilon_i} \rightarrow \hat{v}_{pj} \text{ слабо в } \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R}), \text{ но сильно в } L^2(\mathbb{R}), \text{ причем } \sum_{j=1}^J \|\hat{v}_{pj}; L^2(\mathbb{R})\|^2 = 1. \quad (70)$$

Важное последнее равенство, гарантирующее нетривиальность вектор-функции  $(\hat{v}_{p1}, \dots, \hat{v}_{pJ})$ , обеспечено оценкой (69) и проверенной сильной сходимостью (70).

Для произвольного набора функций  $\Psi_1, \dots, \Psi_J \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  введем в формулу

$$(u_p^\varepsilon, (\Delta + \lambda_p^\varepsilon) \psi^\varepsilon)_\Omega = (u_p^\varepsilon, (\partial_n - \varepsilon^{-1} a_0) \psi^\varepsilon)_\Gamma, \quad (71)$$

происходящую от интегрального тождества (3), пробную функцию

$$\psi^\varepsilon(x) = \chi_1(x)w_0(-\varepsilon^{-1}n)\Psi_1(\varepsilon^{-\theta}(s-s_j)) + \dots + \chi_J(x)w_0(-\varepsilon^{-1}n)\Psi_J(\varepsilon^{-\theta}(s-s_j)),$$

имитирующую асимптотический анзац (44). По определению функций  $\chi_j$  и  $w_0$  правая часть формулы (71) обращается в нуль, а проведенные выше выкладки приводят к соотношению

$$\sum_{j=1}^J \left( (\chi_j w_0 u_p^\varepsilon, (\partial_s^2 - \varepsilon^{-1} K_j(s-s_j)^{2m}) \Psi_j)_{\Omega_j} + \left( \lambda_p^\varepsilon + \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} + \frac{a_0 \kappa_0}{\varepsilon} \right) (\chi_j w_0 u_p^\varepsilon, \Psi_j)_{\Omega_j} + (\chi_j u_p^\varepsilon, R_j^\varepsilon(\Psi_j))_{\Omega_j} \right) = 0,$$

где для «остаточного» выражения  $R_j^\varepsilon(\Psi_j)$ , которое включает сомножителями экспоненту  $e^{-a_0 n/\varepsilon}$  и линейную комбинацию функций  $\Psi_j$   $\partial_s \Psi_j$  с коэффициентами  $O(1 + \varepsilon^{-1}|n|)$ , верна оценка  $\|R_j^\varepsilon(\Psi_j); L^2(\Omega_j)\| \leq c_\Psi \varepsilon^{-\theta+1/2}$ . Теперь, умножив последнее равенство на  $r_\varepsilon^{-1/2} \varepsilon^{2\theta}$ , перейдем к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$  в согласии со сходимостями (60), (70) и связями (62), (65), (68). В итоге ввиду взаимной независимости функций  $\Psi_1, \dots, \Psi_J$  получаем совокупность ( $j = 1, \dots, J$ ) интегральных тождеств

$$(\widehat{v}_{pj}, \partial_{\eta_j}^2 \Psi_j)_{\mathbb{R}} + K_j(\widehat{v}_{pj}, \eta_j^{2m} \Psi_j)_{\mathbb{R}} = \widehat{\mu}_p(\widehat{v}_{pj}, \Psi_j)_{\mathbb{R}} \quad \forall \Psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}),$$

которые как раз и означают, что пары  $\{\widehat{\mu}_p; \widehat{v}_{pj}\}$  удовлетворяют предельным дифференциальным уравнениям (46). Приняв во внимание последнее равенство из списка (70), формулируем полученный результат.

**Теорема 2.** При ограничении (40) и постоянном коэффициенте Робэна  $a_0 > 0$  предельные переходы (60) и (68) дают пары  $\{\widehat{\mu}_p; \widehat{v}_{pj}\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{W}_m^1(\mathbb{R})$ ,  $j = 1, \dots, J$ , среди которых хотя бы одна является собственной для предельного дифференциального уравнения (40).

**ЗАМЕЧАНИЕ 2.** Установленная локализация собственных функций задачи (1), (2), а также полученные оценки, в частности, приведшие к формуле (69), показывают, что условия ортогональности и нормировки (5) порождают соотношения  $(\widehat{v}_{p1}, \widehat{v}_{p1})_{\mathbb{R}} + \dots + (\widehat{v}_{pJ}, \widehat{v}_{pJ})_{\mathbb{R}} = \delta_{p,q}$ .

**9. Асимптотика собственных пар в случае вырожденных максимумов кривизны.** Следовое неравенство (59) позволяет выбрать коэффициент  $b > 0$  так, чтобы билинейная форма

$$\langle u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_\Omega + b\varepsilon^{-2}(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1}a_0(u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma \quad (72)$$

стала скалярным произведением в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon = H^1(\Omega)$ , причем

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq c_\Omega (\|\nabla_x u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-2}\|u^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|u^\varepsilon; L^2(\Gamma)\|^2), \quad c_\Omega > 0. \quad (73)$$

Введем еще компактный положительный, непрерывный и симметричный, а значит, самосопряженный оператор  $\mathcal{T}^\varepsilon$ , заданный при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega \quad \forall u^\varepsilon, \psi^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon.$$



В силу теорем 10.1.5 и 10.2.2 из [28] его существенный спектр состоит из одной точки  $\tau = 0$ , а дискретный образует бесконечно малую положительную монотонную последовательность нормальных собственных чисел

$$\tau_1^\varepsilon \geq \tau_2^\varepsilon \geq \tau_3^\varepsilon \geq \dots \geq \tau_k^\varepsilon \geq \dots \rightarrow +0. \quad (74)$$

Неравенство (73) показывает, что  $\tau_1^\varepsilon \leq c_\Omega^{-1} \varepsilon^2$ . Интегральное тождество (3) эквивалентно абстрактному уравнению  $\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon$  в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon$  с новым спектральным параметром

$$\tau^\varepsilon = \varepsilon^2(b + \varepsilon^2 \lambda^\varepsilon)^{-1}. \quad (75)$$

Последовательности (4) и (74) связаны именно формулой (75).

Следующее утверждение, известное как лемма о «почти собственных» числах и векторах (первоисточник [2]), вытекает из спектрального разложения резольвенты (см., например, [28; гл. 6]).

**Лемма 2.** Пусть  $\mathbf{u}^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$  и  $\tau^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$  таковы, что

$$\|\mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon - \tau^\varepsilon \mathbf{u}^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| =: \delta^\varepsilon \in (0, T^\varepsilon).$$

Тогда имеется собственное число  $\tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$ , подчиненное неравенству  $|\tau^\varepsilon - \tau_{n(\varepsilon)}^\varepsilon| \leq \delta^\varepsilon$ . Более того, для любого  $\delta_*^\varepsilon \in (\delta^\varepsilon, \tau^\varepsilon)$  найдутся коэффициенты  $\mathcal{C}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$ , при которых верны формулы

$$\left\| \mathbf{u}^\varepsilon - \sum_{i=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} \mathcal{C}_i^\varepsilon \mathcal{U}_i^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\delta^\varepsilon}{\delta_*^\varepsilon}, \quad \sum_{i=\mathbf{N}^\varepsilon}^{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1} |\mathcal{C}_i^\varepsilon|^2 = 1, \quad (76)$$

где  $\tau_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \tau_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  — набор всех собственных чисел оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  из (замкнутого) сегмента  $[\tau^\varepsilon - \delta_*^\varepsilon, \tau^\varepsilon + \delta_*^\varepsilon]$ , а соответствующие собственные векторы  $\mathcal{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon}^\varepsilon, \dots, \mathcal{U}_{\mathbf{N}^\varepsilon + \mathbf{X}^\varepsilon - 1}^\varepsilon$  подчинены условиям ортогональности и нормировки  $\langle \mathcal{U}_p^\varepsilon, \mathcal{U}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}$ .

Пусть  $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  — упорядоченная последовательность, полученная объединением последовательностей  $\{M_{jp}\}_{p \in \mathbb{N}}$  собственных чисел предельных уравнений (46),  $j = 1, \dots, J$ , а  $\Lambda_\ell$  —  $\varkappa_\ell$ -кратный ее член, т. е.

$$\Lambda_{\ell-1} < \Lambda_\ell = \Lambda_{\ell + \varkappa_\ell - 1} < \Lambda_{\ell + \varkappa_\ell}. \quad (77)$$

В качестве «почти собственных» пар оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  возьмем

$$\{\tau_k^\varepsilon = \varepsilon^2(b - a_0^2 - \varepsilon a_0 \kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta} \Lambda_\ell)^{-1}; \mathbf{u}_k^\varepsilon = \|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} v_k^\varepsilon\}, \quad k = \ell, \dots, \ell + \varkappa_\ell - 1, \quad (78)$$

причем для  $\Lambda_k = M_{j_k p_k}$  положим  $v_j^\varepsilon = 0$  при  $j \neq k$  и

$$v_k^\varepsilon(x) = \chi_{j_k}(x) w_0(-\varepsilon^{-1} n) V_{j_k p_k}(\varepsilon^{-\theta}(s - s_{j_k})), \quad (79)$$

где  $w_0$  — экспонента из формулы (9),  $\{M_{j_k p_k}; V_{j_k p_k}\}$  — собственная пара уравнения (46),  $\chi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  — произведение срезающих функций (14) и (45). Удобно считать, что  $\partial_n \chi_j = 0$  на  $\Gamma$ .

Оценим величину  $\delta_k^\varepsilon$  из леммы 2, найденную по собственной паре (78). Имеем

$$\begin{aligned} \delta_k^\varepsilon &= \|(\mathcal{T}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon) \mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \sup | \langle (\mathcal{T}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon) \mathbf{u}_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon \rangle_\varepsilon | \\ &= \tau_k^\varepsilon \|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup | (\nabla v_k^\varepsilon, \nabla \psi^\varepsilon)_\Omega - \varepsilon^{-1} a_0 (v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma \\ &\quad + (\varepsilon^{-2} a_0^2 + \varepsilon^{-1} a_0 \kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta} \Lambda_k) (v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega |. \end{aligned} \quad (80)$$

Здесь супремум вычисляется по единичной сфере в пространстве  $\mathcal{H}^\varepsilon$ , т. е.  $\|\psi^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$ , и для пробной функции  $\psi^\varepsilon \in H^1(\Omega)$  правая часть неравенства (73) равномерно по  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$  ограничена. Преобразуем выражение  $I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon)$  между последними знаками модуля в цепочке (80), считая, что  $\Lambda_k = M_{jp}$ . Используя формулу интегрирования по частям, выводим равенство

$$I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon) = (\Delta v_k^\varepsilon - (\varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta}M_{jp})v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega - (\partial_n v_k^\varepsilon - \varepsilon^{-1}a_0v_k^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Gamma.$$

Последнее скалярное произведение обращается в нуль согласно определениям функции (79) и срезки  $\chi_j$ , для которой по построению  $\partial_n \chi_j = 0$  на  $\Gamma$ . Кроме того, благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций  $w_0$  и  $V_{jp}$  коммутирование срезки с оператором  $\Delta$  привносит экспоненциально малую погрешность, обозначаемую по обыкновению многоточием. Итак,

$$I_k^\varepsilon(\psi^\varepsilon) = (\Delta(w_0 V_{jp}), \chi_j \psi^\varepsilon)_\Omega - ((\varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta}M_{jp})w_0 V_{jp}, \chi_j \psi^\varepsilon)_\Omega + \dots \quad (81)$$

Используя представление (6) оператора Лапласа, приходим к формуле

$$\begin{aligned} \Delta(w_0 V_{jp})(x) = e^{a_0 n/\varepsilon} & \left( \frac{a_0^2}{\varepsilon^2} V_{jp}(\eta_j) + \frac{a_0 \kappa(s) V_{jp}(\eta_j)}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon^{-2\theta} \partial_{\eta_j}^2 V_{jp}(\eta_j)}{(1 + n\kappa(s))^2} - \frac{n \partial_s \kappa(s) \varepsilon^{-\theta} \partial_{\eta_j} V_{jp}(\eta_j)}{(1 + n\kappa(s))^3} \right). \end{aligned}$$

Обозначим выражения из правой части через  $\mathcal{J}_0^\varepsilon, \dots, \mathcal{J}_3^\varepsilon$ . Первое из них присутствует в обоих скалярных произведениях из суммы (81) и потому исчезает из нее. Для последнего получаем, что

$$\begin{aligned} |(\mathcal{J}_3^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega| & \leq c_3 \left( \int_{-2d_\chi}^0 n^2 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \varepsilon^{-\theta} \left( \int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} \left| \frac{dV_{jp}}{d\eta_j}(\eta_j) \right|^2 ds \right)^{1/2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ & \leq C_3 \varepsilon^{3/2} \varepsilon^{-\theta} \varepsilon^{\theta/2} \varepsilon = C_3 \varepsilon^{(5-\theta)/2}. \end{aligned}$$

Здесь помимо непосредственных вычислений норм применена вытекающая из неравенства (73) оценка для множителя  $\|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\|$ .

В выражении  $\mathcal{J}_2^\varepsilon$  воспользуемся уравнением (46) и преобразуем следующую сумму:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_4^\varepsilon(n, s) & := \mathcal{J}_1^\varepsilon(n, s) + \mathcal{J}_2^\varepsilon(n, s) - (\varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-2\theta}M_{jp})w_0(\zeta)V_{jp}(\eta_j) \\ & = \frac{a_0(\kappa(s) - \kappa_0 + K_j(s - s_j)^{2m})}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} w_0(\zeta)V_{jp}(\eta_j) \\ & + \frac{n\kappa(s)}{1 + n\kappa(s)} \left( \frac{a_0 K_j(s - s_j)^{2m}}{\varepsilon(1 + n\kappa(s))} - \frac{a_0\kappa_0}{\varepsilon} - \varepsilon^{-2\theta}M_{jp}(2 + n\kappa(s)) \right) w_0(\zeta)V_{jp}(\eta_j). \end{aligned}$$

Таким образом, согласно представлению (40) имеем

$$\begin{aligned} |(\mathcal{J}_4^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_\Omega| & \leq c_4 \left( \left( \int_{-2d_\chi}^0 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \right. \\ & \times \frac{1}{\varepsilon} \left( \varepsilon^{2\theta(2m+1)} \int_{-2d_\chi}^{2d_\chi} \eta_j^{2(2m+1)} |V_{jp}(\eta_j)|^2 ds \right)^{1/2} + \left. \left( \int_{-2d_\chi}^0 n^2 e^{2a_0 n/\varepsilon} dn \right)^{1/2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left( \int_{-2d_x}^{2d_x} (\varepsilon^{-2}(s-s_j)^{4m} + \varepsilon^{-4\theta}) |V_{jp}(\eta_j)|^2 ds \right)^{1/2} \|\psi^\varepsilon; L^2(\Omega)\| \\ & \leq C_4(\varepsilon^{1/2}\varepsilon^{-\theta/2} + \varepsilon^{3/2}(\varepsilon^{-1+\theta/2} + \varepsilon^{-3\theta/2}))\varepsilon \leq 3C_4\varepsilon^{(3-\theta)/2}. \end{aligned}$$

Кроме того, посредством вычислений, более простых, чем приведенные, показываем, что в силу определений (72) и (79) выполнена следующая оценка снизу:

$$\|v_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 \geq c_0(\varepsilon^{-2}\varepsilon\varepsilon^\theta + \varepsilon^{-1}\varepsilon^\theta + \varepsilon^{-2}\varepsilon\varepsilon^\theta) = 3c_0\varepsilon^{\theta-1}, \quad c_0 > 0.$$

В итоге, собрав полученные неравенства, видим, что величина (80) не превосходит

$$c_k\varepsilon^2\varepsilon^{(1-\theta)/2}\varepsilon^{3/2} = c_k\varepsilon^{4-\theta/2},$$

а значит, лемма 2 предоставляет собственные числа  $\tau_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon$  и  $\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon$  соответственно оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  и задачи (1), (2), для которых (чисел) верны соотношения

$$\begin{aligned} |\tau_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon - \tau_k^\varepsilon| & \leq c_k\varepsilon^{4-\theta/2} \Leftrightarrow |\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k| \\ & \leq c_k\varepsilon^{-\theta/2}(b + \varepsilon^2\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon)(b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k). \end{aligned} \quad (82)$$

Отсюда сначала выводим, что

$$\frac{1}{2}(b + \varepsilon^2\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon) \leq b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k \text{ при } c_k\varepsilon^{2-\theta/2}(b - a_0^2 - \varepsilon a_0\kappa_0 + \varepsilon^{2-\theta}\Lambda_k) \leq \frac{1}{2},$$

а затем, подобрав подходящие  $\varepsilon_k > 0$  и  $C_k > 0$ , получаем окончательную оценку

$$|\lambda_{N_k^\varepsilon}^\varepsilon + \varepsilon^{-2}a_0^2 + \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 - \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k| \leq C_k\varepsilon^{-\theta/2} \text{ при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_k]. \quad (83)$$

Несмотря на то, что мажоранта неограниченно возрастает при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , формула (83) оправдывает асимптотику какого-то члена последовательности (4), поскольку все показатели степеней малого параметра в левой части строго меньше  $-\theta/2$ . Ближайшая цель — убедиться в том, что в асимптотической формуле (83) фигурирует именно собственное число  $\lambda_k^\varepsilon$ .

**Теорема 3.** При ограничениях (40) и  $a(s) = a_0$  для любого  $k \in \mathbb{N}$  найдутся такие положительные  $\varepsilon_k$  и  $C_k$ , что для члена  $\lambda_k^\varepsilon$  последовательности (4) собственных чисел задачи (1), (2) выполнено неравенство (83), в котором  $N_k^\varepsilon = k$ , а  $\{\Lambda_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$  — упорядоченная объединенная последовательность собственных чисел  $M_{jp}$  предельных уравнений (46),  $j = 1, \dots, J$ .

**Доказательство.** Сначала рассмотрим кратное собственное число  $\Lambda_\ell$  из формулы (77) и, воспользовавшись второй частью леммы 2, убедимся в том, что построенное отображение  $k \mapsto N_k^\varepsilon$  можно сделать инъекцией. Положим  $\delta^\varepsilon = \varepsilon^{-\theta/2} \max\{C_\ell, \dots, C_{\ell+\kappa_\ell-1}\}$  и  $\delta_*^\varepsilon = t^{-1}\delta^\varepsilon$ , а параметр  $t \in (0, 1)$  зафиксируем далее. Обозначим через  $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$  столбцы, а через  $\mathcal{S}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{S}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in H^1(\Omega)$  — линейные комбинации собственных векторов оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$ , возникшие в формуле (76) (при необходимости выравниваем высоты столбцов добавлением нулевых элементов). Благодаря условиям ортогональности и нормировки собственных векторов имеем

$$\begin{aligned} |\mathcal{C}_{(q)}^\varepsilon \cdot \mathcal{C}_{(p)}^\varepsilon - \delta_{p,q}| & = |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(q)}^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon, \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| \\ & \quad + |\langle \mathcal{S}_{(p)}^\varepsilon - \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon| + |\langle \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{p,q}| \leq 2t + 2t + 0 = 4t. \end{aligned}$$

Здесь учтены обе оценки (76) и определение величины  $\delta_*^\varepsilon$ , а также дизъюнктивность носителей функций  $\mathbf{u}_p^\varepsilon$  и  $\mathbf{u}_q^\varepsilon$  при  $p \neq q$  вместе с равенством  $\|\mathbf{u}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$ . Следовательно, при малом  $t$  столбцы  $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon$  «почти ортонормированы» в пространстве  $\mathbb{R}^{\mathbf{X}^\varepsilon}$ , что возможно только в случае  $\mathbf{X}^\varepsilon \geq \kappa_\ell$ . Именно в этом и нужно было убедиться, так как после фиксации подходящего  $t > 0$  не менее  $\kappa_\ell$  собственных чисел  $\tau_{N_\ell}^\varepsilon, \dots, \tau_{N_\ell + \kappa_\ell - 1}^\varepsilon$  попадают на сегмент  $[\tau_\ell^\varepsilon - t^{-1}\delta^\varepsilon, \tau_\ell^\varepsilon + t^{-1}\delta^\varepsilon]$ , а некоторое увеличение его длины по существу не сказывается на финальной оценке (83).

Итак, каждому члену  $\Lambda_p$  последовательности  $\{\Lambda_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  поставлено в соответствие свое собственное число  $\lambda_{N_p}^\varepsilon$ , а значит,

$$\lambda_p^\varepsilon \leq \lambda_{N_p}^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_p + \mathbf{C}_p\varepsilon^{-\theta/2}. \quad (84)$$

Таким образом, во-первых,  $p \leq N_p^\varepsilon$  и, во-вторых,

$$\lambda_p^\varepsilon \leq -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_k + \mathbf{C}_k\varepsilon^{-\theta/2},$$

т. е. выполнено неравенство (51) с мажорантой  $\Lambda_p = \Lambda_p + \mathbf{C}_p$ . Возьмем  $p = \ell + \kappa_\ell - 1$  из формулы (77) и предположим, что  $N_p^\varepsilon > p$  для некоторой положительной бесконечно малой последовательности  $\{\varepsilon_i^p\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Тогда найдутся удовлетворяющие неравенству (51) собственные числа  $\lambda_{N_i}^{\varepsilon_i^p}$  задачи (1), (2), для которых собственные функции  $u_{N_i}^{\varepsilon_i^p}$  ортогональны в пространстве  $L^2(\Omega)$  другим и, что важно, разным собственным функциям  $u_{q_1}^\varepsilon, \dots, u_{q_{\ell+\kappa_\ell-1}}^\varepsilon$  той же задачи, отвечающие собственным числам из сегмента  $[0, -\varepsilon^{-2}a_0^2 - \varepsilon^{-1}a_0\kappa_0 + \varepsilon^{-\theta}\Lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}]$ . Для всех них справедлива теорема 2, а значит, ввиду установленной сильной сходимости (70) атрибут  $\bar{v}_N \in H^1(\mathbb{R})^J$ , найденный согласно формуле (68) по последовательности  $\{u_{N_i}^{\varepsilon_i^p}\}_{i \in \mathbb{N}}$ , ортогонален не менее  $\ell + \kappa_\ell - 1$  собственным функциям  $V_{jp}$  уравнений (46) при  $j = 1, \dots, J$  и  $M_{jp} \leq \Lambda_p$  (замечание 2). В то же время предельное собственное число  $\tilde{\mu}_N$  также не превосходит  $\Lambda_p = \Lambda_\ell = \dots = \Lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}$ . Эти наблюдения противоречат способу образования последовательности  $\{\Lambda_q\}_{q \in \mathbb{N}}$ . Следовательно,  $p = N_p^\varepsilon$  и доказательство теоремы 3 закончено.

Займемся асимптотикой собственных функций. Если собственное число  $\Lambda_\ell$  простое (например, точка глобального максимума кривизны единственна), то применение с этой целью второй части леммы 2 элементарно. Рассмотрим  $\kappa_\ell$ -кратное собственное число  $\Lambda_\ell$  из формулы (77). По доказанному в теореме 3 найдется такой множитель  $\varrho_\ell > 0$ , что в  $\varrho_\ell\varepsilon^{4-\theta}$ -окрестности точки  $\tau_\ell^\varepsilon$  (ср. формулу (82)) располагаются собственные числа  $\tau_\ell^\varepsilon, \dots, \tau_{\ell+\kappa_\ell-1}^\varepsilon$  оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  и только они. Следовательно, найдутся нормированные столбцы  $\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon \in \mathbb{R}^{\kappa_\ell}$ , для которых

$$\left\| \mathbf{u}_k^\varepsilon - \sum_{i=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} \mathcal{C}_{(k)i}^\varepsilon \mathcal{U}_i^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{\mathbf{c}_k \varepsilon^{4-\theta/2}}{\varrho_\ell \varepsilon^{4-\theta}} = 2 \frac{\mathbf{c}_k}{\varrho_\ell} \varepsilon^{\theta/2}.$$

Поскольку по построению  $\langle \mathbf{u}_p^\varepsilon, \mathbf{u}_q^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{p,q}$ , условия ортогональности и нормировки для собственных векторов оператора  $\mathcal{T}^\varepsilon$  означают, что  $(\kappa_\ell \times \kappa_\ell)$ -матрица  $\mathcal{C}^\varepsilon := (\mathcal{C}_{(\ell)}^\varepsilon, \dots, \mathcal{C}_{(\ell+\kappa_\ell-1)}^\varepsilon)$  ортогональная (вещественная унитарная). После ее обращения  $\mathcal{B}^\varepsilon := (\mathcal{C}^\varepsilon)^{-1}$  (т. е. транспонирования) остается принять во внимание различие нормировок собственных векторов и функций в пространствах  $\mathcal{H}^\varepsilon$  и  $H^1(\Omega)$  (см. неравенство (73)) и сформулировать полученный результат.

**Теорема 4.** В условиях теоремы 3 для ортонормированных в пространстве  $L^2(\Omega)$  собственных функций задачи (1), (2), отвечающих ее собственным числам  $\lambda_\ell^\varepsilon, \dots, \lambda_{\ell+\kappa_\ell-1}^\varepsilon$  (см. формулу (77)) найдутся такие ортогональная  $(\kappa_\ell \times \kappa_\ell)$ -матрица  $\mathcal{B}^\varepsilon = (\mathcal{B}_{pq}^\varepsilon)$  и величины  $\varepsilon_\ell > 0$ ,  $\mathbf{c}_\ell > 0$ , что при  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_\ell]$  выполнены оценки

$$\varepsilon^2 \|\nabla u_q^\varepsilon - \nabla \mathbf{S}_q^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 + \|u_q^\varepsilon - \mathbf{S}_q^\varepsilon; L^2(\Omega)\|^2 \leq \mathbf{c}_\ell \varepsilon^{\theta/2},$$

где  $q = \ell, \dots, \ell + \kappa_\ell - 1$  и

$$\mathbf{S}_q^\varepsilon(x) = \frac{2a_0}{\varepsilon^{1+\theta}} \sum_{p=\ell}^{\ell+\kappa_\ell-1} \mathcal{B}_{pq}^\varepsilon \chi_{j_p}(x) w_0 \left( -\frac{n}{\varepsilon} \right) V_{j_p k_p} \left( \frac{s - s_{j_p}}{\varepsilon^\theta} \right) \quad \text{в случае } \Lambda_p = M_{j_p k_p},$$

а  $w_0$  — экспонента (9),  $V_{j_p k_p}$  — собственная функция уравнения (46) и  $\theta = \frac{1}{2(1+m)}$ .

**10. Разное.** 1°. **Гладкость границы и коэффициента Робэна.** Требования  $a \in C^\infty(\Gamma)$  и  $\Gamma \in C^\infty$ , разумеется, излишни — при выводе и обосновании асимптотических разложений принимали участие примитивные формулы Тейлора, и поэтому в разд. 3, 4 и 7 достаточно предположить принадлежность коэффициента Робэна и кривизны контура классам Гёльдера  $C^{3,\delta}$ . В разд. 5 при нахождении первых поправочных асимптотических членов достаточно двукратная непрерывная дифференцируемость границы.

Если  $a$  — непрерывная кусочно-гладкая положительная функция с глобальным максимумом в точке  $s_0 \in \Gamma$ , причем

$$a(s) = a_0 - K|s - s_0| + O((s - s_0)^2), \quad K > 0,$$

то алгоритм построения асимптотик в целом сохраняется, однако в растяжении (10) возникает показатель  $\theta = 1/3$ , а предельным уравнением вместо (24) становится уравнение Эйри на оси  $\mathbb{R} \ni \eta$  с дифференциальным оператором  $-\partial_\eta^2 + K|\eta|$  (см., например, [28]). Схожие процедуры можно найти в публикациях [29, 30], посвященных задачам Дирихле в тонких многогранниках и многоугольниках (треугольнике).

В случае кусочно-гладкой границы спектр задачи Робэна для оператора Лапласа приобретает разнообразные особенности строения, например, в областях с пикообразными заострениями могут появиться непустые существенный и остаточный спектры (см. [31–34] и др.). Не останавливаясь на подробностях, упомянем статьи [11, 35, 36], посвященные названной задаче в областях с угловыми и коническими точками. Приведенные списки ссылок конечно же неполные.

**2°. Простой пример.** В прямоугольнике  $\Omega = (0, H) \times (0, 2\pi)$  рассмотрим дифференциальное уравнение (1) с краевыми условиями и условиями периодичности

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_1}(0, x_2) &= \frac{1}{\varepsilon} u^\varepsilon(0, x_2), \quad u^\varepsilon(H, x_2) = 0, \quad x_2 \in (0, 2\pi), \\ u^\varepsilon(x_1, 0) &= u^\varepsilon(x_1, 2\pi), \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_2}(x_1, 2\pi), \quad x_1 \in (0, H). \end{aligned} \quad (85)$$

Разделив переменные и построив асимптотику собственных чисел обыкновенного дифференциального уравнения на отрезке  $(0, H)$ , обнаруживаем следующие серии собственных чисел задачи (1), (85) с устойчивыми асимптотиками:

$$\{k^2 - \varepsilon^{-2} + O(e^{-1/\varepsilon})\}_{k \in \mathbb{N}_0^2} \text{ и } \{k^2 + 4H^{-2}\pi^2(1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2))\}_{k \in \mathbb{N}_0^2}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (86)$$

Здесь  $\mathbb{N}_0^2 = \{0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots\}$ . Первая серия содержит отрицательные члены, которые при  $\varepsilon \rightarrow +0$  уходят на отрицательную бесконечность, но при больших индексах  $k \in \mathbb{N}_0^2$  также и положительные собственные числа, перемешивающиеся с членами остальных ( $j \in \mathbb{N}$ ) серий (86). Тот факт, что последние члены остаются положительными при всех малых  $\varepsilon > 0$ , т. е. не проникают в отрицательную полуось, согласуется с асимптотическими формулами из разд. 5.

**3°. Полные асимптотические разложения.** При условиях гладкости из разд. 1 благодаря проверенной локализации собственных функций для отрицательной части спектра задачи (1), (2) и простоте собственных чисел индивидуальных предельных задач продолжение итерационных процессов, начатых в разд. 3, 4, 7, и построение полных асимптотических разложений собственных пар производится при помощи давно известных процедур (см. статьи [2, 4], монографии [25, 26, 37] и многие другие публикации). То же, разумеется, можно сказать и о ситуации из разд. 2. Следует подчеркнуть, что построение бесконечных рядов в сингулярно возмущенных спектральных задачах зачастую малополезное занятие, поскольку, как показано в [38, гл. 7] (см. также [39, 40]), привлечение в асимптотические формулы вида (83) даже всего двух-трех поправочных асимптотических членов обычно провоцирует несоразмерные увеличение коэффициента  $\mathbf{C}_k$  в мажоранте и уменьшение грани  $\varepsilon_k$  допустимого изменения параметра. Лишь для некоторых весьма специфических способов возмущения границы установлена [41, 42] аналитическая зависимость простых собственных чисел от малых параметров. Вместе с тем построение младших членов асимптотики позволяет вывести точные оценки остатков в разложениях собственных пар — это относится и к теоремам 3 и 4, в которых таким путем мажоранты могут быть уменьшены до  $\mathbf{C}_\ell^\bullet$  и  $\mathbf{c}_\ell^\bullet \varepsilon^\theta$  соответственно, впрочем при неконтролируемом уменьшении величины  $\varepsilon_k$ .

Разложения в бесконечные асимптотические ряды доступны не только для основной, но и вторичных, в частности, положительной, серий собственных чисел. Автору известна лишь одна работа [43] с подобным, вполне неожиданным, результатом для разных диапазонов спектра.

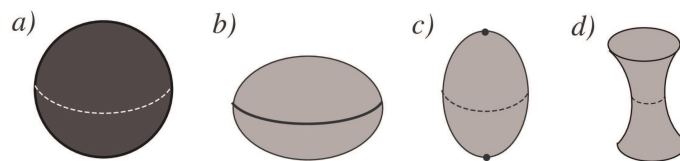


Рис. 3. Шар (a), «сплюснутый» (b) и тонкий (c) эллипсоиды — зоны локализации: соответственно поверхность, линия и две точки. «Песочные часы» (d).

**4°. Многомерные области.** Исследование собственных пар спектральных краевых задач с большим отрицательным коэффициентом Робэна проводилось преимущественно в плоских областях. По поводу асимптотик в многомерных областях упомянем содержательную работу [44] и прокомментируем формальный анализ лишь при удобной — эллипсоидальной — геометрии области, предоставляющей различные типы локализации собственных функций, но в общем случае разнообразие асимптотических анзацев разрастается неимоверно. Пусть коэффициент Робэна  $a = a_0$  постоянен и

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : \alpha_1^{-2} x_1^2 + \alpha_2^{-2} x_2^2 + \alpha_3^{-2} x_3^2 = 1\}, \quad \alpha_j > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

Если  $\alpha_j = 1$  и  $\Omega$  — единичный шар (рис. 3, *a*), то метод Вишика — Люстерника [2–4] без труда дает асимптотику собственных пар задачи (1), (2) и, в частности, устанавливает локализацию собственных функций около всей сферической поверхности. Асимптотический анализ из разд. 3 и 2 (см. также [8]) подсказывает, что при  $1 = \alpha_1 \geq \alpha_2 > \alpha_3$ , т. е. в случае «сплюсненного» эллипсоида (рис. 3, *b*), наблюдается концентрация собственных функций около длинного экватора. Наконец, при  $\alpha_1, \alpha_2 < \alpha_3 = 1$ , т. е. для сигарообразного эллипсоида нетрудно предсказать эффект локализации около точек  $x = (0, 0, \pm 1)$  (рис. 3, *c*) и появление в качестве предельного уравнения двумерного аналога уравнения гармонического осциллятора (24)

$$-\Delta V(\eta) - (A_1^2 \eta_1^2 + A_2^2 \eta_2^2) V(\eta) = M V(\eta), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2,$$

собственные функции которого по-прежнему обладают экспоненциальным затуханием на бесконечности (см., например, [21, 29]).

Для сложно устроенной геометрии тела и при отсутствии ярко выраженных точек максимумов кривизн поверхности (ср. [44]), в частности, в случае «седловин» (рис. 3, *d*) асимптотика даже первых собственных пар задачи (1), (2) с постоянным коэффициентом Робэна остается неизученной.

Как и в плоской ситуации, наличие изолированных точек глобального максимума переменного коэффициента Робэна  $a$  существенно упрощает асимптотические конструкции (ср. разд. 4 и разд. 3, а также см. уже упоминавшиеся статьи [18–22], относящиеся к другим задачам, но использующие похожие приемы анализа). Впрочем, если глобальный максимум реализуется на разомкнутой дуге, построение асимптотики встречает серьезные, пока не преодоленные трудности (см. обсуждение в публикации [29]).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
3. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Асимптотическое поведение решений линейных дифференциальных уравнений с большими или быстроменяющимися коэффициентами и граничными условиями // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 4. С. 27–95.
4. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамопряженных дифференциальных уравнений. I. // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 3. С. 3–80.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика (релятивистская теория). М.: Наука, 1974.
8. Камоцкий И. В., Назаров С. А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Науч. книга, 1999. Т. 18. С. 105–148.
9. Lacey A. A., Ockendon J. R., Sabina J. Multidimensional reaction diffusion equations with nonlinear boundary conditions // SIAM J. Appl. Math. 1998. V. 58, N 5. P. 1622–1647.
10. Lou Y., Zhu M. A singularly perturbed linear eigenvalue problem in  $C^1$  domains // Pacific J. Math. 2004. V. 214, N 2. P. 323–334.
11. Levitin M., Parnowski L. On the principal eigenvalue of a Robin problem with a large parameter // Math. Nachr. 2008. V. 281, N 2. P. 272–281.
12. Pankrashkin K. On the asymptotics of the principal eigenvalue problem for a Robin problem with a large parameter in a planar domain // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2013. V. 4, N 4. P. 474–483.

13. Exner P., Minakov A., Parnowski L. Asymptotic eigenvalue estimates for a Robin problem with a large parameter // *Port. Math.* 2014. V. 71, N 2. P. 141–156.
14. Daners D., Kennedy J. B. On the asymptotic behaviour of the eigenvalues of a Robin problem // *Differ. Integr. Equ.* 2010. V. 23. P. 659–669.
15. Helffer B., Kachmar A. Eigenvalues for the Robin Laplacian in domains with variable curvature // *Trans. Am. Math. Soc.* 2017. V. 369, N 2. P. 3253–3287.
16. Helffer B., Kachmar A. Semi-classical edge states for the Robin Laplacian // *Mathematika*. 2022. V. 68, N 2. P. 454–485.
17. Назаров С. А. «Паразитные» собственные значения задачи с краевыми условиями третьего типа // *Журнал вычисл. математики и мат. физики*. 2023. Т. 63, № 7. С. 1128–1144.
18. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of narrow periodic waveguides // *Russ. J. Math. Phys.* 2008. V. 15, N 2. P. 238–242.
19. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // *Israel J. Math.* 2009. V. 170. P. 337–354.
20. Borisov D., Freitas P. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // *Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire*. 2009. V. 26, N 2. P. 547–560.
21. Borisov D., Freitas P. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in  $\mathbb{R}^d$  // *J. Funct. Anal.* 2010. V. 258, N 3. P. 893–912.
22. Nazarov S. A., Perez E., Taskinen J. Localization effect for Dirichlet eigenfunctions in thin non-smooth domains // *Trans. Am. Math. Soc.* 2016. V. 368, N 1. P. 4787–4829.
23. Назаров С. А. Локализация собственных колебаний тонких упругих прокладок // *Прикл. математика и механика*. 2024. Т. 88, № 1. С. 104–138.
24. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.. Berlin: Akademie-Verl., 1991. V. 1 & 2.
25. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
26. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
27. Бабич В. М. Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
28. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
29. Назаров С. А. Околовершинная локализация собственных функций задачи Дирихле в тонких многогранниках // *Сиб. мат. журн.* 2013. Т. 84, № 3. С. 655–672.
30. Ourmières-Bonafos T. Dirichlet eigenvalues of asymptotically flat triangles // *Asymptot. Anal.* 2015. V. 92, N 3–4. P. 279–312.
31. Daners D. Robin boundary problems on arbitrary domains // *Trans. Am. Math. Soc.* 2000. V. 352, N 4. P. 4207–4236.
32. Daners D. A Faber–Krahn inequality for Robin problems in any space dimension // *Math. Ann.* 2006. V. 335, N 4. P. 767–785.
33. Nazarov S. A., Taskinen J. Spectral anomalies of the Robin Laplacian in non-Lipschitz domains // *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*. 2013. V. 20, N 1. P. 27–90.
34. Kovarik H., Pankrashkin K. Robin eigenvalues on domains with peaks // *J. Differ. Equ.* 2019. V. 267, N 4. P. 1600–1630.
35. Pankrashkin K. On the discrete spectrum of Robin Laplacians in conical domains // *Math. Model. Nat. Phenom.* 2016. V. 11, N 2. P. 100–110.
36. Khalile M., Pankrashkin K. Eigenvalues of Robin Laplacians in infinite sectors // *Math. Nachr.* 2018. V. 291, N 4. P. 928–965.
37. Kozlov V. A., Maz'ya V. G., Movchan A. B. Asymptotic analysis of fields in multi-structures.. Oxford: Clarendon Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).
38. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
39. Назаров С. А. Равномерные оценки остатков в асимптотических разложениях решений задачи о собственных колебаниях пьезоэлектрической пластины // *Проблемы математического анализа*. Новосибирск: Науч. книга, 2003. Т. 25. С. 99–188.
40. Lobo M., Nazarov S. A., Perez E. Eigen-oscillations of contrasting non-homogeneous elastic bodies: asymptotic and uniform estimates for eigenvalues // *IMA J. Appl. Math.* 2005. V. 70, N 3. P. 419–458.



- 
41. Lanza de Cristoforis M. Asymptotic behavior of the solutions of the Dirichlet problem for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Analysis. 2008. V. 28, N 1. P. 63–93.
  42. Lanza de Cristoforis M. Simple Neumann eigenvalues for the Laplace operator in a domain with a small hole. A functional analytic approach // Rev. Mat. Complut. 2012. V. 24, N 2. P. 369–412.
  43. Назаров С. А. Асимптотические разложения собственных чисел задачи Стеклова в сингулярно возмущенных областях // Алгебра и анализ. 2014. Т. 26, № 2. С. 119–184.
  44. Pankrashkin K., Popoff N. Mean curvature bounds and eigenvalues of Robin Laplacians // Calculus of Variations and Partial Differ. Equ. 2015. V. 54, N 2. P. 1947–1961.

*Поступила в редакцию 25 августа 2025 г.*

*После доработки 25 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 26 сентября 2025 г.*

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН,

Набережная реки Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191011

`srgnazarov@yahoo.co.uk`, `srgnazarov108@gmail.com`

УДК 517.51

## ОТОБРАЖЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА МЕЖДУ МЕТРИЧЕСКИМИ ПРОСТРАНСТВАМИ С МЕРОЙ. ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ

А. С. Романов

**Аннотация.** Изучаются свойства отображений, индуцирующих при замене переменной операторы композиции в функциональных пространствах соболевского типа на метрических пространствах с мерой.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.611

**Ключевые слова:** метрические пространства, функции соболевского типа, отображения метрических пространств, операторы композиции.

*Светлой памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе*

Уже больше трех десятилетий активно развивается анализ на разнообразных метрических структурах, в том числе и в наиболее общей ситуации — непосредственно на метрических пространствах. Наряду с привычным определением, основанным на существовании обобщенных производных, соболевские пространства функций с первыми производными в регулярных областях  $G \subset R^n$  допускают альтернативные описания, формулируемые в терминах метрики и меры Лебега и не использующие в явном виде линейной структуры евклидова пространства и дифференцирования. Это позволяет на метрических пространствах с мерой помимо классов суммируемых функций определить различные классы функций с «обобщенной гладкостью», которые можно считать функциональными пространствами соболевского типа, поскольку в евклидовом случае они совпадают с пространствами Соболева  $W_p^1(G)$ . При таком подходе к определению пространств соболевского типа они наследуют в метрическом случае некоторые свойства классических пространств Соболева  $W_p^1(G)$ . Получены метрические аналоги различных евклидовых результатов, в том числе аналоги соболевских теорем вложения.

Цель изучения на метрических пространствах с мерой различных функциональных классов соболевского типа и связанных с ними отображений метрических пространств заключается в получении весьма универсальных метрических результатов и в разработке новых методов доказательств, не использующих линейную структуру в области определения. Метрические результаты применимы в различных ситуациях, поскольку не связаны с конкретными метрическими пространствами и, как правило, определяются соотношением меры и метрики. К примеру, введенные Хайлашем [1] функциональные пространства соболевского типа  $M_p^1(X, d, \mu)$  использовались при изучении пространств Соболева в

---

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0005).

© 2025 Романов А. С.

евклидовых областях с нерегулярными границами [2] и при описании следов соболевских функций на фракталах [3].

В работе [4] имеется краткий обзор по данной тематике, в котором можно найти ссылки на статьи, содержащие более полную библиографию. Основными объектами изучения в [4] были функциональные пространства  $M_p^1(X, d, \mu)$  и связанные с ними отображения класса  $M_p^1(X, Y)$ , действующие из метрического пространства  $(X, d)$  в метрическое пространство  $(Y, \rho)$ .

В этой работе мы продолжаем изучение различных вопросов, связанных с пространствами соболевского типа  $M_p^1(X, d, \mu)$ .

В первом параграфе работы содержатся необходимые сведения о свойствах функций из пространств соболевского типа  $M_p^1(X, d, \mu)$ . Во втором параграфе рассматриваются отображения класса  $M_p^1(X, Y)$ , формулируются известные и доказываются новые свойства таких отображений, в частности, доказываются полнота пространства  $M_p^1(X, Y)$ . В третьем параграфе изучаются свойства отображений метрических пространств  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ , индуцирующих по правилу  $\varphi^* u = u \circ \varphi$  ограниченные операторы композиции в шкале пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu).$$

### § 1. Функциональные пространства соболевского типа $M_p^1(X, d, \mu)$

В этом параграфе приведем для удобства формулировки основных определений и известных результатов, которые потребуются в дальнейшем.

Далее будем предполагать, что полное метрическое пространство  $(X, d)$  имеет конечный диаметр, а конечная регулярная борелевская мера  $\mu$  имеет носитель в множестве  $X$ .

Функцию  $g : X \rightarrow [0, \infty)$  будем называть *допустимой для  $\mu$ -измеримой функции  $u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$* , если существует такое множество  $E \subset X$ , что  $\mu(E) = 0$  и неравенство

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (1.1)$$

выполняется для всех точек  $x, y \in X \setminus E$ .

Для функции  $u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  при  $p \geq 1$  символом  $D_p(u)$  обозначим множество всех допустимых функций, принадлежащих пространству Лебега  $L_p(X, \mu)$ .

Определим два функциональных пространства следующим образом:

$$S_p^1(X, d, \mu) = \{u : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid D_p(u) \neq \emptyset\};$$

$$M_p^1(X, d, \mu) = \{u \in L_p(X, \mu) \mid u \in S_p^1(X, d, \mu)\}.$$

Полунорма в пространстве  $S_p^1(X, d, \mu)$  и норма в пространстве  $M_p^1(X, d, \mu)$  определяются равенствами

$$\|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\| = \inf_{g \in D_p(u)} \|g \mid L_p(X, \mu)\|,$$

$$\|u \mid M_p^1(X, d, \mu)\| = \|u \mid L_p(X, \mu)\| + \|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\|.$$

В работе [1] показано, что пространство  $M_p^1(X, d, \mu)$  банахово. Отметим, что в силу конечности диаметра метрического пространства и конечности меры следствием неравенства (1.1) является совпадение пространств  $S_p^1(X, d, \mu)$  и  $M_p^1(X, d, \mu)$  как множеств функций.

В евклидовых областях  $G \subset R^n$  с липшицевой границей пространство  $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$ , рассматриваемое относительно стандартной евклидовой метрики и меры Лебега, и классическое пространство Соболева  $W_p^1(G)$  совпадают как множества функций, а их нормы эквивалентны [1]. Это свойство позволяет считать пространство  $M_p^1(G, |\cdot|, m_n)$  естественным метрическим аналогом пространства Соболева  $W_p^1(G)$  и называть его *пространством соболевского типа*.

Различные свойства пространств  $M_p^1(X, d, \mu)$  и их взаимосвязь с другими классами функций изучались многими авторами. Отметим некоторые нужные нам результаты.

Для пространств  $M_p^1(X, d, \mu)$  содержательную теорию, включающую в себя различные варианты теорем вложения, удастся получить в случае, когда мера  $\mu$  удовлетворяет простому геометрическому «условию удвоения»

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C_d \mu(B(x, r)), \quad (1.2)$$

т. е. мера шара удвоенного радиуса допускает оценку сверху через меру исходного шара.

Условие удвоения обеспечивает выполнение леммы Витали о покрытии и связанных с ней свойств локально суммируемых функций.

Следствием условия удвоения является оценка снизу меры произвольного шара  $B(x, r)$  при  $r \leq \text{diam}(X)$ :

$$\mu(B(x, r)) \geq Cr^s. \quad (1.3)$$

В различных теоремах вложения показатель  $s \leq \log_2 C_d$ , называемый *показателем регулярности меры  $\mu$* , играет в некотором смысле роль «размерности» метрического пространства  $(X, d)$  относительно меры  $\mu$ .

Далее мы будем предполагать, что мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и имеет показатель регулярности  $s > 1$ .

Символом  $u_E$  будем обозначать среднее значение функции  $u$  на множестве  $E$ :

$$u_E = \int_E u d\mu = \frac{1}{\mu(E)} \int_E u d\mu.$$

Следующее утверждение было доказано в теореме 6 работы [1].

**Лемма 1.1** [1]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения, является  $s$ -регулярной и  $u \in M_p^1(X, d, \mu)$ . Тогда

1) при  $1 < p < s$  функция  $u$  принадлежит  $L_q(X, \mu)$ , где  $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$ , и

$$\|u \mid L_q(X, \mu)\| \leq C \|u \mid M_p^1(X, d, \mu)\|;$$

2) если  $p = s$ , то функция  $u$  принадлежит  $L_q(X, \mu)$  при всех  $q \in [1, \infty)$ ;

3) при  $p > s$  функция  $u$  принадлежит  $L_\infty(X, \mu)$  и

$$\|u - u_X \mid L_\infty(X, \mu)\| \leq C \mu(X)^{1/s-1/p} \|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \quad (1.4)$$

Нам будет удобнее вместо п. 3 использовать довольно простое следствие оценки (1.4).

**Лемма 1.2** [4]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна,  $s < p < \infty$ . Тогда для всякой функции  $u \in M_p^1(X, d, \mu)$  существует эквивалентная ей непрерывная функция  $\tilde{u}$ , для которой при всех  $x, y \in X$  выполняется неравенство

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq C [d(x, y)]^{1-s/p} \|u \mid S_p^1(X, d, \mu)\|. \quad (1.5)$$

Пусть  $\alpha \in (0, 1)$ . Заменяя в определении пространств  $M_p^1(X, d, \mu)$  и  $S_p^1(X, d, \mu)$  неравенство (1.1) на

$$|u(x) - u(y)| \leq [d(x, y)]^\alpha (g(x) + g(y)),$$

получим функциональные пространства  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$  и  $S_p^\alpha(X, d, \mu)$ .

Функциональные пространства  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$ , быть может, не совсем привычны, но, с одной стороны, они имеют простое определение и полученные для них результаты являются весьма универсальными, с другой стороны, они близки к пространствам Бесова  $B_{p,p}^\alpha(X, d, \mu)$ . Как показано в работе [5], для любого  $\varepsilon > 0$

$$B_{p,p}^\alpha(X, d, \mu) \subset M_p^\alpha(X, d, \mu) \subset B_{p,p}^{\alpha-\varepsilon}(X, d, \mu).$$

Рассмотрим на множестве  $X$  новую гёльдерову метрику  $d_\alpha$ , полагая

$$d_\alpha(x, y) = [d(x, y)]^\alpha.$$

Для шара в метрике  $d_\alpha$  будем использовать обозначение  $B_\alpha(x, r)$ . Поскольку

$$\mu(B_\alpha(x, r)) = \mu(B(x, r^{1/\alpha})) \geq Cr^{s/\alpha},$$

относительно метрики  $d_\alpha$  мера  $\mu$  является  $s/\alpha$ -регулярной.

Далее будем использовать термин «гёльдеровы классы», имея в виду пространства соболевского типа  $M_p^\alpha$ , связанные с соответствующей гёльдовой метрикой. Вполне очевидно, что  $M_p^\alpha(X, d, \mu) = M_p^1(X, d_\alpha, \mu)$  и  $S_p^\alpha(X, d, \mu) = S_p^1(X, d_\alpha, \mu)$ . Таким образом, гёльдеровы классы относительно исходной метрики являются пространствами функций, имеющих «гладкость», равную единице относительно гёльдовой метрики. Это означает, что при получении, к примеру, теорем вложения для функциональных пространств  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$  достаточно в утверждениях для пространств  $M_p^1(X, d, \mu)$  заменить показатель регулярности  $s$  на  $s/\alpha$ .

Приведем лишь нужные нам следствия лемм 1.1 и 1.2.

**Лемма 1.3.** Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна. Тогда

1) при  $1 < \alpha p < s$  пространство  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$  непрерывно вложено в пространство Лебега  $L_q(X, \mu)$ , где  $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-\alpha p}$ ;

2) при  $s < \alpha p < \infty$  для всякой функции  $u \in M_p^\alpha(X, d, \mu)$  существует эквивалентная ей непрерывная функция  $\tilde{u}$ , для которой при всех  $x, y \in X$  выполняется неравенство

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq C[d(x, y)]^{\alpha-s/p} \|u\|_{S_p^\alpha(X, d, \mu)}.$$

Отметим существование в шкале пространств  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$  внутренней теоремы вложения.

**Лемма 1.4** [2]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна,  $1 < p < \infty$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ . Тогда пространство  $M_p^1(X, d, \mu)$  непрерывно вложено в пространство  $M_q^\alpha(X, d, \mu)$ , где

- 1)  $1 \leq q \leq \frac{sp}{s-(1-\alpha)p}$  при  $(1-\alpha)p < s$ ;
- 2)  $1 \leq q < \infty$  при  $(1-\alpha)p = s$ ;
- 3)  $1 \leq q \leq \infty$  при  $(1-\alpha)p > s$ .

При учете равенства  $M_p^\alpha(X, d, \mu) = M_p^1(X, d_\alpha, \mu)$  соответствующее вложение пространства  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$  в пространство  $M_q^\beta(X, d, \mu)$  при  $\beta < \alpha$  является простым следствием леммы 1.4.

## § 2. Отображения метрических пространств класса $M_p^1(X, Y)$

Определим интересные нас классы отображений, действующих из метрического пространства  $(X, d)$  в метрическое пространство  $(Y, \rho)$ . В некоторых работах авторы используют изометрическое вложение метрического пространства  $(Y, \rho)$  в пространство ограниченных функций и изучают далее отображения со значениями в банаховом пространстве. При таком подходе возникает определенная зависимость от выбранного способа вложения. Будем рассматривать отображения с областью значений непосредственно в метрическом пространстве.

Рассмотрим полное сепарабельное метрическое пространство  $(Y, \rho)$  и, следуя работе Ю. Г. Решетняка [6], при  $p \geq 1$  определим принадлежность отображения  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  лебеговскому классу  $L_p(X, Y)$  условием: вещественные функции  $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$  принадлежат пространству Лебега  $L_p(X, \mu)$  при всех  $y \in Y$ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Первоначально такое условие использовалось в работе Кореваара и Шоэна [7] для функций, определенных в областях риманова пространства. В [6] областью определения является произвольное пространство с мерой  $(M, S, \mu)$ , где  $M$  — произвольное множество,  $S$  —  $\sigma$ -алгебра подмножеств  $M$  и  $\mu : S \rightarrow R$  — неотрицательная мера.

Элементом класса  $L_p(X, Y)$  будем считать совокупность отображений, совпадающих  $\mu$ -почти всюду в  $X$ .

Из неравенства

$$|\varphi_{y_1}(x) - \varphi_{y_2}(x)| \leq \rho(y_1, y_2)$$

и конечности меры  $\mu$  следует, что отображение  $\varphi$  принадлежит классу  $L_p(X, Y)$ , если хотя бы для одного  $y \in Y$  функция  $\varphi_y$  принадлежит  $L_p(X, \mu)$ . Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — произвольные отображения класса  $L_p(X, Y)$ . Поскольку

$$\rho(\varphi(x), \psi(x)) \leq \rho(\varphi(x), y) + \rho(\psi(x), y) = \varphi_y(x) + \psi_y(x),$$

функция  $H_{\varphi, \psi}(x) = \rho(\varphi(x), \psi(x))$  принадлежит пространству Лебега  $L_p(X, \mu)$ . Несложно проверить, что функция

$$\rho_p(\varphi, \psi) = \left( \int_X [\rho(\varphi(x), \psi(x))]^p d\mu \right)^{1/p} = \|H_{\varphi, \psi} \|_{L_p(X, \mu)}$$

является метрикой на множестве отображений класса  $L_p(X, Y)$ . При этом метрическое пространство  $(L_p(X, Y), \rho_p)$  полное [6, 7].

Впоследствии нам будет удобнее использовать другую метрику  $\eta_p$ , согласованную с определением класса  $L_p(X, Y)$ .

Если  $\varphi, \psi \in L_p(X, Y)$ , то для функции

$$\eta_p(\varphi, \psi) = \sup_{z \in Y} \|\varphi_z - \psi_z \|_{L_p(X, \mu)}$$

симметричность, неравенство треугольника и равенство  $\eta_p(\varphi, \varphi) = 0$  вполне очевидны.

Совпадение почти всюду отображений  $\varphi$  и  $\psi$  в случае  $\eta_p(\varphi, \psi) = 0$  проверяется довольно просто. Из свойств нормы пространства  $L_p(X, \mu)$  и равенства

$\eta_p(\varphi, \psi) = 0$  следует, что при всяком  $z \in Y$  равенство  $\varphi_z(x) - \psi_z(x) = 0$  выполняется при почти всех  $x \in X$ . Положим

$$E_z = \{x \in X \mid \varphi_z(x) - \psi_z(x) \neq 0\}.$$

Пусть  $P$  — счетное всюду плотное подмножество в  $Y$  и

$$E = \bigcup_{z \in P} E_z.$$

Отметим, что  $\mu(E) = 0$  и при всех  $x \in X \setminus E$  и всех  $z \in P$

$$\rho(\varphi(x), z) - \rho(\psi(x), z) = 0.$$

Если  $x \in X \setminus E$  и  $\psi(x) \in P$ , то, полагая  $z = \psi(x)$ , получаем  $\rho(\varphi(x), \psi(x)) = 0$ . Если  $\psi(x) \notin P$ , то существует такая последовательность  $\{z_k\}$ , что  $z_k \in P$  и  $z_k \rightarrow \psi(x)$  в  $Y$ . В силу непрерывности метрики

$$\rho(\varphi(x), \psi(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\varphi(x), z_k) = 0.$$

Поэтому

$$\eta_p(\varphi, \psi) = 0 \iff \varphi(x) = \psi(x) \text{ при } x \in X \setminus E.$$

Отображения  $\varphi$  и  $\psi$  совпадают почти всюду. Таким образом, функция  $\eta_p$  является метрикой на множестве отображений класса  $L_p(X, Y)$ .

Метрическое пространство  $(Y, \rho)$  будем называть *регулярным*, если оно является полным, сепарабельным и всякий замкнутый шар  $\overline{B} \subset Y$  является компактным множеством.

Если метрическое пространство  $(Y, \rho)$  регулярно, то с точки зрения сходимости метрики  $\eta_p$  и  $\rho_p$  эквивалентны.

Поскольку

$$|\varphi_z(x) - \psi_z(x)| = |\rho(\varphi(x), z) - \rho(\psi(x), z)| \leq \rho(\varphi(x), \psi(x)),$$

то  $\eta_p(\varphi, \psi) \leq \rho_p(\varphi, \psi)$ .

С другой стороны, если последовательность отображений  $\{\varphi_k\}$  класса  $L_p(X, Y)$  фундаментальна относительно метрики  $\eta_p$ , то при всяком  $z \in Y$  последовательность вещественных функций  $\{[\varphi_k]_z\}$  сходится в полном пространстве  $L_p(X, \mu)$ . Остается воспользоваться леммой 2.3 работы [6], согласно которой последовательность отображений  $\{\varphi_k\}$  сходится по метрике  $\rho_p$  к некоторому отображению  $\varphi \in L_p(X, Y)$ .

В работе Кореваара и Шоэна [7] рассматриваются отображения соболевского типа с областью определения в римановом пространстве и областью значений в метрическом пространстве  $(X, d)$ . Авторы используют довольно сложную конструкцию: для отображения  $u \in L_p(\Omega, X)$  определяют специального вида функционал энергии  $E_p(u)$  и полагают по определению, что отображение  $u$  принадлежит классу  $KS_p(\Omega, X)$ , если  $E_p(u) < \infty$ . В работах [6, 8] доказано, что всякая вещественная функция класса  $KS_p(\Omega, R)$  принадлежит пространству Соболева  $W_p^1(\Omega)$ .

Нам удобнее при определении классов отображений соболевского типа использовать подход, предложенный Ю. Г. Решетняком [6]. С одной стороны, определение работы [6] весьма универсально, условия легко формулируются и с ними легче работать, с другой стороны Ю. Г. Решетняк показал [8], что определение работы [6] приводит к тому же классу отображений, что и определение работы [7].

Модифицируя схему Ю. Г. Решетняка, определим связанные с пространствами  $M_p^1(X, d, \mu)$  классы отображений соболевского типа, действующих из метрического пространства  $(X, d)$  в метрическое пространство  $(Y, \rho)$ .

**Определение класса  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$ .** Будем говорить, что определенное почти всюду в  $X$  отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  принадлежит классу  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$ , если

- 1) для всякого  $y \in Y$  функция  $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$  принадлежит функциональному пространству  $M_p^1(X, d, \mu)$ ;
- 2) существует такая функция  $\omega \in L_p(X, \mu)$ , что при всех  $y \in Y$  функция  $\omega$  является допустимой для функции  $\varphi_y$ .

Заметим, что из п. 1 следует принадлежность отображения  $\varphi$  классу  $L_p(X, Y)$ .

**Лемма 2.1.** Пусть отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $\varphi \in L_p(X, Y)$ ;
- 2) существуют такое множество  $E \subset X$  и такая неотрицательная функция  $g \in L_p(X, \mu)$ , что  $\mu(E) = 0$  и неравенство

$$\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq d(x_1, x_2)(g(x_1) + g(x_2)) \quad (2.1)$$

выполняется для всех точек  $x_1, x_2 \in X \setminus E$ .

Тогда  $\varphi \in \mathcal{M}_p^1(X, Y)$ . Если метрическое пространство  $(Y, \rho)$  сепарабельно, то для принадлежности отображения  $\varphi$  классу  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$  выполнение условий 1 и 2 является необходимым.

Это утверждение в несколько иной формулировке доказано в лемме 2.1 работы [4].

В случае, когда множество  $X$  является липшицевой областью  $G \subset R^n$ , а  $Y = R$ , получаем класс вещественных функций  $\mathcal{M}_p^1(G, R)$ , для которого согласно лемме 2.1 и отмеченному ранее результату работы [1] выполняются соотношения

$$\mathcal{M}_p^1(G, R) = M_p^1(G, |\cdot|, m_n) = W_p^1(G).$$

В некоторых случаях использование неравенства (2.1) позволяет получить простые доказательства утверждений, касающихся отображений класса  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$ .

Говорят, что отображение метрических пространств  $\psi : (Y, \rho) \rightarrow (Z, \delta)$  удовлетворяет условию Липшица, если существует постоянная  $K < \infty$  такая, что для любых  $y_1, y_2 \in Y$

$$\delta[\psi(y_1), \psi(y_2)] \leq K\rho(y_1, y_2).$$

Если  $\varphi \in \mathcal{M}_p^1(X, Y)$ , а  $\psi : (Y, \rho) \rightarrow (Z, \delta)$  удовлетворяет условию Липшица, то, используя лемму 2.1, легко показать, что отображение  $\Lambda = \psi \circ \varphi$  принадлежит классу  $\mathcal{M}_p^1(X, Z)$  [4].

Рассмотрим еще один класс отображений.

**Определение класса  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$ .** Будем говорить, что определенное почти всюду в  $X$  отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$ , если

- 1) для всякого  $y \in Y$  функция  $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$  принадлежит функциональному пространству  $M_p^1(X, d, \mu)$ ;
- 2) при всех  $y \in Y$  нормы всех функций  $\varphi_y$  равномерно ограничены, т. е.

$$\|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\| \leq C_0 < \infty.$$



Введем обозначение

$$\langle \varphi \rangle_p = \sup_{y \in Y} \|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\|.$$

Принадлежность отображения  $\varphi$  классу  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  эквивалентна выполнению условий  $\varphi \in L_p(X, Y)$  и  $\langle \varphi \rangle_p < \infty$ .

На множестве отображений  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  можно определить метрику, полагая для отображений  $\varphi, \psi \in \mathbb{M}_p^1(X, Y)$

$$\eta_{1,p}(\varphi, \psi) = \sup_{y \in Y} \|\varphi_y - \psi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\|.$$

Выполнение аксиом метрики в данном случае вполне очевидно.

**Лемма 2.2.** *Если пространство  $(Y, \rho)$  регулярно, то множество отображений  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  с метрикой  $\eta_{1,p}(\cdot, \cdot)$  является полным метрическим пространством.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $\{\varphi_n\}$  — фундаментальная относительно метрики  $\eta_{1,p}(\cdot, \cdot)$  последовательность отображений класса  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$ , то при фиксированном  $y \in Y$  последовательность функций  $[\varphi_n]_y$  фундаментальна в полном пространстве  $M_p^1(X, d, \mu)$  и сходится к некоторой функции  $h_y \in M_p^1(X, d, \mu)$ . При этом

$$\|[\varphi_n]_y - h_y \mid L_p(X, \mu)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Вполне очевидно, что последовательность  $\{\varphi_n\}$  является фундаментальной и относительно метрики  $\eta_p(\cdot, \cdot)$ , сходимость по которой эквивалентна сходимости по метрике  $\rho_p(\cdot, \cdot)$ . Поэтому последовательность  $\{\varphi_n\}$  сходится в полном метрическом пространстве  $L_p(X, Y)$  к некоторому отображению  $\varphi \in L_p(X, Y)$ . Поскольку

$$|[\varphi_n]_y(x) - \varphi_y(x)| \leq \rho(\varphi_n(x), \varphi(x)),$$

то

$$\begin{aligned} \|[\varphi_n]_y - \varphi_y \mid L_p(X, \mu)\| &\leq \left( \int_X [\rho(\varphi_n(x), \varphi(x))]^p d\mu \right)^{1/p} \\ &= \rho_p(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\varphi_y = h_y$  почти всюду и поэтому  $\varphi_y \in M_p^1(X, d, \mu)$ .

Согласно определению метрики  $\eta_{1,p}(\cdot, \cdot)$

$$\sup_{y \in Y} \|[\varphi_n]_y - h_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\| \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.2)$$

Из свойства (2.2) следует существование такого номера  $n_0$ , что при произвольном  $y \in Y$  выполняется неравенство  $\|[\varphi_{n_0}]_y - \varphi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\| < 1$ . Поэтому при всех  $y \in Y$

$$\|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\| \leq \|\varphi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\| \leq 1 + \|[\varphi_{n_0}]_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\| < \infty.$$

Это означает, что предельное отображение  $\varphi$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  и согласно свойству (2.2)  $\eta_{1,p}(\varphi_n, \varphi) \rightarrow 0$ .  $\square$

Вполне очевидно, что  $\mathcal{M}_p^1(X, Y) \subset \mathbb{M}_p^1(X, Y)$ . С одной стороны, проверить принадлежность отображения классу  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  проще, чем принадлежность классу  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$ , с другой стороны, многие результаты, к примеру, теоремы вложения, получаемые для класса  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$ , не только верны для класса  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$ , но и точны.

Согласно определениям соответствующих классов отображений принадлежность отображения  $\varphi$  класса  $\mathbb{M}_p^1(X, Y)$  лебеговскому классу  $L_q(X, Y)$  является непосредственным следствием принадлежности вещественной функции  $\varphi_y$  пространству  $M_p^1(X, d, \mu)$ , непрерывно вложенному в пространство Лебега  $L_q(X, \mu)$  (лемма 1.1).

**Лемма 2.3** [4]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна. Тогда

1) если  $1 < p < s$ , то включение

$$\mathbb{M}_p^1(X, Y) \subset L_q(X, Y)$$

имеет место при всех  $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-p}$ , при этом для всякого отображения  $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X, Y)$  и для произвольной точки  $y \in Y$  выполняется оценка

$$\|\varphi_y \mid L_q(X, \mu)\| \leq C \|\varphi_y \mid M_p^1(X, d, \mu)\|;$$

2) если  $p = s$ , то  $\mathbb{M}_p^1(X, Y) \subset L_q(X, Y)$  при всех  $q \in [1, \infty)$ ;

3) если  $p > s$ , то  $\mathbb{M}_p^1(X, Y) \subset L_\infty(X, Y)$  и для всякого отображения  $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X, Y)$  и произвольной точки  $y \in Y$  выполняется оценка

$$\|\varphi_y - [\varphi_y]_X \mid L_\infty(X, \mu)\| \leq C \mu(X)^{1/s-1/p} \|\varphi_y \mid S_p^1(X, d, \mu)\|.$$

Несколько сложнее доказывается утверждение, уточняющее результат п. 3.

**Лемма 2.4** [4]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна,  $s < p < \infty$ , а метрическое пространство  $(Y, \rho)$  регулярно. Тогда для всякого отображения  $\varphi \in \mathbb{M}_p^1(X, Y)$  существует эквивалентное ему непрерывное отображение  $\psi$ , для которого при всех  $x_1, x_2 \in X$  выполняется неравенство

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C[d(x_1, x_2)]^{1-s/p} \langle \varphi \rangle_p. \quad (2.3)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Поскольку  $\mathcal{M}_p^1(X, Y) \subset \mathbb{M}_p^1(X, Y)$ , то для отображений класса  $\mathcal{M}_p^1(X, Y)$  верны утверждения лемм 2.3 и 2.4. С другой стороны, на евклидовом шаре  $B \subset R^n$  согласно лемме 2.1  $\mathcal{M}_p^1(B, R) = M_p^1(B, |\cdot|, m_n) = W_p^1(B)$ . Следовательно, показатели в леммах 2.3 и 2.4 точные, так как на шаре  $B$  они совпадают с показателями классических соболевских теорем вложения.

Естественным образом определяются гёльдеровы классы отображений: определенное почти всюду в  $X$  отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_p^\alpha(X, Y)$ , если

1) для всякого  $y \in Y$  функция  $\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y)$  принадлежит функциональному пространству  $M_p^\alpha(X, d, \mu)$ ;

2) при всех  $y \in Y$  нормы всех функций  $\varphi_y$  ограничены, т. е.

$$\|\varphi_y \mid S_p^\alpha(X, d, \mu)\| \leq C_0 < \infty.$$

Как и в леммах 2.3 и 2.4, формальная переформулировка утверждений для пространств функций  $M_p^1(X, d, \mu)$  в леммах 1.3 и 1.4 позволяет получить теоремы вложения для отображений, принадлежащих гёльдеровым классам  $\mathbb{M}_p^\alpha(X, Y)$ .

**Лемма 2.5** [4]. Пусть мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и  $s$ -регулярна, а метрическое пространство  $(Y, \rho)$  регулярно. Тогда

1) если  $1 < \alpha p < s$ , то включение

$$\mathbb{M}_p^\alpha(X, Y) \subset L_q(X, Y)$$

имеет место при всех  $1 \leq q \leq \frac{ps}{s-\alpha p}$ ;

2) если  $s < \alpha p < \infty$ , то для всякого отображения  $\varphi \in \mathbb{M}_p^\alpha(X, Y)$  существует эквивалентное ему непрерывное отображение  $\psi$ , для которого при всех  $x_1, x_2 \in X$  выполняется неравенство

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C[d(x_1, x_2)]^{\alpha - \frac{s}{p}}.$$

### § 3. Операторы композиции

Задача об описании классов отображений, сохраняющих при замене переменных пространства Соболева  $L_p^1(G)$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$ , была сформулирована Ю. Г. Решетняком в 1968 г. Первые результаты, полученные С. К. Водопьяновым и В. М. Гольдштейном [9, 10], способствовали дополнительному интересу к этой задаче, поскольку оказалось, что соответствующие замены переменных связаны с классами квазиконформных и квазиизометрических отображений.

Впоследствии менялись постановки задач, изучались классы отображений, индуцирующих при замене переменных ограниченные операторы в весовых пространствах Соболева, в пространствах Бесова и в других классах функций, определенных в областях евклидова пространства  $\mathbb{R}^n$ . С. К. Водопьянов и его ученики активно изучали замены переменных в пространствах Соболева на группах Карно. В настоящее время тематика активно развивается и остается актуальной. Работа С. К. Водопьянова и Н. А. Евсеева [11] содержит небольшой обзор результатов, связанных с инвариантностью функциональных классов при замене переменных.

Далее рассматриваются полные метрические пространства  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$ , имеющие конечный диаметр, и конечные борелевские меры —  $\mu$  с носителем в множестве  $X$  и  $\nu$  с носителем в множестве  $Y$ .

Нас интересуют свойства отображений метрических пространств  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ , индуцирующих при замене переменных ограниченные операторы композиции в пространствах соболевского типа, т. е. операторы

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu),$$

действующие по правилу  $\varphi^* u = u \circ \varphi$ .

Учитывая, с одной стороны, разнообразие возникающих в метрическом случае ситуаций, с другой стороны, ограниченность доступных в этом случае методов доказательств и технических приемов, решение сформулированной задачи в полном объеме в данный момент не представляется возможным. Даже в евклидовом случае окончательное решение поставленной Ю. Г. Решетняком проблемы было получено С. К. Водопьяновым спустя три десятилетия после начала исследований по данной тематике [12].

Мы лишь рассмотрим различные постановки задачи и некоторые результаты, касающиеся операторов композиции в пространствах соболевского типа  $M_p^1$ .

Из содержания § 1 следует, что структура функционального пространства соболевского типа  $M_p^1$  зависит от взаимосвязи метрики и меры. Поэтому и свойства операторов композиции естественным образом зависят от свойств соответствующих метрик и мер. Мы не предполагаем изначально явной взаимосвязи между метриками  $d$  и  $\rho$ , а также между мерами  $\mu$  и  $\nu$ , но нам понадобятся некоторые соотношения, связывающие меру  $\mu$  с метрикой  $d$ , а меру  $\nu$  — с метрикой  $\rho$ .

Кроме использованного ранее условия удвоения нам потребуется двусторонняя оценка меры шара.

Метрическое пространство  $(X, d)$  будем называть  $s$ -однородным ( $s > 1$ ), если существует такая мера  $\mu$ , что при  $0 < r < \text{diam}(X)$  для всех шаров  $B(x, r) \subset X$  выполняется оценка

$$L_1 r^s \leq \mu(B(x, r)) \leq L_2 r^s, \quad 0 < L_1, L_2 < \infty. \quad (3.1)$$

Поскольку

$$B(x, r) \subset \overline{B(x, r)} \subset B(x, r + \varepsilon),$$

оценка (3.1) выполняется и для замкнутых шаров. Из неравенства (3.1) следует, что мера  $\mu$  удовлетворяет условию удвоения и является  $s$ -регулярной.

Далее, рассматривая  $s$ -однородное метрическое пространство, будем предполагать, что для заданной на нем меры выполняется оценка (3.1). Для меры в пространстве  $(X, d)$  будем использовать обозначение  $\mu$ , а меру в пространстве  $(Y, \rho)$  обозначим символом  $\nu$ .

Взаимно однозначное отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  будем называть *квазиизометрическим* (*квазиизометрией*), если для всех  $x_1, x_2 \in X$  выполняется неравенство

$$C_1 d(x_1, x_2) \leq \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) \leq C_2 d(x_1, x_2), \quad 0 < C_1, C_2 < \infty.$$

В работе [4] показано, что квазиизометрия  $\varphi$  полных  $s$ -однородных метрических пространств  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$  индуцирует по правилу  $\varphi^* u = u \circ \varphi$  изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu)$$

при всех показателях  $p \in [1, \infty)$ .

При показателях суммируемости  $p$ , больших «размерности» метрического пространства, выполняется и обратное свойство: если  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$  регулярны,  $p > s$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует при замене переменной изоморфизм пространств соболевского типа

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует такое квазиизометрическое отображение  $\psi$ , что  $\psi = \varphi$  почти всюду [4].

Заметим, что  $s$ -однородное пространство относительно метрики  $d$  при  $\alpha \in (0, 1]$  является  $s/\alpha$ -однородным относительно метрики  $d^\alpha$ , а условия квазиизометричности относительно метрик  $d, \rho$  и метрик  $d^\alpha, \rho^\alpha$  с точностью до пересчета констант эквивалентны. Поэтому условие квазиизометричности отображения  $\varphi$  является достаточным для изоморфности оператора композиции

$$\varphi^* : S_p^\alpha(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^\alpha(X, d, \mu),$$

при всех  $p \in [1, \infty)$ , а при  $\alpha p > s$  является необходимым [4].

Следующее утверждение является простым обобщением соответствующего результата работы [4], в котором предполагалась изоморфность оператора композиции.

**Лемма 3.1.** Если отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$  индуцирует при замене переменной ограниченный оператор

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu) \quad (1 \leq q \leq p),$$

то отображение  $\varphi$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_q^1(X, Y)$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольную точку  $y \in Y$ , функцию  $f_y(t) = \rho(t, y)$  и функцию  $g(t) \equiv 1/2$ ,  $\|g\|_{L_p(Y, \nu)} = 2^{-1}[\nu(Y)]^{1/p} = C_0 < \infty$ . Поскольку

$$|f_y(t_1) - f_y(t_2)| = |\rho(t_1, y) - \rho(t_2, y)| \leq \rho(t_1, t_2) = \rho(t_1, t_2)(g(t_1) + g(t_2)),$$

то  $f_y \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$  и  $\|f_y\|_{S_p^1(X, d, \mu)} \leq C_0$ .

Поскольку оператор  $\varphi^*$  ограничен, то функция  $\varphi^* f_y$  принадлежит пространству  $S_q^1(X, d, \mu)$  и  $\|\varphi^* f_y\|_{S_q^1(X, d, \mu)} < \infty$ . При этом

$$\varphi_y(x) = \rho(\varphi(x), y) = \varphi^* f_y(x) \in S_q^1(X, d, \mu).$$

Имеем  $\varphi_y(x) \leq \text{diam}(Y) < \infty$  и мера  $\mu$  конечна. Поэтому  $\varphi_y \in L_q(X, \mu) \cap S_q^1(X, d, \mu)$ , следовательно,  $\varphi_y \in M_q^1(X, d, \mu)$ . При этом

$$\|\varphi_y\|_{S_q^1(X, d, \mu)} \leq \|\varphi^*\| \|f_y\|_{S_p^1(X, d, \mu)} \leq C_0 \|\varphi^*\| < \infty.$$

В силу произвольности выбора  $y$  это и означает, что отображение  $\varphi$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_q^1(X, Y)$ .  $\square$

Пусть  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$  регулярны и  $s < q \leq p < \infty$ . Чтобы выяснить степень искажения метрики отображением  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ , индуцирующим при замене переменной ограниченный оператор

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu),$$

нам понадобятся две оценки.

1. Пусть  $a \in Y$ ,  $0 < r < \text{diam}(Y)$ . Рассмотрим пробную функцию

$$h_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{r - \rho(a, y)}{r}, & \text{если } \rho(a, y) \leq r, \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > r. \end{cases}$$

По построению  $h_{a,r}(a) = 1$  и  $h_{a,r}(y) \equiv 0$  вне шара  $B(a, r)$ .

Покажем, что функция

$$g_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{если } \rho(a, y) \leq r, \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > r, \end{cases}$$

является допустимой для функции  $h_{a,r}$ .

Пусть  $y_1, y_2 \in \overline{B(a, r)}$ , тогда

$$\begin{aligned} |h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| &= \frac{1}{r} |\rho(a, y_1) - \rho(a, y_2)| \\ &\leq \frac{1}{r} \rho(y_1, y_2) \leq \rho(y_1, y_2)(g_{a,r}(y_1) + g_{a,r}(y_2)). \end{aligned}$$

Если  $\rho(a, y_1) \leq r$  и  $\rho(a, y_2) > r$ , то

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| = \frac{1}{r} |r - \rho(a, y_1)| \leq \frac{1}{r} \rho(y_1, y_2) \leq \rho(y_1, y_2)(g_{a,r}(y_1) + g_{a,r}(y_2)).$$

Если  $\rho(a, y_1) > r$  и  $\rho(a, y_2) > r$ , то

$$|h_{a,r}(y_1) - h_{a,r}(y_2)| = 0.$$

Учитывая  $s$ -однородность пространства  $(Y, \rho)$ , получаем

$$\|h_{a,r} \mid S_p^1(Y, \rho, \nu)\| \leq \|g_{a,r} \mid L_p(Y, \nu)\| = \frac{1}{r} [\nu(B(a, r))]^{1/p} \leq C_1 r^{s/p-1}. \quad (3.2)$$

2. Если  $q > s$ , непрерывная функция  $u$  принадлежит  $S_q^1(X, d, \mu)$  и  $|u(x_1) - u(x_2)| \geq 1$ , то согласно лемме 1.2

$$\|u \mid S_q^1(X, d, \mu)\| \geq C_2 [d(x_1, x_2)]^{s/q-1}. \quad (3.3)$$

**Лемма 3.2.** Пусть  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$  регулярны. Если  $s < q \leq p < \infty$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует совпадающее почти всюду с  $\varphi$  такое гёльдерово отображение  $\psi$ , что

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0 [d(x_1, x_2)]^\gamma, \quad \text{где } \gamma = \frac{p(q-s)}{q(p-s)} \leq 1. \quad (3.4)$$

**Доказательство.** Согласно лемме 3.1 отображение  $\varphi$  принадлежит  $M_q^1(X, Y)$  и по лемме 2.4 существует непрерывное отображение  $\psi$ , совпадающее с отображением  $\varphi$  почти всюду. Поскольку для всякой функции  $u \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$  функции  $u \circ \varphi$  и  $u \circ \psi$  совпадают почти всюду, т. е. принадлежат одному классу эквивалентности, то отображение  $\psi$  по правилу  $\psi^* u = u \circ \psi$  индуцирует ограниченный оператор композиции  $\psi^* = \varphi^*$ . При этом для всякой непрерывной функции  $u \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$  функция  $\psi^* u$  непрерывна.

Пусть  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\psi(x_1) = a$ ,  $\psi(x_2) = b$  и  $\rho(a, b) = r > 0$ . Рассмотрим функцию  $v = h_{a,r}$ , принадлежащую пространству  $S_p^1(Y, \rho, \nu)$ . Функция  $u = \psi^* v$  принадлежит  $S_q^1(X, d, \mu)$  и непрерывна, при этом

$$u(x_1) = v(\psi(x_1)) = h_{a,r}(a) = 1, \quad u(x_2) = v(\psi(x_2)) = h_{a,r}(b) = 0.$$

Используя оценки (3.2) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} C_2 [d(x_1, x_2)]^{s/q-1} &\leq \|u \mid S_q^1(X, d, \mu)\| \leq \|\psi^*\| \|h_{a,r} \mid S_p^1(Y, \rho, \nu)\| \\ &\leq \|\psi^*\| C_1 r^{s/p-1} \leq K_2 \|\psi^*\| [\rho(\psi(x_1), \psi(x_2))]^{s/p-1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $s/p - 1 < 0$  и  $s/q - 1 < 0$ , для отображения  $\psi$  выполняется оценка

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0 [d(x_1, x_2)]^\gamma. \quad \square$$

**Следствие 3.3.** Рассмотрим регулярные  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$ . Если  $s < p < \infty$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_p^1(X, d, \mu),$$

то существует совпадающее почти всюду с  $\varphi$  липшицево отображение  $\psi$ , обладающее  $N$ -свойством Лузина.

**Доказательство.** Существование отображения  $\psi$  и его липшицевость являются следствием леммы 3.2 при  $q = p$ .

Поскольку метрические пространства  $s$ -однородны, меры шаров одинакового радиуса  $\overline{B(x, R)} \subset X$  и  $\overline{B(y, R)} \subset Y$  сравнимы, в частности,

$$\nu(\overline{B(y, R)}) \leq C_1 \mu(\overline{B(x, R)}), \quad \mu(\overline{B(x, Kr)}) \leq C_2 K^s \mu(\overline{B(x, r)}).$$

Рассмотрим произвольное открытое множество  $U \subset X$ . Для каждой точки  $x \in U$  существует замкнутый шар  $\overline{B_x} = \overline{B(x, r_x)} \subset U$ . Семейство таких шаров  $\mathcal{B} = \{B_x\}$  образует покрытие множества  $U$  и согласно лемме Витали о покрытии существует такой счетный набор непересекающихся шаров  $\overline{B(x_k, r_k)} \in \mathcal{B}$ , что

$$U \subset \bigcup_k \overline{B(x_k, 5r_k)}.$$

Пусть  $y_k = \psi(x_k)$ . Для отображения  $\psi$  выполняется неравенство

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0 [d(x_1, x_2)],$$

поэтому множество  $\psi(\overline{B(x_k, 5r_k)})$  принадлежит замкнутому шару  $\overline{B(y_k, R_k)}$ , где  $R_k = C_0 5r_k$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \nu(\psi(U)) &\leq \nu\left(\bigcup_k \overline{B(y_k, R_k)}\right) \leq \sum_k \nu(\overline{B(y_k, R_k)}) \leq C_1 \sum_k \mu(\overline{B(x_k, R_k)}) \\ &\leq C_1 C_2 5^s C_0^s \sum_k \mu(\overline{B(x_k, r_k)}) \leq C_3 \mu(U). \end{aligned}$$

В силу регулярности меры  $\mu$  для всякого множества нулевой меры  $E \subset X$  и произвольного  $\varepsilon > 0$  существует такое открытое множество  $U$ , что  $E \subset U$  и  $\mu(U) < \varepsilon$ . Очевидным следствием оценки искажения меры открытых множеств является равенство  $\nu(\psi(E)) = 0$ , что и означает выполнение  $N$ -свойства Лузина.  $\square$

Для отображений, индуцирующих ограниченные операторы композиции в пространствах  $M_p^1$  при показателях суммируемости, меньших «размерности» метрического пространства, удастся получить оценку меры прообраза шара.

Нам потребуется оценка нормы еще одной пробной функции. Пусть  $a \in Y$ ,  $0 < 2r < \text{diam}(Y)$ . Рассмотрим функцию

$$H_{a,r}(y) = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho(a, y) \leq r, \\ \frac{2r - \rho(a, y)}{r}, & \text{если } r \leq \rho(a, y) \leq 2r, \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > 2r. \end{cases}$$

Легко проверить, что функция

$$G_{a,r}(y) = \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{если } \rho(a, y) \leq 2r, \\ 0, & \text{если } \rho(a, y) > 2r, \end{cases}$$

является допустимой для функции  $H_{a,r}$ .

Учитывая  $s$ -однородность пространства  $(Y, \rho)$ , получаем

$$\begin{aligned} \|H_{a,r} \mid M_p^1(Y, \rho, \nu)\| &\leq \|H_{a,r} \mid L_p(Y, \nu)\| + \|G_{a,r} \mid L_p(Y, \nu)\| \\ &\leq [\nu(B(a, 2r))]^{1/p} + \frac{1}{r} [\nu(B(a, 2r))]^{1/p} \leq C_1 [\nu(B(a, r))]^{1/p-1/s}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

**Лемма 3.4.** Пусть  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  с мерой  $\mu$  и  $(Y, \rho)$  с мерой  $\nu$  регулярны. Если  $1 < q \leq p < s$  и гомеоморфизм  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует при замене переменной ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : M_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow M_q^1(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то при  $2r < \text{diam } Y$  для всякого шара  $B(a, r) \subset Y$  выполняется оценка

$$\mu(\varphi^{-1}(B(a, r))) \leq K_0[\nu(B(a, r))]^\sigma, \quad \text{где } \sigma = \frac{q(s-p)}{p(s-q)} < 1. \quad (3.6)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $2r < \text{diam } Y$ . Рассмотрим шар  $B(a, r) \subset Y$  и соответствующую пробную функцию  $H_{a,r}$ . Поскольку отображение  $\varphi$  является гомеоморфизмом, то  $v(x) = \varphi^* H_{a,r}(x) = H_{a,r}(\varphi(x)) = 1$  на множестве  $\varphi^{-1}(B(a, r))$ .

Согласно лемме 1.1 при  $1 < q < s$  пространство  $M_q^1(X, d, \mu)$  непрерывно вложено в пространство Лебега  $L_\omega(X, \mu)$ , где  $1/\omega = 1/q - 1/s$ . Учитывая оценку (3.5), получаем

$$\begin{aligned} [\mu(\varphi^{-1}(B(a, r)))]^{1/\omega} &\leq \|v\|_{L_\omega(X, \mu)}^{1/\omega} \leq C_2 \|\varphi^* H_{a,r}\|_{M_q^1(X, d, \mu)}^{1/q} \\ &\leq C_2 \|\varphi^*\| \|H_{a,r}\|_{M_p^1(Y, \rho, \nu)}^{1/p} \leq C_3 [\nu(B(a, r))]^{1/p-1/s}. \end{aligned}$$

Простой пересчет показателей приводит к оценке (3.6).  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Поскольку диаметры множеств  $X$  и  $Y$  конечны,  $\mu(X) < \infty$  и  $\nu(Y) < \infty$ , то оценки лемм 3.2 и 3.4 представляют интерес для малых значений  $d(x_1, x_2)$  и малых шаров, так как при больших размерах они очевидно выполняются.

Чтобы получить достаточные условия для оператора композиции, действующего из пространства  $S_p^1(Y, \rho, \nu)$  в пространство  $S_q^1(X, d, \mu)$ , нам потребуются некоторые простые конструкции из теории меры.

Рассмотрим полные метрические пространства  $(X, d)$  с мерой  $\mu$ ,  $(Y, \rho)$  с мерой  $\nu$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ . Предположим, что отображение  $\varphi$  является гомеоморфизмом и обладает  $N$ -свойством Лузина (если  $\mu(E) = 0$ , то  $\nu(\varphi(E)) = 0$ ). В этом случае мера  $\omega$ , определяемая равенством  $\omega(E) = \nu(\varphi(E))$ , абсолютно непрерывна относительно меры  $\mu$ . Согласно теореме Радона — Никодима существует такая суммируемая по  $\mu$  функция  $J$ , что

$$\int_E J(x) d\mu = \omega(E) = \nu(\varphi(E))$$

для всякого измеримого множества  $E \subset X$ .

Докажем подходящую для наших целей формулу замены переменной в интеграле Лебега. Пусть неотрицательная функция  $u$  принадлежит  $L_1(Y, \nu)$ . Для измеримой функции  $h(x) = u(\varphi(x))$  воспользуемся разложением по характеристическим функциям измеримых множеств — теорема 7 в п. 1.1.2 из [13]:

$$h(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{E_k}(x).$$

Если  $y = \varphi(x)$ , то  $y \in \varphi(E_k)$  тогда и только тогда, когда  $x \in E_k$ . Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{\varphi(E_k)}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{E_k}(x) = h(x) = u(\varphi(x)) = u(y).$$



Согласно теореме о монотонной сходимости

$$\begin{aligned} \int_X u(\varphi(x))J(x) d\mu &= \int_X h(x)J(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_X \chi_{E_k}(x)J(x) d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{E_k} J(x) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \nu(\varphi(E_k)) = \int_Y \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi_{\varphi(E_k)}(y) d\nu = \int_Y u(y) d\nu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С отображением  $\varphi$  свяжем две функции, характеризующие искажение метрики и меры,

$$\Delta(x) = \sup_{z \in X} \frac{\rho(\varphi(x), \varphi(z))}{d(x, z)}, \quad H(x) = \frac{\Delta(x)}{(J(x))^{1/p}}.$$

**Теорема 3.5.** Рассмотрим полные метрические пространства  $(X, d)$  с мерой  $\mu$ ,  $(Y, \rho)$  с мерой  $\nu$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ . Если выполнены следующие условия:

1) отображение  $\varphi$  является гомеоморфизмом и обладает  $N$ -свойством Лузина;

2) функция  $H$  принадлежит  $L_\sigma(X, \mu)$ , где  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ,  
то при  $1 \leq q \leq p$  отображение  $\varphi$  индуцирует по правилу  $\varphi^*u = u \circ \varphi$  ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^1(X, d, \mu).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если  $x, z \in X$  и  $x \neq z$ , то в силу гомеоморфности отображения  $\varphi$

$$\Delta(x) \geq \frac{\rho(\varphi(x), \varphi(z))}{\text{diam } X} > 0.$$

Поэтому из второго условия следует, что  $J(x) > 0$  почти всюду в  $X$ . Если  $A \subset X$  и  $\mu(A) > 0$ , то

$$\nu(\varphi(A)) = \int_A J(x) d\mu > 0.$$

Следовательно, гомеоморфизм  $\varphi$  обладает  $N^{-1}$ -свойством Лузина (если  $\nu(B) = 0$ , то  $\mu(\varphi^{-1}(B)) = 0$ ).

Пусть  $u \in S_p^1(Y, \rho, \nu)$ . Тогда существуют такое множество  $D \subset Y$  и такая допустимая функция  $g \in L_p(Y, \nu)$ , что  $\nu(D) = 0$  и

$$|u(y_1) - u(y_2)| \leq \rho(y_1, y_2)(g(y_1) + g(y_2))$$

для всех  $y_1, y_2 \in Y \setminus D$ .

Пусть  $v(x) = (\varphi^*u)(x) = u(\varphi(x))$ ,  $h(x) = g(\varphi(x))$ ,  $E = \varphi^{-1}(D)$ ,  $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ ,  $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$ .

Поскольку отображение  $\varphi$  обладает  $N^{-1}$ -свойством Лузина, то  $\mu(E) = 0$  и для точек  $x_1, x_2 \in X \setminus E$  выполняется оценка

$$\begin{aligned} |v(x_1) - v(x_2)| &= |u(\varphi(x_1)) - u(\varphi(x_2))| \leq \rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))[g(\varphi(x_1)) + g(\varphi(x_2))] \\ &= d(x_1, x_2) \frac{\rho(\varphi(x_1), \varphi(x_2))}{d(x_1, x_2)} (h(x_1) + h(x_2)) \leq d(x_1, x_2) (\Delta(x_1)h(x_1) + \Delta(x_2)h(x_2)). \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $\Delta(x)h(x)$  является допустимой для функции  $v(x)$ . При  $1 \leq q < p$ , используя неравенство Гёльдера и формулу замены переменной (3.7), оценим норму допустимой функции в пространстве Лебега  $L_q(X, \mu)$ :

$$\begin{aligned} \int_X [\Delta(x)h(x)]^q d\mu &= \int_X [g(\varphi(x))J^{1/p}(x)]^q \left( \frac{\Delta(x)}{J^{1/p}(x)} \right)^q d\mu \\ &\leq \left( \int_X [g(\varphi(x))]^p J(x) d\mu \right)^{q/p} \left( \int_X H^\sigma(x) d\mu \right)^{(p-q)/p} \leq C_0 \left( \int_Y g^p(y) d\nu \right)^{q/p} < \infty. \end{aligned}$$

Это означает, что функция  $\Delta(x)h(x)$  принадлежит  $L_q(X, \mu)$ , а функция  $v = v \circ u = \varphi^*u$  принадлежит пространству  $S_q^1(X, d, \mu)$  и  $\|\varphi^*\| \leq C_0^{1/q}$ .

При  $q = p$  оценка получается еще проще, без использования неравенства Гёльдера.  $\square$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Простые достаточные условия в теореме 3.5 похожи на условия, использованные С. К. Водопьяновым и его учениками при изучении операторов композиции в пространствах Соболева на группах Карно, к примеру, см. [14, 15]. Основное отличие заключается в замене нормы дифференциала отображения на функцию  $\Delta(x)$ , что связано со спецификой определения допустимой функции в пространствах  $M_p^1(X, d, \mu)$ .

Поскольку

$$\int_X J(x) d\mu = \nu(Y) < \infty,$$

то  $J(x) < \infty$  почти всюду, а из принадлежности функции  $H$  пространству  $L_\sigma(X, \mu)$  следует, что и  $\Delta(x) < \infty$  почти всюду.

Пусть при  $\varepsilon > 0$  множество  $E_\varepsilon$  состоит из всех точек  $x \in X$ , для которых найдется такая точка  $z \in X$ , что  $d(x, z) \geq \varepsilon$  и  $2\rho(\varphi(x), \varphi(z)) \geq d(x, z)\Delta(x)$ . При  $x \in E_\varepsilon$

$$\Delta(x) \leq \frac{2 \operatorname{diam}(Y)}{\varepsilon} < \infty,$$

поэтому при любом фиксированном  $\varepsilon > 0$  значения функции  $\Delta(x)$  на множестве  $E_\varepsilon$  не влияют на сходимость соответствующего интеграла. Вопрос о сходимости интеграла во втором условии зависит от локальных свойств отображения  $\varphi$  в сколь угодно малой окрестности множества нулевой меры, на котором функция  $\Delta(x)$  может быть равна бесконечности.

Согласно следствию 3.3 на  $s$ -однородных пространствах при  $q = p > s$  можно изначально предполагать, что отображение  $\varphi$  липшицево и обладает  $N$ -свойством Лузина, а функция  $\Delta(x)$  ограничена.

Наличие шкалы пространств  $S_p^\alpha$  позволяет рассматривать операторы композиции со значениями в гёльдеровых классах, т. е. операторы

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^\alpha(X, d, \mu). \quad (3.8)$$

Практически дословно повторяя доказательство леммы 3.1, легко показать, что отображение  $\varphi : X \rightarrow Y$ , индуцирующее при замене переменной ограниченный оператор (3.8), принадлежат классу  $\mathbb{M}_q^\alpha(X, Y)$ .

С точки зрения выполнения соответствующих теорем вложения оператор композиции не может улучшить свойства сразу всего класса функций. Это накладывает определенные ограничения на выбор показателей  $\alpha$  и  $q$ . Пусть

$\alpha \in (0, 1)$  и  $1/\tau = 1/p - (1 - \alpha)/s$ . Согласно лемме 1.4 при  $q \leq \tau$  пространство  $M_p^1(X, d, \mu)$  вложено в пространство  $M_q^\alpha(X, d, \mu)$ . Заметим, что при  $p > s$  будет  $\tau > s/\alpha$ , поэтому существуют такие значения  $q$ , что  $s/\alpha < q \leq \tau$ .

Доказательство следующего утверждения вполне аналогично доказательству леммы 3.2.

**Лемма 3.6.** Пусть  $s$ -однородные метрические пространства  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$  регулярны. Если  $s < p < \infty$ ,  $s/\alpha < q \leq \tau$  и отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует при замене переменных ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_q^\alpha(X, d, \mu), \quad \|\varphi^*\| < \infty,$$

то существует совпадающее почти всюду с  $\varphi$  такое гёльдерово отображение  $\psi$ , что

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0[d(x_1, x_2)]^\lambda, \quad \text{где } \lambda = \frac{p(\alpha q - s)}{q(p - s)} \leq 1. \quad (3.9)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Поскольку  $\varphi$  принадлежит классу  $\mathbb{M}_q^\alpha(X, Y)$  и  $\alpha q > s$ , согласно лемме 2.5 существует эквивалентное  $\varphi$  непрерывное отображение  $\psi$ . При этом оператор композиции  $\psi^* = \varphi^*$ .

Пусть  $x_1, x_2 \in X$ ,  $\psi(x_1) = a$ ,  $\psi(x_2) = b$  и  $\rho(a, b) = r > 0$ . Рассмотрим функцию  $v = h_{a,r}$ , принадлежащую пространству  $S_p^1(Y, \rho, \nu)$ . Функция  $u = \psi^*v$  принадлежит  $S_q^1(X, d, \mu)$  и непрерывна, при этом

$$u(x_1) = v(\psi(x_1)) = h_{a,r}(a) = 1, \quad u(x_2) = v(\psi(x_2)) = h_{a,r}(b) = 0.$$

Поскольку  $\alpha q > s$ , непрерывная функция  $u$  принадлежит  $S_q^\alpha(X, d, \mu)$  и  $|u(x_1) - u(x_2)| \geq 1$ , то согласно лемме 1.3

$$\|u\|_{S_q^\alpha(X, d, \mu)} \geq C_2[d(x_1, x_2)]^{s/q - \alpha}. \quad (3.10)$$

Используя оценки (3.2) и (3.10), получаем

$$\begin{aligned} C_2[d(x_1, x_2)]^{s/q - \alpha} &\leq \|u\|_{S_q^\alpha(X, d, \mu)} \leq \|\psi^*\| \|h_{a,r}\|_{S_p^1(Y, \rho, \nu)} \\ &\leq \|\psi^*\| C_1 r^{s/p - 1} \leq K_2 \|\psi^*\| [\rho(\psi(x_1), \psi(x_2))]^{s/p - 1}. \end{aligned}$$

Поскольку  $s/p - 1 < 0$  и  $s/q - \alpha < 0$ , то для отображения  $\psi$  выполняется оценка

$$\rho(\psi(x_1), \psi(x_2)) \leq C_0[d(x_1, x_2)]^\lambda.$$

Учитывая неравенство  $q \leq \tau$  легко проверить, что  $\lambda \leq 1$ .  $\square$

Заметим, что при  $q = \tau$  будет  $\lambda = 1$ , т. е. отображение  $\varphi$  липшицево.

Если отображение  $\varphi : (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$  индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : S_p^1(Y, \rho, \nu) \rightarrow S_\omega^1(X, d, \mu), \quad s < \omega \leq p,$$

то по лемме 3.2 показатель гёльдеровости  $\gamma$  равен  $\frac{p(\omega - s)}{\omega(p - s)}$ .

Согласно лемме 1.4 пространство  $M_\omega^1(X, d, \mu)$  вложено в  $M_q^\alpha(X, d, \mu)$ , если  $1/q = 1/\omega - (1 - \alpha)/s$ . Следовательно, можно рассматривать оператор  $\varphi^*$  как оператор композиции, действующий из пространства  $S_p^1(Y, \rho, \nu)$  в пространство  $S_q^\alpha(X, d, \mu)$ .

Выражая  $\omega$  через  $q$  и подставляя в равенство для показателя  $\gamma$ , получаем то же самое значение, что и в лемме 3.6:

$$\gamma = \frac{p(\alpha q - s)}{q(p - s)}.$$

В работе установлены лишь некоторые свойства отображений, индуцирующих операторы композиции в пространствах соболевского типа. Помимо рассмотренных постановок задачи на метрических пространствах возможны и другие ситуации, к примеру, случай, когда меры, определенные в пространствах  $(X, d)$  и  $(Y, \rho)$ , имеют различные порядки регулярности. Для более полного рассмотрения вопроса требуются дополнительные исследования и новые подходы к изучению свойств функций и отображений, определенных на метрических пространствах с мерой.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Hajlasz P. Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces // Potential Analysis. 1996. V. 5, N 4. P. 403–415.
2. Романов А. С. О следах функций, принадлежащих обобщенным классам соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 848–866.
3. Hajlasz P., Martio O. Traces of Sobolev functions on fractal type sets and characterization of extension domains // J. Funct. Anal. 1997. V. 143. P. 221–246.
4. Романов А. С. Отображения метрических пространств, связанные с функциональными классами соболевского типа // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 794–814.
5. Романов А. С. О непрерывности функций соболевского типа на однородных метрических пространствах // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 2. С. 460–483.
6. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
7. Korevaar N. J., Schoen R. M. Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets // Comm. Anal. Geom. 1993. V. 1, N 4. P. 561–659.
8. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 855–870.
9. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств  $W_n^1$  и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
10. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.
11. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.
12. Vodop'yanov S. K. Composition operators on Sobolev spaces // Contemp. Math. 2005. V. 382. P. 327–342.
13. Evans L. C., Gariepy R. F. Measure theory and fine properties of functions. New York: CRC Press, 1992.
14. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Пространства Соболева и  $(P, Q)$ -квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
15. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

Поступила в редакцию 7 февраля 2025 г.

После доработки 20 августа 2025 г.

Принята к публикации 27 августа 2025 г.

Романов Александр Сергеевич (ORCID 0000-0001-7906-3933)  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090  
asrom@math.nsc.ru

## ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ С ПАМЯТЬЮ

В. Г. Романов

**Аннотация.** Рассматриваются уравнения электродинамики, в которых диэлектрическая проницаемость и проводимость среды обладают «памятью». Благодаря этому решение уравнений зависит от всей предыстории процесса распространения волн. Предполагается, что ядра интегральных операторов, моделирующие свойство памяти, зависят от пространственных и временной переменных, причем эти ядра допускают представление в виде произведения двух функций, одна из которых зависит от пространственных переменных, а вторая — от временной. Функции, зависящие от временной переменной, считаются заданными, а зависящие от пространственных переменных неизвестными и подлежат отысканию. Принимается, что эти функции  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$ , отвечающие ядрам, описывающим свойства памяти диэлектрической проницаемости и проводимости, соответственно являются финитными функциями, их носитель содержится внутри некоторого шара  $B$  конечного радиуса. Для решения обратной задачи рассматривается прямая задача с полностью известными ядрами и ее специальное решение для однородной среды, соответствующее бегущей дельта-образной волне, распространяющейся в направлении  $\nu$ . Эта волна падает на неоднородность, сосредоточенную в  $B$ , и на границе этого шара измеряется амплитуда сингулярной части решения и амплитуда первой производной по времени его регулярной части на фронте волны. Соответствующая информация, зафиксированная для различных направлений  $\nu$ , и является исходной для решения обратной задачи. В работе показано, что задачи об определении функций  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$  сводятся к последовательному решению хорошо известной задачи рентгеновской томографии. Следовательно, решение рассматриваемой обратной задачи единственно и может быть эффективно найдено как аналитически, так и численно.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.612

**Ключевые слова:** уравнения электродинамики с памятью, обратная задача, структура решения, томография, единственность.

Памяти Семёна Самсоновича Кутателадзе

### 1. Введение

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( \varepsilon \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds \right) \\ + \sigma(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds - \operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

---

<sup>\*</sup>Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) + \mu \operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0; \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4.$$

В уравнениях (1)  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$  и  $\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3)$  — векторы электрической и магнитной напряженностей поля,  $\varepsilon$  и  $\mu$  — некоторые положительные числа,  $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$  — проводимость среды. Эти уравнения описывают распространение электромагнитных волн в неоднородной среде с памятью, определяемой функциями  $\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  и  $\hat{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ .

Пусть  $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R\}$  — шар радиуса  $R$  и  $S$  — его граница. Примем, что

$$\sigma(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in (\mathbb{R}^3 \setminus B); \quad \hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \setminus B) \times \mathbb{R}. \quad (2)$$

В дальнейшем будем рассматривать для уравнений (1) задачу Коши с начальными данными

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \ell \delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)), \quad \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = \varepsilon^{1/2} \mu^{-1/2} (\nu \times \ell) \delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)), \quad t < 0, \quad (3)$$

в которых  $\nu$  и  $\ell$  — единичные векторы, ортогональные друг другу,  $\nu \cdot \ell = 0$ , функция  $\tau(\mathbf{x}, \nu)$  определена формулой

$$\tau(\mathbf{x}, \nu) = (\varepsilon \mu)^{1/2} (\mathbf{x} \cdot \nu + R),$$

$\delta(t)$  — дельта-функция Дирака.

Формулы (3) описывают дельта-образную плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в направлении  $\nu$  и поляризованную в направлении  $\ell$ . В момент времени  $t = 0$  эта волна касается границы  $S$  шара  $B$  в точке  $\mathbf{x} = -R\nu$  и далее распространяется уже в неоднородной среде. Ее фронт  $t = \tau(\mathbf{x}, \nu)$  остается плоским, но амплитуда его меняется.

Решение задачи (1), (3) зависит от параметров  $\nu$  и  $\ell$ . Поэтому оно будет обозначаться через  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \nu, \ell)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, t, \nu, \ell)$ , но иногда для сокращения записи зависимость от параметров  $\nu$  и  $\ell$  будет опускаться.

Задачу (1), (3) назовем *прямой* задачей. Основной задачей, которую будем изучать, является обратная задача, заключающаяся в отыскании функций  $\hat{\varepsilon}$  и  $\hat{\sigma}$ , характеризующих память среды. При этом принимаем, что эти функции представимы в виде

$$\hat{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) K_1(t), \quad K_1(0) = 1, \quad \hat{\sigma}(\mathbf{x}, t) = q(\mathbf{x}) K_2(t), \quad K_2(0) = 1, \quad (4)$$

в котором  $K_1(t)$  и  $K_2(t)$  — известные гладкие функции для  $t \geq 0$ , а носители функций  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$  содержатся в  $B$ . В дальнейшем будем предполагать, что  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$  являются гладкими функциями в  $\mathbb{R}^3$ . Под термином *гладкая* функция подразумевается функция бесконечно дифференцируемая в соответствующей области.

Определим плоскость

$$P(\psi) = \{\mathbf{x} \cdot \chi(\psi) = 0\}, \quad \chi(\psi) = (-\sin \psi, \cos \psi, 0), \quad \psi \in [0, \pi),$$

и векторы

$$\begin{aligned} \ell(\varphi, \psi) &= (\sin \varphi \cos \psi, \sin \varphi \sin \psi, \cos \varphi), \\ \nu(\varphi, \psi) &= (\cos \varphi \cos \psi, \cos \varphi \sin \psi, -\sin \varphi), \quad (\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi). \end{aligned}$$

Заметим, что единичные векторы  $\chi$ ,  $\nu$  и  $\ell$  попарно ортогональны. Следовательно, векторы  $\nu$  и  $\ell$  расположены в плоскости  $P(\psi)$ . Обозначим  $S^+(\nu) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \cdot \nu > 0\}$ .

**Обратная задача.** Пусть положительные числа  $\varepsilon$  и  $\mu$  и неотрицательная функция  $\sigma(\mathbf{x})$  известны. Требуется найти функции  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$  по следующей информации о решениях прямой задачи: заданы функции

$$\begin{aligned} F_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) &= \lim_{t \rightarrow \tau(\mathbf{x}, \nu) + 0} \int_{-\infty}^t (\mathbf{E}(\mathbf{x}, s, \nu(\varphi, \psi), \ell(\varphi, \psi)) \cdot \ell(\varphi, \psi)) ds, \\ F_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi) &= \lim_{t \rightarrow \tau(\mathbf{x}, \nu) + 0} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \nu(\varphi, \psi), \ell(\varphi, \psi)) \cdot \ell(\varphi, \psi)) \end{aligned} \quad (5)$$

для всех  $\mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$ ,  $\psi \in [0, \pi)$ , и всех  $\ell(\varphi, \psi)$  и  $\nu(\varphi, \psi)$ ,  $(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ .

Заметим, что  $F_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  и  $F_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  являются функциями трех скалярных переменных, так как  $\mathbf{x}$  принадлежит полуокружности  $(P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$  при фиксированных  $\varphi$  и  $\psi$ . Поэтому обратная задача не является переопределенной: для отыскания двух функций трех переменных используется информация той же самой размерности.

Обратные задачи для интегро-дифференциальных уравнений математической физики, в которых изучаются свойства ядер некоторых интегральных операторов, описывающих предысторию процесса распространения волн, начали изучаться сравнительно давно. По-видимому, первая из работ принадлежит Лоренци и Синестрари и относится к 1988 г. (см. [1]). В ней авторы изучают ядра памяти, связанные с упругими материалами. Затем в 1994 г. появилась работа Д. К. Дурдиева [2] для волнового уравнения с ядром, зависящим только от времени. Задачам определения ядер памяти в уравнениях вязкоупругости посвящены работы [3–9]. В них изучены различные варианты постановок обратных задач, использующие разнообразную информацию о решениях прямых задач для этих уравнений. В работах [10, 11] рассматриваются проблемы изучения ядер интегро-дифференциальных операторов для уравнений электродинамики. В [12] изучена задача определения ядра памяти в нелинейном волновом уравнении. Отметим также книгу [13], в которой приведен большой круг задач об определении ядер памяти для различных уравнений математической физики и собрана обширная библиография по таким задачам.

В настоящей работе изучается сформулированная выше обратная задача. Она существенно отличается по постановке и методам исследования от работ [10, 11]. Полученные результаты являются новыми. В следующем разделе изучается прямая задача, выписывается структура решения в окрестности фронта волны, выводятся амплитудные формулы для сингулярной части решения и его регулярной части на фронте волны. В разд. 3 проводится анализ задач об определении функций  $p(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$ . Показывается, что задание функции  $F_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  определяет интегралы от  $p(\mathbf{x})$  по всевозможным прямым, пересекающим область  $B$ . Тем самым задача о построении  $p(\mathbf{x})$  приводится к задаче рентгеновской томографии. Это позволяет однозначно ее найти. После этого оказывается возможным найти по функции  $F_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  интегралы от  $q(\mathbf{x})$  также по всевозможным прямым, пересекающим область  $B$ . Это обстоятельство сводит проблему построения  $q(\mathbf{x})$  к полностью аналогичной задаче томографии.

## 2. Представление решения прямой задачи

Найдем формулы для амплитуды сингулярной части электрической напряженности поля и значения ее регулярной части на фронте волны. Чтобы это

сделать, удобно использовать для функции  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  интегро-дифференциальное уравнение второго порядка. Выведем его следующим образом. Вначале продифференцируем оба уравнения (1) по переменной  $t$ , а затем исключим из первого уравнения  $\text{rot} \mathbf{H}_t$ . Тогда получим уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathbf{E}_{tt} + (p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}_t + p(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_1'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds \\ + q(\mathbf{x}) \mathbf{E} + q(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_2'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds + \frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Воспользуемся равенством  $\text{rot rot } \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E} + \nabla \text{div } \mathbf{E}$ . В результате из (6) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \mathbf{E}_{tt} + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}_t + \mu p(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_1'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds \\ + \mu q(\mathbf{x}) \mathbf{E} + \mu q(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_2'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds = \Delta \mathbf{E} - \nabla \text{div } \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вычислим  $\text{div } \mathbf{E}$  с помощью первого равенства (1). В результате вычислений получаем соотношение

$$\begin{aligned} \varepsilon \left( \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \int_{-\infty}^t K_1'(t-s) \text{div}[p(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds \right) \\ + \text{div}[(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)] + \int_{-\infty}^t K_2(t-s) \text{div}[q(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds = 0. \end{aligned}$$

Из него следует формула

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^t (t-s) K_1'(t-s) \text{div}[p(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^t \text{div}[(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds + \int_{-\infty}^t (t-s) K_2(t-s) \text{div}[q(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Из равенств (7) и (8) получаем уравнение

$$\begin{aligned} \varepsilon \mu \mathbf{E}_{tt} + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}_t - \Delta \mathbf{E} + \mu p(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_1'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds \\ + \mu q(\mathbf{x}) \mathbf{E} + \mu q(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^t K_2'(t-s) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s) ds \\ - \frac{1}{\varepsilon} \left\{ \int_{-\infty}^t (t-s) K_1'(t-s) \nabla \text{div}[p(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds + \int_{-\infty}^t \nabla \text{div}[(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x})) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds \right\} \end{aligned}$$



$$\left. + \int_{-\infty}^t (t-s) K_2(t-s) \nabla \operatorname{div}[q(\mathbf{x}) \mathbf{E}(\mathbf{x}, s)] ds \right\} = 0. \quad (9)$$

Представим решение уравнения (9), удовлетворяющее первому условию (3), в виде асимптотического разложения в окрестности фронта  $t = \tau(\mathbf{x}, \nu)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \nu, \ell) = & \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) \delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) + \theta_0(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) [\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) \\ & + \gamma(\mathbf{x}, \nu, \ell)(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) + \dots], \end{aligned} \quad (10)$$

в котором  $\theta_0(t)$  — функция Хевисайда:  $\theta_0(t) = 1$  для  $t \geq 0$  и  $\theta_0(t) = 0$  для  $t < 0$ , а многоточием обозначены члены более высокого порядка малости, чем  $(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))$ .

**Теорема 1.** Пусть

$$\mathbb{R}_-^3(\nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \nu + R \leq 0\}, \quad \mathbb{R}_+^3(\nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \nu + R > 0\}.$$

Для функций  $\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  и  $\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  имеют место равенства

$$\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = \ell, \quad \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_-^3, \quad (11)$$

$$\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = A(\mathbf{x}, \nu) \ell, \quad A(\mathbf{x}, \nu) = \exp\left(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} [p(\xi) + \sigma(\xi)] ds\right), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3, \quad (12)$$

$$\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) = B(\mathbf{x}, \nu) \ell, \quad B(\mathbf{x}, \nu) = -\frac{A(\mathbf{x}, \nu)}{2(\varepsilon\mu)^{1/2}} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \left[ \mu q(\xi) - \frac{\Delta_\xi A(\xi, \nu)}{A(\xi, \nu)} \right] ds, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3, \quad (13)$$

в которых  $L(\mathbf{x}, \nu)$  — луч, выходящий из точки  $\mathbf{x}$  в направлении  $-\nu$ ,  $\xi = \mathbf{x} - s\nu$  — промежуточная точка интегрирования на  $L(\mathbf{x}, \nu)$ ,  $s > 0$ . В качестве положительного направления на  $L(\mathbf{x}, \nu)$  принимается направление возрастания параметра  $s$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Непосредственные вычисления приводят к формулам

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{tt}(\mathbf{x}, t, \nu, \ell) = & \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) \delta''(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) + \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) \delta'(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) \\ & + \gamma(\mathbf{x}, \nu, \ell) \delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) + \dots, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{E}(\mathbf{x}, t, \nu, \ell) = & \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) |\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu)|^2 \delta''(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) \\ & - [2(\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \nabla) \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) \Delta \tau(\mathbf{x}, \nu) - \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) |\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu)|^2] \delta'(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) \\ & - [2(\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \nabla) \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) \Delta \tau(\mathbf{x}, \nu) - \gamma(\mathbf{x}, \nu, \ell) |\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu)|^2 \\ & - \Delta \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)] \delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu)) + \dots, \end{aligned} \quad (15)$$

в которых выписаны только сингулярные составляющие, а многоточием обозначены регулярные члены.

Подставим выражения для  $\mathbf{E}_{tt}$  и  $\Delta \mathbf{E}$  из формул (14), (15) в уравнение (9). Используем при этом очевидные равенства

$$|\nabla \tau(\mathbf{x}, \nu)|^2 = \varepsilon\mu, \quad \Delta \tau(\mathbf{x}, \nu) = 0.$$

В вычислениях член с сингулярностью  $\delta''(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))$  исчезнет. Приравняем к нулю члены при сингулярностях  $\delta'(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))$  и  $\delta(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))$ . Тогда получим уравнения

$$2(\nabla\tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \nabla)\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0, \quad (16)$$

$$2(\nabla\tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \nabla)\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu q(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) + (p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))(\nabla\tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)) - \Delta\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0. \quad (17)$$

Заметим, что коэффициент  $\gamma(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  в этих формулах не участвует. Уравнение для него можно было бы найти, а затем и вычислить сам коэффициент, если выписать разложение (10) со следующим членом  $\gamma^1(\mathbf{x}, \nu, \ell)(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))^2$ , сосчитать возникающие коэффициенты при  $\theta_0(t - \tau(\mathbf{x}, \nu))$  и приравнять его к нулю. Однако для исследования обратной задачи нам этот коэффициент  $\gamma(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  не нужен, поэтому вычислять его не будем.

Введем в рассмотрение плоскость  $\Sigma(\nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \nu + R = 0\}$ , касающуюся в точке  $\mathbf{x} = -R\nu$  сферы  $S$  и являющуюся общей границей полупространств  $\mathbb{R}_-^3(\nu)$  и  $\mathbb{R}_+^3(\nu)$ . Из начальных условий (3) следует формула (11). Таким образом, чтобы найти  $\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  и  $\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  нужно их продолжить в полупространство  $\mathbb{R}_+^3(\nu)$  с помощью уравнений (16), (17). При этом целесообразно использовать начальные условия на  $\Sigma(\nu)$ , вытекающие из равенств (11):

$$\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = \ell, \quad \beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0 \quad \text{для } \mathbf{x} \in \Sigma(\nu). \quad (18)$$

Опишем процедуру построения функций  $\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  и  $\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  в полупространстве  $\mathbb{R}_+^3(\nu)$ . Пусть  $\mathbf{x}^0$  — произвольная точка плоскости  $\Sigma(\nu)$ . Выпустим из нее луч  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\nu$ ,  $s \geq 0$ . Вдоль этого луча имеет место равенство

$$(\nabla\tau(\mathbf{x}, \nu) \cdot \nabla)\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = (\varepsilon\mu)^{1/2}(\nu \cdot \nabla)\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = (\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell).$$

Поэтому уравнение (16) и начальные данные для него можно записать в виде

$$2(\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0, \quad \alpha|_{s=0} = \ell.$$

Интегрируя это уравнение, находим, что

$$\alpha(\mathbf{x}^0 + s\nu, \nu, \ell) = \ell \exp\left(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}} \int_0^s [p(\mathbf{x}^0 + s'\nu) + \sigma(\mathbf{x}^0 + s'\nu)] ds'\right), \quad s > 0. \quad (19)$$

Из формулы (19) видно, что вектор  $\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell)$  имеет в неоднородной среде то же направление  $\ell$ , что и в однородной. В связи с этим первый член второй строки в уравнении (17) равен нулю. Само уравнение можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения вдоль прямой  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + s\nu$ :

$$2(\varepsilon\mu)^{1/2}\frac{d}{ds}\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu(p(\mathbf{x}) + \sigma(\mathbf{x}))\beta(\mathbf{x}, \nu, \ell) + \mu q(\mathbf{x})\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) - \Delta\alpha(\mathbf{x}, \nu, \ell) = 0 \quad (20)$$

с начальными данными

$$\beta|_{s=0} = 0. \quad (21)$$

Интегрируя линейное уравнение (20) с учетом начальных данных (21), получаем формулу

$$\beta(\mathbf{x}^0 + s\nu, \nu, \ell) = -\frac{1}{2(\varepsilon\mu)^{1/2}} \exp\left(-\frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}} \int_0^s [p(\mathbf{x}^0 + s'\nu) + \sigma(\mathbf{x}^0 + s'\nu)] ds'\right)$$

$$\begin{aligned} & \times \int_0^s [\mu q(\mathbf{x}^0 + s'\nu) \alpha(\mathbf{x}^0 + s'\nu, \nu, \ell) - \Delta_{\mathbf{x}^0} \alpha(\mathbf{x}^0 + s'\nu, \nu, \ell)] \\ & \times \exp \left( \frac{\mu^{1/2}}{2\varepsilon^{1/2}} \int_0^{s'} [p(\mathbf{x}^0 + s''\nu) + \sigma(\mathbf{x}^0 + s''\nu)] ds'' \right) ds', \quad s > 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Равенства (19) и (22) удобно переписать в виде (12) и (13). Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^3$ . Тогда расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до ее проекции  $\mathbf{x}^0$  на плоскость  $\Sigma(\nu)$  равно  $s(\mathbf{x}, \nu) = \mathbf{x} \cdot \nu + R$ , а произвольная точка  $\xi$  на отрезке прямой, соединяющей  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}^0$ , может быть представлена в виде  $\xi = \mathbf{x} - s\nu$ ,  $s \in [0, s(\mathbf{x}, \nu)]$ . С учетом того, что функции  $p(\mathbf{x})$ ,  $\sigma(\mathbf{x})$  и  $q(\mathbf{x})$  равны нулю вне  $B$ , можно интегрирование по отрезку, соединяющему точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}^0$ , заменить интегрированием по лучу  $L(\mathbf{x}, \nu) = \{\xi = \mathbf{x} - s\nu, s \geq 0\}$ . Тогда равенства (19) и (22) преобразуются в (12) и (13).

### 3. Исследование обратной задачи

Из данных (5) обратной задачи, представления (10) и формул (12), (13) следуют равенства

$$F_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)), \quad F_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = B(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)) \quad (23)$$

для всех  $\mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$ ,  $\psi \in [0, \pi)$ , и всех  $\nu(\varphi, \psi)$ ,  $(\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi)$ .

Таким образом, функции  $A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))$  и  $B(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))$  в обратной задаче известны для указанных выше значений их аргументов. Рассмотрим первое равенство (23). В этом случае, используя формулу (12), находим интегралы

$$\int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} p(\xi) ds = h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) \quad (24)$$

$$\forall \mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi))), \quad \psi \in [0, \pi); \quad \forall \nu(\varphi, \psi), \quad (\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

в которых функция  $h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  определена равенством

$$h_1(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = -2\varepsilon^{1/2} \mu^{-1/2} \ln A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi)) - \int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} \sigma(\xi) ds.$$

Для любого фиксированного значения  $\psi \in (0, \pi)$  множество  $P(\psi) \cap B$  представляет собой круг радиуса  $R$ . Объединение этих кругов для всех  $\psi \in [0, \pi)$  образует шар  $B$ . Формула (24) при фиксированном  $\psi \in [0, \pi)$  задает интегралы по всевозможным прямым, пересекающим круг  $P(\psi) \cap B$ . Действительно, если зафиксировать еще и угол  $\varphi$ , то формула (24) определяет интегралы вдоль пучка параллельных лучей, выходящих из точек полуокружности  $(P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi)))$  в направлении  $-\nu(\varphi, \psi)$ . При изменении угла  $\varphi$  от 0 до  $2\pi$  это семейство лучей делает полный оборот в плоскости  $P(\psi)$ . Говоря об интегралах вдоль прямых и лучей, мы, конечно, имеем в виду финитность подынтегральных функций  $p(\mathbf{x})$  и  $\sigma(\mathbf{x})$ . Из сказанного выше следует, что задача решения интегрального уравнения (24), т. е. отыскания подынтегральной функции  $p(\mathbf{x})$ , представляет собой хорошо известную задачу рентгеновской томографии. Решение ее единственно и устойчиво в соответствующих пространствах. Кроме того, существуют аналитические формулы обращения и большое число численных алгоритмов, решающих эту задачу.

Примем теперь, что  $p(\mathbf{x})$  найдена. Тогда функция  $A(\mathbf{x}, \nu)$  может быть вычислена для любых  $\mathbf{x} \in (B \cup S)$  и любых  $\nu \in \mathbb{S}^2$ . В этом случае, используя формулу (13), можно найти интегралы

$$\int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} q(\xi) ds = h_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi) \quad (25)$$

$$\forall \mathbf{x} \in (P(\psi) \cap S^+(\nu(\varphi, \psi))), \psi \in [0, \pi); \forall \nu(\varphi, \psi), (\varphi, \psi) \in [0, 2\pi) \times [0, \pi),$$

в которых функция  $h_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi)$  определена равенством

$$h_2(\mathbf{x}, \varphi, \psi) = -\frac{2\varepsilon^{1/2}B(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))}{\mu^{1/2}A(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} + \int_{L(\mathbf{x}, \nu(\varphi, \psi))} \frac{\Delta_\xi A(\xi, \nu(\varphi, \psi))}{\mu A(\xi, \nu(\varphi, \psi))} ds.$$

Задача об отыскании функции  $q(\mathbf{x})$  по интегралам (25) представляет собой в точности такую же задачу томографии, как и предыдущая.

Резюмируя результат исследования обратной задачи, приходим к следующему утверждению.

**Теорема 2.** Обратная задача редуцируется к двум последовательно решаемым задачам рентгеновской томографии (24) и (25).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenzi A., Sinestrari E. An inverse problem in the theory of materials with memory. I // Nonlinear Analysis. Theory Methods & Applications. 1988. V. 12. P. 1317–1335.
2. Дурдиев Д. К. Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
3. Janno J., von Wolfersdorf L. Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
4. Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G. Recovering a Lamé kernel in a viscoelastic system // Appl. Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
5. Lorenzi A., Romanov V. G. Recovering two Lamé kernels in a viscoelastic system // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
6. Романов В. Г. Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
7. Романов В. Г. Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.
8. Durdiev D. K., Totieva Z. D. The problem of determining the one-dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.
9. Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolić V., Rajendran M. L., Wohlmuth B. Determining kernels in linear viscoelasticity // J. Comput. Physics. 2022. V. 464. 111331.
10. Durdiev D. K. Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // Differ. Equ. 2008. V. 44, N 7. P. 893–899.
11. Романов В. Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 4. С. 861–875.
12. Романов В. Г. Обратная задача для полуплинейного волнового уравнения с нелинейным интегральным оператором // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 245–265.
13. Durdiev D. K., Totieva Z. D. Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations // Springer Singapore, "Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sci-

ences". 2023. P. 368.

*Поступила в редакцию 14 августа 2025 г.*

*После доработки 14 августа 2025 г.*

*Принята к публикации 22 августа 2025 г.*

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

`romanov@math.nsc.ru`

## УКАЗАТЕЛЬ

	Номер
Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.	Критерий положительной определенности квадратичного функционала и его приложение 6
Агапов С. В., Соловьев Д. В.	О рациональных интегралах натуральных систем в магнитном поле 3
Азаров Д. Н.	О $\pi$ -мощности некоторых разрешимых групп 5
Александров В. А.	Дополнительное уравнение первого порядка для бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в изотермических координатах 3
Алиш Д. Б., Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.	О теории вычислимо перечислимых линейных предпорядков с конкатенацией 2
Арсенович М., Богачев В. И., Крстич М.	Пространства мерозначных отображений, связанные с дезинтегрированиями 2
Артамонов Д. В.	Вычисление $6j$ -символов для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ 4
Артюшин А. Н.	Функциональные пространства типа $L_{p(\cdot)}(L_{q(\cdot)})$ и теоремы вложения пространств функций с переменной гладкостью 1
Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.	Существование и свойства решений обобщенной задачи равновесия по Нэшу 5
Асеев В. В.	Об устранимых особенностях для квазирегулярных отображений 3
Асташкин С. В., Семенов Е. М., Усачев А. С.	Операторы, определенные на множестве банаховых пределов 5
Баженов Н. А., Касымканулы Б., Морозов А. С.	О слабо когомографичных структурах 3
Баженов Н. А.	см. Алиш Д. Б., Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.
Баранов Д. Р., Соколов Е. В.	Об отделимости абелевых подгрупп свободного произведения двух групп с нормальной объединенной подгруппой 2
Белых В. Н.	Об асимптотике александровского $n$ -поперечника компакта аналитических периодических функций 3
Беляева Ю. О., Бурский В. П.	О разрешимости смешанной задачи для волнового уравнения с эквивариантным граничным условием 4
Берестовский В. Н.	О тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля Вселенной Дефриза 5
Берестовский В. Н., Мустафа А.	Радиус инъективности вытянутого эллипсоида вращения 6

Бикчентаев А. М.	О гипонормальных измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана	3
Богачев В. И.	см. Арсенович М., Богачев В. И., Крстич М.	
Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А.	Согласованные структуры обобщенных квандлов Александера. Тожества дистрибутивности и медиальности	4
Бородин О. В., Иванова А. О.	Описание 3-граней в 3-многогранниках без смежных треугольников	1
Бородин О. В., Иванова А. О.	Описание инцидентных 3-граням ребер в 3-многогранниках без смежных 3-граней	6
Бородич Р. В.	см. Йи С., Ченг Б., Бородич Р. В., Каморников С. Ф.	
Брюханов О. В.	Биекции группы, коммутирующие с ее автоморфизмами	3
Бурский В. П.	см. Беляева Ю. О., Бурский В. П.	
Веснин А. Ю., Егоров А. А.	Прямоугольная группа Коксетера минимального объема в трехмерном гиперболическом пространстве	6
Водопьянов С. К.	Новые свойства операторов композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях	4
Водопьянов С. К., Павлов С. В.	Задачи нелинейной теории упругости на группах Карно и квазиконформный анализ	3
Гаджимирзаев Р. М.	Равномерная и абсолютная сходимость ряда Фурье по полиномам Эрмита — Соболева	5
Геворкян Г. Г.	О множителях Вейля для безусловной сходимости п.в. для всплесков Стрёмберга	2
Го В.	см. Го Ц., Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О.	
Го Ц., Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О.	Новые примеры непрономальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах	4
Голубков А. А.	Асимптотика решений уравнения Штурма — Лиувилля вдоль произвольной кривой в окрестности симметричной особой точки	4
Гуськов Н. В., Дудкин Ф. А.	Хопфовость вершинно-транзитивных обобщенных групп Баумслага — Солитера	4
Гутман А. Е., Емельяненко И. А.	Два примера квазиплотных векторных подпространств $\mathbb{R}^N$	6
Гутман А. Е., Коптев А. В.	Латеральная сходимость и гомоморфизмы банаховых расслоений	2
Данилов О. А.	см. Лу С., Данилов О. А., Медных А. Д.	
Дурнев В. Г.	см. Зеткина А. И., Дурнев В. Г.	
Демиденко Г. В., Ма С.	Об одном классе псевдогиперболических операторов с переменными коэффициентами	6
Дубинин В. Н.	Шварцман и критические значения полинома с вещественными критическими точками	6
Дудкин Ф. А.	см. Гуськов Н. В., Дудкин Ф. А.	
Егоров А. А.	см. Веснин А. Ю., Егоров А. А.	
Емельяненко И. А.	см. Гутман А. Е., Емельяненко И. А.	

Ефременко Ю. Д.	О числе Лосика — Черна слоений коразмерности 2	5
Жуковский Е. С.	см. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.	
Жуковский С. Е.	см. Арутюнов А. В., Жуковский Е. С., Жуковский С. Е.	
Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	Строение конечных групп, изоспектральных групп автоморфизмов второй спорадической группы Янко	1
Зеткина А. И., Дурнев В. Г.	Неразрешимые фрагменты позитивных теорий свободных полугрупп	5
Иванов А. В.	Дополнение к теореме Понтрягина — Шнирельмана	1
Иванова А. О.	см. Бородин О. В., Иванова А. О.	
Йи С., Ченг Б., Бородич Р. В., Каморников С. Ф.	Об одном свойстве нормальных холловых подгрупп конечных групп	2
Казакова А. Д., Плотников М. Г.	О лакунарности и единственности для $p$ -ичных аналогов хаоса Радемахера	5
Калмурзаев Б. С.	см. Алиш Д. Б., Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.	
Каменский М. И.	см. Обуховский В. В., Каменский М. И., Петросян Г. Г., Ульвачева Т. А., Цзэн Ш.	
Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.	$\sigma$ -Проблема Кегеля — Виландта: редукция к простым группам	1
Каморников С. Ф.	см. Йи С., Ченг Б., Бородич Р. В., Каморников С. Ф.	
Карманова М. Б.	Метрические свойства отображений, задающих липшицевы графики на двухступенчатых группах Карно	6
Карманова М. Б.	Неконтактные отображения общих групп Карно и формула коплощади	4
Карманова М. Б.	О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно	5
Касымканулы Б.	см. Баженов Н. А., Касымканулы Б., Морозов А. С.	
Касымов Н. Х.	Об одном вопросе теории нумерованных групп	2
Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.	Скорости сходимости в эргодической теореме для унитарных действий абелевых групп компактного происхождения	3
Когабаев Н. Т.	НР-полнота проблемы совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями	3
Коптев А. В.	см. Гутман А. Е., Коптев А. В.	
Копылов Я. А.	Трансляционно инвариантные линейные функционалы в пространствах Орлича на локально компактных группах	5
Косов А. А., Семенов Э. И.	Система уравнений с оператором Монжа — Ампера и ее многомерные точные решения	4
Крстич М.	см. Арсенович М., Богачев В. И., Крстич М.	
Кыров В. А.	Поверхности на группах гельмгольца типа	5



Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.	Серии компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$	1
Кытманов А. М.	Об аналогах рекуррентных формул Ньютона для систем трансцендентных уравнений	1
Ланских И. Ю., Тихомиров А. С.	Модули полустабильных пучков ранга три с особенностями смешанной размерности на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$	1
Лу С., Данилов О. А., Медных А. Д.	Дискретные параболические функции и ряды Тейлора	6
Лыткина Д. В.	см. Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	
Лыткина Д. В.	см. Мао Ю. М., Ма С. Ц., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	
Ма С.	см. Демиденко Г. В., Ма С.	
Ма С. Ц.	см. Мао Ю. М., Ма С. Ц., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	
Магарил-Ильяев Г. Г.	см. Аваков Е. Р., Магарил-Ильяев Г. Г.	
Мазуров В. Д.	см. Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	
Мазуров В. Д.	см. Мао Ю. М., Ма С. Ц., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	
Мао Ю. М., Ма С. Ц., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.	О периодических группах с узким классом сопряженных инволюций	5
Маслова Н. В.	см. Го Ц., Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О.	
Матвеев Д. А.	Конечномерные 2-порожденные алгебры Ли дифференцирований на Т-многообразиях	3
Медных А. Д.	см. Лу С., Данилов О. А., Медных А. Д.	
Монахов В. С.	О нильпотентных корадикалах силовских нормализаторов конечной группы	4
Морозов А. С.	см. Баженов Н. А., Касымканулы Б., Морозов А. С.	
Мустафа А.	см. Берестовский В. Н., Мустафа А.	
Назаров С. А.	Деформация тонкой упругой зажатой по краю пластины с прикрепленными стержнями. 1. Статическая задача	3
Назаров С. А.	Деформация тонкой упругой зажатой по краю пластины с прикрепленными стержнями. 2. Спектральная задача	4
Назаров С. А.	Множественность асимптотических серий собственных чисел третьей краевой задачи с большим отрицательным коэффициентом Робэна	6
Нещадим М. В.	Обобщенные поля Бельтрами. Точные решения	5
Нещадим М. В.	см. Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А.	
Обуховский В. В., Каменский М. И., Петросян Г. Г., Ульвачева Т. А., Цзэн Ш.	О системах дифференциальных включений дробного порядка в банаховых пространствах	2

Осипов Н. Н.	см. Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.	
Павлов А. Л.	О задаче Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста	4
Павлов С. В.	см. Водопьянов С. К., Павлов С. В.	
Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.	Суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, теория которой не имеет простой модели	3
Петросян Г. Г.	см. Обуховский В. В., Каменский М. И., Петросян Г. Г., Ульвачева Т. А., Цзэн Ш.	
Плотников М. Г.	см. Казакова А. Д., Плотников М. Г.	
Подвигин И. В.	см. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.	
Пожидаев А. П.	О смешанных тождествах эндоморфов, бимодулях и $\omega$ -алгебрах	4
Пожидаев А. П.	Об изоморфизмах эндоморфов и дублей Витта	5
Прохоров Д. В.	Об интерполяции функциональных пространств Че- заро со степенным весом	2
Пчелинцев С. В.	О классификации правоальтернативных сингулярных 10-мерных супералгебр диагонального типа	1
Ревин Д. О.	см. Го Ц., Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О.	
Романов А. С.	Отображения соболевского типа между метрическими пространствами с мерой. Операторы композиции	6
Романов В. Г.	Обратная задача для полулинейного волнового уравнения с нелинейным интегральным оператором	2
Романов В. Г.	Обратная задача для уравнений электродинамики с памятью	6
Сбоев Д. А.	Емкостные граничные элементы на римановых многообразиях и обобщенные границы	3
Сбоев Д. А.	Операторы композиции пространств Соболева на метрических пространствах с мерой. I	5
Семенов Е. М.	см. Асташкин С. В., Семенов Е. М., Усачев А. С.	
Семенов Э. И.	см. Косов А. А., Семенов Э. И.	
Симонов А. А.	см. Бородин А. Н., Нецадим М. В., Симонов А. А.	
Соколов Е. В.	см. Баранов Д. Р., Соколов Е. В.	
Соловьев Д. В.	см. Агапов С. В., Соловьев Д. В.	
Сорин Б. В.	Топологическая версия олигоморфности групп	3
Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.	Об итерационных интегральных операторах на конусе монотонных функций	2
Тихомиров А. С.	см. Ланских И. Ю., Тихомиров А. С.	
Тихомиров С. А.	см. Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.	
Тодиков В. Э.	см. Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.	
Толстоногов А. А.	Релаксация в задаче оптимального управления, описываемой связанной системой с максимально монотонными операторами	2

---

<b>Трофимов А. В.</b>	см. Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.	
<b>Тютянов В. Н.</b>	см. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.	
<b>Ульвачева Т. А.</b>	см. Обуховский В. В., Каменский М. И., Петросян Г. Г., Ульвачева Т. А., Цзэн Ш.	
<b>Умаров Х. Г.</b>	Разрушение решения и глобальная разрешимость задачи Коши для уравнения, моделирующего распространение продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне	<b>2</b>
<b>Усачев А. С.</b>	см. Асташкин С. В., Семенов Е. М., Усачев А. С.	
<b>Файзрахманов М. Х.</b>	Один подход к классификации минимальных нумераций семейств арифметических множеств	<b>2</b>
<b>Хабилов С. В.</b>	К групповой классификации релаксирующей газовой динамики методом оптимальной системы подальгебр	<b>1</b>
<b>Цзэн Ш.</b>	см. Обуховский В. В., Каменский М. И., Петросян Г. Г., Ульвачева Т. А., Цзэн Ш.	
<b>Ченг Б.</b>	см. Йи С., Ченг Б., Бородич Р. В., Каморников С. Ф.	
<b>Шамбилова Г. Э.</b>	см. Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.	
<b>Шеметкова О. Л.</b>	Конечные минимальные не $\sigma$ -сверхразрешимые группы	<b>4</b>
<b>Шепелев В. Д.</b>	Сильная $\pi$ -теорема Силова для простых групп лиева типа ранга 1	<b>4</b>

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ ,  
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ ,  
the American Mathematical Society's  $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$  macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору  
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.  
Размещение в сети Интернет [math-smz.ru](http://math-smz.ru).

---

Подписано к опубликованию 30.10.2025. Уч.-изд. л. 14. Формат  $70 \times 108^{1/16}$ .  
Дата размещения в сети Интернет 20.11.2025. Объем файла 2.38 Мб.

---

Издательство Института математики,  
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.