ISSN 2310–001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 66

3

2025

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА   НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ   ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 66, № 3 (391)   **Май—июнь, 2025**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2025

Адрес редакции:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.938

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ НАТУРАЛЬНЫХ СИСТЕМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

С. В. Агапов, Д. В. Соловьев

Аннотация. Исследуются натуральные механические системы на двумерной плоскости в магнитном поле, обладающие дополнительным рациональным по импульсам первым интегралом. В данной работе построены новые интегрируемые примеры таких систем, а также исследован вопрос о существовании рациональных интегралов в отсутствии магнитного поля.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.301

Ключевые слова: натуральная система, потенциал, магнитное поле, интегрируемость, рациональный по импульсам первый интеграл, уравнение Хопфа.

1. Введение и основные результаты

Рассмотрим натуральную механическую систему

$$\dot{x}^i = \{x^i, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}_{mg}, \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

с гамильтонианом H в магнитном поле ω:

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + V(x^1, x^2), \quad \omega = \Omega(x^1, x^2)\, dx^1 \wedge dx^2,$$

здесь $V(x^1, x^2)$ — потенциал, магнитная скобка Пуассона имеет вид

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x^i} \right) + \Omega(x^1, x^2) \left(\frac{\partial F}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right).$$

Система (1) задает движение заряженной частицы на плоскости в потенциальном силовом и магнитном полях.

Функция F называется *первым интегралом* системы (1), если

$$\dot{F} = \{F, H\}_{mg} \equiv 0.$$

Отметим, что гамильтониан H сам по себе является первым интегралом (1). Если при этом найдется дополнительный интеграл F, функционально независимый с H почти всюду, то система (1) называется *вполне интегрируемой*. В этом случае согласно теореме Арнольда — Лиувилля [1] уравнения движения (1) можно проинтегрировать в квадратурах.

Во многих системах вида (1) первые интегралы являются полиномами по импульсам. Полиномиальные интегралы малых степеней таких систем хорошо

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00281, https://rscf.ru/project/24-11-00281/.

изучены в целом. Так, например, система (1) допускает линейный интеграл тогда и только тогда, когда потенциал и магнитное поле имеют один из следующих видов [2]:

• $V(x,y) = f(\alpha x+\beta y)$, $\Omega(x,y) = -2g'(\alpha x+\beta y)$, $F_1 = \alpha p_2 - \beta p_1 + g(\alpha x+\beta y)$;

• $V(x,y) = f(x^2+y^2)$, $\Omega(x,y) = -2g'(x^2+y^2)$, $F_1 = -yp_1 + xp_2 + g(x^2+y^2)$;

здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а f и g — произвольные функции одного аргумента.

Классификация квадратичных интегралов системы (1) является намного более сложной задачей (см., например, [2–4]). Приведем лишь один из известных примеров, найденный в [2].

• Пусть $S(x), R(y)$ — эллиптические функции, удовлетворяющие уравнениям

$$S'' = \alpha S^2 + \beta_1 S + \gamma_1, \quad R'' = -\alpha R^2 + \beta_2 R + \gamma_2.$$

Тогда система (1) с потенциалом

$$V(x,y) = \frac{1}{2}\left(S'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(R'\right)^2 + SR'' + RS'' + \mu_2 - \mu_1$$

в магнитном поле $\omega = (S'' + R'')\, dx \wedge dy$ обладает квадратичным по импульсам интегралом

$$F_2 = \frac{p_2^2}{2} + R'p_1 + S'p_2 + f,$$

где

$$\mu_1 = (S')^2 + \frac{\beta_2}{2}S^2 - \beta_3 S, \quad \mu_2 = -(R')^2 - \frac{\beta_1}{2}R^2 + \beta_3 R, \quad f = \frac{1}{2}(S')^2 + SR'' + \mu_2.$$

Полиномиальные интегралы более высоких степеней системы (1) исследовались в различных работах (см., например, [5–7] и ссылки в них).

Отметим, что поиск полиномиальных интегралов гамильтоновой системы (1) в отсутствии магнитного поля является отдельной содержательной задачей. Многочисленные примеры интегрируемых потенциалов и соответствующие ссылки можно найти в [8, 9]. Особый интерес при этом представляет случай компактных конфигурационных пространств. В [10] доказано, что система (1) на аналитической ориентируемой замкнутой двумерной поверхности рода $g > 1$ в нулевом магнитном поле не может быть аналитически интегрируема. С другой стороны, примеры интегрируемых потенциалов на двумерном торе хорошо известны, дополнительный интеграл при этом является полиномом по импульсам степени 1 или 2. Вопрос о существовании неприводимых интегралов степени $n > 2$ до сих пор является открытым: в данный момент доказано лишь отсутствие интегралов степеней $n = 3, 4, 5$ [11–13]. Интересно, что на двумерной сфере при этом существуют интегрируемые примеры с интегралами степени $n > 2$.

Упомянем также магнитные геодезические потоки, которые задаются гамильтоновой системой (1) с гамильтонианом $H = g^{ij}p_ip_j/2$, здесь $ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j$ — риманова метрика на конфигурационном пространстве. В отличие от натуральных систем (1) для магнитных геодезических потоков интегрируемость одновременно на всех уровнях энергии оказывается весьма ограничительным требованием (см., например, [14] в случае замкнутой гиперболической поверхности и [15–18] в случае двумерного тора). Поэтому более естественным здесь оказывается вопрос об интегрируемости лишь на фиксированном уровне энергии (см., например, [19]), в этом случае пространство интегрируемых примеров намного богаче. В частности, на двумерном торе существуют различные интегрируемые примеры таких потоков с квадратичным первым интегралом [2, 3, 16, 20].

Вернемся к натуральной системе (1) в магнитном поле, у которой, вообще говоря, могут быть интегралы более общего вида. Систематическое изучение неполиномиальных интегралов систем вида (1), по всей видимости, впервые было начато в работах [8, 21], там же можно найти различные примеры таких интегралов.

В данной работе исследован случай, когда дополнительный интеграл F системы (1) имеет вид рациональной функции по импульсам с линейными числителем и знаменателем, т. е.

$$F = \frac{a(x,y)p_1 + b(x,y)p_2 + d(x,y)}{f(x,y)p_1 + g(x,y)p_2 + h(x,y)}. \tag{2}$$

Предположим сначала, что $f = 0$. Тогда имеет место

Лемма 1. *Если $f(x,y) \equiv 0$, то без ограничения общности можно считать, что рациональный интеграл F имеет один из следующих двух видов.*

Случай 1:

$$F = \frac{p_1 + l(x,y)}{p_2 + k(x,y)}, \tag{3}$$

Случай 2:

$$F = \frac{yp_1 - xp_2 + l(x,y)}{p_2 + k(x,y)}, \tag{4}$$

где $k(x,y)$, $l(x,y)$ — некоторые функции.

Основные результаты данной работы заключаются в следующем.

Теорема 1. *Функция F вида (3) является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции $l(x,y)$, $k(x,y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$kl = s_3xy + s_1y + s_2x - s_0, \tag{5}$$

$$l^2 - k^2 = s_3(x^2 - y^2) + 2s_1x - 2s_2y + s_4, \tag{6}$$

где $s_0, \dots, s_4 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}(k^2 + s_3x^2 + 2s_1x), \quad \omega = k_x\, dx \wedge dy.$$

Теорема 2. *Функция F вида (4) является первым интегралом гамильтоновой системы (1) тогда и только тогда, когда функции $u(x,y) = yk(x,y)$, $v(x,y) = l(x,y) + xk(x,y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:*

$$\begin{aligned} 2(u^2 - v^2) = 2s_5 - 4s_4x + x^2(-4s_2 + 4s_3 + 4s_1x + s_0x^2) \\ + 2(2s_2 - 2s_3 - 3x(2s_1 + s_0x))y^2 + s_0y^4, \end{aligned} \tag{7}$$

$$uv = y(s_4 - x(-2s_2 + 2s_3 + 3s_1x + s_0x^2) + (s_1 + s_0x)y^2), \tag{8}$$

где $s_0, \dots, s_5 \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные, а потенциал и магнитное поле имеют вид

$$V(x,y) = -\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{y^2} + 2s_0x^2 + 4s_1x\right), \quad \omega = \frac{u_x}{y}\, dx \wedge dy.$$

Отметим, что рациональные интегралы вида (2) системы (1) с несколько более общей точки зрения исследовались в вышеупомянутой работе [8]; там же построены некоторые частные примеры таких интегралов. В нашей работе теоремы 1, 2 дают полное описание интегрируемых потенциалов и магнитных полей системы (1), для которых имеется дополнительный рациональный интеграл (2) в случае $f(x,y) \equiv 0$. Случай $f(x,y) \neq 0$ является намного более трудным для исследования (см. ниже).

Задача о рациональных интегралах системы (1) в отсутствии магнитного поля также содержательна, на что было указано, например, в [22]. Удивительно, но, насколько нам известно, вопрос о существовании таких интегралов, не сводящихся к полиномиальным, до сих пор открыт. Некоторые результаты в этом направлении были получены в недавних работах [23, 24], где, в частности, была обнаружена любопытная связь этой задачи с мероморфными решениями уравнения Хопфа. Несколько неожиданным при этом является тот факт, что аналогичная задача для двумерных геодезических потоков исследована гораздо лучше [22]; многочисленные примеры рациональных интегралов, в том числе на фиксированном уровне энергии при наличии магнитного поля, можно найти в [25–28].

Данная работа устроена следующим образом. В разд. 2 приведены доказательства леммы 1 и теорем 1, 2. Разд. 3 посвящен исследованию общего случая $f(x,y) \neq 0$. Мы опишем трудности, возникающие при исследовании этого случая, укажем на вышеупомянутую связь с уравнением Хопфа, а также обсудим вопрос о том, как наличие или отсутствие магнитного поля влияет на существование рациональных интегралов системы (1).

2. Доказательства основных утверждений

Докажем лемму 1. Пусть первый интеграл F системы (1) имеет вид

$$F = \frac{a(x,y)p_1 + b(x,y)p_2 + d(x,y)}{g(x,y)p_2 + h(x,y)}.$$

Приравнивая к нулю коэффициенты при мономах старшей степени по импульсам в равенстве $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, получим

$$gb_y - bg_y = 0, \quad ga_x - ag_x = 0, \quad g(a_y + b_x) - ag_y - bg_x = 0. \tag{9}$$

Без ограничения общности можно считать, что $g(x,y) \neq 0$, иначе существует линейный интеграл. Интегрируя уравнения системы (9), имеем

$$a(x,y) = (c_1 y + c_2)g(x,y), \quad b(x,y) = -(c_1 x - c_3)g(x,y),$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные. Тогда первый интеграл $\widetilde{F} = F - c_3$ примет вид

$$\widetilde{F} = \frac{(c_1 y + c_2)p_1 - c_1 x p_2 + (d/g - c_3 h/g)}{p_2 + h/g},$$

здесь $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, иначе существует линейный по импульсам интеграл $\widehat{F} = 1/\widetilde{F}$. Если $c_1 = 0$, то первый интеграл $\widetilde{F}/c_2$ принимает вид (3). Если $c_1 \neq 0$, то подходящим координатным сдвигом первому интегралу можно придать вид (4). Лемма 1 доказана.

Перейдем к доказательству теорем 1, 2.

2.1. Случай 1. Докажем теорему 1. Пусть первый интеграл F имеет вид (3), тогда соотношения (9) выполнены автоматически. Приравнивая к нулю коэффициенты при мономах оставшихся степеней в равенстве $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, получим следующие соотношения:

$$\Omega = k_x, \quad l_x = k_y, \quad l_y = -k_x, \tag{10}$$

$$V_y + kk_y = 0, \quad V_x + ll_x = 0, \tag{11}$$

$$lV_y - kV_x = 0. \tag{12}$$

Легко проверить, что уравнение (12) является следствием (10), (11). Условие совместности системы (11) имеет вид $(ll_x)_y - (kk_y)_x = 0$. С учетом (10) это выражение можно переписать двумя различными способами:

$$(kl)_{yy} = 0, \quad (kl)_{xx} = 0.$$

Проинтегрировав эти уравнения, получим

$$kl = \phi(x)y + \psi(x) = \xi(y)x + \eta(y), \tag{13}$$

где $\phi(x)$, $\psi(x)$, $\xi(y)$, $\eta(y)$ — неизвестные пока функции. Беря смешанную производную от этого выражения, получим $\phi'(x) = \xi'(y)$, откуда следует, что

$$\phi(x) = s_3x + s_1, \quad \xi(y) = s_3y + s_2,$$

где s_1, s_2, s_3 — произвольные постоянные. Подставляя эти выражения в (13), имеем

$$\psi(y) = s_1y - s_0, \quad \eta(x) = s_2x - s_0,$$

здесь s_0 — произвольная постоянная. В итоге приходим к алгебраическому соотношению на неизвестные функции $k(x, y)$, $l(x, y)$:

$$kl = s_3xy + s_1y + s_2x - s_0. \tag{14}$$

Вернемся к соотношениям (11). Проинтегрировав их, получим

$$2V(x, y) = \alpha(x) - k^2(x, y) = \beta(y) - l^2(x, y)$$

для произвольных функций $\alpha(x)$, $\beta(y)$. Следовательно,

$$l(x, y)^2 - k(x, y)^2 = \beta(y) - \alpha(x).$$

Возьмем оператор Лапласа ($\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$) от обеих частей. Левая часть ввиду (10) обратится в нуль и, следовательно,

$$\alpha''(x) = \beta''(y) = 2c_0,$$

где c_0 — произвольная постоянная. Стало быть,

$$\alpha(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2, \quad \beta(y) = c_0y^2 + c_3y + c_4,$$

и получили второе алгебраическое соотношение на функции $k(x, y)$, $l(x, y)$:

$$l^2 - k^2 = c_0(y^2 - x^2) + c_3y - c_1x + c_4 - c_2. \tag{15}$$

Постоянные s_i, c_j в (14), (15) не могут быть произвольными, они связаны несколькими дополнительными соотношениями. Чтобы найти их, возьмем частные производные по x и по y от выражения $l^2 - k^2$. С учетом (10) имеем

$$(l^2 - k^2)_x = 2(lk_y + kl_y) = 2(lk)_y, \quad (l^2 - k^2)_y = -2(lk_x + kl_x) = -2(lk)_x.$$

Из этих равенств с учетом (14), (15) следует, что $c_0 = -s_3$, $c_1 = -2s_1$, $c_3 = -2s_2$. Обозначая $s_4 = c_4 - c_2$, приходим к искомой системе (5), (6) на неизвестные функции $k(x,y)$ и $l(x,y)$. Выпишем ее решения в явном виде:

$$l(x,y) = \pm \frac{\sqrt{2}(s_2x + s_1y + s_3xy - s_4)}{\sqrt{-s_4 - 2s_1x - s_3x^2 + 2s_2y + s_3y^2 \pm \sqrt{h(x,y)}}},$$

$$k(x,y) = \pm \frac{\sqrt{-s_4 - 2s_1x - s_3x^2 + 2s_2y + s_3y^2 \pm \sqrt{h(x,y)}}}{\sqrt{2}},$$

здесь $h(x,y) = (s_4 + 2s_1x - 2s_2y + s_3(x-y)(x+y))^2 + 4(s_2x + s_1y + s_3xy - s_0)^2$.

Теорема 1 доказана.

Как видно, в общем случае выражения для первого интеграла, а также для потенциала и магнитного поля оказываются достаточно громоздкими. Покажем, как при помощи теоремы 1 можно построить более простые примеры. Пусть, например, $s_1 = 1$, $s_0 = s_2 = s_3 = s_4 = 0$. Тогда система (5), (6) примет вид

$$2x = l^2 - k^2, \quad y = kl. \tag{16}$$

Сделаем дополнительную замену координат $(x,y) \to (k,l)$, рассматривая соотношения (16) как формулы перехода. Расширяя это преобразование координат до канонического, получим, что старые и новые импульсы связаны следующими соотношениями:

$$p_1 = \frac{-XP_X + YP_Y}{X^2 + Y^2}, \quad p_2 = \frac{YP_X + XP_Y}{X^2 + Y^2},$$

здесь введены более привычные обозначения $k = X$, $l = Y$. В новых переменных получим следующий интегрируемый пример.

Пример 1. Натуральная система с гамильтонианом

$$H = \frac{P_X^2 + P_Y^2}{2(X^2 + Y^2)} - \frac{Y^2}{2}$$

в магнитном поле $\omega = X dX \wedge dY$ вполне интегрируема, дополнительный интеграл имеет вид

$$F = \frac{-XP_X + YP_Y + Y(X^2 + Y^2)}{YP_X + XP_Y + X(X^2 + Y^2)}, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что эта система не обладает линейными по импульсам интегралами и интеграл F неприводим.

Отметим, что гамильтониан H в примере 1 имеет вид $H = g^{ij}P_iP_j/2 + V$, однако соответствующая метрика $ds^2 = g_{ij}\,du^i du^j$, разумеется, плоская.

2.2. Случай 2. Докажем теорему 2. Пусть первый интеграл F имеет вид (4), тогда соотношения (9) выполнены автоматически. Оставшиеся уравнения имеют вид

$$\Omega = k_x, \quad -yk_y + xk_x + l_x = 0, \quad yk_x + xk_y + l_y = 0,$$

$$yV_y + k(xk_x + l_x) = 0, \quad -lk_y + k(yk_x + l_y) - yV_x = 0,$$

$$(xk + l)V_y - ykV_x = 0.$$

Введя обозначения

$$u(x,y) = yk(x,y), \quad v(x,y) = l(x,y) + xk(x,y),$$

перепишем эту систему в виде

$$v_y + u_x = 0, \quad v_x - u_y = 0, \tag{17}$$

$$u(yu_y - u) + y^3 V_y = 0, \quad -v(u - yu_y) + y^3 V_x = 0. \tag{18}$$

Рассуждениями, аналогичными приведенным в предыдущем пункте, можно показать, что общее решение системы (17), (18) имеет вид (7), (8). Детали для краткости опустим.

Теорема 2 доказана.

Общее решение системы (7), (8) имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому, как и в случае 1, приведем несколько простых примеров, которые получаются из теоремы 2.

Пример 2. Пусть $s_0 = s^2/2$, остальные константы положим равными нулю. Получим однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем (1):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{s^2(x^2+y^2)^2}{8y^2}, \quad F = \frac{2y(-xp_2 + yp_1) + sx(x^2+y^2)}{2yp_2 + s(y^2 - x^2)},$$

$$\omega = -\frac{sx}{y} dx \wedge dy, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Пример 3. Пусть $s_3 = 1/(2s^2)$, остальные константы положим равными нулю. Получим однопараметрическое семейство интегрируемых гамильтоновых систем (1):

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{x^2}{2s^2y^2}, \quad F = \frac{x^2 - sxyp_2 + (1 + sp_1)y^2}{-x + syp_2},$$

$$\omega = -\frac{1}{sy} dx \wedge dy, \quad \{F, H\}_{mg} \equiv 0, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Полагая $s = 1$ и $s = -1$ в примерах 2, 3 соответственно, получим интегрируемые примеры, найденные в [8, 21].

3. Общий случай $f(x,y) \neq 0$ и связь с уравнением Хопфа

Рациональные интегралы (2) натуральной системы (1) в отсутствии магнитного поля, т. е. при $\Omega(x,y) \equiv 0$, исследовались в работах [23, 24]. В [24] доказано, что если $f(x,y) \equiv 0$, т. е. если первый интеграл F имеет вид (3) или (4), то у системы (1) обязательно существует линейный по импульсам первый интеграл. Сравнивая этот результат с утверждениями теорем 1, 2, убеждаемся в том, что добавление ненулевого магнитного поля существенным образом расширяет пространство интегрируемых примеров, порождая нетривиальные рациональные интегралы вида (3), (4).

Рассмотрим теперь более общий случай. Предположим, что система (1) (в магнитном поле или без него) обладает рациональным интегралом F вида (2) и $f(x,y) \neq 0$. Воспользуемся простым техническим фактом: наличие магнитного поля не дает вклада в уравнения, эквивалентные обращению в нуль коэффициентов скобки Пуассона при мономах старшей степени. Поэтому из условия $\{F,H\}_{mg} \equiv 0$, равно как и из условия $\{F,H\} \equiv 0$, следуют соотношения

$$fa_x - af_x = 0, \tag{19}$$

$$ga_x + f(a_y + b_x) - bf_x - a(f_y + g_x) = 0, \tag{20}$$

$$fb_y + g(a_y + b_x) - ag_y - b(f_y + g_x) = 0, \tag{21}$$

$$gb_y - bg_y = 0. \tag{22}$$

Из (19), (22) вытекает, что $a(x,y) = A(y)f(x,y)$, $b(x,y) = B(x)g(x,y)$. Отметим, что если $A(y) \equiv B(x) \equiv C$, где C — произвольная постоянная, то в этом случае существует линейный по импульсам первый интеграл $F_1 = 1/(F-C)$.

Обозначим $f(x,y) = w(x,y)g(x,y)$. Уравнения (20), (21) принимают вид

$$(A-B)w_x + w(wA' + B') = 0, \quad (A-B)w_y + wA' + B' = 0. \tag{23}$$

Из (23), в частности, следует, что функция $w(x,y)$ удовлетворяет уравнению Хопфа:

$$w_x - ww_y = 0. \tag{24}$$

Замечание 1. Хорошо известно, что единственное гладкое на всей плоскости решение уравнения Хопфа (24) — это решение $w(x,y) \equiv \mathrm{const}$. Единственное мероморфное решение (см. [29]) имеет вид $w(x,y) = -(y+c_1)/(x+c_2)$. Оба этих случая были полностью исследованы в [23, 24].

Любопытно, что метод разделения переменных, примененный к уравнению Хопфа (24), дает в точности эти и только эти решения.

Замечание 2. Любое непостоянное решение (24) можно записать в неявном виде следующим образом:

$$y + wx = s(w),$$

где $s(w)$ — произвольная функция. Так, например, если взять $s(w) = P/Q$, где P, Q — полиномы по w невысоких степеней с постоянными коэффициентами, то функция $w(x,y)$ находится в радикалах. Нам неизвестно, существуют ли другие функции $s(w)$, для которых функцию $w(x,y)$ можно найти в явном виде.

Интегрируя соотношения (23), получим

$$w(x,y) = \frac{A(y) - B(x)}{u(y) + xA'(y)} = \frac{v(x) - yB'(x)}{A(y) - B(x)},$$

где $u(y)$, $v(x)$ — произвольные функции, удовлетворяющие нетривиальному условию совместности

$$(u(y) + xA'(y))\,(v(x) - yB'(x)) = (A(y) - B(x))^2\,. \tag{25}$$

Одна из основных сложностей, возникающих при исследовании общего случая, заключается в том, чтобы найти *все* такие функции $A(y)$, $B(x)$, $u(y)$, $v(x)$, удовлетворяющие уравнению (25). Некоторые частные решения уравнения (25) при этом найти не так сложно; приведем здесь те, которые отвечают постоянной либо мероморфной функции $w(x,y)$.

Если $w(x,y) \equiv c_0$, то

$$A(y) = c_1 y + c_2, \quad B(x) = -c_0 c_1 x + c_3,$$

$$u(y) = (c_1 y + c_2 - c_3)/c_0, \quad v(x) = c_0(c_0 c_1 x + c_2 - c_3).$$

Если $w(x,y) = -(y + c_1)/(x + c_2)$, то

$$A(y) = \frac{c_3}{c_1 + y} + c_5, \quad B(x) = \frac{c_4}{c_2 + x} + c_5,$$

$$u(y) = \frac{c_4(c_1 + y) - c_2 c_3}{(c_1 + y)^2}, \quad v(x) = \frac{-c_3(c_2 + x) + c_1 c_4}{(c_2 + x)^2}.$$

Здесь $c_0, \ldots, c_5$ — произвольные постоянные. Построенные функции $A(y)$, $B(x)$, $u(y)$, $v(x)$ удовлетворяют уравнению (25) и, следовательно, задают частные решения системы (19)–(22). Однако анализ остальных уравнений, вытекающих из условия $\{F, H\}_{mg} \equiv 0$, даже в этих частных случаях оказывается очень сложным.

Очень интересным также является вопрос о том, существуют ли другие нетривиальные решения уравнения (25) и, в случае положительного ответа, каким функциям $w(x,y)$ они отвечают. Ответ на этот вопрос нам неизвестен.

4. Заключение

В данной работе продолжены исследования рациональных интегралов (2) гамильтоновой системы (1), начатые ранее в [8, 21]. Случай $f(x,y) \equiv 0$ полностью исследован, получено полное описание соответствующих потенциалов и магнитных полей (см. теоремы 1, 2). Интересно, что наличие ненулевого магнитного поля во всех построенных интегрируемых примерах оказывается существенным — в противном случае, как следует из результатов [23, 24], система (1) обязательно обладает линейным первым интегралом.

Исследование общего случая $f(x,y) \neq 0$ является непростой задачей, один из возможных подходов к ней и связанные с ним трудности были описаны выше в разд. 3. Альтернативный подход, основанный на несколько иных идеях, был предложен в [8], но, насколько нам известно, он не получил в дальнейшем особого развития. Вполне вероятно, что эта задача станет предметом наших дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
2. *Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P.* Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials // J. Math. Phys. 1985. V. 26, N 12. P. 3070–3079.
3. *Ferapontov E. V., Fordy A. P.* Non-homogeneous systems of hydrodynamic type, related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term // Physica D. 1997. V. 108. P. 350–364.
4. *Марихин В. Г., Соколов В. В.* Пары коммутирующих гамильтонианов, квадратичных по импульсам // Теорет. и мат. физика. 2006. Т. 149, № 2. С. 147–160.
5. *Yehia H. M.* On certain two-dimensional conservative mechanical systems with a cubic second integral // J. Phys. A. Math. Gen. 2002. V. 5. P. 9469–9487.
6. *Yehia H. M., Elmandouh A. A.* Integrable 2D time-irreversible systems with a cubic second integral // Adv. Math. Phys. 2016.V. 2016. 8958747.
7. *Elmandouh A. A.* New integrable problems in rigid body dynamics with quartic integrals // Acta Mech. 2015. V. 226. P. 2461–2472.
8. *Hietarinta J.* Direct methods for the search of the second invariant // Physics Rep. 1987. V. 147, N 2. P. 87–154.
9. *Переломов А. М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
10. *Козлов В. В.* Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 6. С. 1299–1302.

11. *Денисова Н. В., Козлов В. В.* Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 43–63.
12. *Миронов А. Е.* О полиномиальных интегралах механической системы на двумерном торе // Изв. РАН. Сер. мат. 2010. Т. 74, № 4. С. 145–156.
13. *Денисова Н. В., Козлов В. В., Трещев Д. В.* Замечания о полиномиальных интегралах высших степеней обратимых систем с торическим пространством конфигураций // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 5. С. 57–72.
14. *Тайманов И. А.* О примере перехода от хаоса к интегрируемости в магнитных геодезических потоках // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 4. С. 632–634.
15. *Taimanov I. A.* On an integrable magnetic geodesic flow on the two-torus // Regul. Chaotic Dyn. 2015. V. 20, N 6. P. 667–678.
16. *Тайманов И. А.* О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 241–260.
17. *Agapov S., Valyuzhenich A.* Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels // Disc. Cont. Dynam. Systems. A. 2019. V. 39, N 11. P. 6565–6583.
18. *Агапов С. В., Валюженич А. А., Шубин В. В.* Некоторые замечания о полиномиальных интегралах высокой степени магнитного геодезического потока на двумерном торе // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 715–720.
19. *Bialy M. L., Mironov A. E.* New semi-Hamiltonian hierarchy related to integrable magnetic flows on surfaces // Cent. Europ. J. Math. 2012. V. 10, N 5. P. 1596–1604.
20. *Agapov S. V., Bialy M., Mironov A. E.* Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs // Comm. Math. Phys. 2017. V. 351, N 3. P. 993–1007.
21. *Hietarinta J.* New integrable Hamiltonians with transcendental invariants // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52, N 13. P. 1057–1060.
22. *Козлов В. В.* О рациональных интегралах геодезических потоков // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 4. С. 439–445.
23. *Агапов С. В.* Рациональные интегралы натуральной механической системы на двумерном торе // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 255–265.
24. *Агапов С. В., Турсунов М. М.* О рациональных интегралах двумерных натуральных систем // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 665–674.
25. *Agapov S., Shubin V.* Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: New examples // J. Geom. Physics. 2021. V. 170. 104389.
26. *Agapov S., Potashnikov A., Shubin V.* Integrable magnetic geodesic flows on 2-surfaces // Nonlinearity. 2023. V. 36, N 4. P. 2129–2147.
27. *Agapov S., Shubin V.* New examples of non-polynomial integrals of two-dimensional geodesic flows // J. Phys. A: Math. Theor. 2024. V. 57, N 1. Paper no. 015204, 17 pp.
28. *Agapov S. V., Demina M. V.* Integrable geodesic flows and metrisable second-order ordinary differential equations // J. Geom. Physics. 2024. V. 199. 105168.
29. *Saleeby E. G.* Meromorphic solutions of generalized inviscid Burgers' equations and a family of quadratic PDEs // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 425, N 1. P. 508–519.

Поступила в редакцию 8 октября 2024 г.
После доработки 8 октября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Агапов Сергей Вадимович (ORCID 0009-0009-4135-5792)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agapov.sergey.v@gmail.com

Соловьев Дмитрий Вячеславович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
d.solovev@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 514.7

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ГЛАДКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ИЗОТЕРМИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В. А. Александров

Аннотация. Статья посвящена теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. В ней выведено некоторое, ранее не встречавшееся в литературе, линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяет всякое поле вращения Дарбу гладкой поверхности. Показано, что для некоторых поверхностей это дополнительное уравнение функционально не зависит от трех стандартных уравнений, которым удовлетворяет (и которыми определяется) поле вращения Дарбу. В качестве приложения для некоторого класса гомеоморфных диску поверхностей, содержащего не только поверхности положительной гауссовой кривизны, доказан принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.302

Ключевые слова: трехмерное евклидово пространство, поверхность в евклидовом пространстве, бесконечно малое изгибание поверхности, поле вращения Дарбу, изотермические координаты, эллиптическое дифференциальное уравнение, принцип максимума.

§ 1. Введение

Задачи о наложимости и изгибаемости поверхностей в $\mathbb{R}^3$ возникли в работах Эйлера [1] и Гаусса [2] одновременно с возникновением дифференциальной геометрии. При решении этих задач получено много глубоких результатов. Имеется огромное количество книг и статей, в которых изучаются различные аспекты этих задач. Сейчас упомянем только капитальный обзор [3], список литературы в котором содержит 291 наименование, и книгу [4], последнюю из известных нам, где изложение теории изгибаний поверхностей начато с самого начала, ведется во всех деталях и освещает все вопросы, необходимые для понимания настоящей статьи. Отправляясь от них читатель сможет ознакомиться и с историей изучения теории изгибаний поверхностей, и с основными результатами этой теории.

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1–3. В теореме 1 получено новое, ранее не встречавшееся в литературе, линейное дифференциальное

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (проект FWNF–2022–0006).

уравнение первого порядка (11), которому обязано удовлетворять поле вращения Дарбу. Примеры 1–3 показывают, что для некоторых поверхностей это уравнение превращается в тождество $0 = 0$, в то время как для других поверхностей (которые могут иметь как положительную, так и отрицательную кривизны) оно является уравнением первого порядка, линейно не зависимым от трех стандартных уравнений первого порядка (8)–(10), которым удовлетворяет поле вращения Дарбу. В теореме 2 в качестве следствия уравнения (11) доказано, что при некоторых условиях третья компонента y_3 поля вращения Дарбу y удовлетворяет двум линейным дифференциальным уравнениям второго порядка (18), (19). При этом мы рассуждаем о третьей компоненте y_3 исключительно для определенности, поскольку две другие компоненты поля вращения Дарбу y удовлетворяют аналогичным уравнениям. Наличие двух уравнений второго порядка (18), (19) для y_3 является новым эффектом, ранее не появлявшимся в теории бесконечно малых изгибаний. Классический результат состоит в том, что третья компонента z_3 бесконечно малого изгибания z удовлетворяет одному линейному дифференциальному уравнению второго порядка (см., например, [5; 6, гл. IV, § 2]). Примеры 4–6 показывают, что для уравнений (18), (19) возможны самые разные ситуации: в каких-то случаях они оба вырождаются (т. е. не являются уравнениями второго порядка); в других случаях может вырождаться только одно из них; в третьих случаях оба уравнения (18), (19) могут быть уравнениями второго порядка, причем функционально независимыми. Наконец в теореме 3 для некоторого класса гомеоморфных диску поверхностей, содержащего не только поверхности положительной гауссовой кривизны, выведен принцип максимума для y_3 как следствие уравнения (18). Для поверхностей положительной гауссовой кривизны принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу y не может претендовать на новизну. Он непосредственно следует из [7, следствие из теоремы 2].

§ 2. Поле вращения Дарбу

Пусть $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ является гладким семейством гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Слово «гладкий» в этой статье имеет обычный для классической дифференциальной геометрии смысл, т. е. «дифференцируемый столько раз, сколько потребуется в наших рассуждениях». Мы всегда подразумеваем, что поверхности S_t связные, но если это не оговорено явно, не предполагаем наличия других ограничений вроде отсутствия края или компактности. По определению полагаем $S = S_0$ и говорим, что семейство $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ является *изометрической деформацией* поверхности S, если для любого $t \in (-1,1)$ существует гладкое взаимно-однозначное отображение $f_t : S \to S_t$, сохраняющее длины всех кривых. Аналитически последнее условие можно выразить так: в любой карте $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ поверхности S и в соответствующей карте $x_t \overset{\text{опр}}{=} f_t \circ x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S_t \subset \mathbb{R}^3$ поверхности S_t первые квадратичные формы поверхностей S и S_t совпадают между собой, т. е. для всех $(u,v) \in U$ и всех $t \in (-1,1)$ справедливы равенства

$$\begin{cases} ((x_t)_u, (x_t)_u) = (x_u, x_u), \\ ((x_t)_u, (x_t)_v) = (x_u, x_v), \\ ((x_t)_v, (x_t)_v) = (x_v, x_v). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь нижние индексы u или v обозначают дифференцирование по соответствующей переменной (при этом производные вычисляются в точке $(u,v) \in U$);

нижний индекс t имеет иной смысл (он указывает на поверхность из семейства $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$); наконец, (a,b) означает скалярное произведение векторов $a,b\in\mathbb{R}^3$. Соотношения (1) являются нелинейными уравнениями относительно x_t. Один из классических подходов к их решению состоит в том, чтобы изучать их линеаризацию, которая получается так. Продифференцируем равенства (1) по t при $t=0$ и положим

$$z(u,v)\overset{\text{опр}}{=}\frac{dx_t}{dt}\bigg|_{t=0}(u,v).$$

В результате получим линейные уравнения

$$(z_u,x_u)=0,\quad (z_u,x_v)+(z_v,x_u)=0,\quad (z_v,x_v)=0 \tag{2}$$

относительно вектор-функции $z=z(u,v)$, геометрический смысл которой хорошо известен: она сопоставляет каждой точке поверхности S вектор, равный скорости, которую имеет эта точка в начальный момент изометрической деформации $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$. Полем *бесконечно малых изгибаний* поверхности S (или *бесконечно малым изгибанием* поверхности S) называют любое решение z системы (2), даже если оно не порождено никакой изометрической деформацией $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ поверхности S.

Изометрическая деформация $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ называется *тривиальной*, если существует гладкое семейство $\{P_t\}_{t\in(-1,1)}$ изометрий $P_t:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ такое, что для каждого $t\in(-1,1)$ справедливо равенство $S_t=P_t(S)$. В противном случае изометрическая деформация $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$ называется *нетривиальной*. Поверхность называется *изгибаемой*, если она допускает нетривиальную изометрическую деформацию. В противном случае она называется *неизгибаемой*. Бесконечно малое изгибание z поверхности S называется *тривиальным*, если оно может быть порождено некоторой тривиальной изометрической деформацией $\{S_t\}_{t\in(-1,1)}$. В противном случае бесконечно малое изгибание называется *нетривиальным*. Классическим результатом теории изгибаний поверхностей является утверждение о том, что если поверхность не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний, то она не допускает нетривиальных изгибаний, аналитических по параметру деформации. Вопрос о существовании компактных изгибаемых поверхностей без края хорошо известен специалистам [8], но до сих пор остается открытым. В то же время известно, что для любого натурального числа $m\geq 1$ существуют поверхности, гомеоморфные сфере и имеющие ровно m линейно независимых полей нетривиальных бесконечно малых изгибаний. Существование C^∞-поверхностей с такими свойствами доказано в [9], а существование вещественно-аналитических поверхностей доказано в [10].

Аналитически довольно трудно распознать является ли данное решение z системы уравнений (2) тривиальным бесконечно малым изгибанием. Это является одной из причин того, что в теории изгибаний поверхностей считается стандартной замена вектор-функции $z=z(u,v)$ новой неизвестной вектор-функцией $y=y(u,v)$ посредством формулы $dz=y\times dx$ или, что то же самое, посредством формул

$$z_u=y\times x_u, \tag{3}$$

$$z_v=y\times x_v. \tag{4}$$

Здесь $\times$ означает векторное произведение. Продифференцировав формулу (3) по переменной v, а формулу (4) по переменной u, и вычтя второе соотношение из первого, получим систему дифференциальных уравнений

$$y_u \times x_v = y_v \times x_u, \tag{5}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} x_{3v}y_{2u} - x_{2v}y_{3u} = x_{3u}y_{2v} - x_{2u}y_{3v}, \\ x_{1v}y_{3u} - x_{3v}y_{1u} = x_{1u}y_{3v} - x_{3u}y_{1v}, \\ x_{2v}y_{1u} - x_{1v}y_{2u} = x_{2u}y_{1v} - x_{1u}y_{2v}. \end{cases} \tag{6}$$

Всякое решение y системы (5) называется *полем вращения Дарбу* поверхности S или полем вращения Дарбу бесконечно малого изгибания z. Название объясняется тем, что если в формулах (3), (4) трактовать бесконечно малое изгибание z как бесконечно малое изометрическое движение касательной плоскости поверхности S, то y является мгновенной угловой скоростью этого движения, т. е. отвечает за вращение (см. [11]). Это кинематическое истолкование y позволяет доказать, что бесконечно малое изгибание z является тривиальным, если и только если соответствующее ему поле вращения Дарбу y постоянно (см. [11]). Известно также, что поле вращения Дарбу обладает целым рядом нетривиальных геометрических свойств. Заинтересованный читатель может найти их, например, в книгах [4, 12], статьях [7, 13–15], и указанной там литературе. Мы эти свойства не используем, и поэтому не формулируем.

§ 3. Уравнения первого порядка для поля вращения Дарбу в изотермических координатах

Всюду далее в этой статье S обозначает гладкую поверхность, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — параметризацию поверхности S посредством *изотермических* координат $(u, v) \in U$ (т. е. таких координат $(u, v) \in U$, что выполняются соотношения

$$(x_u, x_u) = \lambda, \quad (x_u, x_v) = 0, \quad (x_v, x_v) = \lambda, \tag{7}$$

где $\lambda : U \to (0, +\infty)$ — некоторая гладкая функция). По определению полагаем $n = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$, так что n является единичным вектором внешней нормали к S. Символы h_{ij} всегда обозначают коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S, а именно, $h_{11} = (x_{uu}, n) = -(x_u, n_u)$, $h_{12} = h_{21} = (x_{uv}, n) = -(x_u, n_v) = -(x_v, n_u)$ и $h_{22} = (x_{vv}, n) = -(x_v, n_v)$.

Впервые существование изотермических координат (т. е. существование параметризации поверхности посредством изотермических координат) установил Гаусс в 1825 г. для аналитических поверхностей [16]. Затем многие исследователи работали над упрощением доказательств и понижением требований к гладкости поверхности, на которой можно гарантировать существование изотермических координат [17]. В 1950-х гг. стандартом стало использование теорем существования для комплексного уравнения Бельтрами [18], что позволило перейти к изучению обобщенных решений. Но есть и другие подходы, например, с помощью преобразования Фурье [19]. Еще один пример: в 1953–1963 гг. Ю. Г. Решетняк опубликовал серию из девяти работ, посвященных построению изотермических координат в двумерных многообразиях ограниченной кривизны в смысле А. Д. Александрова и применению этих координат к изучению таких многообразий. Английский перевод этих работ опубликован только в 2023 г. в книге [20]. Поскольку в данной статье мы ограничили себя рамками классической дифференциальной геометрии, то для нас не важна минимальная допустимая гладкость поверхности. Поэтому мы даже не формулируем точно упомянутые результаты. Для нас важно, что изотермические координаты существуют и определены нелокально в том смысле, что они могут быть введены на любой открытой гомеоморфной диску части поверхности. Эта нелокальность в принципе отсутствует у всех иных специальных систем координат, традиционно используемых в теории поверхностей (мы имеем виду, прежде всего, риманову нормальную, полярную и полугеодезическую системы координат на поверхности, см., например, [21, § 3.6]).

Теорема 1. *Пусть S — гладкая поверхность, $x : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$. Пусть $y : U \to \mathbb{R}^3$ является полем вращения Дарбу поверхности S, так что в U выполняется соотношение* (5). *Тогда y удовлетворяет также следующим соотношениям:*

$$(y_u, n) = 0, \tag{8}$$

$$(y_v, n) = 0, \tag{9}$$

$$(y_u, x_u) + (y_v, x_v) = 0, \tag{10}$$

$$h_{21}(y_u, x_u) + h_{22}(y_u, x_v) - h_{11}(y_v, x_u) - h_{12}(y_v, x_v) = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства (5) скалярно на вектор x_u. Получим $(y_u \times x_v, x_u) = (y_v \times x_u, x_u)$. Используя свойства смешанного произведения и формулы (7), получаем $-\lambda(y_u, n) = 0$. Следовательно, y удовлетворяет уравнению (8). Аналогично, умножая обе части равенства (5) скалярно на вектор x_v, убеждаемся, что y удовлетворяет уравнению (9). Наконец, умножая обе части равенства (5) скалярно на вектор $x_u \times x_v$ и пользуясь известным соотношением $(a \times b, c \times d) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$, последовательно получаем

$$(y_u \times x_v, x_u \times x_v) = (y_v \times x_u, x_u \times x_v),$$
$$(y_u, x_u)(x_v, x_v) - (y_u, x_v)(x_v, x_u) = (y_v, x_u)(x_u, x_v) - (y_v, x_v)(x_u, x_u),$$
$$\lambda(y_u, x_u) = -\lambda(y_v, x_v).$$

Значит, y удовлетворяет уравнению (10). Тем самым уравнения (8)–(10) являются следствиями уравнений (5). Верно и обратное. В самом деле, как мы только что убедились, равенства (8)–(10) означают, что векторы $y_u \times x_v$ и $y_v \times x_u$ имеют одинаковые компоненты относительно ортогонального базиса x_u, x_v, $x_u \times x_v$. Следовательно, $y_u \times x_v = y_v \times x_u$. Значит, уравнения (5) являются следствиями уравнений (8)–(10).

Продифференцируем (8) по v и (9) по u, а затем вычтем второе из первого. Получим $(y_u, n_v) - (y_v, n_u) = 0$. Подставив сюда выражения $n_u = -\lambda^{-1}[h_{11}x_u + h_{12}x_v]$ и $n_v = -\lambda^{-1}[h_{21}x_u + h_{22}x_v]$, известные из дифференциальной геометрии поверхностей, получим

$$-\lambda^{-1}[h_{21}(y_u, x_u) + h_{22}(y_u, x_v) - h_{11}(y_v, x_u) - h_{12}(y_v, x_v)] = 0.$$

Следовательно, выполняется соотношение (11). $\square$

Из доказательства теоремы 1 следует, что система уравнений (8)–(10) эквивалентна системе уравнений (6). Этот факт хорошо известен. Читатель может найти его, например в [7, 13–15] и указанной там литературе. С уравнением

(11) дело обстоит иначе. Насколько известно автору, ранее в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей оно не встречалось. В некотором смысле обнаружение такого «дополнительного» уравнения (11) можно сравнить с нахождением первого интеграла динамической системы. Эта аналогия объясняет намерение автора исследовать, какие новые следствия вытекают из «расширенной системы уравнений (8)–(11)». В § 5 в качестве одного из таких следствий мы выводим принцип максимума для третьей компоненты y_3 поля вращения Дарбу y.

Чтобы лучше понимать уравнения (5) и (8)–(11), рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 (S есть плоскость $x_3 = 0$). Полагаем $U = \mathbb{R}^2$, $x = (u, v, 0)$.

Тогда $x_u = (1, 0, 0)$, $x_v = (0, 1, 0)$, $\lambda = 1$, $n = (0, 0, 1)$, $h_{ij} = 0$ для всех $i, j = 1, 2$. Уравнения (5) принимают вид $y_{3u} = 0$, $y_{3v} = 0$, $y_{1u} = -y_{2v}$, а уравнения (8)–(10) — вид $y_{3u} = 0$, $y_{3v} = 0$, $y_{1u} + y_{2v} = 0$. Это согласуется с заключением теоремы 1. А вот уравнение (11) становится тождеством $0 = 0$ и никакой новой информации дать не может.

Пример 2 (S есть сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ с удаленной точкой $(0, 0, 1)$). Параметризуем S с помощью стереографической проекции, т. е. полагаем $U = \mathbb{R}^2$, $x = (2u, 2v, u^2 + v^2 - 1)/(u^2 + v^2 + 1)$.

Тогда
$$x_u = 2(-u^2 + v^2 + 1, -2uv, 2u)/(u^2 + v^2 + 1)^2,$$
$$x_v = 2(-2uv, u^2 - v^2 + 1, 2v)/(u^2 + v^2 + 1)^2,$$
$$\lambda = (x_u, x_u) = (x_v, x_v) = 4/(u^2 + v^2 + 1)^2, \quad (x_u, x_v) = 0,$$
$$n = \lambda^{-1}(x_u \times x_v) = -x, \quad h_{11} = -(x_u, n_u) = \lambda,$$
$$h_{12} = h_{21} = -(x_u, n_v) = -(x_v, n_u) = 0, \quad h_{22} = -(x_v, n_v) = \lambda.$$
После сокращения на ненулевые множители уравнения (6) принимают вид
$$\begin{cases} 2vy_{2u} - (u^2 - v^2 + 1)y_{3u} = 2uy_{2v} + 2uvy_{3v}, \\ 2vy_{1u} + 2uvy_{3u} = 2uy_{1v} + (-u^2 + v^2 + 1)y_{3v}, \\ (u^2 - v^2 + 1)y_{1u} + 2uvy_{2u} = -2uvy_{1v} - (-u^2 + v^2 + 1)y_{2v}. \end{cases} \tag{12}$$
Аналогично после сокращения на ненулевые множители уравнения (8)–(10) принимают вид
$$\begin{cases} 2uy_{1u} + 2vy_{2u} + (u^2 + v^2 - 1)y_{3u} = 0, \\ 2uy_{1v} + 2vy_{2v} + (u^2 + v^2 - 1)y_{3v} = 0, \\ (-u^2 + v^2 + 1)y_{1u} - 2uvy_{2u} + 2uy_{3u} - 2uvy_{1v} + (u^2 - v^2 + 1)y_{2v} + 2vy_{3v} = 0. \end{cases} \tag{13}$$
Системы уравнений (12) и (13) выглядят по-разному. Но теорема 1 утверждает, что они эквивалентны друг другу. Наконец, выпишем уравнение (11):
$$-2uvy_{1u} + (u^2 - v^2 + 1)y_{2u} + 2vy_{3u} - (-u^2 + v^2 + 1)y_{1v} + 2uvy_{2v} - 2uy_{3v} = 0. \tag{14}$$
Запишем уравнения (13), (14) в матричном виде $AY = 0 \in \mathbb{R}^4$, где
$$A = \begin{pmatrix} 2u & 2v & u^2+v^2-1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2u & 2v & u^2+v^2-1 \\ -u^2+v^2+1 & -2uv & 2u & -2uv & u^2-v^2+1 & 2v \\ -2uv & u^2-v^2+1 & 2v & -(-u^2+v^2+1) & 2uv & -2u \end{pmatrix},$$

а вектор-столбец Y получен транспонированием вектора-строки $(y_{1u}, y_{2u}, y_{3u}, y_{1v}, y_{2v}, y_{3v})$. Обозначим через A_{ij} 4×4-матрицу, получаемую из A вычеркиванием i-го и j-го столбцов. Прямым вычислением убеждаемся, что $\det A_{36} = 4(u^2+v^2)(u^2+v^2+1)^2$ и $\det A_{25} = (u^2+v^2+1)^2(u^2+(v-1)^2)(u^2+(v+1)^2)$. Следовательно, при любых $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ найдется 4×4-минор матрицы A с ненулевым определителем. Значит, ранг матрицы A всегда равен 4, т. е. уравнение (14) ни в какой точке $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ не является линейной комбинацией уравнений (13).

Тем самым видим, что в случае сферы имеет смысл рассматривать не три уравнения (6) (или, что то же самое, три эквивалентных им уравнения (8)–(10)), а четыре уравнения (8)–(11).

Пример 3. Как известно [22, § 16.2], геликоид (точнее, некоторая область на нем) может быть непрерывно продеформирован в катеноид (точнее, в соответствующую область на нем) с помощью следующего преобразования:

$$x_t(u,v) = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v,\\ -\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, u\cos t + v\sin t).$$

Здесь $u\in(0,2\pi]$, $v\in\mathbb{R}$, $t=0$ соответствует геликоиду, $t=\pi/2$ соответствует катеноиду. При этом для всякого t поверхность S_t, заданная параметризацией x_t, является минимальной и изометричной геликоиду x_0. Прямые вычисления дают

$$\begin{gathered}
(x_t)_u = (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t),\\
(x_t)_v = (\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v, -\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v, \sin t),\\
\lambda_t = ((x_t)_u,(x_t)_u) = ((x_t)_v,(x_t)_v) = \mathrm{ch}^2\,v, \quad ((x_t)_u,(x_t)_v) = 0,\\
n_t = (\mathrm{ch}\,v)^{-1}(\cos u, \sin u, -\mathrm{sh}\,v),\\
(x_t)_{uu} = (-\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, \cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, 0),\\
(x_t)_{uv} = (\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v, \cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v, 0),\\
(x_t)_{vv} = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v, -\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v, 0),\\
(h_t)_{11} = ((x_t)_{uu}, n_t) = -\sin t, \quad (h_t)_{12} = (h_t)_{21} = ((x_t)_{uv}, n_t) = \cos t,\\
(h_t)_{22} = ((x_t)_{vv}, n_t) = \sin t.
\end{gathered}$$

Напомним, что в приведенных только что формулах по-прежнему действует принятое ранее соглашение, согласно которому нижний индекс t не означает дифференцирование по параметру t, а указывает на соответствующую поверхность S_t. Теперь видим, что для поверхности S_t уравнения (6) принимают вид

$$\begin{cases}
(\sin t)y_{2u} - (-\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v)y_{3u}\\
\qquad = (\cos t)y_{2v} - (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v)y_{3v},\\
(\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v)y_{3u} - (\sin t)y_{1u}\\
\qquad = (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v)y_{3v} - (\cos t)y_{1v},\\
(-\cos t\cos u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\sin u\,\mathrm{sh}\,v)y_{1u} - (\cos t\sin u\,\mathrm{ch}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{sh}\,v)y_{2u}\\
\qquad = (\cos t\sin u\,\mathrm{sh}\,v + \sin t\cos u\,\mathrm{ch}\,v)y_{1v} - (\cos t\cos u\,\mathrm{sh}\,v - \sin t\sin u\,\mathrm{ch}\,v)y_{2v}.
\end{cases} \tag{15}$$

Аналогично после сокращения на ненулевые множители уравнения (8)–(10)

принимают вид

$$\begin{cases} (\cos u)y_{1u} + (\sin u)y_{2u} - (\operatorname{sh} v)y_{3u} = 0, \\ (\cos u)y_{1v} + (\sin u)y_{2v} - (\operatorname{sh} v)y_{3v} = 0, \\ (\cos t\cos u\operatorname{sh} v - \sin t\sin u\operatorname{ch} v)y_{1u} + (\cos t\sin u\operatorname{sh} v + \sin t\cos u\operatorname{ch} v)y_{2u} \\ \qquad +(\cos t)y_{3u} + (\cos t\sin u\operatorname{ch} v + \sin t\cos u\operatorname{sh} v)y_{1v} \\ \qquad +(-\cos t\cos u\operatorname{ch} v + \sin t\sin u\operatorname{sh} v)y_{2v} + (\sin t)y_3 v = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Системы уравнений (15) и (16) выглядят по-разному. Но теорема 1 утверждает, что они эквивалентны друг другу в том смысле, что для любых t, u, v каждое уравнение системы (16) является следствием уравнений системы (15), и наоборот, каждое уравнение системы (15) является следствием уравнений системы (16).

Наконец, выпишем уравнение (11) для поверхности x_t:

$$(h_t)_{21}(y_{1u}(x_t)_{1u} + y_{2u}(x_t)_{2u} + y_{3u}(x_t)_{3u}) + (h_t)_{22}(y_{1u}(x_t)_{1v} \\ + y_{2u}(x_t)_{2v} + y_{3u}(x_t)_{3v}) - (h_t)_{11}(y_{1v}(x_t)_{1u} + y_{2v}(x_t)_{2u} \\ + y_{3v}(x_t)_{3u}) - (h_t)_{12}(y_{1v}(x_t)_{1v} + y_{2v}(x_t)_{2v} + y_{3v}(x_t)_{3v}) = 0.$$

Подставляя сюда уже вычисленные компоненты векторов $(x_t)_u$ и $(x_t)_v$, а также коэффициенты $(h_t)_{ij}$, $i,j = 1,2$, второй квадратичной формы поверхности x_t, после приведения подобных получим:

$$(\cos u\operatorname{sh} v)y_{1u} + (\sin u\operatorname{sh} v)y_{2u} + y_{3u} - (\sin u\operatorname{ch} v)y_{1v} + (\cos u\operatorname{ch} v)y_{2v} - 0\cdot y_{3v} = 0. \tag{17}$$

Запишем уравнения (16)–(17) в матричном виде $BY = 0 \in \mathbb{R}^4$, где

$$B = \begin{pmatrix} \cos u & \sin u & -\operatorname{sh} v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos u & \sin u & -\operatorname{sh} v \\ \omega_1 & \omega_2 & \cos t & \omega_3 & \omega_4 & \sin t \\ \cos u\operatorname{sh} v & \sin u\operatorname{sh} v & 1 & -\sin u\operatorname{ch} v & \cos u\operatorname{ch} v & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_1 = \cos t\cos u\operatorname{sh} v - \sin t\sin u\operatorname{ch} v, \quad \omega_2 = \cos t\sin u\operatorname{sh} v + \sin t\cos u\operatorname{ch} v,$$

$$\omega_3 = \cos t\sin u\operatorname{ch} v + \sin t\cos u\operatorname{sh} v, \quad \omega_4 = -\cos t\cos u\operatorname{ch} v + \sin t\sin u\operatorname{sh} v,$$

а вектор-столбец Y получен транспонированием вектора-строки $(y_{1u}, y_{2u}, y_{3u}, y_{1v}, y_{2v}, y_{3v})$. Обозначим через B_{36} 4×4-матрицу, получаемую из B вычеркиванием 3-го и 6-го столбцов. Прямым вычислением убеждаемся, что $\det B_{36} = -(\operatorname{ch} v)^2\sin t$. Следовательно, при любых $u \in (0, 2\pi]$, $v \in \mathbb{R}$, $t \in (0,\pi)$ ранг матрицы B равен 4, т. е. при указанных значениях параметров u, v, t уравнение (17) не является линейной комбинацией уравнений (16).

Тем самым в случае поверхности S_t видим то же самое, что уже видели в случае сферы: есть смысл в том, чтобы рассматривать не три уравнения (6) (или, что то же самое, три эквивалентных им уравнения (8)–(10)), а четыре уравнения (8)–(11).

§ 4. Уравнения второго порядка для компонент поля вращения Дарбу в изотермических координатах

Как известно, один из способов доказательства неизгибаемости компактной выпуклой поверхности, не имеющей края, состоит в том, чтобы предварительно доказать принцип максимума для одной из компонент поля бесконечно малых изгибаний z этой поверхности (см., например, [4–6]). Однако для этого необходимо свести систему уравнений (2) к одному уравнению второго порядка и убедиться, что оно имеет эллиптический тип. Эллиптичности самой системы (2) недостаточно, поскольку для решений эллиптических систем принцип максимума не всегда выполняется (см., например, [23; 24, гл. 2, § 4]).

В этом параграфе выведем из системы (8)–(11) два линейных уравнения второго порядка в частных производных, каждому из которых удовлетворяет y_3 — третья компонента поля вращения Дарбу y. Основное отличие от классической теории бесконечно малых изгибаний поверхностей состоит в том, что для третьей компоненты z_3 поля бесконечно малых изгибаний z удается написать только одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка (см., например, [4, 6]).

Теорема 2. *Пусть S — гладкая поверхность, $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$, $\lambda = (x_u, x_u)$, $n = (n_1, n_2, n_3) = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$ — вектор единичной нормали к S, h_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S и $y = (y_1, y_2, y_3) : U \to \mathbb{R}^3$ — поле вращения Дарбу поверхности S. Предположим также, что в U три функции n_1, n_2 и $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2$ отличны от нуля.*

Тогда y_3 удовлетворяет в U следующим двум линейным дифференциальным уравнениям порядка не выше двух:

$$h_{22}y_{3uu} + h_{11}y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0, \tag{18}$$

$$h_{12}y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0, \tag{19}$$

где ρ_i, $i = 1, \ldots, 4$, — некоторые гладкие функции, возможно, зависящие от $x = x(u, v)$ и ее производных, но не зависящие от $y = (y_1, y_2, y_3)$ и ее производных.

Доказательство. Ниже потребуются следующие соотношения, легко проверяемые прямым вычислением:

$$\begin{aligned}
\lambda n = x_u \times x_v, \quad &\text{т. е.} \quad \lambda n_1 = x_{2u}x_{3v} - x_{2v}x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} \lambda n_2 = x_{1u}x_{3v} - x_{1v}x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} \lambda n_3 = x_{1u}x_{2v} - x_{1v}x_{2u};\\
x_u = x_v \times n, \quad &\text{т. е.} \quad x_{1u} = n_3x_{2v} - n_2x_{3v},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{2u} = n_1x_{3v} - n_3x_{1v},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{3u} = n_2x_{1v} - n_1x_{2v};\\
x_v = n \times x_u, \quad &\text{т. е.} \quad x_{1v} = n_2x_{3u} - n_3x_{2u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{2v} = n_3x_{1u} - n_1x_{3u},\\
&\phantom{\text{т. е.} \quad} x_{3v} = n_1x_{2u} - n_2x_{1u}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Запишем уравнения (8)–(11) в матричном виде $DX = Z$, где

$$D = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & n_1 & n_2\\ x_{1u} & x_{2u} & x_{1v} & x_{2v}\\ h_{12}x_{1u}+h_{22}x_{1v} & h_{12}x_{2u}+h_{22}x_{2v} & -(h_{11}x_{1u}+h_{12}x_{1v}) & -(h_{11}x_{2u}+h_{12}x_{2v}) \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$X = \begin{pmatrix} y_{1u}\\ y_{2u}\\ y_{1v}\\ y_{2v} \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} -n_3y_{3u}\\ -n_3y_{3v}\\ -(x_{3u}y_{3u} + x_{3v}y_{3v})\\ -(h_{12}x_{3u} + h_{22}x_{3v})y_{3u} + (h_{11}x_{3u} + h_{12}x_{3v})y_{3v} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Положим по определению $d = \det D$. Разлагая этот определитель по последней строке и многократно используя равенства (20), получаем

$$d = h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2.$$

Значит, в силу условий теоремы $d \neq 0$. Из уравнения $DX = Z$ находим по правилу Крамера

$$y_{1u} = d_1/d, \quad y_{2u} = d_2/d, \quad y_{1v} = d_3/d, \quad y_{2v} = d_4/d. \tag{23}$$

Здесь d_i обозначает определитель матрицы D_i, которая получается из матрицы D в формуле (21) заменой ее i-го столбца столбцом Z из формулы (22). Для каждого $i = 1, \dots, 4$ введем обозначение $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$, где p_i и q_i не зависят от y и ее производных. Раскрывая определитель матрицы D_i по последней строке и многократно используя формулы (20), получаем

$$\begin{gathered} p_1 = h_{11}x_{1v}x_{3v} - 2h_{12}x_{1v}x_{3u} + h_{22}x_{1u}x_{3u}, \quad q_1 = h_{11}n_2\omega, \\ p_2 = h_{11}x_{2v}x_{3v} - 2h_{12}x_{2v}x_{3u} + h_{22}x_{2u}x_{3u}, \quad q_2 = -h_{11}n_1\omega, \\ p_3 = -h_{22}n_2\omega, \quad q_3 = h_{11}x_{1v}x_{3v} - 2h_{12}x_{1u}x_{3v} + h_{22}x_{1u}x_{3u}, \\ p_4 = h_{22}n_1\omega, \quad q_4 = h_{11}x_{2v}x_{3v} - 2h_{12}x_{2u}x_{3v} + h_{22}x_{2u}x_{3u}, \end{gathered} \tag{24}$$

где $\omega = \lambda n_3^2 + x_{3u}^2 + x_{3v}^2$. Отметим, что $\omega > 0$ всюду в U.

Первая и третья формулы в (23) могут быть записаны в виде $y_{1u}d - d_1 = 0$ и $y_{1v}d - d_3 = 0$. Продифференцируем первое из этих соотношений по v, второе — по u и вычтем второй результат из первого. Получим $y_{1u}d_v - y_{1v}d_u - d_{1v} + d_{3u} = 0$. Подставим сюда $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$ и выполним дифференцирования. После несложных преобразований получим

$$\begin{multlined} p_3 y_{3uu} + (q_3 - p_1)y_{3uv} - q_1 y_{3vv} + [p_{3u} - p_{1v} + (p_1 d_v - p_3 d_u)/d]y_{3u} \\ + [q_{3u} - q_{1v} + (q_1 d_v - q_3 d_u)/d]y_{3v} = 0. \end{multlined} \tag{25}$$

Преобразуем (25), подставив в коэффициенты перед вторыми производными от y_3 вместо p_1, p_3, q_1, q_3 их выражения из (24). После упрощений полученного соотношения и деления обеих его частей на $(-n_2)$ получим

$$\omega h_{22} y_{3uu} + 2\lambda h_{12} y_{3uv} + \omega h_{11} y_{3vv} + r_1 y_{3u} + r_2 y_{3v} = 0, \tag{26}$$

где $r_1 = (p_{1v} - p_{3u})/n_2 + (p_3 d_u - p_1 d_v)/(n_2 d)$, $r_2 = (q_{1v} - q_{3u})/n_2 + (q_3 d_u - q_1 d_v)/(n_2 d)$.

Действуя аналогично, запишем вторую и четвертую формулы в (23) в виде $y_{2u}d - d_2 = 0$ и $y_{2v}d - d_4 = 0$. Продифференцируем первое из этих соотношений по v, второе — по u и вычтем последний результат из первого. Получим $y_{2u}d_v - y_{2v}d_u - d_{2v} + d_{4u} = 0$. Подставим сюда $d_i = p_i y_{3u} + q_i y_{3v}$ и выполним дифференцирования. После несложных преобразований получим

$$\begin{multlined} p_4 y_{3uu} + (q_4 - p_2)y_{3uv} - q_2 y_{3vv} + [p_{4u} - p_{2v} + (p_2 d_v - p_4 d_u)/d]y_{3u} \\ + [q_{4u} - q_{2v} + (q_2 d_v - q_4 d_u)/d]y_{3v} = 0. \end{multlined} \tag{27}$$

Подставим в (27) в коэффициенты перед вторыми производными от y_3 вместо p_2, p_4, q_2, q_4 их выражения из (24), упростим полученное соотношение и поделим обе его части на n_1. Получим

$$\omega h_{22} y_{3uu} - 2\lambda h_{12} y_{3uv} + \omega h_{11} y_{3vv} + r_3 y_{3u} + r_4 y_{3v} = 0, \tag{28}$$

где $r_3 = (p_{4u} - p_{2v})/n_1 + (p_2 d_v - p_4 d_u)/(n_1 d)$, $r_4 = (q_{4u} - q_{2v})/n_1 + (q_2 d_v - q_4 d_u)/(n_1 d)$.

Сложив формулы (26) и (28) и поделив результат на 2ω, получим формулу (18), где $\rho_1 = (r_1 + r_3)/(2\omega)$ и $\rho_2 = (r_2 + r_4)/(2\omega)$. Вычтя из (26) формулу (28) и поделив результат на 4λ, получим формулу (19), где $\rho_3 = (r_1 - r_3)/(4\lambda)$ и $\rho_4 = (r_2 - r_4)/(4\lambda)$. $\square$

Для первой и второй компонент y_1 и y_2 поля вращения Дарбу y уравнения, аналогичные (18) и (19), могут быть получены тем же способом, каким уравнения (18) и (19) были получены в доказательстве теоремы 2. Мы не предполагаем пользоваться уравнениями для y_1 и y_2 в этой статье, поэтому не выписываем их здесь, чтобы не отклоняться от основного хода рассуждений.

Посмотрим, как выглядят уравнения (18) и (19) для поверхностей, рассмотренных в § 3 в примерах 1–3.

Пример 4 (продолжение примера 1, в котором рассматривалась плоскость $x = (u, v, 0)$). В этом случае мы даже не можем написать уравнения (18) и (19). В самом деле, в этом случае n_1 тождественно равен нулю. Следовательно, теорема 2 просто неприменима.

Пример 5 (продолжение примера 2, в котором рассматривалась сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, параметризованная с помощью стереографической проекции). В этом случае линия $n_1 = 0$ задается уравнением $v = 0$, линия $n_2 = 0$ задается уравнением $u = 0$, а уравнение $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 = 0$ принимает вид $16\lambda(u^2 + v^2)/(u^2 + v^2 + 1)^4 = 0$ и задает всего одну точку, а именно, $u = v = 0$. Следовательно, в каждом квадранте K_i, $i = 1, \dots, 4$, определяемом осями координат u, v, мы можем написать уравнения (18) и (19). При этом уравнение (18) принимает вид $y_{3uu} + y_{3vv} + (\rho_1/\lambda)y_{3u} + (\rho_2/\lambda)y_{3v} = 0$, т. е. является эллиптическим линейным уравнением второго порядка. Значит, согласно принципу максимума функция y_3 не может принимать внутри K_i значение, которое больше всех ее значений на границе квадранта K_i. Что касается уравнения (19) $h_{12}y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, то оно принимает вид $\rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, т. е. вообще не является уравнением второго порядка.

Пример 6 (продолжение примера 3, в котором рассматривалось непрерывное семейство изометричных поверхностей S_t, содержащее геликоид и катеноид). Линия $(n_t)_1 = 0$ задается уравнением $\cos u = 0$ (а значит, $u = \pi/2 + \pi j$, $j \in \mathbb{Z}$), линия $(n_t)_2 = 0$ задается уравнением $\sin u = 0$ (а значит, $u = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$), уравнение $(h_t)_{11}(x_t)_{3v}^2 - 2(h_t)_{12}(x_t)_{3u}(x_t)_{3v} + (h_t)_{22}(x_t)_{3u}^2 = 0$ принимает вид $-2\cos^2 t \sin t = 0$ (а значит, не имеет решений при $t \in (0, \pi/2)$). Следовательно, для каждого $t \in (0, \pi/2)$ в каждой подобласти области U, не пересекающейся ни с одной прямой $u = k\pi/2$, мы можем написать уравнения (18) и (19). При этом уравнение (18) принимает вид $(\sin t)y_{3uu} - (\sin t)y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0$, а уравнение (19) принимает вид $(\cos t)y_{3uv} + \rho_3 y_{3u} + \rho_4 y_{3v} = 0$, т. е. для $t \in (0, \pi/2)$ оба уравнения являются гиперболическими линейными уравнениями второго порядка, причем у этих уравнений нет общих характеристик.

Примеры 4–6 показывают, что для некоторых поверхностей уравнения (18), (19) вырождаются, но для некоторых являются не совпадающими друг с другом уравнениями второго порядка. Наличие двух уравнений для y_3 (т. е. для третьей компоненты поля вращения Дарбу) является новым фактом в теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$. Вопрос об использовании этого факт является интересным, но он выходит за рамки настоящей статьи.

§ 5. Принцип максимума для компонент поля вращения Дарбу поверхностей не обязательно положительной кривизны

Теорема 3. *Пусть S — гладкая поверхность, $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ — ее параметризация посредством изотермических координат $(u, v) \in U$, $\lambda = (x_u, x_u)$, $n = (n_1, n_2, n_3) = \lambda^{-1}(x_u \times x_v)$ — вектор единичной нормали к S, h_{ij} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S и $y = (y_1, y_2, y_3) : U \to \mathbb{R}^3$ — поле вращения Дарбу поверхности S. Предположим также, что в U выполняются неравенства*

$$n_1 \neq 0, \quad n_2 \neq 0, \quad h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 \neq 0, \tag{29}$$

$$h_{22}h_{11} > 0. \tag{30}$$

Тогда внутри области U функция y_3 не может принимать значение, которое больше всех ее значений на границе области U.

Доказательство. В силу неравенств (29) функция y_3 удовлетворяет уравнению (18) $h_{22}y_{3uu} + h_{11}y_{3vv} + \rho_1 y_{3u} + \rho_2 y_{3v} = 0$, а в силу неравенства (30) это уравнение эллиптическое. Поэтому утверждение теоремы 3 следует из стандартной формулировки принципа максимума для эллиптических уравнений (см., например, [24; 25, Ч. 2, § 2.2]). □

Ясно, что в теореме 3 третья компонента y_3 поля вращения Дарбу y была взята исключительно для определенности; утверждения, аналогичные теореме 3, конечно, справедливы и для других компонент поля вращения Дарбу y.

Из теоремы 3 заключаем, что если на параметризованной поверхности $x = (x_1, x_2, x_3) : U \subset \mathbb{R}^2 \to S \subset \mathbb{R}^3$ выполняется неравенство (30), то максимальные и минимальные значения функции y_3 не могут достигаться нигде, кроме как на границе поверхности либо на линиях, задаваемых одним из условий $n_1 = 0$, $n_2 = 0$, $h_{11}x_{3v}^2 - 2h_{12}x_{3u}x_{3v} + h_{22}x_{3u}^2 = 0$. Тем самым на некоторых поверхностях не обязательно положительной кривизны (а именно тех, на которых выполняется неравенство (30)), удалось построить линии, на которых только и могут достигаться максимальные и минимальные значения функции y_3. Ранее в теории бесконечно малых изгибаний гладких поверхностей в $\mathbb{R}^3$ такие линии не встречались. С точки зрения автора они аналогичны узловым линиям стоячих волн (см., например, [26, гл. V, § 3]) и заслуживают отдельного исследования.

Вместе с тем отметим, что если поверхность S не просто удовлетворяет неравенству (30) (т. е. неравенству $h_{11}h_{22} > 0$), но всюду имеет положительную гауссову кривизну (т. е. на ней выполняется неравенство $h_{11}h_{22} - h_{12}^2 > 0$), то принцип максимума для функции y_3 выполняется без дополнительных ограничений (29). Это непосредственно вытекает из следствия из теоремы 2 статьи [7], которое утверждает, что диаграмма вращения Y любого нетривиального бесконечно малого изгибания z поверхности положительной кривизны ни в одной внутренней точке (т. е. точке, не лежащей на границе поверхности) не имеет локальной опорной плоскости. Напомним, что *диаграммой вращения* Y бесконечно малого изгибания z называется множество концевых точек векторов соответствующего поля вращения Дарбу y, отложенных от некоторой фиксированной точки, например, от начала координат. Утверждение о том, что если гауссова кривизна поверхности S положительна, то в каждой регулярной точке (т. е. такой, что $y_u \times y_v \neq 0$) диаграмма вращения Y имеет строго отрицательную кривизну (а значит, не имеет локальной опорной плоскости в этой точке) было известно классикам (см., например, [11, § 5]). Таким образом, суть следствия из теоремы 2 статьи [7] состоит в том, что если гауссова кривизна поверхности S положительна, то локальной опорной плоскости нет и в нерегулярных точках диаграммы вращения Y. Для этого в [7] используются топологические свойства внутренних (по Стоилову [27]) отображений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Euleri L.* Fragmentum 97 // A. Speiser (ed.). Leonhardus Eulerus. Opera omnia, Ser. 1. Opera mathematica. V. 13. Commentationes geometricae. V. 4. Lausannae: Auctoritate et impensis Societatis Scientiarum Naturalium Helveticae, 1956. P. 437–440.

2. *Гаусс К. Ф.* Общие исследования о кривых поверхностях // А. П. Норден (ред.). Об основаниях геометрии. М.: ГИТТЛ, 1956. С. 123–161.

3. *Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х.* Изгибание поверхностей. I // Н. М. Остиану (ред.). Итоги науки и техники. Серия «Проблемы геометрии». Т. 23. М.: ВИНИТИ, 1991. С. 131–184.

4. *Климентов С. Б.* Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2014. [В электронном виде книга доступна на https://elibrary.ru/item.asp?id=24164017].

5. *Боярский Б. В., Ефимов Н. В.* Принцип максимума для бесконечно малых изгибаний кусочно-регулярных выпуклых поверхностей // Успехи мат. наук. 1959. Т. 14, № 6. С. 147–153.

6. *Погорелов А. В.* Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969.

7. *Сабитов И. Х.* Локальная структура поверхностей Дарбу // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162, № 5. С. 1001–1004.

8. *Yau S.-T.* Problem section // S.-T. Yau (ed.). Seminar on differential geometry. Ann. Math. Stud. V. 102. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. P. 669–706.

9. *Решетняк Ю. Г.* О нежестких поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 591–604.

10. *Троценко Д. А.* О нежестких аналитических поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 5. С. 100–108.

11. *Кон-Фоссен С. Э.* Изгибаемость поверхностей в целом // Успехи мат. наук. 1936. № 1. С. 33–76.

12. *Дарбу Ж. Г.* Лекции по общей теории поверхностей. Т. IV. Бесконечно малое изгибание и сферическое представление. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.

13. *Rembs E.* Verbiegungen höherer Ordnung und ebene Flächenrinnen // Math. Z. 1933. Bd 36. S. 110–121.

14. *Ефимов Н. В.* Качественные вопросы теории деформаций поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 2. С. 47–158.

15. *Alexandrov V.* New manifestations of the Darboux's rotation and translation fields of a surface // N. Z. J. Math. 2010. V. 40. P. 59–65.

16. *Gauss C. F.* On conformal representation // D. E. Smith (ed.). A source book in mathematics. V. 2. New York: Dover Publications, 1959. P. 463–475.

17. *Chern S.-S.* An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface // Proc. Am. Math. Soc. 1955. V. 6. P. 771–782.

18. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

19. *Douady A.* Le théorème d'intégrabilité des structures presque complexes (d'après des notes de X. Buff) // T. Lei (ed.). The Mandelbrot set, theme and variations. London Math. Soc. Lect. Note Ser. V. 274. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2000. P. 307–324.

20. *Fillastre F., Slutskiy D. (eds.).* Reshetnyak's theory of subharmonic metrics. Cham: Springer, 2023.

21. *Топоногов В. А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. М.: Физматкнига, 2012.

22. *Gray A., Abbena E., Salamon S.* Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica. 3rd ed. Boca Raton: CRC, 2006.

23. *Мазья В. Г., Кресин Г. И.* О принципе максимума для сильно эллиптических и параболических систем второго порядка с постоянными коэффициентами // Мат. сб. 1984. Т. 125, № 4. С. 458–480.

24. *Бицадзе А. В.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: Наука, 1966.
25. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1966.
26. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
27. *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 18 октября 2024 г.
После доработки 11 марта 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Александров Виктор Алексеевич (ORCID 0000-0002-6622-8214)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.54

ОБ УСТРАНИМЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ДЛЯ КВАЗИРЕГУЛЯРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. Асеев

Аннотация. Рассматривается непрерывное открытое конечнократное отображение f области G, содержащей замкнутое множество E. Для каждого натурального k рассматривается множество $E(k)$ (возможно, пустое) всех тех точек из E, в которых f принимает значение с кратностью k по области G. Пусть каждая точка из $E(k)$ имеет окрестность, в которой ограничение f на $E(k)$ инъективно и обратное к нему отображение является слабо (h, H)-квазисимметрическим. Если при этом f квазирегулярно вне E, то оно будет квазирегулярным на всей области G. Эта теорема является обобщением достаточного признака устранимости замкнутых множеств в классе квазиконформных отображений, полученного в статье [J.Väisälä, Manuscripta math., 69, 101–111 (1990)].

DOI 10.33048/smzh.2025.66.303

Ключевые слова: квазиконформное отображение, квазирегулярное отображение, слабо квазисимметрическое отображение, непрерывное открытое дискретное отображение, модуль семейства путей, емкость конденсатора.

Введение

Описание устранимых особенностей для заданного класса отображений (или функций) остается одной из важнейших задач современного математического анализа. В рамках теории функций эта проблема подробно рассматривалась, например, в фундаментальной статье [1], где было дано описание основных типов устранимых множеств для разных классов аналитических функций. В частности, там был выделен класс NED замкнутых множеств, не влияющих на модуль семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора. В 1956 г. И. Н. Песин в работе [2] доказал, что класс устранимых множеств для плоских квазиконформных отображений совпадает с классом NED-множеств, т. е. множеств, не влияющих на конформную емкость конденсаторов. Изучению свойств NED-множеств в пространстве $\mathbb{R}^n$ была посвящена статья Вяйсяля [3]. Устранимость NED-множеств для пространственных квазиконформных отображений была доказана в [4] в 1974 г. Различные варианты задачи об устранимых множествах для емкости пространственных конденсаторов специального вида и для квазиконформных отображений были рассмотрены в работах В. А. Шлыка [5–8]. В статье Вяйсяля [9] 1990 г. доказана устранимость замкнутого множества E для отображений, квазиконформных вне E и локально квазисимметрических на E. В данной работе будет доказано, что аналогичная теорема справедлива и в классе отображений с ограниченным искажением (квазирегулярных отображений).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

Отображения с ограниченным искажением областей в $\mathbb{R}^n$ появились в работах Ю. Г. Решетняка в его статьях 1965/67 г. в результате естественного распространения аналитического определения квазиконформности на случай неинъективных отображений класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$. Богатая теория этих отображений с их применением в теории соболевских функциональных пространств была изложена Ю. Г. Решетняком в его монографии [10]. В 1969/71 гг. топологические и метрические аспекты отображений с ограниченным искажением изучались в работах [11–13], где они рассматривались как специальный подкласс в классе непрерывных открытых дискретных отображений и были названы квазирегулярными (в более общей трактовке — квазимероморфными) отображениями. Очень удобным для использования оказалось введенное в [11] метрическое определение квазирегулярности, не требующее априорного наличия дифференциальных свойств отображения.

Квазисимметрические (в более общем варианте — квазимёбиусовы) отображения метрических пространств были введены в [14] в целях распространения свойства квазиконформности на случай отображений произвольных метрических (в частности, дискретных) пространств без необходимости постулирования их дифференциальных свойств. В формулировке и в доказательстве основной теоремы об устранимости мы используем менее ограничительное условие слабой (h, H)-квазисимметричности, следуя [15]. Возможность такого усиления своей теоремы об устранимости в классе квазиконформных отображений была кратко упомянута Вяйсяля в [9, 3.6, замечание 1].

В § 0 и § 1 приведены определения основных понятий, используемых в формулировке и доказательстве основной теоремы об устранимости. В § 2 доказывается лемма 2.1, необходимая для получения основного результата. Это наиболее трудоемкий этап в наших построениях. Наконец, § 3 содержит формулировку и доказательство итогового результата данной статьи (теорема 3.1). Заметим, что во всех доказательствах используются лишь те свойства квазирегулярных отображений, которые приведены в статьях [11–13].

§ 0. Обозначения и терминология

Для произвольного множества $X \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ через $\overline{X}$ или $\mathrm{Cl}(X)$ обозначаем его замыкание в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$, а через ∂X или $\partial(X)$ — его границу.

Для $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $r, s > 0$ используются обозначения:

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| < r\}; \quad S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r\};$$

$$\overline{B}(x_0, r) = B(x_0, r) \cup S(x_0, r); \quad B(x_0; r, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x - x_0| < s\};$$

$$\overline{B}(x_0; r, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : r \le |x - x_0| \le s\}.$$

Для $(n-1)$-мерной меры единичной сферы $S(x_0, 1)$ в $\mathbb{R}^n$ используем стандартный символ ω_{n-1}.

(0.0). Пусть в открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \ge 2)$ заданы непрерывное открытое дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\# f^{-1}(y) \le N$ для всех $y \in f(\Omega)$, и замкнутое относительно Ω множество $E \subset \Omega$.

Во всем дальнейшем тексте множества Ω, E, отображение f и число N считаем фиксированными.

Будем предполагать известным понятие (*конформного*) *модуля* $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ семейства путей Γ (открытых или замкнутых) в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Определение и свойства модулей семейства путей см. в монографии Вяйсяля [16, гл. 1]. В частности, в дальнейшем тексте следующие свойства будут использоваться по умолчанию.

[16, 6.10]. Для любого семейства Γ путей в $\mathbb{R}^n$ справедливо равенство $\mathrm{Mod}(\Gamma) = \mathrm{Mod}(\Gamma')$, где семейство Γ' состоит из всех спрямляемых путей $\gamma \in \Gamma$.

[16, 3.2]. Каждый открытый спрямляемый путь в $\mathbb{R}^n$ имеет два конца и имеет единственное продолжение до замкнутого пути.

[16, замечание 7.11]. Если в семействе Γ открытых путей в $\mathbb{R}^n$ оставить только спрямляемые пути, продолженные до замкнутых путей, то конформный модуль этого семейства не изменится. Таким образом, при рассмотрении конформного модуля $\mathrm{Mod}(\Gamma)$ можно считать, что Γ состоит из спрямляемых замкнутых путей. При этом конформный модуль пустого семейства полагается равным нулю.

[16, 6.3, 6.4]. Семейство путей Γ *длиннее* семейства путей Γ', если любой путь $\gamma \in \Gamma$ содержит подпуть $\gamma' \in \Gamma'$. В этом случае $\mathrm{Mod}(\Gamma) \leq \mathrm{Mod}(\Gamma')$.

Для двух непересекающихся замкнутых множеств F_0, F_1 в $\mathbb{R}^n$ и открытого множества U символом $\Gamma(F_0, F_1; U)$ обозначаем семейство всех спрямляемых путей $\gamma : (0,1) \to U$, *соединяющих* F_0 и F_1, т. е. имеющих концы $\gamma(0) \in F_0$, $\gamma(1) \in F_1$.

[11, 5.2–5.4]. *Конденсатором* в $\mathbb{R}^n$ называется пара $\mathbf{C} = (U, F)$, где U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а F — непустое компактное подмножество в U. Для каждого конденсатора определена величина $\mathrm{Cap}(\mathbf{C})$ — его *конформная емкость.*

[17, теорема 7.8, замечание 7.9]. Для любого конденсатора (U, F) в $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{Cap}(U, F) = \mathrm{Mod}(\Gamma(F, \partial U; U)). \tag{0.1}$$

Область в $\overline{\mathbb{R}}^n$, дополнение к которой имеет в точности две компоненты, называется *кольцевой областью.* В частности, *шаровой слой* $B(x_0; r, s)$ (spherical ring) является кольцевой областью, а число

$$\Lambda(B(x_0; r, s)) := \log(s/r)$$

называем его *толщиной.* Шаровой слой $B(x_0; s, r)$ можно рассматривать как конденсатор $(B(x_0, r), \overline{B}(x_0, s))$, и тогда (см. [16, 7.5])

$$\mathrm{Cap}(B(x_0; s, r)) = \mathrm{Mod}(\Gamma(S(x_0, s), S(x_0, r); B(x_0; s, r))) = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r/s))^{n-1}}. \tag{0.2}$$

§ 1. Квазирегулярные и слабо квазисимметрические отображения

Точка $x_0 \in \Omega$ называется *регулярной*, если существует такая окрестность $U(x_0) \subset \Omega$, что ограничение $f|_{U(x_0)}$ является гомеоморфизмом. В противном случае x_0 называется *точкой ветвления.* Множество всех точек ветвления обозначается символом B_f. Его топологическая размерность $\dim B_f \leq n-2$ (см. [11, лемма 2.11]), поэтому можно считать без ограничения общности, что f сохраняет ориентацию в каждой компоненте множества Ω.

[11, 2.4] Область $D \subset \Omega$ с компактным замыканием $\overline{D} \subset \Omega$ называется *нормальной* относительно отображения f, если $f(\partial D) = \partial(f(D))$. В этом случае $f^{-1}(f(D)) \cap \overline{D} = D$ и $f^{-1}(f(\partial D)) \cap \overline{D} = \partial D$. Указанные здесь прообразы могут иметь точки вне множества $\overline{D}$.

[11, 2.8] Для точки $x_0 \in \Omega$ и $r > 0$ символом $U(x_0, f, r)$ обозначается компонента открытого множества $f^{-1}(B(f(x_0), r))$, содержащая точку x_0.

1.1. Лемма [11, лемма 2.9]. *Для каждой точки $x_0 \in \Omega$ существует число $\sigma(x_0) > 0$ такое, что при $0 < r \leq \sigma(x_0)$ множества $U(x_0, f, r)$ являются нормальными областями со следующими свойствами:*

$$f(U(x_0, f, r)) = B(f(x_0), r); f(\partial U(x_0, f, r)) = S(f(x_0), r); \tag{1.1.1}$$

$$U(x_0, f, r) \cap f^{-1}(f(x_0)) = \{x_0\}; \tag{1.1.2}$$

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{diam}(U(x_0, f, r)) = 0; \tag{1.1.3}$$

$$U(x_0, f, r) = U(x_0, f, \sigma(x_0)) \cap f^{-1}(B(f(x_0), r); \tag{1.1.4}$$

$$\partial U(x_0, f, r) = U(x_0, f, \sigma(x_0)) \cap f^{-1}(S(f(x_0), r)) \text{ при } r < \sigma(x_0); \tag{1.1.5}$$

$$\text{множества } \mathbb{R}^n \setminus U(x_0, f, r) \text{ и } \mathbb{R}^n \setminus \operatorname{Cl}(U(x_0, f, r))) \text{ связны.} \tag{1.1.6}$$

При этом

$$\text{если } 0 < r < s \leq \sigma(x_0), \text{ то } \operatorname{Cl}(U(x_0, f, r) \subset U(x_0, f, s) \text{ и множество}$$
$$U(x_0, f, s) \setminus \operatorname{Cl}(U(x_0, f, r)) \text{ является кольцевой областью.} \tag{1.1.7}$$

Множества $U(x_0, f, r)$, указанные в лемме 1.1, называем *каноническими нормальными окрестностями* точки x_0 и в дальнейшем тексте обозначаем их через $U(x_0, r)$ с учетом того, что отображение f фиксировано. При этом через $\overline{U}(x_0, r)$ обозначаем замыкание канонической нормальной окрестности $U(x_0, r)$. Для краткости вводим обозначения

$$U(x_0; r, s) := U(x_0, s) \setminus \operatorname{Cl}(U(x_0, r)); \quad \overline{U}(x_0; r, s) := \operatorname{Cl}(U(x_0; r, s)). \tag{1.1.8}$$

1.2. Определение [11, определение 4.2, теорема 1.14]. Для точки $x \in \Omega$ и $r \in (0, \sigma(x))$ величина (возможно, $+\infty$)

$$H^*(x, f) := \limsup_{r \to 0} \frac{\max\{|z - x| : z \in \partial U(x, r)\}}{\min\{|z - x| : z \in \partial U(x, r)\}} \tag{1.2.1}$$

называется *обратной линейной дилатацией* отображения f в точке x.

Отображение f называется *K^*-квазирегулярным* на открытом множестве $D \subset \Omega$, если величина $H^*(x, f)$ локально ограничена в D и $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$.

Для K^*-квазирегулярного отображения *внешняя дилатация* $K_O(f)$ и *внутренняя дилатация* $K_I(f)$ (см. определение в [11, 2.20]) удовлетворяют неравенству

$$\max\{K_O(f), K_I(f)\} \leq (K^*)^{n-1}, \tag{1.2.2}$$

которое легко проверяется в регулярных точках дифференцируемости отображения f.

1.3. Утверждение [11, теорема 4.6]. *Если f является K^*-квазирегулярным на открытом множестве $D \subset \Omega$ и $\#(f^{-1}(y) \cap D) \leq N$ для всех $y \in f(D)$, то $H^*(x, f) \leq C^*$ всюду в D с константой C^*, зависящей лишь от $\{K^*, N, n\}$.*

1.3.1. Для отображения f, заданного в (0.0), и подмножества $M \subset \Omega$ положим

$$H^*(M, f) := \sup_{x \in M} H^*(x, f).$$

При этом будем считать, что $H^*(\varnothing, f) = 1$.

На любом открытом подмножестве $D \subset \Omega$ оценка $H^*(D,f) \leq H^* < +\infty$ дает H^*-квазирегулярность отображения $f|_D$. Верно и обратное (см. утверждение 1.3): из K^*-квазирегулярности $f|_D$ вытекает оценка $H^*(D,f) \leq H^*$ с константой H^*, зависящей лишь от $\{K^*, N, n\}$.

1.4. Определение [15, определение 1.2]. Инъективное отображение $\varphi : A \to \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ множества $A \subset \mathbb{R}^n$ называется *слабо* (h,H)*-квазисимметрическим* с константами $h > 0$ и $H \geq 1$, если для любых точек a_1, a_2, a_3 из A справедлива импликация

$$(|a_1 - a_3| \leq h \cdot |a_1 - a_2|) \Rightarrow (|\varphi(a_1) - \varphi(a_3)| \leq H \cdot |\varphi(a_1) - \varphi(a_2)|). \qquad (1.4.1)$$

Заметим, что любое η-квазисимметрическое отображение в смысле [14] является слабо (h,H)-квазисимметрическим с любым $h \geq 1$ и $H = \eta(h)$.

1.5. Утверждение. *Если $\#A < 3$, то любое инъективное отображение $\varphi : A \to \varphi(A)$ является слабо (h,H)-квазисимметрическим с любыми $h > 0$ и $H \geq 1$.*

Доказательство. Если $\#A \leq 2$, то для выбора трех точек a_1, a_2, a_3 в A имеются лишь 4 варианта:

$$a_1 = a_2 = a_3; \quad a_1 = a_2 \neq a_3; \quad a_1 = a_3 \neq a_2; \quad a_2 = a_3 \neq a_1.$$

Проверка истинности импликации (1.4.1) в каждом из этих вариантов осуществляется непосредственно.

1.6. Утверждение. *Пусть $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ и $\varphi : A \to \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n$ — слабо (h,H)-квазисимметрическое отображение с константами $h > 1$, $H \geq 1$.*

Если множество $A_0 \subset A \setminus \{a\}$ лежит в замкнутом шаровом слое с центром a и толщиной $\leq \log(h)$, то его образ $\varphi(A_0)$ лежит в замкнутом шаровом слое с центром $\varphi(a)$ и толщиной $\leq \log(H)$.

Доказательство. Утверждение тривиально верно в случае $\#A < 2$. Для любой пары различных точек x_1, x_2 из A_0 выполняется неравенство

$$\frac{|x_1 - a|}{|x_2 - a|} \leq h.$$

Тогда для их образов $y_1 = \varphi(x_1)$ и $y_2 = \varphi(x_2)$ имеем оценку

$$\frac{|y_1 - \varphi(a)|}{|y_2 - \varphi(a)|} \leq H.$$

Следовательно,

$$\frac{\sup\{|y - \varphi(a)| : y \in \varphi(A_0)\}}{\inf\{|y - \varphi(a)| : y \in \varphi(A_0)\}} \leq H.$$

Утверждение доказано.

§ 2. Основная лемма

Для фиксированного выше отображения $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ справедлива следующая

2.1. Лемма. *Пусть* $x_0 \in \Omega$, $\sigma(x_0)$ *— число, указанное в лемме* 1.1, *и* $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$. *Пусть* $U(x_0, \sigma_0)$ *— каноническая нормальная окрестность, и пусть замкнутое множество* $E' \subset \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ *таково, что*

(2.1.1) $x_0 \in E'$;

(2.1.2) $f^{-1}(f(x)) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = \{x\}$ *для всех* $x \in E'$;

(2.1.3) *ограничение* $f|_{E'}$ *инъективно* (*это вытекает из* (2.1.2)) *и обратное к нему отображение* $\varphi(y) = f^{-1}(y) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) : f(E') \to E'$ *является слабо* (h, H)*-квазисимметрическим с константами* $h > 1$, $H \geq 1$;

(2.1.4) *отображение* f *является* Q^**-квазирегулярным на* $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E'$, *где* $0 < r_1 < r_2 < \sigma_0$ *и* $r_2/r_1 \leq h$.

Тогда

$$C_2^* \leq \frac{\max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\}}{\min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\}} \leq C_1^* \tag{2.1.5}$$

с константами C_1^* *и* $C_2^* > 0$, *зависящими только от* Q^*, h, H, N, n *и* r_2/r_1. *Эти оценки верны и в случае* $U(x_0; r_1, r_2) \cap E' = \varnothing$ *или* $U(x_0; r_1, r_2) \subset E'$.

Доказательство. Для краткости положим $y_0 := f(x_0)$, $U_0 := U(x_0, \sigma_0)$, $E_0 := E' \cap \overline{U}(x_0; r_1, r_2)$ и $g := f|_{U_0}$. Отображение $g : U_0 \to g(U_0) = B(y_0, \sigma_0)$ остается непрерывным, открытым и дискретным. Для любого множества $Y \subset B(y_0, \sigma_0)$

$$g^{-1}(Y) = f^{-1}(Y) \cap U_0.$$

Поэтому из (1.1.4) и (1.1.5) для любого $t \in (0, \sigma_0)$ вытекают равенства

$$g^{-1}(B(y_0, t)) = U(x_0, t); \quad g^{-1}(\partial B(y_0, t)) = \partial U(x_0, t). \tag{2.1.6}$$

Следовательно, для любых $0 < t < s < \sigma_0$

$$g^{-1}(B(y_0; t, s)) = U(x_0; t, s); \quad g^{-1}(\partial B(y_0; t, s)) = \partial U(x_0; t, s). \tag{2.1.7}$$

Так как $g^{-1}(g(x)) = \{x\}$ для всех $x \in E'$ (см. (2.1.2)), то

$$g^{-1}(g(E_0)) = E_0. \tag{2.1.8}$$

Поэтому

$$(x \in E_0) \Leftrightarrow (g(x) \in g(E_0)); \quad (x \notin E_0) \Leftrightarrow (g(x) \notin g(E_0)). \tag{2.1.9}$$

Заметим, что

$$g(U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0) = B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0). \tag{2.1.10}$$

Действительно, если $x \in U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$, то (см. (2.1.9)) $g(x) \notin g(E_0)$ и (см. (1.1.1)) $g(x) \in B(y_0; r_1, r_2)$, т. е. $x \in B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)$. Следовательно,

$$g(U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0) \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0).$$

Обратное включение тривиально верно (см. [18, §3.III(3)]).

Теперь убедимся, что

$$g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)) = U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0. \tag{2.1.11}$$

Действительно, (2.1.10) дает включение

$$U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0 \subset g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)).$$

Если $x \in g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0))$, то $g(x) \in B(y_0; r_1, r_2)$ и $g(x) \notin g(E_0)$. Значит, $x \in g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2)) = U(x_0; r_1, r_2)$ (см. (2.1.7)) и $x \notin E_0$ (см. (2.1.9)), т. е. $x \in U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$. Получаем обратное включение

$$g^{-1}(B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)) \subset U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$$

и требуемое равенство (2.1.11).

Отметим точки $x_{\max} \in \partial U(x_0, r_1)$ и $x_{\min} \in \partial U(x_0, r_2)$, для которых

$$a_1 := |x_{\max} - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\};$$

$$a_2 := |x_{\min} - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\}.$$

В утверждении 1.6 положим $a := y_0$, $A := f(E')$, $\varphi(y) = f^{-1}(y) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) : A \to E'$, $A_0 := f(E_0)$. Так как множество A_0 содержится в замкнутом шаровом слое $\overline{B}(y_0; r_1, r_2)$ с центром a и толщиной $\log(r_2/r_1) \leq \log(h)$, то множество $\varphi(A_0) = E_0$ содержится (по утверждению 1.6) в некотором замкнутом шаровом слое с центром x_0 и толщиной $\leq \log(H)$.

Для доказательства левой половины неравенства (2.1.5) нужно найти верхнюю оценку для величины $T := a_2/a_1$.

Пусть $T > H^3$. Тогда шаровой слой $B(x_0; a_1, a_2)$ с толщиной $\log T > 3 \cdot \log(H)$ лежит в кольцевой области $U(x_0; r_1, r_2)$ (см. определение величин a_1 и a_2). Поэтому множество E_0 либо лежит вне шара $B(x_0, a_1 \cdot T^{1/3})$ (случай 1), либо содержится в шаре $\overline{B}(x_0, a_2 \cdot T^{-1/3})$ (случай 2).

Для того чтобы последующие рассуждения были справедливы в любом из этих двух случаев, вводим нижний индекс $i = 1$ в случае 1 и $i = 2$ в случае 2.

Построим сферу $S_i = S\big(x_0, a_1^{1/6}(a_i^{2/3})a_2^{1/6}\big)$ (т. е. $S_1 = S(x_0, a_1 \cdot T^{1/6})$, $S_2 = S(x_0, a_2 \cdot T^{(-1/6)})$). В каждом из этих случаев ($i \in \{1, 2\}$) сфера S_i не пересекается с E_0 и множество $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ имеет компоненту D_i, содержащую сферу S_i. Так что получаем конденсатор $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$.

Шаровой слой $\mathscr{R}_i$, ограниченный сферами $S(x_0, a_i)$ и $S\big(x_0, a_1^{1/3}\big(a_i^{1/3}\big)a_2^{1/3}\big)$, лежит в области D_i и разрезается сферой S_i на два шаровых слоя $\mathscr{R}_i^1$ и $\mathscr{R}_i^2$ одинаковой толщины $(1/6)\log T$.

Пусть Γ_i^j ($j \in \{1, 2\}$) — семейство всех путей в шаровом слое $\mathscr{R}_i^j$, соединяющих его граничные сферы. В силу (0.2) имеем равенство

$$\operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^1\big) = \operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^2\big) = \frac{\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}}.$$

Семейства путей Γ_i^1 и Γ_i^2 лежат в непересекающихся областях, поэтому (см. [16, теорема 6.7])

$$\operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2\big) = \operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^1\big) + \operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^2\big) = \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}}.$$

Любой путь из семейства Γ_i^0 всех путей в конденсаторе $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$, соединяющих S_i с ∂D_i, содержит подпуть, принадлежащий семейству $\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$, т. е. семейство Γ_i^0 длиннее семейства $\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2$. Поэтому с учетом равенства (0.1) получаем оценку

$$\operatorname{Cap}(\mathbf{C}_i) = \operatorname{Cap}(D_i, S_i) = \operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^0\big) \leq \operatorname{Mod}\big(\Gamma_i^1 \cup \Gamma_i^2\big),$$

из которой следует, что

$$\operatorname{Cap}(\mathbf{C}_i) \leq \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}}. \tag{2.1.12}$$

Теперь рассмотрим образ этого конденсатора, т. е. конденсатор $g(\mathbf{C}_i) = (g(D_i), g(S_i))$. Положим $S(y_0, r_i') := \partial B(y_0; r_1, r_2) \setminus S(y_0, r_i)$ и убедимся, что континуум $g(S_i)$ отделяет сферу $S(y_0, r_i)$ от множества $S(y_0, r_i') \cup g(E_0)$.

Допустим, что это не так. Тогда открытое множество $B(y_0; r_1, r_2) \setminus (g(E_0) \cup g(S_i)$ имеет компоненту V_i, на границе которой найдутся точки $y_1 \in S(y_0, r_i)$ и $y_2 \in S(y_0, r_i') \cup g(E_0)$. Так как $V_i \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus g(E_0)$, то (см. (2.1.11)) открытое множество $g^{-1}(V_i)$ содержится в $U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ и имеет компактное замыкание в U_0. В силу [11, лемма 2.5] любая компонента U множества $g^{-1}(V_i)$ является нормальной областью, т. е.

$$g(U) = V_i; \quad g(\partial U) = \partial V_i.$$

Так как $y_1 \in \partial V_i$ и $y_2 \in \partial V_i$, найдутся точки $x_1 \in \partial U$ и $x_2 \in \partial U$, для которых

$$g(x_1) = y_1 \in S(y_0, r_i); \quad g(x_2) = y_2 \in S(y_0, r_i') \cup g(E_0).$$

Тогда (см. (2.1.6)) $x_1 \in g^{-1}(S(y_0, r_i)) = \partial U(x_0, r_i)$ и (см. (2.1.8))

$$x_2 \in g^{-1}(S(y_0, r_i') \cup g(E_0)) = g^{-1}(S(y_0, r_i')) \cup g^{-1}(g(E_0)) = \partial U(x_0, r_i') \cup E_0.$$

Это означает, что область U имеет на границе точки из множеств $\partial U(x_0, r_i)$ и $\partial U(x_0, r_i') \cup E_0$, т. е. U соединяет эти множества. Но сфера S_i отделяет $\partial U(x_0, r_i)$ от $\partial U(x_0, r_i') \cup E_0$, поэтому $S_i \cap U \neq \varnothing$. Так как (см. [18, § 3.III(3)])

$$g(S_i \cap U)) \subset g(U) \cap g(S_i) = V_i \cap g(S_i),$$

то $V_i \cap g(S_i) \neq \varnothing$, что противоречит выбору $V_i \subset B(y_0; r_1, r_2) \setminus (g(E_0) \cup g(S_i))$.

Полученное противоречие доказывает, что континуум $g(S_i)$ отделяет $\partial B(y_0, r_i)$ от $\partial B(y_0, r_i') \cup g(E_0)$.

Конденсатор $g(\mathbf{C}_i)$ содержится в конденсаторе $(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i))$, поэтому

$$\operatorname{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \geq \operatorname{Cap}(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i)). \tag{2.1.13}$$

В шаровом слое $B(y_0; r_1, r_2)$ рассмотрим семейство Γ_0 путей, соединяющих $g(S_i)$ с $\partial B(y_0; r_1, r_2)$, и семейство Γ' путей, соединяющих $g(S_i)$ с $\partial B(y_0, r_i)$. Так как $\Gamma' \subset \Gamma_0$, то

$$\operatorname{Mod}(\Gamma_0) \geq \operatorname{Mod}(\Gamma'). \tag{2.1.14}$$

Как установлено выше, континуум $g(S_i)$ отделяет $S(y_0, r_i)$ от $S(y_0, r_i')$. Поэтому любой путь из семейства

$$\Gamma'' := \Gamma(S(y_0, r_i), S(y_0, r_i'); B(y_0; r_1, r_2)) = \Gamma(S(y_0, r_1), S(y_0, r_2); B(y_0; r_1, r_2))$$

имеет подпуть, принадлежащий семейству Γ'. Значит, семейство Γ'' длиннее семейства Γ' и поэтому (см. (0.2))

$$\operatorname{Mod}(\Gamma') \geq \operatorname{Mod}(\Gamma'') = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}}. \tag{2.1.15}$$

С учетом равенства (0.1) из неравенств (2.1.13)–(2.1.15) вытекает оценка

$$\operatorname{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \geq \operatorname{Cap}(B(y_0; r_1, r_2), g(S_i)) = \operatorname{Mod}(\Gamma_0) \geq \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}}. \tag{2.1.16}$$

Теорему 7.1(2) из [11] об искажении емкости конденсатора при квазирегулярных отображениях применяем к Q^*-квазирегулярному отображению g области $D_i \subset U(x_0; r_1, r_2) \setminus E_0$ и конденсатору $\mathbf{C}_i = (D_i, S_i)$. По этой теореме с учетом оценки (1.2.2) для $K_I(g)$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Cap}(g(\mathbf{C}_i)) \leq (Q^*)^{n-1} \cdot \operatorname{Cap}(\mathbf{C}_i).$$

Из этого неравенства и оценок (2.1.12), (2.1.16) следует, что

$$\frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1))^{n-1}} \leq (Q^*)^{n-1} \frac{2\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}} \leq (Q^*)^{n-1} \frac{2^{n-1}\omega_{n-1}}{((1/6)\log T)^{n-1}},$$

и это дает оценку

$$T \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{12\cdot Q^*}, \tag{2.1.17}$$

справедливую в обоих случаях $i = 1$ (случай 1) и $i = 2$ (случай 2).

Таким образом, для величины $a_1/a_2 = 1/T$ выполняется либо оценка $\geq 1/H^3$, либо оценка $\geq (r_1/r_2)^{12\cdot Q^*}$. Положив

$$C_2^* := \min\left\{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{12\cdot Q^*}, \frac{1}{H^3}\right\}, \tag{2.1.18}$$

получаем левую часть неравенства (2.1.5).

Для доказательства правой половины неравенства (2.1.5) нужно получить верхнюю оценку величины $T_0 := a_1/a_2$.

Пусть $T_0 > H^3$ (в этом случае $a_1 > a_2$).

Шаровой слой $B(x_0; a_2, a_1)$ имеет толщину $\log T_0 > 3 \cdot \log H$, а множество E_0 (как было отмечено выше, с помощью утверждения 1.6) содержится в замыкании некоторого шарового слоя с центром x_0 и толщиной $\log H$. Поэтому найдется такой шаровой слой B_0 с центром x_0 и толщиной $(1/3)\log T_0$, что $B_0 \subset B(x_0; a_2, a_1)$ и $B_0 \cap E_0 = \varnothing$.

Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано так, что $r' = r_1(1+\varepsilon) < R' = r_2/(1+\varepsilon)$. Тогда $\overline{U}(x_0; r', R') \subset U(x_0; r_1, r_2)$. Так как

$$\begin{aligned}\max\{|x-x_0| : x \in \partial U(x_0, r')\} > \max\{|x-x_0| : x \in \partial U(x_0, r_1)\} = a_1 \\ > a_2 = \min\{|x-x_0| : x \in \partial U(x_0, r_2)\} > \min\{|x-x_0| : x \in \partial U(x_0, R')\},\end{aligned}$$

каждый из континуумов $\partial U(x_0, r')$, $\partial U(x_0, R')$ соединяет граничные сферы шарового слоя B_0. Следовательно (см. [16, теорема 10.12]), конформный модуль семейства Γ всех замкнутых путей, соединяющих $\partial U(x_0, r')$ с $\partial U(x_0, R')$ по области B_0, имеет оценку

$$\mathrm{Mod}(\Gamma) > c_n \cdot \Lambda(B_0) = (c_n/3)\log T_0 \tag{2.1.19}$$

с константой c_n, зависящей только от n.

Рассмотрим подсемейство $\Gamma_0 \subset \Gamma$, состоящее из всех путей $\gamma \in \Gamma$, лежащих в $B_0 \cap \overline{U}(x_0; r', R')$. Так как $\overline{U}(x_0; r') \subset U(x_0; R')$, любой путь $\gamma \in \Gamma$ содержит некоторый подпуть из семейства Γ_0. Значит, семейство Γ длиннее семейства Γ_0 и поэтому (см. [16, 6.4]) $\mathrm{Mod}(\Gamma_0) \geq \mathrm{Mod}(\Gamma)$. С учетом (2.1.19) получаем оценку

$$\mathrm{Mod}(\Gamma_0) > (c_n/3)\log T_0. \tag{2.1.20}$$

Семейство Γ_0 замкнутых путей лежит в $B_0 \cap U(x_0; r_1, r_2)$. Так как это множество не содержит точек из E_0, отображение g является Q^*-квазирегулярным на $B_0 \cap U(x_0; r_1, r_2)$. Значит, выполнены условия теоремы 3.2 из [11], в силу которой

$$\mathrm{Mod}(\Gamma_0) \leq N \cdot (Q^*)^{n-1} \cdot \mathrm{Mod}(g(\Gamma_0)). \tag{2.1.21}$$

(В упомянутой теореме требуется, чтобы отображение было квазирегулярным в области, содержащей все замкнутые пути из семейства Γ_0. Поэтому пришлось использовать более тонкую кольцевую область $U(x_0; r', R')$ вместо $U(x_0; r, R)$. Кроме того, вместо внешней дилатации $K_O(g)$ использована ее верхняя оценка $(Q^*)^{n-1}$, указанная в (1.2.2).)

Образ $g \circ \gamma$ каждого пути $\gamma \in \Gamma_0$ лежит в шаровом слое $\overline{B}(y_0; r', R') \subset B(y_0; r_1, r_2)$ и соединяет сферы $S(y_0, r')$ и $S(y_0, R')$. Любой путь из $g(\Gamma_0)$ содержит некоторый открытый подпуть из семейства

$$\Gamma' := \Gamma(S(y_0, r'), S(y_0, R'); B(y_0; r', R')).$$

Поэтому семейство $g(\Gamma_0)$ длиннее, чем семейство Γ', следовательно (см. (0.2)),

$$\mathrm{Mod}(g(\Gamma_0)) \le \mathrm{Mod}(\Gamma') = \frac{\omega_{n-1}}{(\log(R'/r'))^{n-1}}.$$

Отсюда с учетом (2.1.20) и (2.1.21) получаем неравенство

$$(c_n/3)\log T_0 \le N \cdot (Q^*)^{n-1} \frac{\omega_{n-1}}{(\log(r_2/r_1) - 2\log(1+\varepsilon))^{n-1}}.$$

Так как это неравенство выполняется при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, в пределе при $\varepsilon \to 0$ приходим к неравенству

$$\log T_0 \le \frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1}\omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}},$$

из которого вытекает оценка

$$\frac{a_1}{a_2} = T_0 \le \exp\left(\frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1}\omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}}\right).$$

Таким образом, положив

$$C_1^* = \max\left\{H^3, \exp\left(\frac{3N \cdot (Q^*)^{n-1}\omega_{n-1}}{c_n \cdot (\log(r_2/r_1))^{n-1}}\right)\right\}, \tag{2.1.22}$$

получаем правую половину неравенства (2.1.5).

Лемма 2.1 доказана.

2.2. Лемма. *Пусть $x_0 \in \Omega$ и $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$. Пусть замкнутое множество $E' \subset \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ удовлетворяет условиям (2.1.1)–(2.1.4) леммы 2.1 при любых $0 < r_1 < r_2 < \sigma_0$ таких, что $r_2/r_1 \le h$. Тогда*

$$H^*(x_0, f) \le C_0^* \tag{2.2.1}$$

с константой $C_0^* \ge 1$, зависящей только от $\{Q^*, h, H, N, n\}$.

Доказательство. Оценки C_1^* и C_2^* в неравенстве (2.1.5) из леммы 2.1 рассматриваем как функции $C_1^*(t)$ и $C_2^*(t)$ от параметра $t = r_2/r_1 \le h$.

Пусть $r_0 > 0$ настолько мало, что $0 < r_0\sqrt{h} < \sigma_0$. Положим

$$b_0(r_0) := \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}; \quad a_0(r_0) := \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\};$$

$$a(r_0) := \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0/\sqrt{h})\};$$

$$b(r_0) := \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0\sqrt{h})\}.$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0$ и $r_2 = r_0\sqrt{h}$, получим неравенство

$$\frac{b_0(r_0)}{b(r_0)} \le C_1^*(\sqrt{h}). \tag{2.2.2}$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0/\sqrt{h}$ и $r_2 = r_0$, получим неравенство

$$\frac{a(r_0)}{a_0(r_0)} \le C_1^*(\sqrt{h}). \tag{2.2.3}$$

Применив лемму 2.1 с $r_1 = r_0/\sqrt{h}$ и $r_2 = r_0\sqrt{h}$, получим неравенство

$$\frac{b(r_0)}{a(r_0)} \le \frac{1}{C_2^*(h)}. \tag{2.2.4}$$

Перемножив неравенства (2.2.2)–(2.2.4), приходим к оценке

$$\frac{b_0(r_0)}{a_0(r_0)} \le C_0^* := \frac{(C_1^*(\sqrt{h}))^2}{C_2^*(h)},$$

зависящей только от $\{Q^*, h, H, N, n\}$ и не зависящей от r_0.

Устремив r_0 к нулю, получаем требуемую оценку (2.2.1):

$$H^*(x_0, f) = \limsup_{r_0\to 0} \frac{b_0(r_0) = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}}{a_0(r_0) = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}} \le C_0^*.$$

Лемма 2.2 доказана.

Рассмотрим отдельно случай, когда x_0 — внутренняя точка в E.

2.3. Утверждение. *Пусть x_0 — внутренняя точка множества E и $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$ выбрано так, что $\overline{U}_0 = \overline{U}(x_0, \sigma_0) \subset E$, отображение $g = f|_{\overline{U}_0}$ инъективно и обратное к нему отображение $\varphi = g^{-1} : \overline{B}(f(x_0), \sigma_0) \to \overline{U}_0$ является слабо (h, H)-квазисимметрическим с $h > 1$, $H \ge 1$. Тогда*

$$H^*(x_0, f) \le H. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Для произвольно малого $0 < r_0 < \sigma_0$ применим утверждение 1.6 к множествам $A := S(f(x_0), r_0) \cup \{f(x_0)\}$ и $A_0 := S(f(x_0), r_0)$. Тогда множество $\varphi(A_0) = \partial U(x_0, r_0)$ лежит в шаровом слое с центром x_0 и толщиной $\log H$, т. е.

$$\frac{\max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}}{\min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, r_0)\}} \le H$$

при всех $0 < r_0 < \sigma_0$. Устремив r_0 к нулю, получим требуемую оценку (2.3.1). Утверждение доказано.

В случае, когда x_0 — изолированная точка множества E или когда $x_0 \in \Omega \setminus E$, справедливо

2.4. Утверждение. *Пусть $x_0 \in \Omega$ и существует такая окрестность U точки x_0, что отображение f является Q^*-квазирегулярным в $U \setminus \{x_0\}$. Тогда f будет Q^*-квазирегулярным в U и*

$$H^*(x_0, f) \le C^* \tag{2.4.1}$$

с константой C^*, указанной в утверждении 1.3 и зависящей только от $\{Q^*, N, n\}$.

Доказательство. Так как f непрерывно в U, то точка x_0 является устранимой изолированной особенностью для отображения f и, следовательно (см. [12, теорема 4.3]), f является Q^*-квазирегулярным в U. Тогда требуемая оценка (2.4.1) вытекает из утверждения 1.3.

§ 3. Теорема об устранимости

3.1. Теорема. *Пусть $f:\Omega\to\Omega'=f(\Omega)$ — непрерывное открытое дискретное отображение открытого множества $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ на открытое множество $\Omega'\subset\mathbb{R}^n$ и $N=\max\{\#f^{-1}(y):y\in\Omega'\}$. Пусть замкнутое относительно Ω множество $E\subset\Omega$ таково, что*

(i) *ограничение $f|_{\Omega\setminus E}$ является K^*-квазирегулярным;*

(ii) *для любого $1\le k\le N$ множество*

$$E_k:=\{x\in E:\#f^{-1}(f(x))=k\}$$

либо пусто, либо любая точка $x_0\in E_k$ имеет окрестность $U\subset\Omega$, в которой ограничение $f|_{U\cap E_k}$ инъективно, и обратное к нему отображение является слабо (h,H)-квазисимметрическим с заданными $h>1$, $H\ge 1$.

Тогда отображение f будет $\widetilde{K}^*$-квазирегулярным в Ω с $\widetilde{K}^*$, зависящим только от $\{K^*,h,H,N,n\}$.

Доказательство. Для $k=1,\dots,N$ положим

$$\Sigma'(k):=\{y\in\Omega':\#f^{-1}(y)=k\}$$

(это множество может быть пустым) и

$$\Omega'(k):=\{y\in\Omega':\#f^{-1}(y)\ge k\}.$$

Покажем, что все $\Omega'(k)$ — открытые множества.

Пусть $y_0\in\Omega'(k)$ и $f^{-1}(y_0)=\{x_1,\dots,x_m\}$ с $m\ge k$. Воспользовавшись леммой 1.1, найдем $0<r_0<\min\{\sigma(x_1),\dots,\sigma(x_m)\}$ и построим канонические нормальные окрестности $U(x_j,r_0)$ (где $j=1,\dots,m$) с попарно не пересекающимися замыканиями. Так как $f(U(x_j,r_0))=B(y_0,r_0)$ для каждого $j=1,\dots,m$, любая точка $y\in B(y_0,r_0)$ имеет прообраз в каждой области $U(x_j,r_0)$, т. е. $\#f^{-1}(y)\ge m\ge k$. Значит, $B(y_0,r_0)\subset\Omega'(k)$. В силу произвольного выбора $y_0\in\Omega'(k)$ это означает, что $\Omega'(k)$ — открытое множество.

Ввиду непрерывности f множества $\Omega(k):=f^{-1}(\Omega'(k))$ при $k=1,\dots,N$ также открытые в Ω, а каждое множество (возможно, пустое)

$$\Sigma(k)=f^{-1}(\Sigma'(k))=f^{-1}(\Omega'(k)\setminus\Omega'(k+1))$$

при $k=1,\dots,N-1$ замкнуто относительно $\Omega(k)$.

Пустое отображение $f:\varnothing\to\varnothing$ является K^*-квазирегулярным с любым $K^*\ge 1$, так как все требования к f в определении 1.2 тривиальным образом выполняются на пустом множестве. Поэтому мы можем «продолжить» отображение f на пустое множество $\Omega(N+1)=\varnothing$. Тогда $\Omega(k)=\Omega(k+1)\cup\Sigma(k)$ для всех $k=1,\dots,N$.

По условию (i) отображение $f|_{\Omega\setminus E}$ является K^*-квазирегулярным. Поэтому (см. 1.3.1)

$$H^*(\Omega\setminus E,f)\le H^*<\infty,$$

где H^* зависит только от $\{K^*,N,n\}$.

Для выполнения индукции по убыванию k от N до 1 нужно доказать следующее утверждение.

(Ind). *Если $H^*(\Omega(k+1), f) \le H^*(k+1) < \infty$, где $H^*(k+1)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$, то*

$$H^*(\Omega(k), f) \le H^*(k) < \infty,$$

где $H^*(k)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$.

Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \Omega(k)$. Так как

$$\Omega(k) = \Omega(k+1) \cup \Sigma(k) = \Omega(k+1) \cup (\Sigma(k) \setminus E) \cup (\Sigma(k) \cap E),$$

реализуется один из случаев:

(j) $x_0 \in \Omega(k+1)$, и тогда $H^*(x_0, f) \le H^*(k+1)$;

(jj) $x_0 \in \Sigma(k) \setminus E$, и тогда $H^*(x_0, f) \le H^*$;

(jjj) $x_0 \in \Sigma(k) \cap E = E_k$.

Чтобы получить оценку для $H^*(x_0, f)$ в случае (jjj), убедимся, что в некоторой канонической нормальной окрестности $U(x_0, \sigma_0)$ при достаточно малом $0 < \sigma_0 < \sigma(x_0)$ для множества $E' = E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ выполняются условия леммы 2.1.

Для точки $y_0 = f(x_0) \in \Sigma'(k)$ имеем $f^{-1}(y_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{k-1}\} \subset \Sigma(k)$. Возьмем $\sigma_0 \in (0, \sigma(x_0))$ настолько малым, что

(a) замыкания канонических нормальных окрестностей $U(x_j, \sigma_0)$ точек $x_j \in f^{-1}(y_0)$ лежат в $\Omega(k)$ и попарно не пересекаются;

(b) ограничение f на множестве $E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ инъективно, и обратное к нему отображение является слабо (h, H)-квазисимметрическим. (Здесь используется условие (ii) в формулировке теоремы).

Так как $x_0 \in E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = E'$, условие (2.1.1) выполнено.

Любая точка $y \in \Sigma'(k) \cap \overline{B}(y_0, \sigma_0)$ имеет в точности k прообразов, по одному в каждой области $\overline{U}(x_j, \sigma_0)$ $(j = 0, 1, \dots, k-1)$. Поэтому для любой точки $x \in \Sigma(k) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$ имеем равенство $f^{-1}(f(x)) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0) = \{x\}$. Это, в частности, верно и для точек $x \in E' \subset \Sigma(k) \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$. Значит, условие (2.1.2) в лемме 2.1 также выполняется.

Так как $E' = E_k \cap \overline{U}(x_0, \sigma_0)$, в силу условия (b) отображение $f|_{E'}$ инъективно и обратное к нему отображение слабо (h, H)-квазисимметрическое. Следовательно, выполнено условие (2.1.3) в лемме 2.1.

На множестве $U(x_0, \sigma_0) \setminus E' \subset \Omega(k+1) \cup (\Sigma(k) \setminus E)$ выполняется оценка

$$H^*(U(x_0, \sigma_0) \setminus E', f) \le \max\{H^*(k+1), H^*\}.$$

Положив $Q^* = \max\{H^*(k+1), H^*\}$, получаем выполнение условия (2.1.4) леммы 2.1. Тогда в силу леммы 2.2 выполняется оценка $H^*(x_0, f) \le C_0^*$ с константой C_0^*, зависящей только от $\{H^*(k+1), H^*, h, H, N, n\}$ (но не от выбора точки $x_0 \in \Sigma(k) \cap E$).

В результате анализа случаев (j)–(jjj), положив

$$H^*(k) := \max\{H^*(k+1), H^*, C_0^*\},$$

получаем оценку

$$H^*(\Omega(k), f) \le H^*(k) < \infty,$$

где $H^*(k)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$.

Таким образом, шаг индукции (Ind) обоснован.

Так как $\Omega(N+1) = \varnothing$ и $\Omega(N) = \Sigma(N)$, утверждение (Ind) с $H^*(N+1) = 1$ дает оценку $H^*(\Omega(N), f) \le H^*(N)$, где $H^*(N)$ зависит только от $\{H^*, h, H, N, n\}$. Это дает базу индукции.

Выполнив индукцию, получаем в итоге оценку

$$H^*(\Omega(1), f) = H^*(\Omega, f) \le H^*(1),$$

зависящую только от $\{H^*, h, H, N, n\}$. С учетом того, что H^* зависит только от $\{K^*, N, n\}$, отображение f является $\widetilde{K}^*$-квазирегулярным с $\widetilde{K}^* = H^*(1)$, зависящим лишь от $\{K^*, h, H, N, n\}$.

Теорема 3.1 доказана.

3.2. Следствие. *Если в условиях теоремы* 3.1 *множество* E *имеет нулевую* n*-мерную меру Лебега, то отображение* f *является* K^**-квазирегулярным на* Ω.

Доказательство. По теореме 3.1 отображение f квазирегулярно. Следовательно, обратная линейная дилатация $H^*(x, f)$ ограничена в Ω и $H^*(x, f) \le K^*$ почти всюду в Ω. Тогда по определению 1.2 отображение f является K^*-квазирегулярным на всем множестве Ω. Следствие доказано.

Замечание. Теорема 3.15 в [9] о θ_1-квазимёбиусовости гомеоморфизма $f : \overline{G} \to \overline{G}'$ областей G, G' в $\overline{\mathbb{R}^n}$, K-квазиконформного в G и θ-квазимёбиусова на границе ∂G, где θ_1 зависит только от $\{K, \theta, n\}$, была получена ранее в [19, следствие 3.2], но только для областей $G \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ со связной границей ∂G.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту, обратившему его внимание на замечание 3.6(1) в [9], что позволило существенно усилить основной результат данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ahlfors L., Beurling A.* Conformal invariants and function-theoretic null-sets // Acta Math. 1950. V. 83. P. 101–129.

2. *Песин И. Н.* Метрические свойства квазиконформных отображений // Мат. сб. 1956. Т. 40, № 3. С. 281–294.

3. *Väisälä J.* On the null-sets for extremal distances // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1962. V. 322. P. 1–22.

4. *Асеев В. В., Сычёв А. В.* О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений // Сиб. мат. журн. 1974. Т. 15, № 6. С. 1213–1227.

5. *Шлык В. А.* Нормальные области по Гретшу и топологически устранимые множества для пространственных гомеоморфизмов // Докл. АН СССР. 1988. Т. 112, № 3. С. 553–555.

6. *Шлык В. А.* Нормальные области и устранимые особенности // Изв. АН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 4. С. 93–117.

7. *Шлык В. А.* Топологически устранимые компакты для пространственных квазиконформных отображений // Дальневост. мат. сб. 1995. № 1. С. 63–67.

8. *Shlyk V. A.* Spherical symmetrization and NED-sets on a hyperplane // J. Math. Sci. New York. 2013. V. 193, N 1. P. 145–150.

9. *Väisälä J.* Quasisymmetry and unions // Manuscripta Math. 1990. V. 68, N 1. P. 101–111.

10. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

11. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. V. 448, N 12. P. 1–40.

12. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. V. 465. P. 1–13.

13. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. V. 488. P. 1–31.

14. *Tukia P., Väisälä J.* Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser A I Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.

15. *Wang Xiantao, Zhou Qingshan.* Quasimöbius maps, weakly quasimöbius maps and uniform perfectness in quasi-metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2017. V. 42, N 1. P. 257–284.

16. *Väisälä J.* Lectures on n-dimentional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).

17. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lect. Notes Math.; V. 1319).

18. *Куратовский К.* Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.

19. *Асеев В. В.* Нормальные семейства топологических вложений // Динамика сплошной среды. 1986. Т. 76. С. 32–42.

Поступила в редакцию 21 октября 2024 г.
После доработки 21 марта 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru, aseevvv@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 510.67

О СЛАБО КОГОЛОГРАФИЧНЫХ СТРУКТУРАХ

Н. А. Баженов,
Б. Касымканулы, А. С. Морозов

Аннотация. Вводится и изучается понятие слабой кологолографичности, обобщающее понятие голографичности и в некотором смысле являющееся двойственным к понятию слабой голографичности. Получены описания слабо кологолографичных полей и абелевых групп, доказана слабая кологолографичность любых ординалов и эквивалентностей, счетных булевых алгебр. Дана полная картина соотношений между свойствами голографичности, слабой голографичности, слабой кологолографичности и счетной категоричности.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.304

Ключевые слова: голографичность, голографичные структуры, слабо голографичные структуры, слабо кологолографичные структуры, категоричные структуры.

В данной работе мы продолжаем начатое в работах [1, 2] изучение возможностей задания алгебраических структур путем «размножения» некоторой конечной части такой структуры с помощью различных классов морфизмов. Можно сказать, что в таких структурах значение истинности предикатов на кортежах элементов можно определять путем некоторого сравнения этих кортежей с подходящим кортежем, все элементы которого содержатся в некотором априори фиксированном конечном эталонном множестве, так называемом *множестве прототипов*. Способы сравнения при этом могут варьироваться. При различных способах сравнения с элементами эталонного множества возникают различные варианты голографичности. Общее название семейства подобных свойств — *голографичность* — было выбрано в силу того, что эти свойства некоторым образом перекликаются со свойством специфических физических изображений — голограмм, в которых часть голограммы может содержать информацию обо всем изображении.

Ранее в упомянутых работах изучались свойства голографичности и слабой голографичности, определения которых будут даны чуть позже. Здесь мы изучаем новое свойство структур, которое мы назвали *слабой кологолографичностью.*

Всюду далее мы подразумеваем, что рассматриваемые нами сигнатуры конечны и состоят только из предикатных символов. Даже в случаях, когда мы говорим об операциях, все равно в соответствующих ситуациях подразумеваем, что на самом деле работаем не с самими операциями, а с их предикатными

Б. Касымканулы и А. С. Морозов поддержаны грантом МОН РК No. AP19677451. А. С. Морозов поддержан также базовым проектом Минобрнауки РФ No. FWNF 2022–0012. Работа Н. А. Баженова поддержана Nazarbayev University Faculty Development Competitive Research Grant 201223FD8823.

представлениями. Максимальное число аргументов сигнатурных символов сигнатуры $\|\sigma\|$ будем называть ее *высотой.* Так, например, высота сигнатуры упорядоченных множеств равна 2, а высота сигнатуры для полей или колец равна 3.

Определение 1. Структура $\mathfrak{A}$ конечной предикатной сигнатуры σ называется *слабо кологолографичной*, если она содержит конечное подмножество M такое, что для любого $S \subseteq \mathfrak{A}$ мощности, не превосходящей высоту сигнатуры σ, существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ такое, что $S \subseteq \varphi(M)$. Множество M при этом называется *множеством прототипов* этой структуры.

Если заменить в определении выше «изоморфное вложение» на «автоморфизм», то получим определение голографичности (в оригинале [1] $\varphi(S) \subseteq M$, но эта формулировка эквивалентна данной). Если в этом же определении заменить $S \subseteq \varphi(M)$ на $\varphi(S) \subseteq M$, то получим определение слабой голографичности [2]. В работе [1] было также отмечено, что любая не более чем счетная счетно категоричная структура конечной сигнатуры является голографичной и приведен пример счетной голографичной, но не счетно категоричной структуры. К сожалению, авторам до сих пор не известны другие примеры таких структур. Поиск новых подобных примеров представляет несомненный интерес.

Очевидно, что голографичность структуры влечет как ее слабую голографичность, так и слабую кологолографичность.

В работах [1, 2] наряду с доказательством некоторых общих свойств голографичных и слабо голографичных структур получены также полные или частичные описания структур, обладающих соответствующим свойством голографичности для классов абелевых групп, линейных порядков, булевых алгебр, эквивалентностей и полей.

Данная работа организована примерно по той же схеме, что и предшествующие ей вышеупомянутые работы [1, 2].

1. Общие свойства

Некоторые общие свойства слабо кологолографичных структур очень похожи на свойства голографичных и слабо голографичных структур из уже упомянутых работ [1, 2].

Следующее утверждение достаточно очевидно.

Предложение 1. *Декартово произведение двух слабо кологолографичных структур слабо кологолографично. При этом в качестве множества прототипов для декартова произведения можно взять декартово произведение множеств прототипов исходных структур.*

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — слабо кологолографичная структура сигнатуры σ и M — ее множество прототипов. Тогда любое ее подмножество мощности строго меньшей чем $\|\sigma\|$ порождает в ней подструктуру мощности не более чем $|M|^{\|\sigma\|}$.*

Доказательство. Пусть $\overline{s}$ — произвольный конечный кортеж из попарно различных элементов структуры $\mathfrak{A}$, длина которого строго меньше, чем $\|\sigma\|$, и пусть S — множество всех его элементов. Обозначим через $\langle S\rangle$ основное множество подструктуры, порожденной в $\mathfrak{A}$ множеством S. Для каждого $a \in \langle S\rangle$ определим кортеж $\psi(a) \in M^{|\overline{s}|}$ следующим образом: сначала фиксируем некоторое изоморфное вложение $\varphi_a : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ со свойством $\varphi_a(M) \supseteq S \cup \{a\}$ (здесь под $\varphi_a^{-1}(\overline{s})$ мы понимаем соответствующий кортеж), а затем полагаем $\psi(a) =$

$\langle\varphi_a^{-1}(\overline{s}),\varphi_a^{-1}(a)\rangle$. Покажем, что ψ инъективно. Предположим, что $\psi(a_0)=\psi(a_1)$. Из равенства

$$\langle\varphi_{a_0}^{-1}(\overline{s}),\varphi_{a_0}^{-1}(a_0)\rangle=\langle\varphi_{a_1}^{-1}(\overline{s}),\varphi_{a_1}^{-1}(a_1)\rangle$$

получаем, что отображения $\varphi_{a_0}^{-1}$ и $\varphi_{a_1}^{-1}$ совпадают на S, а также и $\varphi_{a_0}^{-1}(a_0)=\varphi_{a_1}^{-1}(a_1)$. Далее зафиксируем терм t со свойством $a_1=t(\overline{s})$. Имеем

$$\varphi_{a_0}^{-1}(a_0)=\varphi_{a_1}^{-1}(a_1)=\varphi_{a_1}^{-1}(t(\overline{s}))=t\bigl(\varphi_{a_1}^{-1}(\overline{s})\bigr)=t\bigl(\varphi_{a_0}^{-1}(\overline{s})\bigr)=\varphi_{a_0}^{-1}(t(\overline{s}))=\varphi_{a_0}^{-1}(a_1).$$

Сравнивая начало и конец цепочки равенств, получаем $a_0=a_1$.

Итак, отображение ψ из множества $\langle S\rangle$ разнозначно. Его множество значений содержит не более чем $|M|^{|\overline{s}|+1}$, а значит и не более чем $|M|^{\|\sigma\|}$ элементов. Отсюда получаем, что и мощность множества $\langle S\rangle$ не превосходит $|M|^{\|\sigma\|}$. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что рассмотрение голографичных структур бесконечных сигнатур не имеет смысла. Отметим, что такой же результат верен и для голографичных и слабо голографичных структур (см. [1, 2]).

Теорема 2. *Предположим, что $\mathfrak{A}$ — структура сигнатуры конечной высоты, удовлетворяющая определению слабой коголографичности, в котором опущено требование конечности сигнатуры. Тогда среди ее сигнатурных предикатов можно выбрать такое конечное подмножество, что любой ее сигнатурный предикат совпадает с одним из выбранных.*

Доказательство похоже на доказательства аналогичных результатов о голографичных и слабо голографичных структурах в [1, 2].

Пусть M — множество прототипов для $\mathfrak{A}$, и пусть P — произвольный n-арный сигнатурный предикат нашей структуры. Стрелкой $\hookrightarrow$ будем обозначать изоморфное вложение. Из определения непосредственно следует, что

$$\mathfrak{A}\models P(\overline{x})\leftrightarrow\exists\varphi:\mathfrak{A}\hookrightarrow\mathfrak{A}(\{\overline{x}\}\subseteq\varphi(M)\wedge\varphi^{-1}(\overline{x})\in M^n\cap P).$$

Отсюда следует, что для любых n-арных предикатов P_0 и P_1 из $M^n\cap P_0=M^n\cap P_1$ следует $P_0=P_1$. В силу конечности числа множеств вида $M^n\cap P$ число различных n-арных предикатов в $\mathfrak{A}$ будет конечным. Поскольку наша сигнатура имеет конечную высоту, число попарно различных предикатов в $\mathfrak{A}$ также будет конечным. Теорема доказана.

2. Абелевы группы

Напомним, что группа называется *группой ограниченной экспоненты*, если она удовлетворяет тождеству $x^n=1$ для некоторого натурального $n>0$.

Оказывается, что слабая коголографичность для абелевых групп эквивалентна голографичности.

Теорема 3. *Пусть G — абелева группа. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *G слабо коголографична,*
(2) *G — группа ограниченной экспоненты,*
(3) *G голографична,*
(4) *G слабо голографична.*

Действительно, если группа слабо коголографична, то из теоремы 1 следует, что она является группой ограниченной экспоненты. Следовательно, по [1, теорема 6] она голографична. В силу [2, теорема 8] это свойство эквивалентно слабой голографичности. Далее, из голографичности следует и слабая коголографичность (т. е. п. 1). Теорема доказана.

3. Линейные порядки

Здесь покажем, что класс всех счетных слабо когологографичных порядков весьма широк. Конечные линейные порядки, а также счетные счетно категоричные плотные линейные порядки (как и все счетно категоричные структуры конечной сигнатуры), голографичны и, следовательно, они слабо когологографичны. Слабая когологографичность также сохраняется при произведениях и суммировании конечного числа порядков. Также покажем, что любой ординал (не обязательно счетный) слабо когологографичен. Отметим, что несчетные не слабо когологографичные линейные порядки существуют. В качестве примера можно привести линейный порядок мощности 2^ω, не имеющий нетривиальных изоморфных вложений в самого себя, построенный в работе [3]. Вопрос о существовании счетных не слабо когологографичных порядков остается открытым.

Предложение 2. *Если порядки L_0 и L_1 слабо когологографичны, то порядки $L_0 + L_1$ и $L_0 \times L_1$ также слабо когологографичны.*

Доказательство. Пусть L_0 и L_1 — непересекающиеся слабо когологографичные линейные порядки и M_0, M_1 — их множества прототипов соответственно. Как нетрудно проверить, множества $M_0 \cup M_1$ и $M_0 \times M_1$ годятся в качестве множеств прототипов соответственно для $L_0 + L_1$ и $L_0 \times L_1$. Предложение доказано.

Теорема 4. *Любой ординал слабо когологографичен.*

Доказательство. Ввиду того, что любой ординал α представим в виде конечной суммы вида $\alpha = \omega^{\beta_0} \cdot m_0 + \dots + \omega^{\beta_{k-1}} \cdot m_{k-1}$, где $\beta_0, \dots, \beta_{k-1}$ — ординалы, а $m_0, \dots, m_{k-1} \in \omega$, из предложения 2 следует, что достаточно доказать слабую когологографичность любого ординала вида ω^α, где α — произвольный ординал.

Если γ и β — ординалы и $\gamma \leq \beta$, то через $\beta - \gamma$ будем обозначать такой (единственный) ординал δ, что $\gamma + \delta = \beta$.

Лемма 4.1. *Пусть β — ненулевой ординал. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *β представим в виде ω^α, где α — ординал,*

(2) *для любого $\gamma < \beta$ выполнено $\beta - \gamma = \beta$.*

Доказательство леммы. Докажем импликацию (1) $\to$ (2) индукцией по α. Предположим, что для всех ординалов, меньших чем α, утверждение доказано.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Ординал α непредельный.

Пусть $\alpha = \alpha_0 + 1$. Тогда $\omega^\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot \omega = \omega^{\alpha_0} + \omega^{\alpha_0} + \cdots$ и, следовательно, для подходящего $k < \omega$ выполнено $\gamma < \omega^{\alpha_0} \cdot k$ и наш ординал изоморфно вкладывается в свой сегмент, начинающийся с $\omega^{\alpha_0} \cdot k$. Отсюда получаем $\omega^\alpha \leq \omega^\alpha - \gamma$. Обратное неравенство $\omega^\alpha - \gamma \leq \omega^\alpha$ очевидно. В итоге получаем $\omega^\alpha - \gamma = \omega^\alpha$.

Случай 2. Ординал α предельный.

Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. Пусть $\alpha \neq 0$. Поскольку $\omega^\alpha - \gamma \leq \omega^\alpha$, достаточно убедиться, что $\omega^\alpha \leq \omega^\alpha - \gamma$. Обозначим конфинальность α через $\mathrm{cf}(\alpha)$. Зафиксируем строго возрастающую последовательность ординалов $(\alpha_\delta)_{\delta < \mathrm{cf}(\alpha)}$ такую, что $\alpha = \bigcup\limits_{\delta < \mathrm{cf}(\alpha)} \alpha_\delta$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\alpha_0 = 0$ и для предельных $\beta < \alpha$ выполнено $\alpha_\beta = \bigcup\limits_{\delta<\beta} \alpha_\delta$. В силу только что сделанных предположений получаем

$$\omega^\alpha = \bigcup_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} \omega^{\alpha_\delta} = \bigcup_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} [\omega^{\alpha_\delta}, \omega^{\alpha_\delta+1}).$$

Зафиксируем некоторый ординал $\delta_0 < \mathrm{cf}(\alpha)$ со свойством $\gamma < \omega^{\alpha_{\delta_0}}$. Поскольку $\mathrm{cf}(\alpha)$ является еще и кардиналом, для любого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ будет выполнено $\delta_0 + \tau < \mathrm{cf}(\alpha)$. Далее, заметим, что порядковый тип любого интервала вида $[\omega^{\alpha_\lambda}, \omega^{\alpha_{\lambda+1}})$, $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$, равен $\omega^{\alpha_{\lambda+1}} - \omega^{\alpha_\lambda}$, который, в свою очередь, по предположению индукции равен $\omega^{\alpha_{\lambda+1}}$. Отсюда следует, что для любого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ порядковый тип интервала $[\omega^{\alpha_\tau}, \omega^{\alpha_{\tau+1}})$ меньше либо равен порядкового типа интервала $[\omega^{\alpha_{\delta_0+\tau}}, \omega^{\alpha_{\delta_0+\tau+1}})$. Для каждого $\tau < \mathrm{cf}(\alpha)$ зафиксируем изоморфное вложение

$$\psi_\tau : [\omega^{\alpha_\tau}, \omega^{\alpha_{\tau+1}}) \to [\omega^{\alpha_{\delta_0+\tau}}, \omega^{\alpha_{\delta_0+\tau+1}}).$$

Легко проверить, что отображение $\psi = \bigcup\limits_{\delta<\mathrm{cf}(\alpha)} \psi_\delta$ будет изоморфным вложением из ω^α в $\omega^\alpha - \gamma$, откуда получаем $\omega^\alpha \leq \omega^\alpha - \gamma$.

Докажем импликацию (2) $\to$ (1). Пусть ординал $\beta \neq 0$ обладает свойством (2). Рассмотрим разложение β по степеням ω:

$$\beta = \omega^{\alpha_1} \cdot m_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot m_k,$$

где все m_i — ненулевые натуральные числа и $\alpha_1 > \dots > \alpha_k$ — ординалы. Если $k > 1$ или $m_k > 1$, то β можно представить в виде суммы некоторого ординала $\gamma < \beta$ и ω^{α_k}, причем $\omega^{\alpha_k} = \beta - \gamma < \beta$. Это означает, что $k = 1$ и $m_k = 1$.

Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Любой ординал вида ω^α слабо кологолографичен.*

Доказательство. Если $\alpha = 0$, то утверждение очевидно. В остальных случаях из леммы 4.1 легко получаем, что в качестве множества прототипов можно взять множество, состоящее из первого и второго элементов этого порядка. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

4. Булевы алгебры

Известно, что существуют несчетные нетривиальные булевы алгебры, не допускающие нетривиальных вложений в себя (см. обзор [4]), откуда следует существование не слабо кологографичных булевых алгебр. Тем не менее класс слабо кологографичных булевых алгебр оказывается достаточно широким.

Будем использовать представление булевых алгебр в виде алгебр над порядками: если L — линейный порядок с наименьшим элементом, то через $\mathfrak{B}_L$ будем обозначать булеву алгебру, порожденную в множестве всех подмножеств L замкнутыми слева и открытыми справа интервалами $[a, b)$, $a, b \in L$.

Теорема 5. 1. *Любая булева алгебра вида $\mathfrak{B}_\alpha$ где α — произвольный ординал (не обязательно счетный), слабо кологографична.*

2. *Любая не более чем счетная булева алгебра слабо кологографична.*

Доказательство. Докажем п. 1. Нам понадобится следующая очевидная

Лемма 5.1. *Пусть $\varphi : L_0 \to L_1$ — изоморфное вложение линейных порядков, обладающих наименьшими элементами и переводящее наименьший элемент из L_0 в наименьший элемент из L_1. Тогда отображение*

$$[a, b) \mapsto [\varphi(a), \varphi(b)), \quad a, b \in L_0,$$

однозначно продолжается до изоморфного вложения $\overline{\varphi}$ из $\mathfrak{B}_{L_0}$ в $\mathfrak{B}_{L_1}$.

Под *разбиением единицы* в булевой алгебре будем понимать любое семейство вида $(a_i)_{i<k}$, состоящее из ее ненулевых элементов, такое, что при $i \neq j$ выполнено $a_i \cap a_j = 0$, а $\bigcup\limits_{i<k} a_i = 1$.

Лемма 5.2. *Пусть $(a_i)_{i<8}$ — разбиение единицы в булевой алгебре $\mathfrak{B}$ и для любого разбиения единицы $(b_j)_{j<8}$ этой алгебры существует изоморфное вложение $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ такое, что*

$$\varphi(\{a_i \mid i < 8\}) = \{b_i \mid i < 8\}.$$

Тогда $\mathfrak{B}$ слабо кологографична и булева алгебра $\mathfrak{M}$, порожденная множеством $\{a_i \mid i < 8\}$, является множеством ее прототипов.

Доказательство леммы. Пусть $x_0, x_1, x_2 \in \mathfrak{B}$. Эти элементы порождают в $\mathfrak{B}$ конечную подалгебру, содержащую не более восьми атомов. Из существования разбиения единицы из восьми элементов следует, что в нашей алгебре имеется достаточно элементов, чтобы расширить эту подалгебру до подалгебры $\mathfrak{B}'$ с ровно восемью атомами. Семейство этих атомов образует разбиение единицы. Возьмем изоморфное вложение φ как в условии леммы, переводящее разбиение $(a_i)_{i<8}$ в семейство атомов алгебры $\mathfrak{B}'$. Тогда $\varphi(\mathfrak{M}) \supseteq \{x_0, x_1, x_2\}$, что и требовалось. Лемма доказана.

В дальнейшем через $\mathfrak{B} \restriction a$ будем обозначать ограничение булевой алгебры $\mathfrak{B}$ на ее элемент a.

Лемма 5.3. *Если $\mathfrak{B}$ —булева алгебра $a \in \mathfrak{B}$ и булевы алгебры $\mathfrak{B} \restriction a$ и $\mathfrak{B} \restriction \overline{a}$ слабо кологографичны, то $\mathfrak{B}$ слабо кологографична.*

Доказательство леммы. Следует из предложения 1 и хорошо известного разложения $\mathfrak{B} \cong \mathfrak{B} \restriction a \times \mathfrak{B} \restriction \overline{a}$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 5.4. *Пусть $L_1, \ldots, L_k$ — линейные порядки с наименьшими элементами. Тогда $\mathfrak{B}_{L_1+\cdots+L_k} \cong \mathfrak{B}_{L_1} \times \cdots \times \mathfrak{B}_{L_k}$.*

Лемма 5.5. *Для любого ординала α булева алгебра $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ слабо кологографична.*

Доказательство леммы. Для $\alpha = 0$ лемма очевидна.

Пусть теперь $\alpha > 0$. Пусть $0 < 1 < \ldots < 7$ — первые 8 элементов ординала ω^α. Покажем, что множество элементов конечной подалгебры, порожденной в $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ множеством $A = \{a_i \mid i < 8\}$, где

$$a_i = \begin{cases} [i, i+1) & \text{при } i < 7, \\ [7, \omega^\alpha) & \text{при } i = 7, \end{cases}$$

годится в качестве множества прототипов. Заметим, что $(a_i)_{i<8}$ — разбиение единицы в алгебре $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$. Для доказательства достаточно проверить для этого разбиения выполнение условий леммы 5.2.

Пусть $(b_i)_{i<8}$ — произвольное разбиение единицы в нашей алгебре. Каждый из элементов b_i есть объединение конечного семейства попарно не пересекающихся непустых интервалов вида $[a, b) \subseteq \omega^\alpha$, где $a, b \in \omega^\alpha \cup \{\infty\}$. Пусть $L_0, \dots, L_k$ — список всех таких интервалов, участвующих в образовании элементов b_i в порядке их следования. Заметим, что L_k как самый правый из них имеет вид $[a, \omega^\alpha)$, где $a < \omega^\alpha$. Без ограничения общности рассуждений считаем, что $L_k \subseteq b_7$. По лемме 5.4 имеем $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha} \cong \mathfrak{B}_{L_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L_k}$. Переставим элементы последовательности $L_0, \dots, L_k$, сначала расположив в порядке следования интервалы, содержащиеся в b_0, потом в порядке следования интервалы, содержащиеся в b_1, и т. д. В результате получим новую последовательность интервалов $L'_0, \dots, L'_k$ со свойством $L'_k = L_k$.

Имеем последовательность естественных изоморфизмов

$$\mathfrak{B}_{L_0+\dots+L_k} \cong \mathfrak{B}_{L_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L_k} \cong \mathfrak{B}_{L'_0} \times \dots \times \mathfrak{B}_{L'_k} \cong \mathfrak{B}_{L'_0+\dots+L'_k}.$$

Обозначим композицию этих изоморфизмов из $\mathfrak{B}_{L_0+\dots+L_k}$ на $\mathfrak{B}_{L'_0+\dots+L'_k}$ через φ. Нетрудно видеть, что в L существуют точки $c_0, c_1, \dots, c_7$ такие, что c_0 — наименьший элемент в L, $c_0 < c_1 < \dots < c_7$, $\varphi(b_i) = [c_i, c_{i+1})$ для всех $i = 0, \dots, 6$ и $\varphi(b_7) = [c_7, \infty)$

В силу леммы 4.1 промежуток $[c_7, \infty)$ в L, а также $[7, \infty)$ в ω^α изоморфны ω^α. Зафиксируем изоморфизм $\theta_0 : [7, \infty) \to [c_7, \infty)$ между этими интервалами и расширим его до изоморфного вложения θ из ω^α в L, положив

$$\theta(x) = \begin{cases} c_x, & \text{если } x < 7, \\ \theta_0(x), & \text{если } x \geq 7. \end{cases}$$

Заметим, что θ сохраняет наименьший элемент. По лемме 5.1 θ продолжается до изоморфного вложения $\widehat{\theta} : \mathfrak{B}_{\omega^\alpha} \to \mathfrak{B}_L$. При этом $\widehat{\theta}([i, i+1)) = [c_i, c_{i+1})$ при всех $i < 7$ и $\widehat{\theta}([7, \omega^\alpha)) = [c_7, \infty)$. Остается заметить, что $\varphi^{-1}\widehat{\theta}$ также является изоморфным вложением из $\mathfrak{B}_{\omega^\alpha}$ в себя и $\varphi^{-1}\widehat{\theta}(a_i) = b_i$ для всех $i < 8$.

Лемма доказана.

Теперь все готово для завершения доказательства п. 1 теоремы. Пусть α — произвольный ординал. Представим его в виде

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_l} \cdot k_l$$

для подходящих $l, k_0, \dots, k_l < \omega$ и ординалов $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_k$. Имеем

$$\mathfrak{B}_\alpha = \mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_0} \cdot k_0 + \omega^{\alpha_1} \cdot k_1 + \dots + \omega^{\alpha_k} \cdot k_l} \cong (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_0}})^{k_0} \times (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_1}})^{k_1} \times \dots \times (\mathfrak{B}_{\omega^{\alpha_k}})^{k_l}.$$

Теперь п. 1 нашей теоремы следует из лемм 5.4, 5.5 и предложения 1.

Докажем п. 2 теоремы. Пусть $\mathfrak{B}$ — не более чем счетная булева алгебра. Поскольку все счетные суператомные булевы алгебры имеют вид $\mathfrak{B}_\alpha$, где α — подходящий счетный ординал (см. [5]), все не более чем счетные суператомные булевы алгебры слабо когологрaфичны. Если число ее атомов конечно, то она счетно категорична и, следовательно, слабо когологрaфична. Остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{B}$ — счетная не суператомная алгебра с бесконечным числом атомов. Зафиксируем в ней 7 атомов, которые обозначим через a_i, $i < 7$, и положим $a_7 = 1 \cap \overline{\bigcup_{i<7} a_i}$. Покажем, что разбиение единицы $(a_i)_{i<8}$ удовлетворяет условиям леммы 5.2, откуда и будет следовать слабая когологрaфичность $\mathfrak{B}$. Пусть $(b_i)_{i<8}$ — произвольное разбиение единицы в $\mathfrak{B}$. Среди алгебр $\mathfrak{B} \upharpoonright b_i$ имеется не суператомная булева алгебра, поскольку в противном случае сама алгебра $\mathfrak{B}$, изоморфная $\mathfrak{B} \upharpoonright b_0 \times \cdots \times \mathfrak{B} \upharpoonright b_7$, была бы суператомной. Без ограничения общности считаем, что алгебра $\mathfrak{B} \upharpoonright b_7$ не суператомна и, следовательно, содержит счетную безатомную булеву подалгебру. Для каждого $i < 7$ пусть φ_i будет (единственным) изоморфным вложением из двухэлементной алгебры $\mathfrak{B} \upharpoonright a_i$ в алгебру $\mathfrak{B} \upharpoonright b_i$, а в качестве φ_7 зафиксируем какое–нибудь изоморфное вложение алгебры $\mathfrak{B} \upharpoonright a_7$ в $\mathfrak{B} \upharpoonright b_7$, которое существует в силу того, что последняя содержит счетную безатомную булеву подалгебру, в которую, как хорошо известно, изоморфно вкладывается любая счетная булева алгебра. Теперь определим вложение $\varphi : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ как

$$\varphi(x) = \bigcup_{i<8} \varphi_i(x \cap a_i).$$

Очевидно, что $\varphi(a_i) = b_i$ для всех $i < 8$.

Теорема доказана.

5. Эквивалентности

Здесь под эквивалентностью будем понимать в зависимости от ситуации как предикатную структуру, единственным сигнатурным отношением которой является эта эквивалентность, так и само это отношение. Эти два понятия незначительно отличаются: всякая структура должна иметь непустое основное множество, в то время как сами эквивалентности можно рассматривать и на пустом множестве. Тем не менее мы надеемся, что это не приведет к недоразумениям. Докажем следующую теорему.

Теорема 6. *Любая эквивалентность слабо когологрaфична.*

Нам понадобится следующее описание голографичных эквивалентностей.

Теорема 7 [2, теорема 11]. *Произвольное отношение эквивалентности голографично тогда и только тогда, когда множество мощностей его классов конечно.*

Доказательство теоремы 6. Следующая лемма очевидна.

Лемма 7.1. *Пусть E_0 и E_1 — слабо когологрaфичные эквивалентности на непересекающихся множествах S_0 и S_1 соответственно. Тогда эквивалентность $E = E_0 \cup E_1$ также слабо когологрaфична.*

Пусть E — произвольная эквивалентность. Ее можно представить в виде $E = E_0 \cup E_1$, где E_0 и E_1 — эквивалентности на непересекающихся множествах такие, что все классы E_0 одноэлементны, а все классы E_1 содержат как минимум два элемента. Эквивалентность E_0 либо пуста, либо по теореме 7 слабо когологрaфична. Поэтому в силу леммы 7.1 достаточно доказать теорему для случая, когда все классы эквивалентности E содержат как минимум два элемента.

Зафиксируем некоторое взаимно однозначное отображение $\gamma \mapsto A_\gamma$ из подходящего ординала α на множество всех классов эквивалентности E такое, что выполняется условие

$$\gamma_0 \leq \gamma_1 \to |A_{\gamma_0}| \leq |A_{\gamma_1}|. \qquad (1)$$

Пользуясь тем, что по теореме 4 ординал α слабо когологрaфичен, зафиксируем в α множество прототипов M_0, и в каждом классе A_γ, $\gamma \in M$, также зафиксируем не равные между собой элементы a_γ и b_γ. Покажем, что множество $M = \{a_\gamma, b_\gamma \mid \gamma \in M_0\}$ годится в качестве множества прототипов для E.

Проверим выполнимость определения слабой кологолографичности для E. Возьмем произвольные x_0 и x_1, $x_0 \neq x_1$, и рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $\langle x_0, x_1\rangle \notin E$.

Возьмем ординалы $\gamma_0, \gamma_1 < \alpha$ такие, что $x_0 \in A_{\gamma_0}$ и $x_1 \in A_{\gamma_1}$. Очевидно, что $\gamma_0 \neq \gamma_1$. Пусть $\psi : \alpha \to \alpha$ — изоморфное вложение α в себя со свойством $\psi(M_0) \supseteq \{\gamma_0, \gamma_1\}$. Пусть $\delta_0 = \psi^{-1}(\gamma_0)$ и $\delta_1 = \psi^{-1}(\gamma_1)$. Поскольку ψ — вложение ординалов, для всех $\delta < \alpha$ справедливо $\delta \leq \psi(\delta)$, откуда в силу (1) также имеем $|A_\delta| \leq |A_{\psi(\delta)}|$. Ввиду этого для каждого $\delta < \alpha$ можно зафиксировать вложение $\psi_\delta : A_\delta \to A_{\psi(\delta)}$, удовлетворив при этом условия $\psi_{\delta_0}(a_{\delta_0}) = x_0$ и $\psi_{\delta_1}(a_{\delta_1}) = x_1$. Очевидно, что отображение $\varphi = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \psi_\delta$ является изоморфным вложением E в себя со свойством $\varphi(M) \supseteq \{x_0, x_1\}$.

Случай 2. $\langle x_0, x_1\rangle \in E$.

Пусть ординал $\gamma < \alpha$ таков, что $x_0, x_1 \in A_\gamma$. Возьмем изоморфное вложение $\psi : \alpha \to \alpha$ со свойством $\psi(M_0) \supseteq \{\gamma\}$. Пусть $\mu = \psi^{-1}(\gamma)$. Так же, как и в случае 1, можно для каждого $\delta < \alpha$ зафиксировать вложение $\psi_\delta : A_\delta \to A_{\psi(\delta)}$, удовлетворив при этом условия $\psi_\mu(a_\mu) = x_0$ и $\psi_\mu(b_\mu) = x_1$. Тогда отображение $\varphi = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \psi_\delta$ является изоморфным вложением E в себя со свойством $\varphi(M) \supseteq \{x_0, x_1\}$.

Тем самым мы доказали существование требуемого в определении изоморфного вложения, а вместе с этим и саму теорему.

6. Поля

Теорема 8. *Пусть F — поле. Тогда следующие условия эквивалентны:*
(1) *F — конечное поле,*
(2) *F слабо кологолографично,*
(3) *F слабо голографично,*
(4) *F голографично.*

Доказательство. Эквивалентность пп. (1), (3) и (4) доказана в [2, теорема 9]. Остается доказать эквивалентность пп. (1) и (2).

Импликация (1)⇒(2) очевидна. Докажем импликацию (2)⇒(1). Пусть F — слабо кологолографичное поле. Тогда его характеристика конечна, так как в противном случае множество $\{1\}$ порождало бы бесконечную подструктуру. По той же самой причине поле F не может иметь трансцендентных элементов, и это означает, что все элементы поля F алгебраичны над его простым подполем.

Из теоремы 1 следует, что порядки всех элементов F относительно умножения ограничены в совокупности, т. е. существует натуральное число n со свойством $x^n = 1$ для всех $x \neq 0$. В силу этого степени всех минимальных многочленов для элементов из F над его простым подполем также ограничены в совокупности, а это означает, что такие многочлены образуют конечное множество. Поскольку любой многочлен имеет лишь конечное число корней, само поле F конечно. Теорема доказана.

7. Соотношения между типами голографичности

Обозначим через H класс всех счетных голографичных структур, WH — класс всех счетных слабо голографичных структур, WCH — класс всех счетных слабо кологографичных структур, а C — класс всех счетных счетно категоричных структур конечной предикатной сигнатуры.

Картину взаимного расположения данных классов дает следующая

Теорема 9. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{array}{l} \mathrm{WH} \supset \mathrm{H} \subset \mathrm{WCH}, \quad \mathrm{WCH} \nsubseteq \mathrm{WH}, \quad \mathrm{WH} \nsubseteq \mathrm{WCH} \\ \phantom{\mathrm{WH} \supset{}} \cup \\ \phantom{\mathrm{WH} \supset{}} \mathrm{C} \end{array}$$

причем все вышеупомянутые включения строгие.

Доказательство. Справедливость включений H $\subseteq$ WH, WCH и C $\subseteq$ H очевидна. Докажем, что эти включения строгие, т. е. что обратные к ним включения не выполнены.

Включение WH $\subseteq$ H не имеет места, поскольку любая счетная атомная не суператомная алгебра слабо голографична (см. [2, теорема 5]), содержит бесконечное число атомов и поэтому не является голографичной (см. [1, теорема 4]).

Включение WCH $\subseteq$ H не имеет места, поскольку любая счетная булева алгебра с бесконечным количеством атомов по теореме 5 слабо кологографична, но не голографична в силу [1, теорема 4].

Пример, показывающий, что H $\nsubseteq$ C, построен в [1, теорема 2].

В качестве примера структуры, доказывающего соотношение WCH $\nsubseteq$ WH, можно взять любую счетную суператомную булеву алгебру, например $\mathfrak{B}_\omega$. Действительно, она принадлежит классу WCH согласно п. 2 теоремы 5 и не принадлежит классу WH по теореме 5 из [2], утверждающей, что любая счетная булева алгебра слабо голографична тогда и только тогда, когда она не суператомна.

Для доказательства оставшегося утверждения WH $\nsubseteq$ WCH построим структуру $\mathscr{A}$ сигнатуры $\sigma = \{R^2, E^2\}$, являющуюся слабо голографичной, но не слабо кологографичной. Стоит отметить, что эта структура имеет вычислимую копию.

Напомним, что счетный неориентированный граф без петель G является *случайным графом* (random graph) в том и только том случае, когда для произвольных конечных множеств $X, Y \subseteq \mathrm{dom}(G)$ таких, что $X \cap Y = \varnothing$, в графе G существует вершина $v \notin X \cup Y$ такая, что v соединена ребром с каждой вершиной из X и v не соединена ребром ни с какой вершиной из Y (см., например, теорему 6.4.4 в [6]).

Зададим искомую структуру $\mathscr{A}$ по следующим правилам.

• Структура $(\mathrm{dom}(\mathscr{A}), R)$ есть неориентированный граф без петель.

• Отношение E является эквивалентностью на множестве $\mathrm{dom}(\mathscr{A})$, имеющей счетное число классов эквивалентности. Пусть $[a_0]_E$, $[b_0]_E$, $[a_1]_E$, $[b_1]_E, \ldots$ — это перечисление без повторений множества всех классов эквивалентности E.

• Если элементы x и y лежат в разных E-классах, то $\mathscr{A} \models \neg R(x, y)$.

• Для каждого $k \in \omega$ подструктура $([a_k]_E, R\restriction[a_k]_E)$ изоморфна случайному графу.

• Для каждого $k \in \omega$ подструктура $([b_k]_E, R\restriction[b_k]_E)$ есть цикл длины $k + 3$.

Отметим следующее свойство структуры $\mathscr{A}$: если $x \notin [b_k]_E$, то подграф $([x]_E, R\restriction[x]_E)$ не вкладывается изоморфно в $([b_k]_E, R\restriction[b_k]_E)$.

(1) Структура $\mathscr{A}$ слабо голографична. Действительно, множество прототипов M можно построить следующим образом. Выберем произвольные элементы $c, d \in [a_0]_E$ такие, что $a_0 \notin \{c, d\}$ и $\mathscr{A} \models R(a_0, c) \wedge \neg R(a_0, d)$. Полагаем $M = \{a_0, c, d, a_1\}$.

Опираясь на свойства случайного графа, нетрудно показать, что для любой пары вершин x, y из $\mathscr{A}$ существует изоморфное вложение $\varphi\colon \mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}$ такое, что $\varphi(\{x, y\}) \subset M$.

(2) Структура $\mathscr{A}$ не является слабо коголографичной. Действительно, предположим, что M — конечное множество прототипов, свидетельствующее о слабой коголографичности для $\mathscr{A}$. Тогда выберем произвольное b_k такое, что $M \cap [b_k]_E = \varnothing$.

Пусть φ — произвольное изоморфное вложение из $\mathscr{A}$ в $\mathscr{A}$, и пусть $b_k = \varphi(a)$ для некоторого a. Нетрудно понять, что $a \in [b_k]_E$. Отсюда вытекает, что $\{b_k\} \not\subseteq \varphi(M)$, приходим к противоречию с предположением о слабой коголографичности.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Касымканулы Б., Морозов А. С.* О голографичных структурах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 401–410.
2. *Касымканулы Б., Морозов А. С.* О слабо голографичных структурах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1276–1289.
3. *Dushnik B., Miller E. W.* Concerning similarity transformations of linearly ordered sets // Bull. Am. Math. Soc. 1940. V. 46, N 4. P. 322–326.
4. *van Douwen E.K., Monk J. D., Rubin M.* Some questions about Boolean algebras // Algebra Univers. 1980. V. 11. P. 220–243.
5. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.
6. *Hodges W.* A shorter model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1997.

Поступила в редакцию 27 ноября 2024г.
После доработки 22 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Баженов Николай Алексеевич (ORCID 0000-0002-5834-2770)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`bazhenov@math.nsc.ru`

Касымканулы Борибай (ORCID 0000-0002-5112-034X)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилёва,
ул. Пушкина 11, Астана 010008, Казахстан
`boribay@mail.ru`

Морозов Андрей Сергеевич (ORCID 0000-0001-8647-5629)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`morozov@math.nsc.ru`

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 519.6+515.127

ОБ АСИМПТОТИКЕ АЛЕКСАНДРОВСКОГО n–ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА АНАЛИТИЧЕСКИХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. Н. Белых

Аннотация. Найдена асимптотика александровского n-поперечника компакта аналитических периодических функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных периодических функций.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.305

Ключевые слова: компакт, аналитическая функция, топологическая размерность, александровский n-поперечник.

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию [1]. Причем содержательное представление об X извлекается средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. Наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в метрический компакт, приводит к понятию александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$, который определяется, в свою очередь, как нижняя грань ε-сдвигов X в компакт топологической размерности, не большей n [2, гл. 1, 2, п. 4].

Асимптотика величины $\alpha_n(X)$ указывает точность, с которой компакт X исчерпывается (с ростом n) компактами топологической размерности n. При этом скорость убывания $\alpha_n(X)$ к нулю сравнивается с числом n свободных числовых параметров конечномерного описания X: она тем выше, чем бо́льший «запас» гладкости X. Для компактов X функций конечной и бесконечной гладкости асимптотики различаются принципиально: если в первом случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю происходит как некоторая фиксированная степень числа $1/n$, то во втором случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю осуществляется быстрее любой конечной степени $1/n$, т. е. экспоненциально (см. [2]).

Оказавшись глубоким математическим фактом, понятие александровского n-поперечника подвигло К. И. Бабенко (см. [3, гл. 3, разд. 2, п. 5]) к переосмыслению самого статуса значимости для цифровых вычислений дополнительной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задачи. Последнее привело к открытию принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных методов, практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$. В результате экстраординарная

Работа выполнена в рамках государственного задания задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

гладкость компакта X, прежде находившаяся на периферии насущных интересов компьютерных вычислений, становится их активным персонажем. Причем пик эффективности методов — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классе бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов насыщаемых: конечно разностных, конечных элементов, квадратур и др. [1, 3].

Существуют классы задач (например, эллиптические [4]), компакты X решений которых состоят из аналитических функций и задаются указанием мажоранты роста их k-х производных при $k \to \infty$. Причем формулировка основных допущений на рост мажоранты становится одним из способов их классификации.

В работе продолжено (см. [5]) изучение оценок снизу александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ компакта X бесконечно гладких функций; в частности, найдена асимптотика $\alpha_n(X, C)$ компакта X аналитических периодических функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных периодических функций. Получение результата основано на предложенной ранее автором характеризации класса C^∞-гладких функций [6], апеллирующей к его наилучшему чебышёвскому описанию тригонометрическими многочленами. Идея привлечения геометрического подхода для вычисления асимптотики $\alpha_n(X, C)$ сыграла здесь определяющую роль. К сожалению, используемый метод не удалось распространить на более общий класс компактов C^∞-гладких функций на конечном отрезке.

Отметим, что вычисление асимптотик александровских n-поперечников $\alpha_n(X, C)$ для различных классов C^∞-гладких функций — задача непростая, поддающаяся решению лишь для небольшого числа случаев (см. [2, гл. 4, разд. 3, п. 3; 5; 7, гл. 4, разд. 4.5.4]).

Обратим внимание, что предлагаемый метод получения оценок александровского n-поперечника компакта аналитических функций никак не использует ни аналитическое продолжение функций, ни представление их интегралом Коши.

1. Компакт: ε-покрытие, размерность, александровский n-поперечник

Пусть X — компакт в банаховом пространстве B и Υ — его открытое конечное покрытие. Пусть $m \geq 0$ — целое число. Покрытие Υ имеет *кратность* m, если любые $m+1$ его элементов не пересекаются и существует m элементов, имеющих непустое пересечение. Ранее, говоря о финитизации компакта X, мы несколько неопределенно характеризовали ее, указывая лишь на то, что элементы X определяются конечным набором числовых независимых параметров. Между тем совсем не очевидно, что идею числа измерений (или размерности) можно математически сформулировать для столь общих объектов, как функциональный компакт X. Однако понятие кратности делает восприятие числа измерений внутренне непротиворечивым. Нетривиальность этого обстоятельства (понятия размерности) подчеркивает следующее

Определение (см. [7, п. 1.7.3]). Компакт X *имеет топологическую размерность* m ($\dim X = m$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие X открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$ и кратности $\leq m+1$, но для достаточно малого ε уже не существует открытого ε-покрытия, кратность которого не превосходит m.

Итак, с каждым ε-покрытием компакта X всегда можно связать некое натуральное число, а именно число m, для которого в X существует точка, принадлежащая m различным элементам Υ. Указанное определение вполне соответствует интуитивному восприятию размерности, например, куба $\mathbb{I}^m$ с ребром $d > 0$:

$$\mathbb{I}^m \equiv \mathbb{I}^m_d = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m : |\xi_r| \leq d/2, r = 0, 1, \ldots, m-1\}, \tag{1.1}$$

поскольку его содержательность подкреплена теоремой Лебега — Брауэра: $\dim \mathbb{I}^m = m$.

Александровский m-поперечник компакта X определяется так [2, гл. 1, разд. 2, п. 4]:

$$\alpha_m(X, B) = \inf_{(X^m,\nu)} \sup_{f \in X \subset B} \|f - \nu(f)\|, \tag{1.2}$$

где inf берется по всевозможным парам (X^m, ν), состоящим из лежащего в банаховом пространстве B компакта X^m топологической размерности m и непрерывного отображения $\nu : X \to X^m$.

Пусть $m \geq 0$ — целое число и

$$l^m_\infty = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbb{R}^m,\ |\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max_{r=0,1,\ldots,m-1} |\,\xi_r|\}.$$

Справедлива следующая важная для дальнейшего (см. [1])

Лемма 1. *Если $\mathbb{I}^m_d$ — куб с длиной ребра d и $\dim \mathbb{I}^m_d = m$, то $\alpha_{m-1}(\mathbb{I}^m_d, l^m_\infty) = d/2$.*

Согласно следствию теоремы 1.4 из работы [1] справедливость леммы вытекает из теоремы 2 (см. [7, п. 4.1.1]) и следствия теоремы 4 (см. [7, п. 4.1.2]).

2. Периодический случай: основные факты, определения и результат

Проведению оценок александровского m-поперечника компакта аналитических функций предпошлем ряд вспомогательных определений и результатов, связанных непосредственно с их приближением многочленами. Начнем с определений.

Вещественная бесконечно дифференцируемая на конечном отрезке S функция $\varphi(t)$ называется *аналитической*, если для каждой точки t этого отрезка имеет место разложение $\varphi(t)$ в сходящийся ряд Тейлора:

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{(k)}(s)}{k!}(t-s)^k, \quad t, s \in S.$$

Критерием аналитичности функции $\varphi(t)$ служит следующая классическая

Теорема 1. *Для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(s)$ была аналитической на конечном замкнутом отрезке S, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие положительные константы c и A, что*

$$|\varphi^{(k)}(s)| \leq cA^k k^k \quad (s \in S) \quad c > 0,\ A > 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.1}$$

Пусть $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси $\mathbb{R}$ функций с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{t \in [0,2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности $S \equiv [0, 2\pi]$

функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом их продолжении на всю ось $\mathbb{R}$; пусть $C^k \equiv C^k[S]$ — пространство таких непрерывно $k \geq 0$ раз дифференцируемых на S периодических функций; через $C^\infty \equiv C^\infty[S]$ обозначим класс 2π-периодических бесконечно дифференцируемых на единичной окружности S функций.

Пространство аналитических 2π-периодических на S функций обозначим через $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$. Всякую $\varphi(t)$ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ отождествим с ее тригонометрическим рядом

$$\varphi(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty}(c_{2p}\cos pt + c_{2p-1}\sin pt) \equiv \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \pi_p(t). \tag{2.2}$$

Ряд (2.2) является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ и потому

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt, \quad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1}\end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\begin{pmatrix}\cos pt \\ \sin pt\end{pmatrix}dt \quad \forall p \geq 1.$$

Пусть $\mathscr{T}^m \subset \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс тригонометрических многочленов порядка $\leq m$ и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m \in \mathscr{T}^m} \|\varphi - \iota_m\|, \quad m \geq 0, \ \varphi \in C. \tag{2.3}$$

Здесь inf осуществляется всегда на некотором элементе (многочлене) из $\mathscr{T}^m$.

Классический подход к описанию C^k-гладких периодических функций φ основан на использовании неравенств Фавара — Ахиезера — Крейна для $k \geq 0$ (см. [3, гл. 3, разд. 1, п. 5]):

$$e_m(\varphi) \leq \mathscr{K}_k \cdot \frac{\|\varphi^{(k)}\|}{m^k}, \ m \geq 0, \quad \mathscr{K}_k \equiv \frac{4}{\pi}\sum_{\nu\,=\,0}^{+\infty}\frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Пусть $\{G(k)\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Согласно известной теоремы Арцела множество периодических функций

$$\widetilde{K}_G^\infty \equiv \{\varphi \in \widetilde{\mathbb{A}}^\infty : \|\varphi\| \leq G(0), \ \|\varphi^{(k)}\| \leq G(k), \forall k > 0\} \tag{2.4}$$

является компактом в пространстве C непрерывных на окружности S функций.

В работе [6] дано описание класса 2π-периодических C^∞-гладких функций (не обязательно аналитических!) в терминах функции

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leq r < 1, \\ \inf\limits_{k\geq 0}\frac{G(k)}{r^k} & \text{при} \quad r \geq 1, \end{cases}$$

Теорема 2 (см. [6]). *При $r \geq 1$ функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $r \to \infty$. При этом $\mu(r)$ стремится к нулю быстрее любой конечной степени числа r, т. е. для любого $p \geq 0$ верно равенство* $\lim\limits_{r\to\infty} r^p\mu(r) = 0$.

Обратим внимание, что в определении функции $\mu(r)$ знак inf всегда можно заменить на min и потому согласно неравенству Фавара — Ахиезера — Крейна имеем

$$\mu(r) = \min_{k\geq 0}\frac{G(k)}{r^k}, \quad \text{отсюда} \quad e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m). \tag{2.5}$$

Поскольку компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ задается (см. (2.4)) указанием мажоранты $G(k)$ роста k-х производных его элементов и при этом вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (2.2), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $\widetilde{K}_G^\infty$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей этот компакт $\widetilde{K}_G^\infty$?

Лемма 2 [5]. *Если функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$, то*

$$|c_0| \le 2G(0), \quad |c_{2p-1}| \le 2\mu(p), \quad |c_{2p}| \le 2\mu(p) \quad \forall p \ge 1.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ удовлетворяют

$$|c_0| \le G(0), \quad |c_{2p-1}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad |c_{2p}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2} \quad \forall p \ge 1,$$

то функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$ (см. (2.4)).

Отождествив компакт (2.4) с множеством тригонометрических рядов (2.2), мы создаем конструктивный аппарат для получения нужных оценок.

Действительно, для функции $\mu(r)$ из класса $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$, т. е. когда $G(k) = cA^k k^k$, справедливы следующие двусторонние оценки (подробности см. в [6]):

$$ce^{-\varrho r} \le \mu(r) \le ce^{0.5eA}e^{-\varrho r}, \quad \varrho = 1/(Ae). \tag{2.6}$$

Сложность внутреннего устройства класса C^∞-гладких функций на конечном отрезке S свяжем с поведением (с ростом параметра m) функции

$$\gamma(m) = \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)}, \quad m \ge 0.$$

Для аналитического класса $\widetilde{\mathbb{A}}^\infty \subset C^\infty$ справедлив следующий простой факт:

$$\begin{aligned}\gamma(m) \equiv \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} &= \sum_{r=0}^{m} e^{-\varrho(m-r)} = e^{-\varrho m}\sum_{r=0}^{m} e^{\varrho r} \\ &= e^{-\varrho m}(1 + e^{\varrho} + e^{2\varrho} + e^{3\varrho} + \ldots + e^{m\varrho}) \\ &= \frac{e^{\varrho} - e^{-\varrho m}}{e^{\varrho} - 1} \le \frac{e^{\varrho}}{e^{\varrho} - 1} = \Bigl(1 + \frac{1}{e^{\varrho} - 1}\Bigr) \equiv \varkappa, \quad \varrho = \frac{1}{Ae}.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Приближение (2.3) периодических функций тригонометрическими многочленами порядка не выше $m-1$ определяет подпространство $\mathscr{T}^{m-1} \subset C$ тригонометрических многочленов топологической размерности $\dim \mathscr{T}^{m-1} = 2m-1$.

Оценка сверху для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ (см. (1.2), (2.5)) получена в [5]:

$$\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C) \le \inf_{(\mathscr{T}^{m-1},\nu)} \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} \|\varphi - \nu(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in \widetilde{K}_G^\infty \subset C} e_{m-1}(\varphi) \le \frac{\pi}{2}\mu(m-1). \tag{2.8}$$

Найдем оценку снизу для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$. Поступим так, как это было проделано в работе [5]. Необходимую роль здесь сыграли соображения об использовании свойств монотонности поперечника $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ по включению множеств и невозрастания его величины как функции цифрового параметра m. Действительно, если компакт X_0 можно линейно и изометрично отобразить в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, то $\alpha_{2m}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$.

В качестве X_0 удобно выбрать куб $\mathbb{Q}^{2m+1} \subset \widetilde{K}_G^\infty$, для которого $\alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C)$ эффективно вычисляется.

В самом деле, пусть φ из $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ и $\varphi(t) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} a_r \pi_r(t)$, тогда для любого $k \geq 0$

$$\|\varphi^{(k)}\| \leq G(k), \quad \mu(r) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k},$$

$$\|\pi_r^{(k)}(t)\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix}^{(k)} \right\| \leq r^k \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|, \quad \gamma(m) \leq \varkappa < \infty.$$

Введя функции (см. (2.7))

$$\phi_r(t) \equiv \frac{\mu(m)}{2\varkappa} \pi_r(t) \leq \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \pi_r(t) = \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \begin{pmatrix} \cos rt \\ \sin rt \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \phi_r^c(t) \\ \phi_r^s(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq m,$$

последовательно находим

$$\begin{aligned} \big\|\phi_r^{(k)}(t)\big\| &= \frac{\mu(m)}{2\varkappa} \big\|\pi_r^{(k)}(t)\big\| \leq \frac{\mu(m)}{2\gamma(m)} \|\pi_r^{(k)}(t)\| \leq \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot \frac{r^k}{G(k)} \\ &\leq \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot \left(\min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{r^k} \right)^{-1} = \frac{G(k)\mu(m)}{2\gamma(m)} \cdot (\mu(r))^{-1} \\ &\leq \frac{G(k)}{2\gamma(m)} \cdot \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \leq \frac{G(k)}{2} < G(k) \quad \forall k \geq 0. \end{aligned}$$

Функции $\phi_r(t)$ линейно независимы и принадлежат компакту $\widetilde{K}_G^\infty$; их линейные комбинации $\omega(t) = \sum\limits_{r=0}^{m} \big(\xi_r \phi_r^c(t) + \eta_r \phi_r^s(t)\big)$ при $|\xi_r|, |\eta_r| \leq 1$ также принадлежат $\widetilde{K}_G^\infty$:

$$\|\omega^{(k)}(t)\| \leq \sum_{r=0}^{m} \big(|\xi_r| \big\|\phi_r^{c(k)}(t)\big\| + |\eta_r| \big\|\phi_r^{s(k)}(t)\big\|\big) \leq \frac{G(k)}{\gamma(m)} \sum_{r=0}^{m} \frac{\mu(m)}{\mu(r)} \leq G(k) \quad \forall k \geq 0.$$

В компакте $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$, как и в работе [5], определим семейство функций

$$\mathbb{Q}^{2m+1} = \left\{ \omega(t) = \sum_{r=0}^{m} (\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt) : |\xi_r|, |\eta_r| \leq \frac{\mu(m)}{2\varkappa},\ r = 0, 1, \dots, m \right\}, \tag{2.9}$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m$; $\eta_1, \dots, \eta_m$ — вещественные числа.

Пусть $|\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max\{|\xi_0|/2, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|\}$, $|\boldsymbol{\eta}|_\infty = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_m|\}$.

Куб

$$\mathbb{I}^{2m+1} = \left\{ \boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{2m+1} : |\zeta_r| \leq \frac{\mu(m)}{2\varkappa},\ r = 0, 1, \dots, 2m \right\}, \quad \varkappa = \frac{e^\varrho}{e^\varrho - 1},\ \varrho = \frac{1}{Ae},$$

топологической размерности $2m+1$ с длиной ребра $d = \frac{\mu(m)}{\varkappa}$ линейно и гомеоморфно с не уменьшением расстояния (т. е. изометрично (см. [3, гл. 3, разд. 7, предложение 3]) вкладывается в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, и его образом является множество (2.9), поскольку

$$|\boldsymbol{\zeta}|_\infty \equiv \max(|\boldsymbol{\xi}|_\infty, |\boldsymbol{\eta}|_\infty) \leq \sqrt{2} \cdot \left\| \xi_0/2 + \sum_{r=1}^{m} (\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt) \right\|. \tag{2.10}$$

Оценка (2.10) получена с использованием неравенства Бесселя (см. [3, гл. 2, разд. 3, п. 1]):

$$|\boldsymbol{\zeta}|_\infty^2 \equiv \left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{2}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2$$
$$\le \overbrace{\left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{\sqrt{2}}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2}$$
$$\le \frac{\xi_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{m}\big(\xi_r^2 + \eta_r^2\big) \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\omega^2(t)\,dt \le 2\max_{t\in[0,2\pi]}|\omega(t)|^2 = 2\|\omega\|^2.$$

Отсюда согласно сказанному выше и леммы 1 находим оценку снизу:

$$\alpha_{2m}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \ge \alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\alpha_{2m}(\mathbb{I}^{2m+1}, l_\infty^{2m+1}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\mu(m)}{(2\varkappa)}.$$

Теорема 3. *Компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset \widetilde{\mathbb{A}}^\infty$ аналитических периодических на окружности S функций с мажорантой $G(k) = cA^k k^k$ $(c > 0,\ A \ge 1)$ обладает следующей асимптотикой александровских m-поперечников* (см. (2.6) *и подробности в* [6])*:*

$$a\cdot e^{-\varrho m} \le \alpha_{2m}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \le \alpha_{2m-1}\big(\widetilde{K}_G^\infty, C\big) \le b\cdot e^{-\varrho m}, \quad m > 0.$$

Здесь

$$a = c\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{e^\varrho - 1}{e^\varrho}, \quad b = c\cdot\frac{\pi}{2}\cdot e^{(0.5e+\varrho+0.5/\varrho)}, \quad \varrho = 1/(eA)$$

— вещественные постоянные.

Благодарность. Автор выражает благодарность рецензенту за интересные предложения и полезные замечания, способствующие лучшему восприятию результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms. Part 1, 2 // Comput. Methods Appl. Engin. 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152.
2. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1977.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.
4. *Belykh V. N.* Unsaturated algorithms for the numerical solution of elliptic boundary value problems in smooth axisymmetric domains // Sib. Adv. Math. 2022. V. 32, N 3. P. 157–185.
5. *Белых В. Н.* Оценки александровского n-поперечника компакта C^∞-гладких на конечном отрезке функций // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 3–14.
6. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.

Поступила в редакцию 21 мая 2024 г.
После доработки 10 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Белых Владимир Никитич (ORCID 0000-0002-4428-3087)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.983:517.986

О ГИПОНОРМАЛЬНЫХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРАХ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathscr{M}$. Исследованы случаи, когда гипонормальный τ-измеримый оператор (или некоторое его сужение) является нормальным. Получен критерий гипонормальности τ-измеримого оператора в терминах его функции сингулярных значений. Множество всех τ-измеримых гипонормальных операторов замкнуто в топологии τ-локальной сходимости по мере. Это утверждение является обобщением задачи 226 из книги "P. R. Halmos, A Hilbert Space Problem Book, Second Edition, Springer-Verl., Berlin, 1982" на неограниченные операторы. Множество всех τ-измеримых когипонормальных операторов замкнуто в топологии τ-локальной сходимости по мере тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ конечна.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.306

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, гипонормальный оператор.

1. Введение

Ограниченным гипонормальным операторам в гильбертовом пространстве посвящены работы многих исследователей (см., например, [1–7] и библиографию в них). В контексте полуконечных алгебр фон Неймана автором были опубликованы работы [8–13] о свойствах (неограниченных) τ-измеримых гипонормальных операторов (см. также [14]). Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов в $\mathscr{M}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $S(\mathscr{M},\tau)$ — *-алгебра всех τ-измеримых операторов, $S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ — эрмитова часть $S(\mathscr{M},\tau)$, $\mu(t;X)$ — функция сингулярных значений оператора $X \in S(\mathscr{M},\tau)$. Перечислим основные результаты нашей статьи; некоторые из них являются новыми даже в случае алгебры $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ с $\tau = \mathrm{tr}$. Если $T \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и оператор $A := PT$ гипонормален, то $TP = PT$ и $A = PTP \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$ (теорема 2). Если оператор $T \in S(\mathscr{M},\tau)$ гипонормален, $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$, то $TP = PT$ и оператор $T|_{P\mathscr{H}}$ нормален (теорема 3). Оператор $T \in S(\mathscr{M},\tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t;TP) \geq \mu(t;T^*P)$ (соответственно $\mu(t;T^*P) \geq \mu(t;TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $\tau(P) < +\infty$ (теорема 6). В частности, оператор $T \in S(\mathscr{M},\tau)$ нормален тогда и только тогда, когда $\mu(t;TP) = \mu(t;T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

с $\tau(P) < +\infty$ (следствие 3). Множество всех τ-измеримых гипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто (теорема 7). Это утверждение является обобщением задачи 226 из [15] на неограниченные операторы. Множество всех τ-измеримых когипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ является конечной (следствие 4).

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathscr{M}$, I — единица $\mathscr{M}$, $P^{\perp} = I - P$ для $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Пусть $\mathscr{M}^{+}$ — конус положительных элементов из $\mathscr{M}$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма на $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_1 = \{X \in \mathscr{M} : \|X\| \leq 1\}$ — единичный шар алгебры $\mathscr{M}$. Для $P, Q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ пишем $P \sim Q$ (эквивалентность Мюррея — фон Неймана), если $P = U^*U$ и $Q = UU^*$ для некоторого $U \in \mathscr{M}$; $\mathscr{M}$ называется *конечной*, если I не эквивалентна никакому проектору $P \in \mathscr{M} \setminus \{I\}$. Запись $P \preceq Q$ означает, что $P \sim R$ для некоторого $R \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $R \leq Q$. Отображение $\varphi : \mathscr{M}^{+} \to [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X + Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathscr{M}^{+}$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathscr{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathscr{M}^{+}$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathscr{M}^{+}$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *конечным*, если $\varphi(I) < +\infty$;
- *полуконечным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathscr{M}^{+}, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$ для каждого $X \in \mathscr{M}^{+}$ (см. [16, гл. V, § 2; 17, гл. 1, § 1.15]).

Оператор в $\mathscr{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* $\mathscr{M}$, если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathscr{M}'$ алгебры $\mathscr{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_{\tau}^{\mathrm{pr}} = \{P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \tau(P) < +\infty\}$. Замкнутый оператор X, присоединенный к $\mathscr{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathscr{H}$ область определения $\mathscr{D}(X)$, называется *τ-измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, что $P\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(X)$ и $\tau(P^{\perp}) < \varepsilon$. Множество $S(\mathscr{M}, \tau)$ всех τ-измеримых операторов является *-алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [18, гл. IX; 17, гл. 2, § 2.3]). Для семейства $\mathscr{L} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ обозначим через $\mathscr{L}^{+}$ и $\mathscr{L}^{\mathrm{h}}$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathscr{M}, \tau)^{\mathrm{h}}$, порожденный собственным конусом $S(\mathscr{M}, \tau)^{+}$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X, то $U \in \mathscr{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathscr{M}, \tau)^{+}$. Оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$; *когипонормальным*, если оператор A^* гипонормален.

В *-алгебре $S(\mathscr{M}, \tau)$ вводится топология t_{τ} сходимости по мере (см. [18, гл. IX, § 2; 17, гл. 2, § 2.5]), фундаментальную систему окрестностей нуля которой образуют множества

$$U(\varepsilon, \delta) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \exists P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}} (\|XP\| \leq \varepsilon \text{ и } \tau(P^{\perp}) \leq \delta)\}, \quad \varepsilon > 0,\ \delta > 0.$$

Известно, что $(S(\mathscr{M}, \tau), t_{\tau})$ является полной метризуемой топологической *-алгеброй [17, гл. 2, § 2.3, 2.5], причем $\mathscr{M}$ плотно в $(S(\mathscr{M}, \tau),\ t_{\tau})$ [17, гл. 2, § 2.5]. Для обозначения сходимости сети $\{X_j\}_{j \in J} \subset S(\mathscr{M}, \tau)$ к $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ в топологии t_{τ} используется запись $X_j \xrightarrow{\tau} X$; при этом говорят, что $\{X_j\}_{j \in J}$ *сходится к X по мере τ*.

Через $\mu(t;X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathscr{M},\tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot;X):(0,+\infty)\to[0,+\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t;X)=\inf\{\|XP\|: P\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}},\ \tau(P^{\perp})\le t\},\quad t>0.$$

Лемма 1 [19]. *Пусть $X,Y\in S(\mathscr{M},\tau)$, $A,B\in\mathscr{M}$. Тогда*

(i) $\mu(t;X)=\mu(t;|X|)=\mu(t;X^*)$ *для всех* $t>0$*;*

(ii) *если* $|X|\le|Y|$, *то* $\mu(t;X)\le\mu(t;Y)$ *для всех* $t>0$*;*

(iii) $\mu(t;AXB)\le\|A\|\|B\|\mu(t;X)$ *для всех* $t>0$*;*

(iv) $\mu(s+t;X+Y)\le\mu(s;X)+\mu(t;Y)$ *для всех* $s,t>0$*;*

(v) $\mu(t;f(|X|))=f(\mu(t;X))$ *для всех непрерывных функций* $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ *с* $f(0)=0$ *и* $t>0$.

Топология t_τ сходимости по мере может быть локализована следующим образом. Для $\varepsilon,\delta>0$ и $P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ определим множества

$$\mathscr{V}(\varepsilon,\delta,P)=\{X\in S(\mathscr{M},\tau):\exists Q\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}(Q\le P,\|XQ\|\le\varepsilon \text{ и } \tau(P-Q)\le\delta)\}.$$

Пространство $S(\mathscr{M},\tau)$ становится топологическим векторным пространством относительно топологии $t_{\tau l}$ *τ-локальной сходимости по мере*, базис окрестностей нуля которой образует семейство $\Theta=\{\mathscr{V}(\varepsilon,\delta,P)\}_{\varepsilon,\delta>0;P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$. Будем использовать символ $X_i\xrightarrow{\tau l}X$ для обозначения $t_{\tau l}$-сходимости. С помощью стандартной техники редуцирования алгебр фон Неймана можно показать (см. также [20, 21]), что $X_i\xrightarrow{\tau l}X$ тогда и только тогда, когда $X_iP\xrightarrow{\tau}XP$ для всех $P\in\mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$, ср. с [22, с. 114]; ясно, что $t_{\tau l}\le t_\tau$. О свойствах топологии $t_{\tau l}$ (см. [20, 21; 23–25]). Если след τ конечен, то $t_\tau=t_{\tau l}$ является минимальной метризуемой топологией, согласованной со структурой кольца в $S(\mathscr{M},\tau)$ [26].

Если $\mathscr{M}=\mathscr{B}(\mathscr{H})$ — *-алгебра всех ограниченных линейных операторов в $\mathscr{H}$ и $\tau=\mathrm{tr}$ — канонический след, то $S(\mathscr{M},\tau)$ совпадает с $\mathscr{B}(\mathscr{H})$, топология t_τ совпадает с топологией нормы $\|\cdot\|$, $t_{\tau l}$ совпадает с топологией сильной операторной сходимости. Имеем

$$\mu(t;X)=\sum_{n=1}^{\infty}s_n(X)\chi_{[n-1,n)}(t),\quad t>0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s-чисел компактного оператора X; χ_A — индикатор множества $A\subset\mathbb{R}$ [27, гл. II].

Если $\mathscr{M}$ — абелева (т. е. коммутативна), то $\mathscr{M}\simeq L^\infty(\Omega,\Sigma,\nu)$ и $\tau(f)=\int\limits_\Omega f\,d\nu$, где (Ω,Σ,ν) — локализуемое пространство с мерой, *-алгебра $S(\mathscr{M},\tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω,Σ,ν), которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры (при этом почти всюду равные функции отождествляются). Функция $\mu(t;f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [28].

3. Основные результаты

Лемма 2 [29, лемма 2]. *Если $T\in S(\mathscr{M},\tau)^+$, $P\in\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $PT+TP\ge0$, то $TP=PT$.*

Теорема 1. *Пусть $T \in S(\mathscr{M},\tau)^+$ и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*
(i) *если $U = 2P - I$ и $T - UTU \geq 0$, то $TP = PT$;*
(ii) *если $Q \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ с $PQ = 0$ и для некоторого числа $t > 0$*

$$T(P - tQ) + (P - tQ)T \geq 0, \tag{1}$$

то $TP = PT$ и $TQ = QT = 0$.

Доказательство. (i) Из неравенства $T - (2P - I)T(2P - I) \geq 0$ получаем

$$PT + TP - 2PTP \geq 0.$$

Поскольку $PTP \geq 0$, должно быть $PT + TP \geq 0$. В силу леммы 2 имеем $TP = PT$.

(ii). Умножив обе части неравенства (1) слева и справа на проектор Q, получаем $-2QTQ \geq 0$. Так как $QTQ \geq 0$, то $QTQ = |T^{1/2}Q|^2 = 0$ и $T^{1/2}Q = 0$. Значит, $TQ = T^{1/2} \cdot T^{1/2}Q = 0$ и $QT = (TQ)^* = 0$. Теперь из (1) следует $PT + TP \geq 0$, поэтому $TP = PT$ в силу леммы 2. Теорема доказана.

Пример 1. Условие положительности оператора T существенно в п. (ii) теоремы 1. В алгебре $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ для проекторов $P := \mathrm{diag}(0,1)$, $Q := \mathrm{diag}(1,0)$ и эрмитовой матрицы

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеем $T(P - Q) + (P - Q)T = 0$ (ср. с (1)), но $TP \neq PT$ и $TQ \neq 0 \neq QT$.

Теорема 2. *Пусть $T \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$, $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и оператор $A := PT$ гипонормален. Тогда $TP = PT$ и $A = PTP \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$.*

Доказательство. Поскольку $PT^2P = AA^* \leq A^*A = TPT$, умножив все части этого неравенства слева и справа на проектор P, получаем

$$0 \leq PT^2P \leq PTPTP = (PTP)^2 = |PTP|^2.$$

Отсюда с помощью неравенства $PTPTP \leq PTITP = PT^2P$ в силу операторной монотонности функции $f(t) = \sqrt{t}$ $(t \geq 0)$ имеем

$$\sqrt{PT^2P} \leq |PTP| = \sqrt{PTPTP} \leq \sqrt{PT^2P},$$

т. е. $|PTP| = \sqrt{PT^2P}$. Возводя в квадрат обе части последнего равенства, получаем $PTPTP = PT^2P (= PTPTP + PTP^{\perp}TP)$. Следовательно,

$$PTP^{\perp}TP = |P^{\perp}TP|^2 = 0$$

и $P^{\perp}TP = 0$. Таким образом, $TP = PTP = (PTP)^* = (TP)^* = PT$ и $A = PTP \in S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 1. *Если оператор $A = A^2 \in S(\mathscr{M},\tau)$ гипонормален (или когипонормален), то $A \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. В силу [30, теорема 2.21] каждый оператор $A = A^2 \in S(\mathscr{M},\tau)$ представляется в виде произведения $A = PT$, где $P = A(A + A^* - I)^{-1} \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и обратимый в $S(\mathscr{M},\tau)$ оператор $T = A + A^* - I$ принадлежит $S(\mathscr{M},\tau)^{\mathrm{h}}$. Теперь утверждение вытекает из спектральной теоремы. Если оператор $A = A^2 \in S(\mathscr{M},\tau)$ когипонормален, то $A^* = A^{*2}$ гипонормален. $\square$

Теорема 3. *Пусть оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален, $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $TP = \lambda P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда $PT = TP$ и оператор $T|_{P\mathscr{H}}$ нормален.*

Доказательство. Поскольку $PTT^*P \leq PT^*TP$, имеем

$$0 \leq (PT - \lambda P)(PT - \lambda P)^* = PTT^*P - \overline{\lambda}PTP - \lambda PT^*P + |\lambda|^2 P$$
$$\leq PT^*TP - |\lambda|^2 P - \lambda PT^*P + |\lambda|^2 P = PT^*\lambda P - \lambda PT^*P = 0.$$

Следовательно, $T^*P - \overline{\lambda}P = (PT - \lambda P)^* = 0$ и $PT = \lambda P = TP$. Имеем $T|_{P\mathscr{H}} = PTP$. Легко видеть, что

$$(PTP)^*PTP = PT^*PTP = PT^*PPT = PT^*P\lambda P = \lambda PT^*P,$$
$$PTP(PTP)^* = PTPT^*P = PPTT^*P = PTT^*P = \lambda PT^*P.$$

Теорема доказана. □

Следствие 2. *Пусть оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален, $P_1, P_2 \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $TP_1 = \lambda_1 P_1$, $TP_2 = \lambda_2 P_2$ для некоторых ненулевых $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $P_1P_2 = 0$.*

Доказательство. Для $\lambda_1 \notin \{0, \lambda_2\}$ имеем $P_1T = \lambda_1 P_1$ в силу теоремы 3 и

$$\lambda_1\lambda_2 P_1P_2 = TP_1TP_2 = TP_1TP_2 = T\lambda_1P_1P_2 = \lambda_1TP_1P_2 = \lambda_1\lambda_1P_1P_2 = \lambda_1^2P_1P_2.$$

Следовательно, $\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)P_1P_2 = 0$ и $P_1P_2 = 0$.

Для $\lambda_2 \notin \{0, \lambda_1\}$ рассмотрим произведение $\lambda_1\lambda_2P_2P_1$ и аналогичным образом получим $P_2P_1 = 0 = 0^* = (P_2P_1)^* = P_1P_2$. □

Теорема 4. *Пусть оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.*

(i) *Если $0 \leq TP \leq P$, то $TP = PT$.*

Пусть $TP = PTP$. Тогда

(ii) *оператор $T|_{P\mathscr{H}}$ гипонормален; если $T|_{P\mathscr{H}}$ нормален, то $TP = PT$.*

Доказательство. (i) Для оператора $A := TP$ имеем $0 \leq A \leq P$, поэтому $AP = PA = A$ в силу [31, гл. 2, п. 2.17]. Аналогичным образом из $0 \leq A^2 \leq P$ получаем $A^2P = PA^2 = A^2$. Заметим, что $PT^* = (TP)^* = A$ и $PTT^*P \leq PT^*TP$. Тогда

$$0 \leq (PT - TP)(PT - TP)^* = PTT^*P - PTTP - TPT^*P + TPPT^*$$
$$\leq PT^*TP - PTA - AT^*P + A^2 = 2A^2 - PTA - AT^*P$$
$$= 2A^2 - PTPA - APT^*P = 2A^2 - PTPA - APT^*P$$
$$= 2A^2 - PA^2 - A^2P = 2A^2 - A^2 - A^2 = 0$$

и $TP = PT$.

Имеем $PT^*TP \geq PTT^*P$ и $T|_{P\mathscr{H}} = PTP$. Пусть $TP = PTP$.

(ii) Легко видеть, что

$$(PTP)^*PTP = (TP)^*TP = PT^*PT \geq PTT^*P \geq PTPT^*P = PTP(PTP)^*,$$

т. е. оператор $T|_{P\mathscr{H}}$ гипонормален. Пусть $T|_{P\mathscr{H}}$ нормален. Тогда $PTP(PTP)^* = (PTP)^*PTP$ и $P^{\perp}TP = 0$, поэтому

$$0 \leq (TP - PT)(TP - PT)^* = TPT^*P - TPT^*P - PTPT^* + PTT^*P$$
$$= TPT^* - TPT^*P - TPT^* + PTT^*P = -TPT^*P + PTT^*P$$
$$= -PTPPT^*P + PTT^*P \leq -PTPPT^*P + PT^*TP = PT^*P^{\perp}TP = 0$$

и $TP = PT$. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть $T \in \mathscr{M}_1$ и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Тогда*

(i) *если $TP \geq P$, то $TP = PT = P$;*

(ii) *если T гипонормален и $TT^*P = P$ (или $\tau(TT^*P) = \tau(P) < +\infty$), то $T^*TP = P$.*

Доказательство. (i) Поскольку $P \leq TP \leq I$, имеем $0 \leq TP - P \leq P^{\perp} \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Поэтому $0 = (TP - P)P^{\perp} = P^{\perp}(TP - P) = TP - P$ в силу [31, гл. 2, п. 2.17] и $TP = P = PT^*$. Ввиду $0 \leq TT^* \leq I$ имеем

$$0 \leq (PT - P)(PT - P)^* = PTT^*P - PTP - PT^*P + P \leq P - P = 0$$

и $PT = P$.

(ii) Если $TT^*P = P$, то $0 \leq (T^*T)^2 \leq T^*T \leq I$ и $P = PTT^*P \leq PT^*TP \leq P$, т. е. $PTT^*P = PT^*TP = P$. (Если $\tau(TT^*P) = \tau(P) < +\infty$, то из оценок $PTT^*P \leq PT^*TP \leq P$ и

$$\tau(P) = \tau(TT^*P) = \tau(TT^*PP) = \tau(PTT^*P) \leq \tau(PT^*TP) \leq \tau(P)$$

в силу точности следа τ получаем $PTT^*P = PT^*TP = P$.) Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leq (T^*TP - P)^*(T^*TP - P) &= P(T^*T)^2P - 2PT^*TP + P \\ &= P(T^*T)^2P - P \leq P - P = 0 \end{aligned}$$

и $T^*TP = P$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 6. *Оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ гипонормален (когипонормален) тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ (соответственно $\mu(t; T^*P) \geq \mu(t; TP)$) для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_{\tau}^{\mathrm{pr}}$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Поскольку $PT^*TP \geq PTT^*P$ для гипонормального T, в силу пп. (i), (ii) и (v) леммы 1 для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \mu(t; TP) = \mu(t; (PT^*TP)^{1/2}) = \mu(t; PT^*TP)^{1/2} &\geq \mu(t; PTT^*P)^{1/2} \\ &= \mu(t; (PTT^*P)^{1/2}) = \mu(t; T^*P). \end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Пусть $\mu(t; TP) \geq \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_{\tau}^{\mathrm{pr}}$. Предположим, что $A_- \neq 0$ в разложении Жордана

$$T^*T - TT^* = A_+ - A_-,$$

где $A_+, A_- \in S(\mathscr{M}, \tau)^+$ с $A_+A_- = 0$. Пусть число $\varepsilon > 0$ такое, что спектральный проектор $E^{A_-}(\varepsilon, +\infty) = P$ ненулевой. Переходя при необходимости к подпроектору, считаем $\tau(P) < +\infty$. Имеем $PT^*TP - PTT^*P = -PA_-P \leq -\varepsilon P$, т. е.

$$PT^*TP + \varepsilon P \leq PTT^*P. \tag{2}$$

Рассмотрим редуцированную алгебру фон Неймана $\mathscr{M}_P = P\mathscr{M}P$ с единицей P и редуцированный точный конечный нормальный след $\tau_P = \tau(P \cdot P)$ на $\mathscr{M}_P$. Тогда

$$S(\mathscr{M}_P, \tau_P) = PS(\mathscr{M}, \tau)P$$

и для функции сингулярных значений $\mu_P(t; \cdot)$, вычисленной по следу τ_P, в силу неравенства (2) и хорошо известного представления

$$\mu(t; X) = \inf\{s > 0 : d_X(s) \leq t\}, \quad t > 0,$$

см. [19, предложение 2.2] (здесь $d_X(s) = \tau(E^{|X|}(s, +\infty))$, $s > 0$, есть функция распределения оператора $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$ и $E^{|X|}(s, +\infty)$ — спектральный проектор оператора $|X|$, соответствующий интервалу $(s, +\infty)$) и пп. (i) и (v) леммы 1 имеем

$$\begin{aligned}\mu(t; T^*P)^2 &= \mu(t; |T^*P|^2) = \mu(t; PTT^*P) = \mu_P(t; PTT^*P) \geq \mu_P(t; PT^*TP + \varepsilon P)\\ &= \mu_P(t; PT^*TP) + \varepsilon = \mu(t; PT^*TP) + \varepsilon = \mu(t; |TP|^2) + \varepsilon = \mu(t; TP)^2 + \varepsilon;\end{aligned}$$

противоречие. Теорема доказана. □

Следствие 3. *Оператор $T \in S(\mathscr{M}, \tau)$ нормален тогда и только тогда, когда $\mu(t; TP) = \mu(t; T^*P)$ для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$.*

Топологию $t_{\tau l}$ можно определить и в терминах функций сингулярных значений. Семейство $\widetilde{\Theta} = \{\widetilde{\mathscr{V}}(\varepsilon, \delta, P)\}_{\varepsilon, \delta > 0; P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}}$, где

$$\widetilde{\mathscr{V}}(\varepsilon, \delta, P) = \{X \in S(\mathscr{M}, \tau) : \mu(\delta; XP) < \varepsilon\},$$

также задает базис окрестностей нуля для $t_{\tau l}$.

Теорема 7. *Множество всех τ-измеримых гипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто.*

Доказательство. Окрестность нуля оператора $B \in S(\mathscr{M}, \tau)$ в топологии $t_{\tau l}$ есть множество

$$V_{\varepsilon, \delta, P}(B) := \{A \in S(\mathscr{M}, \tau) : \mu(\delta; AP - BP) < \varepsilon\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$ и $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ (см. также [20, § 2; 21, § 2; 25, § 3]). Наша теорема утверждает, что если каждая такая окрестность оператора B содержит гипонормальный оператор, то

$$\mu(t; B^*P) \leq \mu(t; BP)$$

для всех $t > 0$ и $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ (см. теорему 6). Для фиксированного $P \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$ рассмотрим проектор

$$Q := P \vee \mathrm{s}_l(B^*P).$$

Так как $\mathrm{s}_l(B^*P) \preceq P$, имеем $\tau(Q) \leq \tau(P) + \tau(\mathrm{s}_l(B^*)) \leq 2\tau(P) < +\infty$ и $Q \in \mathscr{M}_\tau^{\mathrm{pr}}$.

Для лучшего понимания идеи использования гипотезы окрестностей допустим на время, что выполнена более сильная гипотеза, а именно, пусть существует гипонормальный оператор $A \in S(\mathscr{M}, \tau)$ такой, что

$$AQ = BQ.$$

В этом случае, переходя к сопряженным операторам, имеем $QA^* = QB^*$, а это влечет

$$\begin{aligned}\mu(t; B^*P) &= \mu(t; \mathrm{s}_l(B^*P)QB^*P) \leq \|\mathrm{s}_l(B^*P)\|\mu(t; QB^*P) = \mu(t; QA^*P)\\ &\leq \|Q\|\mu(t; A^*P) = \mu(t; A^*P) \leq \mu(t; AP) = \mu(t; AQP) = \mu(t; BQP) = \mu(t; BP)\end{aligned}$$

для всех $t > 0$ в силу п. (iii) леммы 1 и теоремы 6 для оператора A.

Доказательство, собственно, делается снова путем проноса ε и δ вдоль приведенной выше цепочки рассуждений с использованием леммы 1 о свойствах функций сингулярных значений. Для произвольного $t > 2\delta > 0$ имеем

$$\mu(t; B^*P) = \mu(t; \mathrm{s}_l(B^*P)QB^*P) \leq \|\mathrm{s}_l(B^*P)\|\mu(t; QB^*P) = \mu(t; QB^*P)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mu(t; QB^*P - QA^*P + QA^*P) \le \mu(\delta; QB^*P - QA^*P) + \mu(t-\delta; QA^*P) \\
&\le \|P\|\mu(\delta; QB^* - QA^*) + \mu(t-\delta; QA^*P) = \mu(\delta; BQ - AQ) + \mu(t-\delta; QA^*P) \\
&\le \varepsilon + \mu(t-\delta; QA^*P) \le \varepsilon + \|Q\|\mu(t-\delta; A^*P) \le \varepsilon + \mu(t-\delta; AP) = \varepsilon + \mu(t-\delta; AQP) \\
&= \varepsilon + \mu(t-\delta; AQP - BQP + BQP) \le \varepsilon + \mu(\delta; AQP - BQP) + \mu(t-2\delta; BQP) \\
&\le 2\varepsilon + \mu(t-2\delta; BQP) = 2\varepsilon + \mu(t-2\delta; BP).
\end{aligned}
$$

Если t — точка непрерывности функции $\mu(\cdot; BP)$, то в силу малости ε и δ получаем $\mu(t; B^*P) \le \mu(t; BP)$ и оператор B гипонормален ввиду теоремы 6. Наконец, напомним, что функция сингулярных значений $\mu(\cdot; X)$ $(X \in S(\mathscr{M}, \tau))$ непрерывна справа на $\mathbb{R}^+$ и имеет не более чем счетное множество точек разрыва. Теорема доказана. $\square$

Следствие 4. *Множество всех τ-измеримых когипонормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ конечна.*

Доказательство. Достаточность. Предположим, что множество всех когипонормальных операторов из $S(\mathscr{M}, \tau)$ является $t_{\tau l}$-замкнутым. Тогда множество всех τ-измеримых нормальных операторов $t_{\tau l}$-замкнуто как пересечение двух $t_{\tau l}$-замкнутых множеств в $S(\mathscr{M}, \tau)$. Напомним, что множество $\mathscr{M}^{\mathrm{iso}}$ всех изометрий $(U^*U = I)$ является $t_{\tau l}$-замкнутым множеством в $S(\mathscr{M}, \tau)$ [20, п. 3 леммы 3.7]. Следовательно, множество $\mathscr{M}^{\mathrm{u}}$ всех унитарных операторов $(U^*U = UU^* = I)$ является $t_{\tau l}$-замкнутым множеством в $S(\mathscr{M}, \tau)$. Но $\mathscr{M}^{\mathrm{u}}$ $t_{\tau l}$-замкнуто тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ конечна [24, п. (i) теоремы 1].

Необходимость. Алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ конечна тогда и только тогда, когда инволюция $A \mapsto A^*$ $t_{\tau l}$-непрерывна из $S(\mathscr{M}, \tau)$ в $S(\mathscr{M}, \tau)$ [20, п. 5 теоремы 4.1]. При этом если сеть $\{X_j\}_{j \in J} \subset (\mathscr{M}, \tau)$ когипонормальных операторов $t_{\tau l}$-сходится к оператору $X \in S(\mathscr{M}, \tau)$, то $X_j^* \xrightarrow{\tau l} X^*$. Поскольку операторы X_j^*, $j \in J$, гипонормальны, оператор X^* гипонормален; поэтому X когипонормален. $\square$

Замечание 1. На алгебрах локально измеримых операторов М. А. Муратовым и В. И. Чилиным в [32] была исследована другая топология локальной сходимости по мере, отличная от нашей топологии $t_{\tau l}$. Вопрос о замкнутости множества всех локально измеримых гипонормальных операторов в этой топологии остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bogdanović K.* A class of norm inequalities for operator monotone functions and hyponormal operators // Complex Anal. Oper. Theory. 2024. V. 18, N 2. Paper No. 32. 12 pp.

2. *Uchiyama A.* Decomposition of hyponormal operator // Nihonkai Math. J. 2023. V. 34, N 2. P. 91–102.

3. *Bala N., Ramesh G.* A representation of hyponormal absolutely norm attaining operators // Bull. Sci. Math. 2021. V. 171. Paper No. 103020, 15 pp.

4. *Gu C., Hendricks J., Rutherford D.* Hyponormality of block Toeplitz operators // Pacif. J. Math. 2006. V. 223, N 1. P. 95–111.

5. *Chō M., Itoh M.* Putnam's inequality for p-hyponormal operators // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 8. P. 2435–2440.

6. *Curto R. E., Hwang I. S., Lee W. Y.* Hyponormality and subnormality of block Toeplitz operators // Adv. Math. 2012. V. 230. P. 2094–2151.

7. *Duggal B. P.* On p-hyponormal contractions // Proc. Am. Math. Soc. 1995. V. 123, N 1. P. 81–86.

8. *Бикчентаев А. М.* О нормальных τ-измеримых операторах, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 3. С. 350–360.

9. *Bikchentaev A. M.* Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2018. V. 39, N 6. P. 731–741.

10. *Bikchentaev A.* Paranormal measurable operators affiliated with a semifinite von Neumann algebra. II // Positivity. 2020. V. 24, N 5. P. 1487–1501.

11. *Бикчентаев А. М.* К теории τ-измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 2. С. 3–11.

12. *Bikchentaev A. M.* Concerning the theory of τ-measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 10. P. 4507–4511.

13. *Bikchentaev A.* Hyponormal measurable operators, affiliated to a semifinite von Neumann algebra // Adv. Operator Theory. 2024. V. 9, N 4. Article 83.

14. *Dehimi S., Mortad M. H.* Unbounded operators having self-adjoint, subnormal, or hyponormal powers // Math. Nachr. 2023. V. 296, N 9. P. 3915–3928.

15. *Halmos P. R.* A Hilbert space problem book, Second Edition. Berlin: Springer-Verl., 1982.

16. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5.. Berlin: Springer-Verl., 2002.

17. *Dodds P. G., de Pagter B., Sukochev F. A.* Noncommutative integration and operator theory. Cham: Birkhaäuser, 2023 (Progress in mathematics; V. 349).

18. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 125. Operator Algebras and Non-commutative Geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.

19. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacif. J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.

20. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 41–54.

21. *Бикчентаев А. М.* Топологии локальной сходимости по мере в алгебрах измеримых операторов // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 17–27.

22. *Ciach L. J.* Some remarks on the convergence in measure and on a dominated sequence of operators measurable with respect to a semifinite von Neumann algebra // Colloq. Math. 1988. V. 55, N 1. P. 109–121.

23. *Bikchentaev A. M.* The continuity of multiplication for two topologies associated with a semifinite trace on von Neumann algebra // Lobachevskii J. Math. 2004. V. 14. P. 17–24.

24. *Бикчентаев А. М.* Локальная сходимость по мере на полуконечных алгебрах фон Неймана, II // Мат. заметки. 2007. Т. 82, № 5. С. 783–786.

25. *Бикчентаев А. М., Тихонов О. Е.* Непрерывность операторных функций в топологии локальной сходимости по мере // Тр. МИАН. 2024. Т. 324. С. 51–59.

26. *Бикчентаев А. М.* О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.

27. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.

28. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

29. *Бикчентаев А. М.* Об операторно монотонных и операторно выпуклых функциях // Изв. вузов. Математика. 2016. № 5. С. 70–74.

30. *Бикчентаев А. М.* Об идемпотентных τ-измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 492–503.

31. *Strătilă S. V., Zsidó L.* Lectures on von Neumann algebras. 2nd edition. Cambridge-IISc Series.. Delhi: Camb. Univ. Press, 2019.

32. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Топологические алгебры измеримых и локально измеримых операторов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2016. Т. 61.

С. 115–163.

Поступила в редакцию 26 сентября 2024 г.
После доработки 14 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID 0000-0001-5992-3641)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
420008 Казань, ул. Кремлевская, 18
Airat.Bikchentaev@kpfu.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.543

БИЕКЦИИ ГРУППЫ, КОММУТИРУЮЩИЕ С ЕЕ АВТОМОРФИЗМАМИ

О. В. Брюханов

Аннотация. Изучаются биекции группы на себя, которые коммутируют с выделенными подгруппами ее автоморфизмов. Установлено общее строение таких групп биекций. Строение таких групп биекций получено как строение централизатора подгруппы группы подстановок множества произвольной мощности. В частности, показано, что централизатор регулярного представления группы на себе изоморфен самой группе. С использованием строения таких групп биекций для свободной двупорожденной бернсайдовой группы периода 3 вычислена группа ее биекций, коммутирующих с ее внутренними автоморфизмами.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.307

Ключевые слова: биекция, орбита действия, стабилизатор, сплетение групп по множеству, декартово произведение групп, автоморфизм группы.

1. Введение

Пусть G — группа, $\Phi \leq \operatorname{Aut} G$. Рассмотрим множество всевозможных биекций $\sigma : G \to G$ группы G на себя, которые удовлетворяют следующему свойству:

$$\sigma(\varphi(g)) = \varphi(\sigma(g))$$

для всех $\varphi \in \Phi$ и $g \in G$. Относительно операции композиции, где $\sigma_1\sigma_2(g) = \sigma_2(\sigma_1(g))$, $g \in G$, это множество биекций образует группу. Данную группу будем обозначать через $\mathrm{B}_\Phi(G)$ и называть *группой Φ-коммутирующих биекций группы G*.

В случае, когда подгруппа автоморфизмов Φ совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы G, А. Н. Бородиным, М. В. Нещадимом и А. А. Симоновым в работах [1, 2] были вычислены группы $\mathrm{B}_\Phi(G)$ для произвольных абелевых групп, для произвольных свободных неабелевых групп и для групп диэдра D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. В работе [2] был поставлен вопрос об общем описании группы $\mathrm{B}_\Phi(G)$ для произвольной группы G и произвольной подгруппы $\Phi \leq \operatorname{Aut} G$. В настоящей статье дается ответ на этот вопрос.

Так как автоморфизмы группы являются ее биекциями на себя, рассмотрим следующую общую ситуацию. Пусть X — некоторое множество, $S(X)$ — группа всех его биекций на себя (подстановок множества X), Φ — произвольная подгруппа группы $S(X)$. Далее множество $x^\Phi = \{\varphi(x) \mid \varphi \in \Phi\}$ будем называть Φ-*орбитой* элемента $x \in X$, множество $\mathrm{St}_\Phi(x) = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(x) = x\}$ — Φ-*стабилизатором* элемента $x \in X$, множество $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x)) = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi\,\mathrm{St}_\Phi(x)\varphi^{-1} = \mathrm{St}_\Phi(x)\}$ — Φ-*нормализатором* стабилизатора $\mathrm{St}_\Phi(x)$, множество $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \{\sigma \mid \sigma \in S(X),\ \sigma\varphi\sigma^{-1} = \varphi \text{ для всех } \varphi \in \Phi\}$ — *централизатором* *группы* Φ *в группе биекций* $S(X)$. При этом множество всех Φ-орбит множества X будем обозначать через $\mathrm{K}_\Phi(X)$. Таким образом,

$$X = \bigsqcup_{\alpha \in I} x_\alpha^\Phi,$$

где $x_\alpha \in X$, $\alpha \in I$.

Отметим ряд свойств данных подгрупп биекций Φ и $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, которые будут использоваться в построениях и рассуждениях.

Лемма 1.1. *Пусть* $x \in X$, $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ *и* $\psi \in \Phi$. *Тогда выполнены следующие равенства* Φ*-стабилизаторов:* $\mathrm{St}_\Phi(\sigma(x)) = \mathrm{St}_\Phi(x)$ *и* $\mathrm{St}_\Phi(\psi(x)) = \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi$.

Доказательство. Утверждение следует из равенств

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_\Phi(\sigma(x)) &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(\sigma(x)) = \sigma(x)\} = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \sigma(\varphi(x)) = \sigma(x)\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(x) = x\} = \mathrm{St}_\Phi(x)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mathrm{St}_\Phi(\psi(x)) &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi(\psi(x)) = \psi(x)\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \psi^{-1}(\varphi(\psi(x))) = x\}\end{aligned}$$
$$= \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \psi\varphi\psi^{-1} \in \mathrm{St}_\Phi(x)\} = \{\varphi \mid \varphi \in \Phi, \varphi \in \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi\} = \psi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x)\psi.$$

Лемма 1.2. *Каждая биекция* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ *индуцирует некоторую подстановку* $s \in S(K_\Phi(X))$ *на множестве всех* Φ*-орбит множества* X.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ в силу леммы 1.1 и равенств

$$\sigma(\varphi(x_\beta)) = \varphi(\sigma(x_\beta)) = \varphi(\psi(x_{\beta'}))$$

отображает Φ-орбиту x_β^Φ на равную ей по мощности Φ-орбиту $x_{\beta'}^\Phi$. Здесь $\varphi(x_\beta) \in x_\beta^\Phi$, $\sigma(x_\beta) \in x_{\beta'}^\Phi$, т. е. $\sigma(x_\beta) = \psi(x_{\beta'})$, где $\psi \in \Phi$, и $\varphi(\psi(x_{\beta'})) \in x_{\beta'}^\Phi$.

Лемма 1.3. *Отображение между двумя* Φ*-орбитами* $x_\beta^\Phi \mapsto x_{\beta'}^\Phi$, *заданное биекцией* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, *определяется однозначно по значению* $\sigma(x_0) \in x_{\beta'}^\Phi$ *для произвольно выделенного элемента* $x_0 \in x_\beta^\Phi$.

Доказательство. Из равенств $x_0^\Phi = x_\beta^\Phi$ и $\sigma(x_0)^\Phi = x_{\beta'}^\Phi$ получаем, что остальные значения биекции σ на Φ-орбите x_β^Φ, так как $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, можно найти по правилу

$$\sigma : \varphi(x_0) \mapsto \varphi(\sigma(x_0)),\ \varphi \in \Phi.$$

Биективность данного отображения следует из равенства стабилизаторов $\mathrm{St}_\Phi(x_0) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_0))$ в силу леммы 1.1.

Лемма 1.4. *Пусть* $\Phi \leq S(X)$. *Если* Φ*-стабилизаторы элементов* $x_i \in X$, $i = 1, 2$, *совпадают, то существует биекция* $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$, *которая отображает* Φ*-орбиту* x_1^Φ *на* Φ*-орбиту* x_2^Φ.

Доказательство. Если Φ-орбиты x_i^Φ, $i = 1, 2$, не совпадают, то рассмотрим отображение

$$\sigma : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2, & \\ \varphi(x_1) \mapsto \varphi(x_2), & \varphi \in \Phi, \\ x_2 \mapsto x_1, & \\ \varphi(x_2) \mapsto \varphi(x_1), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_i^\Phi,\ i = 1, 2. \end{cases}$$

Биективность данного отображения следует из равенства $\mathrm{St}_\Phi(x_1) = \mathrm{St}_\Phi(x_2)$. Принадлежность $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ следует из равенств

$$\sigma(\varphi(x_1)) = \varphi(x_2) = \varphi(\sigma(x_1)), \quad \sigma(\varphi(x_2)) = \varphi(x_1) = \varphi(\sigma(x_2)),$$
$$\sigma(\varphi(x)) = \varphi(x) = \varphi(\sigma(x)), \quad x \notin x_i^\Phi,\ i = 1, 2.$$

Таким образом, биекция $\sigma \in S(X)$ «переставляет» эти орбиты между собой. Если $x_1^\Phi = x_2^\Phi$, то отображение

$$\sigma : \begin{cases} x_1 \mapsto x_2, & \\ \varphi(x_1) \mapsto \varphi(x_2), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_1^\Phi, \end{cases}$$

задает некоторую биекцию на Φ-орбите x_1^Φ. Принадлежность $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ доказывается аналогично, что завершает доказательство леммы 1.4.

Далее через $\mathrm{Fun}(X, G)$ будем обозначать X-ю декартову степень группы G, т. е. группу функций из множества X в группу G с «покомпонентным» умножением: если $f, g \in \mathrm{Fun}(X, G)$, то $fg(x) = f(x)g(x)$. В случае семейства групп G_x, $x \in X$, их декартово произведение, т. е. группу функций на множестве X с «покомпонентным» умножением и свойством $f(x) \in G_x$, будем обозначать через $\overline{\prod\limits_{x\in X}} G_x$.

Напомним одну из конструкций сплетения групп [3, с. 110], которая понадобится для описания строения группы биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ через ее действие на Φ-орбитах множества X. Полученное описание позволит определить строение группы биекций $\mathrm{B}_\Phi(G)$

Некоторую группу называют *сплетением групп A и B по множеству X* (*сплетением группы A с группой подстановок $B \leq \mathrm{S}(X)$*) и обозначают через $A \wr_X B$, если выполнены следующие условия.

1) $\mathrm{Fun}(X, A) < A \wr_X B$.

2) $B < A \wr_X B$ и задано действие группы B на множестве X подстановками из $\mathrm{S}(X)$, т. е. задано вложение $B \hookrightarrow \mathrm{S}(X)$. При этом если $b \in B$, $f \in \mathrm{Fun}(X, A)$, то $b^{-1}fb = f^b \in \mathrm{Fun}(X, A)$, где $f^b(x) = f(b^{-1}(x))$.

3) $A \wr_X B = B \cdot \mathrm{Fun}(X, A)$.

2. Группа биекций Φ-орбиты

Рассмотрим множества биекций

$$\Sigma(x^\Phi) = \{\sigma \mid \sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi),\ \sigma(x) \in x^\Phi,\ \sigma(x') = x',\ \text{при } x' \notin x^\Phi\}.$$

По лемме 1.4 такие множества состоят по крайней мере из тождественной биекции множества X. Далее, если $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(x^\Phi)$, то

$$\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_2(\sigma_1(x)) = \sigma_2(\varphi_1(x)) = \varphi_1(\sigma_2(x)) = \varphi_1(\varphi_2(x)) \in x^\Phi$$

и

$$\sigma_1\sigma_2(x') = \sigma_2(\sigma_1(x')) = \sigma_2(x') = x'$$

при $x' \notin x^\Phi$. Следовательно, $\sigma_1\sigma_2 \in \Sigma(x^\Phi)$. Кроме того, из равенства $\sigma_1(x) = \varphi_1(x)$, применяя к обеим сторонам равенства композицию биекций $\varphi_1^{-1}\sigma_1^{-1}$, получаем равенство $\sigma_1^{-1}(x) = \varphi_1^{-1}(x) \in x^\Phi$. При этом, очевидно, выполняются равенства $\sigma_1^{-1}(x') = x'$, если $x' \notin x^\Phi$. Следовательно, $\sigma_1^{-1} \in \Sigma(x^\Phi)$. Таким образом, множества биекций $\Sigma(x^\Phi)$ являются подгруппами в группе $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. Данную подгруппу будем называть *группой биекций Φ-орбиты x^Φ*.

Теорема 2.1. *Группа биекций* $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ Φ*-орбиты* x_α^Φ *изоморфна фактор-группе* $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Доказательство. По лемме 1.3 все значения биекции $\sigma \in \mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$ на Φ-орбите x^Φ однозначно определяются по значению в любом наперед заданном фиксированном элементе $x_0 \in x^\Phi$. Поэтому для Φ-орбиты x_α^Φ можно выбрать элемент x_α.

По условию теоремы $\sigma(x_\alpha) \in x_\alpha^\Phi$, т. е. $\sigma(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, $\varphi \in \Phi$. По лемме 1.1 имеем равенство стабилизаторов $\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_\alpha))$ и $\mathrm{St}_\Phi(\varphi(x_\alpha)) = \varphi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)\varphi$. Поэтому получаем равенство

$$\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\sigma(x_\alpha)) = \mathrm{St}_\Phi(\varphi(x_\alpha)) = \varphi^{-1}\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)\varphi,$$

т. е. $\varphi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$.

Далее, если для некоторой биекции $\psi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$ выполняется равенство $\psi(x_\alpha) = \sigma(x_\alpha) = \varphi(x_\alpha)$, то это равносильно тому, что $\varphi^{-1}\psi \in \mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$, т. е. $\psi \in \varphi\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$. Таким образом, значение $\sigma(x_\alpha) \in x_\alpha^\Phi$ для биекции $\sigma \in \Sigma(x_\alpha^\Phi)$ однозначно определяется смежным классом $\overline{\varphi} = \varphi\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$, где $\varphi \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))$, и корректно определено равенство $\sigma(x_\alpha) = \overline{\varphi}(x_\alpha)$. Это взаимно однозначное соответствие позволяет задать биективное отображение

$$\widehat{\ }\colon \Sigma(x_\alpha^\Phi) \to \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$$

по правилу $\widehat{\sigma} = \overline{\varphi}^{-1}$. Ясно, что $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} \subseteq \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Покажем, что данное биективное отображение является гомоморфизмом. Рассмотрим последовательную композицию $\sigma_1\sigma_2$ биекций σ_1 с $\widehat{\sigma}_1 = \overline{\varphi}_1^{-1}$ и σ_2 с $\widehat{\sigma}_2 = \overline{\varphi}_2^{-1}$, где $\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2 \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha)$. Ей соответствует элемент $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = \overline{\varphi}_1^{-1}\overline{\varphi}_2^{-1}$, так как

$$\sigma_1\sigma_2(x_\alpha) = \sigma_2(\sigma_1(x_\alpha)) = \sigma_2(\overline{\varphi}_1(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_1(\sigma_2(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_1(\overline{\varphi}_2(x_\alpha)) = \overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_1(x_\alpha),$$

и $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = (\overline{\varphi}_2\overline{\varphi}_1)^{-1} = \overline{\varphi}_1^{-1}\overline{\varphi}_2^{-1}$. Таким образом, биективное отображение

$$\widehat{\ }\colon \Sigma(\Phi_\alpha) \to \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$$

обладает свойством гомоморфизма $\widehat{\sigma_1\sigma_2} = \widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2$, т. е. является изоморфизмом, при этом $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} \leq \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$.

Если выполнено строгое включение $\widehat{\Sigma(x_\alpha^\Phi)} < \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$, то для любого $\overline{\varphi}_0 \in \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)\backslash\widehat{\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)}$ выполняется равенство $\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha) = \mathrm{St}_\Phi(\overline{\varphi}_0(x_\alpha))$. Следовательно, по лемме 1.4 определена биекция

$$\sigma_0 : \begin{cases} x_\alpha \mapsto \overline{\varphi}_0(x_\alpha), & \\ \varphi(x_\alpha) \mapsto \varphi(\overline{\varphi}_0(x_\alpha)), & \varphi \in \Phi, \\ x \mapsto x, & x \notin x_\alpha^\Phi, \end{cases}$$

которая принадлежит группе биекций $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi)$. При этом, являясь биекцией Φ-орбиты x_α^Φ, σ_0 не принадлежит $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$, так как $\widehat{\sigma}_0 = \overline{\varphi}_0 \notin \widehat{\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)}$. Получили противоречие. Следовательно, $\widehat{\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)} = \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$ и группа $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ изоморфна фактор-группе $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha))/\,\mathrm{St}_\Phi(x_\alpha)$.

3. Строение группы биекций $C_{S(X)}(\Phi)$

Множество K_Φ всех Φ-орбит множества X разбивается на непересекающиеся подмножества $K_\alpha = \{\sigma(x_\alpha^\Phi) \mid \sigma \in C_{S(X)}(\Phi)\}$ — орбиты Φ-орбит x_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$, относительно действия группы биекций $C_{S(X)}(\Phi)$. Для биекции $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$ обозначим через σ_{K_α} биекцию, которая совпадает с σ на Φ-орбитах из множества K_α и действует тождественно, т. е. $\sigma(x) = x$ на элементах $x \in X$, Φ-орбиты которых x^Φ не принадлежит K_α. Обозначим через $\Sigma(K_\alpha)$ множество всех таких биекций. Очевидно, что $\Sigma(K_\alpha) \leq C_{S(X)}(\Phi)$.

Лемма 3.1. $C_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(K_\alpha)$.

Доказательство. Во-первых, $K_\Phi = \bigsqcup_{\alpha\in I'} K_\alpha$, и множества всех элементов из Φ-орбит каждого K_α, $\alpha \in I'$, инвариантны относительно действия биекций $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$. Поэтому каждая биекция $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$ однозначно определяется по ее действию на данных инвариантных подмножествах элементов.

В силу этого сопоставим биекции $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$ функцию f_σ из декартова произведения $\overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(K_\alpha)$ такую, что $f_\sigma(\alpha) = \sigma_{K_\alpha} \in \Sigma(K_\alpha)$. Аналогично каждой функции $f \in \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(K_\alpha)$ сопоставим биекцию $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$, у которой $\sigma_{K_\alpha} = f(\alpha)$, $\alpha \in I'$. Очевидно, что построенное соответствие между группой $C_{S(X)}(\Phi)$ и декартовым произведением $\overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(K_\alpha)$ будет взаимно однозначным. Так как для биекций $\tau, \sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$ выполняются равенства $\tau\sigma_{K_\alpha} = \tau_{K_\alpha}\sigma_{K_\alpha}$, $\alpha \in I'$, где $\tau\sigma_{K_\alpha} = f_{\tau\sigma}(\alpha)$ и $\tau_{K_\alpha} = f_\tau(\alpha)$, $\sigma_{K_\alpha} = f_\sigma(\alpha)$, то построенное взаимно однозначное соответствие является изоморфизмом. Таким образом, установлено равенство $C_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha\in I'}} \Sigma(K_\alpha)$.

Лемма 3.2. *Группы биекций Φ-орбит из множества K_α изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть x_α^Φ и x_β^Φ — две Φ-орбиты из множества K_α. Тогда найдется биекция $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$, которая отображает Φ-орбиту x_α^Φ на x_β^Φ. Если $\sigma_\beta \in \Sigma(x_\beta^\Phi)$, то отображение $\sigma\sigma_\beta\sigma^{-1} : x_\alpha^\Phi \to x_\alpha^\Phi$ как композиция биекций из $C_{S(X)}(\Phi)$ будет само биекцией из $C_{S(X)}(\Phi)$, т. е. $\sigma\sigma_\beta\sigma^{-1} \in \Sigma(x_\alpha^\Phi)$. Очевидно, что отображение $\sigma_\beta \mapsto \sigma\sigma_\beta\sigma^{-1}$ задает изоморфизм группы $\Sigma(x_\beta^\Phi)$ в группу $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$. Таким образом,

$$\Sigma(x_\beta^\Phi) \simeq \sigma\Sigma(x_\beta^\Phi)\sigma^{-1} \leq \Sigma(x_\alpha^\Phi).$$

Аналогично получаем, что

$$\Sigma(x_\alpha^\Phi) \simeq \sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma \leq \Sigma(x_\beta^\Phi).$$

Следовательно,

$$\sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma \leq \Sigma(x_\beta^\Phi) \leq \sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma,$$

т. е. $\sigma^{-1}\Sigma(x_\alpha^\Phi)\sigma = \Sigma(x_\beta^\Phi)$ и $\Sigma(x_\alpha^\Phi) \simeq \Sigma(x_\beta^\Phi)$.

Теорема 3.3. $\Sigma(K_\alpha) = \Sigma(x_\alpha^\Phi) \wr_{K_\alpha} S(K_\alpha)$.

Доказательство. Каждая биекция $\sigma \in C_{S(X)}(\Phi)$ по лемме 1.3 однозначно определяется по ее действию на Φ-орбитах x^Φ, $x \in X$. Поэтому биекция $\sigma \in \Sigma_0 = \{\sigma \mid \sigma \in \Sigma(K_\alpha),\ \sigma(x^\Phi) = x^\Phi,\ x^\Phi \in K_\alpha\}$ однозначно определяется своими ограничениями $\sigma|_{x^\Phi} \in \Sigma(x^\Phi)$ на Φ-орбитах $x^\Phi \in K_\alpha$. По лемме 3.2 все группы биекций $\Sigma(x^\Phi)$ у Φ-орбит $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ изоморфны группе $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$. Пусть $\rho_{x^\Phi} : \Sigma(x^\Phi) \to \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$, — фиксированные изоморфизмы, гарантируемые леммой 3.2. Тогда каждой биекции $\sigma \in \Sigma_0$ сопоставим функцию $f_\sigma \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, где $f_\sigma(x^\Phi) = \rho_{x^\Phi}(\sigma|_{x^\Phi})$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$. Ясно, что построенное таким образом соответствие взаимно однозначно. Для биекций $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_0$ выполняются равенства $\sigma_1\sigma_2|_{x^\Phi} = \sigma_1|_{x^\Phi}\sigma_2|_{x^\Phi}$, $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$, где $\rho_{x^\Phi}(\sigma_1\sigma_2|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_1\sigma_2}(x^\Phi)$ и $\rho_{x^\Phi}(\sigma_1|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_1}(x^\Phi)$, $\rho_{x^\Phi}(\sigma_2|_{x^\Phi}) = f_{\sigma_2}(x^\Phi)$. Поэтому данное взаимно однозначное соответствие гомоморфно, т. е. является изоморфизмом. Следовательно, множество всех биекций $\sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$, которые переводят каждую Φ-орбиту из множества K_α в себя, образуют подгруппу, изоморфную группе $\mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$. Таким образом, $\mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr) < \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$.

Выберем некоторый фиксированный элемент x_α из Φ-орбиты множества K_α и рассмотрим множество $X_\alpha = \{\sigma(x_\alpha) \mid \sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)\}$. Ясно, что каждая Φ-орбита $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ имеет непустое пересечение с множеством X_α, а все элементы этого множества в силу леммы 1.1 обладают одним и тем же стабилизатором в группе Φ. Выделим в каждой Φ-орбите $x^\Phi \in \mathrm{K}_\alpha$ по одному элементу из его пересечения с X_α. Полученное множество является множеством элементов, представляющих Φ-орбиты из K_α и обладающих одним и тем же стабилизатором в группе Φ. Следовательно, любая подстановка на этом множестве представителей Φ-орбит из K_α по лемме 1.3 однозначно продолжается до биекции на все множество элементов Φ-орбит из множества K_α. Множество всех полученных таким образом биекций из $\Sigma(K_\alpha)$ является подгруппой, изоморфной группе подстановок $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$. Поэтому эту подгруппу биекций будем называть подгруппой подстановок и обозначать через $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha) < \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$. Кроме того, если $s \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$, $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, и x — произвольный элемент построенного множества представителей Φ-орбит из K_α, то

$$s^{-1}fs(x) = s(f(s^{-1}(x))) = s(\varphi_{s^{-1}(x)}(s^{-1}(x))) \\ = \varphi_{s^{-1}(x)}(s(s^{-1}(x))) = \varphi_{s^{-1}(x)}(x) \in x^\Phi,$$

где $\varphi_{s^{-1}(x)} \in \mathrm{N}_\Phi\bigl(\mathrm{C}_\Phi\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, по теореме 2.1 определяет биекцию f на Φ-орбите $s^{-1}(x)^\Phi$. Таким образом, получаем

$$s^{-1}fs = f^s \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$$

и $f^s(x) = f(s^{-1}(x))$.

Рассмотрим произвольную биекцию $\sigma \in \Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$. По лемме 1.3 эта биекция однозначно определяется по значениям на элементах, представляющих Φ-орбиты из множества K_α. Если x — произвольный элемент построенного множества представителей Φ-орбит из K_α, то

$$\sigma(x) = \varphi_{s(x)}(s(x)) = f(s(x)),$$

где $s \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ — биекция, которая задает подстановку на множестве представителей Φ-орбит из K_α такую же, какую индуцирует биекция σ на множестве K_α, и $\varphi_{s(x)} \in \Sigma(s(x)^\Phi) \simeq \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ — элемент, задающий биекцию на Φ-орбите $s(x)^\Phi$ для биекции $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$. Следовательно, $\sigma = sf$, где $\sigma \in \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ и $f \in \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$, т. е. $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha) \cdot \mathrm{Fun}\bigl(\mathrm{K}_\alpha, \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)\bigr)$.

Таким образом, выполнены все три условия из определения сплетения групп по множеству (см. введение) и группа биекций $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha)$ является сплетением групп $\Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr)$ и $\mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ по множеству K_α, т. е.

$$\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha).$$

Теорема 3.4. *Пусть $\Phi \le S(X)$, тогда*

$$\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha \in I'}} \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha).$$

Доказательство. По лемме 3.1

$$\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) = \overline{\prod_{\alpha \in I'}} \Sigma(\mathrm{K}_\alpha).$$

Тогда из теорем 2.1 и 3.3 в силу равенства $\Sigma(\mathrm{K}_\alpha) = \Sigma\bigl(x_\alpha^\Phi\bigr) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha)$ получаем требуемое утверждение.

Следствие 1. *Пусть G — группа, $\rho : G \to S(G)$ — ее регулярное представление на себе, где $\rho(g) : x \mapsto xg$, $x \in G$. Тогда централизатор $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) < S(G)$ представления $\rho(G) < S(G)$ является группой, изоморфной группе G. При этом биекции $\sigma_g \in \mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ могут быть заданы по правилу $\sigma_g : x \mapsto g^{-1}x$, $x \in G$.*

Доказательство. Так как в этом случае имеем $\Phi = \rho(G) < S(G)$ и $\rho(g)(x) = xg$, $x \in G$, то $G = e^\Phi$ и $\mathrm{K}_1 = \{e^\Phi\}$. Далее, $\mathrm{St}_\Phi(e) = \{\rho(g) \mid \rho(g)(e) = eg = e\} = \langle \rho(e) \rangle$ и $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(e)) = \rho(G)$. Следовательно, по теореме 3.4 $\Sigma(e^\Phi) = \rho(G)/\langle\rho(e)\rangle \simeq G$ и $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) = \Sigma(e^\Phi) \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) = G \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) = G$, так как $|\,\mathrm{K}_1\,| = 1$ и $S(\mathrm{K}_1) = \langle e \rangle$.

При этом в силу леммы 1.3 каждая биекция $\sigma \in \mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ однозначно определяется по ее значениям на выделенных элементах Φ-орбит. В нашем случае Φ-орбита единственна, а ее выделенным элементом можно взять единицу e. Таким образом, все биекции из $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G))$ будут иметь вид

$$\sigma_g : \begin{cases} e \mapsto \sigma_g(e) = g^{-1}, \\ \rho(h)(e) \mapsto \rho(h)(\sigma_g(e)) = \rho(h)(g^{-1}) = g^{-1}h, \quad \rho(h) \in \rho(G). \end{cases}$$

Очевидно, что $\sigma_g(\rho(h)(x)) = g^{-1}xh = \rho(h)(\sigma_g(x))$ и

$$\sigma_{g_1}\sigma_{g_2}(x) = \sigma_{g_2}(\sigma_{g_1}(x)) = \sigma_{g_2}\bigl(g_1^{-1}x\bigr) = g_2^{-1}g_1^{-1}x = (g_1g_2)^{-1}x = \sigma_{g_1g_2}(x).$$

Поэтому все биекции σ_g перестановочны со всеми биекциями $\rho(h) \in \Phi = \rho(G)$, а взаимно однозначное соответствие $\mathrm{C}_{S(G)}(\rho(G)) \to G$, заданное по правилу $\sigma_g \mapsto g$, является изоморфизмом.

Теорема 3.5. *Пусть G — группа, $\Phi \le \operatorname{Aut} G$ и $\mathrm{B}_\Phi(G)$ — группа Φ-коммутирующих биекций группы G. Если $G = \bigsqcup_{\alpha \in I} g_\alpha^\Phi$, $\mathrm{K}_\Phi = \bigsqcup_{\alpha \in I'} \mathrm{K}_\alpha$, $I' \subseteq I$, где $\mathrm{K}_\alpha = \bigl\{\sigma\bigl(g_\alpha^\Phi\bigr) \mid \sigma \in \mathrm{B}_\Phi(G)\bigr\}$, и $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$, $\alpha \in I'$, — группа Φ-коммутирующих биекций на себя Φ-орбиты g_α^Φ, то*

$$\mathrm{B}_\Phi(G) = \overline{\prod_{\alpha \in I'}} \mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} \mathrm{S}(\mathrm{K}_\alpha),$$

где $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G) = \mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(g_\alpha))/\operatorname{St}_\Phi(g_\alpha)$.

Доказательство. Так как $\Phi \le \operatorname{Aut} G < S(G)$, то находимся в рамках условия теоремы 3.4, где множеству X соответствует множество всех элементов группы G, группе $\mathrm{C}_{S(X)}(\Phi) < S(X)$ — группа биекций $\mathrm{B}_\Phi(G) < S(G)$, а группам биекций $\Sigma(x_\alpha^\Phi)$ Φ-орбит x_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$, — группы биекций $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$ Φ-орбит g_α^Φ, $\alpha \in I' \subseteq I$. Таким образом, теорема 3.5 верна в силу теоремы 3.4.

4. Примеры вычисления групп инвариантных биекций

В работе [2] в явном виде, т. е. с указанием множества конкретных биекций, были найдены группы Φ-коммутирующих биекций для абелевых, свободных неабелевых групп и диэдральных групп D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, где Φ — группа внутренних автоморфизмов исследуемой группы G. В этом случае для каждого элемента группы $y \in G$ его Φ-орбита совпадает с его классом сопряженности в группе: $y^\Phi = y^G = \{gyg^{-1} \mid g \in G\}$. В частности, $\mathrm{St}_\Phi(M) = \mathrm{C}_G(M)$ и $\mathrm{N}_\Phi(\mathrm{St}_\Phi(M)) = \mathrm{N}_G(\mathrm{C}_G(M))$, где $M \subseteq G$. При этом сами Φ-коммутирующие биекции будем называть *инвариантными*, группу $\mathrm{B}_\Phi(G)$ будем обозначать через $\mathrm{B}(G)$ и называть *группой инвариантных биекций* группы G, подгруппу $\mathrm{B}_{\Phi_\alpha}(G)$ будем обозначать через $\mathrm{B}_\alpha(G)$ и называть *группой инвариантных биекций* класс сопряженности y_α^G, $\alpha \in I' \subseteq I$. Множеству всех Φ-орбит K_Φ группы G соответствует множество всех ее классов сопряженности K. Кроме того, множеству Φ-орбит K_α, $\alpha \in I' \subseteq I$, соответствует множество классов сопряженности, которые составляют $\mathrm{B}(G)$-орбиту класса сопряженности y_α^G. Таким образом, $\mathrm{K} = \bigsqcup\limits_{\alpha \in I'} \mathrm{K}_\alpha$, $I' \subseteq I$. Подгруппу инвариантных биекций, которые действуют тождественно вне $\mathrm{B}(G)$-орбиты класса сопряженности y_α^G, будем обозначать также через $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_\alpha}(G)$.

Для удобства переформулируем теоремы 2.1, 3.3, 3.5 в новых терминах, соответствующих случаю, когда Φ — группа внутренних автоморфизмов исследуемой группы G. Таким образом, выполнены следующие утверждения.

Теорема 4.1. *Группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}_\alpha(G)$ *класса сопряженности* y_α^G *изоморфна группе* $\mathrm{N}_G(\mathrm{C}_G(y_\alpha))/\,\mathrm{C}_G(y_\alpha)$.

Теорема 4.2. *Группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_\alpha}(G)$ *у* $\mathrm{B}(G)$*-орбиты* $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(y_\alpha^G) \mid \sigma \in \mathrm{B}(G)\}$ *изоморфна группе* $\mathrm{B}_\alpha(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} S(\mathrm{K}_\alpha)$.

Теорема 4.3. *Пусть*

$$G = \bigsqcup_{\alpha \in I} y_\alpha^G, \quad \mathrm{K} = \bigsqcup_{\alpha \in I'} \mathrm{K}_\alpha, \quad I' \subseteq I,$$

где $\mathrm{K}_\alpha = \{\sigma(y_\alpha^G) \mid \sigma \in \mathrm{B}(G)\}$. *Если* $\mathrm{B}_\alpha(G)$ — *группа инвариантных биекций класса сопряженности* y_α^G, *то группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}(G)$ *изоморфна группе* $\overline{\prod\limits_{\alpha \in I'}} \mathrm{B}_\alpha(G) \wr_{\mathrm{K}_\alpha} S(\mathrm{K}_\alpha)$.

Покажем, как, используя сформулированные выше теоремы 4.1, 4.2, 4.3, можно вычислить группу инвариантных биекций для свободной бернсайдовой группы $\mathbf{B}_2(3) = F_2/F_2^3$.

Теорема 4.4. *Для свободной бернсайдовой группы* $\mathbf{B}_2(3)$ *группа инвариантных биекций* $\mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))$ *изоморфна группе* $S_3 \times (\mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2)^4$, *где* $X_2 = \{1, 2\}$.

Доказательство. Во-первых, $|\mathbf{B}_2(3)| = 27$, $\gamma_3 \mathbf{B}_2(3) = e$ и каждый элемент обладает канонической формой записи $x^m y^n [x, y]^k$, где x, y — порождающие группы $\mathbf{B}_2(3)$, а $m, n, k \in \{0, 1, 2\}$ [4, с. 346]. Далее, группа $\mathbf{B}_2(3)$ обладает следующим разбиением на классы сопряженности:

$$\mathbf{B}_2(3) = \mathrm{K}_1 \sqcup \mathrm{K}_2 \sqcup \mathrm{K}_3 \sqcup \mathrm{K}_4 \sqcup \mathrm{K}_5,$$

где

$$\mathrm{K}_1 = \{e\} \sqcup \{[x, y]\} \sqcup \{[x, y]^2\},$$

$$\mathrm{K}_2 = \{x,\ x[x,y],\ x[x,y]^2\} \sqcup \{x^2,\ x^2[x,y],\ x^2[x,y]^2\},$$

$$\mathrm{K}_3 = \{y,\ y[x,y],\ y[x,y]^2\} \sqcup \{y^2,\ y^2[x,y],\ y^2[x,y]^2\},$$

$$\mathrm{K}_4 = \{xy,\ xy[x,y],\ xy[x,y]^2\} \sqcup \{x^2y^2,\ x^2y^2[x,y],\ x^2y^2[x,y]^2\},$$

$$\mathrm{K}_5 = \{xy^2,\ xy^2[x,y],\ xy^2[x,y]^2\} \sqcup \{x^2y,\ x^2y[x,y],\ x^2y[x,y]^2\}.$$

Все классы сопряженности разбиты на подмножества всех классов, которые содержат элементы с общим централизатором. Таким образом, в силу лемм 1.2 и 1.4, каждое из этих подмножеств является орбитой некоторого класса сопряженности относительно действия группы инвариантных биекций $\mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))$.

Для классов сопряженности из орбиты $\mathrm{K}_1 = \{\sigma(e) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства $\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}([x,y]^k) = \mathbf{B}_2(3)$. Следовательно, по теореме 4.1 группа инвариантных биекций класса сопряженности из этой орбиты $\mathrm{B}_1(\mathbf{B}_2(3)) = e$, при этом $|\,\mathrm{K}_1\,| = 3$. Поэтому в силу теоремы 4.2 получаем $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_1}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_1(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_1} S(\mathrm{K}_1) \simeq S_3$.

Для классов сопряженности из орбиты $\mathrm{K}_2 = \{\sigma(x^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2) = \langle x, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_2(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_2\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_2}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_2(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_2} S(\mathrm{K}_2) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_3 = \{\sigma(y^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(y) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(y^2) = \langle y, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_3(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_3\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_3}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_3(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_3} S(\mathrm{K}_3) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_4 = \{\sigma((xy)^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(xy) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2y^2) = \langle xy, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

По теореме 4.1 $\mathrm{B}_4(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_4\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_4}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_4(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_4} S(\mathrm{K}_4) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Для классов сопряженности из $\mathrm{K}_5 = \{\sigma((x^2y)^{\mathbf{B}_2(3)}) \mid \sigma \in \mathrm{B}(\mathbf{B}_2(3))\}$ имеем равенства

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(x^2y) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}_2(3)}(xy^2) = \langle xy^2, [x,y]\rangle \trianglelefteq \mathbf{B}_2(3).$$

Следовательно, по теореме 4.1 $\mathrm{B}_5(\mathbf{B}_2(3)) \simeq \mathbb{Z}_3$, при этом $|\,\mathrm{K}_5\,| = 2$. Поэтому в силу теоремы 4.2 $\mathrm{B}_{\mathrm{K}_5}(\mathbf{B}_2(3)) = \mathrm{B}_5(\mathbf{B}_2(3)) \wr_{\mathrm{K}_5} S(\mathrm{K}_5) \simeq \mathbb{Z}_3 \wr_{X_2} S_2$.

Таким образом, в силу теоремы 4.3, получаем требуемый результат.

Благодарности. Автор выражает благодарность участникам семинара «Эварист Галуа» Новосибирского государственного университета и лично В. Г. Бардакову и М. В. Нещадиму за полезные предложения и плодотворные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симонов А. А., Нещадим М. В., Бородин А. Н.* Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

2. *Borodin A. N., Neshchadim M. V., Simonov A. A.* Group bijections commuting with inner automorphisms // Sib. Math. J. 2024. V. 65, N 5. P. 1015–1025.

3. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

4. *Холл М.* Теория групп. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 19 октября 2024 г.
После доработки 27 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Брюханов Олег Вадимович (ORCID 0009-0000-7512-6992)
Новосибирский государственный технический университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
bryuolegvad@ya.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.518:517.54

ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ГРУППАХ КАРНО И КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ

С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

Аннотация. Известно, что предел последовательности квазиконформных отображений, т. е. гомеоморфизмов с ограниченным искажением, коэффициенты искажения которых ограничены в совокупности, является либо квазиконформным, либо постоянным отображением. В настоящей работе в случае групп Карно типа Гейзенберга установлено, что аналогичное свойство справедливо для некоторого класса сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов с конечным искажением и интегрируемой в подходящей степени функцией искажения. Данный результат применяется для поиска взаимно однозначных решений вариационных задач, аналогичных задачам нелинейной теории упругости, в нерегулярных областях.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.308

Ключевые слова: квазиконформный анализ, конечное искажение, функция искажения, оператор композиции, нелинейная упругость, поливыпуклая функция.

Введение

Некоторые задачи нелинейной теории упругости, например, для гиперупругих материалов, сводятся к задаче минимизации интегрального функционала, называемого функционалом полной энергии [1]. В этой ситуации, в отличие от случая линейной теории упругости, подынтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов решения вариационных задач. Тем не менее существует заложенный Дж. Боллом математический подход, в рамках которого можно исследовать функционалы полной энергии, моделируя при этом достаточно широкий класс прикладных задач [2; 3, § 7.4–7.7].

В работе [4] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-е гг. прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка, см. [5]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

Работа С. К. Водопьянова подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект No FWNF-2022-0006). Работа С. В. Павлова выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации No 075-15-2022-282.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ обладает *ограниченным искажением*, если с некоторой постоянной $K \geq 1$ неравенство

$$|Df(x)|^n \leq K \det Df(x)$$

выполняется для п. вс. $x \in \Omega$. Наименьшая из таких констант K называется *коэффициентом искажения* отображения f и обозначается символом $K(f)$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *квазиконформным*, если f — гомеоморфизм с ограниченным искажением.

Ю. Г. Решетняк установил [5, гл. II, § 9.2], что если последовательность $\{f_k : \Omega \to \mathbb{R}^n\}$ отображений с ограниченным искажением, коэффициенты искажения членов которой ограничены в совокупности, $\sup\limits_k K(f_k) < \infty$, сходится к отображению f_0 в $L_{n,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, то f_0 также является отображением с ограниченным искажением и

$$K(f_0) \leq \varliminf_{k\to\infty} K(f_k).$$

Аналогичный результат для отображений с ограниченным искажением в произвольных группах Карно получен в [6]. Отсюда вытекает, что если поточечный предел последовательности квазиконформных отображений с ограниченными коэффициентами искажения непостоянен, то он — квазиконформное отображение (см. также [7, § 37]).

В настоящей работе в случае групп Карно H-типа установлена справедливость обобщенного утверждения для гомеоморфизмов с интегрируемым искажением. А именно, пусть $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{H}\}$ — последовательность гомеоморфизмов, каждый из которых обладает *конечным искажением*, и пусть последовательность *функций искажения* $\{K_\nu(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\Omega)$, $\sigma > \nu(\nu - 1)$. Если $\{\varphi_k\}$ сходится к непостоянному отображению φ_0 в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, то φ_0 — гомеоморфизм с конечным искажением и

$$\|K_\nu(\cdot, \varphi_0) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \varliminf_{k\to\infty} \|K_\nu(\cdot, \varphi_k) \mid L_\sigma(\Omega)\|.$$

Данный результат является одним из основных для решения вариационных задач на группах Карно, подобных задачам нелинейной теории упругости [8, 9].

Многие применяемые в настоящей работе ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно H-типа получены в недавних работах [10–13]. Обобщения работы [12] на случай произвольных групп Карно пока неизвестны.

1. Предварительные сведения

1.1. Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной градуированной нильпотентной группой* или *группой Карно* (см., например, [14, гл. 1]) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ подпространств $\mathfrak{g}_i$, связанных условиями $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа Карно $\mathbb{G}$ называется *двухступенчатой*, если $m = 2$.

Фиксируем скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$ называется *горизонтальным пространством* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальными векторными полями*. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Для удобства также обозначим $n = n_1$. Фиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение

$g = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}X_{ij}\right)(e)$ (где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{G}$ [14, предложение 1.2], можно отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ, заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0; +\infty)$ класса $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$ такая, что

(a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(b) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda\rho(x)$.

Из определения также следует [14, предложение 1.6]:

(c) существует число $c > 0$ такое, что $\rho(xy) \le c(\rho(x)+\rho(y))$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$ (обобщенное неравенство треугольника);

(d) любые две однородные нормы эквивалентны, т. е. для любых двух однородных норм ρ_1, ρ_2 найдутся числа $0 < \alpha \le \beta < \infty$ такие, что $\alpha\rho_1(x) \le \rho_2(x) \le \beta\rho_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{G}$.

Пример. Для точки $x = (x_{ij}) \in \mathbb{G}$ и индекса $i = 1, \dots, m$ определим $X^{(i)} \in \mathfrak{g}_i$ как $\sum\limits_{j=1}^{n_i} x_{ij}X_{ij}$. Равенством

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^{m} |X^{(i)}|^{2m!/i}\right)^{\frac{1}{2m!}},$$

в котором $|X^{(i)}|$ — евклидова норма в $\mathfrak{g}_i$, задается однородная норма $\rho : \mathbb{G} \to [0; +\infty)$.

Абсолютно непрерывная в римановой метрике кривая $\gamma : [a; b] \to \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$ для п. вс. t. *Расстоянием Карно — Каратеодори* $d_{cc}(x, y)$ между точками $x, y \in \mathbb{G}$ называется точная нижняя грань длин $\int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\,dt$ горизонтальных кривых с концевыми точками x и y. Согласно теореме Рашевского — Чоу (см., например, [15, § 0.4, 1.1]) любые две точки можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины. Метрика d_{cc} и однородная норма ρ эквивалентны: существуют положительные постоянные α и β такие, что

$$\alpha d_{cc}(x, y) \le \rho(x, y) \le \beta d_{cc}(x, y),$$

где $\rho(x, y) = \rho(y^{-1}x)$.

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — это биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} in_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Мера нормирована так, чтобы ее значение на единичном шаре $B(0, 1)$ равнялось единице, $|B(0, 1)| = 1$. Здесь $B(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid d_{cc}(x, y) < r\}$ — шар в метрике Карно — Каратеодори.

Группа Карно $\mathbb{H}$ называется *группой Карно H-типа*, если она является двухступенчатой и ее алгебра Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ может быть снабжена скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таким, что $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$ и для каждого поля $Z \in \mathfrak{h}_2$, $|Z| = 1$, линейное отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_1$, определенное соотношением

$$\langle J_Z(X), Y\rangle = \langle Z, [X, Y]\rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{h}_1,$$

ортогональное.

Для удобства мы обозначаем группу Карно H-типа символом $\mathbb{H}$, а символ $\mathbb{G}$ используем в остальных случаях.

Пример. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$ с групповой операцией

$$(x, y, z) * (x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{2}\right),$$

$$x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k, \quad z, z' \in \mathbb{R},$$

— классический пример неабелевой группы Карно. Ее алгебра Ли $\mathfrak{h}^k = \mathfrak{h}_1^k \oplus \mathfrak{h}_2^k$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \ i = 1, \dots, k, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^k = \operatorname{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \dots, k\}$, $\mathfrak{h}_2^k = \operatorname{span}\{Z\}$, а нетривиальными скобками Ли являются лишь $[X_i, Y_i] = Z$, $i = 1, \dots, k$. Однородная размерность $\mathbb{H}^k$ равна $\nu = 2k + 2$. Если скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ таково, что векторные поля X_i, Y_i, $i = 1, \dots, k$, Z образуют ортонормированную систему, то отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1^k \to \mathfrak{h}_1^k$ определяется соотношениями $J_Z(X_i) = Y_i$, $J_Z(Y_i) = -X_i$ и, очевидно, является ортогональным.

1.2. Отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область (непустое связное открытое множество в $\mathbb{G}$). Пространство $L_p(\Omega)$, $p \in [1; \infty)$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, интегрируемых в степени p. Норма на $L_p(\Omega)$ определяется как

$$\|u \mid L_p(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство $L_\infty(\Omega)$ состоит из измеримых существенно ограниченных функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Норма на $L_\infty(\Omega)$ определяется как величина

$$\|u \mid L_\infty(\Omega)\| = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

где $\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|$ — существенный супремум функции u на Ω. Функция u принадлежит $L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $p \in [1; \infty]$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Обозначим базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$ символами $X_1 = X_{11}$, $\dots, X_n = X_{1n}$. Пусть Π_j — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{G} \mid x_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$, где $x_j = x_{1j}$ — горизонтальные координаты точки $x = (x_{ij})$. Мера $d\mu_j = \imath(X_j)\, dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$. Отображение $\varphi : \Omega \to M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M *абсолютно непрерывно на п. вс. линиях*, $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; M)$, если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого $j = 1, \dots, n$ оно было абсолютно непрерывным на интегральной линии $\{\exp(tX_j)(y) \mid t \in \mathbb{R}\} \cap \Omega$ векторного поля X_j для μ_j-п. вс. $y \in \Pi_j$. Полагаем $\mathrm{ACL}(\Omega) = \mathrm{ACL}(\Omega; \mathbb{R})$.

Пространство $L_p^1(\Omega)$, $p \in [1; \infty]$, состоит из функций $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{ACL}(\Omega)$ таких, что классические производные[1)] $X_j u$, $j = 1, \dots, n$, принадлежат $L_p(\Omega)$.

[1)] Точнее, производные абсолютно непрерывного на почти всех интегральных линиях полей $X_1, \dots, X_n$ представителя функции u. Классические производные указанного представителя в направлениях полей X_j существуют п. вс.

Полунорма функции $u \in L^1_p(\Omega)$ равна $\|u \mid L^1_p(\Omega)\| = \| |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\|$, где $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u) = \sum\limits_{j=1}^{n} (X_j u) X_j$ — *горизонтальный градиент* u. Далее вместо $\| |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\|$ будем писать $\|\nabla_h u \mid L_p(\Omega)\|$.

Эквивалентное определение пространства $L^1_p(\Omega)$ основано на понятии обобщенной производной в смысле Соболева: локально суммируемая функция $u_j : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *вдоль векторного поля* X_j, $j = 1, \dots, n$, если

$$\int\limits_{\Omega} u_j(x)\theta(x)\,dx = -\int\limits_{\Omega} u(x) X_j \theta(x)\,dx$$

для любой тестовой функции $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Локально суммируемая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $L^1_p(\Omega)$ в том и только том случае, когда существуют ее обобщенные производные $u_j \in L_p(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Более того, $u_j = X_j u$ п. вс., где $X_j u$ — классические производные функции $u \in \mathrm{ACL}(\Omega)$.

Пространство Соболева $W^1_p(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega) \cap L^1_p(\Omega)$ и снабжено нормой

$$\|u \mid W^1_p(\Omega)\| = \|u \mid L_p(\Omega)\| + \|u \mid L^1_p(\Omega)\|.$$

Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j \varphi(x) \in \widetilde{\mathfrak{g}}_1(\varphi(x))$ для п. вс. $x \in \Omega$ [16, предложение 4.1]. Матрица $D_h\varphi(x) = (X_i \varphi_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \widetilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h \varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \to \widetilde{\mathfrak{g}}_1$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ. Известно [17, теорема 1.2], что для п. вс. $x \in \Omega$ линейный оператор $D_h\varphi(x)$ определен и может быть продолжен до гомоморфизма алгебр Ли $\widehat{D}\varphi(x) : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\widehat{D}\varphi(x) : T_x\mathbb{G} \to T_{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$|D_h\varphi(x)| \le |\widehat{D}\varphi(x)| \le C|D_h\varphi(x)|,$$

где C зависит только от структуры групп. Здесь норма оператора $\widehat{D}\varphi(x)$ определяется как

$$\sup\{\widetilde{\rho}(\widehat{D}\varphi(x)\langle X\rangle) \mid X \in \mathfrak{g},\ \rho(X) \le 1\},$$

где ρ и $\widetilde{\rho}$ — однородные нормы на $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ соответственно, и кратко обозначено $\rho(X) = \rho(\exp(X))$, $\widetilde{\rho}(\widetilde{X}) = \widetilde{\rho}(\widetilde{\exp}(\widetilde{X}))$, $X \in \mathfrak{g}$, $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Гомоморфизму $\widehat{D}\varphi(x)$ также соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathscr{P}}\varphi(x) = \widetilde{\exp} \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [17].

Определение 1.1. *Класс отображений Соболева* $W^1_p(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, $p \in [1; \infty]$, состоит из измеримых отображений $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, для которых величина

$$\|\varphi \mid W^1_p(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})\| = \|\rho \circ \varphi \mid L_p(\Omega)\| + \| |D_h\varphi| \mid L_p(\Omega)\|$$

конечна. Отображение φ *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W^1_p(U; \widetilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$. Далее пишем $\|D_h\varphi \mid L_p(\Omega)\|$ вместо $\| |D_h\varphi| \mid L_p(\Omega)\|$.

Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [17, предложение 4.2]. Заметим, что если отображение $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$

локально ограниченное, то все координатные функции φ_i, $i = 1, \dots, \widetilde{N}$, принадлежат $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Отображение φ класса $\mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{G})$ называется отображением *с конечным искажением*, если $D_h\varphi = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$. *Внешняя функция искажения* $K_p(\cdot,\varphi)$, $p \in [1;\infty)$, определяется по правилу

$$K_p(x,\varphi) = \begin{cases} \frac{|D_h\varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для $1 \le q \le p < \infty$ обозначим интегральную норму функции искажения как

$$K_{q,p}(\varphi,\Omega) = \|K_p(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|,$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

Пространство $\mathrm{Lip}(\Omega)$ состоит из липшицевых в метрике Карно — Каратеодори функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, а пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике Карно — Каратеодори на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

Теорема [18, теорема 2; 19, теорема 2]. *Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \to \Omega'$ областей в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(\Omega') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$;

2) φ *имеет конечное искажение*;

3) $K_p(\cdot,\varphi) \in L_\sigma(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$).

При этом норма $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $K_{q,p}(\varphi,\Omega)$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{p,q} > 0$ справедливы неравенства

$$\alpha_{p,q} K_{q,p}(\varphi,\Omega) \le \|\varphi^*\| \le K_{q,p}(\varphi,\Omega).$$

Предложение 1.1 [17, теорема 5.3]. *Пусть U — открытое множество в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, а $\varphi : U \to \mathbb{G}$ — отображение класса $\mathrm{ACL}(U;\mathbb{G})$. Тогда существует множество меры нуль $\Sigma_\varphi \subset U$ такое, что $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина.*

Более того, для всякой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ справедливо следующее:

(1) *функции $U \ni x \mapsto u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|$ и $\mathbb{G} \ni y \mapsto \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} u(x)$ измеримые;*

(2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} u(x)\,dy; \tag{1.1}$$

(3) *если функция $U \ni x \mapsto u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|$ интегрируемая, то и функция в правой части (1.1) интегрируемая и верна формула (1.1).*

2. Основной результат

Следующий результат анонсирован в работе [20].

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbb{H}$ *— группа Карно* H*-типа,* $\Omega \subset \mathbb{H}$ *— область и* $q \in (\nu - 1; \nu]$. *Пусть последовательность отображений* $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{H}\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) *каждое отображение* φ_k *— гомеоморфизм;*

2) $\varphi_k \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, $k \in \mathbb{N}$, *и последовательность* $\{|D_h \varphi_k|\}$ *ограничена в* $L_\nu(\Omega)$;

3) *каждый* φ_k *обладает конечным искажением, и последовательность* $\{K_\nu(\cdot, \varphi_k)\}$ *ограничена в* $L_\sigma(\Omega)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = \nu$);

4) $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$ *п. вс. в* Ω.

Если $\{\varphi_k\}$ *сходится*[2)] *к непостоянному отображению* φ_0 *в* $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, *то:*

(a) φ_0 *— гомеоморфизм;*

(b) φ_0 *принадлежит классу Соболева* $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$ *и выполнено неравенство*

$$\int\limits_\Omega |D_h \varphi_0(x)|^\nu \, dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^\nu \, dx;$$

(c) φ_0 *обладает конечным искажением,* $K_\nu(\cdot, \varphi_0) \in L_\sigma(\Omega)$ *и*

$$K_{q,\nu}(\varphi_0, \Omega) \leq \varliminf_{k\to\infty} K_{q,\nu}(\varphi_k, \Omega);$$

(d) $\det \widehat{D}\varphi_0 \geq 0$ *п. вс. в* Ω.

Следствие 2.1. *Пусть* $\mathbb{H}$ *— группа Карно* H*-типа,* $\Omega \subset \mathbb{H}$ *— область,* $q \in (\nu - 1; \nu]$, *и* C_1, C_2 *— положительные постоянные. Тогда класс отображений*

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \big\{\varphi : \Omega \to \mathbb{H} \mid \ & \varphi \in W^1_\nu(\Omega; \mathbb{H}),\ \|D_h\varphi \mid L_\nu(\Omega)\| \leq C_1, \\ & \varphi \text{ — гомеоморфизм с конечным искажением}, \\ & K_{q,\nu}(\varphi, \Omega) \leq C_2,\ \det \widehat{D}\varphi \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\big\}\end{aligned}$$

замкнут в следующем смысле: если последовательность $\{\varphi_k \in \mathscr{A}\}$ *сходится к непостоянному отображению* φ_0 *в* $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$, *то* $\varphi_0 \in \mathscr{A}$.

3. Доказательство теоремы 2.1

Наиболее существенная часть вопроса состоит в доказательстве того, что φ_0 — гомеоморфизм. Множества

$$B_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid \rho(y^{-1}x) < r\}, \quad S_\rho(x, r) = \{y \in \mathbb{G} \mid \rho(y^{-1}x) = r\}$$

суть открытый шар и сфера соответственно. В следующем предложении ρ — произвольная однородная норма. Далее $\rho(x, \partial\Omega) = \inf\{\rho(x, y) \mid y \in \partial\Omega\}$.

Предложение 3.1 [21, предложение 4.1]. *Пусть* $\mathbb{H}$ *— группа Карно* H*-типа,* $\Omega \subset \mathbb{H}$ *— область, а* $\varphi \in W^1_\nu(\Omega; \mathbb{H})$ *— гомеоморфизм.*

[2)] Т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi_0(x))\, dx = 0$ для каждого компакта $K \Subset \Omega$.

Тогда для точек $x, y \in \Omega$, $y \in B_\rho(x,r)$, $r < r_0/2$, $r_0 = \frac{1}{13c}\rho(x,\partial\Omega)$, выполняется соотношение

$$d_{cc}(\varphi(x),\varphi(y)) \le C_1 \left(\ln\frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{\nu}} \left(\int\limits_{B_\rho(x,r_0)} [M_{6r_0}(D_h\varphi)(z)]^\nu\,dz\right)^{\frac{1}{\nu}},$$

где c — постоянная в обобщенном неравенстве треугольника,

$$M_t(g)(z) = \sup_{0<s\le t}\frac{1}{|B_\rho(z,s)|}\int\limits_{B_\rho(z,s)} |g(y)|\,dy$$

— усеченная максимальная функция Харди — Литтлвуда, а постоянная C_1 не зависит ни от x, y, ни от φ.

По теореме Харди — Литтлвуда [22, гл. I.3, теорема 1] последовательность максимальных функций $\{M_{6r_0}(D_h\varphi_k)\}_k$ ограничена в $L_\nu(B_\rho(x,r_0))$. Значит, по предложению 3.1 гомеоморфизмы φ_k, $k \in \mathbb{N}$, в окрестности каждой точки $x \in \Omega$ обладают общим модулем непрерывности и потому $\{\varphi_k\}$ сходится к φ_0 локально равномерно.

3.1. Принадлежность классу Соболева. Пусть, как и прежде, $\mathfrak{g}_1$ — горизонтальное пространство алгебры Ли группы $\mathbb{G}$. Обозначим через $\mathscr{L}(\mathfrak{g}_1)$ пространство всех линейных операторов $A : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_1$, снабженное операторной нормой

$$|A| = \sup\{|A\langle X\rangle| \mid X \in \mathfrak{g}_1,\ |X| \le 1\}.$$

П. (b) теоремы 2.1 немедленно вытекает из нижеследующей леммы 3.1. Подробности ее доказательства отложим до разд. 4.1.

Лемма 3.1 [21, предложения 3.3, 3.10; 23, теорема 4.2]. *Пусть $1 < p < \infty$, $\mathbb{G}$ — произвольная группа Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область, и пусть $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{G}\}$ — произвольная последовательность отображений класса $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, сходящаяся в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{G}$. Если последовательность $\bigl\{\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^p\,dx\bigr\}$ ограничена, то φ_0 принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$, а последовательность горизонтальных дифференциалов $\{D_h\varphi_k\}$ сходится к $D_h\varphi_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega;\mathscr{L}(\mathfrak{g}_1))$. В частности,*

$$\int\limits_\Omega |D_h\varphi_0(x)|^p\,dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^p\,dx.$$

3.2. $\mathscr{N}$-свойство Лузина.

Определение 3.1. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ называется *K-квазимонотонным*, $K \ge 1$, если для всякого шара $B_\rho = B_\rho(x,r) \Subset \Omega$ выполнено

$$\operatorname{diam}_\rho \varphi(B_\rho) \le K \operatorname{diam}_\rho \varphi(S_\rho),$$

где $S_\rho = \partial B_\rho = S_\rho(x,r)$, а $\operatorname{diam}_\rho A = \sup\{\rho(x_1,x_2) \mid x_1, x_2 \in A\}$ — диаметр множества A.

Лемма 3.2. *Пусть последовательность K-квазимонотонных непрерывных отображений $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{G}\}$ сходится локально равномерно в Ω к отображению φ_0. Тогда φ_0 — K-квазимонотонное отображение.*

Доказательство. В силу локальной равномерной сходимости для всякого шара $B_\rho \Subset \Omega$ и его граничной сферы $S_\rho = \partial B_\rho$ имеем

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}_\rho \varphi_k(B_\rho) = \operatorname{diam}_\rho \varphi_0(B_\rho), \quad \lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}_\rho \varphi_k(S_\rho) = \operatorname{diam}_\rho \varphi_0(S_\rho). \quad \square$$

Так как φ_k — гомеоморфизмы, то $\operatorname{diam}_\rho \varphi_k(B_\rho) = \operatorname{diam}_\rho \varphi_k(S_\rho)$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда φ_0 — 1-квазимонотонное отображение. Отображение φ_0 обладает $\mathscr{N}$-свойством как непрерывное квазимонотонное отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{H})$ [24, теорема 3]. По аналогичным причинам каждый гомеоморфизм φ_k также обладает $\mathscr{N}$-свойством.

3.3. $\mathscr{N}^{-1}$-свойство и конечность искажения. Следующая лемма доказывается точно так же, как [21, предложение 3.2] и [25, предложение 7].

Лемма 3.3. *Пусть D, D' — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \le p < \infty$. Пусть $\{\varphi_k : D \to \mathbb{G}\}$ — последовательность измеримых отображений, $\varphi_k(x) \in D'$ для п. вс. $x \in D$, каждое из которых индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_k^* : L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_q(D).$$

Если нормы $\|\varphi_k^*\|$, $k \in \mathbb{N}$, операторов композиции ограничены в совокупности, а последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в $L_{1,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{G})$ к некоторому отображению $\varphi_0 : D \to \mathbb{G}$ такому, что $\varphi_0(x) \in D'$ для п. вс. $x \in D$, то φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_q(D)$$

и

$$\|\varphi_0^*\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|.$$

Пусть $1 \le q < \infty$. Для отображения $\varphi : \Omega \to \Omega'$ класса $\mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{G})$ с конечным искажением введем *функцию искажения в образе*:

$$\mathbb{G} \ni y \mapsto H_q(y,\varphi) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det \widehat{D}\varphi(x) \ne 0\} = \varnothing, \\ \Bigl(\sum\limits_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi, \\ \det \widehat{D}\varphi(x)\ne 0}} \frac{|D_h\varphi(x)|^q}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|} \Bigr)^{\frac{1}{q}} \quad \text{иначе}, \end{cases}$$

где Σ_φ — сингулярное множество[3)] отображения φ. Ясно, что $H_q(y,\varphi) = 0$ при $y \notin \Omega'$. Для $1 \le q \le p < \infty$ обозначим интегральную норму функции $H_q(\cdot,\varphi)$ символом

$$H_{q,p}(\varphi,\Omega') = \|H_q(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\Omega')\|,$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

Лемма 3.4 [21, предложения 3.8, 3.9]. *Пусть отображение $\varphi : D \to D'$, где D, D' — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, принадлежит классу Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D;\mathbb{G})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D') \cap \operatorname{Lip}(D') \to L^1_q(D), \quad 1 < q \le p < \infty.$$

Тогда φ имеет конечное искажение и справедливы неравенства

$$\alpha_{p,q} H_{q,p}(\varphi,D') \le \|\varphi^*\| \le H_{q,p}(\varphi,D'),$$

[3)] Т. е. такое множество меры нуль, что $\varphi_k : \Omega \setminus \Sigma_\varphi \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Для отображения $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{G})$ такое множество всегда существует (см. предложение 1.1).

где постоянная $\alpha_{p,q}$ зависит лишь от p, q и структуры группы $\mathbb{G}$. Если еще области D и D' ограниченные, $p \le \nu$ и отображение φ непостоянное, то φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Замечание 3.1. Справедливо и более общее утверждение [25, предложение 10]: заключение леммы сохраняет силу без условия ограниченности областей, а также достаточно предполагать, что отображение принадлежит более широкому чем $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ классу $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega;\mathbb{G})$ (см. определение 4.2 и теорему 4.2 ниже).

Рассмотрим произвольную компактную подобласть $D \Subset \Omega$. Поскольку $\{\varphi_k\}$ сходится к φ_0 равномерно на $\overline{D}$, то найдется ограниченная область D', содержащая все образы $\varphi_k(D)$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$. Согласно теореме 1.1 каждый гомеоморфизм φ_k (точнее, его сужение $\varphi_k|_D$) индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_k^* : L^1_\nu(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_q(D), \quad k \in \mathbb{N},$$

и $\sup\limits_k \|\varphi_k^*\| \le \sup\limits_k K_{q,\nu}(\varphi_k,\Omega) = L < \infty$. По лемме 3.3 предельное отображение φ_0 также индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L^1_\nu(D') \cap \mathrm{Lip}(D') \to L^1_q(D).$$

Если область D такова, что сужение φ_0 на нее не является постоянным отображением, то по лемме 3.4 $\varphi_0|_D$ удовлетворяет $\mathscr{N}^{-1}$-свойству Лузина, т. е. для всякого множества меры нуль $E \subset \mathbb{G}$ выполняется $\left|\varphi_0^{-1}(E)\cap D\right| = 0$. Область Ω, как нетрудно заметить, может быть покрыта возрастающей последовательностью подобластей $D_j \Subset \Omega$, на каждой из которых φ_0 непостоянно. Поэтому само отображение φ_0 также удовлетворяет $\mathscr{N}^{-1}$-свойству.

Из лемм 3.3 и 3.4, примененных к областям $D = \Omega$ и $D' = \mathbb{H}$, вытекает, что φ_0 обладает конечным искажением и

$$H_{q,\nu}(\varphi_0,\mathbb{H}) = \|H_q(\cdot,\varphi_0) \mid L_\sigma(\mathbb{H})\| \le \alpha_{\nu,q}^{-1}\|\varphi_0^*\| \le \alpha_{\nu,q}^{-1} L < \infty,$$

где $\|\varphi_0^*\|$ — норма оператора композиции

$$\varphi_0^* : L^1_\nu(\mathbb{H}) \cap \mathrm{Lip}(\mathbb{H}) \to L^1_q(\Omega).$$

3.4. Инъективность почти всюду. В [26] следующая теорема о слабой непрерывности якобианов гомеоморфизмов класса W^1_ν доказана при условии, что φ_0 заведомо является гомеоморфизмом [26, лемма 3.4, теорема 1.2]. В действительности нетрудная модификация представленных в [26] рассуждений позволяет отказаться от наложения дополнительных требований на структуру предельного отображения (см. также [6], где аналогичный факт доказан для последовательности отображений с ограниченным искажением, и рассуждения [11, теорема 1]). Доказательство теоремы 3.1 см. в разд. 4.2.

Теорема 3.1. *Пусть Ω — область в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $\{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность гомеоморфизмов класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$. Пусть $\{\varphi_k\}$ сходится к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{G}$ локально равномерно в Ω, а последовательность $\{|D_h\varphi_k|\}_{k=1}^\infty$ ограничена в $L_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда*[4)]

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_D \det \widehat{D}\varphi_k(x)\,dx = \int\limits_D \det \widehat{D}\varphi_0(x)\,dx$$

[4)] Согласно лемме 3.1 отображение φ_0 принадлежит $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$.

для каждой компактно вложенной подобласти $D \Subset \Omega$ такой, что $|\partial D| = 0$.

Если еще группа $\mathbb{G}$ двухступенчатая и $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$ п. вс., $k \in \mathbb{N}$, то последовательность $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$ сходится к $\det \widehat{D}\varphi_0$ слабо в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \theta(x) \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx = \int\limits_{\Omega} \theta(x) \det \widehat{D}\varphi_0(x)\, dx \tag{3.1}$$

для каждой функции $\theta \in L_\infty(\Omega)$, равной нулю почти всюду вне некоторого компакта $K \Subset \Omega$.

Поскольку $\det \widehat{D}\varphi_k \geq 0$, из теоремы 3.1 сразу следует $\det \widehat{D}\varphi_0 \geq 0$, т. е. п. (d) теоремы 2.1.

Пусть $T \Subset \Omega$ — произвольный компакт. Для произвольного $\varepsilon > 0$ существует открытое множество V такое, что $V \supset \varphi_0(T)$ и $|V \setminus \varphi_0(T)| < \varepsilon$. Так как $\varphi_k \to \varphi_0$ равномерно на T, а $\varphi_0(T)$ — компакт в открытом множестве V, то $\varphi_k(T) \subset V$ при всех достаточно больших k. Отсюда $|V| \geq \varlimsup\limits_{k\to\infty} |\varphi_k(T)|$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ также справедливо неравенство

$$|\varphi_0(T)| \geq \varlimsup_{k\to\infty} |\varphi_k(T)|. \tag{3.2}$$

По формуле замены переменной с функцией кратности для всякого компакта $T \Subset \Omega$ имеем[5)]

$$|\varphi_0(T)| \leq \int\limits_{\varphi_0(T)} \mathscr{N}(y, \varphi_0, T)\, dy = \int\limits_{T} \det \widehat{D}\varphi_0(x)\, dx$$

$$= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{T} \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} |\varphi_k(T)| \leq |\varphi_0(T)|.$$

Здесь $\mathscr{N}(y, \varphi, T) \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ — число точек множества $\varphi^{-1}(y) \cap T$. Из последней цепочки получаем, что $\mathscr{N}(y, \varphi_0, T) = 1$ для п. вс. $y \in \varphi_0(T)$. Поскольку Ω может быть покрыта возрастающей последовательностью компактов T_j и $\mathscr{N}(y, \varphi_0, T_j) \to \mathscr{N}(y, \varphi_0, \Omega)$ при каждом фиксированном $y \in \varphi_0(\Omega)$, то $\mathscr{N}(y, \varphi_0, \Omega) = 1$ для п. вс. $y \in \varphi_0(\Omega)$. Итак, множество

$$S' = \{y \in \varphi_0(\Omega) \mid \mathscr{N}(y, \varphi_0, \Omega) \geq 2\}$$

имеет меру нуль. Так как φ_0 обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина, то множество $S = \varphi_0^{-1}(S')$ также имеет меру нуль. Очевидно еще, что $\varphi : \Omega \setminus S \to \mathbb{H}$ — инъективное отображение.

3.5. Открытость.

Теорема 3.2 [12, теорема 2.2]. *Пусть $\mathbb{H}$ — группа Карно H-типа, Ω — область в $\mathbb{H}$, $\nu(\nu - 1) < \sigma \leq \infty$, а $\varphi : \Omega \to \mathbb{H}$ — непостоянное отображение класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$ с конечным искажением такое, что $\det \widehat{D}\varphi \geq 0$ п. вс., и $K_\nu(\cdot, \varphi) \in L_{\sigma,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда φ непрерывно, открыто и дискретно.*

Пусть Z — множество нулей якобиана $\det \widehat{D}\varphi_0$. Для каждого $y \in \mathbb{H}$ множество $\varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)$ либо пустое, либо состоит из одной точки $x \in \Omega$. Поэтому суммы вида

$$\sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (Z \cup S)} u(x)$$

[5)] Отметим, что сингулярные множества Σ_{φ_k} отображений φ_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, пустые ввиду $\mathscr{N}$-свойства и потому они не фигурируют в формуле замены переменной.

в действительности содержат не более одного слагаемого и потому для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\Big(\sum_{x\in\varphi_0^{-1}(y)\setminus(Z\cup S)} u(x)\Big)^{\alpha} = \sum_{x\in\varphi_0^{-1}(y)\setminus(Z\cup S)} u(x)^{\alpha}.$$

Пусть $q < \nu$. Применяя формулу замены переменной[6)] из предложения 1.1, с учетом того, что φ_0 имеет конечное искажение, выводим

$$\begin{aligned}
K_{q,\nu}(\varphi_0,\Omega)^{\sigma} &= \int\limits_{\Omega} K_{\nu}(x,\varphi_0)^{\sigma}\,dx = \int\limits_{\Omega\setminus(Z\cup S)} \bigg(\frac{|D_h\varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|^{1/\nu}}\bigg)^{\sigma} \frac{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|}\,dx\\
&= \int\limits_{\Omega\setminus(Z\cup S)} \bigg(\frac{|D_h\varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|^{1/q}}\bigg)^{\sigma} |\det \widehat{D}\varphi_0(x)|\,dx\\
&= \int\limits_{\mathbb{H}} \sum_{x\in\varphi_0^{-1}(y)\setminus(Z\cup S)} \bigg(\frac{|D_h\varphi_0(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|^{1/q}}\bigg)^{\sigma} dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{H}} \bigg(\sum_{x\in\varphi_0^{-1}(y)\setminus(Z\cup S)} \frac{|D_h\varphi_0(x)|^{q}}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|}\bigg)^{\sigma/q} dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{H}\setminus S'} \bigg(\sum_{x\in\varphi_0^{-1}(y)\setminus Z} \frac{|D_h\varphi_0(x)|^{q}}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|}\bigg)^{\sigma/q} dy\\
&= \int\limits_{\mathbb{H}\setminus S'} H_q(y,\varphi_0)^{\sigma}\,dy = \int\limits_{\mathbb{H}} H_q(y,\varphi_0)^{\sigma}\,dy\\
&= H_{q,\nu}(\varphi_0,\mathbb{H})^{\sigma} \le \big(\alpha_{\nu,q}^{-1}\sup_k K_{q,\nu}(\varphi_k,\Omega)\big)^{\sigma} < \infty. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

В (3.3) равенство между первой и второй строками обусловлено соотношением $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{\sigma}$, между третьей и четвертой — присутствием в подынтегральной сумме не более чем одного слагаемого, между четвертой и пятой — тем, что

$$\sum_{x\in\varphi_0(y)\setminus(Z\cup S)} u(x) = \sum_{x\in\varphi_0(y)\setminus Z} u(x)$$

при $y \notin S' = \varphi_0(S)$, т. е. для п. вс. $y \in \mathbb{H}$.

Пусть $q = \nu$. Равенство $K_\nu(x,\varphi_0) = H_\nu(y,\varphi_0)$ выполняется для всех $y \in \varphi_0(\Omega)\setminus S'$. Здесь $x \in \varphi_0^{-1}(y) \subset \Omega\setminus S$ — единственный прообраз точки $y \in \varphi_0(\Omega)\setminus S'$. Так как φ_0 обладает $\mathscr{N}$- и $\mathscr{N}^{-1}$-свойствами, отсюда вытекает

$$H_{\nu,\nu}(\varphi_0,\mathbb{H}) = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\mathbb{H}} H_\nu(y,\varphi_0) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} K_\nu(x,\varphi_0) = K_{\nu,\nu}(\varphi,\Omega).$$

Итак, $K_\nu(\cdot,\varphi_0) \in L_\sigma(\Omega)$ и, значит, по теореме 3.2 отображение φ_0 открытое (напомним, что $\det \widehat{D}\varphi_0 \ge 0$).

3.6. Инъективность. Предположим, что φ_0 — не инъективное отображение. Существуют две различные точки x_1, $x_2 \in \Omega$ такие, что $\varphi_0(x_1) = \varphi_0(x_2) = y \in \mathbb{H}$. Пусть U_1, U_2 — непересекающиеся окрестности точек x_1 и x_2 соответственно. Их образы $V_i = \varphi_0(U_i)$ — открытые множества, содержащие общую

[6)] В силу $\mathscr{N}$-свойства множество сингулярности Σ_{φ_0} отображения φ_0 пустое.

точку y. Значит, открытое множество $V = V_1 \cap V_2$ непустое и потому имеет положительную меру.

Пересечение $\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)$ — пустое множество, поскольку φ_0 — инъекция вне множества S. Одновременно с этим справедливы включения

$$V_i = \varphi_0(U_i) \subset \varphi_0(U_i \setminus S) \cup \varphi_0(S), \quad i = 1, 2,$$

из которых вытекает

$$V = V_1 \cap V_2 \subset (\varphi_0(U_1 \setminus S) \cap \varphi_0(U_2 \setminus S)) \cup \varphi_0(S) = \varphi_0(S).$$

Поскольку $S' = \varphi_0(S)$ имеет меру нуль, то $|V| = 0$, чего быть не может. Таким образом, $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{H}$ — гомеоморфизм. Это завершает доказательство п. (a) теоремы 2.1.

3.7. Полунепрерывность интегралов функций искажения.

Определение 3.2 [27]. Последовательность $\{f_k\}$ интегрируемых функций, заданных на измеримом пространстве X с мерой μ, сходится к $f_0 \in L_1(X)$ *в кусочном смысле*, если существует последовательность измеримых множеств $\{E_l \subset X\}$ такая, что $\bigcup\limits_l E_l = X$ и $\{f_k\}$ сходится к f_0 слабо в $L_1(E_l)$ для каждого $l \in \mathbb{N}$.

Известно [27], что из всякой последовательности интегрируемых функций $\{f_k\}$, ограниченной в $L_1(X)$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой интегрируемой функции в кусочном смысле. Ясно еще, что если $\{f_k\}$ сходится к f_0 в кусочном смысле, то

$$\|f_0 \mid L_1(X)\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|f_k \mid L_1(X)\|.$$

Нижеследующая теорема 3.3 доказана в [13] при дополнительных предположениях: все φ_k — гомеоморфизмы, образы $\varphi_k(\Omega)$ которых совпадают с фиксированной ограниченной областью Ω'. Схему доказательства, модифицированную результатами [25], приводим в разд. 4.3. Отметим, что в [28, § 8.9] при помощи соображений кусочной сходимости установлено, что предел отображений с конечным искажением — отображение с конечным искажением (см. также [29, 30]).

Теорема 3.3. *Пусть Ω — область в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \le p < \infty$, и последовательность отображений $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{G}\}$ такова, что каждое φ_k принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathbb{G})$ и обладает конечным искажением, а последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(\mathbb{G})$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$). Пусть еще $\{\varphi_k\}$ сходится к отображению $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{G}$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$.*

Тогда φ_0 принадлежит[7] $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ *и обладает конечным искажением.*

Если $q < p$, то существуют подпоследовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})\}$ и функция $H \in L_\sigma(\mathbb{G})$ такие, что $\{H_q(\cdot, \varphi_{k_j})^\sigma\}$ сходится к H^σ в кусочном смысле на $\mathbb{G}$ и $H_q(\cdot, \varphi_0) \le H$ п. вс. в $\mathbb{G}$.

Более того,

$$H_{q,p}(\varphi_0, \mathbb{G}) \le \varliminf_{k\to\infty} H_{q,p}(\varphi_k, \mathbb{G}) \tag{3.4}$$

для всех $1 < q \le p < \infty$.

Наконец, п. (c) теоремы 2.1 вытекает из (3.4), так как в силу инъективности отображений φ_k справедливы равенства (см. выкладку (3.3))

$$K_{q,\nu}(\varphi_k, \Omega) = H_{q,\nu}(\varphi_k, \mathbb{H}), \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

[7] Определение класса $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ см. в разд. 4.3.

4. Доказательства вспомогательных утверждений

4.1. Доказательство леммы 3.1. Принадлежность φ_0 классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ и конечность нормы $\|D_h\varphi_0 \mid L_p(\Omega)\|$ доказаны в [21, предложение 3.3] (см. также [23, теорема 4.2]). Докажем оставшуюся часть утверждения.

Пусть последовательность $\big\{f_k \in L^1_p(\Omega)\big\}$ сходится к некоторой функции f_0 в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, а последовательность $\{|\nabla_h f_k|\}$ ограничена в $L_p(\Omega)$. Тогда $f_0 \in L^1_p(\Omega)$ и $X_j f_k \to X_j f_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega)$ для каждого базисного горизонтального поля X_j. Действительно, в силу рефлексивности пространства $L_p(\Omega)$ существует подпоследовательность $\{X_j f_{k_l}\}$, сходящаяся слабо к некоторой функции $g_j \in L_p(\Omega)$. Пусть $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$. Из равенств

$$\int\limits_\Omega f_0(x) X_j\theta(x)\,dx = \lim_{l\to\infty} \int\limits_\Omega f_{k_l}(x) X_j\theta(x)\,dx = -\lim_{l\to\infty}\int\limits_\Omega X_j f_{k_l}(x)\theta(x)\,dx = -\int\limits_\Omega g_j(x)\theta(x)\,dx$$

следует, что g_j — обобщенная производная функции f_0 вдоль поля X_j. Слабая сходимость $\{X_j f_k\}$ к $X_j f_0 = g_j$ вытекает из того, что всякая подпоследовательность последовательности $\{X_j f_k\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к $X_j f_0$.

Из приведенного утверждения непосредственно вытекает, что для всех $i, j = 1,\dots,n$ последовательность[8] $\{X_j\varphi_{k,i}\}_k$ сходится к $X_j\varphi_{0,i}$ слабо в пространстве $L_p(\Omega)$. Поскольку $D_h\varphi_k = (X_j\varphi_{k,i})^n_{i,j=1}$, из этого следует, что $\{D_h\varphi_k\}$ сходится к $D_h\varphi_0$ слабо в пространстве $L_p(\Omega;\mathscr{L}(\mathfrak{g}_1))$.

4.2. Доказательство теоремы 3.1. Для непрерывных квазимонотонных отображений $\varphi \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ справедлива следующая формула замены переменной [24, теорема 4]:

$$\int\limits_D (u\circ\varphi)(x)\det\widehat{D}\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} u(y)\mu(y,\varphi,D)\,dy, \tag{4.1}$$

где $D \Subset \Omega$ — компактно вложенная подобласть такая, что $|\varphi(\partial D)| = 0$, $\mu(y,\varphi,D)$ — топологическая степень отображения φ в точке $y \notin \varphi(\partial D)$, определенная относительно области D, а u — произвольная измеримая функция такая, что функция $y \mapsto u(y)\mu(y,\varphi,D)$ интегрируема на $\mathbb{G}$.

Определение 4.1. Последовательность интегрируемых функций $\{f_k\}$, заданных на измеримом пространстве X с конечной мерой μ, называется *равномерно интегрируемой*, если $\sup\limits_k \|f_k \mid L_1(X)\| < \infty$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если множество $A \subset X$ измеримо и $\mu(A) < \delta$, то $\int\limits_A |f_k|\,d\mu < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.1 [26, теорема 3.2]. *Пусть Ω — область в двухступенчатой группе Карно $\mathbb{G}$, $\{\varphi_k : \Omega \to \mathbb{G}\}$ — последовательность отображений класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{G})$ такая, что $\det\widehat{D}\varphi_k \geq 0$ п. вс. и последовательность $\{|D_h\varphi_k|\}$ ограничена в*

[8] Здесь $\varphi_{k,i}$ — i-я координатная функция отображения φ_k.

$L_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Тогда последовательность якобианов* $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$ *равномерно интегрируема на каждом компакте* $K \Subset \Omega$.

Перейдем к доказательству теоремы 3.1. По лемме 3.2 φ_0 — квазимонотонное отображение и потому φ_k обладают $\mathscr{N}$-свойством Лузина для каждого $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ как непрерывные квазимонотонные отображения класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ [24, теорема 3].

Рассмотрим произвольную подобласть $D \Subset \Omega$ такую, что $|\partial D| = 0$. В силу равномерной сходимости на D последовательность множеств $\{\varphi_k(D)\}_{k=0}^{\infty}$ равномерно ограничена и потому вся она содержится в некоторой ограниченной области D'. В силу $\mathscr{N}$-свойства Лузина $|\varphi_k(\partial D)| = 0$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. По формуле (4.1) имеем

$$\int\limits_D \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx = \int\limits_{D'} \mu(y, \varphi_k, D)\, dy, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Так как $\varphi_k \to \varphi_0$ равномерно на $\overline{D}$, то в силу гомотопической инвариантности степени отображения $\mu(y, \varphi_k, D) \to \mu(y, \varphi_0, D)$ для $y \notin \varphi_0(\partial D)$, т. е. для п. вс. $y \in \mathbb{H}$. Так как область D' ограничена и $|\mu(\cdot, \varphi_k, D)| \leq 1$ всюду[9)] в $D' \setminus \varphi_k(\partial D)$, $k \in \mathbb{N}$, по теореме о мажорируемой сходимости имеем

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_D \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{D'} \mu(y, \varphi_k, D)\, dy = \int\limits_{D'} \mu(y, \varphi_0, D)\, dy = \int\limits_D \det \widehat{D}\varphi_0(x)\, dx.$$

Второе утверждение теоремы вытекает из первого и локальной равномерной интегрируемости последовательности $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$. Действительно, рассмотрим произвольное измеримое множество $E \Subset \Omega$. Пусть $U \Subset \Omega$ — подобласть, содержащая E. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По теореме 4.1 существует $\delta > 0$ такое, что $\int\limits_F \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx < \varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, если мера измеримого множества $F \subset U$ меньше δ. Найдется открытое множество $D \subset U$, состоящее из конечного набора субримановых шаров, такое, что $|(E \setminus D) \cup (D \setminus E)| < \delta$. Из неравенств

$$\begin{aligned}
&\left|\int\limits_E (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x))\, dx\right| \\
&\leq \int\limits_{(E\setminus D)\cup(D\setminus E)} (\det \widehat{D}\varphi_0(x) + \det \widehat{D}\varphi_k(x))\, dx + \left|\int\limits_D (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x))\, dx\right| \\
&\leq 2\varepsilon + \left|\int\limits_D (\det \widehat{D}\varphi_0(x) - \det \widehat{D}\varphi_k(x))\, dx\right|
\end{aligned}$$

в силу $|\partial D| = 0$ и произвольности $\varepsilon > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ следует, что (3.1) выполняется для функций вида $\theta = \chi_E$, $E \Subset \Omega$. Остается воспользоваться тем, что всякая функция $\theta \in L_\infty(\Omega)$, равная нулю п. вс. вне некоторого компакта $K \Subset \Omega$, может быть равномерно приближена линейными комбинациями характеристических функций χ_E, $E \subset K$.

---

9) Поскольку каждое отображение φ_k, $k \in \mathbb{N}$, взаимно однозначно, степень $\mu(y, \varphi_k, D)$, если она определена, может быть равна только 1, -1 или 0.

4.3. Доказательство теоремы 3.3. Пусть $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_j(y)(t)$ — интегральная линия поля X_j с началом в точке $y \in \mathbb{G}$. Для всякой точки $y \in \mathbb{G}$ кривая $\gamma_j(y)$ пересекает гиперплоскость Π_j ровно в одной точке. Тем самым определен проектор $\mathrm{Pr}_j : \mathbb{G} \to \Pi_j$. Пусть $y \in \Pi_j$ и $A \subset \mathbb{G}$ — произвольное множество. Совокупность точек $A_y = A \cap \{\gamma_j(y)(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ называется *y-сечением* множества A.

Определение 4.2 [25]. Отображение $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$, если для каждого $j = 1, \dots, n$ его можно переопределить на множестве меры нуль так, чтобы для некоторого множества $S \subset \Omega$ меры нуль выполнялось

(1) для $d\mu_j$-п. вс. $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ отображение φ абсолютно непрерывно на каждом отрезке интегральной линии $\gamma_j(y)$, содержащемся в $(\Omega \setminus S)_y$;

(2) для $d\mu_j$-п. вс. $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ множество S_y замкнуто и если $x \in S_y$, то $\lim\limits_{(\Omega\setminus S)_y \ni z \to x} \rho(\varphi(z)) = \infty$.

Теорема 4.2 [25, теорема 2]. *Пусть Ω и W — области в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \le p < \infty$. Рассмотрим последовательность $\{\varphi_k : \Omega \to W\}$ отображений класса $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением такую, что*

(1) *$\{\varphi_k\}$ сходится к отображению $\varphi_0 : \Omega \to W$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$;*

(2) *последовательность $\{H_q(\cdot, \varphi_k)\}$ ограничена в $L_\sigma(W)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).*

Тогда

(a) *φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega);$$

(b) $\|\varphi_0^*\| \le \varliminf\limits_{k\to\infty} \|\varphi_k^*\|$;

(c) $\varphi_0 \in \mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$;

(d) *φ_0 обладает конечным искажением*;

(e) $H_q(\cdot, \varphi_0) \in L_\sigma(W)$;

(f) *для некоторой постоянной $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо*

$$\alpha_{q,p} H_{q,p}(\varphi_0, W) \le \|\varphi_0^*\|;$$

(g) *если еще $p \le \nu$ и φ_0 непостоянное, то φ_0 обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.*

Замечание 4.11. В [25] дано иное определение класса $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$: предполагается, что не само множество S имеет меру нуль, а лишь почти все его сечения. Однако в [25] фактически доказано, что отображение φ_0 принадлежит классу $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ именно в смысле определения 4.2.

Перейдем к доказательству теоремы 3.3 и соотношения (3.4). Отметим, что если дополнительно предполагать ограниченность последовательности $\{|D_h\varphi_k|\}$ в $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, то $\varphi_0 \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{G}) \subset \mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$.

Пусть $u : \mathbb{G} \to \mathbb{R}$ — липшицева функция. Для отображения $\varphi \in \mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением равенство [25, свойство 1]

$$\nabla_h(u \circ \varphi)(x) = \begin{cases} \nabla_h u(\varphi(x)) D_h\varphi(x), & \det \widehat{D}\varphi(x) \ne 0, \\ 0, & \det \widehat{D}\varphi(x) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

справедливо[10] при п. вс. $x \in \Omega$. Пусть 1-липшицева функция u равна нулю всюду вне шара $B \subset \mathbb{G}$. Из (4.2) следует, что горизонтальный градиент каждой композиции $u \circ \varphi_k$ равен нулю п. вс. вне $\varphi_k^{-1}(B)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поскольку $\nabla_h(u \circ \varphi_k) \to \nabla_h(u \circ \varphi_0)$ слабо в $L_q(\Omega)$ (см. доказательство леммы 3.1), то по свойству полунепрерывности нормы при слабой сходимости для произвольного измеримого $E \subset \Omega$ имеем

$$\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B)\cap E} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q \, dx = \int\limits_E |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q \, dx$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_E |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q \, dx = \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k^{-1}(B)\cap E} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q \, dx$$
$$\leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k^{-1}(B)\cap E} |D_h\varphi_k(x)|^q \, dx. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что для любого конечного набора 1-липшицевых функций $u_1, \dots, u_l$, равных нулю вне шара B, выполнено неравенство

$$\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B)} \max_{1\leq j\leq l}\{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|^q\} \, dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h\varphi_k(x)|^q \, dx. \quad (4.4)$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть покрывающий Ω дизъюнктный набор измеримых множеств $F_1, \dots, F_l$ таких, что

$$|\nabla_h(u_m \circ \varphi_0)(x)|^q = \max_{1\leq j\leq l}\{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|^q\} \quad \text{при } x \in F_m,$$

и просуммировать неравенства (4.3), примененные к $E = F_m$, $m = 1, \dots, l$.

Можно выбрать счетный набор 1-липшицевых функций $\{u_j\}$, равных нулю вне шара B, так, что

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\{|\nabla_h(u_j \circ \varphi_0)(x)|\} = |D_h\varphi_0(x)|$$

для п. вс. $x \in \varphi_0^{-1}(B)$. Существование такого набора $\{u_j\}$ вытекает из известных фактов теории K-пространств и того, что $|D_h\varphi_0|$ совпадает с верхним градиентом отображения φ_0 [21, лемма 3.4], определяемым как измеримая мажоранта семейства $\{|\nabla_h(u\circ\varphi_0)|\}$ (здесь u пробегает множество всех 1-липшицевых функций с носителем в шаре B). Переходя к пределу в (4.4), получаем

$$\int\limits_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h\varphi_0(x)|^q \, dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h\varphi_k(x)|^q \, dx.$$

Пусть $q = p$. Обозначим $L = \varliminf\limits_{k\to\infty} H_{q,q}(\varphi_0, \mathbb{G})$. Имеем

$$\int\limits_B H_q(y, \varphi_0)^q \, dy = \int\limits_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h\varphi_0(x)|^q \, dx \leq \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h\varphi_k(x)|^q \, dx$$
$$= \varliminf_{k\to\infty} \int\limits_B H_q(y, \varphi_k)^q \, dy \leq L^q|B|.$$

[10] Принадлежность классу $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \mathbb{G})$ влечет аппроксимативную $\mathscr{P}$-дифференцируемость отображения. Подробности см. в [25].

Отсюда $H_q(y,\varphi_0) \le L$ для п. вс. $y \in \mathbb{G}$ в силу произвольности шара $B \subset \mathbb{G}$.

Пусть $q < p$. Извлечем подпоследовательность φ_{k_j} со следующими свойствами:

$$\lim_{j\to\infty} H_{q,p}(\varphi_{k_j},\mathbb{G}) = \varliminf_{k\to\infty} H_{q,p}(\varphi_k,\mathbb{G});$$

последовательность $\{H_q(\cdot,\varphi_{k_j})^q\}$ сходится слабо в $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{G})$ к некоторой функции $G(\cdot)^q$; последовательность $\{H_q(\cdot,\varphi_{k_j})^\sigma\}$ сходится в кусочном смысле к некоторой функции $H(\cdot)^\sigma$.

Поскольку

$$\int\limits_B H_q(y,\varphi_0)^q\,dy \le \varliminf_{j\to\infty} \int\limits_B H_q(y,\varphi_{k_j})^q\,dy = \int\limits_B G(y)^q\,dy,$$

то $H_q(y,\varphi_0)^q \le G(y)^q$ для п. вс. $y \in \mathbb{G}$.

Пусть $\{E_l\}$ — последовательность измеримых множеств конечной меры такая, что $\bigcup\limits_l E_l = \mathbb{G}$ и $H_q(\cdot,\varphi_{k_j})^\sigma \to H(\cdot)^\sigma$ слабо в $L_1(E_l)$ для каждого l. Пользуясь равенством $\frac{q}{\sigma}+\frac{q}{p}=1$, выводим

$$\begin{aligned}\int\limits_{B\cap E_l} H_q(y,\varphi_0)^q\,dy &\le \int\limits_{B\cap E_l} G(y)^q\,dy = \lim_{j\to\infty}\int\limits_{B\cap E_l} H_q(y,\varphi_{k_j})^q\,dy \\ &\le \lim_{j\to\infty}\Bigg(\int\limits_{B\cap E_l} H_q(y,\varphi_{k_j})^\sigma\,dy\Bigg)^{q/\sigma}|B|^{q/p} = \Bigg(\int\limits_{B\cap E_l} H(y)^\sigma\,dy\Bigg)^{q/\sigma}|B|^{q/p}.\end{aligned}$$

Деля на меру шара B и устремляя его радиус к нулю, получаем, что

$$H_q(y,\varphi_0)\chi_{E_l}(y) \le H(y)\chi_{E_l}(y)$$

для п. вс. $y\in\mathbb{G}$. Так как последовательность $\{E_l\}$ покрывает $\mathbb{G}$, то $H_q(\cdot,\varphi_0) \le H$ п. вс. Поскольку L_1-норма полунепрерывна при кусочной сходимости, то

$$\begin{aligned}\|H_q(\cdot,\varphi_0)\mid L_\sigma(\mathbb{G})\| \le \|H\mid L_\sigma(\mathbb{G})\| &\le \lim_{j\to\infty}\|H_q(\cdot,\varphi_{k_j})\mid L_\sigma(\mathbb{G})\| \\ &= \varliminf_{k\to\infty}\|H_q(\cdot,\varphi_k)\mid L_\sigma(\mathbb{G})\|.\end{aligned}$$

5. Экстремальная задача

В качестве деформаций, допустимых для задачи нелинейной теории упругости, рассмотрим гомеоморфизмы с интегрируемым искажением. В связи с этим установленное в теореме 2.1 свойство отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, быть гомеоморфизмом играет ключевую роль в доказательстве существования деформации, доставляющей минимум функционала полной энергии — биективность отображения во внутренних точках, как и интегрируемость функции искажения, отвечает физическому содержанию задачи.

С уже ставшими классическими результатами теории упругости можно ознакомиться в работах [2, 3]. В работе [4] был впервые использован исследуемый нами подход к определению класса допустимых деформаций.

Пусть Ω и Q — области в группе Карно H-типа $\mathbb{H}$. Область Ω — тело в исходной конфигурации, а Q задает односторонние ограничения на положение тела при деформации: $\varphi(\Omega)\subset Q$. Обозначим *функционал полной энергии* как

$$I(\varphi) = \int\limits_\Omega W(x, D_h\varphi(x))\,dx.$$

Мы предполагаем, что *функция запасенной энергии* $W : \Omega \times \mathscr{L}(\mathfrak{h}_1) \to \mathbb{R}$, где $\mathscr{L}(\mathfrak{h}_1)$ — пространство всех линейных операторов $A : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_1$, обладает следующими свойствами.

(a) Поливыпуклость: существует выпуклая функция со свойством Каратеодори[11)] $G(x,\cdot) : \mathscr{L}(\mathfrak{h}_1)\times[0;+\infty) \to \mathbb{R}$ такая, что для п. вс. $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$G(x, F|_{\mathfrak{h}_1}, \det F) = W(x, F|_{\mathfrak{h}_1})$$

для всех гомоморфизмов $F \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$, $\det F \geq 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

(b) Коэрцитивность: существуют постоянная $\alpha > 0$, функция $g \in L_1(\Omega)$ и непрерывная функция $f : (0;\infty) \to [0;\infty)$ такая, что $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = +\infty$, удовлетворяющие неравенству

$$W(x, F|_{\mathfrak{h}_1}) \geq \alpha |F|^\nu + f(\det F) + g(x)$$

для п. вс. $x \in \Omega$ и всех гомоморфизмов $F \in \mathscr{L}(\mathfrak{h})$, $\det F > 0$, $F(\mathfrak{h}_i) \subset \mathfrak{h}_i$, $i = 1, 2$.

Фиксируем $q \in (\nu - 1; \nu]$, $M > 0$. Введем класс *допустимых деформаций*:

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(q, M; Q) = \bigl\{\varphi : \Omega \to \mathbb{H} \mid \varphi \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathbb{H}) &\text{ — гомеоморфизм} \\ \text{с конечным искажением, } \varphi(\Omega) \subset Q,\ I(\varphi) < \infty, \\ K_{q,\nu}(\varphi, \Omega) \leq M,\ \det \widehat{D}\varphi(x) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\bigr\}.\end{aligned}$$

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbb{H}$ *— группа Карно* H*-типа,* Ω *— произвольная область в* $\mathbb{H}$*,* Q *— ограниченная область в* $\mathbb{H}$ *такая, что* $\operatorname{int}\overline{Q} = Q$*, а* $q \in (\nu - 1; \nu]$ *и* $M > 0$ *— постоянные. Если множество* $\mathscr{A}(q, M; Q)$ *непустое и функция* W *удовлетворяет условиям* (a) *и* (b)*, то существует по крайней мере один гомеоморфизм* $\varphi_0 \in \mathscr{A}(q, M; Q)$ *такой, что*

$$I(\varphi_0) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathscr{A}(q, M; Q)\}.$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k \in \mathscr{A}(q, M; Q)\}$ — последовательность, минимизирующая функционал I, т. е. $I(\varphi_{k-1}) \geq I(\varphi_k) \to \inf\limits_{\varphi\in\mathscr{A}(q,M;Q)} I(\varphi)$. В силу коэрцитивного неравенства (b) последовательность интегралов $\Bigl\{\int\limits_\Omega |D_h\varphi_k(x)|^\nu\, dx\Bigr\}$ ограничена. По предложению 3.1 гомеоморфизмы φ_k локально в Ω обладают общим модулем непрерывности, поэтому по теореме Арцела — Асколи $\{\varphi_k\}$ можно считать локально равномерно сходящейся к некоторому отображению $\varphi_0 : \Omega \to \mathbb{H}$.

Принадлежность предельного отображения классу допустимых деформаций. Покажем сначала, что отображение φ_0 не может быть постоянным. По теореме 3.1 последовательность $\{\det \widehat{D}\varphi_k\}$ сходится к $\det \widehat{D}\varphi_0$ слабо в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что для некоторого компакта $T \subset \Omega$ положительной меры выполняется

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_T \det \widehat{D}\varphi_k(x)\, dx = \int\limits_T \det \widehat{D}\varphi_0(x)\, dx = 0. \tag{5.1}$$

[11)] Т. е. функция $G(x,\cdot)$ непрерывна для п. вс. x, а функция $G(\cdot, A, \delta)$ измерима для всех $A \in \mathscr{L}(\mathfrak{h}_1)$ и всех $\delta \geq 0$. Это условие гарантирует, что композиция $x \mapsto G(x, A(x), \delta(x))$ измерима для любых измеримых функций $A(\cdot)$, $\delta(\cdot)$.

Так как якобианы неотрицательные, они сходятся на T к нулю сильно:

$$\lim_{k\to\infty} \|\det \widehat{D}\varphi_k \mid L_1(T)\| = \lim_{k\to\infty} \int\limits_T \det \widehat{D}\varphi_k(x)\,dx = 0.$$

После перехода к подпоследовательности в силу теоремы Егорова можно считать, что существует измеримое множество $T_0 \subset T$ такое, что $|T_0| > 0$ и

$$\delta_k = \sup_{x\in T_0} \det \widehat{D}\varphi_k(x) \to 0.$$

Интегралы[12] $\int\limits_\Omega f(\det \widehat{D}\varphi_k(x))\,dx$ ограничены в силу коэрцитивного неравенства. В то же время, поскольку $\lim\limits_{t\to+0} f(t) = +\infty$, имеем

$$\int\limits_\Omega f(\det \widehat{D}\varphi_k(x))\,dx \ge \int\limits_{T_0} f(\det \widehat{D}\varphi_k(x))\,dx \ge |T_0| \inf_{0<t\le\delta_k} f(t) \to \infty.$$

Получено противоречие с предположением (5.1). Значит, для всякого компакта $T \Subset \Omega$ положительной меры предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int\limits_T \det \widehat{D}\varphi_k(x)\,dx$ положительный.

Далее, вновь фиксируем компакт $T \Subset \Omega$ положительной меры. Из равномерной сходимости на T следует (см. (3.2)), что

$$|\varphi_0(T)| \ge \varlimsup_{k\to\infty} |\varphi_k(T)| = \varlimsup_{k\to\infty} \int\limits_T \det \widehat{D}\varphi_k(x)\,dx > 0.$$

Значит, $\varphi_0(T)$ содержит более одной точки и потому непрерывное отображение φ_0 не может быть постоянным.

Теперь из теоремы 2.1 сразу же вытекает, что φ_0 удовлетворяет всем условиям, налагаемым на отображения класса $\mathscr{A}(q, M; Q)$, кроме, быть может, двух: $\varphi_0(\Omega) \subset Q$ и $I(\varphi_0) < \infty$. Поскольку $\varphi_0(\Omega) \subset \overline{Q}$, $\operatorname{int} \overline{Q} = Q$ и $\varphi_0(\Omega)$ — открытое множество как гомеоморфный образ открытого множества, то $\varphi_0(\Omega) \subset Q$.

Полунепрерывность функционала энергии. Покажем стандартным образом [2, 3], что

$$I(\varphi_0) \le \lim_{k\to\infty} I(\varphi_k) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathscr{A}(q, M; Q)\}.$$

В силу леммы 3.1 и теоремы 3.1 последовательность $\{(D_h\varphi_k, \det \widehat{D}\varphi_k)\}$ сходится к $(D_h\varphi_0, \det \widehat{D}\varphi_0)$ слабо в пространстве $L_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega) \times L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. По лемме Мазура существует последовательность выпуклых комбинаций

$$\left\{(A_k, d_k) = \sum_{j=m_k}^{l_k} \alpha_k^j (D_h\varphi_j, \det \widehat{D}\varphi_j)\right\}, \quad l_k \ge m_k \to \infty,$$

сходящаяся к $(D_h\varphi_0, \det \widehat{D}\varphi_0)$ сильно в $L_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega) \times L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и п. вс. Согласно условию Каратеодори для п. вс. $x \in \Omega$ функция $G(x, \cdot)$ непрерывна, откуда

$$G(x, A_k(x), d_k(x)) \to G(x, D_h\varphi_0(x), \det \widehat{D}\varphi_0(x)).$$

---

[12] Образ множества нулей якобиана $Z_k = \{x \mid \det \widehat{D}\varphi_k(x) = 0\}$ имеет меру нуль в силу формулы замены переменной. Поскольку гомеоморфизмы φ_k обладают $\mathscr{N}^{-1}$-свойством (см. лемму 3.4), то $|Z_k| = |\varphi_k^{-1}(\varphi_k(Z_k))| = 0$, т. е. $\det \widehat{D}\varphi_k > 0$ п. вс. Значит, композиции $f(\det \widehat{D}\varphi_k(x))$ корректно определены.

Применяя лемму Фату и выпуклость функции $G(x,\cdot)$, выводим

$$I(\varphi_0)=\int\limits_{\Omega} G(x, D_h\varphi_0(x), \det \widehat{D}\varphi_0(x))\,dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_{\Omega} G(x, A_k(x), d_k(x))\,dx$$

$$\le \varliminf_{k\to\infty}\sum_{j=m_k}^{l_k}\alpha_k^j\int\limits_{\Omega} G(x, D_h\varphi_j(x), \det \widehat{D}\varphi_j(x))\,dx$$

$$=\varliminf_{k\to\infty}\sum_{j=m_k}^{l_k}\alpha_k^j I(\varphi_j)\le \varliminf_{k\to\infty} I(\varphi_{m_k})=\inf\{I(\varphi)\mid \varphi\in\mathscr{A}(q,M;Q)\}. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1977. V. 63, N 4. P. 337–403.
2. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter // Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A. Mathematics. 1981. V. 88, N 3–4. P. 315–328.
3. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. I. Three-dimensional elasticity. Amsterdam: North-Holland, 1988. (Stud. Math. Appl.).
4. *Molchanova A., Vodopyanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and Partial Differ. Equ. 2019. V. 59, N 17. P. 2–25.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
7. *Väisälä J.* Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1971. (Lect. Notes Math.; V. 229).
8. *Christodoulou D.* On the geometry and dynamics of crystalline continua // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1998. V. 69, N 3. P. 335–358.
9. *Maione A.* Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields // Ph. D. Thesis submitted to the University of Trento for the degree of Doctor of Philosophy. — Department of Mathematics University of Trento, 2020. P. 1–145.
10. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathscr{P}$-дифференцируемость соболевских отображений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 700–719.
11. *Водопьянов С. К.* Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 912–934.
12. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1151–1159.
13. *Водопьянов С. К., Сбоев Д. А.* Полунепрерывность операторной функции искажения при сходимости гомеоморфизмов в $L_{1,\mathrm{loc}}$ // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 4. С. 605–621.
14. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
15. *Gromov M.* Carnot — Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
16. *Pansu P.* Métriques de Carnot — Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
17. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
18. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P,Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
19. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

20. *Водопьянов С. К., Павлов С. В.* Замкнутость класса гомеоморфизмов с интегрируемым искажением и минимизация функционалов // Изв вузов. Математика. 2025, № 6.
21. *Водопьянов С. К., Павлов С. В.* Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, № 2. С. 215–236.
22. *Stein E. M.* Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.
23. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
24. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.
25. *Водопьянов С. К.* Функционально-геометрические свойства пределов ACL-отображений с интегрируемым искажением // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 820–840.
26. *Vodop′yanov S. K., Pavlov S. V.* Weak continuity of Jacobians of W^1_ν-homeomorphisms on Carnot groups // Euras. Math. J. 2024. V. 15, N 4. P. 82–95.
27. *Brooks J. K., Chacon R. V.* Continuity and compactness of measures // Adv. Math. 1980. V. 37, N 1. P. 16–26.
28. *Iwaniec T., Martin G.* Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2001. (Oxford Math. Monogr.).
29. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526.
30. *Водопьянов С. К., Молчанова А. О.* Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным $(\theta, 1)$-весовым (p, q)-искажением // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 999–1011.

Поступила в редакцию 1 апреля 2024 г.
После доработки 1 апреля 2024 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@mail.ru

Павлов Степан Валерьевич (ORCID 0009-0001-4811-9348)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
s.pavlov4254@gmail.com

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.987.5+517.986.62+512.546.3

СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ УНИТАРНЫХ ДЕЙСТВИЙ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОМПАКТНОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

А. Г. Качуровский,
И. В. Подвигин, В. Э. Тодиков

Аннотация. Получен спектральный (в терминах особенности спектральной меры в окрестности единичного характера) критерий скоростей сходимости в эргодической теореме для унитарных действий абелевых локально компактных групп компактного происхождения. Тем самым показано, что оценки этих скоростей, как и для ранее изученных классических эргодических теорем для действий групп Z и R, с необходимостью являются спектральными.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.309

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, абелевы группы компактного происхождения.

§ 1. Введение

1.1. Эргодические теоремы для действия групп. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство, на котором действует группа G унитарными преобразованиями U_g, $g \in G$. Пусть ν — σ-конечная мера, определенная на некоторой σ-алгебре подмножеств G, и $\mathscr{I}$ — направленное множество индексов, нумерующих семейство $G_\alpha \subset G$, $\alpha \in \mathscr{I}$, такое, что $0 < \nu(G_\alpha) \leq \nu(G_\beta) < +\infty$ при $\alpha \leq \beta$ и $\lim\limits_{\alpha \in \mathscr{I}} \nu(G_\alpha) = +\infty$. Для всякого вектора $f \in \mathscr{H}$ определим эргодические средние

$$A_\alpha f = \frac{1}{\nu(G_\alpha)} \int\limits_{G_\alpha} U_g f \, d\nu(g), \quad \alpha \in \mathscr{I}.$$

Сходимость таких средних по норме в $\mathscr{H}$ есть утверждение статистической эргодической теоремы (см., например, [1]).

В дальнейшем будем считать, что G — локально компактная абелева группа (со второй аксиомой счетности), а мера $\nu = \mu_G$ есть мера Хаара на G (подробнее о существовании и свойствах меры Хаара см., например, в [2]).

1.2. Группы компактного происхождения. Напомним несколько определений.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Определение 1. Топологическая группа G называется *локально компактной*, если существует окрестность единицы, замыкание которой компактно.

Помимо компактных групп важный класс локально компактных групп представляют группы компактного происхождения (см. [3, § 20]).

Определение 2. Топологическая группа G *имеет компактное происхождение*, если существует такая окрестность V единицы, что ее замыкание $\overline{V}$ компактно и $\overline{V}$ порождает всю группу G, т. е. минимальная подгруппа группы G, содержащая $\overline{V}$, совпадает с G.

Из определения 2 следует, что если взять симметричную окрестность единицы $U = V \cup V^{-1}$ (ясно, что $\overline{U}$ компактно), то группу G можно представить в виде счетного объединения компактных множеств: $G = \bigcup\limits_{n \geq 1} \overline{U^n}$.

Важный класс групп компактного происхождения представляют связные локально компактные группы, поскольку связная локально компактная топологическая группа G порождается любой окрестностью единицы [3, § 22]. Отметим также, что всякая локально компактная группа со свойством Каждана (T) имеет компактное происхождение [4, § 1.3]. Общий вид абелевых групп компактного происхождения описан в следующей теореме (см. [3, § 39, теорема 51]).

Теорема 1. *Пусть G — абелева группа компактного происхождения. Тогда*

$$G \simeq \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus \mathbb{T}^{d_3} \oplus Z \oplus K, \quad d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

где $\mathbb{R}^{d_1}$ – прямая сумма d_1 экземпляров группы вещественных чисел, $\mathbb{Z}^{d_2}$ – прямая сумма d_2 экземпляров группы целых чисел, $\mathbb{T}^{d_3}$ – группа d_3-мерного тора, K — компактная группа, Z — конечная циклическая группа.

Поскольку группы Z и $\mathbb{T}^{d_3}$ компактны, можно представить абелеву группу G компактного происхождения как прямую сумму d_1 экземпляров вещественных чисел, d_2 экземпляров целых чисел и некоторой компактной группы, т. е.

$$G \simeq \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2} \oplus K.$$

1.3. Характеры, спектральная мера и аннуляторы. Нам понадобится понятие двойственной группы и спектральной меры на ней. Напомним соответствующие определения (см., например, [3, 5]).

Определение 3. Пусть G — локально компактная абелева группа. Непрерывный гомоморфизм $\chi : G \to \mathbb{S}^1$ называется *характером* группы G. Множество всех характеров образует коммутативную группу. Это группа называется *двойственной группой*, или *группой характеров* группы G и обозначается через $G^\wedge$.

Группа $G^\wedge$ становится локально компактной группой, если задать топологию на $G^\wedge$ через систему окрестностей нуля. Для начала введем систему окрестностей нуля группы $\mathbb{S}^1$. Для этого представим группу $\mathbb{S}^1$ как фактор-группу $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ и обозначим через $\kappa : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ естественный гомоморфизм факторизации. Множество элементов группы $\mathbb{S}^1$ вида $\kappa(d)$, где $|d| < \frac{1}{3k}$, $k \in \mathbb{N}$, обозначим через Λ_k. Для $A \subset G$, $M \subset \mathbb{S}^1$ обозначим через $W(A, M)$ множество всех характеров $\chi \in G^\wedge$, удовлетворяющих условию $\chi(A) \subset M$. Совокупность множеств вида $W(F, \Lambda_k)$, где F компактно, образует полную систему окрестностей нуля группы $G^\wedge$. Примеры абелевых локально компактных групп и их групп характеров можно найти в [6, 7].

Помимо меры Хаара $\mu_{G^\wedge}$ на двойственной группе $G^\wedge$ можно определить еще одну борелевскую меру — спектральную меру.

Определение 4. Для группы унитарных операторов U_g, $g \in G$, действующих в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, и вектора $f \in \mathscr{H}$ *спектральной мерой* σ_f называется борелевская мера на $G^\wedge$, определяемая своим преобразованием Фурье:

$$(U_g f, f)_{\mathscr{H}} = \int\limits_{G^\wedge} \chi(g)\, d\sigma_f(\chi).$$

Из определения видно, что $\sigma_f(G^\wedge) = \|f\|^2_{\mathscr{H}}$. Кроме того, для нормы эргодических средних справедлива формула

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} = \int\limits_{G^\wedge} \frac{1}{\mu_G(G_\alpha)^2} \left| \int\limits_{G_\alpha} \chi(g)\, d\mu_G(g) \right|^2 d\sigma_f(\chi). \tag{1}$$

По критерию Блюма — Эйзенберга [8] сходимость таких средних будет иметь место тогда и только тогда, когда для любого $\chi \in G^\wedge$, $\chi \neq 1$,

$$\int\limits_{G_\alpha} \chi(g)\, d\mu_G(g) \to 0.$$

При этом пределом будет Pf — проекция f на подпространство неподвижных векторов группы унитарных операторов U_g, $g \in G$. В дальнейшем будем считать, что предел равен 0. Этого всегда можно добиться, взяв $f - Pf$ вместо f.

Определение 5. Пусть G — локально компактная абелева группа. Для непустого множества $H \subset G$ *аннулятором* $\mathscr{A}(H, G^\wedge)$ называется множество в $G^\wedge$, состоящее из всех таких характеров χ, что $\chi(H) = 1$, т. е.

$$\mathscr{A}(H, G^\wedge) = \{\chi \in G^\wedge : \chi(H) = 1\}.$$

Нетрудно видеть, что аннулятор $\mathscr{A}(H, G^\wedge)$ является подгруппой двойственной группы $G^\wedge$. Известно [6, теорема 3.4], что если в абелевой локально компактной группе G существует полная счетная система окрестностей нуля $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_m \supset \cdots$, состоящая из подгрупп, то для любого характера $\chi \in G^\wedge$ найдется номер m такой, что $\chi \in \mathscr{A}(G_m, G^\wedge)$.

1.4. Скорости сходимости. Как доказано в [9, 10], степенная скорость сходимости в классической эргодической теореме фон Неймана равносильна степенной же, с тем же показателем степени, особенности спектральной меры в точке 0. Тем самым было показано, что скорости сходимости в эргодической теореме для действий групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ с необходимостью являются спектральными (эти скорости сейчас хорошо изучены, см. обзоры [9, 11], а также недавнюю работу [12] и библиографию в них).

В 1990-х гг. А. М. Вершиком и А. М. Степиным была поставлена задача переноса описанного выше результата из [9] с действия группы $\mathbb{Z}$ на группы $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ (и далее на максимально широкий класс групп). Тогда удалось получить оценки скоростей сходимости для действия локально конечных групп [13, 14]. Некоторые оценки скоростей сходимости классических эргодических средних для действий групп $\mathbb{Z}^d$ были получены тогда же в [15] и не так давно А. А. Темпельманом для групп $\mathbb{R}^d$ в [16]. Совсем недавно в [17–19] доказаны спектральные критерии степенной скорости сходимости таких средних для всех возможных показателей степени, полностью аналогичные известным критериям для действий $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$.

Наша цель — опираясь на результаты [19, 13] получить спектральный критерий скоростей сходимости эргодических средних для унитарных действий абелевых локально компактных групп компактного происхождения (теорема 3). На этот более широкий чем $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ естественный класс групп указал авторам А. А. Темпельман.

§ 2. Усреднения по подгруппам

В этом параграфе рассмотрим случай произвольной абелевой локально компактной группы, а усреднения ведутся по подгруппам.

Следующее предложение, по-видимому, хорошо известно специалистам по двойственным группам. Поскольку нам неизвестно точной ссылки, для полноты изложения приводим его с коротким доказательством.

Предложение 1. *Пусть G — локально компактная абелева группа, $H \subset G$ — подгруппа G и $\chi \in G^\wedge$. Тогда*

$$\int\limits_H \chi(g)\,d\mu_G(g) = \mu_G(H) I_{\mathscr{A}(H,G^\wedge)}(\chi).$$

Доказательство. Сделаем замену в интеграле. Для произвольного элемента $g_0 \in H$, полагая $g = g'g_0$, получим

$$\int\limits_H \chi(g)\,d\mu_G(g) = \int\limits_{g_0^{-1}H} \chi(g'g_0)\,d\mu_G(g') = \chi(g_0)\int\limits_H \chi(g')\,d\mu_G(g').$$

Отсюда следует равенство

$$(1-\chi(g_0))\int\limits_H \chi(g)\,d\mu_G(g) = 0.$$

Если $\chi(g_0) = 1$ для всякого $g_0 \in H$, то, очевидно,

$$\int\limits_H \chi(g)\,d\mu_G(g) = \int\limits_H d\mu_G(g) = \mu_G(H).$$

Если же найдется $g_0 \in H$ такой, что $\chi(g_0) \neq 1$, то в силу полученного равенства будет $\int\limits_H \chi(g)\,d\mu_G(g) = 0$. $\square$

Рассмотрим усреднение по подгруппам. Пусть $G_m \subset G_{m+1} \subset G$, $m \in \mathbb{N}$, — подгруппы локально компактной абелевой группы G такие, что $\mu_G(G_m) \to +\infty$ при $m \to \infty$. Из критерия Блюма — Эйсенберга для сходимости эргодических средних

$$A_m f = \frac{1}{\mu_G(G_m)}\int\limits_{G_m} U_g f\,d\mu_G(g)$$

требуется, чтобы $\int\limits_{G_m} \chi(g)\,d\mu_G(g) \to 0$ для $\chi \neq 1$. Из предложения 1, в свою очередь, следует, что для этого нужно, чтобы $\lim\limits_{m\to+\infty} I_{\mathscr{A}(G_m,G^\wedge)}(\chi) = 0$ при $\chi \neq 1$. Нетрудно видеть, что последнее эквивалентно равенству $G = \bigcup\limits_{m\ge1} G_m$, поскольку в противном случае для собственной подгруппы $G' = \bigcup\limits_{m\ge1} G_m$ найдется нетривиальный характер $\chi \in \mathscr{A}(G', G^\wedge)$.

Следующая теорема является обобщением на локально компактные абелевы группы утверждения для локально конечных групп [13; 14, § 2].

Теорема 2. *Пусть G — локально компактная абелева группа, $G_m \subset G_{m+1} \subset G$, $m \in \mathbb{N}$, — ее подгруппы такие, что $G = \bigcup_{m \geq 1} G_m$. Тогда справедливо равенство*

$$\|A_m f\|_{\mathscr{H}}^2 = \sigma_f(\mathscr{A}(G_m, G^\wedge)).$$

Доказательство. Учитывая формулу (1) и предложение 1, получаем

$$\|A_m f\|_2^2 = \int\limits_{G^\wedge} \frac{1}{\mu_G(G_m)^2} \left| \int\limits_{G_m} \chi(g)\, d\mu_G(g) \right|^2 d\sigma_f(\chi)$$
$$= \int\limits_{G^\wedge} \frac{\mu_G(G_m)^2 I_{\mathscr{A}(G_m, G^\wedge)}(\chi)}{\mu_G(G_m)^2}\, d\sigma_f(\chi) = \sigma_f(\mathscr{A}(G_m, G^\wedge)). \quad \square$$

Таким образом, из теоремы 2 видно, что скорость сходимости определяется асимптотикой спектральной меры в окрестности единичного характера. Простым следствием из этой теоремы является следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть спектральная мера σ_f абсолютно непрерывна (с плотностью ρ) относительно меры Хаара $\mu_{G^\wedge}$, т. е. для любого измеримого множества $E \subset G^\wedge$ справедливо равенство*

$$\sigma_f(E) = \int\limits_E d\sigma_f(\chi) = \int\limits_E \rho(\chi)\, d\mu_{G^\wedge}(\chi).$$

Предположим, что плотность ρ непрерывна в единичном характере. Тогда справедливо асимптотическое соотношение

$$\|A_m f\|_{\mathscr{H}}^2 = \rho(1)\mu_{G^\wedge}(\mathscr{A}(G_m, G^\wedge)) + o(\mu_{G^\wedge}(\mathscr{A}(G_m, G^\wedge))) \quad \text{при } m \to +\infty.$$

§ 3. Усреднения для действия групп компактного происхождения

В этом параграфе приведен основной результат статьи — спектральный критерий скорости сходимости классических средних для действия абелевой локально компактной группы компактного происхождения. Напомним, что для такой группы по теореме 1 имеется изоморфное описание $G \simeq K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$.

3.1. Усреднения для действия компактных групп. Пусть $G = K$ — компактная абелева группа. Мера Хаара μ_K на ней конечна (а не σ-конечна), поэтому статистической эргодической теоремы (относительно меры μ_K) в этом случае нет, но можно привести аналог этого утверждения, который, по существу, является следствием абсолютной непрерывности интеграла Лебега.

Пусть $K_m \subset K$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, — ненулевые (по мере μ_K) подмножества K такие, что $\lim\limits_{m\to\infty} K_m = K_0$ в метрике Фреше — Никодима, т. е.

$$\lim_{m\to\infty} \mu_K(K_m \Delta K_0) = 0.$$

Тогда для $f \in \mathscr{H}$ при $m \to +\infty$

$$\frac{1}{\mu_K(K_m)} \int\limits_{K_m} U_k f\, d\mu_K(k) \to \frac{1}{\mu_K(K_0)} \int\limits_{K_0} U_k f\, d\mu_K(k).$$

Скорость сходимости в этом утверждении оценивается следующим образом.

Предложение 3. *Для всех $m \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*
$$\left\|\frac{1}{\mu_K(K_m)}\int\limits_{K_m} U_k f\,d\mu_K(k) - \frac{1}{\mu_K(K_0)}\int\limits_{K_0} U_k f\,d\mu_K(k)\right\|_{\mathscr{H}} \le 2\|f\|_{\mathscr{H}}\frac{\mu_K(K_m\Delta K_0)}{\mu_K(K_0)}.$$

Доказательство. Прибавляя и отнимая выражение $\frac{1}{\mu_K(K_0)}\int\limits_{K_m} U_k f\,d\mu_K(k)$, получаем
$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{\mu_K(K_m)}\int\limits_{K_m} U_k f\,d\mu_K(k) - \frac{1}{\mu_K(K_0)}\int\limits_{K_0} U_k f\,d\mu_K(k)\right\|_{\mathscr{H}} \\
&\qquad = \left\|\frac{1}{\mu_K(K_0)}\left(\int\limits_{K_0} U_k f\,d\mu_K(k) - \int\limits_{K_m} U_k f\,d\mu_K(k)\right)\right. \\
&\qquad\quad \left. + \left(\frac{1}{\mu_K(K_0)} - \frac{1}{\mu_K(K_m)}\right)\int\limits_{K_m} U_k f\,d\mu_K(k)\right\|_{\mathscr{H}} \\
&\le \frac{1}{\mu_K(K_0)}\int\limits_{K_0\Delta K_m} \|U_k f\|_{\mathscr{H}}\,d\mu_K(k) + \frac{|\mu_K(K_m)-\mu_K(K_0)|}{\mu_K(K_m)\mu_K(K_0)}\int\limits_{K_m}\|U_k f\|_{\mathscr{H}}\,d\mu(k) \\
&\quad \le \frac{\mu_K(K_m\Delta K_0)\|f\|_{\mathscr{H}}}{\mu_K(K_0)} + \frac{\mu_K(K_m\Delta K_0)\|f\|_{\mathscr{H}}}{\mu_K(K_0)} = 2\frac{\mu_K(K_m\Delta K_0)}{\mu_K(K_0)}\|f\|_{\mathscr{H}}. \quad \square
\end{aligned}$$
Предложение 3 доказано.

Замечание. Скорость сходимости в предложении 3 определяется скоростью сходимости к нулю величин $\mu_K(K_m\Delta K_0)$ и может быть сколь угодно быстрой. Этого можно добиться, переходя к сходящейся подпоследовательности K_{m_j}.

3.2. Нормы классических усреднений. Пусть $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$. Любой элемент $g \in G$ будем представлять в виде $g = (k, \vec{t}, \vec{n})$, где $k \in K$, $\vec{t} \in \mathbb{R}^{d_1}$ и $\vec{n} \in \mathbb{Z}^{d_2}$. Пусть $e \in K$ — нейтральный элемент.

Нетрудно видеть, что для группы U_g, $g \in G$, унитарных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ справедливо представление
$$U_g = U_1^k U_2^{\vec{t}} U_3^{\vec{n}},$$
где $U_1^k = U_{(k,0,0)}$, $U_2^{\vec{t}} = U_{(e,\vec{t},0)}$ и $U_3^{\vec{n}} = U_{(e,0,\vec{n})}$. Для меры Хаара μ_G также имеем разложение
$$\mu_G = \mu_K \otimes \mu_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mu_{\mathbb{Z}_2^d} = \mu_K \otimes \mathscr{L}_{d_1} \otimes \#_{d_2},$$
где $\mathscr{L}_{d_1}$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{d_1}$ и $\#_{d_2}$ — считающая мера в $\mathbb{Z}^{d_2}$.

Для индекса $\alpha = (m, \vec{t}, \vec{n}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}_+^{d_1} \times \mathbb{N}^{d_2}$ положим
$$G_\alpha = K_m \times [0, \vec{t}) \times [0, \vec{n}) \subset G,$$
где $\mu_K(K_m\Delta K) \to 0$ при $m \to +\infty$. Будем писать $\alpha \to \infty$ тогда и только тогда, когда $m, t_1, \dots, t_{d_1}, n_1, \dots, n_{d_2} \to +\infty$.

Рассмотрим эргодические средние для группы G по множествам G_α
$$\begin{aligned}
A_\alpha f &= \frac{1}{\mu_G(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha} U_g f\,d\mu_G(g) \\
&= \frac{1}{\mu(K_m)t_1\cdots t_{d_1}n_1\cdots n_{d_2}}\int\limits_{K_m}\int\limits_{[0,\vec{t})}\int\limits_{[0,\vec{n})} U_1^k U_2^{\vec{s}} U_3^{\vec{j}} f\,d\mu_K(k)d\vec{s}d\#\vec{j} = A_m A_{\vec{t}} A_{\vec{n}} f.
\end{aligned}$$

Нам понадобится формула для нормы эргодических средних для прямой суммы групп.

Предложение 4. *Пусть K, L — локально компактные абелевы группы, μ_K, μ_L — меры Хаара на K, L, K_n, L_m — усредняющие подмножества в K и L соответственно такие, что $0 < \mu_K(K_n) < \infty$ и $0 < \mu_L(L_m) < \infty$. Для эргодических средних*

$$A_{(n,m)}f = \frac{1}{\mu_K(K_n)\mu_L(L_m)} \int\limits_{K_n}\int\limits_{L_m} U_1^k U_2^l f \, d\mu_K(k)\, d\mu_L(l)$$

справедлива формула

$$\|A_{(n,m)}f\|^2_{\mathscr{H}} = \frac{1}{\mu_K(K_n)^2\mu_L(L_m)^2} \times \int\limits_{K^\wedge \oplus L^\wedge} \left|\int\limits_{K_n} \chi_K(k)\, d\mu_K(k)\right|^2 \left|\int\limits_{L_m} \chi_L(l)\, d\mu_L(l)\right|^2 d\sigma_f(\chi_K, \chi_L).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться формулой (1) для группы $G = K \oplus L$, используя представление $G^\wedge = K^\wedge \oplus L^\wedge$, причем каждый характер $\chi \in G^\wedge$ представляется как произведение характеров из $K^\wedge$ и $L^\wedge$, т. е. $\chi((k,l)) = \chi_K(k)\chi_L(l)$. $\square$

Применяя предложение 4 к группе $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$ и средним A_α, получаем

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} = \int\limits_{K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}} \mathscr{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) \Phi_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) F_m(\chi)\, d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}), \tag{2}$$

где использованы обозначения для многомерных ядер Фейера

$$\mathscr{F}_{\vec{t}}^{d_1}(\vec{x}) = \frac{1}{t_1^2 \cdots t_{d_1}^2} \left| \int\limits_{[0,\vec{t})} e^{i(\vec{s},\vec{x})} d\vec{s} \right|^2 = \prod_{i=1}^{d_1} \left(\frac{\sin \frac{t_i x_i}{2}}{\frac{t_i x_i}{2}} \right)^2 = \prod_{i=1}^{d_1} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{t_i x_i}{2}\right),$$

$$\Phi_{\vec{n}}^{d_2}(\vec{y}) = \frac{1}{n_1^2 \cdots n_{d_2}^2} \Big| \sum_{\vec{j} \in [0,\vec{n})} e^{i(\vec{j},\vec{y})} \Big|^2 = \prod_{i=1}^{d_2} \left(\frac{\sin \frac{n_i y_i}{2}}{n_i \sin \frac{y_i}{2}} \right)^2,$$

$$F_m(\chi) = \frac{1}{\mu(K_m)^2} \left| \int\limits_{K_m} \chi_K(g)\, d\mu(g) \right|^2.$$

Это следует из того, что $G^\wedge \simeq K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}$ (мы отождествляем $\mathbb{T}^1 = \mathbb{S}^1 = (-\pi, \pi]$); характер для группы $\mathbb{R}^{d_1}$ выглядит как $\chi_{\mathbb{R}^{d_1}}(\vec{x}) = e^{i(\vec{x},\vec{s})}$, $\vec{s} \in \mathbb{R}^{d_1}$, а характер для группы $\mathbb{Z}^{d_2}$ имеет вид $\chi_{\mathbb{Z}^{d_2}}(\vec{j}) = e^{i(\vec{y},\vec{j})}$, $\vec{y} \in (-\pi, \pi]^{d_2}$.

3.3. Основной результат. Обозначим через $\Pi_d(\vec{\delta})$ параллелепипед в $\mathbb{R}^d$ с ребрами $\vec{\delta} > 0$, т. е.

$$\Pi_d(\vec{\delta}) = (-\delta_1, \delta_1] \times \cdots \times (-\delta_d, \delta_d].$$

Для любого вектора $\vec{v} > 0$ и $\vec{\beta} \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\vec{v}^{\vec{\beta}} = v_1^{\beta_1} \cdots v_d^{\beta_d}, \quad \vec{v}^{-1} = (1/v_1, \dots, 1/v_d).$$

Пусть $\phi(\alpha) = \phi(m, \vec{t}, \vec{n})$ — произвольная вещественнозначная неотрицательная функция.

Лемма 1. *Если* $\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} = \mathscr{O}(\phi(\alpha))$ *при* $\alpha \to \infty$, *т. е. существует константа* $B > 0$ *такая, что для всех* $\vec{t}, \vec{n}, m > 0$ *выполняется*

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le B\phi(m, \vec{t}, \vec{n}),$$

то найдется константа $D = D(d_1 + d_2) > 0$ *такая, что для спектральной меры* σ_f *имеет место неравенство*

$$\sigma_f\left(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{t}^{\,-1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{n}^{\,-1})\right) \le BD\phi(m, \vec{t}, \vec{n}).$$

Доказательство. Положим

$$1/D = (2\sin(1/2))^{d_1+d_2} = \min_{\vec{x}\in\Pi_{d_1}(\vec{t}^{\,-1})} \mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \min_{\vec{y}\in\Pi_{d_2}(\vec{n}^{\,-1})} \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y}).$$

Учитывая, что $F_m(\chi) = 1$ для $\chi \in \mathscr{A}(K_m, K^\wedge)$, получаем

$$\begin{aligned} B\phi(m, \vec{t}, \vec{n}) \ge \|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} &= \int\limits_{K^\wedge\oplus\mathbb{R}^{d_1}\oplus\mathbb{T}^{d_2}} \mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x})\Phi^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y})F_m(\chi)\,d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &\ge \int\limits_{\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\Pi(\vec{t}^{\,-1})\times\Pi(\vec{n}^{\,-1})} \mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x})\mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y})F_m(\chi)\,d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &\ge D^{-1} \int\limits_{\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\Pi(\vec{t}^{\,-1})\times\Pi(\vec{n}^{\,-1})} F_m(\chi)\,d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \\ &= D^{-1}\sigma_f(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{t}^{\,-1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{n}^{\,-1})). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующий критерий является основным результатом работы. Здесь мы предполагаем, что $K_m \subset K_{m+1}$ — подгруппы компактной группы K, $\bigcup\limits_{m\ge1} K_m = K$, и $\mu_K(K_m) > 0$.

Теорема 3. *Пусть* $G = K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$, $\vec{\alpha} \in [0, 2)^{d_1}$, $\vec{\beta} \in [0, 2)^{d_2}$, $f \in \mathscr{H}$ *и функция* ψ *такова, что* $\psi(m) \to \infty$ *при* $m \to \infty$.

1. *Если найдется константа* $C > 0$ *такая, что для всех* $\vec{\delta_1} \ge 0$, $\vec{\delta_2} \in [0, \pi)^{d_2}$, $m \in \mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$\sigma_f(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{\delta_1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{\delta_2})) \le C\vec{\delta_1}^{\vec{\alpha}}\vec{\delta_2}^{\vec{\beta}}\frac{1}{\psi(m)},$$

то найдется константа $B = B(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, C) > 0$ *такая, что для всех* $\vec{t} > 0$, $\vec{n} \ge 1$, $m \ge 1$

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le \frac{B}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)}.$$

2. *Если найдется константа* $B > 0$ *такая, что для всех* $\vec{t} > 0$, $\vec{n} \ge 1$, $m \ge 1$

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le \frac{B}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)},$$

то найдется константа $C = C(d_1 + d_2, B) > 0$ *такая, что при всех* $\vec{\delta_1} \ge 0$, $\vec{\delta_2} \in [0, \vec{\pi})$, $m \in \mathbb{N}$

$$\sigma_f\left(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \Pi_{d_1}(\vec{\delta_1}) \times \Pi_{d_2}(\vec{\delta_2})\right) \le C\vec{\delta_1}^{\vec{\alpha}}\vec{\delta_2}^{\vec{\beta}}\frac{1}{\psi(m)}.$$

Доказательство. 1. Воспользуемся формулой (2), записывая интеграл по мере σ_f через интеграл от функции распределения по классической мере Лебега. Учитывая предложение 1 и представление $\mathbb{S}^1$ в виде полуинтервала $(-\pi, \pi]$, получаем

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int\limits_{K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2}} \mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y}) F_m(\chi)\, d\sigma_f(\chi_K, \vec{x}, \vec{y})$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int\limits_0^1 u\sigma_f\big\{(\chi_K, \vec{x}, \vec{y}) \in K^\wedge \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{T}^{d_2} : \big|\mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y}) F_m(\chi)\big| > u\big\}\, du$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \int\limits_0^1 u\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \big\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times (-\pi, \pi]^{d_2} : \big|\mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y})\big| > u\big\}\big)\, du.$$

Можно считать, что мера σ_f определена на $K^\wedge \times \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, а носителем является множество $K^\wedge \times \mathbb{R}^{d_1} \times (-\pi, \pi]^{d_2}$. Тогда неравенство перепишется в виде

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} \times \int\limits_0^1 u\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \big\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \big|\mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y})\big| > u\big\}\big)\, du.$$

Далее проведем доказательство, следуя работе [19]. Обозначая через $\varphi_{\vec{t},\vec{n}}$ гомотетию

$$\varphi_{\vec{t},\vec{n}} = \frac{1}{2}(t_1 x_1, \dots, t_{d_1} x_{d_1}, n_1 y_1, \dots, n_{d_2} y_{d_2})$$

и полагая

$$\mathscr{S}^{d_1,d_2}_u = \big\{(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} : \big|\mathscr{F}^{d_1}_{\vec{t}}(\vec{x}) \mathscr{F}^{d_2}_{\vec{n}}(\vec{y})\big| > u\big\}, \quad u \in (0, 1),$$

получим

$$\|A_\alpha f\|^2_{\mathscr{H}} \le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}),$$

где

$$I_{\sigma_f}(m, \vec{t}, \vec{n}) = \int\limits_0^1 u\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m, K^\wedge) \times \varphi^{-1}_{\vec{t},\vec{n}} \mathscr{S}^{d_1,d_2}_u\big)\, du. \tag{3}$$

Множество $\mathscr{S}^{d_1,d_2}_u$ можно накрыть крестообразным множеством $E^{d_1+d_2}_u$, т. е. $\mathscr{S}^{d_1,d_2}_u \subset E^d_u$, $d = d_1 + d_2$, где для $u \in (0, 1)$

$$E^d_u = \left\{x \in \mathbb{R}^d : |x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}| < \frac{1}{u},\ 1 \le k \le d,\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le d\right\}.$$

Далее воспользуемся следующим утверждением из [19] о том, что множество E^d_u можно вложить в подходящее объединение параллелепипедов.

Предложение 5. *Пусть $\varepsilon > 1$. Тогда для любого $u \in (0, 1)$ и для любой перестановки $\tau \in S_d$*

$$E^d_u \subset \bigcup_{j_1=1}^{k} \bigcup_{j_2=1}^{j_1} \cdots \bigcup_{j_{d-1}=1}^{j_{d-2}} \Pi^\tau_d\left(\varepsilon^{j_{d-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-2}}}{\varepsilon^{j_{d-1}-1}}, \frac{\varepsilon^{j_{d-3}}}{\varepsilon^{j_{d-2}-1}}, \dots, \frac{\varepsilon^{j_1}}{\varepsilon^{j_2-1}}, \frac{1}{u\varepsilon^{j_1-1}}\right),$$

где $k = k(u) = \left\lceil \frac{\ln(1/u)}{\ln\varepsilon} \right\rceil$, и $\Pi_d^\tau(\delta_1,\ldots,\delta_d) = \Pi_d(\delta_{\tau^{-1}(1)},\ldots,\delta_{\tau^{-1}(d)})$.

Из этого предложения немедленно следует, что

$$\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\varphi_{\vec{t},\vec{n}}^{-1}\mathscr{S}_u^{d_1,d_2} \subset \bigcup_{j_1=1}^{k}\bigcup_{j_2=1}^{j_1}\cdots\bigcup_{j_{d-1}=1}^{j_{d-2}}\mathscr{A}(K_m,K^\wedge) \times\varphi_{\vec{t},\vec{n}}^{-1}\Pi_d^\tau\left(\varepsilon^{j_{d-1}},\frac{\varepsilon^{j_{d-2}}}{\varepsilon^{j_{d-1}-1}},\frac{\varepsilon^{j_{d-3}}}{\varepsilon^{j_{d-2}-1}},\ldots,\frac{\varepsilon^{j_1}}{\varepsilon^{j_2-1}},\frac{1}{u\varepsilon^{j_1-1}}\right).$$

Для $\vec{\gamma} = (\vec{\alpha},\vec{\beta}) \in [0,2)^d$ обозначим через $\vec{\gamma}^* = (\gamma_1^*,\ldots,\gamma_d^*)$ перестановку по возрастанию координат $\vec{\gamma}$, т. е. $\gamma_1^* \le \gamma_2^* \le \cdots \le \gamma_d^*$. Среди последовательных разностей $\gamma_k^* - \gamma_{k+1}^*$ для $1 \le k \le d-1$ пусть $r = r(\vec{\gamma})$ — число *нулевых* разностей. Если $r < d-1$, то обозначим через Γ_k, $1 \le k \le d-1-r$, ненулевые значения среди этих разностей. Наконец, пусть

$$M = M(\vec{\gamma}) = \max_{1\le k\le d}\gamma_k = \gamma_d^*,$$

$$\sigma = \sigma(\vec{\gamma}) = \begin{cases} e^{\gamma_2^*+\cdots+\gamma_d^*}, & \text{если } r = d-1,\\ \frac{e^{\gamma_1^*+\cdots+\gamma_{d-1}^*}}{(1-e^{\Gamma_1})\cdots(1-e^{\Gamma_{d-1-r}})}, & \text{если } r < d-1.\end{cases}$$

Проделывая такие же выкладки, как в предложении 2 в [19], получаем оценку

$$\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\varphi_{\vec{t},\vec{n}}^{-1}\mathscr{S}_u^{d_1,d_2}\big) \le 2^{\gamma_1+\cdots+\gamma_d}C\sigma\frac{(\ln(1/u)+1)^r}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)u^M}.$$

Учитывая эту оценку, для интеграла (3) получаем неравенство для любого $\delta \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} I_{\sigma_f}(m,\vec{t},\vec{n}) &= \int_0^\delta u\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\varphi_{\vec{t},\vec{n}}^{-1}\mathscr{S}_u^{d_1,d_2}\big)\,du \\ &\quad + \int_\delta^1 u\sigma_f\big(\mathscr{A}(K_m,K^\wedge)\times\varphi_{\vec{t},\vec{n}}^{-1}\mathscr{S}_u^{d_1,d_2}\big)\,du \\ &\le \frac{\delta^2}{2}\|f\|_{\mathscr{H}}^2 + \frac{2^{\gamma_1+\cdots+\gamma_d}C\sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)}\int_\delta^1 u^{1-M}(\ln(1/u)+1)^r\,du. \end{aligned}$$

Подстановка $u = e^{-v}$ дает оценку

$$I_{\sigma_f}(m,\vec{t},\vec{n}) \le \frac{\delta^2}{2}\|f\|_{\mathscr{H}}^2 + \frac{2^{\gamma_1+\cdots+\gamma_d}C\sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)}\int_0^{\ln(1/\delta)}(1+v)^r e^{-(2-M)v}\,dv.$$

Поскольку $0 \le M < 2$, полагая $\delta = 0$, получим

$$\|A_\alpha f\|_{\mathscr{H}}^2 \le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} I_{\sigma_f}(m,\vec{t},\vec{n}) \le 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2}\frac{2^{\gamma_1+\cdots+\gamma_d}C\sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)}\int_0^{+\infty}(1+v)^r e^{-(2-M)v}\,dv$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} 2^{\gamma_1+\dots+\gamma_d} \frac{C\sigma}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)} \sum_{k=0}^{r} C_r^k \int_0^{\infty} v^k e^{-(2-M)v}\,dv = \frac{B}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)},$$

где

$$B = 2\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2d_2} 2^{\gamma_1+\dots+\gamma_d} C\sigma \sum_{k=0}^{r} C_r^k \frac{k!}{(2-M)^{k+1}}.$$

2. Доказательство второй части теоремы немедленно следует из леммы 1, где в качестве функции $\phi(m,\vec{t},\vec{n})$ берем $\phi(m,\vec{t},\vec{n}) = \frac{1}{\vec{t}^{\vec{\alpha}}\vec{n}^{\vec{\beta}}\psi(m)}$. Теорема доказана. $\square$

3.4. Случай изоморфизма групп. Пусть теперь G — произвольная абелева группа компактного происхождения, т. е. $G \simeq K \oplus \mathbb{R}^{d_1} \oplus \mathbb{Z}^{d_2}$. Покажем, для каких усреднений группы G можно получить оценки скорости сходимости из теоремы 3.

Приведем рассуждения в общем виде. Пусть G и H — изоморфные локально компактные абелевы группы и $\theta : H \to G$ — изоморфизм групп. Предположим, что для группы H определены эргодические средние

$$A_\alpha^{U,H} f = \frac{1}{\mu_H(H_\alpha)} \int_{H_\alpha} U_h f\,d\mu_H(h), \quad \alpha \in \mathscr{I},$$

для которых имеется оценка скорости сходимости.

Нетрудно видеть, что для мер Хаара имеется равенство $\mu_G(g) = c\mu_H(\theta^{-1}(g))$ для некоторой константы $c > 0$. Положим $G_\alpha = \theta(H_\alpha)$ и $\mathscr{U}_g = U_{\theta^{-1}g}$. Делая замену переменных с помощью изоморфизма θ, получаем

$$A_\alpha^{U,H} f = \frac{1}{\mu_H(H_\alpha)} \int_{H_\alpha} U_h f\,d\mu_H(h) = \frac{1}{\mu_G(\theta(H_\alpha))} \int_{H_\alpha} U_h f\,d\mu_G(\theta h)$$
$$= \frac{1}{\mu_G(\theta(H_\alpha))} \int_{\theta(H_\alpha)} U_{\theta^{-1}g} f\,d\mu_G(g) = A_\alpha^{\mathscr{U},G} f.$$

Таким образом, для средних $A_\alpha^{\mathscr{U},G}$ получается такая же оценка скорости сходимости, как для $A_\alpha^{U,H} f$. Отметим также, что любая унитарная группа $\mathscr{U}_g$, $g \in G$, представляется как $\mathscr{U}_g = U_{\theta^{-1}g}$ для некоторой унитарной группы U_h, $h \in H$.

В качестве примера возьмем группу вещественных чисел по сложению $H = (\mathbb{R}, +)$ и группу положительных вещественных чисел со стандартной операцией умножения $G = (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \times)$. Нетрудно убедиться, что эти группы изоморфны с изоморфизмом $\theta(x) = \exp(x)$. Мера Хаара $d\mu_G(u) = c d(\ln u) = c\frac{du}{u}$. Далее, возьмем классические эргодические средние для группы $\mathbb{R}$

$$A_t f = \frac{1}{2t} \int_{-t}^{t} U_s f\,ds,$$

для которых известен спектральный критерий скорости сходимости. Тогда для эргодические средних

$$A_t f = \frac{1}{2t} \int_{e^{-t}}^{e^t} \mathscr{U}_u f \frac{du}{u}$$

справедлив такой же критерий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tempelman A.* Ergodic theorems for group actions. Informational and thermodynamical aspects. Dordrech: Springer-Verl., 1992.
2. *Нерётин Ю. А.* Топологические группы и инвариантные меры. 2015. arxiv.org/pdf/1510.03082.
3. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
4. *Bekka B., de la Harpe P., Valette A.* Kazhdan's property (T). Cambridge: Camb. Univ. Press, 2008.
5. *Folland G. B.* A course in abstract harmonic analysis. Boca Raton: CRC Press, 1995.
6. *Агаев Г. Н., Виленкин В. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Издательство ЭЛМ, 1981.
7. *Водолазов А. М., Скопина М. А.* Обобщенные группы Виленкина // Мат. заметки. 2024. Т. 116, № 4. С. 489–503.
8. *Blum J., Eisenberg B.,* Generalized summing sequences and the mean ergodic theorem // Proc. Am. Math. Soc. 1974. V. 42. P. 423–429.
9. *Качуровский А.Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.
10. *Качуровский А. Г., Решетенко А. В.* О скорости сходимости в эргодической теореме фон Неймана с непрерывным временем // Мат. сб. 2010. Т. 201, № 4. С. 25–32.
11. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Тр. Моск. мат. о-ва. 2016. Т. 77. С. 1–66.
12. *Aloisio M., Carvalho S. L., Oliveira S. R., Souza E.* On spectral measures and convergence rate in von Neumann's ergodic theorem // Monatsh. Math. 2024. V. 203. P. 543–562.
13. *Вершик А. М., Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп и обращенные мартингалы // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1999. № 1. С. 19–26.
14. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2007. Т. 256. С. 182–186.
15. *Качуровский А. Г.* О сходимости средних в эргодической теореме для групп $\mathbb{Z}^d$ // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1999. Т. 256. С. 121–128.
16. *Tempelman A.* Randomized consistent statistical inference for random processes and fields // Stat. Inference Stoch. Process. 2022. V. 25. P. 599–627.
17. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э., Хакимбаев А. Ж.* Спектральный критерий степенной скорости сходимости в эргодической теореме для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 92–114.
18. *Подвигин И. В.* О степенной скорости сходимости в эргодической теореме Винера // Алгебра и анализ. 2023. Т. 35, № 6. С. 159–168.
19. *Подвигин И. В.* Критерий степенной скорости сходимости эргодических средних для унитарных действий групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ // Алгебра и Анализ. 2024. Т. 36, № 4. С. 148–164.

Поступила в редакцию 30 декабря 2024 г.
После доработки 30 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Качуровский Александр Григорьевич (ORCID 0000-0002-2747-2660),
Подвигин Иван Викторович, Тодиков Владислав Эдуардович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agk@math.nsc.ru, ipodvigin@math.nsc.ru, v.todikov@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 510.522+514.146

NP–ПОЛНОТА ПРОБЛЕМЫ СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМ ДИОФАНТОВЫХ УРАВНЕНИЙ НАД КОНЕЧНЫМИ КОНФИГУРАЦИЯМИ

Н. Т. Когабаев

Аннотация. Изучаются конечные системы диофантовых уравнений над конечными конфигурациями. Доказано, что проблема совместности таких систем является NP-полной.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.310

Ключевые слова: конфигурация, инцидентность, система уравнений, недетерминированная машина Тьюринга, NP-полная проблема.

Исследование систем уравнений над произвольными алгебраическими системами в последнее время активно развивается как самостоятельное направление в алгебраической геометрии [1]. В данном направлении также естественным образом возникают задачи с алгоритмической постановкой, в том числе для систем уравнений над предикатными структурами. В [2] предложены алгоритмы проверки совместности, вычисления радикала и нахождения координатного графа для систем уравнений над конечными графами. В [3] найдены оценки трудоемкости алгоритмов проверки совместности и нахождения общего решения систем уравнений в различных классах конечных графов, а также установлена NP-полнота проблемы совместности систем диофантовых уравнений над конечными симметричными иррефлексивными графами. В [4] установлена NP-полнота проблемы совместности систем уравнений над конечными структурами в таких классах, как полные p-дольные графы ($p \geq 3$), матроиды, ранг которых не превосходит k ($k \geq 2$), k-однородные матроиды ($k \geq 2$) и матроиды разбиения ранга, не превосходящего k ($k \geq 3$). В [5] доказано, что для систем уравнений над конечными частичными порядками проблема существования решения, состоящего из попарно различных элементов, является NP-полной. В [6] представлен полиномиальный алгоритм построения радикала и координатного частичного порядка для систем уравнений над конечными частичными порядками в языке без констант.

В [7] предложена детерминированная процедура проверки совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями. В общем случае предложенная процедура имела экспоненциальное время работы. Также был выделен класс систем уравнений, для которых предложенная процедура решает вопрос об их совместности за полиномиальное время. На международной конференции «Мальцевские чтения 2023» Степан Львович Кузнецов задал

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 23-11-00170, https://rscf.ru/project/23-11-00170.

автору вопрос об NP-трудности проблемы совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями. Настоящая статья посвящена ответу на данный вопрос. Как оказалось, небольшая модификация предложенной в [7] процедуры позволяет доказать, что проблема совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями лежит в классе NP. Более того, доказано, что данная проблема является NP-полной.

В § 1 настоящей статьи изложены необходимые сведения, относящиеся к универсальной алгебраической геометрии и к теории проективных плоскостей, а также определена структура данных, необходимая для реализации представленных в статье процедур на машинах Тьюринга. В § 2 приведено описание недетерминированной полиномиальной процедуры для распознавания совместных систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями. Кроме этого, в § 2 построена полиномиальная трансформация проблемы совместности систем диофантовых уравнений над конечными симметричными иррефлексивными графами в проблему совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями, откуда следует NP-полнота последней.

§ 1. Предварительные сведения

Следуя [1, гл. 2], введем основные понятия универсальной алгебраической геометрии над произвольной предикатной алгебраической системой.

Пусть σ — предикатная сигнатура, $\mathfrak{A}$ — алгебраическая система сигнатуры σ, A — носитель системы $\mathfrak{A}$. Определим константное обогащение $\sigma_A = \langle \sigma, c_a \rangle_{a \in A}$ сигнатуры σ, считая, что символ c_a, где $a \in A$, всегда интерпретируется в системе $\mathfrak{A}$ как элемент a. Для удобства записи будет отождествлять символ c_a с элементом a.

Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ — конечное множество предметных переменных. Множество всех термов сигнатуры σ_A над переменными из X совпадает с $A \cup X$. Обозначим через $\mathrm{At}_{\sigma_A}(X)$ множество всех атомарных формул сигнатуры σ_A над переменными из X.

Диофантовым уравнением сигнатуры σ_A *над* X будем называть любую формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_k) \in \mathrm{At}_{\sigma_A}(X)$. Всюду далее для краткости будем говорить «уравнение» вместо «диофантово уравнение».

Системой уравнений сигнатуры σ_A *над* X будем называть любое подмножество $S \subseteq \mathrm{At}_{\sigma_A}(X)$. *Множеством решений системы уравнений* S *над* $\mathfrak{A}$ называем множество

$$V_{\mathfrak{A}}(S) = \{\langle b_1, \ldots, b_k \rangle \in A^k \mid \mathfrak{A} \models \varphi(b_1, \ldots, b_k) \text{ для всех } \varphi \in S\}.$$

Система S *совместна над* $\mathfrak{A}$, если $V_{\mathfrak{A}}(S) \neq \varnothing$, в противном случае S *несовместна над* $\mathfrak{A}$. Системы уравнений $S_1, S_2 \subseteq \mathrm{At}_{\sigma_A}(X)$ *эквивалентны над* $\mathfrak{A}$, если $V_{\mathfrak{A}}(S_1) = V_{\mathfrak{A}}(S_2)$.

Приведем необходимые для нас сведения из теории проективных плоскостей [8].

В теории проективных плоскостей алгебраические системы рассматривают в сигнатуре $\sigma = \langle A^0, {}^0A, I \rangle$, где A^0 и ${}^0A$ — одноместные предикатные символы, а I — двухместный предикатный символ. Носитель A каждой такой системы разбит на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$. Элементы $a, b \in A$ называют *однотипными* относительно данного разбиения, если $a, b \in A^0$ или $a, b \in {}^0A$. Элементы A^0 часто называют *точками*, а элементы ${}^0A$ — *линиями*.

Конфигурацией называют алгебраическую систему $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества A^0 и ${}^0A$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$, называемым *отношением инцидентности* и удовлетворяющим следующим условиям:

(1) если $\langle a, b\rangle \in I$, то элементы a и b неоднотипные;

(2) если $\langle a, c\rangle \in I$, $\langle b, c\rangle \in I$, $\langle a, d\rangle \in I$, $\langle b, d\rangle \in I$, то $a = b$ или $c = d$.

Таким образом, в алгебраической геометрии над конфигурацией $\mathfrak{A}$ любое диофантово уравнение сигнатуры $\sigma_A = \langle A^0, {}^0A, I, c_a\rangle_{a\in A}$ над X имеет один из следующих четырех видов: $t \approx t'$, или $A^0(t)$, или ${}^0A(t)$, или $I(t, t')$, где $t, t' \in A \cup X$. Уравнения вида $t \approx t'$ будем называть *равенствами*, уравнения вида $A^0(t)$ и ${}^0A(t)$ — *ти́повыми*, а уравнения вида $I(t, t')$ — *инцидентностными*.

В качестве математической модели для вычислений мы используем многоленточную недетерминированную машину Тьюринга [9, § 10.1]. Также будем придерживаться определений класса NP и понятия NP-полной проблемы, принятых в [9, § 10.2]. Машины Тьюринга будут интересовать нас прежде всего как устройства для распознавания языков. Напомним, что недетерминированная машина Тьюринга T *распознает* слово w над некоторым фиксированным алфавитом, если хотя бы одна ветвь вычислений, запущенных на машине T с входным словом w, достигает заключительного состояния машины. Таким образом, нам необходимо представить интересующую нас алгоритмическую проблему в виде формального языка над некоторым конечным алфавитом.

Пусть даны произвольная конечная конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$, конечное множество переменных X и система уравнений S сигнатуры

$$\sigma_A = \langle A^0, {}^0A, I, c_a\rangle_{a\in A}$$

над X. Будем считать, что $|A| = n$, $|X| = k$, а элементы множеств A и X занумерованы следующим образом: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Также введем нумерацию всех термов сигнатуры σ_A, положив $t_i = a_i$ для всех $1 \le i \le n$ и $t_{n+i} = x_i$ для всех $1 \le i \le k$.

Процедуры, построенные ниже, будут использовать в своей работе следующие данные, которые будут храниться на лентах машины Тьюринга в виде слов над алфавитом $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$.

(1) Носитель A конфигурации $\mathfrak{A}$ и одноместные предикаты A^0 и ${}^0A$ представлены на 1-й ленте в виде слова

$$w^1 = \triangleleft w^1_1 \ldots w^1_n \# w^1_{n+1} \ldots w^1_{2n} \triangleright,$$

где $w^1_i, w^1_{n+i} \in \{0, 1\}$, $w^1_i = 1 \iff \mathfrak{A} \models A^0(a_i)$ и $w^1_{n+i} = 1 \iff \mathfrak{A} \models {}^0A(a_i)$ для всех $1 \le i \le n$.

(2) Отношение инцидентности I представлено на 2-й ленте в виде слова

$$w^2 = \triangleleft w^2_{1,1} \ldots w^2_{1,n} \# \ldots \# w^2_{n,1} \ldots w^2_{n,n} \triangleright,$$

где $w^2_{i,j} \in \{0, 1\}$, $w^2_{i,j} = 1 \iff \mathfrak{A} \models I(a_i, a_j)$ для всех $1 \le i, j \le n$. Иначе говоря, слово w^2 — это записанная построчно матрица инцидентности конфигурации $\mathfrak{A}$.

(3) Уравнения вида $t_i \approx t_j$ из системы S представлены на 3-й ленте в виде слова

$$w^3 = \triangleleft w^3_{1,1} \ldots w^3_{1,n+k} \# \ldots \# w^3_{n+k,1} \ldots w^3_{n+k,n+k} \triangleright,$$

где $w^3_{i,j} \in \{0, 1\}$, $w^3_{i,j} = 1 \iff t_i \approx t_j \in S$ для всех $1 \le i, j \le n + k$. Поскольку равенство симметрично, будем считать, что матрица $\left(w^3_{i,j}\right)_{i,j\le n+k}$ тоже является симметричной, т. е. для любых термов t_i, t_j уравнения $t_i \approx t_j$ и $t_j \approx t_i$ либо одновременно присутствуют, либо одновременно отсутствуют в системе S. В силу такого соглашения мы не будем различать уравнения $t_i \approx t_j$ и $t_j \approx t_i$.

(4) Уравнения вида $I(t_i, t_j)$ из системы S представлены на 4-й ленте в виде слова

$$w^4 = \triangleleft w^4_{1,1} \dots w^4_{1,n+k} \# \dots \# w^4_{n+k,1} \dots w^4_{n+k,n+k} \triangleright,$$

где $w^4_{i,j} \in \{0,1\}$, $w^4_{i,j} = 1 \iff I(t_i, t_j) \in S$ для всех $1 \le i, j \le n+k$. Поскольку отношение инцидентности симметрично, будем считать, что матрица $\left(w^4_{i,j}\right)_{i,j \le n+k}$ тоже симметричная, т. е. для любых термов t_i, t_j уравнения $I(t_i, t_j)$ и $I(t_j, t_i)$ либо одновременно присутствуют, либо одновременно отсутствуют в системе S. В силу такого соглашения не будем различать уравнения $I(t_i, t_j)$ и $I(t_j, t_i)$.

(5) Уравнения вида $A^0(t_i)$ и ${}^0A(t_j)$ из системы S представлены на 5-й ленте в виде слова

$$w^5 = \triangleleft w^5_1 \dots w^5_{n+k} \# w^5_{n+k+1} \dots w^5_{2(n+k)} \triangleright,$$

где $w^5_i, w^5_{n+k+i} \in \{0,1\}$, $w^5_i = 1 \iff A^0(t_i) \in S$ и $w^5_{n+k+i} = 1 \iff {}^0A(t_i) \in S$ для всех $1 \le i \le n+k$.

(6) Процедура будет использовать множества $U(x_i) \subseteq A$, где $1 \le i \le k$, обладающие следующим свойством: если в текущей системе присутствует уравнение $I(x_i, a_j)$, то $a_j \in U(x_i)$. Элементы данных множеств будут хранится на 6-й ленте в виде слова

$$w^6 = \triangleleft w^6_{1,1} \dots w^6_{1,n} \# \dots \# w^6_{k,1} \dots w^6_{k,n} \triangleright,$$

где $w^6_{i,j} \in \{0,1\}$ и $w^6_{i,j} = 1 \iff a_j \in U(x_i)$ для всех $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$.

(7) Процедура будет использовать множества $V(x_i) \subseteq A$, где $1 \le i \le k$, обладающие следующим свойством: если набор $\langle b_1, \dots, b_k \rangle \in A^k$ является решением текущей системы, то $b_i \in V(x_i)$ для всех $1 \le i \le k$. Элементы данных множеств будут хранится на 7-й ленте в виде слова

$$w^7 = \triangleleft w^7_{1,1} \dots w^7_{1,n} \# \dots \# w^7_{k,1} \dots w^7_{k,n} \triangleright,$$

где $w^7_{i,j} \in \{0,1\}$ и $w^7_{i,j} = 1 \iff a_j \in V(x_i)$ для всех $1 \le i \le k$, $1 \le j \le n$.

(8) Процедура также будет использовать разбиение множества $A \cup X$ на классы $E(t_i)$, где $1 \le i \le n+k$. В ходе исполнения процедуры некоторые классы могут стать пустыми, при этом элементы таких классов переносятся в другие классы. Если в определенный момент класс $E(t_i)$ непуст, то процедура отождествляет все его элементы друг с другом, при этом i является наименьшим индексом термов из $E(t_i)$. Элементы данных классов будут хранится на 8-й ленте в виде слова

$$w^8 = \triangleleft w^8_{1,1} \dots w^8_{1,n+k} \# \dots \# w^8_{n+k,1} \dots w^8_{n+k,n+k} \triangleright,$$

где $w^8_{i,j} \in \{0,1\}$, $w^8_{i,j} = 1 \iff t_j \in E(t_i)$ для всех $1 \le i, j \le n+k$.

Процедуры также будут использовать 9-ю и 10-ю ленты для вспомогательных вычислений (организация и хранение счетчиков, копии текущих данных, хранение и обработка производных структур данных).

Согласно определению из [9, § 10.1] входные данные машины Тьюринга следует полностью располагать на ее первой ленте. Однако, поскольку в общем случае копирование фрагмента первой ленты на любую другую ленту осуществляется за линейное время, будем размещать входные данные на нескольких лентах. В частности, для основной процедуры, распознающей совместные системы диофантовых уравнений над конечными конфигурациями, входными данными будем считать описанные выше слова w^1, w^2, w^3, w^4 и w^5. Таким образом, наша основная процедура, запущенная на пятерке входных слов w^1, w^2, w^3, w^4, w^5, будет переходить в заключительное состояние в том и только том случае, когда слова w^1, w^2, w^3, w^4, w^5 соответствуют совместной системе уравнений. Напомним, что недетерминированная машина Тьюринга T имеет *временную сложность* $f(l)$, если для любого распознаваемого машиной T входного слова w длины l существует ветвь вычислений на машине T, вдоль которой слово w распознается за не более чем $f(l)$ шагов. В нашем случае размер входных данных определяется как сумма их длин и соответственно функцию временной сложности основной процедуры будем рассматривать как функцию от натурального аргумента $l = |w^1| + |w^2| + |w^3| + |w^4| + |w^5|$. Заметим, что $l = 3n^2 + 2k^2 + 4nk + 7n + 4k + 9$.

Описание процедур будем излагать на естественном языке, т. е. без подробного изложения программ на языке машин Тьюринга. Входные и выходные данные процедур будем уточнять непосредственно в их описаниях. Иногда наши процедуры будут останавливаться и выдавать сообщение о несовместности системы — в этом случае считаем, что остановка произошла в состоянии, отличном от заключительного. Объекты, указанные в описаниях наших процедур, будут использоваться как динамические переменные, т. е. данные объекты могут переопределяться в ходе исполнения процедуры, но при этом для них используются те же имена, которые были и до переопределения (как в программировании с помощью оператора присваивания :=).

§ 2. Описание процедуры и основные результаты

Определим сначала короткую вспомогательную детерминированную Процедуру А, которая инициализирует описанные в § 1 данные за полиномиальное время. Эта процедура дословно совпадает с одноименной процедурой, приведенной в [7].

Процедура А. Входными данными процедуры являются конфигурация $\mathfrak{A}$ и система уравнений S. Выходными данными процедуры являются преобразованная система уравнений, классы $E(t)$, где $t \in A \cup X$, а также множества $U(x)$ и $V(x)$, где $x \in X$.

Работа процедуры состоит из последовательного исполнения пп. (1)–(5).

(1) Добавляем в систему S уравнения $A^0(a)$ для всех $a \in A$ со свойством $\mathfrak{A} \models A^0(a)$, также добавляем уравнения ${}^0A(a)$ для всех $a \in A$ со свойством $\mathfrak{A} \models {}^0A(a)$. Удаляем из S все уравнения вида $t \approx t$, где $t \in A \cup X$.

(2) Для каждой переменной $x \in X$ полагаем $U(x) := \{a \in A \mid I(x, a) \in S\}$.

(3) Для каждой переменной $x \in X$ такой, что $U(x) \neq \varnothing$, полагаем $V(x) := \{b \in A \mid \mathfrak{A} \models I(a, b) \text{ для всех } a \in U(x)\}$. Если хотя бы для одной такой переменной $x \in X$ множество $V(x)$ оказалось пустым, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна».

(4) Для каждой переменной $x \in X$ такой, что $U(x) = \varnothing$, проверяем наличие уравнений $A^0(x)$ и ${}^0A(x)$ в системе S. Если в системе одновременно есть уравнения $A^0(x)$ и ${}^0A(x)$, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна». Если в системе есть уравнение $A^0(x)$ (уравнение ${}^0A(x)$), но нет уравнения ${}^0A(x)$ (нет уравнения $A^0(x)$), полагаем $V(x) := A^0$ ($V(x) := {}^0A$). Если же в системе нет ни $A^0(x)$, ни ${}^0A(x)$, полагаем $V(x) := A$.

(5) Для каждого $t \in A \cup X$ полагаем $E(t) := \{t\}$.

Заметим, что Процедура А корректно выдает сообщение о несовместности. Если же Процедура А не выдала сообщения о несовместности, то нетрудно видеть, что Процедура А преобразует исходную систему уравнений в эквивалентную ей систему S. Более того, исходная система эквивалентна системе $S \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X(t, t' \in E(t_i))\}$.

Предложение 1. *Время работы Процедуры А составляет* $O(l^2)$.

Доказательство. П. (1) исполняется за время $O(l)$, п. (2) — за время $O(l)$. Пп. (3) и (4) в совокупности — за время $O(l^2)$. П. (5) — за время $O(l)$. Поэтому суммарное время работы процедуры составляет $O(l^2)$. □

Теперь определим вспомогательную детерминированную Процедуру В, которая преобразует систему уравнений S в систему, не содержащую уравнений с равенством, но при этом сохраняет множество решений системы $S \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X(t, t' \in E(t_i))\}$. Эта процедура также дословно совпадает с одноименной процедурой, приведенной в [7].

Процедура В. Входными данными процедуры являются конфигурация $\mathfrak{A}$, система уравнений S, классы $E(t)$, где $t \in A \cup X$, а также множества $U(x)$ и $V(x)$, где $x \in X$, удовлетворяющие следующим свойствам.

(1) Система S содержит уравнения $A^0(a)$ для всех $a \in A$ со свойством $\mathfrak{A} \models A^0(a)$ и уравнения ${}^0A(a)$ для всех $a \in A$ со свойством $\mathfrak{A} \models {}^0A(a)$.

(2) Множества $E(t)$, где $t \in A \cup X$, образуют разбиение множества $A \cup X$.

(3) Если в S есть уравнение $t \approx t'$, то t и t' принадлежат разным E-классам.

(4) Для всех $a \in A$ имеет место $E(a) \neq \varnothing$, и если $E(t) \neq \varnothing$, где $t \in A \cup X$, то $t \in E(t)$ и для любого $t' \in E(t) \setminus \{t\}$ в системе S нет уравнений, содержащих t'.

(5) Для любого $x \in X$ справедливо $V(x) \neq \varnothing$.

(6) Если $x \in X$ и $E(x) \neq \varnothing$, то $U(x) = \{a \in A \mid I(x, a) \in S\}$.

(7) Если $x \in X$, $E(x) \neq \varnothing$ и $U(x) \neq \varnothing$, то $V(x) = \{b \in A \mid \mathfrak{A} \models I(a, b)$ для всех $a \in U(x)\}$.

(8) Если $x \in X$, $E(x) \neq \varnothing$ и $U(x) = \varnothing$, то $V(x) = A$ в случае ($A^0(x) \notin S$ и ${}^0A(x) \notin S$), $V(x) = A^0$ в случае ($A^0(x) \in S$ и ${}^0A(x) \notin S$) и $V(x) = {}^0A$ в случае ($A^0(x) \notin S$ и ${}^0A(x) \in S$).

Выходными данными процедуры являются преобразованные система S, классы $E(t)$ и множества $U(x)$ и $V(x)$. Работа процедуры заключается в исполнении циклической структуры, состоящей из Этапов 1–3, при этом проверка условия выхода из цикла осуществляется в конце Этапа 3.

Этап 1 (Анализ уравнений с равенством).

Последовательно просматриваем в системе S все уравнения, содержащие равенство. Для каждого такого уравнения $t \approx t'$ находим термы t_i и t_j такие, что $t \in E(t_i)$ и $t' \in E(t_j)$, и удаляем уравнение $t \approx t'$ из системы S. Если $i < j$, полагаем $E(t_i) := E(t_i) \cup E(t_j)$ и $E(t_j) := \varnothing$. Если же $j < i$, полагаем $E(t_i) := \varnothing$ и $E(t_j) := E(t_i) \cup E(t_j)$.

После просмотра всех уравнений с равенством переходим к Этапу 2.

Этап 2 (Анализ E-классов).

Последовательно просматриваем все непустые классы $E(t)$, $t \in A \cup X$, и для каждого из них выполняем следующие пп. (2.1)–(2.6).

(2.1) Если $|E(t) \cap A| \geq 2$, т. е. класс $E(t)$ содержит две различные константы из A, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна».

(2.2) Если $|E(t) \cap A| = 1$, $|E(t)| \geq 2$ и при этом $t \notin \bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\}$, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна».

(2.3) Если $|E(t) \cap A| = 1$, $|E(t)| \geq 2$ и при этом $t \in \bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\}$, то во всех уравнениях из S каждую переменную $x \in E(t)$ заменяем на t.

(2.4) Если $|E(t) \cap A| = 0$ и $\bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\} = \varnothing$, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна».

(2.5) Если $|E(t) \cap A| = 0$ и $\bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\} = \{a\}$ для некоторого $a \in A$, то во всех уравнениях из S каждую переменную $x \in E(t) \setminus \{t\}$ заменяем на a и добавляем в систему S уравнения $t \approx a$ и $a \approx t$.

(2.6) Если $|E(t) \cap A| = 0$ и $\left|\bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\}\right| \geq 2$, то во всех уравнениях из S каждую переменную $x \in E(t) \setminus \{t\}$ заменяем на t.

После просмотра всех классов вида $E(t)$ переходим к Этапу 3.

Этап 3 (Анализ инцидентностных и ти́повых уравнений).

Сначала последовательно просматриваем все содержащиеся в системе S уравнения вида $I(t, t')$ и выполняем для каждого из них пп. (3.1)–(3.3), затем переходим к пп. (3.4)–(3.7).

(3.1) Если в системе S вместе с уравнением $I(t, t')$ присутствует уравнение $A^0(t)$ (уравнение ${}^0A(t)$), то добавляем в S уравнение ${}^0A(t')$ (уравнение $A^0(t')$).

(3.2) Если уравнение $I(t, t')$ имеет вид $I(x, x)$, где $x \in X$, или $I(a, a')$, где $\mathfrak{A} \models \neg I(a, a')$, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна».

(3.3) Если уравнение $I(t, t')$ имеет вид $I(x, a)$, где $x \in X$, $a \in A$, и при этом $a \notin U(x)$ (это значит, что данное уравнение появилось в системе после замен переменных на Этапе 2), то полагаем $U(x) := U(x) \cup \{a\}$ и $V(x) := V(x) \cap \{b \in A \mid \mathfrak{A} \models I(a, b)\}$. Если после такого переопределения оказалось, что $V(x) = \varnothing$, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна». Если же после такого переопределения оказалось, что $V(x) = \{a'\}$ для некоторого $a' \in A$, то добавляем в систему S уравнения $x \approx a'$ и $a' \approx x$.

(3.4) После просмотра всех уравнений вида $I(t, t')$ проверяем, содержит ли система S одновременно уравнения $A^0(t)$ и ${}^0A(t)$ для какого-либо $t \in A \cup X$. Если хотя бы для одного t в системе есть пара таких уравнений, то процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна». В противном случае переходим к п. (3.5).

(3.5) Для каждой переменной $x \in X$ такой, что $E(x) \neq \varnothing$ и $U(x) = \varnothing$, проверяем наличие уравнений $A^0(x)$ и ${}^0A(x)$ в системе S. Если в системе есть уравнение $A^0(x)$ (уравнение ${}^0A(x)$), но нет уравнения ${}^0A(x)$ (нет уравнения $A^0(x)$), полагаем $V(x) := A^0$ ($V(x) := {}^0A$). Если же в системе нет ни $A^0(x)$, ни ${}^0A(x)$, полагаем $V(x) := A$.

(3.6) Для каждой переменной $x \in X$ такой, что $E(x) = \varnothing$, находим $t \in A \cup X$ с условием $x \in E(t)$. Если $t \in A$, полагаем $V(x) := \{t\}$. Если же $t \in X$, полагаем $V(x) := V(t)$.

(3.7) Проверяем, содержит ли система S уравнения с равенством. Если в S есть уравнения с равенством, переходим к Этапу 1. Если в S нет уравнений с равенством, то процедура останавливается. Если после остановки в S нет уравнений вида $I(x, x')$, где $x, x' \in X$, то процедура переходит в заключительное состояние и выдает сообщение «система совместна».

Корректность работы Процедуры B была установлена в [7].

Предложение 2 [7]. *Пусть Процедура* B *была запущена на входных системе S_0 и E-классах $E_0(t)$, $t \in A \cup X$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Исполнение Процедуры* B *всегда останавливается через конечное число шагов.*

(2) *В любой момент исполнения Процедуры* B *для текущих системы S и классов $E(t)$, $t \in A \cup X$, система уравнений $S \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E(t_i))\}$ эквивалентна системе $S_0 \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_0(t_i))\}$.*

(3) *Если процедура* B *остановилась и выдала сообщение «система несовместна», то система уравнений $S_0 \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X(t, t' \in E_0(t_i))\}$ не имеет решений.*

(4) *Если процедура* B *остановилась и выдала сообщение «система совместна», то после остановки множество*

$$\{\langle b_1, \dots, b_k\rangle \in V(x_1) \times \dots \times V(x_k) \mid \forall i, j \leq k\, \forall t \in A \cup X (b_i, b_j \in E(t) \longrightarrow b_i = b_j)\}$$

совпадает с множеством всех решений системы $S_0 \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X(t, t' \in E_0(t_i))\}$.

Предложение 3. *Время работы Процедуры* B *составляет $O(l^3)$.*

Доказательство. Оценим время однократного исполнения каждого из Этапов 1–3.

На Этапе 1 количество уравнений с равенством в текущей системе S оценивается числом $O(l)$. Для каждого удаляемого из системы уравнения $t \approx t'$ осуществляется поиск термов t_i, t_j с условием $t \in E(t_i)$, $t' \in E(t_j)$ и объединение классов $E(t_i)$ и $E(t_j)$ в один класс, на что затрачивается время $O(l)$. Таким образом, общее время работы процедуры на Этапе 1 составляет $O(l^2)$.

На Этапе 2 необходимо просмотреть каждый из $O(l)$ классов $E(t)$ и для каждого из них исполнить один из пп. (2.1)–(2.6).

В п. (2.1) чтобы обнаружить в классе $E(t)$ две константы из A необходимо просмотреть в худшем случае все первые n столбцов в строке с номером i матрицы $(e_{i,j})$, где $t = t_i$, т. е. потратить время $O(l)$.

В п. (2.2) необходимо просмотреть все элементы класса $E(t)$, что требует времени $O(l)$, и проанализировать множества $V(x)$ для каждой переменной $x \in E(t)$, что дополнительно потребует время $O(l)$. Следовательно, суммарно п. (2.2) требует время $O(l)$.

В п. (2.3) для просмотра всех элементов класса $E(t)$ и анализа множеств $V(x)$, где $x \in E(t)$, также потребуется время $O(l)$. Кроме этого, для замены каждой переменной $x \in E(t)$, которых $O(k)$ штук, в текущих уравнениях, содержащих x, которых $O(k+n)$ штук, необходимо время $O(k(k+n)) \leq O(l)$. Следовательно, суммарно п. (2.3) требует время $O(l)$.

В п. (2.4) необходимо просмотреть все элементы класса $E(t)$, что требует времени $O(k+n)$, и убедиться в том, что $\bigcap\{V(x) \mid x \in E(t)\} = \varnothing$, что потребует время $O(kn)$. Значит, суммарно п. (2.4) требует время $O(k+n+kn) \leq O(l)$.

Каждый из пп. (2.5) и (2.6) требует столько же времени, сколько п. (2.3), т. е. $O(l)$.

Таким образом, на Этапе 2 максимальное время, затрачиваемое на один класс $E(t)$, составляет $O(l)$ и, значит, общее время однократного исполнения Этапа 2 составляет $O(l^2)$.

На Этапе 3 сначала для каждого инцидентностного уравнения, которых $O(l)$ штук, необходимо исполнить пп. (3.1)–(3.3).

Исполнение пп.(3.1), (3.2) для фиксированного инцидентностного уравнения требует времени $O(1)$. В п. (3.3) для просмотра множества $U(x)$ требуется время $O(l)$, для переопределения множеств $U(x)$ и $V(x)$ — время $O(l)$, и для возможного добавления новых равенств в систему — время $O(l)$. Итого, п. (3.3) исполняется за время $O(l)$. Таким образом, на совокупное исполнение пп. (3.1)–(3.3) затрачивается время $O(l^2)$.

После просмотра всех инцидентностных уравнений в пп. (3.1)–(3.3) процедура последовательно исполняет пп. (3.4)–(3.7).

В п. (3.4) необходимо просмотреть список ти́повых уравнений, на что затрачивается время $O(l)$.

В п. (3.5) для каждой переменной x нужно проверить условие $E(x) \neq \varnothing$, на что в совокупности расходуется время $O(l)$, одновременно с этим нужно проверить условие $U(x) = \varnothing$, что тоже в совокупности требует время $O(l)$, и наконец проверить наличие или отсутствие содержащих x ти́повых уравнений, что делается за время $O(l)$. Переопределение множеств $V(x)$ при этом тоже расходует время $O(l)$. Итого, общее время исполнения п. (3.5) составляет $O(l)$.

В п. (3.6) для каждой переменной x сначала нужно проверить условие $E(x) = \varnothing$, на что в совокупности расходуется время $O(l)$, затем для текущей переменной x найти терм t с условием $x \in E(t)$, что требует время $O(l)$, после чего необходимо переопределить множество $V(x)$, на что расходуется время $O(l)$. Итого, общее время исполнения п. (3.6) составляет $O(l^2)$.

Проверка в п. (3.7) очевидно исполняется за время $O(l)$. Таким образом, на совокупное исполнение пп. (3.4)–(3.7) расходуется время $O(l^2)$. Следовательно, суммарное время исполнения Этапа 3 составляет $O(l^2)$.

Итак, на исполнение одной итерации цикла, состоящей из Этапов 1–3, расходуется время $O(l^2)$. Каждая новая итерация указанного цикла исполняется в случае наличия равенств в текущей системе S, что всегда приводит к уменьшению количества E-классов как минимум на один класс. Поскольку всего E-классов не более $k + n$ штук, то количество итераций указанного цикла не может быть больше, чем $k + n \leq l$. Отсюда следует, что итоговое время исполнения всей Процедуры B составляет $O(l^3)$. $\square$

Перед изложением основной процедуры напомним, что в [7] была предложена детерминированная процедура, которая производила проверку совместности произвольной системы уравнений над произвольной конечной конфигурацией за экспоненциальное время. Изложим модификацию данной процедуры, которая будет распознавать совместные системы уравнений над конечными конфигурациями за полиномиальное время, но уже с помощью недетерминированных вычислений. Модификация коснется лишь одного пункта процедуры (см. п. (2.4) ниже), в котором полный перебор всех кортежей фиксированной длины из допустимых элементов конфигурации заменен на недетерминированное угадывание одного из таких кортежей. Остальные пункты процедуры дословно повторяют одноименные пункты из приведенной в [7] процедуры.

Процедура C. Входными данными процедуры являются произвольные конфигурация $\mathfrak{A}$ и система уравнений S. Выходными данными процедуры являются преобразованная система уравнений, классы $E(t)$, где $t \in A \cup X$, а также множества $U(x)$ и $V(x)$, где $x \in X$.

Этап 0 (Инициализация).

На входных данных запускаем Процедуру A. Если Процедура A не выдала сообщение «система несовместна», то, как легко видеть, выходные данные Процедуры A удовлетворяют требованиям, предъявляемым к входным данным Процедуры B.

Этап 1 (Элиминация равенств).

Если Процедура A не выдала сообщение «система несовместна», то на выходных данных Процедуры A запускаем работу Процедуры B. Если Процедура B не выдала сообщение «система несовместна», то после ее остановки проверяем, содержит ли система уравнения вида $I(x, x')$, где $x, x' \in X$. Если система не содержит таких уравнений, то процедура останавливается, переходит в заключительное состояние и выдает сообщение «система совместна». Если же в системе есть уравнения вида $I(x, x')$, где $x, x' \in X$, то переходим к Этапу 2.

Этап 2 (Анализ графа Леви).

(2.1) Определим на множестве входящих в текущую систему S переменных неориентированный *граф Леви* $L_S = \langle V_S, I_S \rangle$, положив

$$V_S := \{x \in X \mid \text{ переменная } x \text{ входит хотя бы в одно уравнение из } S\},$$

$$I_S := \{(x, x') \mid \text{ уравнение } I(x, x') \text{ входит в систему } S\}.$$

Применим к графу L_S стандартный алгоритм поиска в ширину [10, § 22.2]. В процессе поиска в ширину граф L_S разбивается на связные компоненты $C_1 \cup \dots \cup C_m = V_S$, где $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$, при этом в каждом компоненте C_i, $1 \leq i \leq m$, выбирается произвольным образом исходная вершина $s_i \in C_i$ и вычисляется кратчайшее в графе L_S расстояние $\delta(s_i, x)$ от s_i до каждой вершины $x \in C_i$.

(2.2) Проверяем, существуют ли в графе L_S циклы нечетной длины. Для этого в процессе поиска в ширину в графе L_S для каждой пары различных вершин $x \neq x'$, лежащих в одном связном компоненте C_i и находящихся от вершины s_i на одном расстоянии, т. е. $\delta(s_i, x) = \delta(s_i, x')$, проверяем, есть ли в графе L_S ребро (x, x'). Если хотя бы одно такое ребро (x, x') найдено, то граф L_S содержит цикл нечетной длины, и тогда процедура останавливается и выдает сообщение «система несовместна». Если же в L_S нет циклов нечетной длины, переходим к исполнению следующего пункта.

(2.3) В силу отсутствия циклов нечетной длины граф L_S двудольный, т. е. множество всех его вершин можно разбить на два непустых подмножества V'_S и V''_S так, что любое ребро графа L_S будет связывать вершину из V'_S с вершиной из V''_S. Действительно, в качестве V'_S возьмем множество всех вершин графа L_S, находящихся на четном расстоянии от исходной вершины в соответствующем связном компоненте, а в качестве V''_S — на нечетном расстоянии. В частности, все изолированные в графе L_S вершины попадут в множество V'_S. Вершины из V'_S будем называть *свободными переменными*, а вершины из V''_S — *зависимыми переменными*. Тогда любое ребро $(x, x') \in I_S$ связывает свободную и зависимую переменные, и для любой зависимой переменной $x \in V_S$ найдется свободная переменная $x' \in V_S$ такая, что $I(x, x') \in S$.

(2.4) Без ограничения общности можно считать, что набор переменных $\langle x_1, \dots, x_p \rangle$ состоит в точности из всех свободных переменных. Для каждой из свободных переменных x_i, $1 \le i \le p$, недетерминированным образом выбираем ее значение c_i в множестве $V(x_i)$. После выбора набора $\overline{c} = \langle c_1, \dots, c_p \rangle \in V(x_1) \times \dots \times V(x_p)$ определим систему уравнений

$$S_{\overline{c}} := S \cup \{x_1 \approx c_1, \dots, x_p \approx c_p\}$$

и множества $E_{\overline{c}}(t) := E(t)$, $U_{\overline{c}}(x) := U(x)$, $V_{\overline{c}}(x) := V(x)$ для всех $t \in A \cup X$ и $x \in X$. Заметим, что система $S_{\overline{c}}$ и множества $E_{\overline{c}}(t)$, $U_{\overline{c}}(x)$, $V_{\overline{c}}(x)$ удовлетворяют требованиям, предъявляемым к входным данным Процедуры B. Для выбранного таким образом набора $\overline{c}$ на входных данных $S_{\overline{c}}$, $E_{\overline{c}}(t)$, $U_{\overline{c}}(x)$, $V_{\overline{c}}(x)$ запустим Процедуру B. Отметим, что если после такого запуска Процедуры B процедура не выдала сообщение «система несовместна», то после ее остановки в результирующей системе не останется уравнений вида $I(x, x')$, где $x, x' \in X$. Поэтому подобный запуск Процедуры B обязательно выдаст либо сообщение о несовместности, либо сообщение о совместности системы $S_{\overline{c}} \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_{\overline{c}}(t_i))\}$. Если для рассматриваемого набора $\overline{c} \in V(x_1) \times \dots \times V(x_p)$ вызов Процедуры B выдаст сообщение о совместности системы $S_{\overline{c}} \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_{\overline{c}}(t_i))\}$, то наша основная процедура останавливается, переходит в заключительное состояние и выдает сообщение «система совместна». Если же подобный вызов Процедуры B выдаст сообщение о несовместности системы $S_{\overline{c}} \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_{\overline{c}}(t_i))\}$, то наша основная процедура просто завершает свою работу вдоль данной ветви вычислений в некотором незаключительном состоянии. В частности, это означает, что если для каждого набора $\overline{c} \in V(x_1) \times \dots \times V(x_p)$ система $S_{\overline{c}} \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_{\overline{c}}(t_i))\}$ оказалась несовместной, то несовместной будет и исходная система S.

Корректность работы Процедуры C и описание множества решений системы в случае ее совместности были по существу получены в [7], т. е. описанная выше модификация п. (2.4) не влечет каких-либо изменений в доказательстве следующего утверждения из [7].

Предложение 4 [7]. *Пусть Процедура C была запущена на входных системе S и конфигурации $\mathfrak{A}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если Процедура C остановилась и выдала сообщение «система несовместна», то исходная система уравнений не имеет решений.*

(2) *Если Процедура C остановилась и выдала сообщение «система совместна» после Этапа 1, то после остановки множество*

$$\{\langle b_1, \dots, b_k \rangle \in V(x_1) \times \dots \times V(x_k) \mid \forall i, j \le k \, \forall t \in A \cup X (b_i, b_j \in E(t) \longrightarrow b_i = b_j)\}$$

совпадает с множеством всех решений исходной системы уравнений.

(3) *Пусть Процедура C остановилась и выдала сообщение «система совместна» после Этапа 2, и пусть γ — это множество всех наборов $\overline{c} = \langle c_1, \dots, c_p \rangle$, для которых Процедура B выдала сообщение о совместности системы $S_{\overline{c}} \cup \{t \approx t' \mid \exists t_i \in A \cup X (t, t' \in E_{\overline{c}}(t_i))\}$ в п. (2.4). Тогда после остановки Процедуры C множество*

$$\bigcup_{\overline{c} \in \gamma} \{\langle b_1, \dots, b_k \rangle \in V_{\overline{c}}(x_1) \times \dots \times V_{\overline{c}}(x_k) \mid \forall i, j \le k \, \forall t \in A \cup X (b_i, b_j \in E_{\overline{c}}(t) \longrightarrow b_i = b_j)\}$$

совпадает с множеством всех решений исходной системы уравнений.

Предложение 5. *Время работы Процедуры C составляет $O(l^3)$.*

Доказательство. В силу предложения 1 Этап 0 исполняется за время $O(l^2)$. В силу предложения 3 Этап 1 исполняется за время $O(l^3)$. Оценим время исполнения Этапа 2.

Построение графа Леви L_S в п. (2.1) и запись его кода на вспомогательную ленту требует время $O(l)$. Известно (см. [10, § 22.2]), что время работы классического алгоритма поиска в ширину асимптотически оценивается квадратичной функцией от размера графа. Поэтому запуск этого алгоритма на графе L_S вместе с сохранением построенных в ходе его работы связных компонентов и кратчайших расстояний на вспомогательной ленте требует время $O(l^2)$. Таким образом, суммарно п. (2.1) исполняется за время $O(l^2)$.

Проверку условия из п. (2.2) можно осуществлять одновременно с поиском в ширину в п. (2.1). Для этого необходимо для каждой вновь открываемой вершины x графа L_S проверить ее смежность со всеми уже открытыми вершинами x', находящимися на том же расстоянии от текущей исходной вершины s_i, что и x, — эти дополнительные действия добавляют множитель l к времени работы алгоритма поиска в ширину. Следовательно, совокупное время исполнения пп. (2.1), (2.2) составляет $O(l^3)$.

Для разбиения переменных на свободные и зависимые в п. (2.3) требуется последовательно просмотреть все построенные ранее связные компоненты графа L_S, на что в совокупности будет использовано время $O(l^2)$.

Недетерминированное угадывание одного набора $\overline{c} = \langle c_1, \ldots, c_p\rangle \in V(x_1) \times \cdots \times V(x_p)$ в п. (2.4) исполняется за время $O(l)$. Построение системы уравнений $S_{\overline{c}}$ также производится за время $O(l)$. После этого на входных данных $S_{\overline{c}}$, $E_{\overline{c}}(t)$, $U_{\overline{c}}(x)$, $V_{\overline{c}}(x)$ запускается процедура B, которая в силу предложения 3 требует время, равное $O(l^3)$. Следовательно, общее время исполнения п. (2.4) вдоль одной ветви вычислений составляет $O(l^3)$.

Таким образом, суммарное время исполнения одной ветви вычислений на Этапе 2 составляет $O(l^3)$. Отсюда окончательно получаем, что время исполнения Процедуры C составляет $O(l^3)$.

Перейдем к доказательству основного результата настоящей статьи.

Теорема 6. *Проблема совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями является NP-полной.*

Доказательство. Проблему совместности систем диофантовых уравнений над конечными конфигурациями формально представляем как множество L_0 всех упорядоченных пятерок $\langle w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\rangle$ слов в алфавите $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$, кодирующих совместные системы диофантовых уравнений в соответствии с приведенным в § 1 определением. В силу предложений 4 и 5 определенная выше недетерминированная Процедура C распознает в точности все элементы множества L_0 за полиномиальное время. Следовательно, наша проблема L_0 принадлежит классу NP.

В [3] установлено, что проблема L_1 совместности систем диофантовых уравнений над произвольными конечными симметричными иррефлексивными графами является NP-полной. Опишем формальное представление проблемы L_1. Пусть $G = \langle V, E\rangle$ — произвольный конечный симметричный иррефлексивный граф, X — конечное множество переменных, D — система диофантовых уравнений сигнатуры $\langle E, c_v\rangle_{v\in V}$ над X. Будем считать, что $|V| = n$, $|X| = k$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Также введем нумерацию всех термов, положив $t_i = v_i$ для всех $1 \le i \le n$ и $t_{n+i} = x_i$ для всех $1 \le i \le k$. Определим слова u^1, u^2 и u^3 в алфавите $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$ следующим образом.

(1) Слово u^1 кодирует матрицу смежности графа G, т. е.

$$u^1 = \triangleleft u^1_{1,1} \dots u^1_{1,n} \# \dots \# u^1_{n,1} \dots u^1_{n,n} \triangleright,$$

где $u^1_{i,j} \in \{0, 1\}$, $u^1_{i,j} = 1 \iff G \models E(v_i, v_j)$ для всех $1 \le i, j \le n$.

(2) Слово u^2 кодирует уравнения вида $t_i \approx t_j$ из системы D, т. е.

$$u^2 = \triangleleft u^2_{1,1} \dots u^2_{1,n+k} \# \dots \# u^2_{n+k,1} \dots u^2_{n+k,n+k} \triangleright,$$

где $u^2_{i,j} \in \{0, 1\}$, $u^2_{i,j} = 1 \iff t_i \approx t_j \in D$ для всех $1 \le i, j \le n + k$. Можно считать, что матрица $(u^2_{i,j})_{i,j \le n+k}$ симметрична.

(3) Слово u^3 кодирует уравнения вида $E(t_i, t_j)$ из системы D, т. е.

$$u^3 = \triangleleft u^3_{1,1} \dots u^3_{1,n+k} \# \dots \# u^3_{n+k,1} \dots u^3_{n+k,n+k} \triangleright,$$

где $u^3_{i,j} \in \{0, 1\}$, $u^3_{i,j} = 1 \iff E(t_i, t_j) \in D$ для всех $1 \le i, j \le n + k$. Можно считать, что матрица $(u^3_{i,j})_{i,j \le n+k}$ тоже симметрична.

Таким образом, проблема L_1 состоит из всех упорядоченных троек $\langle u^1, u^2, u^3 \rangle$, кодирующих произвольную совместную систему D диофантовых уравнений над произвольным конечным графом G. Поэтому для доказательства NP-полноты проблемы L_0 достаточно доказать, что проблема L_1 полиномиально трансформируется в проблему L_0. Приведем описание детерминированной процедуры, которая будет осуществлять необходимую трансформацию.

Процедура D. Входными данными процедуры являются произвольные слова u^1, u^2, u^3 в алфавите $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$. Выходными данными процедуры являются преобразованные слова w^1, w^2, w^3, w^4, w^5 в алфавите $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$.

Этап 1 (Проверка корректности входных данных).

Проверка корректности входных данных состоит из последовательного исполнения пп. (1.1)–(1.3):

(1.1) Проверяем, верно ли, что слово u^1 имеет вид $\triangleleft u^1_1 \# \dots \# u^1_n \triangleright$, где $n \ge 1$, $u^1_i \in \{0, 1\}^*$, $|u^1_i| = n$ для всех $1 \le i \le n$, и если $u^1_i = u^1_{i,1} \dots u^1_{i,n}$, то матрица $(u^1_{i,j})_{i,j \le n}$ является симметричной матрицей с нулевой диагональю.

(1.2) Проверяем, верно ли, что слово u^2 имеет вид $\triangleleft u^2_1 \# \dots \# u^2_{n+k} \triangleright$, где n — число из п. (1.1), $k \ge 1$, $u^2_i \in \{0, 1\}^*$, $|u^2_i| = n + k$ для всех $1 \le i \le n + k$, и если $u^2_i = u^2_{i,1} \dots u^2_{i,n+k}$, то матрица $(u^2_{i,j})_{i,j \le n+k}$ симметрична.

(1.3) Проверяем, верно ли, что слово u^3 имеет вид $\triangleleft u^3_1 \# \dots \# u^3_{n+k} \triangleright$, где n — число из п. (1.1), k — число из п. (1.2), $u^3_i \in \{0, 1\}^*$, $|u^3_i| = n + k$ для всех $1 \le i \le n + k$, и если $u^3_i = u^3_{i,1} \dots u^3_{i,n+k}$, то матрица $(u^3_{i,j})_{i,j \le n+k}$ симметрична.

Если все условия из пп. (1.1)–(1.3) выполняются, переходим к Этапу 2. В противном случае процедура останавливается и выдает пятерку пустых слов в качестве выхода.

Этап 2 (Трансформация графа и системы уравнений).

Поскольку тройка $\overline{u} = \langle u^1, u^2, u^3 \rangle$ входных слов удовлетворяет условиям из пп. (1.1)–(1.3), найдутся симметричный иррефлексивный граф $G_{\overline{u}} = \langle V_{\overline{u}}, E_{\overline{u}} \rangle$ и система $D_{\overline{u}}$ уравнений сигнатуры $\langle E, c_v \rangle_{v \in V_{\overline{u}}}$ над множеством переменных $X_{\overline{u}}$

такие, что тройка $\overline{u}$ кодирует граф $G_{\overline{u}}$ и систему $D_{\overline{u}}$ в соответствии с приведенным ранее в доказательстве определением. Для найденных таким образом графа $G_{\overline{u}}$ и системы $D_{\overline{u}}$ далее последовательно исполняются пп. (2.1), (2.2).

(2.1) Для каждой неупорядоченной пары $p = \{v, v'\}$ вершин графа $G_{\overline{u}}$, связанных между собой симметричными друг другу ребрами $\langle v, v'\rangle \in E_{\overline{u}}$ и $\langle v', v\rangle \in E_{\overline{u}}$, введем новую вершину v_p и определим конечную конфигурацию $\mathfrak{A}_{\overline{u}} = \langle A_{\overline{u}}, A^0_{\overline{u}}, {}^0A_{\overline{u}}, I_{\overline{u}}\rangle$, положив

$$A^0_{\overline{u}} := V_{\overline{u}}, \quad {}^0A_{\overline{u}} := \big\{v_p \mid p = \{v, v'\} \subseteq V^2_{\overline{u}}, \langle v, v'\rangle \in E_{\overline{u}}\big\},$$

$$I_{\overline{u}} := \big\{\langle v, v_p\rangle, \langle v_p, v\rangle, \langle v', v_p\rangle, \langle v_p, v'\rangle \mid p = \{v, v'\} \subseteq V^2_{\overline{u}}, \langle v, v'\rangle \in E_{\overline{u}}\big\}.$$

В соответствии с приведенным в § 1 определением процедура кодирует конфигурацию $\mathfrak{A}_{\overline{u}}$ в виде двух слов w^1 и w^2 над алфавитом $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$.

(2.2) Для каждой неупорядоченной пары $q = \{t, t'\}$ термов из множества $V_{\overline{u}} \cup X_{\overline{u}}$ таких, что в системе $D_{\overline{u}}$ присутствуют уравнения $E(t, t')$ и $E(t', t)$, введем новую переменную x_q и определим конечную систему $S_{\overline{u}}$ уравнений сигнатуры $\langle A^0, {}^0A, I, c_a\rangle_{a\in A_{\overline{u}}}$ над множеством переменных $X_{\overline{u}} \cup \{x_q \mid q = \{t, t'\} \subseteq (V_{\overline{u}} \cup X_{\overline{u}})^2, E(t, t') \in D_{\overline{u}}\}$, положив

$$\begin{aligned} S_{\overline{u}} := \{t \approx t' \mid t \approx t' \in D_{\overline{u}}\} \cup \{&I(t, x_q), I(x_q, t), I(t', x_q), I(x_q, t'), {}^0A(x_q) \mid \\ &q = \{t, t'\} \subseteq (V_{\overline{u}} \cup X_{\overline{u}})^2, E(t, t') \in D_{\overline{u}}\} \cup \{A^0(x) \mid x \in X_{\overline{u}}\}. \end{aligned}$$

В соответствии с приведенным в § 1 определением процедура кодирует систему $S_{\overline{u}}$ в виде трех слов w^3, w^4 и w^5 над алфавитом $\{0, 1, \triangleleft, \triangleright, \#\}$, после чего останавливается и выдает упорядоченную пятерку $\overline{w} = \langle w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\rangle$ в качестве выхода.

Считая, что размером входных данных Процедуры D является число $m = |u^1| + |u^2| + |u^3|$, оценим ее временную сложность. Для проверки условий в каждом из пп. (1.1)–(1.3) затрачивается время $O(m^2)$. В п. (2.1) определение множеств $A^0_{\overline{u}}$ и ${}^0A_{\overline{u}}$ и их кодирование в виде слова w^1 исполняется за время $O(m)$. Определение отношения инцидентности $I_{\overline{u}}$ и его запись в виде слова w^2 исполняется за время $O(m^2)$. В п. (2.2) кодирование всех равенств в виде слова w^3 осуществляется за время $O(m)$, кодирование всех инцидентностных уравнений в виде слова w^4 исполняется за время $O(m^2)$, а для кодирования всех типовых уравнений в виде слова w^5 необходимо время $O(m)$. Поэтому общее время исполнения Процедуры D оценивается величиной $O(m^2)$ и, значит, Процедура D полиномиальная.

Пусть Процедура D была запущена на тройке входных слов $\overline{u} = \langle u^1, u^2, u^3\rangle$ и после остановки выдала пятерку выходных слов $\overline{w} = \langle w^1, w^2, w^3, w^4, w^5\rangle$. Докажем, что $\overline{u} \in L_1$ тогда и только тогда, когда $\overline{w} \in L_0$. Если тройка $\overline{u}$ не удовлетворяет условиям корректности, проверяемым на Этапе 1, то, очевидно, $\overline{u} \notin L_1$ и по построению $\overline{w} \notin L_0$. Поэтому далее будем считать, что тройке $\overline{u}$ соответствуют граф $G_{\overline{u}} = \langle V_{\overline{u}}, E_{\overline{u}}\rangle$ и система $D_{\overline{u}}$ уравнений сигнатуры $\langle E, c_v\rangle_{v\in V_{\overline{u}}}$ над множеством переменных $X_{\overline{u}} = \{x_1, \ldots, x_k\}$. Тогда по построению на Этапе 2 пятерке $\overline{w}$ соответствуют конфигурация $\mathfrak{A}_{\overline{u}} = \big\langle A_{\overline{u}}, A^0_{\overline{u}}, {}^0A_{\overline{u}}, I_{\overline{u}}\big\rangle$ и система $S_{\overline{u}}$ уравнений сигнатуры $\langle A^0, {}^0A, I, c_a\rangle_{a\in A_{\overline{u}}}$ над множеством переменных $X'_{\overline{u}} = X_{\overline{u}} \cup \{x_q \mid q = \{t, t'\} \subseteq (V_{\overline{u}} \cup X_{\overline{u}})^2, E(t, t') \in D_{\overline{u}}\}$.

Пусть $\overline{u} \in L_1$, т. е. система $D_{\overline{u}}$ совместна. Тогда существует означивание $\mu : X_{\overline{u}} \to V_{\overline{u}}$ переменных из $X_{\overline{u}}$ в графе $G_{\overline{u}}$ такое, что для любого уравнения $\varphi \in D_{\overline{u}}$ имеет место $G_{\overline{u}} \models \varphi[\mu]$. Определим означивание $\nu : X'_{\overline{u}} \to A_{\overline{u}}$ переменных из $X'_{\overline{u}}$

в конфигурации $\mathfrak{A}_{\overline{u}}$ следующим образом. Если $x \in X_{\overline{u}}$, положим $\nu(x) = \mu(x)$. Если же переменная имеет вид x_q для некоторой пары термов $q = \{t, t'\} \in (V_{\overline{u}} \cup X_{\overline{u}})^2$ с условием $E(t, t') \in D_{\overline{u}}$, то, определив значения $v = t[\mu]$ и $v' = t'[\mu]$ данных термов в графе $G_{\overline{u}}$ при означивании μ, заключаем, что $G_{\overline{u}} \models E(v, v')$. Следовательно, по построению на Этапе 2 для пары $p = \{v, v'\}$ в конфигурации $\mathfrak{A}_{\overline{u}}$ определен элемент $v_p \in {}^0A_{\overline{u}}$, который одновременно инцидентен элементам v и v'. В таком случае положим $\nu(x_q) = v_p$. Тогда, как нетрудно проверить, для любого уравнения $\psi \in S_{\overline{u}}$ имеет место $\mathfrak{A}_{\overline{u}} \models \psi[\nu]$. Таким образом, система $S_{\overline{u}}$ совместна и, значит, $\overline{w} \in L_0$.

Пусть теперь $\overline{w} \in L_0$, т. е. система $S_{\overline{u}}$ совместна. Тогда существует означивание $\nu : X'_{\overline{u}} \to A_{\overline{u}}$ переменных из $X'_{\overline{u}}$ в конфигурации $\mathfrak{A}_{\overline{u}}$ такое, что для любого уравнения $\psi \in S_{\overline{u}}$ имеет место $\mathfrak{A}_{\overline{u}} \models \psi[\nu]$. Определим означивание $\mu : X_{\overline{u}} \to V_{\overline{u}}$ переменных из $X_{\overline{u}}$ в графе $G_{\overline{u}}$, положив $\mu(x) = \nu(x)$ для всех $x \in X_{\overline{u}}$. Легко видеть, что тогда для любого уравнения $\varphi \in D_{\overline{u}}$ имеет место $G_{\overline{u}} \models \varphi[\mu]$. Таким образом, система $D_{\overline{u}}$ совместна и, значит, $\overline{u} \in L_1$.

Благодарность. Автор благодарен Федору Дмитриевичу Кобзеву (Новосибирский государственный университет) за обсуждение идеи трансформации неориентированных графов, которая была в итоге реализована в доказательстве предыдущей теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н.* Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2016.
2. *Ильев А. В., Ремесленников В. Н.* Исследование совместности систем уравнений над графами и нахождение их общих решений // Вестн. Омск. ун-та. 2017. № 4. С. 26–32.
3. *Ильев А. В., Ильев В. П.* Алгоритмы решения систем уравнений над различными классами конечных графов // Прикл. дискрет. математика. 2021. № 54. С. 89–102.
4. *Ильев А. В.* Исследование систем уравнений над различными классами конечных матроидов // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 2. С. 1094–1102.
5. *Никитин А. Ю., Рыбалов А. Н.* О сложности проблемы разрешимости систем уравнений над конечными частичными порядками // Прикл. дискрет. математика. 2018. № 39. С. 94–98.
6. *Никитин А. Ю.* Алгебраическая геометрия и алгоритмы в классе частично упорядоченных множеств // Вестн. Омск. ун-та. 2024. Т. 29, № 1. С. 23–32.
7. *Когабаев Н. Т.* Об системах диофантовых уравнений над конечными конфигурациями // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 321–338.
8. *Hughes D. R., Piper F. C.* Projective planes. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verl., 1973.
9. *Ахо А., Хопкрофт Дж., Ульман Дж.* Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: Мир, 1979.
10. *Кормен Т. Х., Лейзерсон Ч. И., Ривест Р. Л., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ, 2-е изд.. М.: Вильямс, 2005.

Поступила в редакцию 14 ноября 2024 г.
После доработки 14 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Когабаев Нурлан Талгатович (ORCID 0000-0002-3940-0824)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kogabaev@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.554.35

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ 2–ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ НА T–МНОГООБРАЗИЯХ

Д. А. Матвеев

Аннотация. Рассмотрим аффинное алгебраическое многообразие с действием тора сложности 1. Известно, что в этом случае однородные локально нильпотентные дифференцирования на алгебре функций этого многообразия задаются в терминах полиэдрального дивизора. В работе получена формула для кратных коммутаторов двух однородных локально нильпотентных дифференцирований, когда среди них не более одного дифференцирования горизонтального типа. С использованием полученной формулы выведен критерий конечномерности алгебр Ли, порожденных парой однородных локально нильпотентных дифференцирований в алгебре Ли всех дифференцирований алгебры функций многообразия с действием тора.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.311

Ключевые слова: T-многообразие, градуированная алгебра, локально нильпотентное дифференцирование, алгебра Ли, коммутатор дифференцирований.

1. Введение

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль, $\mathbb{T} = (\mathbb{K}^\times)^n$ — алгебраический тор, $M = \mathfrak{X}(\mathbb{T}) \cong \mathbb{Z}^n$ — целочисленная решетка характеров тора, $N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})$ — двойственная к M решетка, $N_\mathbb{Q} = N \otimes \mathbb{Q}$ — рациональное векторное пространство и X — нормальное алгебраическое многообразие.

Рассмотрим регулярное эффективное действие тора $\mathbb{T}$ на многообразии X. Многообразия с таким действием называются $\mathbb{T}$-*многообразиями.* *Сложностью действия тора* $\mathbb{T}$ называют коразмерность типичной орбиты. Так как действие тора эффективно, сложность действия на X равна $\dim X - \operatorname{rank} M$.

Если сложность действия равна нулю, то тор действует на X с открытой орбитой и многообразие называется *торическим.* Это понятие введено М. Демазюром в 1970 г., современное изложение теории торических многообразий можно найти в книгах [1, 2]. Любое аффинное торическое многообразие соответствует некоторому полиэдральному конусу $\sigma \subseteq N_\mathbb{Q}$.

Если сложность действия положительна, то аффинное $\mathbb{T}$-многообразие задается не полиэдральными конусами, а полиэдральными дивизорами (proper polyhedral divisors). Это описание было получено Альтманом и Хаузеном в работе [3]. Более конкретно, аффинному многообразию соответствует тройка $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$, где Y — нормальное полупроективное многообразие, σ — полиэдральный конус, а $\mathfrak{D}$ — дивизор на Y, коэффициентами которого являются полиэдры с конусом рецессии σ.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2025 г.

Также рассмотрим действие группы $\mathbb{G}_a^n = (\mathbb{K}, +)^n$ на многообразии X. Такие действия называют $\mathbb{G}_a^n$-действиями. Нас будут интересовать $\mathbb{G}_a^n$-действия, нормализуемые тором $\mathbb{T}$ в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$.

Если типичные орбиты $\mathbb{G}_a$-действия содержатся в замыканиях типичных орбит тора, то говорят, что действие *вертикального типа*, в противном случае — *горизонтального типа*. Всякое $\mathbb{G}_a$-действие на аффинном многообразии X соответствует некоторому локально нильпотентному дифференцированию алгебры $\mathbb{K}[X]$, а $\mathbb{G}_a$-действие, нормализуемое тором, соответствует локально нильпотентному дифференцированию на $\mathbb{K}[X]$, однородному относительно градуировки, возникающей в результате действия тора $\mathbb{T}$.

Аналогично действиям локально нильпотентное дифференцирование относят к вертикальному типу, если оно равно нулю на рациональных инвариантах действия тора, иначе — к горизонтальному типу.

Описание локально нильпотентных дифференцирований на $\mathbb{T}$-многообразиях получил Льендо для действий вертикального типа произвольной сложности [4] и для действий горизонтального типа сложности один [5, 6]. Также в работе [6] описаны пары $\mathbb{G}_a$-подгрупп, соответствующие корневым подгруппам для действий групп $\mathrm{SL}_2(\mathbb{K})$ и $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{K})$.

Описание $\mathbb{G}_a^2$-действий на аффинном $\mathbb{T}$-многообразии X в случае, когда Y из вышеупомянутой тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ — аффинное многообразие, получено в работе [7] с помощью критерия коммутирования для пар однородных локально нильпотентных дифференцирований.

Согласно [8, теорема A] если алгебра Ли $\mathfrak{g}$, порожденная набором локально нильпотентных полиномиальных векторных полей на аффинном многообразии X, конечномерна, то $\mathfrak{g}$ является касательной алгеброй линейной алгебраической группы, регулярно действующей на многообразии X. Этот результат служит мотивировкой для получения критериев конечномерности алгебр Ли, порожденных набором локально нильпотентных дифференцирований.

Если алгебра Ли является подмодулем ранга 1 в алгебре Ли дифференцирований алгебры многочленов, то классификация всех ее конечномерных подалгебр получена в работе [9]. Кроме того, в статьях [10, 11] были установлены критерии конечномерности алгебры Ли, которая порождается конечным набором дифференцирований вертикального типа.

Основным результатом настоящей работы является критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной парой однородных локально нильпотентных дифференцирований, когда одно из дифференцирований вертикального, а другое — горизонтального типа, в предположении, что многообразие Y является аффинной прямой.

Этот результат был получен с помощью выведенной формулы для последовательного применения конечного набора присоединенных операторов. Формула позволяет избежать громоздких вычислений, которые до этого можно было за разумное время проделать только с помощью компьютера.

Также получена классификация рассматриваемых конечномерных алгебр Ли, которая исчерпывается тремя случаями: коммутативная алгебра Ли, $\mathfrak{sl}_2$ и филиформная модельная алгебра Ли L_n. Заметим, что такие филиформные алгебры Ли являются одним из возможных обобщений алгебры Гейзенберга и активно изучаются, выступая источником полезных примеров и контрпримеров. Первые классификационные результаты для филиформных алгебр Ли получены в статье [12], там же введены обозначения, ставшие общепринятыми.

Для удобства читателя опишем структуру статьи. Разд. 2 посвящен описанию аффинных $\mathbb{T}$-многообразий в терминах собственных полиэдральных дивизоров. В разд. 3 показана связь между локально нильпотентными дифференцированиями на алгебре регулярных функций аффинного $\mathbb{T}$-многообразия и $\mathbb{G}_a$-действиями на самом многообразии, а также приведено описание локально нильпотентных дифференцирований на языке полиэдральных дивизоров. В обозначениях и последовательности изложения мы придерживаемся подхода из работы [6].

В разд. 4–6 излагаются основные результаты работы. В разделе 4 доказывается формула для вычисления коммутатора дифференцирований, а в разд. 5 с ее помощью выводятся критерии конечномерности алгебры Ли, порожденной парой дифференцирований, одно из которых вертикального, а другое — горизонтального типа. В разд. 6 разработанная техника используется для получения уже известных критериев конечномерности алгебры Ли, порожденной парой дифференцирований вертикального типа.

2. Комбинаторное описание аффинных $\mathbb{T}$-многообразий

Полное комбинаторное описание нормальных аффинных многообразий с эффективным действием тора изложено в статье [3]. В этом разделе введем необходимые определения и приведем основные результаты этой работы.

Алгебраическое многообразие Y называется *полупроективным*, если его алгебра регулярных функций конечно порождена и Y проективно над спектром этой алгебры.

Определение 1. Будем называть *σ-полиэдральным дивизором* на нормальном полупроективном многообразии Y формальную сумму

$$\mathfrak{D} = \sum_{Z \subseteq Y} \Delta_Z \otimes Z,$$

где Z — простые дивизоры на Y, Δ_Z — выпуклые полиэдры в рациональном векторном пространстве $N_{\mathbb{Q}}$, которые представляются в виде суммы Минковского некоторого многогранника и полиэдрального конуса $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, общего для всех Δ_Z, причем только конечное число полиэдров Δ_Z отлично от σ.

Так как $N = \operatorname{Hom}(M, \mathbb{Z})$, определена операция спаривания $M_{\mathbb{Q}} \times N_{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}$, где $(m, p) \mapsto \langle m, p\rangle = p(m)$. Конусом, *двойственным* к $\sigma \subseteq N_{\mathbb{Q}}$, называется конус

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{Q}} \mid \langle m, u\rangle \geq 0 \ \forall u \in \sigma\} \subseteq M_{\mathbb{Q}}.$$

Опорной функцией полиэдра Δ на конусе $\sigma^\vee$ называется минимум значений спаривания точки конуса с множеством точек полиэдра:

$$h_\Delta(m) = \min\langle m, \Delta\rangle := \min_{p \in \Delta}\langle m, p\rangle = \min_i\{v_i(m)\},$$

где $m \in \sigma^\vee$ и $\{v_i\}$ — множество вершин Δ.

С помощью опорной функции каждому σ-полиэдральному дивизору ставится в соответствие семейство дивизоров с рациональными коэффициентами. Каждой точке $m \in \sigma^\vee$ соответствует дивизор

$$\mathfrak{D}(m) = \sum_{Z \subseteq Y} h_Z(m) \cdot Z,$$

где h_Z — опорная функция полиэдра Δ_Z.

Пусть $\mathbb{T} = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[M]$ — n-мерный алгебраический тор с решеткой характеров M и $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное $\mathbb{T}$-многообразие. Морфизму действия $\mathbb{T}\times X \to X$ соответствует гомоморфизм алгебр $A \to A \otimes \mathbb{K}[M]$, задающий M-градуировку на A. Обратно, любой M-градуировке соответствует действие тора $\mathbb{T} = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[M]$. Далее будем обозначать через $\sigma_M^\vee$ полугруппу $\sigma^\vee \cap M$ и через χ^m — характер тора $\mathbb{T}$, соответствующий вектору m решетки M.

Для рационального дивизора D обозначим через $H^0(U, \mathscr{O}_Y(D))$ его пространство сечений:

$$H^0(U, \mathscr{O}_Y(D)) = \{f \in \mathbb{K}(Y) \mid \operatorname{div} f|_U + D|_U \geq 0\}.$$

Изложенного достаточно, чтобы сформулировать теорему из [3, разд. 3], устанавливающую соответствие между аффинными $\mathbb{T}$-многообразиями и собственными полиэдральными дивизорами.

Теорема 1. *Любому собственному σ-полиэдральному дивизору $\mathfrak{D}$ на полупроективном многообразии Y соответствует нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие $X[Y,\mathfrak{D}] = \operatorname{Spec} A[Y,\mathfrak{D}]$ размерности $\operatorname{rank} M + \dim Y$, где*

$$A[Y,\mathfrak{D}] = \bigoplus_{m\in\sigma_M^\vee} A_m\chi^m \quad \text{и} \quad A_m = H^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathfrak{D}(m)) \subseteq \mathbb{K}(Y).$$

Обратно, любое нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие изоморфно $\mathbb{T}$-многообразию $X[Y,\mathfrak{D}]$ для некоторого полупроективного многообразия Y и некоторого собственного σ-полиэдрального дивизора $\mathfrak{D}$ на Y.

Взаимной однозначности соответствия можно добиться с добавлением некоторых условий минимальности на пару $(Y,\mathfrak{D})$ (см. [3, разд. 8], а также [6, разд. 1.1]).

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ — собственные σ-полиэдральные дивизоры на нормальном полупроективном многообразии Y. Если для любого простого дивизора Z в Y существует такой вектор $v_Z \in N$, что*

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}' + \sum_Z (v_Z + \sigma)\cdot Z$$

и дивизор $\sum_Z \langle m, v_Z\rangle \cdot Z$ является главным для любого $m \in \sigma_M^\vee$, то многообразие $X[Y,\mathfrak{D}]$ эквивариантно изоморфно многообразию $X[Y,\mathfrak{D}']$.

Пример 1. Рассмотрим одномерную решетку $\mathbb{Z}$ характеров тора $\mathbb{T} = \mathbb{K}^\times$, конус $\sigma = \mathbb{Q}_{\geq 0} = [0,+\infty)$ и дивизор $\mathfrak{D} = [0,+\infty)\cdot\{0\}$ на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$. Тогда $\sigma^\vee = \mathbb{Q}_{\geq 0}$ и $m \geq 0$, а

$$\mathfrak{D}(m) = \min_{v\geq 0}\langle m, v\rangle \cdot \{0\} = 0\cdot\{0\}, \quad A_m = \mathbb{K}[t],\ m \geq 0, \quad A = \bigoplus_{m\geq 0}\mathbb{K}[t]\chi^m.$$

Ясно, что t и χ являются независимыми образующими алгебры A. Значит, $X = \operatorname{Spec} A = \mathbb{A}^2$ и тор действует так:

$$\lambda \circ (\chi, t) = (\lambda\chi, t).$$

3. Локально нильпотентные дифференцирования на аффинных $\mathbb{T}$-многообразиях

Пусть $X = \operatorname{Spec} A$ — аффинное многообразие над полем $\mathbb{K}$. Аддитивную группу поля $\mathbb{K}$ будем обозначать через $\mathbb{G}_\mathrm{a}$. Дифференцирование ∂ алгебры A называется *локально нильпотентным* (ЛНД), если для любого $a \in A$ существует такое $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $\partial^n(a) = 0$. Каждому локально нильпотентному дифференцированию ∂ на A соответствует действие группы $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ на A, определяемое отображением $\phi_\partial : \mathbb{G}_\mathrm{a} \times A \to A$, $\phi_\partial : (t, f) \mapsto \exp(t\partial)(f)$. Следовательно, каждому локально нильпотентному дифференцированию соответствует действие $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ на $X = \operatorname{Spec} A$. Верно и обратное, любому действию группы $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ на X соответствует локально нильпотентное дифференцирование алгебры A (см. [13, разд. 1.5]).

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ — алгебра с M-градуировкой из теоремы 1. Локально нильпотентное дифференцирование ∂ называется *однородным относительно M-градуировки*, если оно переводит однородные элементы в однородные. В таком случае у локально нильпотентного дифференцирования ∂ корректно определена степень $\deg \partial = \deg \partial(f) - \deg f$ для любого однородного элемента $f \in A \setminus \ker \partial$. Говорят, что $\mathbb{G}_\mathrm{a}$-действие *нормализуется тором* $\mathbb{T}$, если группа $\mathbb{G}_\mathrm{a}$ нормализуется тором как подгруппа в группе автоморфизмов $\operatorname{Aut}(X)$. $\mathbb{G}_\mathrm{a}$-действие нормализуется тором $\mathbb{T}$ в том и только в том случае, когда соответствующее локально нильпотентное дифференцирование ∂ однородно относительно M-градуировки.

Всякое дифференцирование ∂ на алгебре A без делителей нуля продолжается на поле частных $\operatorname{Quot}(A)$. Аналогично продолжается действие тора $\mathbb{T}$ на $\operatorname{Quot}(A)$. Рассмотрим подполе рациональных инвариантов $\operatorname{Quot}(A)^{\mathbb{T}} = \mathbb{K}(Y)$. Говорят, что локально нильпотентное дифференцирование ∂ *вертикального типа*, если $\partial(\mathbb{K}(Y)) = 0$, и *горизонтального типа* иначе. То, что дифференцирование ∂ вертикального типа, геометрически означает, что типичные орбиты соответствующего $\mathbb{G}_\mathrm{a}$-действия лежат в замыканиях типичных орбит действия тора $\mathbb{T}$.

Перейдем к описанию дифференцирований каждого типа.

Сначала рассмотрим классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на $\mathbb{T}$-многообразиях произвольной сложности, приведенную в [4]. Обозначим через $\sigma(1)$ множество лучей (граней размерности 1) конуса σ. В дальнейшем для краткости будем понимать под $\rho \in \sigma(1)$ как луч, так и порождающий его примитивный вектор решетки.

Определение 2. Пусть σ — острый конус в $N_{\mathbb{Q}}$. Вектор $e \in M$ называется *корнем Демазюра* конуса σ, если выполнены следующие условия:

(1) существует луч $\rho_e \in \sigma(1)$, такой что $\langle e, \rho_e \rangle = -1$;

(2) $\langle e, \rho \rangle \geq 0$ для всех $\rho \in \sigma(1) \setminus \{\rho_e\}$.

Множество всех корней Демазюра конуса σ обозначается через $\mathscr{R}(\sigma)$. Луч ρ_e называют лучом, *ассоциированным* с корнем e.

Пусть $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ и $\mathfrak{D} = \sum\limits_Z \Delta_Z \cdot Z$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на полупроективном многообразии Y. Обозначим через $\{v_{i,Z}\}$ множество вершин полиэдра Δ_Z для простого дивизора $Z \subseteq Y$. Пусть e — корень Демазюра конуса σ. Рассмотрим

$$\mathfrak{D}(e) = \sum_Z \min_i \{v_{i,Z}(e)\} \cdot Z \quad \text{и} \quad \Phi_e^\times = H^0(Y, \mathscr{O}_Y(\mathfrak{D}(e))) \setminus \{0\}.$$

Для каждой функции $\varphi \in \Phi_e^\times$ определим

$$\partial_{e,\varphi}(f\chi^m) = \langle m, \rho_e\rangle \cdot \varphi \cdot f\chi^{m+e} \quad \text{для любого } m \in \sigma_M^\vee \text{ и } f \in \mathbb{K}(Y). \tag{1}$$

Это выражение задает дифференцирование на алгебре A. В следующей теореме приводится классификация однородных локально нильпотентных дифференцирований вертикального типа на многообразии $A[Y, \mathfrak{D}]$ (см. [4, теорема 2.4], а также [6, теорема 1.7]).

Теорема 2. *Для каждого корня Демазюра $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ и функции $\varphi \in \Phi_e^\times$ дифференцирование $\partial_{e,\varphi}$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на $A = A[Y, \mathfrak{D}]$ степени e.*

Обратно, если $\partial \neq 0$ является однородным локально нильпотентным дифференцированием вертикального типа на A, то $\partial = \partial_{e,\varphi}$ для некоторого корня $e \in \mathscr{R}(\sigma)$ и некоторой функции $\varphi \in \Phi_e^\times$.

Классификация дифференцирований горизонтального типа более сложна и известна только для действий сложности 1. В таком случае многообразие Y из тройки $(Y, \sigma, \mathfrak{D})$ будет гладкой кривой. Как показано в работе [5], однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа существуют, только если Y изоморфно $\mathbb{A}^1$ или $\mathbb{P}^1$ (см. [5, следствие 3.13, лемма 3.16]).

Далее в настоящей работе исследуются однородные локально нильпотентные дифференцирования градуированной алгебры $A[Y, \mathfrak{D}]$ с $Y = \mathbb{A}^1$.

Определение 3. *Разметкой* σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ называется набор $\widehat{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{D}; v_z \forall z \in \mathbb{A}^1\}$, где:

(1) $\mathfrak{D} = \sum \Delta_z \cdot z$ — собственный σ-полиэдральный дивизор на $\mathbb{A}^1$ и v_z — вершина Δ_z;

(2) $v_{\deg} := \sum v_z$ является вершиной $\deg \mathfrak{D} := \sum \Delta_z$;

(3) $v_z \in N$ за исключением быть может одной вершины в *отмеченной точке* z_0. В случае, когда все выбранные вершины v_z лежат в N, в качестве отмеченной точки z_0 возьмем любую точку из носителя дивизора $\mathfrak{D}$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ и $\omega \subseteq N_{\mathbb{Q}}$ — конус, порожденный $\deg \mathfrak{D} - v_{\deg}$. Обозначим через $\widehat{\omega} \subseteq (N \oplus \mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ *расширенный конус* дивизора $\mathfrak{D}$, порожденный $(\omega, 0)$ и $(v_{z_0}, 1)$. Также обозначим через d такое минимальное натуральное число, что $d \cdot v_{z_0} \in N$.

Определение 4. Пара $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка σ-полиэдрального дивизора на $\mathbb{A}^1$ и $e \in M$, называется *согласованной*, если выполнены следующие условия:

(1) существует такое $s \in \mathbb{Z}$, что $\hat{e} = (e, s) \in M \oplus \mathbb{Z}$ — корень Демазюра расширенного конуса $\widehat{\omega}$ с ассоциированным лучом $\hat{\rho} = (d \cdot v_{z_0}, d)$, в этом случае $s = -1/d - v_{z_0}(e)$;

(2) $v(e) \geq 1 + v_z(e)$ для любого $z \neq z_0$ и любой вершины $v \neq v_z$ полиэдра Δ_z;

(3) $d \cdot v(e) \geq 1 + d \cdot v_{z_0}(e)$ для любой вершины $v \neq v_{z_0}$ полиэдра Δ_{z_0}.

Положим $L = \{m \in M \mid v_{z_0}(m) \in \mathbb{Z}\}$. Так как функция минимума линейна относительно операции суммы по Минковскому, линеен и $\mathfrak{D}(m)$ для $m \in \omega^\vee$. Поскольку любой дивизор на прямой $\mathbb{A}^1$ является главным, существуют такие рациональные функции $\varphi^m \in \mathbb{K}(\mathbb{A}^1)$, что $\operatorname{div}(\varphi^m) + \mathfrak{D}(m) = 0$ и $\varphi^m \cdot \varphi^{m'} = \varphi^{m+m'}$ для любых $m, m' \in \omega_L^\vee$.

Следующая теорема (см. [5, теорема 3.28], а также [6, теорема 1.10]) дает классификацию однородных локально нильпотентных дифференцирований горизонтального типа на $A[Y, \mathfrak{D}]$.

Теорема 3. *Пусть $X = X[Y, \mathfrak{D}]$ — нормальное аффинное $\mathbb{T}$-многообразие и $Y = \mathbb{A}^1$. Тогда однородные локально нильпотентные дифференцирования горизонтального типа на алгебре $A[Y, \mathfrak{D}]$ находятся во взаимно однозначном соответствии с согласованными парами $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$, где $\widehat{\mathfrak{D}}$ — разметка дивизора $\mathfrak{D}$ и $e \in M$.*

Укажем явную формулу для однородного локально нильпотентного дифференцирования, соответствующего согласованной паре $(\widehat{\mathfrak{D}}, e)$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Так как на прямой любой дивизор является главным, по предложению 1 можно считать, что $v_z = 0 \in N$ для всех $z \neq 0$. Полагая $\mathbb{K}[Y] = \mathbb{K}[t]$, имеем следующую формулу для ∂ (см. [6, разд. 1]):

$$\partial_e(t^r \chi^m) = d(v_{z_0}(m) + r) \cdot t^{r+s} \cdot \chi^{m+e} \quad \text{для любых } (m, r) \in M \oplus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

Пример 2. Опишем все дифференцирования для многообразия из примера 1. Начнем с дифференцирований вертикального типа. Имеем $\sigma = [0, +\infty)$, $\rho = 1$. Поэтому корень Демазюра $e = -1$. Тогда дифференцирование с точностью до константы имеет вид

$$\partial_0(t^r \chi^m) = \langle m, \rho_e \rangle \cdot \varphi \cdot t^r \chi^{m+e} = m \cdot \varphi \cdot t^r \chi^{m-1}, \text{ т. е. } \begin{cases} \partial_0(t) = 0, \\ \partial_0(\chi) = \varphi; \end{cases} \partial_0 = \varphi \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Для дифференцирования горизонтального типа имеем следующий набор данных:

$$v_{z_0} = 0,\ \omega = Q_{\geq 0},\ \widehat{\omega} = Q^2_{\geq 0},\ d = 1,\ \widehat{e} = (e_1, s),\ s = -1,\ e_1 \geq 0.$$

Следовательно, с точностью до константы получим семейство дифференцирований для разных e_1:

$$\partial_1(t^r \chi^m) = r \cdot t^{r-1} \chi^{m+e_1}, \quad e_1 \geq 0, \text{ т. е. } \begin{cases} \partial_1(t) = \chi^{e_1}, \\ \partial_1(\chi) = 0; \end{cases} \partial_1 = \chi^{e_1} \frac{\partial}{\partial t}.$$

4. Формула для коммутаторов ЛНД вертикального и горизонтального типов

Рассмотрим пару однородных локально нильпотентных дифференцирований на градуированной алгебре $A[\mathbb{A}^1, \mathfrak{D}]$. Обозначим через ∂_0 дифференцирование вертикального типа и через ∂_1 — горизонтального типа. Пусть Δ — их коммутатор: $\Delta = [\partial_0, \partial_1] = \partial_0 \partial_1 - \partial_1 \partial_0$, и $\mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$ — алгебра Ли, порожденная ∂_0 и ∂_1.

В данной работе получена формула для коммутаторов только в случае дифференцирований вертикального типа ∂_0 с $\varphi = \mathrm{const}$. Произвольное дифференцирование вертикального типа примет такой вид при переходе от базового поля $\mathbb{K}$ к расширению $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(Y)^{\mathbb{T}}$.

Согласно (1) и (2) в некоторой системе порождающих дифференцирования будут иметь вид

$$\partial_0(t^r \chi^m) = \langle m, \rho_0 \rangle \cdot t^r \chi^{m+e_0}, \quad \partial_1(t^r \chi^m) = d_1(v_1(m) + r) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_1}.$$

Ясно, что $\partial_0, \partial_1, \Delta \in \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$. Другие дифференцирования из этой алгебры Ли получаются последовательным применением операции коммутирования с ∂_0 или ∂_1 к Δ, так как $[\partial_0, \partial_0] = [\partial_1, \partial_1] = 0$. В силу антикоммутативности и правила Якоби дифференцирование представляется как сумма слагаемых вида

$$\Delta_u = [[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}],$$

где $u = (u_1, \dots, u_k)$ — двоичный вектор и $k \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть $|u| = u_1 + \dots + u_k$ — вес вектора u. Вес $|u|$ соответствует количеству применений коммутатора с дифференцированием горизонтального типа в Δ_u, и тогда количество нулей $|u|_0 = k - |u|$ — применениям коммутатора с дифференцированием вертикального типа.

Пусть $u(i) = (u_1, \dots, u_i)$ — вектор u, укороченный до i-й позиции, $i \le k$.

Кратко прокомментируем, как устроено действие Δ_u на элемент алгебры $t^r\chi^m$.

Во-первых, из формул для ∂_0 и ∂_1 ясно, что произойдет с показателями t и χ, так как они меняются независимо от коэффициентов. К показателю t прибавится s_1 столько раз, сколько применено ∂_1 (с учетом применения Δ), т. е. получим $t^{r+(|u|+1)s_1}$. Столько же раз прибавится e_1 к показателю χ. Кроме того, вклад в показатель при χ дает еще дифференцирование ∂_0, которое применялось $|u|_0 + 1$ раз с учетом Δ. Поэтому получим $\chi^{m+(|u|_0+1)e_0+(|u|+1)e_1}$.

Во-вторых, возникнет сложный коэффициент. Первый множитель в коэффициенте зависит только от того, сколько раз встретились дифференцирования каждого типа независимо от их порядка. Мы обозначили его через $F_u(m, r)$. Каждый следующий множитель $\alpha_{u(i)}$ возникает от применения коммутатора с соответствующим дифференцированием ∂_{u_i}, и здесь уже важен порядок примененных до этого коммутаторов.

Предложение 2. *Пусть* $\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \dots], \partial_{u_k}] \in \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$. *Тогда дифференцирование* Δ_u *имеет вид*

$$\Delta_u(t^r\chi^m) = (-1)^k \cdot \alpha_{u(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{u(k)} \cdot F_u(m, r) \cdot t^{r+(|u|+1)s_1}\chi^{m+(|u|_0+1)e_0+(|u|+1)e_1},$$

где

$$\alpha_{u(i)} = \begin{cases} (|u(i)| + 1)\langle\rho_0, e_1\rangle - |u(i)|_0 + 1, & \text{если } u_i = 0, \\ (|u(i)|_0 + 1)d_1v_1(e_0) - |u(i)| + 1, & \text{если } u_i = 1, \end{cases}$$

$$F_u(m, r) = ((|u|+1)\langle\rho_0, e_1\rangle - |u|_0) \cdot d_1(v_1(m)+r) - ((|u|_0+1)d_1v_1(e_0) - |u|) \cdot \langle\rho_0, m\rangle.$$

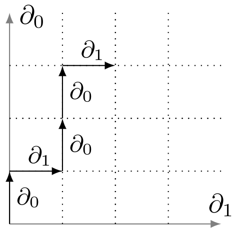

Рис. 1.

Удобно интерпретировать формулы для $\alpha_{u(i)}$ с помощью следующей схемы. Рассмотрим целочисленную решетку в положительной четверти, как на рис. 1. Будем строить путь из единичных векторов, стартующий из начала координат. Сдвиг на единичный вектор по оси абсцисс обозначает применение коммутатора с ∂_1, сдвиг на единичный вектор по оси ординат — применение коммутатора с ∂_0.

Таким образом, любому дифференцированию $\Delta_u \in \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$ можно поставить в соответствие путь из звеньев на целочисленной решетке.

Заметим, что множитель $\alpha_{u(i)}$ зависит только от последнего звена пути, задаваемого вектором $u(i)$. Таким образом, все $\alpha_{u(i)}$ с одинаковым последним звеном равны. Например, $\alpha_{u(i)}$, соответствующие вертикальной стрелке между точками $(1, 1)$ и $(1, 2)$, это $\alpha_{(010)} = \alpha_{(100)} = 2\langle\rho_0, e_1\rangle - 1$. Поэтому каждому звену на решетке однозначно соответствует некоторый $\alpha_{u(i)}$.

На практике если приходится вычислять много значений коммутаторов при небольших k, оказывается удобным заранее выписать для каждого звена решетки значения $\alpha_{u(i)}$. Тогда после построения соответствующего вектору u пути на решетке формула для Δ_u выписывается мгновенно.

Пример 3. В качестве примера возьмем дифференцирование, которое задается путем на рис. 1:

$$\Delta_{(0,1,0,0,1)} = [[[[[\Delta, \partial_0], \partial_1], \partial_0], \partial_0], \partial_1].$$

Нужно вычислить значение соответствующих $\alpha_{u(i)}$ и функции $F_{(01001)}(m,r)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{(0)} &= \langle \rho_0, e_1 \rangle,\\
\alpha_{(0,1)} &= 2d_1 v_1(e_0),\\
\alpha_{(0,1,0)} &= 2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1,\\
\alpha_{(0,1,0,0)} &= 2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 2,\\
\alpha_{(0,1,0,0,1)} &= 4d_1 v_1(e_0) - 1.
\end{aligned}$$

Так как вес $|(0,1,0,0,1)| = 2$ и количество нулей $|(0,1,0,0,1)|_0 = 3$, имеем

$$\begin{aligned}
F_{(0,1,0,0,1)}(m,r) &= ((2+1)\langle \rho_0, e_1 \rangle - 3) \cdot d_1(v_1(m) + r) - ((3+1)d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle\\
&= 3(\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot d_1(v_1(m) + r) - (4d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем формулу

$$\begin{aligned}
\Delta_{(10110)}(t^r \chi^m) = -4 \cdot \langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1 v_1(e_0) \cdot (2\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot (\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1)\\
\times (4d_1 v_1(e_0) - 1) \cdot (3(\langle \rho_0, e_1 \rangle - 1) \cdot d_1(v_1(m) + r)\\
- (4d_1 v_1(e_0) - 2) \cdot \langle \rho_0, m \rangle) t^{r+3s_1} \chi^{m+4e_0+3e_1}.
\end{aligned}$$

Доказательство предложения 2. Воспользуемся индукцией по k — длине вектора $|u|$.

База индукции: $k = 0$. Тогда $\Delta_u = \Delta$. Вычислим:

$$\begin{aligned}
&\Delta(t^r \chi^m) = \partial_0 \partial_1 (t^r \chi^m) - \partial_1 \partial_0 (t^r \chi^m)\\
&= d_1(v_1(m) + r)\langle \rho_0, m + e_1 \rangle \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1} - d_1 \langle \rho_0, m \rangle (v_1(m + e_0) + r) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1}\\
&= d_1(\langle \rho_0, e_1 \rangle (v_1(m) + r) - v_1(e_0)\langle \rho_0, m \rangle) \cdot t^{r+s_1} \chi^{m+e_0+e_1}.
\end{aligned}$$

Тот же результат даст формула предложения 2: $\alpha_{u(i)}$ отсутствуют, а выражение $F_u(m,r)$ при $|u| = |u|_0 = 0$ примет вид $\langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1(v_1(m) + r) - d_1 v_1(e_0)\langle \rho_0, m \rangle$. Остается вынести d_1 за скобки.

Шаг индукции: $k \to k + 1$. Первый случай: $\Delta_{u'} = [\Delta_u, \partial_0]$. Вектор $u' = (u, 0)$.

По предположению индукции и формуле коммутатора имеем

$$\Delta_u(t^r \chi^m) = (-1)^k \alpha_{u(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{u(k)} \cdot F_u(m,r) \cdot t^{r+(|u|+1)s_1} \chi^{m+(k-|u|+1)e_0+(|u|+1)e_1},$$

$$\Delta_{u'}(t^r \chi^m) = [\Delta_u, \partial_0](t^r, \chi^m) = \Delta_u \partial_0 (t^r \chi^m) - \partial_0 \Delta_u (t^r \chi^m).$$

Выясним, как устроено выражение для $\Delta_{u'}(t^r \chi^m)$. Ясно, что показатели у t и χ изменятся нужным образом, потому что они меняются независимо от коэффициентов. Также ясно, что можно вынести за скобки множители $\alpha_{u(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{u(k)}$ и работать только с оставшимся коэффициентом:

$$K = \langle \rho_0, m \rangle F_u(m + e_0, r) - \langle \rho_0, m + e_0 + e_1 + |u|_0 e_0 + |u| e_1 \rangle F_u(m,r). \tag{3}$$

Для проведения шага индукции этот коэффициент должен оказаться равен $-\alpha_{u'} F_{u'}(m,r)$. Выпишем вспомогательные равенства, которые получаются прямым вычислением:

$$F_u(m + e_0, r) = F_u(m,r) + (|u| + 1)\langle \rho_0, e_1 \rangle \cdot d_1 v_1(e_0) + d_1 v_1(e_0) - |u|, \tag{4}$$

$$F_{u'}(m,r) = F_u(m,r) - d_1(v_1(m)+r) - d_1v_1(e_0)\langle\rho_0,m\rangle, \tag{5}$$

$$\alpha_{u'} = (|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0. \tag{6}$$

Раскроем длинное скалярное произведение при $F_u(m,r)$ в (3) и подставим (4):

$$\begin{aligned} K = -((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0)F_u(m,r) + F_u(m,r) \\ + \langle\rho_0,m\rangle((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle\cdot d_1v_1(e_0) + d_1v_1(e_0) - |u|) \\ = -((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0)F_u(m,r) \\ + ((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0)\cdot d_1(v_1(m)+r+\langle\rho_0,m\rangle v_1(e_0)) \\ = -((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0)(F_u(m,r) - d_1(v_1(m)+r) - d_1v_1(e_0)\langle\rho_0,m\rangle) \\ = -\alpha_{u'}F_{u'}(m,r). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу (5) и (6).

Второй случай: $\Delta_{u'} = [\Delta_u, \partial_1]$. Вектор $u' = (u,1)$.

Действуем аналогично — переходим к работе с коэффициентом:

$$\begin{aligned} K = d_1(v_1(m)+r)\cdot F_u(m+e_1, r+s_1) \\ - d_1(v_1(m+e_0+e_1+|u|_0e_0+|u|e_1) + r + s_1 + |u|s_1)\cdot F_u(m,r). \end{aligned} \tag{7}$$

Выпишем вспомогательные равенства:

$$\begin{aligned} F_u(m+e_1, r+s_1) = F_u(m,r) - ((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0) \\ - ((|u|_0+1)d_1v_1(e_0) - |u|)\langle\rho_0,e_1\rangle, \end{aligned} \tag{8}$$

$$F_{u'}(m,r) = F_u(m,r) + \langle\rho_0,e_1\rangle\cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle\rho_0,m\rangle, \tag{9}$$

$$\alpha_{u'} = (|u|_0+1)\cdot d_1v_1(e_0) - |u|. \tag{10}$$

Аналогично, подставим (8) в (7) и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} K = -((|u|_0+1)\cdot d_1v_1(e_0) - |u|)F_u(m,r) + F_u(m,r) \\ - d_1(v_1(m)+r)((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0) \\ - d_1(v_1(m)+r)((|u|_0+1)d_1v_1(e_0) - |u|)\langle\rho_0,e_1\rangle \\ = -((|u|_0+1)\cdot d_1v_1(e_0) - |u|)F_u(m,r) \\ - ((|u|_0+1)dv_1(e_0) - |u|)(\langle\rho_0,e_1\rangle\cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle\rho_0,m\rangle) \\ = -((|u|_0+1)\cdot d_1v_1(e_0) - |u|)(F_u(m,r) + \langle\rho_0,e_1\rangle\cdot d_1(v_1(m)+r) + \langle\rho_0,m\rangle) \\ = -\alpha_{u'}F_{u'}(m,r). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено в силу (9) и (10). Оба случая рассмотрены, и тем самым предложение 2 доказано. □

В дальнейшем будем исследовать условия, при которых коммутатор дифференцирований обращается в нуль. Для этого будет полезна следующая

Лемма 1. *В обозначениях предложения* 2

$$F_u \neq 0 \quad \forall u.$$

Доказательство. Сгруппируем коэффициенты при r и m:

$$\begin{aligned} F_u(m,r) = r\cdot d_1((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0) \\ + \langle((|u|+1)\langle\rho_0,e_1\rangle - |u|_0)d_1v_1 - ((|u|_0+1)d_1v_1(e_0) - |u|)\rho_0, m\rangle. \end{aligned}$$

Имеем $F_u \equiv 0$, если коэффициенты при r и m равны нулю:

$$\begin{cases} (|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle - |u|_0 = 0, \\ (|u|_0+1)d_1 v_1(e_0) - |u| = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} (|u|+1)\langle \rho_0, e_1\rangle = |u|_0, \\ (|u|_0+1)d_1 v_1(e_0) = |u|. \end{cases}$$

Но это уравнения в целых числах, поэтому $|u|+1$ делит $|u|_0$ и $|u|_0+1$ делит $|u|$, что приводит к противоречию:

$$\begin{cases} |u| \le |u|_0 - 1, \\ |u|_0 \le |u| - 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |u| < |u|_0, \\ |u|_0 < |u|. \end{cases}$$

5. Критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной дифференцированиями вертикального и горизонтального типов

В этом разделе используем формулу коммутатора для вывода критерия конечномерности алгебры Ли, порожденной парой однородных локально нильпотентных дифференцирований, одно из которых вертикального, а другое — горизонтального типа.

Напомним некоторые определения. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *филиформной*, если для подалгебр убывающего центрального ряда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supseteq \mathfrak{g}_1 \supseteq \mathfrak{g}_2 \supseteq \dots, \ \mathfrak{g}_k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{k-1}]$$

выполнено $\dim \mathfrak{g}_k = n - k$ для $2 \le k \le n$. Всякая филиформная алгебра Ли нильпотентна и ее класс нильпотентности максимален.

В филиформной алгебре Ли размерности $n+1$ существует *базис Вернь* $\{X_i\}$, в котором $[X_0, X_i] = X_{i+1}$ для $1 \le i \le n-1$ и $[X_0, X_n] = 0$ (см. [14, разд. 6.2], а также [12, предложение 5, разд. 1.5]).

Если остальные $[X_i, X_j]$ равны 0 при $i < j$, то алгебра Ли называется *модельной* филиформной алгеброй Ли. Такие алгебры принято обозначать через L_n, $\dim L_n = n + 1$.

У алгебры L_n существует следующее представление верхнетреугольными матрицами:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_0 & 0 & \dots & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_0 & \dots & 0 & x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_0 & x_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В работе [15] показано, что это представление минимальное и точное.

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\partial_0, \partial_1)$, *где* ∂ *— ЛНД вертикального типа с* $\varphi = \mathrm{const}$, ∂_1 *— ЛНД горизонтального типа. Тогда* $\mathfrak{g}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $v_1(e_0) = 0, \langle \rho_0, e_1\rangle = 0$;

(2) $v_1(e_0) = 0, \langle \rho_0, e_1\rangle > 0$;

(3) $v_1(e_0) > 0, \langle \rho_0, e_1\rangle = 0$;

(4) $v_1(e_0) > 0, \langle \rho_0, e_1\rangle > 0$, $s_1 = 0$, $e_0 + e_1 = 0$.

В этих случаях получаются следующие алгебры Ли:

(1) $\mathfrak{g}$ *коммутативна*, $[\partial_0, \partial_1] = 0$*;*

(2) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \rho_0, e_1\rangle + 2}$ *модельная филиформная*, $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho_0, e_1\rangle + 3$*;*

(3) $\mathfrak{g} \cong L_{d_1 v_1(e_0)+2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = d_1 v_1(e_0) + 3$*;*
(4) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Доказательство. Сначала покажем, что в случаях (1)–(4) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечномерна.

Случай (1). Условие случая (1) $\langle e_1, \rho_0 \rangle = v_1(e_0) = 0$ совпадает с критерием коммутирования ∂_0 и ∂_1 из [7, теорема 4] с учетом того, что $\varphi = \mathrm{const}$. Значит, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ коммутативна.

Случай (2). По лемме 1 имеем $F_u(m, r) \neq 0$. Следовательно, $\Delta_u = 0$ только если один из $\alpha_{u(i)}$ равен нулю. Из равенства $v_1(e_0) = 0$ получаем, что $\alpha_{u(i)} = 0$ для всех $u_i = 1$. Тогда только для $u_i = 0$ множители $\alpha_{u(i)}$ могут быть отличны от нуля (рис. 2). Значит, любое ненулевое дифференцирование Δ_u должно соответствовать пути, который целиком лежит на оси ординат при $k \leq \langle \rho_0, e_1 \rangle$.

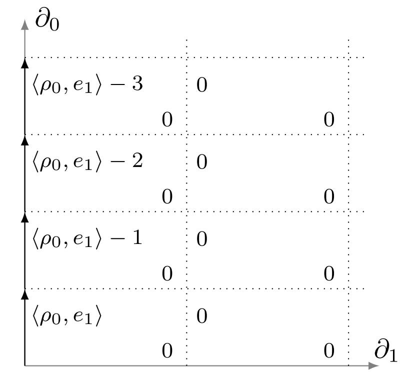

Рис. 2.

Также заметим, что для любых u и v будет $[\Delta_u, \Delta_v] = 0$, потому что, раскрывая скобку по тождеству Якоби, получим во всех слагаемых коммутирование с ∂_1, которое обращает коммутатор в нуль, как показано выше.

Таким образом, все дифференцирования, которые могут быть в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ — это $\partial_0, \partial_1, \Delta$ и $\mathrm{ad}(\partial_0)^i(\Delta)$, где $i \in \{1, \ldots, \langle \rho_0, e_1 \rangle\}$, поэтому $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho_0, e_1 \rangle + 3$ и $\mathfrak{g}$ модельная филиформная.

Случай (3). Этот случай симметричен предыдущему: $\alpha_{u(i)} = 0$ при $u_i = 1$, все отличные от $\partial_0, \partial_1, \Delta$ дифференцирования соответствуют пути на оси абсцисс длины $k \leq d_1 v_1(e_0)$.

Случай (4). Если $s_1 = 0$ и $e_0 + e_1 = 0$, то $\langle \rho_0, e_1 \rangle = \langle \rho_0, -e_0 \rangle = 1$ и

$$d_1 v_1(e_0) = -d_1 v_1(e_1) = d_1 s_1 + 1 = 1.$$

Из предложения 2 вытекает, что любой Δ_u либо равен 0, либо пропорционален ∂_0, ∂_1, Δ. Положим $f = \partial_0$, $g = \partial_1$, $h = \Delta$. Имеем

$$[f, g] = h, \quad [h, f] = 2f, \quad [h, g] = -2g.$$

Следовательно, получаем $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Обратно, если не выполнены условия случаев (1)–(4), то $v_1(e_0) > 0$, $\langle \rho_0, e_1 \rangle > 0$ и $s_1 \neq 0$ или $e_0 + e_1 \neq 0$. Построим дифференцирование Δ_u, где $u = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ и длина вектора u равна $2k$.

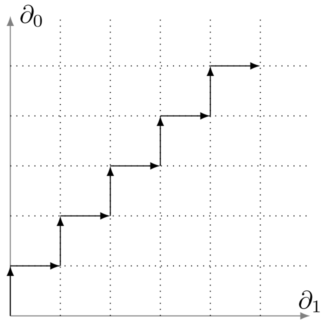

Рис. 3.

Путь для Δ_u показан на рис. 3.

Рассмотрим степень дифференцирования Δ_u:

$$(k+1)s_1 \text{ для } t, \quad (k+1)(e_0+e_1) \text{ для } \chi.$$

Одна из них обязана неограниченно возрастать, а значит, Δ_u не совпадает ни с одним из предыдущих дифференцирований. Осталось показать, что $\alpha_{u(i)}$ не обращаются в нуль.

По формуле предложения 2 для $u_i = 0$ при нечетном i, т. е. $i = 2j+1$, имеем

$$\alpha_{u(i)} = (j+1)\langle\rho_0, e_1\rangle - j \neq 0, \text{ так как } \langle\rho_0, e_1\rangle \in \mathbb{Z} \text{ и } \langle\rho_0, e_1\rangle \neq \frac{j}{j+1}.$$

Аналогично для $u_i = 1$, $i = 2j$, выполнено

$$\alpha_{u(i)} = (j+1)d_1 v_1(e_0) - j + 1 \neq 0, \text{ так как } d_1 v_1(e_0) \in \mathbb{Z} \text{ и } d_1 v_1(e_0) \neq \frac{j-1}{j+1},$$

что и требовалось показать.

Пример 4. Проиллюстрируем полученный результат в случае дифференцирований из примера 2. Напомним, что речь идет о многообразии, определяемом дивизором $\mathfrak{D} = [0, +\infty) \cdot \{0\}$ на аффинной прямой, а дифференцирования имеют вид

$$\partial_0(t^r\chi^m) = m \cdot t^r\chi^{m-1}, \quad e_0 = -1,\ \rho_0 = 1,$$
$$\partial_1(t^r\chi^m) = r \cdot t^{r-1}\chi^{m+e_1}, \quad e_1 \geq 0,\ v_1 = 0,\ s_1 = -1.$$

Заметим, что $v_1(e_0) = 0 \cdot (-1) = 0$, поэтому выполнены условия пунктов (1) или (2) теоремы 4.

Если $e_1 = 0$, то выполнено условие (1): $[\partial_0, \partial_1] = 0$ и алгебра Ли коммутативна. Если $e_1 > 0$, то выполнено условие (2): $\operatorname{Lie}(\partial_0, \partial_1) = L_{e_1+2}$ — модельная филиформная алгебра Ли с базисом Вернь: $[X_0, X_i] = X_{i+1}$, где $X_0 = \partial_0$, $X_1 = \partial_1$ и $\dim L_{e_1+2} = e_1 + 3$.

Пример 5. Рассмотрим ситуацию, где реализуются все случаи конечномерности. Чтобы существовали дифференцирования вертикального типа, должно быть $\sigma \neq \{0\}$. Если носитель дивизора $\mathfrak{D}$ состоит из единственной точки, не нужно следить за условиями согласованной разметки, что упростит вычисления. Поэтому пусть $\sigma = \mathbb{Q}^4_{\geq 0}$ и $\mathfrak{D} = (p+\sigma) \cdot \{0\}$ на аффинной прямой $\mathbb{A}^1$, где $p = (0, 0, -1, -1) \in N = \mathbb{Z}^4$. Получаемое из этого набора данных многообразие — пятимерное аффинное пространство. На алгебре функций существуют четыре дифференцирования вертикального типа, каждое из которых отвечает примитивному вектору одного из лучей четырехмерного конуса σ и которые обозначим через ∂_{01}, ∂_{02}, ∂_{03}, ∂_{04}:

$$\rho_{01} = (1,0,0,0),\ e_{01} = (-1,0,0,0); \quad \rho_{02} = (0,1,0,0),\ e_{02} = (0,-1,0,0);$$
$$\rho_{03} = (0,0,1,0),\ e_{03} = (0,0,-1,0); \quad \rho_{04} = (0,0,0,1),\ e_{04} = (0,0,0,-1).$$

Также рассмотрим два дифференцирования горизонтального типа ∂_{11}, ∂_{12}, которые задаются отмеченной вершиной $v_1 = p$ (единственной) и векторами

$$e_{11} = (0,1,0,1), \quad e_{12} = (0,0,0,1).$$

Тогда имеем

$$v_1(e_{01}) = 0,\ \langle \rho_{01}, e_{11}\rangle = 0; \quad v_1(e_{02}) = 0,\ \langle \rho_{02}, e_{11}\rangle = 1;$$
$$v_1(e_{03}) = 1, \langle \rho_{03}, e_{12}\rangle = 0; \quad v_1(e_{04}) = 1,\ \langle \rho_{04}, e_{12}\rangle = 1,$$
$$s_{12} = -1 - v_1(e_{12}) = 0, \quad e_{04} + e_{12} = 0.$$

Таким образом, пары дифференцирований $(\partial_{01}, \partial_{11})$, $(\partial_{02}, \partial_{11})$, $(\partial_{03}, \partial_{12})$, $(\partial_{04}, \partial_{12})$ отвечают случаям (1)–(4) теоремы 4 соответственно.

6. Критерий конечномерности алгебры Ли, порожденной однородными ЛНД вертикального типа

Критерий конечномерности в этом случае уже известен и является следствием теоремы [10, теорема 5.1] в случае, когда алгебра Ли 2-порожденная.

Здесь независимо придем к тем же результатам, используя формулу предложения 2. Для этого нужно заметить, что получить аналогичную формулу для коммутаторов дифференцирования вертикального типа можно символьной заменой.

Пусть ∂ и $\widehat{\partial}$ — два разных дифференцирования вертикального типа. Тогда над полем $\mathbb{K}_0 = \mathbb{K}(Y)^{\mathbb{T}}$ они имеют вид

$$\partial(f\chi^m) = \langle m, \rho\rangle \cdot f\chi^{m+e}, \quad \widehat{\partial}(f\chi^m) = \langle m, \widehat{\rho}\rangle \cdot f\chi^{m+\widehat{e}}.$$

Сделаем символьную замену в формулах предложения 2:

$$e_1 \mapsto \widehat{e}, \quad t^{r+s_1(|u|+1)} \mapsto f, \quad d_1 v_1(e_0) \mapsto \langle \widehat{\rho}, e\rangle, \quad d_1(v_1(m) + r) \mapsto \langle \widehat{\rho}, m\rangle.$$

Обозначим здесь $\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}]$, где каждое ∂_{u_i} совпадает с одним из рассматриваемых дифференцирований вертикального типа. Пусть ∂ встречается среди них p раз, а $\widehat{\partial}$ встречается $q = k - p$ раз соответственно. Тогда верно

Следствие 1 (предложения 2). *Пусть*

$$\Delta_u = [[[[\Delta, \partial_{u_1}], \partial_{u_2}], \ldots], \partial_{u_k}] \in \mathrm{Lie}(\partial, \widehat{\partial}).$$

Тогда дифференцирование Δ_u имеет вид

$$\Delta_u(f\chi^m) = (-1)^k F_u(m)\alpha_{u(1)} \ldots \alpha_{u(k)} \cdot f\chi^{m+(p+1)e+(q+1)\widehat{e}},$$

где

$$\alpha_{u(i)} = \begin{cases} (p+1)\langle \rho, \widehat{e}\rangle - q + 1, & \text{если } \partial_{u_i} = \partial, \\ (q+1)\langle \widehat{\rho}, e\rangle - p + 1, & \text{если } \partial_{u_i} = \widehat{\partial}, \end{cases}$$
$$F_u(m) = ((p+1)\langle \rho, \widehat{e}\rangle - q)\langle \widehat{\rho}, m\rangle - ((q+1)\langle \widehat{\rho}, e\rangle - p)\langle \rho, m\rangle.$$

Таким образом, дифференцирования вертикального типа также можно быстро вычислять с помощью путей в решетке. Аналогичным образом для них формулируется

Теорема 5. *Пусть ∂ и $\widehat{\partial}$ — дифференцирования вертикального типа и* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\partial, \widehat{\partial}\,)$ *Тогда* $\mathfrak{g}$ *конечномерна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle = \langle \widehat{\rho}, e\rangle = 0$;

(2) $\langle \widehat{\rho}, e\rangle = 0, \langle \rho, \widehat{e}\,\rangle > 0$;

(3) $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle = 0, \langle \widehat{\rho}, e\rangle > 0$;

(4) $\langle \widehat{\rho}, e\rangle > 0$, $\langle \rho, \widehat{e}\,\rangle > 0$, $\widehat{s} = 0$, $e + \widehat{e} = 0$.

В этих случаях получаются следующие алгебры Ли:

(1) $\mathfrak{g}$ *коммутативна,* $[\partial, \widehat{\partial}\,] = 0$;

(2) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \rho, \widehat{e}\rangle+2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = \langle \rho, \widehat{e}\,\rangle + 3$;

(3) $\mathfrak{g} \cong L_{\langle \widehat{\rho}, e\rangle+2}$ *модельная филиформная,* $\dim \mathfrak{g} = \langle \widehat{\rho}, e\rangle + 3$;

(4) $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{sl}_2$.

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство предыдущей с точностью до предложенной выше символьной замены.

Благодарность. Автор выражает благодарность своему научному руководителю И. В. Аржанцеву за постановку задачи и поддержку, без которой работа не была бы написана. Также автор признателен В. А. Матвееву за помощь с компьютерными вычислениями, которые существенно ускорили работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fulton W.* Introduction to toric varieties. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1993.

2. *Cox D. A., Little J. B., Schenk H. K.* Toric varieties. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. (Grad. Stud. Math.; V. 124).

3. *Altmann K., Hausen J.* Polyhedral divisors and algebraic torus actions // Math. Ann. 2006. V. 334, N 3. P. 557–607.

4. *Liendo A.* $\mathbb{G}_{\mathrm{a}}$-actions of fiber type on affine $\mathbb{T}$-varieties // J. Algebra. 2010. V. 324, N 12. P. 3653–3665.

5. *Liendo A.* Affine $\mathbb{T}$-varieties of complexity one and locally nilpotent derivations // Transform. Groups. 2010. V. 15, N 2. P. 389–425.

6. *Arzhantsev I., Liendo A.* Polyhedral divisors and SL_2-actions on affine $\mathbb{T}$-varieties // Michigan Math. J. 2012. V. 61, N 4. P. 731–762.

7. *Матвеев Д. А.* Коммутирующие однородные локально нильпотентные дифференцирования // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 11. С. 103-128.

8. *Kraft H., Zaidenberg M.* Algebraically generated groups and their Lie algebras // J. London Math. Soc. 2024. V. 109, N 2. Paper no. e12866, 39 pp.

9. *Arzhantsev I., Makedonskii E., Petravchuk A.* Finite-dimensional subalgebras in polynomial Lie algebras of rank one // Ukr. Math. J. 2011. V. 63. P. 827–832.

10. *Arzhantsev I., Liendo A., Stasyuk T.* Lie algebras of vertical derivations on semiaffine varieties with torus actions // J. Pure Appl. Algebra. 2021. V. 225, N 2. Paper no. 106499, 18 pp.

11. *Arzhantsev I., Zaidenberg M.* Tits-type alternative for groups acting on toric affine varieties // Intern. Math. Res. Notices IMRN 2022. 2022. N 11. P. 8162–8195.

12. *Vergne M.* Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application á l'étude de la variété des algébres de Lie nilpotentes // Bulletin de la S. M. F. 1970. V. 98. P. 81–116.

13. *Freudenburg G.* Algebraic theory of locally nilpotent derivations. Berlin: Springer, 2017. (Encyclopaedia Math. Sci.; V. 136).

14. *Винберг Э. Б., Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли–3. М.: ВИНИТИ, 1990. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 41.

15. *Ceballos M., Valdés J., Tenorio A.* Representing filiform Lie algebras minimally and faithfully by strictly upper-triangular matrices // J. Algebra Appl. 2013. V. 12, N 4. 1250196.

Поступила в редакцию 14 января 2024 г.
После доработки 2 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Матвеев Дмитрий Александрович (ORCID 0000-0003-1272-0155)
Национальный исследовательский университет «Высшая Школа Экономики»,
факультет компьютерных наук,
Покровский бульвар 11, Москва 109028;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет, кафедра высшей алгебры,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
dmitry.a.matveev@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.956.8:517.956:539.3(3)

ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЗАЖАТОЙ ПО КРАЮ ПЛАСТИНЫ С ПРИКРЕПЛЕННЫМИ СТЕРЖНЯМИ. 1. СТАТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

С. А. Назаров

Аннотация. Строится асимптотика напряженно-деформированного состояния закрепленной вдоль кромки тонкой горизонтальной пластины с присоединенными к ней вертикальными стержнями. Конструкция из изотропного и однородного упругого материала находится под воздействием силы тяжести. При помощи процедуры понижения размерности и анализа пограничных слоев, экспоненциального около кромки пластины и степенного около зон присоединения стержней к пластине, находятся старшие и поправочные члены асимптотики прогиба пластины и жестких смещений стержней, а также их продольная деформация. Выводится асимптотически точное анизотропное и весовое неравенство Корна, позволяющее обосновать асимптотические формулы.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.312

Ключевые слова: сочленение пластины со стержнями, процедура понижения размерности, экспоненциальные и степенные пограничные слои, асимптотика.

1. Постановки задач. Пусть ω_0 и ω_j — области на плоскости, ограниченные простыми замкнутыми гладкими (класса C^∞) контурами $\partial\omega_0$ и $\partial\omega_j$, $j = 1, \dots, J$, а $P^1, \dots, P^J$ — попарно различные точки внутри области ω_0. Тонкие изотропные и однородные (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$) цилиндрическая пластина и стержни с переменными сечениями $\omega_j^h(z)$, заданные положительными профильными функциями $H_j \in C^\infty[-\ell_j, 0]$, определим следующим образом:

$$\Omega_0^h = \{x = (x_1, x_2, x_3) : y := (x_1, x_2) \in \omega_0,\ z := x_3 \in (0, h)\}, \tag{1}$$

$$\Omega_j^h = \bigl\{x :\ h^{-1}H(z)^{-1}y^j \in \omega_j,\ z \in (-\ell_j, 0]\bigr\}, \quad j = 1, \dots, J. \tag{2}$$

Масштабированием сведем характерный размер продольного сечения ω_0 пластины (1) к единице, т. е. сделаем безразмерными декартовы системы координат $x \in \mathbb{R}^3$ и $y^j \in \mathbb{R}^2$ с центрами $\mathscr{O}$ и P^j соответственно, а также все геометрические параметры, в частности, малый $h > 0$ и фиксированные положительные $\ell_1, \dots, \ell_J$. Для упрощения изложения (см. разд. 9) предположим, что область ω_j содержит круг $\mathbb{B}^2_{\mathbf{r}_j} = \{y^j : |y^j| < \mathbf{r}_j\}$ с радиусом $\mathbf{r}_j > 0$, а также верны соотношения

$$\begin{gathered}\int\limits_{\omega_j} y_1^j\, dy^j = \int\limits_{\omega_j} y_2^j\, dy^j = 0, \quad I_{12}(\omega_j) := \int\limits_{\omega_j} y_1^j y_2^j\, dy^j = 0,\\ H_j(z) = 1 \text{ при } z \in (-\delta_H, 0),\ \delta_H > 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

Первые два достигаются малыми сдвигам точек P^j, а третье — поворотом системы $y^j = \bigl(y_1^j, y_2^j\bigr)$.

Деформация упругого сочленения $\Pi^h = \Omega_0^h \cup \Omega_1^h \cup \dots \cup \Omega_J^h$ под действием силы тяжести описывается системой Ламе трех дифференциальных уравнений в частных производных

$$-\mu\Delta_x u^h(x) - (\lambda+\mu)\nabla_x\nabla_x^\top u^h(x) = f^h(x) := \rho g e_{(3)}, \quad x \in \Pi^h. \tag{4}$$

При этом $\nabla_x = \operatorname{grad}$, $\nabla_x^\top = \operatorname{div}$, $\Delta_x = \nabla_x^\top\nabla_x$ — оператор Лапласа, $g > 0$ — ускорение свободного падения, $e_{(q)}$ — орт оси x_q, вектор смещений $u^h = \bigl(u_1^h, u_2^h, u_3^h\bigr)^\top$ интерпретируется как столбец в фиксированной системе координат x ($\top$ — знак транспонирования), а декартовы компоненты тензоров деформаций и напряжений имеют вид

$$\varepsilon_{pq}(u^h) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_p^h}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^h}{\partial x_p}\right), \quad \sigma_{pq}(u^h) = 2\mu\varepsilon_{pq}(u^h) + \lambda\delta_{p,q}\sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii}(u^h), \quad p,q = 1,2,3,$$

где $\delta_{p,q}$ — символ Кронекера. Кромка пластины $\Gamma_0^h = \partial\omega_0 \times (0,h)$ жестко защемлена, а остальная часть поверхности $\partial\Pi^h$ свободна от внешних воздействий, т. е. выполнены краевые условия

$$u^h(x) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \Gamma_0^h, \tag{5}$$

$$\sigma_q^{(n)}(u^h; x) := \sum_{p=1}^{3} n_p(x)\sigma_{pq}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial\Pi^h \setminus \overline{\Gamma_0^h}, \ q = 1,2,3. \tag{6}$$

Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)^\top$ — единичный вектор внешней нормали, определенной почти всюду на кусочно-гладкой поверхности $\partial\Pi^h$, т. е.

$$\sigma^{(n)}(u^h) = \bigl(\sigma_1^{(n)}(u^h), \sigma_2^{(n)}(u^h), \sigma_3^{(n)}(u^h)\bigr)^\top$$

— вектор нормальных напряжений. Через $L(\nabla_x)$ и $B(x, \nabla_x)$ обозначим (3×3)-матрицы дифференциальных операторов из левых частей соотношений (4) и (6).

Вариационная формулировка задачи (4)–(6) апеллирует к интегральному тождеству [1, 2]

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = (f^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall\ \psi^h \in H_0^1\bigl(\Pi^h; \Gamma_0^h\bigr)^3, \tag{7}$$

где $(\cdot,\cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)$, скалярном или векторном, $H_0^1\bigl(\Pi^h; \Gamma_0^h\bigr)$ — пространство Соболева функций, обращающихся в нуль на Γ_0^h, а последний верхний индекс 3 в формуле (7) указывает количество компонент у пробной вектор-функции $\psi^h = \bigl(\psi_1^h, \psi_2^h, \psi_3^h\bigr)^\top$, однако он отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм. Кроме того, $E(u^h, u^h; \Pi^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная телом Π^h,

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \sum_{p,q=1}^{3} (\sigma_{pq}(u^h), \varepsilon_{pq}(\psi^h))_{\Pi^h}.$$

Основная цель работы — построить асимптотику поля смещений, в частности, главные члены прогиба пластины Ω_0^h и смещения стержней как жесткого целого. Автор впервые увидел описанную конструкцию на экспозиции пыточных инструментов инквизиции в музее религии и атеизма, размещавшегося в Казанском соборе в доперестроечном Ленинграде, но такое же тело Π^h, например, изображает прохудившуюся крышу сарая с сосульками-сталактитами.

Исследованию упругих сочленений тел с разными предельными размерностями посвящено большое количество публикаций, однако наиболее подробно изучены сочленения массивных тел с тонкими стержнями (см. [3–8] и [9] по поводу статических и спектральных задач теории упругости). Имеются публикации о сочленениях пластин и стержней [10–12] и [13–15] (как и в известной шутке [16, с. 293], они имеют дело со случаями $J = 1$ и $J \to \infty$ соответственно), в которых посредством разнообразных предельных переходов отыскиваются главные члены асимптотик упругих полей. В данной статье основное внимание уделяется анализу явления пограничного слоя вблизи зон присоединения стержней к пластине, который позволяет построить младшие асимптотические члены и, в частности, описать сдвиги и повороты стержней вследствие деформации пластины.

Асимптотический анализ сочленений тел с разными предельными размерностями (для пластины и стержней — соответственно два и один) существенно осложнен тем обстоятельством, что уплощенные и удлиненные упругие тела совершенно по-разному реагируют на нагружения в продольных и поперечных направлениях, которые обычно рассогласованы в архитектурных, инженерных и мебельных конструкциях. Абсолютно новым моментом является именно построение пограничных слоев около зон присоединения стержней к пластине. Эти слои описываются решениями задачи теории упругости в объединении Ξ^j единичного слоя и полубесконечного цилиндра (разд. 5). Упомянем статьи [17–19] и [20], где изучены скалярные краевые задачи на сочленении Π^h и подобных ему, но подчеркнем, что для них исследование решений задачи Неймана на неограниченной области Ξ^j весьма просто, а значит, и сама процедура построения асимптотики существенно отличается от представленной далее для векторной задачи.

2. Двумерная модель пластины. Классическая модель Кирхгофа — Лява изгиба тонкой пластины (см. [21–26] и др.), закрепленной вдоль края, состоит из бигармонического уравнения Софи Жермен [27, § 30] в области $\omega_0 \subset \mathbb{R}^2$, снабженного двойным условием Дирихле на ее границе,

$$A_0 \Delta_y^2 w_3(y) = g\rho, \quad y \in \omega_0, \tag{8}$$

$$w_3(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_3(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0. \tag{9}$$

Здесь ∂_{n^p} — производная вдоль внешней нормали $n^p = \left(n_1^p, n_2^p\right)^\top$ на границе области $\omega_p \subset \mathbb{R}^2$. Кроме того, приведенная цилиндрическая жесткость пластины, а также используемые далее измененная постоянная Ламе, коэффициент Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$ и фундаментальное решение бигармонического оператора на плоскости выглядят так:

$$A_0 = \frac{\mu}{3}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \ \lambda_0 = \frac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu} \le \lambda, \ \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}, \ \Phi_3(y) = \frac{1}{8\pi}|y|^2 \ln\frac{1}{|y|}. \tag{10}$$

Задача (8), (9) имеет единственное решение $w_3 \in C^\infty(\overline{\omega_0})$.

Обозначим через $G^j \in H^2(\omega_0)$ функцию Грина задачи (8), (9) с особенностью в точке P^j, т. е.

$$G^j(y) = A_0^{-1}\Phi_3(y^j) + G_0^j(y), \quad G_0^j \in C^\infty(\overline{\omega_0}). \tag{11}$$

Матрица $\mathbf{G} = \big(G_0^j(P^k)\big)_{j,k=1}^J$ размером $J\times J$ симметрична и положительно определенна, так как

$$A_0\big(\Delta_y G^j, \Delta_y G^k\big)_{\omega_0} = A_0 \lim_{R\to+0} \int\limits_{\mathbb{S}^1_R(P^j)} \left(\frac{\partial G^k}{\partial r_j}(y)\Delta_y G^j(y) - G^k(y)\frac{\partial}{\partial r_j}\Delta_y G^j(y)\right) ds_y = G^k(P^j).$$

Известная процедура понижения размерности в тонкой пластине (см. [28–32], список далеко не полный) обычно использует асимптотический анзац

$$u^h_{(0)}(y,z) = \mathbf{W}^h_{(0)}(\zeta,\nabla_y)w(y) + \dots := \sum_{k=0}^4 h^{k-2}\mathscr{W}^k_{(0)}(\zeta,\nabla_y)w(y) + \dots, \tag{12}$$

где многоточие заменяет младшие асимптотические члены, $\zeta = h^{-1}(z-h/2) \in (-1/2,1/2)$ — растянутая поперечная координата, столбец $w = (w_1,w_2,w_3)^\top$ содержит осредненные по толщине пластины продольные смещения и ее прогиб, а (3×3)-матрицы $\mathscr{W}^k_{(0)}$ дифференциальных операторов заданы равенствами

$$\mathscr{W}^0_{(0)}w(y) = e_{(3)}w_3(y), \quad \mathscr{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)w(y) = \sum_{p=1}^2 e_{(p)}\left(w_p(y) - \zeta\frac{\partial w_3}{\partial y_p}(y)\right),$$

$$\mathscr{W}^2_{(0)}(\zeta,\nabla_y)w(y) = -e_{(3)}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\zeta\sum_{p=1}^2\frac{\partial w_p}{\partial y_p}(y) - \left(\frac{\zeta^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\Delta_y w_3(y)\right), \tag{13}$$

$$\mathscr{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)w(y) = \mathscr{X}^0(\zeta)\begin{pmatrix} \partial/\partial y_1 & 0 & 2^{-1/2}\partial/\partial y_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial y_2 & 2^{-1/2}\partial/\partial y_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \partial^2/\partial y_1^2 & 2\partial^2/\partial y_1\partial y_2 & \partial/\partial y_2^2\end{pmatrix}^\top w(y). \tag{14}$$

Последний член суммы из (12) и полное выражение для (3×6)-матрицы $\mathscr{X}^0(\zeta)$ не понадобятся, но их можно найти, например, в [31, гл. 4, § 2] или, как и все другие формулы этого и очередного разделов, в любых других монографиях по технической и математической теориям тонких упругих тел. В разд. 5 будут востребованы только две компоненты названной матрицы, а именно,

$$\mathscr{W}^1_{(0)i}(\zeta,\nabla_y)e_{(3)}w_3(y) = \frac{1}{6}\left(\frac{3\lambda+4\mu}{\lambda+2\mu}\zeta^3 - \frac{11\lambda+12\mu}{\lambda+2\mu}\frac{\zeta}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y_i}\Delta_y w_3, \quad i=1,2. \tag{15}$$

Вектор осредненных продольных смещений $w' = (w_1,w_2)^\top$ пластины находится из двумерной системы уравнений Ламе с краевыми условиями Дирихле

$$L'(\nabla_y)w'(y) := -\mu\Delta_y w'(y) - (\mu+\lambda_0)\nabla_y\nabla_y^\top w'(y) = f'(y), \quad y\in\omega_0, \tag{16}$$

$$w'(y) = g'(y), \quad y\in\partial\omega_0. \tag{17}$$

Из-за принятого способа нагружения далее будет востребовано только сингулярное решение плоской задачи теории упругости (16), (17) при $f'=0$: влияние стержней описывается при помощи фундаментальной матрицы для двумерной системы Ламе (тензор Сомилианы), имеющей вид

$$\Phi'(y) = (\Phi'^1(y),\Phi'^2(y)) = \Phi^0\ln r + \Phi^1(\varphi), \tag{18}$$

где $(r,\varphi)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{S}_1^1$ — система полярных координат, а симметричные (2×2)-матрицы, неособенная числовая Φ^0 и гладкая Φ^1 на единичной окружности $\mathbb{S}_1^1$, не понадобятся.

3. Одномерная модель стержней. Асимптотический анализ (см. [33–35, 31, 32] и др.) задачи теории упругости для тонкого стержня, включающий классическую процедуру понижения размерностей, использует следующий асимптотический анзац для вектора смещений:

$$u^h_{(j)}(y^j,z_j)=\mathbf{W}^h_{(j)}(\eta^j,z,\partial_z)\,w^j(z)+\dots:=\sum_{k=0}^{4}h^{k-2}\mathscr{W}^k_{(j)}(\eta^j,z,\partial_z)w^j(z)+\dots. \tag{19}$$

При этом (3×4)–матрицы $\mathscr{W}^k_{(j)}$ дифференциальных операторов заданы формулами

$$\begin{gathered}\mathscr{W}^0_{(j)}w^j(z)=\sum_{p=1}^{2}e^j_{(p)}w^j_p(z),\\ \mathscr{W}^1_{(j)}(\eta^j,z,\partial_z)\,w^j(z)=d^6(\eta^j)w^j_4(z)+e_{(3)}\left(w^j_3(z)-\sum_{p=1}^{2}\eta^j_p\frac{\partial w^j_p}{\partial z}(z)\right),\\ \mathscr{W}^3_{(j)}(\eta^j,z,\partial_z)w^j(z)=\mathscr{X}^j(\eta^j,z)\mathscr{D}(\partial_z)w^j,\\ \mathscr{W}^4_{(j)}(\eta^j,z,\partial_z)w^j(z)=\mathscr{X}^{j\prime}(\eta^j,z)\mathscr{D}(\partial_z)\partial_z w^j(z).\end{gathered} \tag{20}$$

Здесь фигурируют поворот вокруг оси стержня, а именно, последний столбец (3×6)-матрицы

$$d(x)=(d'(x),d^6(x))=(d^\dagger(x),d^{\equiv}(x))=\begin{pmatrix}0&-x_3&0&1&0&-2^{-1/2}x_2\\0&0&-x_3&0&1&2^{-1/2}x_1\\1&x_1&x_2&0&0&0\end{pmatrix}, \tag{21}$$

порождающей три поступательных жестких смещения и три вращательных, а также диагональная матрица $\mathscr{D}(\partial_z)=\operatorname{diag}\{\partial_z^2,\partial_z^2,\partial_z,\partial_z\}$ и (3×4)-матрица $\mathscr{X}(\eta^j,z)$, выглядящая так:

$$\frac12\begin{pmatrix}\nu((\eta^j_1)^2-(\eta^j_2)^2)H_j(z)^4&2\nu\eta^j_1\eta^j_2H_j(z)^4&-2\nu\eta^j_1H_j(z)^2&0\\2\nu\eta^j_2\eta^j_1H_j(z)^4&\nu((\eta^j_2)^2-(\eta^j_1)^2)H_j(z)^4&-2\nu\eta^j_2H_j(z)^2&0\\0&0&0&\sqrt2H_j(z)^4\Psi^j(\eta^j)\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Она включает коэффициент Пуассона ν, профиль $H_j(z)$ и функцию Сен-Венана Ψ^j, т. е. обладающее нулевым средним решение задачи Неймана

$$-\Delta_{\eta^j}\Psi^j(\eta^j)=0,\ \eta^j\in\omega_j,\quad \partial_{n^j}\Psi^j(\eta^j)=\eta^j_2n^j_1(\eta^j)-\eta^j_1n^j_2(\eta^j),\ \eta^j\in\partial\omega_j. \tag{23}$$

Четвертое выражение в списке (20) и (3×4)-матрица $\mathscr{X}^{j\prime}$ по существу далее не понадобятся.

Функции w^1_1, w^1_2 и w^1_3 — осредненные поперечные и продольное смещения в стержне, а w^1_4 — его закручивание. Они удовлетворяют системе Кирхофа — Клебша (см. [21, 36–41] и многие др.) четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающейся в силу ограничений (3),

$$\partial_z^2A^j_k(z)\partial_z^2w^j_k(z)=f^j_k(z),\quad z\in\Upsilon_j:=(-\ell_j,0),\ k=1,2, \tag{24}$$

$$-\partial_zA^j_l(z)\partial_zw^j_l(z)=f^j_3(z),\quad z\in\Upsilon_j,\ l=3,4. \tag{25}$$

Коэффициенты имеют вид

$$
\begin{gathered}
A_k^j(z) = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} H_j(z)^4 \int\limits_{\omega_j} \left(\eta_k^j\right)^2 d\eta^j, \\
A_3^j(z) = \mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} H_j(z)^2 |\omega_j|, \quad A_4^j(z) = \frac{\mu}{2} H_j(z)^4 G(\omega_j)
\end{gathered} \tag{26}
$$

(см., например, [31, гл. 5, § 2]). Здесь фигурируют площадь $|\omega_j|$ и моменты инерции $I_{kk}(\omega_j)$ фигуры ω_j (см. предпоследнюю формулу (3)), а также ее крутильная жесткость [42]

$$
G(\omega_j) = \int\limits_{\omega_j} \left(\left| \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_1^j}(\eta^j) - \eta_2^j \right|^2 + \left| \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta_2^j}(\eta^j) + \eta_1^j \right|^2 \right) d\eta^j. \tag{27}
$$

Краевые условия (6) порождают следующие условия в нижних концах отрезков Υ_j:

$$
A_k^j(z_j)\partial_{z_j}^2 w_k^j(z_j)\big|_{z_j=-\ell_j} = 0, \quad \partial_{z_j} A_k^j(z_j)\partial_{z_j}^2 w_k^j(z_j)\big|_{z_j=-\ell_j} = 0, \quad k = 1, 2, \tag{28}
$$

$$
A_l^j(z_j)\partial_{z_j} w_l^j(z_j)\big|_{z_j=-\ell_j} = 0, \quad l = 3, 4. \tag{29}
$$

Условия в точках $z_j = 0$ будут найдены в результате асимптотического анализа.

4. Классический пограничный слой около кромки пластины. В разд. 6 в качестве главных членов асимптотики на пластине решения задачи (4)–(6) будет взята сумма

$$
u_{(0)}^h(x) = \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)}(w_3(y) + h w_3^\circ(y)) + \ldots, \tag{30}
$$

где дифференциальный оператор $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)$ определен формулами (12), (13), w_3 — решение задачи (8), (9), а функцию w_3° еще предстоит найти. Анзац (30) годится только вне окрестностей кромки Γ_0^h и примыкающих к пластине торцов $\Gamma_j^h = \omega_j^h(0)$ стержней (2). Вблизи этих множеств необходимо построить пограничные слои — двумерный и трехмерный. Обсудим первый из них.

При рассмотрении кромки пластины воспроизведем подход и результаты работы [43]. В окрестности $\mathscr{U}$ дуги $\partial\omega_0$ введем локальные криволинейные координаты (n, s), где n — ориентированное расстояние до $\partial\omega_0$, $n < 0$ в $\omega_0 \cap \mathscr{U}$, а s — длина дуги, измеренная вдоль контура против часовой стрелки. Соответственно $e_{(n)}$, $e_{(s)}$ и $e_{(z)} = e_{(3)}$ — орты осей n, s и z. Сохраним масштаб для координаты s и введем растянутые координаты $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)^\top = h^{-1}(n, z - h/2)$, которые далее интерпретируем как декартовы. Замена $x \mapsto (\mathbf{y}, s)$ и формальный переход к $h = 0$ трансформируют область (1) в прямое произведение $\mathbf{P}_- \times \partial\omega_0$, а задачу (4)–(6), суженную на пластину Ω_0^h, — в следующие двумерные, плоскую и антиплоскую (см. [38]), смешанные краевые задачи теории упругости на полуполосе $\mathbf{P}_- = \{\mathbf{y} : \mathbf{y}_1 < 0, |\mathbf{y}_2| < 1/2\}$ с параметром $s \in \partial\omega_0$:

$$
\begin{gathered}
-\mu \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{v}^{\#}(\mathbf{y}) - (\lambda + \mu) \nabla_{\mathbf{y}} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v}^{\#}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{P}_-, \\
\mathbf{v}^{\#}(0, \mathbf{y}_2) = \mathbf{g}^{\#}(\mathbf{y}_2), \quad |\mathbf{y}_2| < \frac{1}{2}, \\
\mu \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) + \mu \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) = 0, \; (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) + \lambda \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{y}_1}(\mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y}_1 < 0, \; \mathbf{y}_2 = \pm\frac{1}{2},
\end{gathered} \tag{31}
$$

$$-\mu\Delta_{\mathbf{y}}\mathbf{v}_s(\mathbf{y}) - 0,\ \mathbf{y}\in\mathbf{P}_-,\quad \mu\frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial\mathbf{y}_2}(\mathbf{y}) = 0,\ \mathbf{y}_1<0,\ \mathbf{y}_2=\pm\frac{1}{2},$$
$$\mathbf{v}_s(0,\mathbf{y}_2) = \mathbf{g}_s(\mathbf{y}_2),\quad |\mathbf{y}_2|<\frac{1}{2}. \tag{32}$$

Здесь $\mathbf{v}^{\#} = (\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_z)^\top$ и $\mathbf{v}_s$ — соответственно вектор продольных смещений и поперечное смещение (депланация) в плоскостях, перпендикулярных боковой поверхности Γ_0^h пластины Ω_0^h.

Согласно определениям (13) и соотношениям (9), а также предугаданному равенству

$$w_3^\circ(y) = 0,\quad y\in\partial\omega_0, \tag{33}$$

члены порядков h^{-2} и h^{-1} в анзаце (13) удовлетворяют краевым условиям (5) на Γ_0^h, но член порядка $h^0=1$ оставляет невязку, которую следует компенсировать слагаемым $h^0\mathbf{v}(\mathbf{y},s)$, отыскиваемым из задач (31) и (32) с такими правыми частями:

$$\mathbf{g}_z(\mathbf{y}_2) = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\mathbf{y}_2^2}{2}-\frac{1}{24}\right)\Delta_y w_3(0,s),\ \mathbf{g}_n(\mathbf{y}_2) = -\mathbf{y}_2\frac{\partial w_3^\circ}{\partial n}(0,s),\ \mathbf{g}_s(\mathbf{y}_2)=0.$$

Здесь функции w_3 и w_3° записаны в локальных координатах (n,s), а их след на $\partial\omega_0$ отвечает значению $n=0$. Понятно, что $\mathbf{v}_s=0$. Кроме того, как показывает теория Кондратьева [44] (подробности см. в статье [43], а также в [45, гл. 5, § 7] и [46, пример 1.12 и теорема 3.4]) существует решение задачи (31), представимое в виде

$$\mathbf{v}^{\#}(\mathbf{y}) = \mathbf{K}_n(\nu)e_{(n)} + \mathbf{K}_z(\nu)e_{(z)} + (\mathbf{K}(\nu)\Delta_{\mathbf{y}}w_3(0,s) - \partial_n w_3^\circ(0,s))(\mathbf{y}_2 e_{(n)} - \mathbf{y}_1 e_{(z)}) + \widetilde{\mathbf{v}}^{\#}(\mathbf{y}). \tag{34}$$

Остаток $\widetilde{\mathbf{v}}^{\#}(\mathbf{y})$ затухает при $\mathbf{y}_1\to-\infty$ с экспоненциальной скоростью (см. весовые гёльдеровские оценки [47]), $\mathbf{K}_n(\nu)$, $\mathbf{K}_z(\nu)$ и $\mathbf{K}(\nu)$ — некоторые коэффициенты, причем $\mathbf{K}(0)=0$ и $\mathbf{K}(\nu)>0$ при $\nu\in(0,1/2)$ (подробности см. в работе [43]).

Для соблюдения естественного свойства двумерного пограничного слоя — его экспоненциального затухания на удалении от кромки пластины — в первую очередь требуется устранить линейное слагаемое в представлении (34). Постоянные члены учитываются при построении поправок следующего порядка в анзаце (30) (см. разд. 7). Упомянутое первым слагаемое, имитирующее поворот полуполосы $\mathbf{P}_-$ на бесконечности, уничтожается постановкой краевого условия

$$\partial_n w_3^\circ(y) = \mathbf{K}(\nu)\Delta_y w_3(y),\quad y\in\partial\omega_0. \tag{35}$$

Вблизи нижних концов стержней также возникает явление пограничного слоя (см. [48, 49, 34] и др.), которое описывается при помощи решений задачи Неймана для системы Ламе в полуцилиндре $\mathbf{P}_+^j = \omega_j(-\ell_j)\times\mathbb{R}_+$. Сам полуцилиндр $\mathbf{P}_+^j$ получается в результате замены координат $x\mapsto\xi_{(+)}^j = h^{-1}(y^j, z+\ell_j)$. В случае $\partial_z^m H_j(-\ell_j)\neq 0$ при каком-нибудь $m\in\mathbb{N}$ поверхность оказывается «слегка искривленной», но спрямляется в пределе при $h\to+0$. Таким образом, профиль H_j не влияет на старшие члены асимптотики, но значительно усложняет построение младших из-за необходимости учитывать дополнительные невязки в краевых условиях на $\partial\mathbf{P}_+^j\setminus\omega_j(-\ell_j)$. В статье [50] показано, что экспоненциальный характер затухания можно придать пограничному слою путем выбора матриц $\mathscr{X}^j$, $\mathscr{X}^{j\prime}$ и постановки краевых условий (28), (29).

Явные формулы для младших членов в данной статье не нужны, но для упрощения строения степенного пограничного слоя, изучаемого в разд. 5, было введено последнее требование (3).

5. Пограничный слой около зон присоединения стержней к пластине. Сделаем растяжение координат $x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta) = h^{-1}(y - P^j, z - h/2)$ и перейдем формально к $h = 0$. В результате уведем часть границы сочленения Π^h на бесконечность и переделаем его в объединение Ξ^j единичного слоя $\Xi_0 = \{\xi^j : \eta^j \in \mathbb{R}^2, |\zeta| < 1/2\}$ и полуцилиндра $\Xi^j_- = \{\xi^j : \zeta \leq -1/2, \eta^j \in \omega_j\}$. Попутно превратим систему уравнений (4) и краевые условия (6) в задачу

$$L(\nabla_{\xi^j})v^j(\xi^j) = f^j(\xi^j),\ \xi^j \in \Xi^j, \quad B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})v^j(\xi^j) = g^j(\xi^j),\ \xi^j \in \partial\Xi^j, \tag{36}$$

вариационная постановка которой — интегральное тождество [51–53]

$$E(v^j, \psi^j; \Xi_j) = (f^j, \psi^j)_{\Xi_j} + (g^j, \psi^j)_{\partial\Xi_j} \quad \forall\ \psi^j \in \mathfrak{E}_j. \tag{37}$$

Пространство $\mathfrak{E}_j$ получено пополнением линейного множества $C^\infty(\overline{\Xi^j})^3$ (бесконечно дифференцируемые вектор-функции с компактными носителями) по «энергетической» норме $\|v^j; \mathfrak{E}_j\| = (E(v^j, v^j; \Xi_j) + \|v^j; L^2(\mathfrak{K}_j)\|^2)^{1/2}$, где $\mathfrak{K}_j$ — какой-либо непустой компакт в $\overline{\Xi^j}$.

Укажем весовое неравенство Корна [52–56]

$$|||v^j; \Xi_0|||^2 + |||v^j; \Xi^j_-|||^2 \leq K_j(E(v^j, v^j; \Xi^j) + \|v^j; L^2(\mathfrak{K}_j)\|^2) \quad \forall\ v^j \in C^\infty(\overline{\Xi_j})^3,$$

в котором нормы на слое и на полуцилиндре выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}|||v^j; \Xi_0|||^2 = \int\limits_{\Xi_0} \Bigg(\sum_{p=1}^{2} \Bigg(\Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_p} \Bigg|^2 + \Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_{3-p}} \Bigg|^2 \\ + \frac{1}{\mathfrak{R}_0(\xi^j)^2} \Bigg(\Bigg| \frac{\partial v^j_3}{\partial \eta^j_p} \Bigg|^2 + \Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \zeta} \Bigg|^2 \Bigg) + \frac{1}{\mathfrak{R}_0(\xi^j)^2} |v^j_p|^2 \Bigg) \\ + |\partial_\zeta v^j_3|^2 + \mathfrak{R}_9(\xi^j)^{-4} |v^j_3|^2 \Bigg) d\xi^j \quad \text{при} \quad \mathfrak{R}_0(\xi^j) = (1 + \rho_j)(1 + |\ln \rho_j|),\ \rho_j = |\eta^j|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|||v^j; \Xi^j_-|||^2 = \int\limits_{\Xi^j_-} \Bigg(\sum_{p=1}^{2} \Bigg(\Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_p} \Bigg|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^2} \Bigg(\Bigg| \frac{\partial v^j_3}{\partial \eta^j_p} \Bigg|^2 + \Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \zeta} \Bigg|^2 + \Bigg| \frac{\partial v^j_p}{\partial \eta^j_{3-p}} \Bigg|^2 \Bigg) \Bigg) \\ + \Bigg| \frac{\partial v^j_3}{\partial \zeta} \Bigg|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^4} \sum_{p=1}^{2} |v^j_p|^2 + \frac{1}{\mathfrak{R}_j(\xi^j)^2} |v^j_3|^2 \Bigg) d\xi^j \quad \text{при} \quad \mathfrak{R}_j(\xi^j) = 1 + |\zeta|.\end{aligned}$$

Заметим, что поворот вокруг оси ζ, т. е. последний столбец $d^6(\xi^j)$ матрицы (21), не принадлежит введенному пространству, так как для него расходится интеграл по слою. Нетрудно проверить (см., например, публикации [52, 56]), что остальные жесткие смещения, т. е. пять столбцов (3×5)-блока $d'(\xi^j)$, для которых все интегралы сходящиеся, попадают в пространство $\mathfrak{E}_j$, так как могут быть приближены финитными вектор-функциями по энергетической норме. Поскольку билинейная форма из тождества (37) вырождается только на жестких смещениях, сделанные наблюдения вместе с простыми следовыми неравенствами и теоремой Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве приводит к следующему утверждению.

Лемма 1. *Пусть правые части задачи* (36) *подчинены включениям*[1)]

$$\begin{gathered}\mathfrak{R}_0 f_p^j, \mathfrak{R}_0^2 f_3^j \in L^2(\Xi_0), \quad \mathfrak{R}_0 g_p^j, \mathfrak{R}_0^2 g_3^j \in L^2(\partial\Xi_0 \cap \partial\Xi^j),\\ \mathfrak{R}_j^2 f_p^j, \mathfrak{R}_j f_3^j \in L^2(\Xi_-^j), \quad \mathfrak{R}_j^2 g_p^j, \mathfrak{R}_j g_3^j \in L^2(\partial\Xi_-^j \cap \partial\Xi^j)\end{gathered} \tag{38}$$

при $p = 1, 2$ *и пяти условиям ортогональности*

$$\int\limits_{\Xi^j} d'(\xi^j)^\top f^j(\xi^j) d\xi^j + \int\limits_{\partial\Xi^j} d'(\xi^j)^\top g^j(\xi^j)\, ds_{\xi^j} = 0 \in \mathbb{R}^5. \tag{39}$$

Тогда вариационная задача (37) *имеет решение* $v^j \in \mathfrak{E}_j$, *определенное с точностью до слагаемого* $d'(\xi^j)b^{j\prime}$ *для любого столбца* $b^{j\prime} \in \mathbb{R}^5$, *однако при выполнении условий ортогональности* $(v^j, d')_{\mathfrak{K}_j} = 0 \in \mathbb{R}^5$ *оно становится единственным и удовлетворяет оценке* $\|v^j; \mathfrak{E}_j\| \le c_{\mathfrak{K}}^j \mathfrak{N}_j$, *где* $\mathfrak{K}_j \subset \overline{\Xi^j}$ *— непустой компакт, а* $\mathfrak{N}_j$ *— сумма норм функций* (38) *в указанных пространствах.*

Если правые части f^j и g^j гладкие, то их дифференциальные свойства передаются решению всюду, кроме ребра $\partial\omega_j \times \{-1/2\}$ на границе $\partial\Xi^j$ (см. [57–59, 51] и [60]).

Известно (см., например, [46, пример 1.12 и предложение 3.2]), что в силу леммы 1 у однородной ($f^j = 0$ и $g^j = 0$) задачи (36) есть двенадцать решений с полиномиальным ростом при $\zeta \to -\infty$ и некоторым вполне определенным поведением в слое (см. ниже).

Число двенадцать есть не что иное, как количество мономов

$$\mathbf{e}_{(3)},\ -z\mathbf{e}_{(1)},\ -z\mathbf{e}_{(2)} \text{ и } \mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{e}_{(2)},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_{(4)}, \tag{40}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{Z}^1(z) = \frac{z}{A_3^j(0)}\mathbf{e}_{(3)},\ \mathbf{Z}^2(z) = \frac{1}{A_1^j(0)}\frac{z^3}{6}\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{Z}^3(z) = \frac{1}{A_2^j(0)}\frac{z^3}{6}\mathbf{e}_{(2)},\\ \mathbf{Z}^4(z) = -\frac{1}{A_1^j(0)}\frac{z^2}{2}\mathbf{e}_{(1)},\ \mathbf{Z}^5(z) = -\frac{1}{A_2^j(0)}\frac{z^2}{2}\mathbf{e}_{(2)},\ \mathbf{Z}^6(z) = 2^{-1/2}\frac{z}{A_4^j(0)}\mathbf{e}_{(4)},\end{gathered} \tag{41}$$

являющихся решениями следующей системы однородных обыкновенных дифференциальных уравнений (24) и (25) с замороженными в точке $z = 0$ коэффициентами:

$$\mathscr{D}(\partial_z)A^j(0)\mathscr{D}(\partial_z)\mathbf{Z}^q(z) = 0, \quad z \in \mathbb{R},\ q = 1, \dots, 6.$$

В формулах (40) и (41) фигурируют орты $\mathbf{e}_{(m)} = (\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m})^\top$ пространства $\mathbb{R}^4$ и диагональная матрица $A^j = \operatorname{diag}\{A_1^j, A_2^j, A_3^j 1, A_4^j\}$. При помощи (3×4)-матрицы $\mathbf{W}_{(j)}^1$ дифференциальных операторов, заданной соотношениями (19), (20) и (22) с параметром $h = 1$, определим по группе мономов (41) следующие вектор-функции с полиномиальным поведением по переменной ζ:

$$\mathscr{Z}_{(j)}^q(\xi^j) = \mathbf{W}_{(j)}^1(\eta^j, \partial_\zeta)\mathbf{Z}^q(\zeta), \quad q = 1, \dots, 6. \tag{42}$$

Нетрудно усмотреть, что, во-первых, формула (42) с первой группой (40) порождает жесткие смещения, т. е. столбцы матрицы (21), и, во-вторых, сами вектор-функции (42) аннулируются оператором $L(\nabla_{\xi^j})$ в целом цилиндре $\omega_j \times \mathbb{R}$ и оператором $B(\eta^j, \nabla_{\xi^j})$ на его поверхности.

[1)] Требования (38) к правым частям можно ослабить.

Ближайшая цель — показать, что поля смещения (42) порождают соответственно продольную и поперечные силы, приложенные на бесконечности в полуцилиндре Ξ^j_-, а также изгибающие и крутящий моменты, и установить существование названных решений в виде

$$\mathscr{V}^q_{(j)}(\xi^j) = \chi_j(\xi^j)\mathscr{Z}^q_{(j)}(\xi^j) + \chi_0(\xi^j)\mathscr{Y}^q(\xi^j) + \widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j), \quad q = 1, \dots, 6, \tag{43}$$

подобрав подходящие вектор-функции $\mathscr{Y}^1, \dots, \mathscr{Y}^6$ в слое. Срезки $\chi_j(\xi^j) = \chi(-\zeta)$ и $\chi_0(\xi^j) = \chi(\rho_j/R_j)$ определены по «эталонной» срезающей функции $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, подчиненной равенствам $\chi(t) = 0$ при $t < 1$ и $\chi(t) = 1$ при $t > 2$, а радиус R_j выбран так, что круг $\mathbb{B}^2_{R_j} = \{\eta^j : \rho_j < R_j\}$ включает множество $\overline{\omega_j}$.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}^q_{jp}(R)$ из формулы

$$\big(\mathfrak{I}^q_{11}(R), \dots, \mathfrak{I}^q_{j6}(R)\big)^\top = \int\limits_{\omega_j} d(\eta^j, R)^\top \sigma^{(\zeta)}\big(\mathscr{Z}^q_{(j)}; \eta^j, -R\big)\, d\eta^j, \quad R > \frac{1}{2}, \tag{44}$$

где $\Sigma^j_R(\mathscr{Z}) := \sigma^{(\zeta)}(\mathscr{Z}) = (\sigma_{13}(\mathscr{Z}), \sigma_{23}(\mathscr{Z}), \sigma_{33}(\mathscr{Z}))^\top$ — вектор нормальных напряжений на сечении $\omega_j(-R)$ цилиндра. Сначала рассмотрим наиболее важные для дальнейшего интегралы (44) при $p = 1$. В силу соотношений (20), (22) и предположений (3) имеем

$$\begin{aligned}\Sigma^j_R\big(\mathscr{Z}^1_{(j)}; \eta^j\big) &= \frac{1}{A^j_3(0)} e_{(3)} \bigg(\lambda + 2\mu + \lambda\bigg(\frac{\partial \mathscr{X}_{13}}{\partial \eta^j_1}(\eta^j) + \frac{\partial \mathscr{X}_{13}}{\partial \eta^j_1}(\eta^j)\bigg)\bigg)\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta} \\ &= \frac{\mu}{A^j_3(0)} \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \Rightarrow \mathfrak{I}^1_{j1}(R) = 1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}^1_{jm}(R) = 0 \text{ при } m = 2, \dots, 6. \end{aligned}\tag{45}$$

Чуть более сложные выкладки при учете формул (27) и (26) нужны для вывода равенств

$$\mathfrak{I}^6_{j6}(R) = 1 \quad \text{и} \quad \mathfrak{I}^6_{jm}(R) = 0 \text{ при } m = 1, \dots, 5, \tag{46}$$

так как $\Sigma^j_R\big(\mathscr{Z}^6_{(j)}; \eta^j\big) = \mu(d^6(\eta^j, 0) + 2^{1/2}(\nabla^\top_{\eta^j}, 0)^\top \Psi^j(\eta^j))$ и

$$\begin{aligned} A^j_4(0)\mathfrak{I}^6_{j6}(R) &= \frac{\mu}{2}\int\limits_{\omega_j}\bigg(\big|\eta^j_2\big|^2 + \big|\eta^j_1\big|^2 - \eta^j_2 \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta^j_1}(\eta^j) + \eta^j_1 \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta^j_2}(\eta^j)\bigg)\, d\eta^j \\ &= \frac{\mu}{2} G(\omega_j) - \frac{\mu}{2}\int\limits_{\omega_j}\bigg(|\nabla_{\eta^j}\Psi^j(\eta^j)|^2 - \eta^j_2 \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta^j_1}(\eta^j) + \eta^j_1 \frac{\partial \Psi^j}{\partial \eta^j_2}(\eta^j)\bigg)\, d\eta^j = A^j_4(0), \end{aligned}$$

причем последний интеграл обратился в нуль благодаря формуле Грина и соотношениям (23).

Далее при $p = 1, 2$ и $m = 1, \dots, 6$ находим, что интеграл $\mathfrak{I}^{3+p}_{jm}(R)$ принимает вид

$$\begin{aligned} &\int\limits_{\omega_j} d^m(\eta^j, -R)^\top \Sigma^j_R\big(\mathscr{Z}^{3+p}_{(j)}; \eta^j\big)\, d\eta^j \\ &\qquad = \delta_{3+p,m}\int\limits_{\omega_j}\big(0, 0, (\lambda + 2\mu - 2\lambda\nu)\eta^j_p\big)\big(Re_{(p)} + \eta^j_p e_{(3)}\big) d\eta^j = \delta_{3+p,m}. \end{aligned}\tag{47}$$

Наконец, последняя группа нужных равенств

$$\mathfrak{I}^{1+p}_{jm}(R) = \delta_{1+p,m}, \quad p = 1, 2, \ m = 1, \dots, 6,$$

требует более длинных вычислений, поскольку для мономов $\mathbf{Z}^{1+p}$ третьей степени из списка (41) вектор нормальных напряжений $\Sigma_R^j\big(\mathscr{Z}_{(j)}^{1+p};\eta^j\big)$ зависит от третьей строки матрицы $\mathscr{X}'$, для которой громоздкое явное выражение не приведено. Поэтому приходится так же, как, например, в [31, гл. 5, § 1, 2], принять во внимание тот факт, что нужные элементы упомянутой матрицы находятся из задачи Неймана для оператора Лапласа в области ω_j, и после неоднократного интегрирования по частям свести искомую величину к интегралу от $\big(\eta_p^j\big)^2$ с тем же множителем, что и в формуле (47). Соответствующие выкладки воспроизводить не будем по нескольким причинам. Во-первых, далее по существу используется только формула (45). Во-вторых, в [31, гл. 5, § 3] даже для анизотропных стержней разработан вполне элементарный способ вычисления искомых интегралов. Более того, в статье [61] для общих краевых задач в случае формально самосопряженных эллиптических систем второго порядка в цилиндрах установлена простая взаимосвязь между формулами Грина для исходной задачи и ее одномерной моделью. Выкладки (44)–(47) приведены для того, чтобы сделать понятными дальнейшие рассуждения.

Как упоминалось, поведение решений задачи (36) в цилиндрическом выходе на бесконечность изучается при помощи теории Кондратьева [44] (см. также [45, гл. 3, 6] и [46, § 3], которая к тому же обслуживает угловые и конические области, однако выход на бесконечность в виде слоя не подпадает под эту теорию. В статьях [62–65] и [53] был разработан подход к построению разложений конкретных задач математической физики в секторе слоя и, в частности, в целом слое. Важное наблюдение: для упругого слоя алгоритм построения разложений на бесконечности в Ξ_0 совпадает с процедурой понижения размерности для пластины Ω_0^h из разд. 2.

Введем аналогичный (41) набор решений двумерной модели (8), (16)

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}^1(y)=-\Phi(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^2(y)=\Phi(y)e_{(1)},\ \mathbf{Y}^3(y)=\Phi(y)e_{(2)},\ \text{а также}\\ \mathbf{Y}^4(y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^5(y)=\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}(y)e_{(3)},\ \mathbf{Y}^6(y)=\big(d^6(-\nabla_y^\top,0)^\top\Phi(y)^\top\big)^\top.\end{gathered}\tag{48}$$

Здесь Φ — (3×3)-матрица $\operatorname{diag}\big\{\Phi',A_0^{-1}\Phi_3\big\}$, содержащая тензор Сомилианы и фундаментальное решение оператора $A_0\Delta_y^2$ из формул (18) и (10), а несколько знаков транспонирования возникли из-за согласования порядка записи дифференцирования и произведения матриц. Положим

$$\mathscr{Y}^q(\xi^j)=\mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta,\nabla_{\eta^j})\mathbf{Y}^q(\eta^j),\quad q=1,\dots,6,\tag{49}$$

где матричный оператор $\mathbf{W}_{(0)}^1$ задан формулами (12), (13) при $h=1$. Приведем выкладки, которые в соответствии с определениями (48) придают полям (49) смысл соответственно поперечной и продольных сил, а также изгибающих и крутящего моментов, приложенных на бесконечности в слое Ξ_0. Именно эти поля появляются в представлении (43) искомых решений однородной задачи (36) для неограниченного тела Ξ^j.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}_{0m}^q(R)$ из формулы

$$\big(\mathfrak{I}_{01}^q(R),\dots,\mathfrak{I}_{06}^q(R)\big)^\top=\int\limits_{\circledcirc_R}d(\eta^j,z)^\top\sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y}^q;\xi^j)ds_{\xi^j},\quad R>R_j,$$

где (ρ,φ,ζ) — цилиндрические координаты, а $\circledcirc_R=\mathbb{S}_R^1\times(-1/2,1/2)$ — конечная цилиндрическая поверхность, на которой вектор нормальных напряжений

$\Sigma_R^0(\mathscr{Y}) = \sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y})$ имеет вид

$$\sigma^{(\rho)}(\mathscr{Y}) = \sigma^{(1)}(\mathscr{Y})\cos\varphi + \sigma^{(2)}(\mathscr{Y})\sin\varphi,$$

причем $\sigma^{(k)}(\mathscr{Y}) = (\sigma_{k1}(\mathscr{Y}), \sigma_{k2}(\mathscr{Y}), \sigma_{k3}(\mathscr{Y}))^\top$.

Начнем с наиболее важных интегралов при $q = 1$. Согласно формулам (13) и (15) имеем

$$\begin{gathered}\sigma_{ki}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = 2\zeta\frac{\mu}{A_0}\left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta_i^j\partial\eta_k^j}(\eta^j) + \delta_{k,i}\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j)\right) + O\left(\frac{1}{\rho_j}\right),\\ \sigma_{k3}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = \frac{\mu}{A_0}\,\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\left(\frac{1}{2} - 2\zeta^2\right)\frac{\partial}{\partial\eta_k^j}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j), \quad k,i = 1,2.\end{gathered} \tag{50}$$

Проинтегрировав по $\zeta \in (-1/2, 1/2)$, выводим с учетом равенства $\partial_{\rho_j} = \cos\varphi\partial_{\eta_1^j} + \sin\varphi\partial_{\eta_2^j}$, что

$$\mathfrak{I}_{01}^1(R) = \frac{\mu}{A_0}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\left(\frac{1}{2}-2\zeta^2\right)d\zeta\int\limits_{\mathbb{S}_R^1}\frac{\partial}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\Phi_3(\eta^j)ds_{\eta^j}+O\left(\frac{1}{R}\right) = 1+O\left(\frac{1}{R}\right).$$

Интеграл по окружности вычислен согласно третьей формуле (10). Равенства $\mathfrak{I}_{0m}^1(R) = O(R^{-1})$ при $m = 2,\dots,5$ вытекают непосредственно из соотношений (50), но в случае $m = 6$ нужно дополнительно принять во внимание свойство нечетности по одной из переменных η_i^j.

Вычислим интегралы $\mathfrak{I}_{0m}^{3+p}(R)$ при $p = 1,2$. Выражения для напряжений $\sigma_{kq}(\mathscr{Y}^{p+3};\xi^j)$ получаются дифференцированием правых частей (50) по $-\eta_p^j$. Заметим, что

$$\cos\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial(\eta_1^j)^3} + \sin\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial\eta_2^j\partial(\eta_1^j)^2} = \cos\varphi\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_1^j} - \underbrace{\left(\cos\varphi\frac{1}{\partial\eta_2^j} - \sin\varphi\frac{1}{\partial\eta_1^j}\right)}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta_1^j\partial\eta_2^j},$$

$$\cos\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial\eta_1^j\partial(\eta_2^j)^2} + \sin\varphi\frac{\partial^3\Phi_3}{\partial(\eta_2^j)^3} = \sin\varphi\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_2^j} + \underbrace{\left(\cos\varphi\frac{1}{\partial\eta_2^j} - \sin\varphi\frac{1}{\partial\eta_1^j}\right)}\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial\eta_1^j\partial\eta_2^j},$$

где фигурной скобкой снизу выделено дифференциальное выражение $\rho_j^{-1}\partial_\varphi$, исчезающее после интегрирования вдоль окружности. В итоге формула (10) для Φ_3 показывает, что

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{03+p}^{3+p}(R) = \frac{4\mu}{A_0}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\int\limits_{\mathbb{S}_R^1}&\frac{\partial\eta_p^j}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_p^j}(\eta^j)\,ds_{\eta^j}\\ &-\int\limits_{\mathbb{S}_R^1}\eta_p^j\frac{\partial}{\partial\rho_j}\Delta_{\eta^j}\frac{\partial\Phi_3}{\partial\eta_p^j}(\eta^j)\,ds_{\eta^j} + O\left(\frac{1}{R}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{R}\right).\end{aligned}$$

Кроме того, учитывая свойство нечетности подынтегрального выражения по одной из переменных η_k^j или ζ, обнаруживаем, что $\mathfrak{I}_{0m}^{3+p}(R) = O(R^{-1})$, $m = 1,\dots,6$, $m \neq 3+p$.

Интегралы $\mathfrak{I}_{0m}^{1+p}(R)$ при $p = 1,2$ находятся при помощи соотношений

$$\sigma_{ki}(\mathscr{Y}^{1+p};\xi^j) = \sigma'_{ki}(\Phi' e_{(p)};\eta^j) + O\big(\rho_j^{-2}\big), \quad \sigma_{k3}(\mathscr{Y}^1;\xi^j) = O\big(\rho_j^{-2}\big), \quad k,i = 1,2,$$

и выкладки, в которой интегралы понимаются в смысле теории обобщенных функций (см., например, [66]), придающей смысл равенству $L'(\nabla_y)\Phi'(y) = \mathbb{I}_2\delta(y)$ с дельта-функцией Дирака:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}^{1+p}_{0m}(R) &= \int\limits_{-1/2}^{1/2} d\zeta \int\limits_{\mathbb{S}^1_R} e'^{\top}_{(m)}\sigma'^{(\rho_j)}(\Phi' e_{(p)};\eta^j)\,ds_{\eta^j} + O\left(\frac{1}{R}\right)\\ &= \int\limits_{\mathbb{B}^2_R} e'^{\top}_{(m)}L'(\nabla_y)\Phi'(\eta^j)e_{(p)}\,d\eta^j + O\left(\frac{1}{R}\right)\\ &= \delta_{1+p,m} + O(R^{-1}),\ m=2,3,\quad \mathfrak{I}^{1+p}_{0m}(R) = O(R^{-1}),\ m=1,4,5,6.\end{aligned}$$

Здесь $e'_{(m)} = \big(\delta_{1,m},\delta_{2,m}\big)^{\top}$ и $\sigma'^{(\rho_j)}(\Phi'^p)$ — вектор нормальных напряжений на окружности, найденный по двумерному тензору напряжений $(\sigma'_{ki}(\Phi'^p))^2_{k,i=1}$ с постоянными Ламе λ_0 и μ.

Наконец, последние из нужных равенств $\mathfrak{I}^6_{0m}(R) = \delta_{6,m} + O(R^{-1})$ при $m = 1,\dots,6$ выводятся при учете определения функции Дирака и вытекающего из него соотношения

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{B}^2_R} d^{6\prime}(\eta^j)^{\top}L'(\nabla_{\eta^j})(d^{6\prime}(-\nabla_{\eta^j})^{\top}\Phi'(\eta^j)^{\top})^{\top}d\eta^j &= \int\limits_{\mathbb{B}^2_R} d^{6\prime}(\eta^j)^{\top}d^{6\prime}(-\nabla_{\eta^j})\delta(\eta^j)\,d\eta^j\\ &= \int\limits_{\mathbb{B}^2_R}\delta(\eta^j)\,d^{6\prime}(\nabla_{\eta^j})^{\top}d^{6\prime}(\eta^j)d\eta^j = \int\limits_{\mathbb{B}^2_R}\delta(\eta^j)\,d\eta^j = 1.\end{aligned}$$

При этом $d^{6\prime}(y) = 2^{-1/2}(-y_2,y_1)^{\top}$ — укороченный последний столбец матрицы (21), а равенство $d^{6\prime}(\nabla_y)^{\top}d^{6\prime}(y) = 1$ выполнено благодаря множителям $2^{-1/2}$ в определении (21).

Теперь сформулируем центральное утверждение раздела.

Теорема 1. *Однородная задача* (36) *имеет шесть решений* (30) *с асимптотическими членами* (42), (49) *и «энергетическим» слагаемыми* $\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)} \in \mathfrak{E}_j$, *допускающими представления*

$$\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j) = \chi_j(\xi^j)\,d(\xi^j)t^q_{(j)} + \chi_0(\xi^j)\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_{\eta^j})\mathscr{T}^q_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi(\eta^j) + \widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j).$$

При этом столбец $t^q_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ *и коэффициенты дифференциальных операторов*

$$\begin{gathered}\mathscr{T}^q_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi = \begin{pmatrix}\mathscr{T}^{q1}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi'^i + \mathscr{T}^{q2}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi'^2\\ \big(T^{q3}_{(j)11}\partial^2_{\eta^j_1} + 2T^{q3}_{(j)12}\partial_{\eta^j_1}\partial_{\eta^j_2} + T^{q3}_{(j)22}\partial^2_{\eta^j_2}\big)\Phi_3\end{pmatrix},\\ \mathscr{T}^{qk}_{(j)}(\nabla_{\eta^j}) = \begin{pmatrix}T^{qk}_{(j)1}\partial_{\eta^j_1} + T^{qk}_{(j)0}\partial_{\eta^j_2}\\ T^{qk}_{(j)0}\partial_{\eta^j_1} + T^{qk}_{(j)2}\partial_{\eta^j_2}\end{pmatrix}\end{gathered}\tag{51}$$

зависят от индексов $q = 1,\dots,6$, $j = 1,\dots,J$ (*и* $k = 1,2$), *остаток* $\widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)}(\xi^j)$ *исчезает с экспоненциальной скоростью на бесконечности в цилиндре* Ξ^j_- *вместе со своими производными, а в слое* Ξ_0 *при всех* $\alpha' = (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{N}^2_0$ *и* $\alpha_3 \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}$ *для него выполнены оценки*

$$\big|\partial^{\alpha_3}_{\zeta}\nabla^{\alpha'}_{\eta^j}\widetilde{\mathscr{V}}^q_{(j)m}(\xi^j)\big| \le C_{l\alpha}\rho_j^{\delta_{m,3}-2-\alpha_1-\alpha_2}(1+(1-\delta_{m,3})|\ln\rho_j|),\quad \rho_j > R_j,\ m=1,2,3.\tag{52}$$

Кроме того, компоненты $\varepsilon_{ik}(\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)})$ *тензора деформаций (и напряжений) исчезают на бесконечности в полуцилиндре с экспоненциальной скоростью, а в слое — как* $O(\rho_j^{-2})$.

Доказательство. Существование решений (30) вытекает из леммы 1 и проделанных вычислений. В самом деле, правые части задач для «энергетических» составляющих $\widehat{\mathscr{V}}^q_{(j)}$ удовлетворяют включениям (38), а интегрирование по частям в усеченном теле $\Xi^j(R) = \{\xi^j : \zeta > -R$ и $\rho_j < R\}$ и предельный переход при $R \to +\infty$ устанавливают равенства (39) при $q = 1, \dots, 5$. Именно последний факт обеспечен предшествующими выкладками, так как внешняя нормаль на сечении $\omega_j(-R)$ и на цилиндрической поверхности $\circledcirc_R$ равна $-e_{(3)}$ и $\rho_j^{-1}\eta^j$ соответственно, а значит, интегралы по этим частям границы взаимно уничтожаются в пределе. Кроме того, формулы (46) проверяют условия разрешимости (39) в случае $q = 6$.

Асимптотическое представление в цилиндре Ξ^j_- — классический результат[2)] теории Кондратьева [44] (см. также [45, гл. 5] и [47; 46, § 3]), а представление в слое установлено в [53], где, в частности, изложены процедуры построения разложений в бесконечные ряды и вывода оценок асимптотических остатков. Отметим, что жесткое смещение удалено из разложения в слое Ξ_0 и помещено в цилиндр Ξ^j_- (см. слагаемое $\chi_j(\xi^j)d(\xi^j)t^q_{(j)}$), а значит, коэффициенты разложения определены однозначно. В выражение $\chi_0 \mathbf{W}^1_{(0)} \mathscr{T}^q_{(j)} \Phi$ включены все степенно-логарифмические решения $\rho_j^{-1}U'(\varphi)$ двумерной системы Ламе и $U^1_3(\varphi)\ln\rho_j + U^0_3(\varphi)$ бигармонического уравнения за исключением поля, порожденного моментом вращения вокруг оси апликат и имеющегося лишь у решения $\mathscr{Y}^6_{(j)}$, а также вертикального сдвига, переведенного в Ξ^j_-. Наконец, непосредственное вычисление деформаций при учете формул (13), (14) и (51), (52) обеспечивает последнее утверждение теоремы.

Опишем еще один набор решений задачи в неограниченном упругом теле Ξ^j. Пусть $\mathscr{P}(y)$ — векторный полином, который определен похожими на (51) формулами и состоит из линейной вектор-функции $\mathscr{P}'(y) = (\mathscr{P}_1(y), \mathscr{P}_2(y))^\top$, удовлетворяющей системе Ламе, и из квадратного трехчлена $\mathscr{P}_3(y)$, уничтожаемого бигармоническим оператором Δ^2_y. По изложенной схеме строим решение $\mathbf{V}(\mathscr{P}; \xi^j)$ однородной задачи (36), допускающее представление

$$\mathbf{V}_{(j)}(\mathscr{P}; \xi^j) = \chi_0(\xi^j)\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\mathscr{P}(\eta^j) + \mathscr{T}^{\mathscr{P}}_{(j)}(\nabla_{\eta^j})\Phi(\eta^j)) + \chi_j(\xi^j)d(\xi^j)\mathbf{b}^{\mathscr{P}}_{(j)} + \widetilde{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathscr{P}; \xi^j). \quad (53)$$

При этом $\mathbf{b}^{\mathscr{P}}_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ — столбец и $\mathscr{T}^{\mathscr{P}}_{(j)}$ — определенный по формулам (51) дифференциальный оператор, зависящие от полинома $\mathscr{P}$ и индекса j, а для экспоненциально затухающего в полубесконечном цилиндре Ξ^j_- остатка $\widetilde{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathscr{P}; \xi^j)$ верны оценки (52) в слое Ξ_0.

6. Построение главных членов асимптотики. Дополним анзац (30) для сужения u^{h0} решения задачи (4)–(6) на пластину Ω^h_0 асимптотическими анзацами

$$u^h_{(j)}(x) = h^{-2}d^\dagger(y^j, z)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_3(P^j) + h^{-1}d^\dagger(y^j, z)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j}, 0)^\top w^\circ_3(P^j) + h\mathbf{W}^1_{(j)}(\eta^j, \partial_z)\mathbf{e}_{(3)}w^j_3(z) + \dots \quad (54)$$

[2)] Иной подход, впрочем не дающий поточечные экспоненциальные оценки остатков, предложен в [67].

для сужений u^{hj} на стержни Ω^h_j. Здесь $d^\dagger(x)$ и $d^\dagger_{(3)}(x)$ — (3×3)-блок матрицы (21) и его нижняя строка, а w_3 — решение задачи (8), (9). Первое слагаемое анзаца (54)

$$d^\dagger(y^j,z_j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w_3(P^j)$$
$$= e_{(3)}w_3(P^j)+\bigl(y^j_1e_{(3)}-ze_{(1)}\bigr)\partial_{y^j_1}w_3(P^j)+\bigl(y^j_2e_{(3)}-ze_{(2)}\bigr)\partial_{y^j_2}w_3(P^j)$$

есть не что иное, как главный член смещения стержня как жесткого целого, а второе слагаемое еще предстоит определить. Третье слагаемое описывает продольное растяжение стержня под действием силы тяжести, а значит, функция w^j_3 находится из уравнения (25) с индексом $l=3$ и с правой частью $f^j_3(z_j)=g\rho|\omega_j|H_j(z_j)^2$. В силу краевого условия (29) при $l=3$ получаем, что

$$A^j_3(0)\partial_{z_j}w^j_3(0)=F_j:=-g\rho|\omega_j|\int\limits_{-\ell_j}^{0}H_j(z_j)^2\,dz_j. \tag{55}$$

Равенство $w^j_3(0)=0$ полностью фиксирует функцию w^j_3, а h^2F_j — общий вес стержня Ω^h_j.

Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [68, 69; 30, гл. 2] и др.) и в качестве главных членов внутреннего разложения, пригодного в непосредственной близости от торца $\omega^h_j(0)$, за который стержень присоединен к пластине, возьмем сумму

$$u^h(x)=h^{-2}d^\dagger(h\xi^j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w_3(P^j)+h^{-1}d^\dagger(h\xi^j)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w^\circ_3(P^j)$$
$$+hF_j\bigl(\mathscr{V}^1_{(j)}(\xi^j)-(8\pi)^{-1}\ln h\mathbf{V}\bigl(\eta^j\mapsto\rho^2_j;\xi^j\bigr)\bigr)+\dots. \tag{56}$$

Первые два члена согласованы с такими же членами внешних разложений (30) и (54), а третий член, включающий построенное в разд. 5 решение $\mathscr{V}^1_{(j)}$ однородной задачи (36), учитывает его представление (43) в полуцилиндре Ξ^j_- и вытекающую из равенства (55) формулу Тейлора

$$w^j_3(z)=A^j_3(0)^{-1}F^jz+O(z^2)=hA^j_3(0)^{-1}F^j\zeta+O(h^2\zeta^2)\ \text{при}\ z\to-0.$$

Итак, выполнено сращивание разложений (56) и (54). Представления (43) и (53) в слое Ξ_0 вектор-функций $\mathscr{V}^1_{(j)}$ и $\mathbf{V}_{(j)}(\mathscr{P};\cdot)$ при $\mathscr{P}(\eta^j)=\rho^2_j=\bigl(\eta^j_1\bigr)^2+\bigl(\eta^j_2\bigr)^2$, а также соотношение $\Phi_3(\eta^j)=h^{-2}(8\pi)^{-1}r^2_j(\ln h-\ln r_j)$, объясняющее появление множителей h и $\ln h$ в последнем члене анзаца (56), показывают, что сращивание внутреннего и внешнего разложений в теле пластины обеспечивает такие представления поправочного члена w^1_3 анзаца (30) вблизи точек $P^1,\dots,P^J$:

$$w^1_3(y)=d^\dagger(y^j,0)d^\dagger_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^\top w^1_3(P^j)+F^jA^{-1}_0\Phi_3(y^j)+O(r^2_j)\ \text{при}\ r_j\to+0. \tag{57}$$

Благодаря определению (11) функций Грина G^j решение однородного уравнения (8) в проколотой области $\omega_0\setminus\{P^1,\dots,P^J\}$, удовлетворяющее соотношениям (57), принимает вид

$$w^\circ_3(y)=w^\bullet_3(y)+F_1G^1(x)+\dots+F_JG^J(x),$$

где $w^\bullet_3\in C^\infty(\overline{\omega_0})$ — бигармоническая функция, подчиненная краевым условиям (33) и (35).

Окончательно поправочный член в асимптотике жестких смещений стержней выглядит так:

$$d^{\dagger}_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^{\top} w_3^{\circ}(P^j)$$
$$= d^{\dagger}_{(3)}(\nabla_{y^j},0)^{\top}\left(w_3^{\bullet}(y) + \sum_{k=1}^{J} F_k\big(G_0^k(y) + (1-\delta_{j,k})\Phi_3(y-P^k)\big)\right)\Bigg|_{y=P^j}.$$

7. Младшие члены асимптотики. Из-за введенных в разд. 1 требований геометрической симметрии старшие члены асимптотики, построенные в предыдущем разделе, указывают на вертикальную деформацию элементов сочленения Π^h, а именно, прогиб пластины и смещение стержней вниз с поворотом и продольным растяжением. Покажем, что очередные асимптотические члены порождают и иные типы деформаций пластины и стержней.

В первую очередь вспомним, что нужно еще соблюсти условия экспоненциального затухания пограничного слоя около кромки пластины, т. е. устранить слагаемые $K_z(\nu)e_{(z)}$ и $K_n(\nu)e_{(n)}$ из представления (34) вектора $\mathbf{v}^{\#}$. Если первое слагаемое учитывается постановкой краевого условия

$$w_3^2(y) = -K_z(\nu)\Delta_y w_3(y), \quad y\in\partial\omega_0,$$

в задаче для еще одного поправочного члена $h^2 w_3^2(y)$ из анзаца (30), то второе слагаемое требует введения члена $hw^{1\prime}(y)$, в котором вектор-функция $hw^{1\prime} = h\big(w_1^1, w_1^1\big)^{\top}$ является решением однородной ($f'=0$) двумерной системы Ламе (16) с данными Дирихле

$$w_n^1(y) = -K_z(\nu)\Delta_y w_3(y), \quad w_s^1(y)=0, \quad y\in\partial\omega_0,$$

и описывает продольную деформацию пластины. Справедлива формула Тейлора

$$w^{1\#}(y) = w^{1\#}(P^j) + \sum_{p,q=1}^{2} y_p^j \frac{\partial w_q^1}{\partial y_p^j}(P^j) + O(r_j^2) \text{ при } r_j\to+0, \tag{58}$$

старшие члены которой подлежат сращиванию с внутренним разложением в окрестности торца $\overline{\omega_j^h(0)} = \partial\Omega_0^h \cap \overline{\partial\Omega_j^h}$. К анзацу (30) присоединяем выражение $h\mathbf{W}^1_{(0)}\big(w_1^1, w_2^1, 0\big)^{\top}$, а составляющие, порожденные линейной частью формулы (58), разобьем на группы

$$\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\left(\sum_{p=1}^{2} w_p^1(P^j)e_{(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2^1}{\partial y_1^j}(P^j) - \frac{\partial w_1^1}{\partial y_2^j}(P^j)\right)\begin{pmatrix} cY^-(y^j)\\ 0\end{pmatrix}\right) \tag{59}$$

и

$$\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\left(\sum_{p=1}^{2} \frac{\partial w_p^1}{\partial y_p^j}(P^j) y_p^j e_{(p)} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2^1}{\partial y_1^j}(P^j) + \frac{\partial w_1^1}{\partial y_2^j}(P^j)\right)\begin{pmatrix} Y^+(y^j)\\ 0\end{pmatrix}\right). \tag{60}$$

Здесь $Y^{\pm}(y) = (\pm y_2, y_1)^{\top}$. Сумма (59) — жесткое продольное смещение $d^{\equiv}(y,0)b^{\equiv}$ с подходящим столбцом $b^{\equiv}\in\mathbb{R}^3$. Сумма (60), которую обозначим через $\mathbf{W}^1_{(0)}(\zeta,\nabla_y)\mathscr{P}_{(1j)}(y^j)$, — линейная вектор-функция, порождающая продольные деформации пластины в точке P^j. Таким образом, внутреннее разложение (56) следует дополнить слагаемым (59) и построенным в конце разд. 5 полем

$h^2\mathbf{V}(\mathscr{P}_{(1j)};\xi^j)$, которое в силу представления (53) вызывает дополнительное жесткое смещение $h^2 d(hy^j,hz)\mathbf{b}^{\mathscr{P}_{(1j)}}$ стержня Ω^h_j, вообще говоря, включающее его закручивание. Впрочем, в анзац для $u^{hj}=u^h\big|_{\Omega^h_j}$ уже пришлось включить аналогичное поле

$$-(8\pi)^{-1}F^j h\ln h\, d(hy^j,hz)\mathbf{b}^{\eta^j\mapsto\rho_j^2}_{(j)} \tag{61}$$

из-за вычитаемого во внутреннем разложении (56) в зоне присоединения стержня к пластине. Особое внимание обратим на логарифмический множитель в выражении (61) (см. разд. 8).

Напрашивается вывод: у всех членов внутреннего разложения около торца $\omega^h_j(0)$, кроме последнего слагаемого в (56), в представлении на полуцилиндре Ξ^j_- фигурируют только линейные вектор-функции вида $d(\xi^j)b^{\cdots}$ (как обычно, в асимптотических рядах по степеням малого параметра h игнорируем слагаемые, затухающие на бесконечности с экспоненциальной скоростью). Этот вывод может быть оспорен только по двум причинам. Во-первых, даже для цилиндрических (т. е. $H_j=1$ в определении (2)) стержней унаследованная от анзаца (19) асимптотическая конструкция

$$w^j_3(z_j)e_{(3)}-\nu\sum_{p=1}^{2}\eta^j_p\partial_{z_j}w^j_3(z_j)e_{(p)}+\mathscr{X}'^3(\eta^j)\partial^2_{z_j}w^j_3(z_j)e_{(p)}$$

при $w^j_3(z_j)=\frac{1}{2}\rho g z_j\big(z_j+2\ell_j\big)$ оставляет невязки в краевых условиях на боковой поверхности цилиндра. Во-вторых, невязки появляются и в краевых условиях на нижнем торце стержня, и они компенсируются посредством построения пограничного слоя в полуцилиндре $\mathbf{P}^J_+$ (см. конец разд. 4), экспоненциальное затухание которого может потребовать постановки неоднородных краевых условий (28) и (29). В обоих случаях вариация сечения $\omega^h_j(z_j)$ усугубляет указанные эффекты. Вместе с тем вполне разумна гипотеза о том, что наведенное таким способом нагружение стержней самоуравновешено и потому не передается на пластину. Впрочем, обоснование гипотезы в данной статье отсутствует.

8. Неравенство Корна [70] для сочленения. Асимптотически точное, а значит, анизотропное и весовое неравенство Корна для конструкций из пластин и стержней различных форм при разных способах крепления доказаны в работе [55] (см. также [56, § 5]), однако, к сожалению, сочленение Π^h, закрепленное только вдоль кромки пластины, рассмотрено не было (в указанных в разд. 1 работах закрепленными считаются как пластины, так и стержни). Восполним этот пробел.

На пластине Ω^h_0 справедлива оценка (см. [71], а также [56, теорема 2.5])

$$|||u^h;\Omega^h_0|||^2_0\le K_0 E\big(u^h,u^h;\Omega^h_0\big), \tag{62}$$

где множитель K_0 не зависит ни от поля $u^h\in H^1_0\big(\Omega^h_0;\Gamma^h_0\big)^3$, ни от параметра $h\in(0,h_0]$ при некотором $h_0>0$, а норма в левой части задана формулой

$$|||u^h;\Omega^h_0|||^2_h=\int\limits_{\Omega^h_0)}\Bigg(\sum_{k=1}^{2}\bigg(\bigg|\frac{\partial u^h_k}{\partial y_k}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u^h_k}{\partial y_{3-k}}\bigg|^2+\frac{h^2}{\mathbf{R}^2_h}\bigg(\bigg|\frac{\partial u^h_k}{\partial z}\bigg|^2+\bigg|\frac{\partial u^h_3}{\partial y_k}\bigg|^2\bigg)+\frac{1}{\mathbf{R}^2_h}|u^h_k|^2\bigg)$$
$$+\bigg|\frac{\partial u^h_3}{\partial z}\bigg|^2+\frac{h^2}{\mathbf{R}^4_h}|u^h_3|^2\Bigg)\,dx\quad\text{при}\quad\mathbf{R}_h(y)=h+\operatorname{dist}(y,\partial\omega_0). \tag{63}$$

Весовой множитель $\mathbf{R}_h(y)$, приобретающий порядок h в непосредственной близости от границы сечения ω_0, учитывает краевое условие Дирихле (5). В силу простого соотношения

$$r_j|\ln r_j| \le c_j h(1+|\ln h|) \text{ на круге } \mathbb{B}^2_{h\mathbf{r}_j} = \bigl\{y : \eta^j \in \mathbb{B}^2_{\mathbf{r}_j}\bigr\} \subset \omega^h_j$$

анизотропное неравенство Корна (62) и одномерное неравенство Харди «с логарифмом» (см. первоисточник [72] и, например, книгу [73])

$$\int\limits_0^1 \frac{|U(r)|^2}{|\ln r|^2}\frac{dr}{r} \le 4\int\limits_0^1 \left|\frac{dU}{dr}(r)\right|^2 r\,dr \quad \forall\, U \in C^\infty_c[0,1) \tag{64}$$

дают оценку на круговом цилиндре $\mathbf{Q}^h_j = \mathbb{B}^2_{h\mathbf{r}_j}(P^j)\times(0,h) \subset \Omega^h_0$ с малыми высотой и радиусом

$$h^{-2}(1+|\ln h|)^{-2}\bigl(\bigl\|u^h_1; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2 + \bigl\|u^h_2; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2 + h^2\bigl\|u^h_3; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2\bigr) \le C_j E\bigl(u^h, u^h; \Omega^h_0\bigr). \tag{65}$$

На упомянутом цилиндре представим поле u^h в виде

$$u^h(x) = d(y-P^j, z-h/2)\mathbf{b}^h_{(j)} + u^{h\perp}_{(j)}(x), \quad x \in \mathbf{Q}^h_j, \tag{66}$$

определив столбец $\mathbf{b}^h_{(j)} \in \mathbb{R}^6$ так, чтобы соблюсти условия ортогональности

$$\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} d\Bigl(y-P^j, z-\frac{h}{2}\Bigr)^\top u^{h\perp}_{(j)}(x)\,dx = 0 \in \mathbb{R}^6, \tag{67}$$

которые согласно результатам [74, 52] (см. также [56, § 2]) показывают, что

$$h^{-2}\bigl\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2 + \bigl\|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2 \le c_j E\bigl(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr) = c_j E\bigl(u^h, u^h; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr), \tag{68}$$

$$h^{-2}\bigl\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\Omega^h_j(-2h,0)\bigr)\bigr\|^2 + \bigl\|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\Omega^h_j(-h,0)\bigr)\bigr\|^2 \le C_j\bigl(E\bigl(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\Omega^h_j(-h,h)\bigr)\bigr) + h^{-2}\bigl\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\mathbf{Q}^h_j\bigr)\bigr\|^2\bigr). \tag{69}$$

Здесь $\Omega^h_j(-2h,0) = \omega^h_j \times (-2h,0) = \{x \in \Omega^h_j : z \in (-2h,0)\}$, а коэффициенты h^{-2} появились вследствие растяжения координат перед применением известных вариантов неравенств Корна.

Распространим представление (66) на стержень Ω^h_j и введем поле $\mathbf{u}^h_{(j)}(x) = \chi(1-h^{-1}z)u^{h\perp}_{(j)}(x)$, равное нулю при $x \in \omega^h_j(0) \subset \partial\Omega^h_0$ и удовлетворяющее в силу формулы (69) соотношению

$$E\bigl(\mathbf{u}^h_{(j)}, \mathbf{u}^h_{(j)}; \Omega^h_j\bigr) \le 2\bigl(E\bigl(u^{h\perp}_{(j)}, u^{h\perp}_{(j)}; \Omega^h_j\bigr) + c_j\bigl(h^{-2}\bigl\|u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\Omega^h_j(-h,0)\bigr)\bigr\|^2 + \bigl\|\nabla_x u^{h\perp}_{(j)}; L^2\bigl(\Omega^h_j(-h,0)\bigr)\bigr\|^2\bigr)\bigr) \le C_j\bigl(E\bigl(u^h, u^h; \Omega^h_j\bigr) + E\bigl(u^h, u^h; \Omega^h_0\bigr)\bigr).$$

Теперь применим неравенство Корна (см. [71, 54] и [56, § 2, п. 6]) для тонкого стержня с закрепленным торцом, а затем, как и в [75], благодаря оценке

(68) для $u^{h\perp}_{(j)}$ придадим ему вид

$$|||u^{h\perp}_{(j)};\Omega^h_j|||^2_h := \int\limits_{\Omega^h_j} \Bigg(\sum_{k=1}^{2} \Bigg(\Big| \frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial y_k} \Big|^2 + \frac{h^2}{h^2+z^2} \Bigg(\Big| \frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial y_{3-k}} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u^{h\perp}_{(j)k}}{\partial z} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u^{h\perp}_{(j)3}}{\partial y_k} \Big|^2 \Bigg)$$

$$+ \frac{h^2}{(h^2+z^2)^2} |u^{h\perp}_{(j)k}|^2 \Bigg) + \Big| \frac{\partial u^{h\perp}_{(j)3}}{\partial z} \Big|^2 + \frac{1}{h^2+z^2} \big| u^{h\perp}_{(j)3} \big|^2 \Bigg) dx \le C_j E(u^h, u^h; \Omega^h). \quad (70)$$

Обследуем компоненты $\mathbf{b}^h_{(j)q}$ столбца из представления (66). При учете строения матрицы (21) и симметрий кругового цилиндра $\mathbf{Q}^h_j$ находим

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)1}\big| = \frac{1}{|\mathbf{Q}^h_j|} \Big| \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} e^\top_{(3)} d\Big(y - P^j, z - \frac{h}{2}\Big) \mathbf{b}^h_{(j)}\, dx \Big| = \frac{1}{|\mathbf{Q}^h_j|} \Big| \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} \big(u^{h0}_3(x) - u^{hj\perp}_3(x)\big) dx \Big|$$

$$\le c_j h^{-3/2} \big(\|u^{h0}_3; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| + \|u^{hj\perp}_3; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| \big) \le C_j h^{-1/2} (1 + |\ln h|) \mathbf{E}^{1/2}_h,$$

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)p+1}\big| = \Big(\int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} z^2\, dx \Big)^{-1} \Big| \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} z e^\top_{(p)} d\Big(y - P^j, z - \frac{h}{2}\Big) \mathbf{b}^h_{(j)} dx \Big|$$

$$\le c_j h^{-5} \big|\mathbf{Q}^h_j\big|^{1/2} \big(\|z u^{h0}_p; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| + \|z u^{hj\perp}_p; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| \big) \le C_j h^{-3/2} (1 + |\ln h|) \mathbf{E}^{1/2}_h, \quad (71)$$

$$\big|\mathbf{b}^h_{(j)p+3}\big| = \frac{1}{|\mathbf{Q}^h_j|} \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} \big(u^{h0}_p(x) - u^{hj\perp}_p(x)\big)\, dx \Big| \le C_j h^{-1/2} (1 + |\ln h|) \mathbf{E}^{1/2}_h,$$

$$|\mathbf{b}^h_{(j)6}| = \Big(\frac{1}{2} \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} r^2_j dx \Big)^{-1} \Big| \int\limits_{\mathbf{Q}^h_j} d^6(y - P^j, 0)^\top \big(u^{h0}_p(x) - u^{hj\perp}_p(x)\big) dx \Big|$$

$$\le c_j h^{-7/2} \sum_{p=1}^{2} \big(\|(y_{3-p} - P^j_{3-p}) u^{h0}_p; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| + \|(y_{3-p} - P^j_{3-p}) u^{hj\perp}_p; L^2(\mathbf{Q}^h_j)\| \big)$$

$$\le C_j h^{-3/2} (1 + |\ln h|) \mathbf{E}^{1/2}_h.$$

Здесь $p = 1, 2$ и $\mathbf{E}_h$ — упругая энергия $\frac{1}{2} E(u^h, u^h; \Omega^h_0)$, запасенная пластиной. При обработке норм в пространстве $L^2(\mathbf{Q}^h_j)$ использованы соотношения (65) и (68).

При помощи формул (71) оценим соболевские нормы жесткого смещения $d(\dots)\mathbf{b}^h_{(j)}$ с тщательно подобранными весовыми множителями, меньшими, чем возникшие в оценке (70) для составляющей $u^{h\perp}_{(j)}$ представления (66) и, совместив результат с неравенством Корна (62), (63) на пластине, аналогично работе [75] придем к следующему утверждению.

Теорема 2. *На сочленении Π^h выполнено анизотропное весовое неравен-*

ство Корна

$$
\big|\big|\big|u^h;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h^2+\sum_{j=1}^{J}\int\limits_{\Omega_j^h}\Bigg(\sum_{k=1}^{2}\Bigg(\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_k}\Big|^2+\frac{h^2(1+|\ln h|)^{-2}}{h^2+z^2}\Bigg(\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial y_{3-k}}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_k^h}{\partial z}\Big|^2+\Big|\frac{\partial u_3^h}{\partial y_k}\Big|^2\Bigg)
$$

$$
+\frac{h^2(1+|\ln h|)^{-2}}{(h^2+z^2)^2}\big|u_k^h\big|^2\Bigg)+\Big|\frac{\partial u_3^h}{\partial z}\Big|^2+\frac{h(1+|\ln h|)^{-2}}{(h^2+z^2)^{1/2}}\big|u_3^h\big|^2\Bigg)\,dx
$$

$$
\le K_\Pi E(u^h,u^h;\Pi^h), \quad (72)
$$

где норма $\big|\big|\big|u^h;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h$ *задана соотношением* (63), *а множитель* K_Π *не зависит от поля* $u^h\in H_0^1\big(\Pi^h;\Gamma_0^h\big)^3$ *и параметра* $h\in(0,h_\Pi]$ *при некотором* $h_\Pi>0$.

Замечание. Неравенство (72) не учитывает специфику нагружения сочленения Π^h силой тяжести, однако в определенном смысле является асимптотически точным. В самом деле функционал $E(\cdot,\cdot;\Omega_0^h)$ и квадрат нормы $\big|\big|\big|\cdot;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h$, вычисленные для главного члена $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta,\nabla_y)e_{(3)}w_3(y)$ анзаца (30), приобретают порядок h^{-1}, а каждый интеграл из суммы по $j=1,\dots,J$, найденный по слагаемому $h^{-2}d^\dagger(y^j,z)d^\dagger(\nabla_y,0)^\top w_3(P^j)$ суммы (54), равен $O(h^{-1}(1+|\ln h|)^{-2})$. Как и для сочленений иных форм (см. обзор [56]), логарифмический множитель, пришедший от неравенства Харди (64), нельзя выявить при помощи асимптотических анзацев для решений задач с гладкими правыми частями, так как логарифм присоединяется только к младшим асимптотическим членам (см. выражение (61)). Приемы из [56, § 5] позволяют убрать логарифм из множителей при производных смещений в подынтегральном выражении (72), но автор не знает, можно ли это сделать с множителями при самих смещениях.

На основе неравенства Корна из теоремы 2 обоснование полученных в разд. 6 асимптотических представлений решения задачи (4)–(6) проводится по стандартной схеме (см. книги [30, 5], статьи [4, 8, 9] и другие публикации). С целью сокращения объема работы[3)] ограничимся формулировкой результата для наиболее интересных атрибутов поля смещений u^h.

Теорема 3. 1. *Для сужения* u^{h0} *на пластину* Ω_0^h *решения задачи* (4)–(6) *верна оценка*

$$
\big|\big|\big|u^{h0}-\big(h^{-2}\mathscr{W}_{(0)}^0+h^{-1}\mathscr{W}_{(0)}^1+\mathscr{W}_{(0)}^2\big)e_{(3)}w_3;\Omega_0^h\big|\big|\big|_h^2\le C_\Omega^0, \quad (73)
$$

в которой фигурирует норма (63), *матричные дифференциальные операторы* (13) *и решение задачи* (8), (9), *а множитель* C_Ω^0 *не зависит от параметра* $h\in\big(0,h_\Omega^0\big]$ *при некотором* $h_\Omega^0>0$.

2. *Для продольных смещений* u_3^{hj} *в стержнях* Ω_j^h, $j=1,\dots,J$, *выполнены оценки*

$$
\big\|u_3^{hj}-h^{-2}d_{(3)}^\dagger(y^j)d_{(3)}^\dagger\big(\nabla_y^\top,0\big)w_3(P^j);L^2\big(\Omega_j^h\big)\big\|
$$

$$
+h^{-1/2}\big\|\varepsilon_{33}\big(u^{hj}\big)-h^{-1}\partial_{z_j}w_3^j;L^2\big(\Omega_j^h\big)\big\|\le C_\Omega^j, \quad (74)
$$

[3)] Точные оценки асимптотических остатков в полном объеме будут приведены в следующей публикации автора, посвященной анализу собственных колебаний сочленения Π^h, т. е. спектральной задаче теории упругости.

в которых $d^{\dagger}_{(3)}$ *— нижняя строка блока* $d^{\dagger}$ *матрицы* (21), *функции* w_3 *и* w_3^j *указаны в разд.* 6, *а множитель* C_{Ω}^j *не зависит от параметра* $h \in \big(0, h_{\Omega}^j\big]$ *при некотором* $h_{\Omega}^j > 0$.

Вывод оценки (73) в целом повторяет материал гл. 4 книги [31] — изменения, вызванные присоединением стержней, ничтожны, так как постоянное смещение $e_{(3)} w_3(P^j)$ удовлетворяет уравнениям и краевым условиям в стержне, а порядок $1 = h^0$ мажоранты определен пограничным слоем вблизи кромки Γ_0^h (см. разд. 4 и [31, гл. 4]). Асимптотику самого прогиба можно уточнить:

$$\big\| u_3^h - h^{-2} w_3 - h^{-1} w_3^{\circ}; L^2\big(\Omega_0^h\big)\big\| \le c_{\Omega}^0.$$

Вместе с тем из-за особенностей $O(|\ln r_j|)$ вторых производных функции w_3° аналогичные улучшения асимптотических разложений напряжений и деформаций невозможны — в них требуется привлечь пограничные слои из разд. 5. Эти же пограничные слои определяют порядок мажоранты в неравенстве (74), которая в ее упрощенном варианте, относящемся к продольным смещению и деформации стержня, выводится при помощи процедуры из [31, гл. 5].

9. Размышления. Равенства (4) позволили существенно упростить вычисления и формулировки результатов. При нарушении первых равенств система уравнений Кирхгофа — Клебша

$$\mathscr{D}(\partial_z) A^j(z) \mathscr{D}(\partial_z) w^j(z) = f^j(z), \quad z \in (-\ell_j, 0), \tag{75}$$

не распадается на отдельные скалярные уравнения (24), (25), но это обстоятельство мало влияет на главные члены асимптотики напряженно-деформированного состояния сочленения Π^h, описанного в разд. 6. Взаимодействие продольного деформирования стержней Ω_j^h с их изгибом и закручиванием (см., например, [33] и [31, гл. 5 § 3], происходящее от заполненности матрицы A^j в системе (75), изменяет, в частности, задачу для поиска продольной деформации пластины Ω_0^h. Вместе с тем сохраняется значительная малость горизонтальных смещений в пластине по сравнению с ее прогибом и соответственно сдвиги стержней в вертикальном направлении. Точно такие же эффекты возникают в случае анизотропного и неоднородного материала, для которого строение системы (75) сохраняется (см. [31, гл. 5, § 3] и др.).

Пластина, имеющая переменное сечение или изготовленная из анизотропного неоднородного, к примеру, композиционного материала, способна оказать более значимое влияние на асимптотическое строение напряженно-деформированного состояния сочленения Π^h, так как вектор-функция $w^0 = \big(w_1^0, w_2^0, w_3^0\big)^{\top}$ находится из системы дифференциальных уравнений

$$\mathscr{D}^0(\nabla_y) \mathscr{A}^0(y) \mathscr{D}^0(\nabla_y)^{\top} w^0(y) = f^0(y), \quad y \in \omega_0,$$

с краевыми условиями (9), (17). При этом $\mathscr{D}^0(\nabla_y)$ — (3×6)-матрица дифференциальных операторов, указанная в формуле (14), а $\mathscr{A}^0$ — симметричная и положительно определенная матрица-функция размером 3×6, рассчитанная по упругим модулям материала пластины. В общем случае матрица $\mathscr{A}^0$ заполнена целиком, и поэтому сила тяжести $\rho g e_{(3)}$ вызывает не только изгиб, но и продольные смещения в пластине. Впрочем, согласно результатам из [31, гл. 4, § 2, п. 4] для однородной анизотропной цилиндрической пластины или даже композитной пластины из разнородных слоев с постоянными толщинами и упругими свойствами найдется такой коэффициент α (не обязательно из сегмента $[0, 1]$), что сдвиг начала оси апликат в точку $z^0 = h\alpha$ делает матрицу $\mathscr{A}^0$ блочно-диагональной, а ее нижняя строка приобретает вид $\big(0, 0, \mathscr{A}^0_3\big)$; иными словами, сила тяжести не вызывает в главном продольной деформации пластины, а значит, полученные в данной статье асимптотические формулы сохранятся в целом при сдвиге глобальной декартовой системы координат x. При заполненной матрице $\mathscr{A}^j(y)$ для стержня Ω^h_j также характерна не только продольная деформация, но и его изгиб и закручивание (см. [33; 31, гл. 5] и др.), и это обстоятельство приходится учитывать при построении пограничных слоев около точки P^j.

Упомянутые в разд. 1 интерпретации сочленения Π^h подразумевают конические заострения концов стержней, т. е. $H_j(-\ell_j) = 0$ и $\partial_{z_j} H_j(-\ell_j) > 0$. В этом случае уравнения (24), (27) или (75) приобретают вырождающиеся коэффициенты и согласно результатам [76, 27] краевые условия (28), (29) для них не нужны, а асимптотические конструкции изменяются незначительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

2. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

3. *Nazarov S. A.* Junction problems of bee-on-ceiling type in the theory of anisotropic elasticity // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. 1995. V. 320, N 11. P. 1419–1424.

4. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic representation of elastic fields in a multi-structure // Asymptot. Anal. 1995. V. 11, N 4. P. 343–415.

5. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Asymptotic analysis of fields in multi-structures. Oxford: Clarendon Press, 1999. (Oxford Math. Monogr.).

6. *Kozlov V. A., Maz′ya V. G., Movchan A. B.* Fields in non-degenerate 1D–3D elastic multi-structures // Quart. J. Mech. Appl. Math. 2001. V. 54, N 2. P. 177–212.

7. *Назаров С. А.* Асимптотический анализ и моделирование сочленения массивного тела с тонкими стержнями // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2004. Т. 24. С. 95–214.

8. *Назаров С. А.* Оценки точности моделирования краевых задач на сочленении областей с различными предельными размерностями // Изв. РАН. Сер. мат. 2004. Т. 68, № 6. С. 119–156.

9. *Назаров С. А.* Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 345–364.

10. *Gaudiello A., Monneau R., Mossino J., Murat F., Sili A.* Junction of elastic plates and beams // ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations. 2007. V. 13, N 3. P. 419–457.

11. *Blanchard D., Griso G.* Junction between a plate and a rod of comparable thickness in nonlinear elasticity // J. Elasticity. 2013. V. 112, N 2. P. 79–109.

12. *Blanchard D., Griso G.* Asymptotic behavior of a structure made by a plate and a straight rod // Chinese Ann. Math. Ser. B. 2013. V. 34, N 3. P. 399–434.

13. *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with a 3d plate. Part I // J. Math. Pures Appl. 2007. V. 88, N 1. P. 1–33.

14. *Blanchard D., Gaudiello A., Griso G.* Junction of a periodic family of elastic rods with a 3d plate. Part II // J. Math. Pures Appl. 2007. V. 88, N 2. P. 149–190.

15. *Griso G., Merzougui L.* Junctions between two plates and a family of beams // Math. Methods Appl. Sci. 2018. V. 41, N 1. P. 58–79.

16. *Физики продолжают шутить* М.: Мир, 1968.

17. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей. 2 // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. Т. 20. С. 155–195.

18. *Bunoiu R., Cardone G., Nazarov S. A.* Scalar boundary value problems on junctions of thin rods and plates. I. Asymptotic analysis and error estimates // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2014. V. 48, N 5. P. 1495–1528.

19. *Bunoiu R., Cardone G., Nazarov S. A.* Scalar boundary value problems on junctions of thin rods and plates. II. Self-adjoint extensions and simulation models // ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 2018. V. 52. P. 481–508.

20. *Gaudiello A., Guibé O., Murat F.* Homogenization of the brush problem with a source term in L^1 // Arch. Rat. Mechanics Anal. 2017. V. 225, N 1. P. 1–64.

21. *Kirchhoff G. R.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe // J. Reine Angew. Math. 1850. V. 40. P. 51–88.

22. *Love A. E. H.* On the small free vibrations and deformations of elastic shells // Philosophical Trans. of the Royal Society (London). Série A. 1888. V. 17. P. 491–549.

23. *Власов В. З.* Общая теория оболочек и ее приложения в технике. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1949.

24. *Гольденвейзер А. Н.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Гостехиздат, 1953.

25. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.

26. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.

27. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970.

28. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры // Прикл. математика и механика. 1973. Т. 37, № 5. С. 913–924.

29. *Ciarlet P. G.* Plates and junctions in elastic multi-structures: An asymptotic analysis. Paris: Masson, 1988.

30. *Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A.* Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.

31. *Назаров С. А.* Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.

32. *Panassenko G.* Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.

33. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Couplage flexion-torsion-traction dans les poutres anisotropes à section hétérogène // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II Méc. Phys. Chim. Sci. Univers Sci. Terre. 1991. V. 312, N 4. P. 337–344.

34. *Назаров С. А.* Обоснование асимптотической теории тонких стержней. Интегральные и поточечные оценки // Проблемы математического анализа. СПб: Изд-во СПбГУ, 1997. Т. 17. С. 101–152.

35. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É.* Coques elastiques mines. Proprietes asymptotiques. Paris: Masson, 1997.

36. *Clebsch A.* Theorie der Elastizität der festen Körper. Leipzig, 1862.

37. *Лехницкий С. Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. М.: Наука, 1971.

38. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

39. *Ржаницын А. Р.* Строительная механика. М.: Высшая школа, 1982.

40. *Светлицкий В. А.* Механика стержней. Т. 1, 2. М.: Высшая школа, 1987.

41. *Елисеев В. В., Орлов С. Г.* Асимптотическое расщепление в пространственной задаче линейной упругости для удлиненных тел со структурой // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 1. С. 93–101.

42. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства математической физики. М.: Физматгиз, 1962.

43. *Зорин И. С., Назаров С. А.* Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.

44. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.

45. *Nazarov S. A., Plamenevsky B. A.* Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.

46. *Назаров С. А.* Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.

47. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда — Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе // Math. Nachr. 1977. V. 77. P. 25–82.

48. *Panassenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems. 1 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 3. P. 325–352.

49. *Panassenko G. P.* Asymptotic analysis of bar systems. 2 // Russian J. Math. Phys. 1996. V. 4, N 1. P. 87–116.

50. *Kozlov V., Nazarov S. A.* On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 9/10. P. 887–944.

51. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

52. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.

53. *Назаров С. А.* Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое // Тр. Моск. мат. о-ва. 1998. Т. 60. С. 3–97.

54. *Cioranescu D., Oleinik O. A., Tronel G.* Korn′s inequalities for frame type structures and junctions with sharp estimates for the constants // Asymptot. Anal. 1994. V. 8, N 1. P. 1–14.

55. *Назаров С. А.* Весовое анизотропное неравенство Корна для сочленения пластины со стержнями // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 4. С. 97–126.

56. *Назаров С. А.* Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.

57. *Agmon S., Douglis A., Nirenberg L.* Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II // Commun. Pure Appl. Math. 1964. V. 17. P. 35–92.

58. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1964. Т. 28, № 3. С. 665–706.

59. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга. II // Тр. МИАН СССР. 1966. Т. 92, № 3. С. 233–297.

60. *Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.* Оценки функции Грина и шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в двугранном угле // Сиб. мат. журн. 1978. Т. 19, № 5. С. 1065–1082.

61. *Назаров С. А.* Общая схема осреднения самосопряженных эллиптических систем в многомерных областях, в том числе тонких // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 5. С. 1–92.

62. *Назаров С. А.* Поведение на бесконечности решений систем Ламе и Стокса в секторе слоя // Докл. АН АрмССР. 1988. Т. 87, № 4. С. 156–159.

63. *Назаров С. А.* Асимптотика решения задачи Неймана в точке касания гладких компонент границы области // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58, № 1. С. 92–120.

64. *Назаров С. А.* О течении воды под лежачий камень // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 11. С. 75–110.

65. *Nazarov S. A., Pileckas K.* The asymptotic properties of the solution to the Stokes problem in domains that are layer-like at infinity // J. Math. Fluid Mech. 1999. V. 1, N 2. P. 131–167.

66. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1979.

67. *Oleinik O. A., Yosifian G. A.* On the asymptotic behavior at infinity of solutions in linear elasticity // Arch. Rat. Mech. Anal. 1983. V. 78. P. 29–53.

68. *Ван Дайк М. Д.* Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.

69. *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.

70. *Korn A.* Solution générale du probléme d'équilibre dans la théorie l'élasticité dans le cas où les efforts sont donnés à la surface // Ann. Université Toulouse. 1908. P. 165–269.

71. *Назаров С. А.* Неравенства Корна, асимптотически точные для тонких областей // Вестн. СПбГУ. Сер. 1. 1992. № 2 (№ 8). С. 19–24.

72. *Hardy G. H.* Note on a theorem of Hilbert // Math. Zeitschr. 1920. V. 6. P. 314–317.

73. *Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г.* Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.

74. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Мир, 1980.

75. *Назаров С. А., Слуцкий А. С.* Неравенство Корна для произвольной системы тонких искривленных стержней // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 6. С. 1319–1331.

76. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.: Гостехиздат, 1952.

Поступила в редакцию 14 ноября 2024 г.
После доработки 14 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)
Институт проблем машиноведения РАН,
лаборатория «Математические методы механики материала»,
ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178
srgnazarov@yahoo.co.uk

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.563

СУПЕРАТОМНАЯ БУЛЕВА АЛГЕБРА С ВЫДЕЛЕННОЙ ПОДАЛГЕБРОЙ, ТЕОРИЯ КОТОРОЙ НЕ ИМЕЕТ ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Д. Е. Пальчунов, А. В. Трофимов

Аннотация. Построена суператомная булева алгебра с выделенной подалгеброй, элементарная теория которой не имеет простой модели.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.313

Ключевые слова: булева алгебра, булева алгебра с выделенной подалгеброй, локальная алгебра, элементарная теория, конечно-аксиоматизируемая теория, разрешимая теория, элементарная эквивалентность.

Работа посвящена изучению теоретико-модельных свойств булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины. Далее будем называть их просто алгебрами. В такой алгебре подалгебра изоморфна самой булевой алгебре, более того, подалгебра совпадает с булевой алгеброй по модулю идеала Фреше.

Любая полная теория имеет счетные однородные модели, которые создают хороший базис для исследования. Интересен вопрос существования однородных моделей при дополнительных условиях минимальности или максимальности. Алгебраическая система называется *атомной*, если в ней реализуются только главные типы. Атомная модель является однородной. Счетная атомная модель называется *простой*. Простая модель, если она существует, элементарно вкладывается в любую модель полной теории. Полная теория T имеет простую модель тогда и только тогда, когда алгебра Линденбаума — Тарского $\mathfrak{B}_n(T)$ атомная для любого $n \in \mathbb{N}$. Атомами в алгебре $\mathfrak{B}_n(T)$ являются полные формулы. Каждая полная формула задает главный тип теории.

Хорошо известно [1], что любая бесконечная булева алгебра имеет простую модель, две счетные атомные булевы алгебры элементарно-эквивалентны и $\mathfrak{B}_\omega$ — простая модель теории атомных булевых алгебр. Существует ровно счетное число различных элементарных теорий булевых алгебр. Элементарная теория любой булевой алгебры имеет простую модель [2]. Если добавить в сигнатуру булевых алгебр одноместный предикат, выделяющий идеал, то ситуация с числом элементарных теорий и простых моделей существенно меняется [3–7]. В [7] доказано, что существует ровно счетное число различных элементарных теорий счетных суператомных булевых алгебр с одним выделенным идеалом; элементарная теория любой счетной суператомной булевой алгебры с одним выделенным идеалом имеет простую модель. В [8] доказано, что существует континуум элементарных теорий булевых алгебр с одним выделенным идеалом,

Работа Пальчунова Д. Е. выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0011).

не имеющих простых моделей. В [3–9] исследовались теоретико-модельные и алгоритмические свойства булевых алгебр с выделенными идеалами.

Авторы исследуют булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Ранее авторами было доказано [10, 11] существование континуума различных элементарных теорий счетных суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины, каждая из которых имеет простую модель и не имеет счетно-насыщенной модели.

В статье построена счетная суператомная булева алгебра $\mathfrak{A}$ с выделенной подалгеброй $\mathfrak{B}$ такая, что элементарная теория этой булевой алгебры с выделенной подалгеброй не имеет простой модели. Причем эта алгебра (булева алгебра с выделенной подалгеброй) принадлежит классу K_3, из чего следует, что подалгебра $\mathfrak{B}$ «практически совпадает» с булевой алгеброй $\mathfrak{A}$.

Поясним подробнее, что это означает. Во-первых, каждый атом подалгебры это либо атом булевой алгебры, либо объединение двух атомов булевой алгебры, либо объединение трех атомов булевой алгебры.

Во-вторых, любой атом булевой алгебры лежит под некоторым атомом подалгебры, т. е. он либо является атомом подалгебры, либо является «половинкой» атома подалгебры: одним из двух атомов булевой алгебры, объединением которых является атом подалгебры, либо является «третью» атома подалгебры: одним из трех атомов булевой алгебры, в объединении дающих атом подалгебры.

В-третьих, любой элемент булевой алгебры является объединением элемента подалгебры и конечного числа атомов булевой алгебры, т. е. состоит из элемента подалгебры и нескольких «кусочков» атомов подалгебры. При этом булева алгебра и ее подалгебра изоморфны: $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.

У такой очень просто устроенной счетной суператомной булевой алгебры с выделенной подалгеброй элементарная теория не имеет простой модели. Это сильно контрастирует с тем, что элементарная теория любой булевой алгебры имеет простую модель и что элементарная теория любой счетной суператомной булевой алгебры с выделенным идеалом имеет простую модель. Более того, все элементарные теории указанных алгебр имеют и счетно-насыщенные модели.

1. Основные определения и предварительные результаты

Будем рассматривать булевы алгебры в сигнатуре $\sigma = \langle \cup, \cap, C, 0, 1\rangle$. В настоящей работе, если не оговорено иное, мы рассматриваем только счетные алгебры. Пусть $\sigma^* = \langle \sigma, P\rangle$, где P — символ одноместного предиката, выделяющего подалгебру. Булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть просто *алгеброй*. Через $P^{\mathfrak{A}} = \{a \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models P(a)\}$ обозначим основное множество выделенной подалгебры алгебры $\mathfrak{A}$.

Суператомную булеву алгебру с выделенной подалгеброй будем называть *суператомной алгеброй*. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра, $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим $\widehat{a} = \{b \in \mathfrak{A} \mid b \leq a\}$. Для элемента $a \in P^{\mathfrak{A}}$ определим алгебру, заданную элементом a:

$(a) = \langle \widehat{a}, \cup, \cap, C^a, 0, a, P^{\mathfrak{A}} \cap \widehat{a}\rangle$, где $C^a(b) = a \cap C(b)$.

Прямая сумма $\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ определяется стандартным образом.

Определение 1.1 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *подалгеброй ширины n*, если под любым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$ лежат не более

n атомов алгебры $\mathfrak{A}$ и любой атом алгебры $\mathfrak{A}$ лежит под некоторым атомом подалгебры $\mathfrak{B}$. Такая подалгебра $\mathfrak{B}$ также называется *подалгеброй конечной ширины*.

Определение 1.2 [10]. Подалгебра $\mathfrak{B}$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$ называется *плотной*, если $\mathfrak{A} = \mathrm{sub}_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{B}, F(\mathfrak{A}))$ — наименьшая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, содержащая в себе множество $|\mathfrak{B}|$ и идеал Фреше $F(\mathfrak{A})$ булевой алгебры $\mathfrak{A}$.

Обозначим [10] через K_n класс суператомных булевых алгебр с выделенной плотной подалгеброй ширины n.

Определение 1.3 [10]. Обозначим $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$, если найдется $\mathfrak{C}$ такая, что $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A} \times \mathfrak{C}$. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *неисчезающей*, если из $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$ следует $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{M}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{N}$.

Определение 1.4 [10]. Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *локальной*, если число попарно элементарно неэквивалентных неисчезающих алгебраических систем $\mathfrak{B} \leq \mathfrak{A}$ конечно, т. е. существуют $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_n$ такие, что для произвольной неисчезающей $\mathfrak{C} \leq \mathfrak{A}$ выполнено $\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{B}_i$ для некоторого $i \leq n$.

Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *локальным*, если найдется элемент $b \geq a$ такой, что $P(b)$ и алгебра (b) локальна. Элемент a называется *нелокальным*, если он не является локальным.

Следуя [10], приведем построение счетной последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$, языка σ^* с одной свободной переменной.

Пусть φ, ψ — формулы с одной свободной переменной языка σ^*, T — теория класса булевых алгебр с выделенной подалгеброй. Обозначим:

$\varphi \leq \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \to (\exists y \leq x)\varphi(y))$;

$\varphi \# \psi$, если $T \vdash (\psi(x) \to (\forall y \leq x)\neg\varphi(y))$.

Формулы φ и ψ называются [10] *независимыми*, если $\varphi \# \psi$ и $\psi \# \varphi$.

Определим отношение линейного порядка на конечных подмножествах множества натуральных чисел без нуля. Пусть $A = \{a_1 > a_2 > \ldots > a_l\}$, $B = \{b_1 > b_2 > \ldots > b_m\} \subset \mathbb{N}\backslash\{0\}$ — два произвольных конечных подмножества множества натуральных чисел без нуля. Положим $A < B$, если $(a_1, a_2, \dots, a_l, 0, \dots, 0) < (b_1, b_2, \dots, b_m, 0, \dots, 0)$ в лексикографическом порядке, и $A \leq B$, если $A < B$ или $A = B$ (добавляем нули так, чтобы длины кортежей стали равными).

Обозначим $X = \{A \subset \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid 2 \leq \|A\| < \omega\}$. Занумеруем множество X в порядке возрастания: пусть $\Omega : X \to \mathbb{N}$ — взаимно-однозначное отображение всех конечных неодноэлементных подмножеств множества натуральных чисел без нуля на множество натуральных чисел такое, что $\Omega(A) < \Omega(B) \iff A < B$. Очевидно, что такое отображение можно определить так, чтобы оно было алгоритмически эффективным.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и соответственно класс K_n. Перейдем к построению последовательности формул $T_k(x)$, $k \in \mathbb{N}$ [10]. Построение будем вести по индукции.

Базис индукции:

$T_1(x) = ((x - \text{атом})\ \&\ P(x))$;

$T_l(x) = \big((x - \text{объединение } l \text{ атомов}) \& P(x)\ \&\ (\forall y \leq x) \bigwedge_{i<l} \neg T_i(y)\big)$ для $2 \leq l \leq n$.

При помощи формулы

$$Q(x) = \exists y \exists z((x = y \cup z)\ \&\ (y \cap z = 0)\\ \&\ (\forall w \leq y)(w \neq 0 \to \neg P(w))\ \&\ (\forall w \leq z)(w \neq 0 \to \neg P(w)))$$

определим для $2 \le j \le n$

$$T_{n+j-1}(x) = \Big(P(x) \ \& \ (\neg Q(x) \ \& \ (\exists y \le x)T_j(y)) \\ \& \ \Big(\bigwedge_{i \ne j,\ i \le n} (\forall y \le x)\neg T_i(y)\Big) \ \& \ (\forall y, z \le x)((y \cap z = 0 \to (Q(y) \vee Q(z))))\Big).$$

Для формул $T_k(x)$, $n < k \le 2n-1$, обозначим $T_{R_k}(x) = T_k(x)$ для множества $R_k = \{k+1-n\}$; $R_k^* = \{i \le n \mid i \ne k+1-n\}$.

Шаг индукции. Предположим, что формулы $T_1(x), \dots, T_m(x)$ построены. Пусть $R \in X$, $R \subset \{1, 2, \dots, m\}$, такое, что $T_i \# T_j$ для любых $i, j \in R$, $i \ne j$, и имеющее наименьший номер $l = \Omega(R)$ такой, что множество R_l еще не было использовано при построении формул $T_1(x), \dots, T_m(x)$, т. е. $R = R_l$. Пусть $R = \{i_1, \dots, i_k\}$. Определим множество R^* и вспомогательные формулы $\pi_R(x)$, $T_R(x)$ следующим образом:

$$R^* = \{i \le m \mid (T_i \# T_j) \text{ для всех } j \in R\};$$

$$\pi_R(x) = (\exists x_{i_1} \dots \exists x_{i_k})\Big(\bigwedge_{i \ne j,\ i,j \in R} (x_i \cap x_j = 0) \\ \& \ (\bigcup_{i \in R} x_i = x) \ \& \ \Big(\bigwedge_{i \ne j,\ i,j \in R} (\forall z \le x_i)\neg T_j(z)\Big)\Big),$$

$$T_R(x) = \Big(\neg \pi_R(x) \ \& \ P(x) \ \& \ (\forall y \le x)\Big(\Big(\bigvee_{i \in R} (\forall z \le y)\neg T_i(z)\Big) \to \pi_R(y)\Big) \\ \& \ \Big((\forall y \le x) \bigwedge_{i \in R^*} \neg T_i(y)\Big) \ \& \ (\forall y \le x)(\forall z \le x)(y \cap z = 0 \to (\pi_R(y) \vee \pi_R(z)))\Big).$$

Полагаем $T_{m+1}(x) = T_R(x)$. Обозначим $R_{m+1} = R$ и $R_{m+1}^* = R^*$.

При помощи построенной последовательности формул для каждой алгебры $\mathfrak{A}$ и каждого элемента $a \in \mathfrak{A}$ определена характеристическая функция $w_a : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ следующим образом:

$w_a(0) = 0$, если $\mathfrak{A} \models P(a)$;

$w_a(0) = 1$, если $\mathfrak{A} \models \neg P(a)$;

$w_a(m) = 0$, если $\mathfrak{A} \models (\forall y \le a)\neg T_m(y)$, $m \ge 1$ и

$w_a(m) = \sup\big\{k \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{A} \models (\exists x_1, \dots, x_k \le a)\big(\big(\bigwedge_{i \ne j} x_i \cap x_j = 0\big) \ \& \ \big(\bigwedge_{i \le k} T_m(x_i)\big)\big)\big\}$,

$m \ge 1$, иначе.

Положим $w_{\mathfrak{A}} = w_{1^{\mathfrak{A}}}$.

Теорема 1.5 [10]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — локальные булевы алгебры с выделенными подалгебрами, принадлежащими классу K_n. Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы $w_{\mathfrak{A}} = w_{\mathfrak{B}}$.*

Рассмотрим обогащение сигнатуры $\sigma_1 = \sigma^* \cup \{c_1, \dots, c_k\}$ конечным числом константных символов. Через $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ обозначим булеву алгебру с выделенной подалгеброй в обогащенной константами сигнатуре, где $a_1, \dots, a_k$ — значения в модели $\mathfrak{A}$ константных символов $c_1, \dots, c_k$ соответственно.

Пусть $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ и $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ — булевы алгебры с выделенными подалгебрами в обогащенной константами сигнатуре σ_1, $A_0 \subseteq \mathfrak{A}$ и $B_0 \subseteq \mathfrak{B}$. Отображение $f : A_0 \to B_0$ назовем *частичным изоморфизмом* из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в

$(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если множество A_0 определяет подалгебру в алгебре $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$, множество B_0 — подалгебру в алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ (в частности, $a_1, \dots, a_k \in A_0$ и $b_1, \dots, b_k \in B_0$) и отображение f является изоморфизмом соответствующих подалгебр, т. е. для любых $a, b \in A_0$ выполнено

$$f(a \cup b) = f(a) \cup f(b); \quad f(a \cap b) = f(a) \cap f(b); \quad f(C(a)) = C(f(a));$$

$$P(a) \iff P(f(a)); \quad f(0) = 0; \quad f(1) = 1; \quad f(a_1) = b_1, \dots, f(a_k) = b_k.$$

Обозначим $\mathrm{dom}\, f = A_0$, $\mathrm{im}\, f = B_0$.

Отображение $f : A_0 \to B_0$ назовем *конечным частичным изоморфизмом*, если это отображение является частичным изоморфизмом и его область определения $\mathrm{dom}\, f = A_0$ конечна.

Определение 1.6 [10]. Будем говорить, что алгебра $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ *m-эквивалентна* алгебре $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$ и обозначать $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k) \equiv_m (\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, если существуют непустые множества $F_0, \dots, F_m$ конечных частичных изоморфизмов из $(\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_k)$ в $(\mathfrak{B}, b_1, \dots, b_k)$, удовлетворяющие следующему условию: для любых $l < m$, $f \in F_l$, $a \in \mathfrak{A}$ и $b \in \mathfrak{B}$ найдутся $g_1, g_2 \in F_{l+1}$ такие, что $g_1, g_2 \supset f$, $a \in \mathrm{dom}\, g_1$ и $b \in \mathrm{im}\, g_2$.

Будем обозначать $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$ для алгебр без выделенных констант, т. е. если $\sigma_1 = \sigma^*$.

Пусть ϕ — предложение языка σ^*. *Длиной* предложения ϕ, обозначим $ln(\phi)$, называется число кванторов в этой формуле. Тогда справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.7. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры с выделенной подалгеброй, $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$, ϕ — предложение языка σ^* и $ln(\phi) \leq m$. Тогда $\mathfrak{A} \models \phi \iff \mathfrak{B} \models \phi$.*

Доказательство. Индукция по длине предложения ϕ. Доказательство подобно доказательству теоремы 24.1 из [12].

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная булева алгебра с выделенной подалгеброй и $a \in \mathfrak{A}$. Обозначим:

$M(a) \rightleftharpoons \{m \neq 0 \mid w_a(m) \neq 0\}$ — носитель характеристической функции w_a.

Начиная с [11], мы определяем носитель функции w_a на ненулевых элементах, поскольку нумерация формул $\{T_k \mid k \geq 1\}$ начинается с единицы, а $w_a(0) = 0 \iff P(a)$.

$N(a) \rightleftharpoons \{m \in M(a) \mid \forall l \in M(a)(T_m \leq T_l \to m = l)\}$ — множество максимальных элементов множества $M(a)$ относительно следующего порядка: $\leq (m, l) \iff T_m \leq T_l$.

$M(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons M(1^{\mathfrak{A}})$; $N(\mathfrak{A}) \rightleftharpoons N(1^{\mathfrak{A}})$.

Заметим, что если множество $N(a)$ конечно, то множество $M(a)$ также конечно.

Следующее определение является уточнением подобного определения из [10].

Определение 1.8 [11]. Элемент a булевой алгебры с выделенной подалгеброй называется *локальным*, если $M(a)$ конечно, *m-простым*, если $M(a)$ конечно, $N(a) = \{m\}$ и выполнено $P(a)$. Элемент a называется *простым*, если

либо $a \in F(\mathfrak{A})$ и найдутся число $l \leq n$ и l-простой элемент $d \geq a$,

либо a является m-простым для некоторого m.

В [10] мы считали, что любой элемент $a \in F(\mathfrak{A})$ является простым. Однако в этом случае множество $N(a)$ может не быть одноэлементным, а в случае, когда

$N(a)=\varnothing$, найдутся элементы $a_i \leq a$ и i-простые элементы $b_i \geq a_i$, $1 \leq i \leq n$, такие, что $a = a_1 \cup \ldots \cup a_n$. Естественнее считать простыми элементами те элементы, для которых множество $\{i \mid a_i \neq 0\}$ одноэлементно. Уточненное определение оставляет все доказанные утверждения в [10] верными, поскольку любой элемент идеала Фреше в таком случае является объединением конечного числа простых элементов. Уточненное определение авторами введено в [11].

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой* (*m-простой*), если $1^{\mathfrak{A}}$ есть простой (m-простой) элемент.

Предложение 1.9 [10]. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ и $a \in \mathfrak{A}$. В алгебре $\mathfrak{A}$ выполнено $T_l(a)$ тогда и только тогда, когда элемент a является l-простым и $w_a(l)=1$.*

Предложение 1.10 [10]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n. Тогда любой элемент алгебры $\mathfrak{A}$ является объединением конечного числа попарно не пересекающихся простых элементов.*

Предложение 1.11 [10]. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. Тогда для любого $a \in \mathfrak{A}$ найдутся элементы $b, c \leq a$ такие, что $b \cup c = a$, $b \cap c = 0$, $P(b)$ и $c \in F(\mathfrak{A})$.*

Предложение 1.12 [10]. (а) *Если $n \geq 2$, то процесс построения формул $T_l(x)$ не прервется, т. е. для любого l формула $T_l(x)$ будет построена.*

(б) *Если $n \geq 3$, то найдется бесконечное множество A такое, что $T_i \# T_j$ для различных $i, j \in A$.*

Предложение 1.13 [10]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — l-простые алгебры, принадлежащие классу K_n. Предположим, что $w_{\mathfrak{A}}(l), w_{\mathfrak{B}}(l) \geq 2^m$ и $l > n$. Тогда $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Предложение 1.14 [10]. *Для того чтобы алгебра $\mathfrak{A}$ была локальной, необходимо и достаточно, чтобы множество $M(\mathfrak{A})$ было конечным.*

Предложение 1.15 [10]. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$. Тогда*

(а) *для любых непересекающихся элементов $a, b \in P(\mathfrak{A})$ и числа $l \in \mathbb{N}$ выполняется $w_{a\cup b}(l) = w_a(l) + w_b(l)$, если $w_a(l) < \infty$ или $w_b(l) < \infty$, и $w_{a\cup b}(l) = \infty$ в противном случае;*

(б) *для любых локальных элементов $a \leq b$ выполняется $w_a \leq w_b$;*

(в) *если a — k-простой элемент и $2 \leq k \leq n$, то $w_a(k) < \infty$.*

Предложение 1.16 [10]. *Пусть множества R, R^* из построения последовательности формул T_m, $m \geq 1$. Справедливы следующие утверждения:*

(1) *для любого $i \in R$ справедливо $T_i \leq T_R$;*

(2) *для любого $i \in R^*$ справедливо $T_i \# T_R$;*

(3) *если $i < j$, то $T_j \# T_i$;*

(4) *для любых i, j либо $T_i \leq T_j$, либо $T_i \# T_j$;*

(5) *$T_i \leq T_j$ тогда и только тогда, когда $i = j$ или найдутся множества $R_1, \ldots, R_k$ такие, что $i \in R_1$, $T_{l_1} = T_{R_1}$, $l_1 \in R_2, \ldots, T_j = T_{R_k}$.*

Определим формулы:

$$T^*_{n+j-1}(x) = P(x) \mathbin{\&} \Big(\neg Q(x) \mathbin{\&} (\exists y \leq x) T_j(y) \mathbin{\&} \Big(\bigwedge_{i\neq j,\ i\leq n} (\forall y \leq x) \neg T_i(y)\Big)\Big)$$

для $2 \leq j \leq n$,

$$T^*_l(x) = \Big(\neg \pi_R(x) \mathbin{\&} P(x) \mathbin{\&} (\forall y \leq x)\Big(\Big(\bigvee_{i\in R} (\forall z \leq y) \neg T_i(z)\Big) \to \pi_R(y)\Big)$$
$$\mathbin{\&} \Big((\forall y \leq x) \bigwedge_{i\in R^*} \neg T_i(y)\Big)\Big),$$

где множества R и R^* из определения формулы $T_l(x)$, $l > 2n-1$.

Предложение 1.17. *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_n$ *и* $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$. *Тогда* $\mathfrak{A} \models \exists x\ T_l(x)$.

Доказательство. Докажем для $l > 2n-1$, для $n < l \leq 2n-1$ доказательство аналогично.

Заметим, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ если $\mathfrak{A} \models T_l^*(a)$, то $\mathfrak{A} \models T_l(a)$ или $\mathfrak{A} \models (\exists y \leq a\ \exists z \leq a)(y \cap z = 0\ \&\ T_l^*(y)\ \&\ T_l^*(z))$. Рассмотрим множество

$Y = \{y \in \mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \models T_l^*(y)\}$.

Пусть $y_0 \in Y$ имеет наименьший тип суператомности $\tau(y_0) = (\alpha_0, n_0)$, т. е. для любого элемента $y \in Y$ с типом суператомности (α, n) выполнено:

$(\alpha_0 < \alpha)$ или $(\alpha_0 = \alpha)\ \&\ (n_0 \leq n)$.

Предположим, что $\mathfrak{A} \models (b \cap c = 0\ \&\ T_l^*(b)\ \&\ T_l^*(c))$ для некоторых $b, c \leq y_0$. Пусть $\tau(b) = (\alpha_1, n_1)$, $\tau(c) = (\alpha_2, n_2)$. В силу минимальности элемента $\tau(y_0)$ заключаем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$ и $n_0 + n_0 \leq n_1 + n_2 \leq n_0$. Противоречие. Стало быть, $\mathfrak{A} \models T_l(y_0)$. Предложение доказано.

Предложение 1.18. *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_n$, $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$, $\mathfrak{A} \models T_s(x)$. *Тогда* $s \leq l$.

Доказательство. Докажем для $l > 2n-1$, для $n < l \leq 2n-1$ доказательство аналогично. Предположим противное. Выберем наименьшее $s > l$, для которого $\mathfrak{A} \models T_s(x)$. Пусть $T_s = T_{R_s}$ и $T_l = T_{R_l}$. Если $p \in R_s$, то в силу минимальности s заключаем, что $p \leq l$. Если $p = l$, то найдется $p_1 \in R_s$ такое, что $p \neq p_1$. В этом случае $p_1 \leq l$ и $p_1 \neq l$. Следовательно, $p_1 < l$. Стало быть, $p_1 \in R_l$. Последнее влечет, что $T_{p_1} \leq T_p$. Противоречие. Значит, $p < l$. Таким образом, для каждого $p \in R_s$ найдется $q \in R_l$ такое, что $T_p \leq T_q$ и $p \leq q$. Последнее означает, что $R_s < R_l$ и $\Omega(R_s) < \Omega(R_l)$. Следовательно, $s \leq l$.

Предложение 1.19. *Пусть* $\mathfrak{A} \in K_n$, $\mathfrak{A} \models T_l^*(1)$. *Тогда* $\mathfrak{A}$ — *l-простая.*

Доказательство следует из предложений 1.17 и 1.18.

2. Теория без простой модели

В этом разделе построим алгебру из класса K_n, $n \geq 3$, теория которой не имеет простой модели.

В [11] доказана следующая

Теорема 2.1 [11]. *Пусть каждое разложение* $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ *счетной алгебры* $\mathfrak{A} \in K_n$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *если* $\mathfrak{B}$ *локальна, то для любого* $l \in N(\mathfrak{B})$ *если* $w_{\mathfrak{B}}(l) = \infty$, *то* $w_{\mathfrak{C}}(l) < \infty$;

(б) *если* $\mathfrak{B}$ *нелокальная, то* $\mathfrak{C}$ *локальная.*

Тогда $\mathfrak{A}$ — *простая модель.*

Заметим, что здесь $P(1^{\mathfrak{A}})$, $P(1^{\mathfrak{B}})$, $P(1^{\mathfrak{C}})$. Стало быть, алгебру $\mathfrak{B}$ можно заменить алгеброй (b), алгебру $\mathfrak{C}$ — алгеброй (c), где $b, c \in \mathfrak{A}$, $b \cap c = 0$, $b \cup c = 1$, $P(b)$, $P(c)$, и теорема останется верной.

В [10] для каждого числа $k \in \mathbb{N}$ построена алгебра $\mathfrak{N}_k \models T_k(1)$. Алгебра $\mathfrak{N}_k$ является локальной, неисчезающей и простой моделью для всех $k \in \mathbb{N}$. С использованием введенных алгебр $\mathfrak{N}_k$, $k \in \mathbb{N}$, и конструкции прямой суммы в [11] построена простая модель для каждой элементарной теории локальной модели. Для каждого числа k алгебра $\mathfrak{A}_k$ удовлетворяет условию (а) из теоремы 2.1.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2.2. *Локальная алгебра $\mathfrak{A} \in K_n$ является простой моделью своей теории тогда и только тогда, когда для любого элемента $b \in \mathfrak{A}$ если $l \in N(b)$ и $w_b(l) = \infty$, то $w_{1\setminus b}(l) < \infty$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathfrak{A}$ — простая модель, $b \in \mathfrak{A}$, $l \in N(b)$, $w_b(l) = \infty$, $c = 1 \setminus b$ и $w_c(l) = \infty$. Возможны два случая:

1) $l \in N(c)$;

2) $l \notin N(c)$.

В обоих случаях в силу предложений 1.10, 1.15(а) существует разложение $b = b_1 \cup \ldots \cup b_k$ такое, что $b_i \cap b_j = 0$ при $i \neq j$ и b_i — простые элементы, причем b_1 — l-простой элемент и $w_{b_1}(l) = \infty$. Заменяя b на b_1, без ограничения общности полагаем, что b — l-простой элемент и $w_b(l) = \infty$.

Случай 1: $l \in N(c)$. Аналогично найдется l-простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_d(l) = \infty$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{B} = (b)$, $\mathfrak{M} = (d)$ и $\mathfrak{N} = (1 \setminus (b \cup d))$.

Рассмотрим $(\mathfrak{A}, b) = (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0)$. Пусть $\phi(x)$ — полная формула в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} \models \phi(b)$, пусть $m = ln(\phi)$. Так как $w_b(l) = \infty$, найдутся непересекающиеся элементы $e_1, \ldots, e_{2^m} \leq b$ такие, что $T_l(e_i)$ для всех $1 \leq i \leq 2^m$. Возьмем $b_0 = e_1 \cup \ldots \cup e_{2^m}$. В силу предложения 1.15(а) получаем, что $w_{b_0}(l) = 2^m$. Пусть $\mathfrak{B}_0 = (b_0)$. Из $w_b(l) = \infty$ на основании предложения 1.15(в) следует, что $l > n$. Применяя предложение 1.13, заключаем, что $\mathfrak{B} \equiv_m \mathfrak{B}_0$. Поэтому $(\mathfrak{B}, b) \equiv_m (\mathfrak{B}_0, b_0)$. Обозначим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{A}_0, b_0) = (\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) \equiv_m (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) = (\mathfrak{A}, b).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$. Кроме того, $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$ — l-простые с $w_1(l) = \infty$. По теореме 1.5 $\mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \equiv \mathfrak{B} \times \mathfrak{M}$. Поэтому $\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}$. Кроме того, $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$ и ϕ — полная формула в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_0) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$. Следовательно, $w_{b_0}(l) = w_b(l) = \infty$. Противоречие.

Случай 2: $l \notin N(c)$.

В этом случае найдется l^*-простой элемент $d \leq c$ такой, что $w_d(l^*) = 1$. Тогда $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$, где $\mathfrak{B} = (b)$, $\mathfrak{M} = (d)$ и $\mathfrak{N} = (1 \setminus (b \cup d))$.

Рассмотрим $(\mathfrak{A}, b) = (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0)$. Пусть $\phi(x)$ — полная формула в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A} \models \phi(b)$, пусть $m = ln(\phi)$. Так как $w_b(l) = \infty$, найдется l-простой элемент $b_0 \leq b$ такой, что $w_{b_0}(l) = 2^m$.

Пусть $\mathfrak{B}_0 = (b_0)$. Тогда $(\mathfrak{B}, b) \equiv_m (\mathfrak{B}_0, b_0)$. Обозначим $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0 \times \mathfrak{M} \times \mathfrak{N}$. Следовательно,

$$(\mathfrak{A}_0, b_0) = (\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) \equiv_m (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0) \times (\mathfrak{N}, 0) = (\mathfrak{A}, b).$$

Отсюда следует, что $\mathfrak{A}_0 \models \phi(b_0)$. Кроме того, $T_{l^*}(b_0 \cup d)$, $T_{l^*}(b \cup d)$, $T_{l^*}(d)$. По теореме 1.5 $(\mathfrak{B}_0, b_0) \times (\mathfrak{M}, 0) \equiv (\mathfrak{B}, b) \times (\mathfrak{M}, 0)$. Поэтому $(\mathfrak{A}_0, b_0) \equiv (\mathfrak{A}, b)$. Кроме того, $(\mathfrak{A}_0, b_0) \models \phi(b_0)$ и ϕ — полная формула в $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}_0, b_0) = \mathrm{Th}(\mathfrak{A}, b)$. Следовательно, $w_{b_0}(l) = w_b(l) = \infty$. Противоречие.

($\Leftarrow$) Следует из теоремы 2.1.

Утверждение 2.3. *Пусть $\mathfrak{A} \in K_n$ — локальная алгебра, являющаяся простой моделью, $a \in \mathfrak{A}$ и выполнено $P(a)$. Тогда (a) — простая модель.*

Доказательство. Пусть $c \leq a$, $l \in N(c)$ и $w_c(l) = \infty$. В силу теоремы 2.2 получаем $w_{1\setminus c}(l) < \infty$. Следовательно, $w_{a\setminus c}(l) \leq w_{1\setminus c}(l) < \infty$. Значит, (a) — простая модель.

Утверждение 2.4. *Пусть $d \in \mathfrak{N}_i$ и d — l-простой элемент. Тогда $w_d(l) < \infty$.*

Доказательство. Пусть d — l-простой элемент и $w_d(l) = \infty$. Тогда $l \in N(d)$. Алгебра $\mathfrak{N}_i$ является простой моделью. Следовательно, $w_{C(d)}(l) < \infty$. Заметим, что $w_{\mathfrak{N}_i}(l) \geq w_d(l) = \infty$. Тогда $w_{\mathfrak{N}_i}(l) = \infty$. Из $\mathfrak{N}_i \equiv (d) \times C(d)$ в силу неисчезаемости алгебры $\mathfrak{N}_i$ получаем, что $\mathfrak{N}_i \equiv (d)$. Так как $\mathfrak{N}_i \models T_i(1)$, то $(d) \models T_i(1)$. Значит, $N(d) = \{i\}$, $i = l$ и $1 = w_d(i) = w_d(l) = \infty$. Полученное противоречие завершает обоснование.

Утверждение 2.5. (а) *Пусть $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (a_i)$, где a_i — локальные элементы для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ такого, что $P(a)$, если a — нелокальный элемент, то элемент $C(a)$ локальный.*

(б) *Пусть $\mathfrak{A} = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} ((a_i) \times (b))$, где a_i — локальные элементы для всех $i \in \mathbb{N}$, $T_l(b)$ для некоторого числа $l \in \mathbb{N}$, $l \notin \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} M(a_i)$ и $a \in \mathfrak{A}$. Тогда если a — нелокальный элемент, то $w_a(l) = \infty$.*

Доказательство. (а) Если a — нелокальный элемент, то по определению прямой суммы найдется число $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\sum\limits_{i > k} a_i \leq a$. Тогда $C(a) \leq a_1 \cup \ldots \cup a_k$. В этом случае $M(C(a)) \subset M(a_1) \cup \ldots \cup M(a_k)$ — конечное множество. Следовательно, $C(a)$ — локальный элемент.

П. (б) обосновывается аналогично п. (а).

Предложение 2.6. *Пусть $\mathfrak{A}$ — счетная локальная булева алгебра с выделенной подалгеброй, принадлежащая классу K_n, $l \in N(\mathfrak{A})$, $w_{\mathfrak{A}}(l) = \infty$. Тогда найдется l-простой элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $w_a(l) = \infty$ и $w_{1 \setminus a}(l) = 0$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{A}$ локальная, в силу предложения 1.10 $1^{\mathfrak{A}} = a_1 \cup \ldots \cup a_k$ — объединение конечного числа простых элементов. Без ограничения общности можно считать, что a_1 — l-простой элемент, $w_l(a_1) = \infty$, а элементы $a_2, \ldots, a_k$ не являются l-простыми. Предположим, что $w_{a_i}(l) \neq 0$ для некоторого $2 \leq i \leq k$. Тогда найдется число l^* такое, что a_i — l^*-простой элемент и $T_l \leq T_{l^*}$. Последнее влечет, что $l \notin N(\mathfrak{A})$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Утверждение 2.7. *Пусть $a \in \mathfrak{N}_i \times \mathfrak{N}_j$ для $i, j \in \mathbb{N}$ и выполнено $P(a)$. Тогда (a) — простая модель.*

Доказательство. Алгебра (a) локальна. Пусть $c \leq a$, $w_c(l) = \infty$ и $l \in N(c)$. Обозначим $d_1 = 1^{\mathfrak{N}_i}$, $d_2 = 1^{\mathfrak{N}_j}$. Тогда $c = (c \cap d_1) \cup (c \cap d_2)$. Так как $w_c(l) = \infty$, без ограничения общности можно считать, что $w_{c \cap d_1}(l) = \infty$. Поскольку $l \in N(c)$, то $l \in N(c \cap d_1)$. Поэтому в силу предложения 2.6 найдется l-простой элемент $c_1 \leq c \cap d_1$ такой, что $w_{c_1}(l) = \infty$. Применяя утверждение 2.4, заключаем, что $w_{c_1}(l) < \infty$. Противоречие. Стало быть, для любого $c \leq a$ если $l \in N(c)$, то $w_c(l) < \infty$. Следовательно, в силу теоремы 2.2 алгебра (a) является простой моделью своей теории.

Перейдем к описанию конструкции алгебры, которая не имеет простой модели.

Пусть $n \geq 3$. Тогда в силу предложения 1.12 существует бесконечное множество $A \subset \mathbb{N}$ такое, что $T_i \# T_j$ для всех $i, j \in A$. Несложно доказать существование множества A, дополнительно удовлетворяющего условию $T_1, T_2, \ldots, T_n \leq T_i$ для всех $i \in A$.

Зафиксируем произвольное число $l \in A$. Разобьем множество $\{T_i \mid i \in A,\ i \neq l\}$ на бесконечное множество троек формул:

$$\left\{A_0^k, B_0^k, C_0^k \mid k \in \mathbb{N}\right\} = \{T_i \mid i \in A,\ i \neq l\}.$$

Определим по индукции последовательность формул A_i^k, B_i^k, C_i^k следующим образом.

Базис индукции: A_0^k, B_0^k, C_0^k определены.

Шаг индукции: $A_{i+1}^k = T_{\{B_i^k, C_i^k\}}$, $B_{i+1}^k = T_{\{A_i^k, C_i^k\}}$, $C_{i+1}^k = T_{\{A_i^k, B_i^k\}}$.

Утверждение 2.8. *Для любых чисел $i, j, k, s \in \mathbb{N}$ если $k \neq s$, то справедливо следующее:*

(а) $A_i^k \leq B_{i+1}^k$, $A_i^k \leq C_{i+1}^k$, $A_i^k \leq A_{i+2}^k$, $A_i^k \leq B_{i+2}^k$, $A_i^k \leq C_{i+2}^k$, $A_i^k \# B_i^k$, $A_i^k \# C_i^k$, $A_i^k \# A_{i+1}^k$;

(б) $B_i^k \leq A_{i+1}^k$, $B_i^k \leq C_{i+1}^k$, $B_i^k \leq B_{i+2}^k$, $B_i^k \leq A_{i+2}^k$, $B_i^k \leq C_{i+2}^k$, $B_i^k \# A_i^k$, $B_i^k \# C_i^k$, $B_i^k \# B_{i+1}^k$;

(в) $C_i^k \leq B_{i+1}^k$, $C_i^k \leq A_{i+1}^k$, $C_i^k \leq C_{i+2}^k$, $C_i^k \leq A_{i+2}^k$, $C_i^k \leq B_{i+2}^k$, $C_i^k \# A_i^k$, $C_i^k \# B_i^k$, $C_i^k \# C_{i+1}^k$;

(г) $A_i^k \# A_j^s$, $A_i^k \# B_j^s$, $A_i^k \# C_j^s$;

(д) $B_i^k \# A_j^s$, $B_i^k \# B_j^s$, $B_i^k \# C_j^s$;

(е) $C_i^k \# A_j^s$, $C_i^k \# B_j^s$, $C_i^k \# C_j^s$.

Доказательство. Истинность (а), (б) и (в) следует непосредственно из построения формул и предложения 1.16.

(г) Докажем, что $A_i^k \# A_j^s$. Предположим, что $A_i^k \leq A_j^s$. Тогда $A_0^k \leq A_i^k$ или $B_0^k \leq A_i^k$, или $C_0^k \leq A_i^k$. Пусть $A_0^k \leq A_i^k$. Тогда $A_0^k \leq A_j^s$. Индукцией по j докажем, что такого быть не может. Если $j = 0$, то нарушается условие о независимости формул с нижним нулевым индексом. Шаг индукции. Пусть $A_0^k \leq A_j^s$ и $j \geq 1$. Если $A_0^k = A_j^s$, то одна из формул $A_0^s, B_0^s, C_0^s \leq A_0^k$. Противоречие. Следовательно, $A_0^k \neq A_j^s$ и, стало быть, $A_0^k \leq B_{j-1}^s$ или $A_0^k \leq C_{j-1}^s$. Индукционное предположение ведет к противоречию, что завершает доказательство утверждения 2.8. Остальные пункты доказываются аналогично.

Исходя из определения m-эквивалентности без труда доказываются следующие факты.

Утверждение 2.9. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Для того чтобы $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

(а) *для любого $a \in \mathfrak{A}$ найдется элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$;*

(б) *для любого $b \in \mathfrak{B}$ найдется элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.*

Доказательство непосредственно следует из определения 1.6.

Утверждение 2.10. *Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй. Тогда если $\mathfrak{A}_1 \equiv_m \mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_2$, то $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2 \equiv_m \mathfrak{B}_1 \times \mathfrak{B}_2$.*

Доказательство непосредственно следует из определения 1.6.

Утверждение 2.11. *Пусть $\mathfrak{A}_i$, $\mathfrak{B}_i$, $i \in \mathbb{N}$, — счетные суператомные булевы алгебры с выделенной подалгеброй и $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{B}_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i \equiv_m \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{B}_i.$$

Доказательство непосредственно следует из определения 1.6.

Предложение 2.12. *Пусть на алгебре $\mathfrak{A}$ истинна одна из формул $A^k_m(1)$, $B^k_m(1)$ или $C^k_m(1)$, а на алгебре $\mathfrak{B}$ истинна одна из формул $A^k_s(1)$, $B^k_s(1)$ или $C^k_s(1)$ и $m \leq s$. Если модели $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ простые, то $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.*

Доказательство. Заметим, что если на $\mathfrak{A}$ истинна одна из формул $A^k_m(1)$, $B^k_m(1)$, то множество $N(\mathfrak{A})$ одноэлементно и, следовательно, алгебра $\mathfrak{A}$ локальна исходя из определения последовательности формул $T_k(x)$. Аналогично алгебра $\mathfrak{B}$ также локальна. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — простые модели своих элементарных теорий.

Требуемое утверждение докажем индукцией по числу m.

Базис индукции $m = 0$. Имеем $\mathfrak{A} \equiv_0 \mathfrak{B}$.

Шаг индукции. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{A} \models A^k_{m+1}(1)$ и $\mathfrak{B} \models C^k_{s+1}(1)$ и $s \geq m$.

Напомним, что в [10] для каждого числа i построена алгебра $\mathfrak{N}_i$ такая, что $\mathfrak{N}_i \models T_i(1)$. В [11] доказано, что построенная алгебра является простой моделью своей элементарной теории.

Так как $\mathfrak{A} \models A^k_{m+1} = T_{\{B^k_m, C^k_m\}}(1)$, найдется число $t \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{A} \models T_t(1)$. По условию $\mathfrak{A}$ — простая модель своей элементарной теории и $\mathfrak{N}_t \models T_t(1)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_t$.

По построению $A^k_{m+1} = T_{\{B^k_m, C^k_m\}}$. Пусть $T_p = B^k_m$, $T_v = C^k_m$. Тогда $\mathfrak{N}_p \models B^k_m(1)$ и $\mathfrak{N}_v \models C^k_m(1)$. Рассмотрим прямую сумму $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\big(\mathfrak{N}^{(i)}_p \times \mathfrak{N}^{(i)}_v\big)$, где $\mathfrak{N}^{(i)}_p \cong \mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{N}^{(i)}_v \cong \mathfrak{N}_v$. Тогда $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\big(\mathfrak{N}^{(i)}_p \times \mathfrak{N}^{(i)}_v\big)$ — простая модель, на которой истинно предложение $A^k_{m+1}(1)$.

Напомним, что предложение $A^k_{m+1}(1) = T_{\{B^k_m, C^k_m\}}(1)$ аксиоматизирует полную теорию. Кроме того, $\mathfrak{A} \models A^k_{m+1}(1)$. Поэтому $\mathfrak{A} \equiv \sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\big(\mathfrak{N}^{(i)}_p \times \mathfrak{N}^{(i)}_v\big)$. В силу единственности простой модели имеем $\mathfrak{A} \cong \sum\limits_{i\in\mathbb{N}}\big(\mathfrak{N}^{(i)}_p \times \mathfrak{N}^{(i)}_v\big)$.

Следовательно, без ограничения общности можно считать, что

$$\mathfrak{A} = \sum_{i\in\mathbb{N}}((b_i) \times (c_i)), \quad \mathfrak{B} = \sum_{i\in\mathbb{N}}(({a'}_i) \times ({b'}_i)),$$

где $(b_i) \models B^k_m(1)$, $(c_i) \models C^k_m(1)$, $({a'}_i) \models A^k_s(1)$, $({b'}_i) \models B^k_s(1)$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

В силу индукционного предположения $(a'_i) \equiv_m (b_i) \equiv_m (b'_i) \equiv_m (c_i)$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, ввиду утверждения 2.11 $\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$.

Докажем, что $\mathfrak{A} \equiv_{m+1} \mathfrak{B}$. Для этого достаточно показать, что для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ найдется $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$. Существование такого же элемента $a \in \mathfrak{A}$ для элемента $b \in \mathfrak{B}$ доказывается аналогично.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1: выполнено $B^k_m(a)$ или $C^k_m(a)$. Рассмотрим элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $B^k_s(b)$. По индукционному предположению $(a) \equiv_m (b)$. Так как $\mathfrak{A}$ — локальная и простая модель, в силу утверждения 2.3 $(C(a))$ — простая модель. Заметим, что $(C(a)) \models A^k_{m+1}(1)$. Стало быть, $\mathfrak{A} \equiv (C(a))$. Следовательно, $\mathfrak{A} \cong (C(a))$. Аналогично $\mathfrak{B} \cong (C(b))$. Далее,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}, a) &\cong ((a), a) \times (C(a), 0) \equiv ((a), a) \times (\mathfrak{A}, 0)\\ &\equiv_m ((b), b) \times (\mathfrak{B}, 0) \equiv ((b), b) \times (C(b), 0) \cong (\mathfrak{B}, b),\end{aligned}$$

т. е. $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

Случай 2: выполнено $T_j(a)$, при этом $((T_j \leq B^k_m)$ и $(T_j \neq B^k_m))$ или $((T_j \leq C^k_m)$ и $(T_j \neq C^k_m))$ для некоторого j. Тогда $T_j \leq A^k_{m-1}$ или $T_j \leq B^k_{m-1}$, или $T_j \leq C^k_{m-1}$. В силу утверждения 2.8 $A^k_{m-1}, B^k_{m-1}, C^k_{m-1} \leq C^k_{s+1}$. Стало быть, найдется элемент $b \in \mathfrak{B}$ такой, что $T_j(b)$. Значит, по теореме 1.15 $(a) \equiv (b)$. Так как $(C(a)) \equiv \mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B} \equiv (C(b))$, то $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

Случай 3: $a \leq d$, $\neg P(a)$, $T_i(d)$ для $i \leq n$ и некоторого элемента $d \in \mathfrak{A}$. Так как $T_1, T_2, \ldots, T_n \leq C^k_{s+1}$, найдется элемент $e \in \mathfrak{B}$ такой, что $T_i(e)$. Тогда найдется $b \leq e$ с таким же числом атомов, что и у элемента $a \in \mathfrak{A}$. Значит, $((d), a) \cong ((e), b)$.

Отсюда следует, что $(\mathfrak{A}, a) \cong ((d), a) \times (C(d), 0) \equiv ((d), a) \times (\mathfrak{A}, 0) \equiv_m ((e), b) \times (\mathfrak{B}, 0) \equiv ((e), b) \times (C(e), 0) \cong (\mathfrak{B}, b)$, т. е. $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$.

Случай 4: найдутся элементы $c, d \in \mathfrak{A}$ такие, что $a = c \cup d$, $P(c)$, $d \in F(\mathfrak{A})$, $c \cap d = 0$, $(c) \not\equiv \mathfrak{A}$. В этом случае элемент $c = c_1 \cup \ldots \cup c_k$ — объединение конечного числа непересекающихся простых элементов. Пусть c_1 — r-простой элемент для некоторого r. Напомним, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_t$. Поскольку изоморфизм сохраняет элементарную характеристику, в силу утверждения 2.4 $w_{c_1}(r) < \infty$. Значит, элемент c есть объединение конечного числа элементов, удовлетворяющих случаю 1 или случаю 2, а элемент d есть объединение конечного числа элементов из случая 3.

Можно считать, что элементы, входящие в упомянутое разложение элементов c и d, попарно не пересекаются. Тогда можно конечное число раз применить утверждения, доказанные для случаев 1–3, и утверждение 2.10. Поэтому в силу утверждения 2.9 существование требуемого элемента $b \in \mathfrak{B}$ доказано.

Случай 5: $C(a) = c \cup d$, $P(c)$, $d \in F(\mathfrak{A})$, $c \cap d = 0$, $(C(c)) \not\equiv \mathfrak{A}$. Тогда для $C(a)$ имеет место случай 4. Заметим, что задача для элемента a найти элемент b с $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{B}, b)$ равносильна задаче найти элемент b с $(\mathfrak{A}, C(a)) \equiv_m (\mathfrak{B}, C(b))$. Поэтому этот случай симметричен случаю 4.

Заметим, что исходя из определения прямой суммы и того, что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{N}_l$, для любого элемента $a \in P^{\mathfrak{A}}$ либо $((a) \simeq \mathfrak{A}$ и $(C(a)) \not\simeq \mathfrak{A})$, либо $((a) \not\simeq \mathfrak{A}$ и $(C(a)) \simeq \mathfrak{A})$. Поэтому в силу предложения 1.11 для любого элемента $a \in \mathfrak{A}$ возможны только случаи 4 или 5. Таким образом, разбор случаев завершен и предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{D} \models T_l(1)$ и $\mathfrak{D}_k \models A^k_k(1)$ — алгебры, являющиеся простыми моделями. Для каждой алгебры $\mathfrak{B} = \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{D})$ и числа $m \in \mathbb{N}$ определим алгебру

$$\mathfrak{B}^{(m)} = (\mathfrak{M}'_i \times \mathfrak{D}) \times \sum_{i \in \mathbb{N}, i \neq m} (\mathfrak{M}_i \times \mathfrak{D}),$$

где $\mathfrak{M}'_i \models A^m_{m+1}(1)$ — алгебра, являющуюся простой моделью.

Построим последовательность алгебр $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k, \ldots$ следующим образом:

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D});$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1^{(1)}; \quad \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1^{(2)}, \quad \mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_2^{(2)};$$

$$\mathfrak{A}_5 = \mathfrak{A}_1^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_6 = \mathfrak{A}_2^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_7 = \mathfrak{A}_3^{(3)}, \quad \mathfrak{A}_8 = \mathfrak{A}_4^{(3)}.$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $r = 2^{k-1}$. Тогда определим

$$\mathfrak{A}_{r+1} = \mathfrak{A}_1^{(k)}, \ \mathfrak{A}_{r+2} = \mathfrak{A}_2^{(k)}, \ldots, \mathfrak{A}_{r+r} = \mathfrak{A}_r^{(k)}.$$

Утверждение 2.13. *Для каждого $i \in \mathbb{N}$ алгебра $\mathfrak{A}_i$ является простой моделью.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное $i \in \mathbb{N}$. Заметим, что множество $M(\mathfrak{A}_i)$ бесконечное. Следовательно, $\mathfrak{A}_i$ — нелокальная алгебра. Для любого разложения $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$ найдется $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $(a) \cong \mathfrak{B}$ и $C(a) \cong \mathfrak{C}$, при этом выполнено $P(a)$. В силу утверждения 2.5 тогда либо (a) локальна, либо $C(a)$ локальна. Стало быть, если $\mathfrak{B}$ нелокальная, то $\mathfrak{C}$ локальная и условие (б) теоремы 2.1 выполнено.

Пусть a локальный, $j \in N(a)$ и $w_a(j) = \infty$. По построению алгебры $\mathfrak{A}_i$ выполнено

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{s \in \mathbb{N}} (d_s),$$

где для любого s имеем (d_s) — простая модель и, кроме того, $(d_s) \models T_l(1)$, либо $(d_s) \models A_k^m(1)$ для некоторых m и k. Значит, $(d_s) \models T_t(1)$ для некоторого t. Поэтому для каждого $s \in \mathbb{N}$ найдется $t \in \mathbb{N}$ такой, что $(d_s) \cong \mathfrak{N}_t$. Тогда $a \leq d_1 \cup \ldots \cup d_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $a = (a \cap d_1) \cup \ldots \cup (a \cap d_k)$. Так как $w_a(j) = \infty$, то $w_{a \cap d_s}(j) = \infty$ для некоторого $s \leq k$. Так как $j \in N(a)$, то $j \in N(a \cap d_s)$. Найдутся число $r \in \mathbb{N}$ и непересекающиеся l_p-простые элементы e_p для $1 \leq p \leq r$ такие, что $a \cap d_s = e_1 \cup \ldots \cup e_r$. Без ограничения общности предположим, что $w_{e_1}(j) = \infty$. В этом случае $l_1 = j$ или $j < l_1$ и $T_j \leq T_{l_1}$. Последнее влечет, что $j \notin N(a)$. Значит, $l_1 = j$. Так как алгебра (d_s) — простая модель, в силу утверждения 2.4 $w_{e_1}(j) < \infty$. Противоречие. Аналогично $w_{e_2}(j) < \infty, \ldots, w_{e_r}(j) < \infty$. Стало быть, $w_{a \cap d_s}(j) < \infty$. Противоречие. По теореме 2.1 алгебра $\mathfrak{A}_i$ является простой моделью своей элементарной теории.

Предложение 2.14. *Для каждых $i, m \in \mathbb{N}$ найдется $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathfrak{A}_i \equiv_m \mathfrak{A}_j$ и $\mathfrak{A}_i \not\equiv \mathfrak{A}_j$.*

Доказательство. Рассмотрим число s такое, что $i \leq 2^{s-1}$ и $s \geq m$. Пусть $\mathfrak{A}_i = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D})$. Так как $i \leq 2^{s-1}$, то $\mathfrak{M}_s \models A_s^s(1)$. Рассмотрим алгебру

$$\mathfrak{A}_i^{(s)} = (\mathfrak{M}'_s \times \mathfrak{D}) \times \sum_{k \neq s} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D}).$$

Так как $\mathfrak{M}'_s \models A_{s+1}^s(1)$, в силу утверждения 2.10 и предложения 2.12 получаем

$$\mathfrak{A}_i^{(s)} \equiv_s (\mathfrak{M}_s \times \mathfrak{D}) \times \sum_{k \neq s} (\mathfrak{M}_k \times \mathfrak{D}) \equiv \mathfrak{A}_i.$$

Так как $s \geq m$, то, взяв $j = i + 2^{s-1}$, получим $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_i^{(s)} \equiv_m \mathfrak{A}_i$. Предложение доказано.

Определение 2.15. Будем говорить, что формула T_s *отделима под элементом* a, если $w_a(s) = 0$ или найдется s-простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_{a \setminus b}(s) = 0$.

Предложение 2.16. *Пусть $a \in \mathfrak{A}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Элемент a является локальным тогда и только тогда, когда формула T_l отделяется под элементом a.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Предположим, что a — нелокальный элемент и формула T_l отделяется под элементом a. В силу построения модели $\mathfrak{A}_i$ и утверждения 2.5 заключаем, что $w_a(l) = \infty$. Следовательно, найдется l-простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_{a \setminus b}(l) = 0$. Как ранее отмечалось, l-простой элемент является локальным. Значит, элемент b локальный. Следовательно, элемент $a \setminus b$ нелокальный. Тем самым в силу утверждения 2.5 $w_{a\setminus b}(l) = \infty$. Противоречие.

($\Rightarrow$) Пусть a — локальный элемент и $w_a(l) \neq 0$. Тогда $a \leq b_0 \cup c_0 \cup \ldots \cup b_k \cup c_k$ для некоторого числа $k \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$w_a(l) = w_{b_0\cap a}(l) + w_{c_0\cap a}(l) + \ldots + w_{b_k\cap a}(l) + w_{c_k\cap a}(l).$$

Заметим, что

$$\mathfrak{A}_i = \sum_{s\in\mathbb{N}}((b_s) \times (c_s)),$$

причем $(b_s) \cong \mathfrak{N}_{j_s}$ и $(c_s) \cong \mathfrak{N}_l$. В силу утверждения 2.8 формулы $T_{j_0}, T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots$ попарно независимы.

Кроме того, если $T_{i_j} \leq T_l$, то $A_0^k \leq T_l$, $B_0^k \leq T_l$ или $C_0^k \leq T_l$ для некоторого k, что невозможно по построению. Также по построению $\neg(T_l \leq T_{i_j})$ для всех i и j. Поэтому $T_l \# T_{i_j}$ для всех i и j.

Так как $T_l \# T_{i_j}$ для всех $j \leq k$, то $w_{b_s}(l) = 0$ для всех $s \leq k$. Значит, $w_a(l) \leq w_{c_1}(l) + w_{c_2}(l) + \ldots + w_{c_k}(l)$. Так как $w_{c_i}(l) = 1$ для всех $i \leq k$, то $w_a(l) \leq k < \infty$. Отсюда следует, что найдется l-простой элемент $b \leq a$ такой, что $w_b(l) = w_a(l)$. Стало быть, формула T_l отделима под элементом a.

Предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{B}$ — суператомная булева алгебра с выделенной плотной подалгеброй конечной ширины и $J = \{a \in \mathfrak{B} \mid \text{формула } T_l \text{ отделима под элементом } a\}$.

Утверждение 2.17. *Множество $J \subset \mathfrak{B}$ — идеал, причем $a \in J \iff \mathfrak{B} \models \Phi_J(a)$, где $\Phi_J(x) = ((\exists y \leq x)((y$ — l-простой элемент$)$ & $(w_{x\setminus y}(l) = 0)) \vee (w_x(l) = 0))$.*

Доказательство. Докажем, что J — идеал. Так как $w_0(l) = 0$, то $0 \in J$. Пусть $a \in J$ и $b \leq a$. Тогда $w_a(l) = 0$ или найдется l-простой элемент $c \leq a$ такой, что $w_{a\setminus c}(l) = 0$. Предположим, что $w_b(l) \neq 0$. Тогда $w_b(l) = w_{b\cap c}(l) + w_{b\setminus c}(l)$. Отсюда следует, что $b \cap c$ l-простой и $w_{b\setminus c}(l) = 0$. Последнее означает, что $b \in J$. Непосредственно проверяется, если $a \in J$ и $b \in J$, то $a \cup b \in J$.

В силу предложения 1.19 утверждение о том, что элемент является l-простым, записывается следующей формулой:

$$(x\ l\text{-простой}) = \Big(P(x)\ \&\ \Big((\forall y \leq x)\Big(\bigwedge_{i\in R^*} \neg T_i(y)\Big)\Big)\ \&\ ((\exists y \leq x)T_l(y))$$
$$\&\ \Big((\forall y \leq x)\Big(\Big(\bigvee_{i\in R}((\forall z \leq y)\neg T_i(z))\Big) \to \pi_R(y)\Big)\Big)\Big),$$

где $R = R_l$, $R^* = R_l^*$, π_r из определения формулы T_l.

Тогда

$$\Phi_J(x) = (((\exists y \leq x)((y - l\text{-простой элемент})$$
$$\&\ ((\neg\exists z \leq (x \setminus y))T_l(z))))\ \vee\ \neg((\exists y \leq x)T_l(y))).$$

Утверждение 2.18. $1^{\mathfrak{A}_i}/J$ *— атом для всех $i \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Для любого элемента $a \in \mathfrak{A}_i$ либо a локальный, либо $C(a)$ локальный. Стало быть, в силу предложения 2.16 либо $a \in J$, либо $C(a) \in J$. Следовательно, фактор алгебра $\mathfrak{A}_i/j$ — атом. Утверждение доказано.

Определим формулу:

$$(x/J - \text{атом}) = (x \notin J)\&(\forall a \leq x)(a \in J \iff x \setminus a \notin J).$$

Положим

$$\mathfrak{A} = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_i.$$

Пусть T — полная теория. Напомним, что если существует формула ϕ, совместная с теорией T, такая, что формула ϕ непополнима в теории T, а именно, для любой формулы ψ, совместной с теорией T, из $T \vdash (\psi \to \phi)$ следует, что ψ не является полной формулой, то теория T не имеет простой модели.

Заметим, что формула $(x/J - \text{атом})$ совместна с теорией $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$, так как $\mathfrak{A}_i \models ((1/J) - \text{ атом})$. Докажем, что указанная формула непополнима в данной полной теории.

Утверждение 2.19. *$\mathfrak{A}$ — нелокальная алгебра.*

Доказательство следует из того, что $M(\mathfrak{A})$ — бесконечное множество.

Обозначим через $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}|_\sigma$ ограничение алгебры $\mathfrak{A}$ на сигнатуру σ.

Утверждение 2.20. *Булева алгебра $\mathfrak{A}^*/J$ изоморфна булевой алгебре $\mathfrak{B}_\omega$.*

Доказательство следует из утверждения 2.18.

Теорема 2.21. *Теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ не имеет простой модели.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\Phi(x) = (x/J - \text{атом})$. Предположим, что теория $T = \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ имеет простую модель. Тогда найдется полная относительно теории T совместная с теорией T формула $\Psi(x)$ такая, что $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) \vdash (\Psi(x) \to \Phi(x))$. Так как Ψ совместна с T, найдется элемент $a \in \mathfrak{A}$ такой, что $\mathfrak{A} \models \Psi(a)$. Следовательно, $\mathfrak{A} \models \Phi(a)$. Стало быть, для некоторого числа k выполнено $a \leq 1^{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup 1^{\mathfrak{A}_k}$. Пусть $b = 1^{\mathfrak{A}_1}$. Так как a/J — атом, без ограничения общности будем считать, что $(b \cap a)/J$ — атом. Тогда $c = b \setminus (b \cap a) \in J$ и $d = (1^{\mathfrak{A}_2} \cap a) \cup \ldots \cup (1^{\mathfrak{A}_k} \cap a) \in J$. Заметим, что $a = (b \setminus c) \cup d = (a \cap b) \cup d$. Напомним, что

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} (\mathfrak{D}_i \times \mathfrak{D}), \quad \mathfrak{D} \models T_l(1), \quad \mathfrak{D}_i \models A_i^i(1).$$

Значит, найдутся непересекающиеся элементы $e_i, q_i \in \mathfrak{A}_1$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\mathfrak{A}_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} ((e_i) \times (q_i)), \quad \mathfrak{D}_i \cong (e_i), \quad \mathfrak{D} \cong (q_i).$$

Так как $(a \cap b)/J$ — атом, то $a \notin J$ и $a \cap b \notin J$. Значит, формула T_l не отделяется под элементом $a \cap b$. Следовательно, в силу предложения 2.17 элемент $a \cap b = b \setminus c$ нелокальный и $c \leq e_1 \cup q_1 \cup \ldots \cup e_s \cup q_s$ для некоторого числа $s \in \mathbb{N}$. Обозначим $r = (e_1 \cup q_1 \cup \ldots \cup e_s \cup q_s) \setminus c$.

Рассмотрим число $m = \max\{k, s, ln(\Psi)\} + 1$ (здесь $ln(\Psi)$ — длина предложения Ψ). Обозначим $j = 2^{m-1} + 1$, $b' = 1^{\mathfrak{A}_j}$. Заметим, что $\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_1^{(m)}$ и, следовательно, найдутся непересекающиеся элементы $e'_i, q'_i \in \mathfrak{A}_j$, $i \in \mathbb{N}$, такие, что

$$\mathfrak{A}_j \cong ((e'_m) \times (q'_m)) \times \sum_{i \neq m} ((e'_i) \times (q'_i)),$$

$$(e'_m) \models A_{m+1}^m(1), \quad (e'_i) \cong (e_i), \quad i \neq m, \quad (q'_i) \cong (q_i).$$

Так как $m > s$, найдутся непересекающиеся элементы $c', r' \leq e'_1 \cup q'_1 \cup \ldots \cup e'_s \cup q'_s$ такие, что

$$((e_1 \cup q_1 \cup \ldots \cup e_s \cup q_s), c) \cong ((e'_1 \cup q'_1 \cup \ldots \cup e'_s \cup q'_s), c'),$$

$$((e_1 \cup q_1 \cup \ldots \cup e_s \cup q_s), r) \cong ((e'_1 \cup q'_1 \cup \ldots \cup e'_s \cup q'_s), r'),$$

$$c' \cup r' = e'_1 \cup q'_1 \cup \ldots \cup e'_s \cup q'_s.$$

Отсюда следует, что

$$(\mathfrak{A}_1, b \setminus c) \cong ((e_1 \cup q_1 \cup \ldots \cup e_s \cup q_s), r) \times ((e_m) \times (q_m), e_m \cup q_m)$$
$$\times \sum_{i \neq m, i > s} ((q_i) \times (e_i), q_i \cup e_i) \equiv_m ((e'_1 \cup q'_1 \cup \ldots \cup e'_s \cup q'_s), r') \times ((e'_m) \times (q'_m), e'_m \cup q'_m)$$
$$\times \sum_{i \neq m, i > s} ((q'_i) \times (e'_i), q'_i \cup e'_i) \cong (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c'),$$

так как

$$(e_m) \times (q_m) \cong \mathfrak{D}_m \times \mathfrak{D} \equiv_m \mathfrak{D}'_m \times \mathfrak{D} \cong (e'_m) \times (q'_m).$$

Утверждение $\mathfrak{D}_m \equiv_m \mathfrak{D}'_m$ выполнено в силу предложения 2.13, поскольку $\mathfrak{D}_m \models A^m_m(1)$ и $\mathfrak{D}'_m \models A^m_{m+1}(1)$.

Пусть $a' = (b' \setminus c') \cup d$. Тогда

$$(\mathfrak{A}, a) \cong (\mathfrak{A}_1, b \setminus c) \times (\mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, d) \times (\mathfrak{A}_j, 0) \times \sum_{i \neq j, i > k} (\mathfrak{A}_i, 0)$$
$$\equiv_m (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c') \times (\mathfrak{A}_2 \times \ldots \times \mathfrak{A}_k, d) \times (\mathfrak{A}_1, 0) \times \sum_{i \neq j, i > k} (\mathfrak{A}_i, 0) \cong (\mathfrak{A}, a'),$$

поскольку $(\mathfrak{A}_1, b \setminus c) \equiv_m (\mathfrak{A}_j, b' \setminus c')$ и $(\mathfrak{A}_j, 0) \equiv_m (\mathfrak{A}_1, 0)$. Последнее выполнено в силу предложения 2.13, аналогично указанному выше.

Следовательно, $(\mathfrak{A}, a) \equiv_m (\mathfrak{A}, a')$. Так как длина формулы Ψ не превосходит числа m, из $(\mathfrak{A}, a) \models \Psi(a)$ следует, что $(\mathfrak{A}, a') \models \Psi(a')$. Из $(\mathfrak{A}, a) \models \Psi(a)$, $(\mathfrak{A}, a') \models \Psi(a')$ и полноты формулы $\Psi(x)$ следует, что $(\mathfrak{A}, a) \equiv (\mathfrak{A}, a')$. Легко заметить, что тогда $N(a) = N(a')$. Но по построению элемента a' имеем $N(a') = (N(a) \setminus \{p\}) \cup \{t\}$, где $A^m_m = T_p$ и $A^m_{m+1} = T_t$. Поэтому $N(a) \neq N(a')$. Противоречие. Следовательно, теория T не имеет простой модели. Теорема 2.21 доказана.

Анонсируем без доказательства следующее важное обобщение теоремы 2.21.

Следствие 2.22. *В классе K_3 (и, следовательно, в любом классе K_n) существует континуум попарно элементарно не эквивалентных счетных алгебр, теория каждой из которых не имеет простой модели.*

Доказательство этого утверждения мы приведем в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кейслер Г., Чэн Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Наука, 1996.
3. *Пальчунов Д. Е.* О неразрешимости теорий булевых алгебр с выделенным идеалом // Алгебра и логика. 1986. Т. 25, № 3. С. 326–346.
4. *Pal'chunov D. E.* Countably-categorical Boolean algebras with distinguished ideals // Stud. Logica. 1987. V. XLVI, N 2. P. 121–135.
5. *Пальчунов Д. Е.* Конечно-аксиоматизируемые булевы алгебры с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1987. Т. 26, № 4. С. 435–455.

6. *Пальчунов Д. Е.* Прямые слагаемые булевых алгебр с выделенными идеалами // Алгебра и логика. 1992. Т. 31, № 5. С. 499–537.

7. *Пальчунов Д. Е.* Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики. 1993. Т. 25. С. 82–103.

8. *Пальчунов Д. Е.* Теории булевых алгебр с выделенными идеалами, не имеющие простой модели // Тр. Ин-та математики. 1993. Т. 25. С. 104–132.

9. *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В., Турко А. И.* Автоустойчивость булевых алгебр с выделенными идеалами относительно сильных конструктивизаций // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 3. С. 617–628.

10. *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.* Локальные и неисчезающие суператомные булевы алгебры с выделенной плотной подалгеброй // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 6. С. 822–847.

11. *Пальчунов Д. Е., Трофимов А. В.* Теории суператомных булевых алгебр с выделенной подалгеброй, не имеющие счетно-насыщенной модели // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 654–668.

12. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1979.

Поступила в редакцию 12 сентября 2023 г.
После доработки 21 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Пальчунов Дмитрий Евгеньевич (ORCID 0000-0001-9487-3256)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
palch@math.nsc.ru

Трофимов Александр Викторович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
tr0f@mail.ru

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 517.54+517.518

ЕМКОСТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ И ОБОБЩЕННЫЕ ГРАНИЦЫ

Д. А. Сбоев

Аннотация. Рассматривается емкостная метрика на римановых многообразиях. С ее помощью вводятся емкостные граничные элементы и изучается граничное поведение замкнутых отображений с ограниченным искажением. Получены свойства пространств емкостных граничных элементов, изучены взаимосвязи между граничными элементами при различных показателях.

В статье исследуются также геометрические свойства обобщенной границы в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Описаны свойства метрики, при которых обобщенная граница единственна с точностью до гомеоморфизма, построены примеры таких метрик в различных областях. В областях с локально конечно связной границей на римановых многообразиях показано, что любой элемент обобщенной границы содержится в носителе некоторого емкостного граничного элемента. В качестве следствия получены результаты о взаимосвязи простых концов и емкостных граничных элементов.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.314

Ключевые слова: риманово многообразие, емкостная метрика, емкостной граничный элемент, обобщенная граница, метрика Мазуркевича, простой конец, граничное поведение, замкнутое отображение, отображение с ограниченным искажением.

Вопрос описания граничного поведения различных классов отображений восходит к результатам Каратеодори [1], Осгуда и Тейлора [2]. Пусть D, D' — области в $\mathbb{R}^2$, ограниченные жордановыми кривыми, и $f : D \to D'$ — конформное отображение. Тогда существует продолжение f до гомеоморфизма замкнутых областей $\overline{f} : \overline{D} \to \overline{D'}$. Как показывает пример диска с разрезом, условие жордановости необходимо для существования гомеоморфного продолжения на границу. Если отказаться от этого условия на границу, то гомеоморфное продолжение возможно на некоторую *обобщенную границу*. Каратеодори в работе [1] ввел границу простых концов. Данная конструкция положила начало геометрическому подходу к исследованию граничного поведения отображений.

Отметим, что дальнейшее развитие изучения граничного поведения отображений заключается в нахождении подхода, который не основывается на геометрии конкретной области и не опирается на теорему Римана о конформном отображении. Отметим работу Шлезингера [3], в которой он определил P-последовательности точек областей в $\mathbb{C}$, основываясь на понятии экстремальной длины (модуля семейства кривых). Суть определения P-последовательностей заключается в том, что модуль семейства ассоциированных разрезов стремится

Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РНФ, проект № 23-21-00359.

к нулю. Далее на P-последовательностях вводится отношение эквивалентности P^*-пар. Классы P^*-пар P-последовательностей совпадают с простыми концами в смысле Каратеодори для плоских областей. В работе [4] были введены граничные элементы в $\mathbb{R}^n$, основанные на понятиях цепи подпространств Соболева и емкости. С помощью этой концепции были установлены результаты о граничном поведении квазиконформных отображений. Следующий шаг — введение емкостной метрики, с помощью которой определяются емкостные граничные элементы. Емкостная метрика была введена в работе [5] (см. также [6]). Очевидное преимущество емкостной метрики — независимость определения от геометрии области, а также универсальность конструкции граничных элементов: емкостные граничные элементы суть те элементы, которые присоединяются к области при пополнении по емкостной метрике (в соответствии с теоремой Хаусдорфа о пополнении). Более подробный обзор результатов о граничном поведении отображений в квазиконформном анализе приведен в статье [7].

Общий подход к описанию граничного поведения отображений может быть сформулирован в следующих трех пунктах:

(1) ввести обобщенную границу, адекватную свойствам рассматриваемого класса отображений;

(2) исследовать граничное поведение отображений с помощью введенной обобщенной границы;

(3) установить взаимосвязь между обобщенной границей и границей в исходной топологии.

В работе [7] введена обобщенная граница, адекватная геометрии обратных к $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам, — граница емкостных граничных элементов в евклидовом пространстве, определенная с помощью весовой емкостной метрической функции. Посредством емкостных граничных элементов доказаны результаты о граничном поведении обратных к $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам, установлены взаимосвязи между емкостной границей и границей в исходной геометрии. Отметим также работу [8], в которой рассматриваются вопросы граничного поведения в подвижных областях с помощью обобщенной концепции емкостных граничных элементов.

В данной работе развиваются результаты [7]: рассматриваются емкостные граничные элементы на римановых многообразиях. Очевидное преимущество емкостной метрики — универсальность подхода. Многие доказательства опираются лишь на свойства емкости конденсаторов и топологию пространства, поэтому результаты о граничном поведении обратных к $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам и свойства емкостной метрики на римановых многообразиях устанавливаются с применением тех же идей, что и в [7].

В данной работе получены новые свойства емкостных границ, изучена взаимосвязь этих границ при различных показателях; исследовано граничное поведение не рассмотренного ранее при данном подходе класса отображений (замкнутые отображения с ограниченным искажением). Основная трудность в описании граничного поведения замкнутых отображений с ограниченным искажением — негомеоморфность таких отображений. С помощью полученных результатов по-новому доказываются известные ранее теоремы: существование гомеоморфного продолжения квазиконформного отображения на идеальную границу гиперболического пространства $\mathbb{H}^n$, несуществование квазиконформного отображения между областью с гребнем и шаром.

Кроме того, в работе рассматриваются «естественные» обобщенные границы в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Например, в диске с разрезом от обобщенной границы ожидается, что в локально связных точках на границе элемент обобщенной границы совпадает с точкой границы в исходной топологии; если же точка на разрезе (граница локально конечно связна в этой точке), то обобщенная граница «различает берега разреза». Пример такой естественной границы — граница Мазуркевича, заданная как присоединенные элементы при пополнении области по метрике Мазуркевича. Если взять другую метрику, отличную от метрики Мазуркевича, то получим другую обобщенную границу. В работе рассмотрен класс метрик в областях с локально конечно связной границей, удовлетворяющих некоторым аксиомам. Доказано, что любые две такие метрики задают гомеоморфные обобщенные границы. Таким образом, можно ввести обобщенную границу области с локально конечно связной границей, которая зависит только от топологии области. В качестве следствия этих результатов получены теоремы о взаимосвязи простых концов [9] (границы Мазуркевича) и емкостной границы в ограниченных областях с локально конечно связной границей в римановых многообразиях.

В статье приводятся иллюстрирующие примеры вводимых понятий, а также примеры, устанавливающие существенность условий некоторых теорем.

Приведем краткое описание структуры работы.

В разд. 1 приведены необходимые сведения о римановых пространствах, пространствах Соболева и емкости на римановых многообразиях.

Разд. 2 начинается с доказательства леммы 2.2, где устанавливается взаимосвязь между диаметром пластин конденсатора и емкостью конденсатора. В области D риманова многообразия M, $\dim M = n$, фиксируем континуум F такой, что $D\setminus F$ связно, и определяем емкостную метрику $\rho_{p,F}$, где $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), следуя [7]. Такой выбор показателя p связан с тем, что при $p > n$ p-емкость точки всегда больше нуля, а при $p \leq n-1$ (если $n \geq 3$) p-емкость спрямляемой кривой равна нулю (см., например, [10, гл. 4]). Благодаря лемме 2.2 топология, индуцированная емкостной метрикой, эквивалентна исходной топологии в области. Вводится емкостная граница — присоединенные элементы при пополнении области по емкостной метрике $\rho_{p,F}$. В этом же разделе устанавливается теорема о независимости граничных элементов от выбора континуума F, изучаются взаимосвязи между граничными элементами при разных показателях.

В разд. 3 устанавливаются теоремы о граничном поведении для замкнутых отображений с ограниченным искажением: образ емкостного граничного элемента — емкостный граничный элемент. В качестве следствия данного подхода получено описание граничного поведения квазиконформных отображений в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^n$, $n \geq 2$, рассмотрен вопрос о существовании квазиконформного отображения между областью с гребнем и шаром.

Разд. 4 посвящен обобщенным границам в областях с локально конечно связной границей в метрических пространствах. Если в области D задана метрика ϱ, то можно пополнить область по данной метрике. Присоединенные точки — элементы обобщенной границы $\partial_\varrho D$. Приводятся условия на метрику, которые характеризуют обобщенную границу $\partial_\varrho D$ с точностью до гомеоморфизма, устанавливаются свойства такой границы. В качестве следствия получены теоремы о непрерывной сюръекции границы простых концов [9] на емкостную границу в областях римановых многообразий. Приведены достаточные условия на геометрию границы, при которых любой из подходов — граница Мазуркевича, граница простых концов, емкостная граница, обобщенная граница $\partial_\varrho D$ — определяет одну и ту же обобщенную границу.

1. Предварительные сведения

Римановы многообразия. Подробное изложение римановой геометрии можно найти, например, в [11, 12].

Пусть M — n-мерное полное связное некомпактное риманово многообразие класса C^∞ с метрическим тензором g. Для точки $x \in M$ обозначим касательное пространство символом T_xM, и TM — касательное расслоение. Расстояние между точками $x, y \in M$ определяется как точная нижняя грань длин абсолютно непрерывных кривых γ с концевыми точками x и y:

$$d(x,y) = \inf_\gamma \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt,$$

где $\|\dot\gamma(t)\|^2 = g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))$.

В силу теоремы Ринова — Хопфа многообразие M геодезически полно и, следовательно, любые две точки $x, y \in M$ можно соединить геодезической длины $d(x,y)$. Полное риманово многообразие M *обладает свойством Гейне — Бореля*, т. е. любое замкнутое и ограниченное множество компактно.

Будем обозначать символом $B(x,r) = \{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ *открытый шар* в римановой метрике, а символом $B^E(x,r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$.

Объем в многообразии M определяется следующим образом. Пусть (U,φ) — карта в M. Рассмотрим гомеоморфизм $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ как изометрию между U и $(\varphi(U), \widetilde g)$, где $\widetilde g_x(X,Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$. Множество E, содержащееся в карте U, называется *измеримым*, если $\varphi(E)$ измеримо; объем E определяется формулой

$$\operatorname{vol}_g(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det \widetilde g}\, dx.$$

Объем произвольного множества E определяется как точная нижняя грань сумм

$$\operatorname{vol}_g(E) = \inf \sum_{i=1}^\infty \operatorname{vol}_g(E_i),$$

где $E = \bigcup\limits_{i=1}^\infty E_i$, множества E_i дизъюнктны, измеримы и каждое содержится в одной карте.

Для функций $f : M \to \mathbb{R}$ класса C^1 определен дифференциал $df : TM \to T\mathbb{R}$, в каждой карте (U,φ) дифференциал задается с помощью частных производных $\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial x^i}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал в пространстве со скалярным произведением (T_xM, g_x), существует единственный вектор ∇f, называемый *градиентом*, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_xM$. В координатах градиент ∇f выражается следующей формулой:

$$\nabla f = g^{-1}\frac{\partial f}{\partial x},$$

где g^{-1} — обратная матрица к g (кометрика), $\frac{\partial f}{\partial x}$ — вектор частных производных. Евклидов градиент $\frac{\partial f}{\partial x}$ обозначается символом $\nabla^E f$.

Пространства Соболева и емкость. Пусть E — измеримое множество в M. Пространства $L_p(E)$, $1 \le p < \infty$, определяются стандартным образом. Норма функции $u : E \to \mathbb{R}$ в $L_p(E)$ определяется по формуле

$$\|u \mid L_p(E)\| = \Big(\int\limits_E |u|^p \, d\,\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Если функция u принадлежит пространству $L_p(K)$ для каждого компакта $K \subset E$, то u принадлежит пространству $L_{p,\mathrm{loc}}(E)$.

Пусть $D \subset M$ — открытое множество. Функция $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ принадлежит пространству $L^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$, если существует векторное поле $X_f \in L_p(D)$[1] такое, что равенство

$$\int\limits_D f \,\mathrm{div}\,\varphi \, d\,\mathrm{vol}_g = -\int\limits_D g(X_f, \varphi) \, d\,\mathrm{vol}_g$$

выполняется для всех векторных полей φ класса $C^1_0(D; TM)$, где $\mathrm{div}\,\varphi$ — дивергенция поля φ. Векторное поле X_f — *обобщенный градиент* функции f, обозначаемый далее символом ∇f. Полунорма в $L^1_p(D)$ определяется по формуле

$$\big\|f \mid L^1_p(D)\big\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\| = \Big(\int\limits_D \|\nabla f\|^p \, d\,\mathrm{vol}_g\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство Соболева $W^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$, состоит из функций $f \in L_p(D) \cap L^1_p(D)$. Норма в пространстве W^1_p определяется равенством

$$\big\|f \mid W^1_p(D)\big\| = \|f \mid L_p(D)\| + \big\|f \mid L^1_p(D)\big\|.$$

Отметим, что соболевская функция $f \in L^1_p(M)$ в локальных координатах (U, φ) есть функция класса $L^1_{p,\mathrm{loc}}(\varphi(U))$ *в евклидовом смысле*. При этом на каждом компакте норма градиента $\|\nabla f\|$ билипшицево эквивалентна норме $\|\nabla^E (f \circ \varphi^{-1})\|$. Пространство $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, $1 \le p < \infty$, состоит из функций $u : D \to \mathbb{R}$ таких, что $u \in W^1_p(U)$ для любой компактно вложенного[2] открытого множества $U \Subset D$.

Более подробно о соболевских пространствах на римановых многообразиях см., например, [13].

Как обычно, *область* — открытое связное множество. Множество F называется *континуумом*, если F — связное компактное множество; F — *невырожденный континуум*, если F содержит хотя бы 2 точки. *Конденсатором* в области $D \subset M$ называется пара $\mathscr{E} = (F_1, F_0)$ континуумов $F_1, F_0 \subset M$. Если $F \Subset U$, то будем обозначать конденсатор $(F, \partial U)$ как пару (F, U).

Непрерывная функция $u : D \to \mathbb{R}$, принадлежащая пространству $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$, называется *допустимой для конденсатора* $\mathscr{E} = (F_1, F_0)$, если

$$(1)\ u|F_1 \equiv 1, \quad (2)\ u|F_0 \equiv 0, \quad (3)\ 0 \le u \le 1,$$

[1] Векторное поле X_f принадлежит пространству $L_p(D)$, если коэффициенты поля X_f суть функции класса $L_p(D)$.

[2] Множество $U \subset D$ называется *компактно вложенным*, если $\overline{U} \subset D$ и $\overline{U}$ компактно в D.

где $u|F_i$ — сужение функции u на F_i, $i = 0, 1$. Множество таких функций будем обозначать символом $\mathscr{A}(\mathscr{E})$.

Определение 1.1. *Емкость конденсатора* $\mathscr{E} = (F_1, F_0)$ в пространстве $L^1_p(D)$, $1 \le p < \infty$, определяется следующим образом:

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_p(D)\bigr) = \inf_{u \in \mathscr{A}(\mathscr{E}) \cap L^1_p(D)} \int\limits_D \|\nabla u\|^p \, d\operatorname{vol}_g .$$

Если множество функций $\mathscr{A}(\mathscr{E}) \cap L^1_p(D)$ пусто, то полагаем $\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_p(D)\bigr) = +\infty$.

Из определения емкости следует свойство монотонности.

Лемма 1.2. *Пусть D, $\widetilde{D}$ — открытые множества в M такие, что $D \subset \widetilde{D}$ и $\mathscr{E} = (T_1, T_0)$, $\mathscr{E}' = (T'_1, T'_0)$ — конденсаторы, где $T_i \subset T'_i$ для $i = 0, 1$ и $1 \le p < \infty$. Тогда выполнены следующие соотношения:*

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_p(D)\bigr) \le \operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}'; L^1_p(D)\bigr) \le \operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}'; L^1_p(\widetilde{D})\bigr).$$

Пример 1.3 (см., например, [14, пример 2.12]). В $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, емкость кольцевого сферического конденсатора $\mathscr{E} = (B^E(x_0, r), B^E(x_0, R))$ выражается следующей формулой при $1 < p < \infty$:

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_p(B^E(x_0, R))\bigr) = \begin{cases} \omega_{n-1}\bigl(\frac{|n-p|}{p-1}\bigr)^{p-1} |R^{\frac{p-n}{p-1}} - r^{\frac{p-n}{p-1}}|^{1-p}, & \text{если } p \ne n, \\ \omega_{n-1}\bigl(\ln \frac{R}{r}\bigr)^{1-n}, & \text{если } p = n. \end{cases}$$

Пример 1.4. Пусть M — полное связное некомпактное риманово многообразие. Скалярное произведение на TM будем обозначать символом g, индуцированная метрика обозначается через d и vol_g — объем в многообразии M.

Тогда замыкание любой компактно вложенной подобласти $U \Subset M$ с индуцированным расстоянием d и объемом vol_g обладает следующими свойствами:

(1) пространство $\overline{U}$ обладает свойством Гейне — Бореля (proper space), т. е. любое замкнутое и ограниченное множество в $\overline{U}$ компактно;

(2) для каждого шара $B \subset \overline{U}$ выполняется $(1,1)$-неравенство Пуанкаре: существует константа $C = C(U)$ такая, что для любой функции $u \in C^\infty(B)$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_g(B)} \int\limits_B |u - u_B| \, d\operatorname{vol}_g \le C \operatorname{rad}(B) \frac{1}{\operatorname{vol}_g(B)} \int\limits_B \|\nabla u\| \, d\operatorname{vol}_g,$$

где $u_B = \operatorname{vol}_g(B)^{-1} \int\limits_B u \, d\operatorname{vol}_g$ (доказательство неравенства Пуанкаре может быть получено аналогично [15, теорема 3.38 и § 3.3.6]);

(3) мера vol_g, ассоциированная с метрикой многообразия, n-Альфорс регулярна на внутренних шарах, т. е. существует константа $C > 0$ такая, что для любого шара $B \subset U$ выполняется двустороннее неравенство

$$\frac{1}{C} \operatorname{rad}(B)^n \le \operatorname{vol}_g(B) \le C \operatorname{rad}(B)^n.$$

Свойства (1), (3) могут быть доказаны с помощью перехода в локальные карты.

В работе [16] были получены оценки на модуль кривых, соединяющих пластины кольцевых сферических конденсаторов в метрических пространствах с мерой, удовлетворяющих свойствам (1)–(3) (в римановых многообразиях модуль семейства кривых, соединяющих пластины конденсатора $(B(x,r),B(x,R))$, и емкость этого конденсатора совпадают, см., например, [17, предложение 10.2, замечание 10.8]).

Для конденсатора $\mathscr{E}=(B(x,r),B(x,R))$, где $0<2r<R$ и $B(x,R)\Subset U$, p-емкость оценивается сверху (см. [16, теорема 3.1]):

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E};L^1_p(U)\bigr)\le\begin{cases} C_1\frac{F(r/4,R)}{F(2r,R)^p}, & \text{если } 1\le p<n,\\ C_2\bigl(\ln\frac{R}{r}\bigr)^{1-n}, & \text{если } p=n,\end{cases}$$

где $F(r,R)=c(r^{1-\alpha}-R^{1-\alpha})$ и $\alpha=\frac{n-1}{p-1}$, константы C_1, C_2 зависят от области U.

Емкость конденсатора $\mathscr{E}$, где $0<r<R$ и $B(x,2R)\Subset U$, также оценивается снизу (см. [16, теоремы 4.3, 4.9]):

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E};L^1_p(U)\bigr)\ge\begin{cases} c_1R^{n-p}, & \text{если } p>n,\\ c_2\frac{r^{np}}{R^{np+p-n}}, & \text{если } 1\le p\le n,\end{cases}$$

где константы c_1, c_2 зависят от области U.

Введем понятие p-параболического и p-гиперболического римановых многообразий (см., например, [18, 19]).

Определение 1.5. Многообразие M *имеет p-параболический тип*, если для некоторого $t_0>0$ и некоторой точки $x\in M$ выполняется соотношение

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{cap}\bigl((B(x,t_0),B(x,t));L^1_p(M)\bigr)=0.$$

Если же имеет место неравенство

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{cap}\bigl((B(x,t_0),B(x,t));L^1_p(M)\bigr)>0,$$

то многообразие M *имеет p-гиперболический тип*.

Отметим, что p-параболичность можно определить, используя функцию исчерпания (более подробно см. [18]).

Гиперболичность и параболичность многообразия также связана с существованием непостоянных положительных решений уравнения типа p-лапласиана и свойствами изопериметрических функций (см., например, работы [18–21]).

Пример 1.6. Из примера 1.3 выводим, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартной метрикой имеет p-параболический тип при $p\ge n$. При $1<p<n$ евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ имеет p-гиперболический тип.

Пример 1.7. Модель Пуанкаре плоскости Лобачевского $\mathbb{H}^2$ (см., например, [22, гл. 4]) — единичный евклидов круг $B^E(0,1)=\{x^2+y^2<1\}$ с метрическим тензором

$$g=\frac{4}{(1-(x^2+y^2))^2}\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Отметим, что метрика g в $\mathbb{H}^2$ *конформно-евклидова*, следовательно, тождественное отображение $\operatorname{Id}:(\mathbb{H}^2,g)\to(B^E(0,1),\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ конформно. Очевидно, что 2-емкость в $\mathbb{H}^2$ и 2-емкость в круге $B^E(0,1)$ совпадают.

Расстояние в гиперболической плоскости d до точки 0 выражается через евклидово расстояние $|\cdot|$ следующим образом: $d(0,z)=\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}$. Тогда приходим к соотношениям на емкость конденсаторов $\mathscr{E}_t=(B(0,t_0),B(0,t))$

$$\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}_t;L^1_2(\mathbb{H}^2)\bigr)\to\operatorname{cap}\bigl((B^E(0,\widetilde{t}_0),B^E(0,1));L^1_2(\mathbb{R}^2)\bigr)>0\quad\text{при } t\to+\infty,$$

где $\widetilde{t}_0 = \frac{e^{t_0}-1}{e^{t_0}-1}$ — евклидов радиус круга $B(0,t)$ в $\mathbb{H}^2$.

Таким образом, гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$ — многообразие 2-гиперболического типа.

Замечание 1.8. В примерах с гиперболической плоскостью (примеры 1.7, 2.13, 3.12) можно рассматривать не только двумерный случай, но и произвольное гиперболическое пространство $\mathbb{H}^n$ (модель в шаре $B^E(0,1)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с метрикой $g = \frac{4}{(1-|x|^2)^2}\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$).

Пример 1.9 [23, пример 5.3]. 1. Полное риманово многообразие M конечного объема $\mathrm{vol}_g(M) < \infty$ имеет p-параболический тип для всех $p \geq 1$.

2. Пусть M — многообразие Картана — Адамара, т. е. полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны. Если секционная кривизна K_M имеет отрицательную мажоранту $K_M < -a^2 < 0$, то M имеет p-гиперболический тип для $p \geq 1$.

2. Емкостные граничные элементы и их свойства

Емкостная метрическая функция и ее свойства. Введем емкость компакта в пространстве W_p^1, $1 \leq p < \infty$. Пусть D — область в римановом многообразии M размерности $n \geq 2$, E — некоторый компакт в D и $p \geq 1$. Определим емкость компакта E по формуле

$$\mathrm{cap}\big(E; W_p^1(D)\big) = \inf\big\|u \mid W_p^1(D)\big\|^p,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C^\infty(D)$ таким, что $u = 1$ в окрестности E.

Сформулируем некоторые свойства этой емкости.

Лемма 2.1. *Пусть $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$) и D — область в M. Выполнены следующие утверждения:*

(1) *если континуумы E_k содержатся в $U \Subset M$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и*

$$\mathrm{cap}\big(E_k; W_p^1(U)\big) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то $\operatorname{diam} E_k \to 0$ при $k \to \infty$;

(2) *если E — невырожденный континуум, то $\mathrm{cap}\big(E; W_p^1(D)\big) > 0$.*

Доказательство. Для доказательства (1) достаточно рассмотреть конечное покрытие U картами $(V_i, \varphi_i)_{i=1}^N$, при этом можно считать, что $\varphi_i(V_i) = B^E(0,1)$, и подчиненное разбиение единицы $(\lambda_i)_{i=1}^N$. Применяя [24, § 9.1.2, предложение 1], получаем, что диаметры $E_k \cap \operatorname{supp}\lambda_i$ стремятся к нулю для всех $i = 1, \dots, N$, отсюда заключаем, что $\operatorname{diam} E_k \to 0$ при $k \to \infty$.

П. (2) может быть доказан с помощью переноса допустимой функции в локальную карту (V, φ) со свойством $\varphi(V) = B^E(0,r)$, где образ $\varphi(E)$ содержит невырожденный субконтинуум. Продолжая перенесенную функцию с шара $B^E(0,r)$ и применяя [24, § 9.1.2, предложение 1], получаем требуемое.

В силу ACL свойства соболевских функций и формулы Ньютона — Лейбница в $\mathbb{R}^2$ на 1-емкость компакта $E \subset D$ выполняется следующее соотношение: $\operatorname{diam} E \leq \mathrm{cap}\big(E; \overset{\circ}{L}{}_1^1(D)\big)$ (ср. с [24, § 9.1.2, предложение 1]). Значит, при $n = 2$ утверждения пп. (1), (2) выполняются при $1 \leq p \leq 2$. $\square$

Следующая лемма изначально была доказана в $\mathbb{R}^n$ в работе [7]. Приведем ее доказательство в случае римановых многообразий с некоторыми модификациями.

Лемма 2.2. *Пусть D — область в римановом многообразии M, $\dim M = n$, и T — невырожденный континуум в D, B — фиксированный шар такой, что $\overline{B} \cap T = \varnothing$. Предположим также, что $n-1 < p \leq n$ $(1 \leq p \leq 2$, если $n = 2)$ и $(T_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность континуумов, содержащихся в B.*

Соотношение $\operatorname{cap}\bigl((T_{1,k}, T); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{diam}(T_{1,k}) \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Необходимость. Так как емкость монотонна (см. лемму 1.2), без ограничения общности можно считать, что континуум T содержится в некотором шаре B' и $\overline{B} \cap \overline{B'} = \varnothing$.

Пусть $n-1 < p < n$. Пусть также $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ такая последовательность функций, что u_k — допустимая функция для конденсатора $(T_{1,k}, T)$ и имеет место сходимость

$$\int\limits_D \|\nabla u_k\|^p \, d\operatorname{vol}_g \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

Покажем, что последовательность $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к нулю в $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Для этого воспользуемся неравенством Пуанкаре в шаре B' (см. пример 1.4)

$$\frac{1}{\operatorname{vol}_g(B')} \int\limits_{B'} |u_k - c_k| \, d\operatorname{vol}_g \leq C \operatorname{diam}(B') \biggl(\frac{1}{\operatorname{vol}_g(B')} \int\limits_{B'} \|\nabla u_k\|^p \, d\operatorname{vol}_g\biggr)^{\frac{1}{p}}. \qquad (1)$$

В силу неравенства (1) заключаем, что $u_k \to c_k$ в $L_1(B')$, при этом $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — ограниченная последовательность. Значит, с точностью до подпоследовательности имеет место сходимость $u_k \to c_0$ при $k \to \infty$ в $L_1(B')$.

Допустим, что $c_0 \neq 0$. Тогда функции $v_k = \frac{c_0 - u_k}{c_0}$ обладают следующими свойствами:

$$(a)\ \bigl\|v_k \mid W^1_p(B')\bigr\| \to 0 \text{ при } k \to \infty, \quad (b)\ v_k|T = 1.$$

Из свойств (a), (b) следует, что $\operatorname{cap}\bigl(T; W^1_p(B')\bigr) = 0$; противоречие с п. (2) леммы 2.1, значит, $c_0 = 0$.

Покажем, что имеет место сходимость $u_k \to 0$ при $k \to \infty$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$. Рассматривая произвольный шар $\widetilde{B}$ в D, который пересекается с B' по множеству ненулевой меры, в силу неравенства Пуанкаре (1) в шаре $\widetilde{B}$ получаем, что $u_k \to 0$ в $L_1(\widetilde{B})$. Таким образом, в силу связности D получаем, что $u_k \to 0$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$.

Применяя неравенство Пуанкаре в шаре B_1, заключаем, что последовательность $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ сходится к 0 при $k \to \infty$ в пространстве $W^1_p(B_1)$, следовательно, имеет место сходимость $\operatorname{diam} T_{1,k} \to 0$ при $k \to \infty$ в силу леммы 2.1 п. (1).

Случай $p = n$ сводится к рассмотренной ситуации с помощью рассуждения, приведенного в [7, лемма 2.1].

Достаточность. Допустим противное: $\operatorname{diam}(T_{1,k}) \to 0$ и существует константа β такая, что выполняется неравенство

$$\operatorname{cap}\bigl((T_{1,k}, T); L^1_p(D)\bigr) \geq \beta > 0 \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots.$$

С другой стороны, так как $\operatorname{diam}(T_{1,k}) \to 0$, то можно считать, что некоторая подпоследовательность континуумов $(T_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}$ (обозначена тем же символом) содержится в достаточно малом шаре $B(x_0, \varepsilon)$ и существует шар $B(x_0, r)$ такой, что дополнение $D \setminus B(x_0, r)$ содержит фиксированный континуум T. Используя лемму 1.2 и оценки емкости сферического кольцевого конденсатора из примера 1.4, получаем противоречие. □

Замечание 2.3. Доказательство леммы 2.2 не изменится, если вместо фиксированного континуума T рассмотреть конечное дизъюнктное объединение континуумов. Следовательно, дальнейшие результаты о емкостных граничных элементах тоже не изменятся.

Фиксируем невырожденный континуум F в области $D \subset M$, $\dim M = n$, такой, что $D \setminus F$ — связное множество. Следуя [7], определим емкостную метрическую функцию.

Определение 2.4. Емкостная метрическая функция между точками x, y из $D \setminus F$ определяется по формуле

$$\rho_{p,F}(x,y) = \inf_{\gamma} \operatorname{cap}\big((\gamma, F); L^1_p(D)\big)^{1/p},$$

где инфимум берется по всем кривым γ в $D \setminus F$ с концевыми точками x, y.

Теорема 2.5. *В случае $n-1 < p \le n$ ($1 \le p \le 2$, если $n = 2$) метрическая функция $\rho_{p,F}$ — метрика в области $D \setminus F$.*

Доказательство. Доказательство аксиомы симметричности и неравенства треугольника для функции $\rho_{p,F}$ проводится аналогично евклидову случаю, описанному в [7]. Докажем аксиому тождества: $\rho_{p,F}(x,y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$. Равенство $\rho_{p,F}(x,x) = 0$ следует из оценки на емкость сферического кольцевого конденсатора (см. пример 1.4). Пусть $\rho_{p,F}(x,y) = 0$, и допустим, что $x \ne y$. Тогда существуют кривые γ_k, соединяющие точки x, y для всех $k = 1, 2, \dots$, и $\operatorname{cap}\big((\gamma_k, F); L^1_p(D)\big) \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, точка x содержится в некотором шаре $B(x,r)$, при этом $\overline{B(x,r)}$ не пересекается с точкой y, поэтому диаметр любой подкривой $\widetilde{\gamma}_l$, содержащейся в $B(x,r)$, больше либо равен r. Следовательно, $\operatorname{diam}(\widetilde{\gamma}_l) \ge r$, что противоречит лемме 2.2. □

Далее в работе рассматриваем только те p, которые удовлетворяют неравенству $n-1 < p \le n$ ($1 \le p \le 2$, если $n = 2$).

Следующее утверждение показывает, что сходимость по емкостной метрике к точке $y \in D \setminus F$ эквивалентна сходимости в римановой метрике.

Предложение 2.6. *Пусть $y \in D \setminus F$ и $(y_l)_{l \in \mathbb{N}}$ — некоторая последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\rho_{p,F}(y_l, y) \to 0$ *при* $l \to \infty$,

2) $d(y_l, y) \to 0$ *при* $l \to \infty$.

Доказательство. Модифицируя доказательство [7, предложение 2.10] очевидным образом и учитывая, что $\operatorname{cap}\big((\{x\}, F); L^1_p(D)\big) = 0$ для всех $x \in D \setminus F$ (см. пример 1.4), получаем требуемое. □

Обозначим символом $\overline{M}$ одноточечную компактификацию многообразия M (компактификацию Александрова), см., например, [25, гл. 4, § 41(X), теорема 5]. Присоединенную точку будем обозначать символом ∞. Напомним, что окрестности точки ∞ суть все множества вида $M \setminus K$, где K — компактное множество в M.

Пополнение области по емкостной метрике. Пусть F — фиксированный континуум в области D такой, что $D \setminus F$ связно и $n-1 < p \le n$ ($1 \le p \le 2$, если $n = 2$). Обозначим символом $D_{\rho,p}$ метрическое пространство $D \setminus F$ с метрикой $\rho_{p,F}$. Определим отношение эквивалентности на фундаментальных в метрике $\rho_{p,F}$ последовательностях $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(z_l)_{l\in\mathbb{N}}$ в $D_{\rho,p}$ по правилу

$$(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \sim (z_l)_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad \lim_{l\to\infty} \rho_{p,F}(y_l, z_l) \to 0.$$

Тогда множество эквивалентных последовательностей с метрикой

$$\rho_{p,F}(h_1, h_2) = \lim_{l\to\infty} \rho_{p,F}(x_l, y_l),$$

где $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ суть представители классов h_1, h_2 соответственно, образует метрическое пространство, которое обозначим символом $\overline{D_{\rho,p}}$. По теореме Хаусдорфа (см. [26]) пространство $\overline{D_{\rho,p}}$ — полное метрическое пространство. Далее, если $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в метрике $\rho_{p,F}$, то символом $[(x_l)_{l\in\mathbb{N}}]$ будем обозначать класс эквивалентности данной последовательности.

Сформулируем возможное поведение представителей классов в пространстве $\overline{D_{\rho,p}}$.

Теорема 2.7. *Пусть $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ — класс эквивалентности последовательностей и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель класса h. Тогда возможно следующее поведение $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$:*

(1.1) $y_l \to y \in D \setminus F$ в римановой метрике при $l \to \infty$ и предел y не зависит от выбора представителя $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$;

(1.2) $y_l \to y \in F$ в римановой метрике при $l \to \infty$ и предел y не зависит от представителя $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$.

В противном случае выполняется следующее:

(2.1) если последовательность $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ограничена в римановой метрике, то имеет место сходимость $\operatorname{dist}(y_l, \partial D) \to 0$ при $l \to \infty$;

(2.2) если $\varliminf_{l\to\infty} d(y_l, x_0) < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то $\operatorname{dist}(y_{l_k}, \partial D') \to 0$ для любой ограниченной подпоследовательности $(y_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$;

(2.3) если $\varliminf_{l\to\infty} d(y_l, x_0) = \infty$ для некоторой точки $x_0 \in D$, то последовательность $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $y = \infty$ в топологии пространства $\overline{M}$.

Доказательство данного утверждения повторяет шаги доказательства предложения 2.17 в [7] с необходимыми изменениями. □

При пополнении $D \setminus F$ по емкостной метрике $\rho_{p,F}$ точки $y \in D \setminus F$ отождествляются естественным образом с классом эквивалентности постоянной последовательности $i(y) = (y, y, \dots)$. Из теоремы 2.7 выводим, что если $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель класса $h \in \overline{D_{\rho,p}}$ и $y_l \to y \in D\setminus F$ в римановой метрике при $l \to \infty$, то $h = [i(y)]$.

Обозначим символом $[D]$ все классы фундаментальных последовательностей в емкостной метрике, частичные пределы которых в римановой метрике принадлежат D.

Определение 2.8. Дополнение $H_{\rho,p}(D) = \overline{D_{\rho,p}} \setminus [D]$ называется *емкостной границей* области D. Метрика на $H_{\rho,p}(D)$ — сужение метрики $\rho_{p,F}$. Классы эквивалентности в $H_{\rho,p}(D)$ называются *емкостными граничными элементами.*

Определим носитель граничного элемента.

Определение 2.9. Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$. Тогда *носитель* $\mathscr{S}(h)$ граничного элемента h есть множество всех частичных пределов представителей $(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \in h$ в топологии пространства $\overline{M}$.

Из теоремы 2.7 следует, что носитель $\mathscr{S}(h)$ содержится в $\partial D \cup \{\infty\}$ для любого граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$. Используя теорему 2.7, выводим, что $H_{\rho,p}(D)$ — замкнутое подмножество в $\overline{D_{\rho,p}}$.

Замечание 2.10. Пусть $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$. Из фундаментальности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ в емкостной метрике следует, что для любых подпоследовательностей $(x_{l_m})_{m\in\mathbb{N}}$, $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ существуют кривые γ_{mk}, соединяющие точки x_{l_m}, x_{l_k}, такие, что

$$\operatorname{cap}\bigl((\gamma_{mk}, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0 \quad \text{при } m, k \to \infty.$$

Покажем, что кривые γ_{mk} покидают любой компакт $K \subset D$ для достаточно больших m и k. Допустим, что это не так: существуют подпоследовательности $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ и $(x_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$, компакт $K \subset D$ и кривые γ_k, соединяющие точки x_{l_k} и x_{m_k}, такие, что $\operatorname{cap}\bigl((\gamma_k, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$, и при этом найдутся точки $z_k \in \gamma_k$ такие, что $z_k \in K$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда $\rho_{p,F}(x_{l_k}, z_k) \to 0$ при $k \to \infty$ в силу монотонности емкости (см. лемму 1.2) и, значит, последовательность $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ фундаментальна в емкостной метрике $\rho_{p,F}$ и принадлежит классу h. Отсюда следует, что носитель h будет содержать некоторую точку $z_0 \in K \subset D$; противоречие с теоремой 2.7.

Рассмотрим примеры емкостных граничных элементов в некоторых областях.

Пример 2.11 (область с гребнем I). Пусть $2 < p \le 3$ и $\alpha > p - 1$. Положим

$$R^\alpha = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| < x^\alpha,\ x \in (0, 1),\ z \in (-1, 1)\},$$

и пусть $R = \{(0, 0, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in [-1, 1]\}$ — гребень. Фиксируем континуум F в R^α такой, что $R^\alpha \setminus F$ связно. Тогда гребень R — носитель *одного* граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(R^\alpha)$.

Используя кусочно-линейные функции, выводим, что $\operatorname{cap}\bigl(C_\varepsilon; L^1_p(R^\alpha)\bigr) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$, где $C_\varepsilon = (R^\alpha \cap \{x \le \varepsilon\}, F)$. Из этого получаем следующее:

(1) любая последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к гребню R в евклидовой метрике, фундаментальна в метрике $\rho_{p,F}$,

(2) любые две последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящиеся к гребню R в евклидовой метрике, эквивалентны по метрике $\rho_{p,F}$.

Пример 2.12 («расческа тополога» I). Пусть $1 \le p \le 2$ и S — квадрат $(0, 1)^2 \subset \mathbb{R}^2$. Удалим из S отрезок $I_k = [1/2, 1) \times \{2^{-k}\}$ для каждого $k = 1, 2, \dots$. Полученную область обозначим символом D. Тогда отрезок $J = [1/2, 1] \times \{0\}$ — носитель *одного* граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$.

Рассмотрим множества $E_k = ((1/2 - 2^{-k}, 1) \times (0, 2^{-k})) \cap D$ с границей C_k в D. Из монотонности емкости (см. лемму 1.2) и леммы 2.2 следует, что $\operatorname{cap}\bigl((C_k, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$. Следовательно, любая последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к J в евклидовой топологии, будет фундаментальна в емкостной метрике, так как точки x_m и x_n можно соединить кривой $\gamma_{mn} \subset E_k$ для некоторого k, при этом $k \to \infty$ при $m, n \to \infty$ (рис. 1). Из сходимости $\operatorname{cap}\bigl((C_k, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $k \to \infty$ выводим, что при $n \to \infty$

$$\operatorname{cap}\bigl((\gamma_{mn}, F); L^1_p(D)\bigr) \le \operatorname{cap}\bigl((E_k, F); L^1_p(D)\bigr) = \operatorname{cap}\bigl((C_k, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0.$$

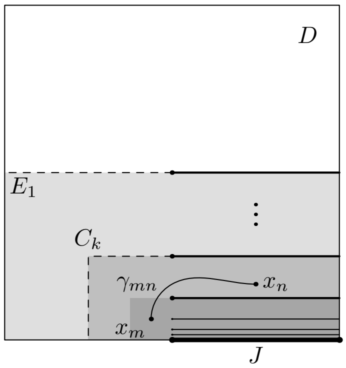

Рис. 1. К примеру 2.12.

Аналогично можно показать, что любые две последовательности, сходящиеся к отрезку J в евклидовой метрике, эквивалентны в метрике $\rho_{p,F}$.

Пример 2.13. Пусть F — замыкание евклидова шара $B^E(0,a)$, где a — некоторое число, $0 < a < 1$. Рассмотрим гиперболическую плоскость $\mathbb{H}^2$ и емкостную метрику $\rho_{2,F}$ в ней.

Как было замечено в примере 1.7, 2-емкость в $\mathbb{H}^2$ совпадает с евклидовой 2-емкостью. Так как $\mathbb{H}^2$ — единичный круг $B^E(0,1)$, то для любой функции из пространства $L_2^1(\mathbb{H}^2)$ существует продолжение $\widetilde{u} \in L_2^1(\mathbb{R}^2)$ (здесь пространство Соболева в евклидовом смысле). Отсюда заключаем, что в гиперболической плоскости $\mathbb{H}^2$ метрика $\rho_{2,F}$ билипшицево эквивалентна емкостной метрике $\rho_{2,F}^E$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$. В силу леммы 2.2 сходимость по метрике $\rho_{2,F}^E$ эквивалентна сходимости в евклидовой топологии.

Таким образом, приходим к описанию емкостных граничных элементов в $\mathbb{H}^2$:

$$H_{\rho,2}(\mathbb{H}^2) = \partial B^E(0,1).$$

Отметим, что окружность $\partial B^E(0,1)$ — абсолют (идеальная граница) гиперболической плоскости (см., например, [22]). Представители граничных элементов $h \in H_{\rho,2}(\mathbb{H}^2)$ суть все последовательности, сходящиеся в евклидовой топологии к фиксированной точке на окружности $\partial B^E(0,1)$.

Теперь рассмотрим одноточечную компактификацию $\mathbb{H}^2$. При компактификации присоединенная точка ∞ отождествляется со всеми точками граничной окружности (абсолюта). Пусть $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательности, сходящиеся к различным точкам x и y на граничной окружности. Обозначим классы эквивалентности последовательностей $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ символами h_x и h_y соответственно. Эти последовательности неэквивалентны, так как евклидово расстояние между точками x_l и y_l ограничено снизу для всех l, начиная с некоторого номера. С другой стороны, $\mathscr{S}(x) = \mathscr{S}(y) = \{\infty\}$ и гиперболическая плоскость $\mathbb{H}^2$ локально связна[3)] в точке ∞.

Совпадение носителей различных элементов h_x, h_y связано с тем, что емкость точки ∞ не равна 0 (см. пример 1.7).

Существование различных граничных элементов $H_{\rho,p}(M)$ с совпадающими носителями — бесконечно удаленной точкой ∞ — достаточное условие p-гиперболичности многообразия.

[3)] Область D называется *локально связной* в точке $x \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x существует подокрестность V такая, что $V \cap D$ связно.

Предложение 2.14. *Пусть M локально связно в точке ∞. Если существуют два различных граничных элемента $h_1, h_2 \in H_{\rho,p}(M)$ такие, что $\mathscr{S}(h_1) = \mathscr{S}(h_2) = \{\infty\}$, где ∞ — присоединенная точка в $\overline{M}$, то многообразие M имеет p-гиперболический тип.*

Доказательство. Фиксируем шар $B(x_0, r)$ и положим $F = \overline{B(x_0, r)}$ (пространство граничных элементов не зависит от выбора континуума F, см. теорему 2.16 ниже). Пусть h_1, h_2 — различные граничные элементы. Тогда существуют ρ-фундаментальные последовательности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ такие, что $d(x_l, x_0) \to \infty$ и $d(y_l, x_0) \to \infty$ при $l \to \infty$ для некоторой точки $x_0 \in M$. Без ограничения общности можно считать, что точки x_l, y_l содержатся в дополнении $M \setminus B(x_0, R_l)$, где R_l — некоторый радиус, $R_l \to \infty$ при $l \to \infty$. Так как M локально связно в ∞, точки x_l, y_l можно соединить кривой γ_l, содержащейся в $M \setminus B(x_0, R_l)$. Отсюда выводим неравенства

$$0 < \rho(h_1, h_2)^p \leq \operatorname{cap}\big((\gamma_n, B(x_0, r)); L_p^1(M)\big) \\ \leq \operatorname{cap}\big((M \setminus B(x_0, R_l), B(x_0, r)); L_p^1(M)\big).$$

Следовательно, M имеет p-гиперболический тип. $\square$

Замечание 2.15. Условие локальной связности в ∞ существенно. Если M — боковая поверхность цилиндра, то M имеет p-параболический тип при $p > 1$. С другой стороны, на цилиндре существуют неэквивалентные емкостные граничные элементы с носителями в точке ∞.

Свойства граничных элементов в целом. Следующая теорема показывает, что емкостные граничные элементы не зависят от выбора континуума F.

Теорема 2.16. *Пусть D — область в M и F, $\widetilde{F}$ — дизъюнктные континуумы в D такие, что $D\setminus F$ и $D\setminus\widetilde{F}$ связны, $n-1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$). Тогда существует гомеоморфизм между $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\widetilde{\rho},p}(D)$, где $\rho = \rho_{p,F}$, $\widetilde{\rho} = \rho_{p,\widetilde{F}}$.*

Прежде чем переходить к доказательству сформулированной теоремы приведем вспомогательное утверждение.

Лемма 2.17. *Пусть $(\gamma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательность кривых таких, что γ_l не пересекается с F и $\widetilde{F}$ для всех $l = 1, 2, \dots$, и $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$). Тогда соотношение $\operatorname{cap}\big((\gamma_l, F); L_p^1(D)\big) \to 0$ при $l \to \infty$ выполняется тогда и только тогда, когда $\operatorname{cap}\big((\gamma_l, \widetilde{F}); L_p^1(D)\big) \to 0$ при $l \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $\operatorname{cap}\big((\gamma_l, F); L_p^1(D)\big) \to 0$ при $l \to \infty$. Тогда существует последовательность функций $(u_l)_{l\in\mathbb{N}}$ такая, что каждая функция u_l — допустимая функция для конденсатора (γ_l, F), и выполняется соотношение

$$\int\limits_D \|\nabla u_l\|^p \, d\operatorname{vol}_g \to 0 \quad \text{при } l \to \infty.$$

Рассуждая аналогично доказательству необходимости в лемме 2.2, заключаем, что $u_l \to 0$ в пространстве $L_{1,\mathrm{loc}}(D)$ при $l \to \infty$. Значит, выделяя подпоследовательность, можно считать, что также имеет место сходимость $u_l \to 0$ при $l \to \infty$ п. в. в D.

Пусть v — функция класса $L_p^1(D) \cap C^\infty(D)$ такая, что $v|\widetilde{F} = 0$ и $v = 1$ вне некоторой окрестности континуума $\widetilde{F}$, $0 \leq v \leq 1$. Тогда функции $\widetilde{u}_l = u_l v$ будут допустимыми для конденсаторов $(\gamma_l, \widetilde{F})$ и выполняется неравенство

$$\left(\int\limits_D \|\nabla \widetilde{u}_l\|^p \, d\operatorname{vol}_g\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int\limits_D \|\nabla u_l\|^p v^p \, d\operatorname{vol}_g\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_D \|\nabla v\|^p u_l^p \, d\operatorname{vol}_g\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Следовательно, $\operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, \widetilde{F}); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $l \to \infty$.

В силу симметрии между F и $\widetilde{F}$ лемма доказана. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2.16.

Доказательство теоремы 2.16. Фиксируем дизъюнктные континуумы F и $\widetilde{F}$ в D и обозначим $\rho = \rho_{p,F}$, $\widetilde{\rho} = \rho_{p,\widetilde{F}}$.

Пусть $h \in H_{\rho,p}(D)$ — граничный элемент и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}} \in h$ — представитель этого элемента.

Шаг 1. Покажем, что $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в метрике $\widetilde{\rho}$.

Допустим противное: последовательность $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ не фундаментальна в метрике $\widetilde{\rho}$. Значит, существуют подпоследовательности $(y_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ такие, что $\widetilde{\rho}(y_{m_l}, y_{k_l}) > \beta$ для некоторого числа $\beta > 0$. С другой стороны, исходная последовательность фундаментальна в метрике ρ, поэтому $\rho(y_{m_l}, y_{k_l}) \to 0$ при $l \to \infty$. Пусть $(\gamma_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — последовательность кривых с концевыми точками y_{m_l} и y_{k_l}, которые не пересекаются с F и $\widetilde{F}$, и $\operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, F); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $l \to \infty$ (такие кривые существуют в силу замечания 2.10). Тогда по лемме 2.17 заключаем, что $\operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, \widetilde{F}); L^1_p(D)\bigr) \to 0$ при $l \to \infty$, и, следовательно, $\widetilde{\rho}(y_{m_l}, y_{k_l}) \to 0$ при $l \to \infty$; противоречие.

Шаг 2. Итак, полагаем $\Phi(h) = [(y_l)_{l\in\mathbb{N}}]_{\widetilde{\rho}}$. В силу леммы 2.17 это определение корректно. При этом из определения носителя заключаем, что $\mathscr{S}(h) = \mathscr{S}(\Phi(h))$.

Шаг 3. Чтобы показать непрерывность Φ достаточно показать, что из сходимости $\rho(h^l, h) \to 0$ при $l \to \infty$ следует, что $\widetilde{\rho}(\Phi(h^l), \Phi(h)) \to 0$ при $l \to \infty$. Рассуждая от противного аналогично шагу 1, получаем непрерывность Φ.

Таким образом, в силу симметрии между F и $\widetilde{F}$ отображение $\Phi : H_{\rho,p}(D) \to H_{\widetilde{\rho},p}(D)$ — гомеоморфизм. $\square$

Замечание 2.18. Теорема 2.16 верна в случае, когда континуумы F и $\widetilde{F}$ пересекаются. Действительно, рассмотрим третий континуум F', который не пересекается с F и $\widetilde{F}$. Тогда существуют гомеоморфизмы $H_{\rho,p}(D) \to H_{\rho',p}(D)$ и $H_{\rho',p}(D) \to H_{\widetilde{\rho},p}(D)$ и, следовательно, пространства $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\widetilde{\rho},p}(D)$ гомеоморфны.

Теперь рассмотрим взаимосвязь между емкостными граничными элементами при разных показателях. При ограничениях на геометрию границы можно показать, что граничные элементы не зависят от показателя p, т. е. они гомеоморфны.

Нам потребуется следующая лемма о жесткости топологии компактного хаусдорфова пространства.

Лемма 2.19. *Пусть X — компактное топологическое пространство, Y — хаусдорфово топологическое пространство и $\varphi : X \to Y$ — непрерывное биективное отображение. Тогда φ — гомеоморфизм.*

Теорема 2.20. *Пусть D — область в римановом многообразии M конечного объема $\operatorname{vol}_g(D) < \infty$ и $n-1 < p < q \leq n$ ($1 \leq p < q \leq 2$, если $n = 2$). Если некоторая окрестность $H_{\rho,q}(D)$ компактна, то существует непрерывная сюръекция*

$$\iota : H_{\rho,q}(D) \to H_{\rho,p}(D).$$

Если все носители граничных элементов $H_{\rho,p}(D)$ одноточечны, то ι — гомеоморфизм.

Доказательство. Фиксируем произвольный континуум F такой, что $D \setminus F$ связно. Далее будем опускать F из обозначений метрик, т. е. вместо $\rho_{p,F}$, $\rho_{q,F}$ будем писать ρ_p и ρ_q соответственно.

Если $n-1 < p \leq q \leq n$, то в силу неравенства Гёльдера выполняется оценка

$$\|f\|_p \leq \operatorname{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \|f\|_q$$

для всех функций $f \in L_q(D)$. Определим отображение $\iota : (D \backslash F, \rho_q) \to (D \backslash F, \rho_p)$ формулой $\iota(x) = x$ для всех $x \in D \setminus F$.

Пусть $x, y \in D \setminus F$ и γ — кривая, соединяющая эти точки, и $u \in L^1_q(D)$ — допустимая функция для конденсатора (γ, F). Тогда выполнены следующие соотношения:

$$\rho_p(x,y) \leq \operatorname{cap}\bigl((\gamma, F); L^1_p(D)\bigr)^{\frac{1}{p}} \leq \|\nabla u\|_p \leq \operatorname{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \|\nabla u\|_q.$$

Отсюда выводим, что $\rho_p(x,y) \leq \operatorname{vol}_g(D)^{1-\frac{p}{q}} \rho_q(x,y)$. Следовательно, отображение ι липшицево в емкостных метриках, поэтому существует единственное продолжение $\iota : \overline{D_{\rho,q}} \to \overline{D_{\rho,p}}$ на пополнения метрических пространств. Из теоремы 2.7 следует, что сужение

$$\iota | H_{\rho,q}(D) : H_{\rho,q}(D) \to H_{\rho,p}(D)$$

переводит граничные элементы в граничные элементы.

Докажем сюръективность отображения ι. Пусть $\theta \in H_{\rho,p}(D)$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель граничного элемента θ. В силу компактности окрестности $H_{\rho,q}(D)$ существует подпоследовательность $(x_{l_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такая, что $\rho_q(x_{l_k}, h) \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторого элемента $h \in H_{\rho,q}(D)$. Отсюда следует, что $\iota(h) = \theta$, и, значит, ι — сюръективное отображение.

Пусть все носители граничных элементов $H_{\rho,p}(D)$ одноточечны. Покажем, что ι — инъективное отображение. Допустим, что это не так: существуют различные емкостные граничные элементы $\theta, \theta' \in H_{\rho,q}(D)$ такие, что $\iota(\theta) = \iota(\theta') = h$. Пусть $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ суть представители элементов θ и θ' соответственно. В силу предположения последовательности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ эквивалентны в метрике ρ_p. Так как носители граничных элементов одноточечны, то существуют подпоследовательности (обозначены теми же символами) $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$, сходящиеся к одной точке $\mathscr{S}(h)$. В силу [7, предложение 2.28][4)] существуют кривые γ_l, соединяющие точки x_l, y_l при $l = 1, 2, 3 \ldots$, такие, что $\operatorname{diam} \gamma_l \to 0$ при $l \to \infty$.

Случай 1. Если $\mathscr{S}(h) \in \partial D$, то, используя монотонность емкости и лемму 2.2, выводим неравенства

$$\rho_q(x_l, y_l) \leq \operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, F); L^1_q(D)\bigr)^{1/q} \leq \operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, F); L^1_q(M)\bigr)^{1/q} \to 0 \quad \text{при } l \to \infty.$$

[4)] Доказательство данного утверждения переносится на случай римановых многообразий с очевидными модификациями.

Получаем противоречие с тем, что $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представители различных элементов в $H_{\rho,q}(D)$.

Случай 2. Пусть $\mathscr{S}(h) = \{\infty\}$. Докажем вспомогательный результат о емкости точки ∞ в областях конечной меры. Пусть $F \subset B(o,r)$ для некоторой точки $o \in D$. Тогда $\operatorname{cap}\bigl((\{\infty\}, F); L^1_s(D)\bigr) = 0$ для всех $s \geq 1$. Действительно, рассмотрим гладкую функцию u такую, что $u|\overline{B}(o,r) = 1$, $u|M \setminus B(o,R) = 0$ и $|\nabla u| \leq C(R-r)^{-1}$. Имеем

$$\operatorname{cap}\bigl((\{\infty\}, F); L^1_s(D)\bigr) \leq \int\limits_D |\nabla u|^s \, d\operatorname{vol}_g \leq \operatorname{vol}_g(D)C(R-r)^{-s} \to 0 \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Далее получаем оценки (ниже $B(o,R_l)$ — такой шар, что $\gamma_l \subset M \setminus B(o,R_l)$)

$$\begin{aligned}0 < \rho_q(x_l,y_l) &\leq \operatorname{cap}\bigl((\gamma_l, F); L^1_q(D)\bigr)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \operatorname{cap}\bigl((M \setminus B(o,R_l), F); L^1_q(D)\bigr)^{\frac{1}{q}} \to 0 \quad \text{при } l \to \infty.\end{aligned}$$

Итак, доказано, что ι — инъекция.

В силу леммы 2.19 отображение ι — гомеоморфизм. □

Сформулируем достаточные условия одноточечности носителей граничных элементов. Для этого введем понятие сильно достижимой точки.

Пусть $p \geq 1$ и D — область, $x \in \partial D$. Точка $x \in \partial D$ называется *p-сильно достижимой*, если для любой окрестности U точки x существуют подокрестность $V \subset U$, компакт $F \subset D$ и число $\delta > 0$ такие, что для всех континуумов F_1 в D, пересекающих ∂U и ∂V, емкость конденсатора $\mathscr{E} = (F_1, F_0)$ ограничена снизу: $\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_p(D)\bigr) > \delta$. Граница ∂D называется *p-сильно достижимой*, если каждая точка $x \in \partial D$ p-сильно достижима.

Модифицируя рассуждение [7, предложение 4.4], получаем, что в областях с p-сильно достижимой границей все граничные элементы имеют *одноточечный* носитель.

Достаточное условие компактности окрестности граничных элементов приведено в следствии 4.5 — условие локальной конечной связности границы ∂D.

Замечание 2.21. В теореме 2.20 условие одноточечности носителей существенно. Пусть R^α — область с гребнем степени $1 < \alpha < 2$, тогда гребень R 3-сильно достижим (см. [27, теорема 5.4]) и, следовательно, в $H_{\rho,3}(R^\alpha)$ точки гребня представляют различные граничные элементы. С другой стороны, при $2 < p < \alpha + 1$ гребень R отождествляется в один элемент в пространстве $H_{\rho,p}(R^\alpha)$ (см. пример 2.11).

3. Граничное поведение отображений классов Соболева

В данном разделе установим теоремы о граничном поведении замкнутых отображений с ограниченным искажением: эти отображения липшицевы в емкостных метриках; образ граничного элемента — граничный элемент. Аналогичные идеи могут быть применены для изучения граничного поведения обратных к $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам на римановых многообразиях. При топологических ограничениях на границы областей будут получены теоремы о граничном поведении в исходной геометрии.

Далее D, D' — области в римановых многообразиях (M,g), $(N,\overline{g})$ одинаковой размерности $n \geq 2$, символом d_N обозначим риманову метрику в N.

Следуя Ю. Г. Решетняку (см. [28]), определим отображения класса W^1_q, $1 \le q < \infty$, со значениями в римановом многообразии.

Определение 3.1. Отображение $f : D \to D'$ *принадлежит* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D; D')$, $1 \le q < \infty$, если выполнены следующие условия:

(1) отображение f принадлежит $L_{q,\mathrm{loc}}(D; D')$: функция $d_N(z_0, f(\cdot))$ принадлежит $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ для некоторой точки $z_0 \in D'$,

(2) существует функция $w \in D$ класса $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ такая, что для любой точки $z \in N$ функция $[f]_z(x) = d_N(z, f(x))$ принадлежит пространству $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и выполнено поточечное неравенство

$$\|\nabla[f]_z(x)\| \le w(x) \quad \text{для п. в. } x \in D. \tag{2}$$

Существует наименьшая функция w (верхняя огибающая семейства $\|\nabla[f]_z\|$), удовлетворяющая неравенству (2) (подробнее см. [28, § 1.4]). Верхняя огибающая — норма обобщенного дифференциала $\|Df\|$ отображения f.

Другие эквивалентные определения отображений класса Соболева между римановыми многообразиями приведены в [29, предложение 1].

Якобиан отображения f определяется следующим образом:

$$\mathscr{J}(x, f) = \lim_{\substack{r\to 0,\\ B(y,r)\ni x}} \frac{\mathrm{vol}_{\overline{g}}(f(B(y,r)))}{\mathrm{vol}_g(B(y,r))}.$$

Если отображение f класса $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D; D')$, то f аппроксимативно дифференцируемо для п. в. $x \in D$ (см., например, [10, гл. 6]) и для отображений класса Соболева выполнена формула замены переменной (см., например, [30, теоремы 3.2.5, 3.1.8]).

Граничное поведение замкнутых отображений с ограниченным искажением.

Определение 3.2. Отображение $f : D \to D'$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если выполнены следующие условия:

(1) $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D; D')$,

(2) существует константа $K \ge 1$ такая, что выполняется поточечная оценка

$$\|Df(x)\|^n \le K\mathscr{J}(x, f) \quad \text{для п. в. } x \in D.$$

Замечание 3.3. Наименьшая константа K в неравенстве выше — *коэффициент внешнего искажения*, обозначаемый через $K_O(f)$. Вместе с коэффициентом внешнего искажения вводится также *коэффициент внутреннего искажения* $K_I(f)$ — наименьшая константа K', удовлетворяющая неравенству

$$\mathscr{J}(x, f) \le K'(\inf_{X\in T_xM,\, \|X\|_{T_xM}=1} \|Df(x)\langle X\rangle_{T_{f(x)}N}\|)^n \quad \text{для п. в. } x \in D.$$

Коэффициенты $K_O(f)$ и $K_I(f)$ связаны следующими соотношениями (см. [31]):

$$K_I(f) \le K_O(f)^{n-1} \quad \text{и} \quad K_O(f) \le K_I(f)^{n-1}.$$

В [31, § 4] приведено другое определение отображений с ограниченным искажением на римановых многообразиях.

Определение 3.4. Пусть M, N — n-мерные римановы многообразия класса C^1. Непрерывное отображение $f : M \to N$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если найдется число $K \in [1, \infty)$ такое, что для всех

$a \in M$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют допустимые карты $t : U \to \mathbb{R}^n$, $s : V \to \mathbb{R}^n$, определенные в окрестностях точек $a \in M$, $b = f(a) \in N$, изометричные[5)] в точках a, b соответственно, для которых суперпозиция $\widetilde{f} = s \circ f \circ t^{-1}$ — отображение с ограниченным искажением, причем $K_O(\widetilde{f}) \le K + \varepsilon$.

Наименьшая константа K называется *коэффициентом внешнего искажения* f.

Преимущество определения 3.4 — возможность использовать локальные результаты, полученные в $\mathbb{R}^n$, в случае римановых многообразий.

Следующее предложение выражает связь между определениями 3.2 и 3.4.

Предложение 3.5. *Пусть M, N — римановы многообразия одинаковой размерности и $f : M \to N$ — непрерывное отображение. Тогда определения* 3.4 *и* 3.2 *эквивалентны, причем коэффициент внешнего искажения не зависит от выбора определения.*

Доказательство. Для доказательства данного утверждения достаточно воспользоваться эквивалентными определениями отображений класса Соболева на римановых пространствах (см. [29, предложение 1]) и учесть следующее наблюдение. Пусть $\varepsilon > 0$ и карта $t : U \to \mathbb{R}^n$ изометрична в точке $a \in M$, тогда существует достаточно малая окрестность U' такая, что в этой окрестности выполняется следующая оценка на метрический тензор: $1 - \varepsilon \le \|g\| \le 1 + \varepsilon$. $\square$

В [32] приведен обзор основных результатов отображений с ограниченным искажением на римановых многообразиях, а также другие подходы к определению этого класса отображений.

Сформулируем топологические свойства отображений с ограниченным искажением. Напомним, что отображение $f : D \to D'$ называется *дискретным*, если множество $f^{-1}(y)$ дискретно для всех $y \in D'$, и f *открыто*, если образ любого открытого множества открыт.

Теорема 3.6 [31]. *Пусть $f : D \to D'$ — непрерывное непостоянное отображение с ограниченным искажением между областями в римановых многообразиях. Тогда f открыто и дискретно.*

Доказательство теоремы 3.6 можно получить с помощью перехода в локальные координаты (см. определение 3.4), см. также [32].

В силу открытости непостоянных отображений с ограниченным искажением можно считать, что $D' = f(D)$.

В следующем определении все топологические операции рассматриваются в топологии компактифицированного пространства $\overline{M}$.

Определение 3.7. Отображение $f : D \to D'$ называется *замкнутым*, если образ замкнутого в индуцированной топологии в D множества замкнут в индуцированной топологии в D'.

Замкнутые отображения с ограниченным искажением наследуют многие свойства отображений с ограниченным искажением в нормальных областях (о нормальных областях см., например, [17]).

Следующие топологические свойства замкнутых, непрерывных, открытых и дискретных отображений приведены в [33, 34]. В этом и следующих результатах требуется ориентируемость многообразий, чтобы ввести понятие локального индекса отображения в точке (о локальном индексе см., например, [17, 32, 34]).

5) Карта $t : U \to \mathbb{R}^n$ называется изометричной в точке $a \in U$, если перенесенный риманов тензор $\widetilde{g}$ в точке $t(a)$ — тождественная матрица.

Теорема 3.8 [33, 34]. *Пусть M, N — ориентируемые связные римановы многообразия одинаковой размерности $n \geq 2$, D, D' — области в M и N соответственно, $f : D \to D'$ — непостоянное замкнутое непрерывное отображение с ограниченным искажением. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *f — замкнутое отображение,*

(2) *любая последовательность точек D, сходящаяся к точке границы ∂D, переводится f в последовательность, не имеющую подпоследовательностей, сходящихся к некоторой точке $f(D)$,*

(3) *f — собственное отображение*[6)]*,*

(4) *$N(f, D) = \sup\{N(y, f, D) \mid y \in D\} = p$, где $N(y, f, D)$ — мощность множества прообразов $f^{-1}(y)$ в D (индикатриса Банаха), причем для любого $y \in D'$ выполняется равенство*

$$p = \sum_{j=1}^{k} i(x_j, f), \quad f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

Нам понадобится следующая оценка на емкость образа конденсатора. В случае евклидовых пространств это доказано в работе [35], обобщающей результаты [36].

Теорема 3.9 [35, теорема 3.2]. *Пусть M, N суть ориентируемые римановы многообразия одинаковой размерности $n \geq 2$, D, D' — области в M и N соответственно, $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Пусть также $\mathscr{E} = (T_1, T_0)$ — конденсатор в D, тогда выполнена оценка*

$$\operatorname{cap}\bigl(\widetilde{f}\mathscr{E}; L^1_n(D')\bigr) \leq K_I(f) \operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_n(D)\bigr),$$

где $\widetilde{f}\mathscr{E} = (f(T_1), f(T_0) \setminus f(D \setminus T_0))$.

Доказательство теоремы 3.9 переносится на римановы многообразия с очевидными модификациями.

Перейдем к описанию граничного поведении непрерывных замкнутых отображений с ограниченным искажением.

Пусть M, N — ориентируемые римановы многообразия размерности $n \geq 2$, D, D' суть области в M и N соответственно и $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Выберем континуум $F' \subset D' \setminus f(B_f)$, где B_f — множество ветвления отображения f, так, что $D' \setminus F'$ связно. Можно считать, что F' — некоторый достаточно малый шар. Тогда прообраз $f^{-1}(F')$ — конечное объединение дизъюнктных континуумов, причем, уменьшая F', можем считать, что $D \setminus f^{-1}(F')$ связно. Положим $F = f^{-1}(F') = F_1 \cup \cdots \cup F_p$, где p — максимальная кратность f. Компакт F обладает следующим свойством: если γ — кривая, не пересекающая F, то в силу теоремы 3.9 выполняется оценка

$$\operatorname{cap}\bigl((f(\gamma), f(F)); L^1_n(D')\bigr) \leq K_I(f) \operatorname{cap}\bigl((\gamma, F); L^1_n(D)\bigr).$$

Выбор компакта F не влияет на описание граничного поведения в терминах граничных элементов (см. замечание 2.3 и теорему 2.16).

[6)] Отображение f называется *собственным*, если прообраз компактного множества компактен.

Теорема 3.10. *Пусть M, N — ориентируемые римановы многообразия размерности $n \geq 2$, D, D' суть области в M и N соответственно и $f : D \to D'$, $D' = f(D)$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Тогда отображение $f : D_{\rho,n} \to D'_{\rho,n}$ липшицево в емкостных метриках и существует единственное продолжение $\overline{f} : \overline{D_{\rho,n}} \to \overline{D'_{\rho,n}}$ на пополнения пространств.*

Более того, $\overline{f}$ переводит граничные элементы в граничные элементы:

$$\overline{f}|H_{\rho,n}(D) : H_{\rho,n}(D) \to H_{\rho,n}(D').$$

Доказательство. Из теоремы 3.9 заключаем, что выполнено неравенство

$$\operatorname{cap}\bigl(f(\mathscr{E}); L^1_n(D')\bigr)^{\frac{1}{n}} \leq K_I(f)^{\frac{1}{n}} \operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E}; L^1_n(D)\bigr)^{\frac{1}{n}}$$

для любого конденсатора $\mathscr{E} = (T, F)$ в D, где $f(\mathscr{E}) = (f(T), f(F))$ в силу выбора компакта F. Поэтому f — липшицево отображение в емкостных метриках, т. е.

$$\rho_{n,f(F)}(f(x), f(y)) \leq K\rho_{n,F}(x, y) \quad \text{для } x, y \in D \setminus F,$$

где $K = K_I(f)^{\frac{1}{n}}$, и, следовательно, существует единственное продолжение $\overline{f}$ на пополнения пространств с той же константой Липшица.

Покажем, что $\overline{f}$ переводит граничные элементы в граничные элементы. Пусть $h \in H_{\rho,n}(D)$ — граничный элемент и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель h. Тогда последовательность $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ сходится к границе $\partial D \cup \{\infty\}$ (см. теорему 2.7). Так как отображение $\overline{f}$ липшицево в емкостной метрике, то $(f(x_l))_{l\in\mathbb{N}}$ — фундаментальная последовательность в емкостной метрике в образе.

Так как f — замкнутое, непрерывное, открытое и дискретное отображение, то в силу теоремы 3.8 последовательность $(f(x_l))_{l\in\mathbb{N}}$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся к точкам D', поэтому $[(f(x_l))_{l\in\mathbb{N}}] \in H_{\rho,n}(D')$ (см. теорему 2.7). $\square$

Напомним, что граница ∂D *локально связна* в точке $x \in \partial D$, если для любой окрестности U существует подокрестность $x \in V$ такая, что $V \cap D$ связно. Рассуждая аналогично [7], в областях с локально связной границей можно установить следующую теорему о граничном поведении.

Следствие 3.11. *Пусть $f : D \to D'$ — отображение, удовлетворяющее условиям теоремы* 3.10. *Тогда если D локально связна в точке $y \in \partial D$, то y принадлежит носителю $\mathscr{S}(h)$ некоторого граничного элемента $h \in H_{\rho,n}(D)$.*

Более того, если носитель $\mathscr{S}(\overline{f}(h))$ состоит из одной точки x, то отображение $f : D \to D'$ продолжается по непрерывности в точки $y \in \mathscr{S}(h)$ и выполняется равенство

$$\lim_{\substack{z\to y,\\ z\in D}} f(z) = x \quad \text{для любой точки} \quad y \in \mathscr{S}(h).$$

Граничное поведение обратных к $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмам. Пусть D, D' — области в римановых многообразиях M и N соответственно и $1 < q \leq p < \infty$. Пусть также $\varphi : D' \to D$ — гомеоморфизм, обладающий следующими свойствами:

(i) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D'; D)$;

(ii) φ имеет конечное искажение: $\|D\varphi\| = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in D' \mid \mathscr{J}(x, \varphi) = 0\}$;

(iii) функция искажения $K_{q,p}(x,\varphi)$ (см. определение в [29, § 5]) принадлежит пространству $L_\sigma(D')$, где $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$.

Гомеоморфизм φ *принадлежит классу* $\mathscr{Q}_{q,p}(D';D)$, если φ удовлетворяет условиям (i)–(iii).

Из условий (i)–(iii) выводим, что $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмы индуцируют ограниченный оператор композиции пространств Соболева

$$\varphi^*: L^1_p(D)\cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(D)\to L^1_q(D')\quad (1\le q\le p<\infty).$$

При ограничениях на геометрию многообразия выполнение условий (i)–(iii) *необходимо* для индуцирования ограниченного оператора (см. [29, § 5]).

Пусть φ — $\mathscr{Q}_{q,p}$-гомеоморфизм. Тогда для любого конденсатора $\mathscr{E}$ в D имеет место следующее неравенство на емкость (ниже если $\mathscr{E}=(T,F)$, то $\varphi^{-1}(\mathscr{E})=(\varphi^{-1}(T),\varphi^{-1}(F)))$:

$$\operatorname{cap}\bigl(\varphi^{-1}(\mathscr{E});L^1_q(D')\bigr)^{\frac{1}{q}}\le K\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E};L^1_p(D)\bigr)^{\frac{1}{p}},$$

где K — интегральная норма функции $K_{q,p}(\cdot,\varphi)$ в $L_\sigma(D')$.

Пусть $f:D\to D'$ — обратный гомеоморфизм к φ, т. е. $f=\varphi^{-1}$, тогда f изменяет емкость конденсаторов следующим образом (ниже если $\mathscr{E}=(T,F)$, то $f(\mathscr{E})=(f(T),f(F)))$:

$$\operatorname{cap}\bigl(f(\mathscr{E});L^1_q(D')\bigr)^{\frac{1}{q}}\le K\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E};L^1_p(D)\bigr)^{\frac{1}{p}},$$

где $\mathscr{E}$ — произвольный конденсатор в D.

Отметим, что если $f=\varphi^{-1}$, $\varphi\in\mathscr{Q}_{q,p}(M,N)$, и N имеет p-параболический тип, то M имеет q-параболический тип; аналогично если M имеет q-гиперболический тип, то N имеет p-гиперболический тип.

Аналоги результатов прошлого раздела о граничном поведении замкнутых отображений с ограниченным искажением могут быть получены для гомеоморфизмов $f=\varphi^{-1}$, где $\varphi\in\mathscr{Q}_{q,p}$, с помощью тех же самых идей (см. [7], где эти теоремы были получены в случае $M=N=\mathbb{R}^n$).

Приложения. Рассмотрим граничное поведение квазиконформных отображений в гиперболической плоскости (ср. с [37, теоремы 10.1, 12.1], где этот результат был установлен другим методом).

Пример 3.12. Пусть $\mathbb{H}^2$ — модель Пуанкаре гиперболической плоскости. Как известно из примера 2.13, граничные элементы $\mathbb{H}^2$ — точки на граничной окружности $\partial B^E(0,1)$. Пусть $f:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$ — квазиконформное отображение. Тогда

$$\operatorname{cap}\bigl(f(\mathscr{E});L^1_2(\mathbb{H}^2)\bigr)^{\frac{1}{2}}\le K\operatorname{cap}\bigl(\mathscr{E};L^1_2(\mathbb{H}^2)\bigr)^{\frac{1}{2}}$$

для любого конденсатора $\mathscr{E}$ в $\mathbb{H}^2$, где K — некоторая константа.

Используя наблюдения из примера 2.13 и применяя теорему 3.10, заключаем, что отображение f допускает следующее граничное поведение: любая последовательность точек $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$, сходящаяся в евклидовой топологии к точке x на идеальной границе, переходит в последовательность $(f(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$, которая сходится в евклидовой топологии к некоторой точке $y\in\partial B^E(0,1)$.

Таким образом, квазиконформное отображение $f:\mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2$ продолжается до гомеоморфизма замкнутых шаров $\overline{f}:\overline{B^E(0,1)}\to\overline{B^E(0,1)}$ в евклидовой топологии. Более того, $\overline{f}|\partial B^E(0,1)$ — гомеоморфизм в евклидовой топологии на $\partial B^E(0,1)$.

Аналогично доказывается, что непрерывное замкнутое непостоянное отображение с ограниченным искажением $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ может быть продолжено до непрерывного отображения $\overline{f} : \overline{B^E(0,1)} \to \overline{B^E(0,1)}$ в евклидовой топологии.

Применим понятие слабой плоскости и описание граничного поведения к вопросу существования квазиконформного гомеоморфизма между областью с гребнем (см. пример 2.11) и областью с n-слабо плоской границей (ср. с [38, теорема 10.5], где данный результат был установлен другим методом).

Определение 3.13. Граница ∂D области D называется *n-слабо плоской в точке* $x_0 \in \partial D$, если для любой окрестности U точки x_0 и любого числа $P > 0$ существует подокрестность $V \subset U$ точки x_0 такая, что для любых континуумов F_0 и F_1 в D, пересекающих ∂U и ∂V, выполняется оценка на p-емкость конденсатора $\mathscr{E} = (F_0, F_1)$: $\operatorname{cap}\big(\mathscr{E}; L^1_n(D)\big) \geq P$.

Граница ∂D называется *n-слабо плоской*, если она n-слабо плоская в любой точке $x_0 \in \partial D$.

Нам понадобится следующее утверждение об отсутствии слабой плоскости гребня в области R^α из примера 2.11.

Предложение 3.14 [27, теорема 5.3]. *Граница ∂R^α не 3-слабо плоская в точках гребня R при $\alpha > 1$.*

Предложение 3.15. *Не существует квазиконформного гомеоморфизма $f : R^\alpha \to B$ между областью с гребнем R^α степени $\alpha > 1$ и областью B с 3-слабо плоской границей.*

В частности, не существует квазиконформного отображения между шаром и областью с гребнем R^α, где $\alpha > 1$.

Доказательство. Пусть $R^\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_2| \leq x_1^a,\ x_1 \in (0,1),\ x_3 \in (-1,1)\}$, $\alpha > 1$. Обозначим символом R гребень $\{(0,0,t) \mid t \in [-1,1]\}$.

Обозначим символом $\overline{f}$ продолжение гомеоморфизма f до замыканий (в евклидовом смысле) областей (см. следствие 3.11) $\overline{f} : \overline{R^\alpha} \to \overline{B}$. При этом $f(R) = x_0 \in \partial B$ (это следует из примера 2.11 и того, что в слабо плоских точках носитель граничного элемента состоит из одной точки, см. [7, § 4]).

Так как граница ∂B слабо плоская в точке x_0, существует последовательность континуумов E_n, F_n такая, что $\operatorname{cap}\big((E_n, F_n); L^1_3(B)\big) \to \infty$, $\operatorname{dist}(F_n, x_0) \to 0$ и $\operatorname{dist}(E_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Положим $f^{-1}(E_n) = V_n$ и $f^{-1}(F_n) = W_n$. Множества V_n и W_n — континуумы, и имеют место соотношения $\operatorname{dist}(V_n, R) \to 0$ и $\operatorname{dist}(W_n, R) \to 0$.

Покажем, что $\operatorname{dist}(V_n, W_n) \to 0$. Допустим, что это не так. Тогда существуют две различные точки v, w на гребне R такие, что $\operatorname{dist}(V_n, v) \to 0$ и $\operatorname{dist}(W_n, w) \to 0$. Так как f — квазиконформное отображение, выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\big((E_n, F_n); L^1_3(B)\big) &\leq K \operatorname{cap}\big((V_n, W_n); L^1_3(R^\alpha)\big)\\ &\leq K \operatorname{cap}\big((V_n, W_n); L^1_3(B^E(0,2))\big) < \infty.\end{aligned}$$

С другой стороны, $\operatorname{cap}\big((E_n, F_n); L^1_3(B)\big) \to \infty$; противоречие. Таким образом, существует точка $w \in R$ такая, что $\operatorname{dist}(V_n, w) \to 0$ и $\operatorname{dist}(W_n, w) \to 0$.

Так как f — квазиконформный гомеоморфизм, рассуждая от противного, заключаем, что в точке $w \in R$ граница ∂R^α 3-слабо плоская; противоречие с предложением 3.14. $\square$

4. Обобщенные границы в метрических пространствах

Обобщенные границы в областях с локально конечно связной границей. Пусть X — локально связное метрическое пространство со свойством Гейне — Бореля. Такие пространства полны, сепарабельны и локально линейно связны[7)].

Нам понадобится понятие локальной конечной связности границы.

Определение 4.1. Область D *локально конечно связна* в точке $x_0 \in \partial D$, если для любого $r > 0$ существует открытое множество G такое, что $x_0 \in G \subset B(x_0, r)$ и $G \cap D$ состоит из конечного числа компонент связности (число компонент может зависеть от r).

Область D *локально конечно связна на границе*, если D локально конечно связна в каждой точке $x_0 \in \partial D$.

Здесь и далее D — область с локально конечно связной границей ∂D, d — метрика в объемлющем пространстве.

Без ограничения общности можем считать, что D — *ограниченная* область и, следовательно, $\overline{D}$ — компактное множество. Действительно, если X — сепарабельное локально компактное метрическое пространство, то одноточечная компактификация $\overline{X}$ — сепарабельное метризуемое пространство (см., например, [25, гл. 4, § 41(X), теорема 5]). Тогда в $\overline{X}$ область D ограничена и ее замыкание компактно.

Пусть $x \in \partial D$ и $r_l \to 0$ при $l \to \infty$. Так как граница локально конечно связна в точке x, существуют компоненты связности $G^1(x, r_l), \dots, G^k(x, r_l) \subset G \subset B(x_0, r_l)$ (число k может зависеть от l). Последовательность $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к $x \in \partial D$, называется *ассоциированной* с последовательностью вложенных компонент связности $G(x, r_1) \supset G(x, r_2) \supset \dots$, если $x_l \in G(x, r_l)$ для всех $l = 1, 2, \dots$.

Последовательность вложенных компонент связности $(G(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$ *делит* последовательность $(F(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$, если для любого $l = 1, 2, \dots$ найдется такой номер k_0, что для всех $k \geq k_0$ выполняется включение $G(x, r_k) \subset F(x, r_l)$. Последовательность вложенных компонент связности $(G(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$ *эквивалентна* последовательности $(F(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$, если последовательности $(G(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$ и $(F(x, r_l))_{l\in\mathbb{N}}$ делят друг друга.

Для метрики ϱ в D определим следующие свойства:

(**M1**) *сходимость по ϱ эквивалентна сходимости по d*: если $x \in D$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — некоторая последовательность в D, то сходимость $\varrho(x_l, x) \to 0$ при $l \to \infty$ имеет место тогда и только тогда, когда $d(x_l, x) \to 0$ при $l \to \infty$;

(**M2**) *одноточечность носителей*: для любой ϱ-фундаментальной последовательности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ множество ее частичных пределов состоит из одной точки;

(**M3**) *согласованность с последовательностью компонент связности*: если $x_l \to x_0 \in \partial D$ при $l \to \infty$ и последовательность $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ассоциирована с последовательностью вложенных компонент связности, то $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ϱ-фундаментальна;

(**M4**) *ϱ различает последовательности компонент связности*: если $x_l \to x_0 \in \partial D$, $y_l \to x_0$ при $l \to \infty$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ассоциированы с неэквивалентными последовательностями компонент связности, то $\varrho(x_l, y_l) \not\to 0$ при $l \to \infty$;

(**M5**) *ϱ различает точки границы*: пусть x_0 и y_0 суть точки границы ∂D, $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — ϱ-фундаментальные последовательности и $x_l \to x_0$, $y_l \to y_0$

[7)] Локальная линейная связность такого пространства — следствие теоремы Мазуркевича — Мура — Менгера (см., например, [25, § 50(II), теорема 1]).

при $l \to \infty$; если $x_0 \neq y_0$, то $\varrho(x_l, y_l) \not\to 0$ при $l \to \infty$.

Пусть ϱ — метрика в D, удовлетворяющая условиям $(M1)$–$(M5)$. Пополнение метрического пространства (D, ϱ) обозначим символом $\overline{D}^{\varrho}$. Из свойства $(M1)$ следует, что можно отождествить точки D с классами эквивалентности стационарных последовательностей. Обозначим присоединенные элементы символом $\partial_\varrho D = \overline{D}^{\varrho} \setminus D$. Полученное множество $\partial_\varrho D$ — естественная обобщенная граница для области с локально конечно связной границей. Будет показано, что $\partial_\varrho D$ не зависит от выбора метрики ϱ, удовлетворяющей свойствам (M1)–(M5) (см. теорему 4.6). Далее мы будем изучать свойства этой границы $\partial_\varrho D$.

Пусть $\theta \in \overline{D}^{\varrho}$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель θ. Тогда в силу (M2) и компактности $\overline{D}$ существует предел $\lim\limits_{l\to\infty} x_l$ в исходной метрике d, который обозначим символом $S_\varrho(\theta)$. Данный предел не зависит от выбора представителя в силу (M2). Используя свойства (M1), (M3), выводим, что $\partial_\varrho D$ — замкнутое подмножество в $\overline{D}^{\varrho}$.

Лемма 4.2. *Пусть ϱ — метрика в D, удовлетворяющая* (M1), (M2), *и $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность элементов $\overline{D}^{\varrho}$, $\theta \in \overline{D}^{\varrho}$. Если $\varrho(\theta_k, \theta) \to 0$ при $k \to \infty$, то имеет место сходимость $S_\varrho(\theta_k) \to S_\varrho(\theta)$ при $k \to \infty$ в топологии объемлющего пространства.*

Доказательство. В силу $(M1)$ утверждение леммы выполнено для $\theta \in D$. Пусть $\theta \in \partial_\varrho D$. Обозначим символами $\big(x_l^k\big)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ представителей θ_k и θ соответственно, причем можно считать, что $\varrho\big(x_k^k, \theta_k\big) < \frac{1}{k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности $\big(x_k^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ϱ-эквивалентны. Применяя (M2), заключаем, что $S_\varrho(\theta_k) \to S_\varrho(\theta)$ при $k \to \infty$. $\square$

Из леммы 4.2 выводим следующее утверждение.

Следствие 4.3. *Пусть ϱ — метрика в D, удовлетворяющая свойствам $(M1)$–$(M3)$. Тогда существует непрерывная сюръекция $\iota : \partial_\varrho D \to \partial D$.*

Доказательство. Зададим отображение $\iota : \partial_\varrho D \to \partial D$ формулой $\partial_\varrho D \ni \theta \mapsto S_\varrho(\theta)$. В силу леммы 4.2 отображение ι непрерывно. Сюръективность следует из конечной связности ∂D и свойства $(M3)$. $\square$

Теорема 4.4. *Пусть метрика ϱ удовлетворяет свойствам* $(M1)$, $(M3)$. *Тогда пространство $\overline{D}^{\varrho}$ компактно, в частности, $\partial_\varrho D$ компактно.*

Доказательство. Пусть $(\theta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ — произвольная последовательность в $\overline{D}^{\varrho}$. Обозначим символом $\big(x_k^m\big)_{k\in\mathbb{N}}$ представителей классов θ_m, выберем диагональную последовательность $\big(x_k^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$. Эта последовательность предкомпактна в топологии $\overline{D}$, и, следовательно, выделяя подпоследовательность, получаем сходящуюся к некоторой точке $x \in \overline{D}$ последовательность $\big(x_k^k\big)_{k\in\mathbb{N}}$ (обозначена тем же символом).

Если $x \in D$, то в силу (M1) имеет место сходимость $\varrho\big(x_l^l, x\big) \to 0$ при $l \to \infty$. Отсюда заключаем, что подпоследовательность $(\theta_l)_{l\in\mathbb{N}}$ сходится к x по метрике ϱ.

Если $x \in \partial D$, то ввиду конечной связности ∂D в точке x существуют вложенная последовательность компонент связности $(G(x, r_i))_{i\in\mathbb{N}}$ и подпоследовательность $\big(x_i^i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ такие, что $\big(x_i^i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ ассоциирована с $(G(x, r_i))_{i\in\mathbb{N}}$. По свойству (M3) заключаем, что последовательность $\big(x_i^i\big)_{i\in\mathbb{N}}$ ϱ-фундаментальна. Обозначим класс эквивалентности, содержащий последовательность $\left(x_i^i\right)_{i\in\mathbb{N}}$, символом θ. Тогда $\varrho(\theta_i, \theta) \to 0$ при $i \to \infty$, что и требовалось доказать. $\square$

Емкостная метрика в ограниченных областях в римановых многообразиях с локально конечно связной границей обладает свойствами (M1), (M3), поэтому пространство $H_{\rho,p}(D)$ компактно и некоторая окрестность $H_{\rho,p}(D)$ компактна. Если же D — неограниченная область, то нужно учитывать емкость бесконечно удаленной точки. Определим емкость конденсатора $\mathscr{E} = (\{\infty\}, F)$ в пространстве $L_p^1(D)$ следующим образом:

$$\operatorname{cap}\bigl((\{\infty\}, F); L_p^1(D)\bigr) = \inf_u \int\limits_D \|\nabla u\|^p \, d\operatorname{vol}_g,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in C(D) \cap L_p^1(D)$ таким, что $u|D \setminus \overline{B(x,r)} = 1$, r — достаточно большой радиус, и $u|F = 0$. Если многообразие M имеет p-параболический тип, то p-емкость точки ∞ равна нулю.

Следствие 4.5. *Пусть D — область с локально конечно связной границей в римановом многообразии M размерности $n \geq 2$, $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\operatorname{cap}\bigl((\{\infty\}, F); L_p^1(D)\bigr) = 0$. Тогда пространство $H_{\rho,p}(D)$ и некоторая окрестность $H_{\rho,p}(D)$ компактны.*

Доказательство. Фиксируем континуум $F = \overline{B(x_0, r_0)}$, где $x_0 \in D$ и r_0 — достаточно малый радиус, так, что $D \setminus F$ связно. Из условий следствия следует, что емкостная метрика в $D \setminus \overline{B(x_0, \lambda r_0)}$, где $\lambda > 1$, обладает свойствами (M1), (M3), поэтому требуемое следует из теоремы 4.4. $\square$

Теорема 4.6. *Пусть ϱ и ϱ' — метрики в D, удовлетворяющие свойствам* (M1)–(M5). *Тогда пространства $\overline{D}^{\varrho}$ и $\overline{D}^{\varrho'}$ гомеоморфны.*

Доказательство. Положим $\upsilon|D = \mathrm{id}_D$. В силу свойства $(M1)$ отображение $\upsilon|D : (D, \varrho) \to (D, \varrho')$ непрерывно.

Пусть $\theta \in \overline{D}^{\varrho} \setminus D$ и $S_\varrho(\theta) = x \in \partial D$. Выберем представителя $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \in \theta$, тогда последовательность $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ассоциирована с некоторой последовательностью компонент связности (в силу свойства (M4)), поэтому по свойству (M3) последовательность $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ϱ'-фундаментальна. Обозначим класс эквивалентности последовательности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ символом $\xi \in \overline{D}^{\varrho'}$. Определим $\upsilon(\theta)$ формулой $\upsilon(\theta) = \xi$. В силу свойств (M1)–(M4) определение υ корректно. Отметим, что в силу (M2) для носителей выполняется равенство $S_\varrho(\theta) = S_{\varrho'}(\upsilon(\theta))$.

Отображение υ инъективно. Допустим противное: существуют точки θ, θ' из $\overline{D}^{\varrho}$ такие, что $\upsilon(\theta) = \upsilon(\theta') = \xi \in \overline{D}^{\varrho'}$. Пусть $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ суть представители элементов θ, θ' соответственно. В силу $(M4)$ последовательности $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ и $(y_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ассоциированы с одной последовательностью компонент связности. Рассматривая последовательность $x_1, y_1, x_2, y_2, \dots$, получаем в силу свойства $(M3)$, что $\varrho(x_l, y_l) \to 0$ при $l \to \infty$ и, следовательно, $\theta = \theta'$.

Отображение υ сюръективно. Пусть $\xi \in \overline{D}^{\varrho'}$ и $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель ξ. В силу компактности $\overline{D}^{\varrho}$ существует подпоследовательность (обозначена тем же символом) $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к θ в $\overline{D}^{\varrho'}$. По построению отображения υ заключаем, что $\upsilon(\theta) = \xi$.

Отображение υ непрерывно. Сужение $\upsilon|D$ непрерывно в силу свойства (M1). Докажем, что из сходимости по метрике ϱ к элементу $\theta \in \partial_\varrho D$ следует сходимость к $\upsilon(\theta)$ по метрике ϱ'.

Допустим противное: пусть $\varrho(\theta_l, \theta) \to 0$ при $l \to \infty$, но $\varrho'(\upsilon(\theta_l), \upsilon(\theta)) > \beta$ для всех $l \in \mathbb{N}$. В силу компактности $\overline{D}^{\varrho'}$ существует подпоследовательность (обозначена тем же символом) $(\upsilon(\theta_l))_{l\in\mathbb{N}}$ такая, что $\upsilon(\theta_l) \to \xi$ при $l \to \infty$ в метрике ϱ', причем $\xi \neq \upsilon(\theta)$. Так как υ — биекция, то $\xi = \upsilon(\zeta)$ для некоторого элемента $\zeta \in \partial_\varrho D \setminus \{\theta\}$. Но из равенства $S_\varrho(\theta_l) = S_{\varrho'}(\upsilon(\theta_l))$, леммы 4.2 и свойства (M5) заключаем, что у последовательности $(S_\varrho(\theta_l))_{l\in\mathbb{N}}$ существует два различных предела в метрике d; противоречие.

Таким образом, υ — непрерывная биекция между компактным и хаусдорфовым пространствами, значит, υ — гомеоморфизм (см. лемму 2.19). $\square$

Свойства (M1)–(M5) для метрики ϱ означают, что обобщенная граница $\partial_\varrho D$ не отождествляет точки исходной границы и «различает берега разрезов». Из теоремы 4.6 следует, что такая обобщенная граница зависит только от топологии исходной области, а не выбора метрики ϱ.

Приведем пример такой метрики ϱ. Напомним, что мы рассматриваем локально связные метрические пространства со свойством Гейне — Бореля.

Пример 4.7. Пусть D — область с локально конечно связной границей. Если D — неограниченная область, то перейдем к метрике $\overline{d}$ на компактифицированном пространстве $\overline{X}$, где D ограничена.

Метрика Мазуркевича определяется по формуле

$$d_M(x, y) = \inf \operatorname{diam} E,$$

где точная нижняя грань берется по всем связным множествам $E \subset D$, содержащим $x, y \in D$. Тогда свойства (M1)–(M5) для метрики d_M выполнены.

О свойствах метрики Мазуркевича более подробно см., например, [9; 25, § 49(VII); 39].

Емкостная граница учитывает функциональные свойства классов отображений (контролируемое изменение емкости конденсаторов), поэтому возникают емкостные граничные элементы с носителем, состоящим из нескольких точек (см. примеры 2.11, 2.12). Однако всегда существует непрерывная сюръекция из обобщенной границы в емкостные граничные элементы.

Теорема 4.8. *Пусть D — область в римановом многообразии M, $\dim M = n \geq 2$, с локально конечно связной границей ∂D, $n - 1 < p \leq n$ ($1 \leq p \leq 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\operatorname{cap}\big((\{\infty\}, F); L^1_p(D)\big) = 0$.*

Если метрика ϱ в D обладает свойствами (M1)–(M5), то существует непрерывная сюръекция $\iota : \partial_\varrho D \to H_{\rho,p}(D)$.

Доказательство. Отображение ι задается аналогично отображению υ из теоремы 4.6, сюръективность доказывается аналогично сюръективности υ с использованием следствия 4.5.

Остается доказать непрерывность. Пусть θ_l, $l = 1, 2, \ldots$, θ суть элементы $\partial_\varrho D$ такие, что $\varrho(\theta_l, \theta) \to 0$ при $l \to \infty$. Аналогично доказательству леммы 4.2 выберем представителей $(x^l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ и $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ элементов θ_l и θ соответственно. В силу локальной конечной связности ∂D и того, что $\operatorname{cap}\big((x, F); L^1_p(D)\big) = 0$ для всех $x \in \partial D \cup \{\infty\}$, можно выбрать диагональную последовательность $\big(x^l_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ так, что $\rho_{p,F}\big(x^l_l, \iota(\theta_l)\big) < \frac{1}{l}$ для всех l. Тогда последовательность $\big(x^l_l\big)_{l\in\mathbb{N}}$ — представитель θ, поэтому в силу (M4) данная последовательность ассоциирована с последовательностью вложенных компонент связности. Из этого заключаем, что $\left(x_l^l\right)_{l\in\mathbb{N}}$ сходится к $\iota(\theta)$ в емкостной метрике $\rho_{p,F}$. Значит, выполняются соотношения

$$\rho_{p,F}(\iota(\theta_l),\iota(\theta)) \le \rho_{p,F}\big(\iota(\theta_l),x_l^l\big) + \rho_{p,F}\big(x_l^l,\iota(\theta)\big) \to 0 \quad \text{при } l\to\infty. \quad \square$$

Следствие 4.9. *Пусть D — область в римановом многообразии M, $\dim M = n \ge 2$, с локально конечно связной границей ∂D, $n-1 < p \le n$ ($1 \le p \le 2$, если $n = 2$), и если D — неограниченная область, то $\operatorname{cap}\big((\{\infty\},F); L_p^1(D)\big) = 0$.*

Если все носители емкостных граничных элементов одноточечны для некоторого p, то существует гомеоморфизм между $\partial_\varrho D$ и $H_{\rho,p}(D)$. Более того, если $\operatorname{vol}_g(D) < \infty$, то $\partial_\varrho D$ гомеоморфна любой емкостной границе $H_{\rho,r}(D)$, где $r \in [p,n]$.

Доказательство. Фиксируем континуум $F = \overline{B(x_0,r_0)}$, где $x_0 \in D$ и r_0 — достаточно малый радиус, такой, что $D\setminus F$ связно. При данных предположениях емкостная метрика $\rho_{p,F}$ обладает свойствами (M1)–(M5) на области $D\setminus\overline{B(x_0,\lambda r_0)}$, где $\lambda > 1$, поэтому в силу теоремы 4.6 граница $\partial_\varrho D$ гомеоморфна $H_{\rho,p}(D)$. Если $\operatorname{vol}_g(D) < \infty$, то в силу теоремы 2.20 пространства $H_{\rho,p}(D)$ и $H_{\rho,r}(D)$ гомеоморфны для любого $r \in (p,n]$. $\square$

Одноточечность носителей граничных элементов выполняется, например, в областях с p-сильно достижимой границей (см. [7, предложение 4.4]).

Емкостные граничные элементы и простые концы. Далее рассматриваются только *ограниченные области* D в римановом многообразии M, $\dim M \ge 2$.

В работе [9] были введены простые концы для ограниченных областей в метрических пространствах. Сравним конструкции граничных элементов и простых концов в модельном метрическом пространстве — римановом многообразии.

Ограниченное связное множество $E \subsetneq D$ называется *допустимым*, если $\overline{E}\cap\partial D \ne \varnothing$. Последовательность $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ допустимых множеств называется *цепью*, если выполнены следующие условия:

(a) $E_{k+1} \subset E_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$,

(b) $\operatorname{dist}(D\cap\partial E_{k+1}, D\cap\partial E_k) > 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$,

(c) *тело* цепи $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \overline{E}_k$ содержится в ∂D.

Для цепей вводится частичный порядок по делению, определяются эквивалентные цепи (см. [9]). Класс эквивалентных по делению цепей $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ называется *концом* и обозначается через $[E_k]$. *Тело конца* $I[E_k]$ определяется как тело любого представителя, и это определение корректно.

Определение 4.10. *Простой конец* — конец, который не делится другим концом.

Замечание 4.11. Простые концы [9] не совпадают с простыми концами Каратеодори, см. пример 4.12 ниже.

Пусть $\partial_{\mathrm{P}} D$ — множество простых концов в D. Символом $\overline{D}_{\mathrm{P}}$ обозначим замыкание области D простыми концами, т. е. $\overline{D}_{\mathrm{P}} = D\cup\partial_{\mathrm{P}} D$.

Рассмотрим примеры.

Пример 4.12 ([9, пример 5.1], «расческа тополога» II). Пусть D — область из примера 2.12.

Множества $E_k = ((1/2 - 2^{-k}, 1) \times (0, 2^{-k})) \cap D$ определяют конец с телом $I[E_k] = I \cup \{x_0\}$, где $I = (1/2, 1] \times \{0\}$ и $x_0 = (1/2, 0)$. Однако $[E_k]$ — *не простой конец*, так как цепь $F_k = B(x_0, 2^{-k}) \cap D$ делит его.

В подходе через емкостные граничные элементы отрезок $[1/2, 1] \times \{0\}$ — носитель одного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(D)$, $1 \leq p \leq 2$ (см. пример 2.12).

Пример 4.13 (область с гребнем II). Пусть $2 < p \leq 3$. Рассмотрим область R^α, $\alpha > p - 1$,

$$R^\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |x_2| \leq x_1^\alpha,\ x_1 \in (0,1),\ x_3 \in (-1,1)\}.$$

Обозначим символом $R = \{(0,0,t) \mid t \in [-1,1]\}$ гребень. В примере 2.11 было показано, что R — носитель одного граничного элемента $h \in H_{\rho,p}(R^\alpha)$.

С другой стороны, любая точка на гребне *достижима*[8], следовательно, в силу [9, следствие 7.8] любой точке $x \in R$ соответствует простой конец $[F_k^x]$ с телом $I[F_k^x] = \{x\}$.

В ограниченных областях с локально конечно связной границей простые концы метризуемы и граница простых концов гомеоморфна границе Мазуркевича (см. [9, следствие 10.9]), поэтому граница простых концов $\partial_{\mathrm{P}} D$ непрерывно отображается на емкостные граничные элементы $H_{\rho,p}(D)$; при условии одноточечности носителей $H_{\rho,p}(D)$ при некотором $p \in (n-1, n]$ ($p \in [1,2]$, если $\dim M = 2$) граница простых концов гомеоморфна любой емкостной границе $H_{\rho,r}(D)$, где $r \in [p, n]$. Условие одноточечности носителей существенно, как показывает пример 4.13.

В работе [40] были получены результаты о граничном поведении для замкнутых, непрерывных, открытых и дискретных Q-отображений в метрических пространствах с помощью границы простых концов. Сформулируем данный результат в модельном случае, ориентируемых римановых многообразий, для непрерывных замкнутых отображений с ограниченным искажением.

Теорема 4.14. *Пусть D — ограниченная область с локально конечно связной границей в римановом многообразии M, $\dim M = n \geq 2$, D' — область в N. Допустим, что $f : D \to D'$, $f(D) = D'$, — непрерывное замкнутое отображение с ограниченным искажением. Более того, пусть D' — область с n-сильно достижимой границей.*

Тогда существует непрерывное продолжение $f : \overline{D_{\mathrm{P}}} \to \overline{D'}$, $f(\overline{D_{\mathrm{P}}}) = \overline{D'}$, и, следовательно, $\overline{D'}$ компактно.

Покажем, как теорема 4.14 следует из результатов настоящей статьи.

Доказательство. Из локально конечной связности границы ∂D и оценок на емкость (см. пример 1.4) следует, что любая точка границы ∂D содержится в носителе некоторого емкостного граничного элемента. Условие n-сильной достижимости границы $\partial D'$ обеспечивает одноточечность носителей граничных элементов $H_{\rho,n}(D')$ (см. [7, § 4]). Применяя следствие 4.3, заключаем, что существует сюръекция $\vartheta : H_{\rho,n}(D') \to \partial D'$. Тогда требуемое отображение $\overline{f}$ — композиция следующих отображений:

$$\partial_{\mathrm{P}} D \xrightarrow{\iota} H_{\rho,n}(D) \xrightarrow{\widetilde{f}} H_{\rho,n}(D') \xrightarrow{\vartheta} \partial D',$$

где отображение ι существует в силу теоремы 4.8, а $\widetilde{f}$ — в силу теоремы 3.10.

[8] Граничная точка $x \in \partial D$ *достижима*, если существует непрерывная кривая $\gamma : [0,1] \to M$ такая, что $\gamma([0,1)) \subset D$ и $\gamma(1) = x$.

Остается показать, что $\overline{f}$ сюръективно. Пусть $y \in \partial D'$, тогда существует последовательность $y_l \in D'$, $l = 1, 2, \dots$, такая, что $y_l \to y$ при $l \to \infty$. В силу компактности $\overline{D}$ и замкнутости f существует последовательность точек $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ таких, что $x_l \in f^{-1}(y_l)$ и $x_l \to x \in \partial D$ при $l \to \infty$ в римановой метрике. Выделяя подпоследовательность, можно считать, что $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ ассоциирована с некоторой последовательностью компонент связности, поэтому существует простой конец $[E_k] \in \partial_P D$ такой, что $\overline{f}([E_k]) = y$. $\square$

Отметим, что в данном доказательстве компактность $\overline{D'}$ не используется, ср. с доказательством [40, теорема 1.1].

Благодарность. Автор благодарит научного руководителя С. К. Водопьянова за обсуждение результатов этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carathéodory C.* Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. 1913. V. 73, N 3. P. 323–370.
2. *Osgood W. F., Taylor E. H.* Conformal transformations on the boundaries of their regions of definitions // Trans. Am. Math. Soc. 1913. V. 14, N 2. P. 277–298.
3. *Schlesinger E. C.* Conformal invariants and prime ends // American Journal of Mathematics. 1958. V. 80, N 1. P. 83–102.
4. *Водопьянов С. К.* О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 630–633.
5. *Гольдштейн В. М., Водопьянов С. К.* Метрическое пополнение области при помощи конформной емкости, инвариантное при квазиконформных отображениях // Докл. АН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1040–1042.
6. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.* О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–65.
7. *Vodopyanov S. K., Molchanova A. O.* The boundary behavior of $\mathscr{Q}_{p,q}$-homeomorphisms // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. V. 87, N 4. P. 47–90.
8. *Водопьянов С. К., Павлов С. В.* О граничных значениях в геометрической теории функций в областях с подвижными границами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 489–516.
9. *Adamowicz T., Björn A., Björn J., Shanmugalingam N.* Prime ends for domains in metric spaces // Adv. Math. 2013. V. 238. P. 459–505.
10. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
11. *Шарафутдинов В. А.* Введение в дифференциальную топологию и риманову геометрию. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2018.
12. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.* Введение в риманову геометрию. СПб: Наука, 1994.
13. *Hebey E.* Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, 1999.
14. *Heinonen J., Kipelainen T., Martio O.* Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations. Mineola N.Y.: Dover Publications, 2006.
15. *Saloff-Coste L.* Aspects of Sobolev-type inequalities. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2002.
16. *Adamowicz T., Shanmugalingam N.* Non-conformal Loewner type estimates for modulus of curve families // Ann. Fennici Math. 2010. V. 35, N 2. P. 609–626.
17. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1993.
18. *Кесельман В. М.* О римановых многообразиях α-параболического тип // Изв. вузов. Математика. 1985. № 4. С. 81–83.
19. *Зорич В. А., Кесельман В. М.* О конформном типе риманова многообразия // Функцион. анализ и его прил. 1996. Т. 30, № 2. С. 40–55.
20. *Holopainen I.* Positive solutions of quasilinear elliptic equations on Riemannian manifolds // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 3, N 3. P. 651–672.
21. *Björn A., Björn J., Shanmugalingam N.* Classification of metric measure spaces and their ends using p-harmonic functions // Ann. Fennici Math. 2022. V. 47, N 2. P. 1025–1052.
22. *Anderson J. W.* Hyperbolic geometry. London: Springer-Verl., 2005.

23. *Holopainen I., Pankka P.* p-Laplace operator, quasiregular mappings and Picard-type theorems // Quasiconformal Mappings and Their Applications. New Delhi, Delhi: Narosa Publishing House, 2007. P. 117–150.
24. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
25. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, 1969. Т. 2.
26. *Hausdorff F.* Set theory. New York: Am. Math. Soc., 2021.
27. *Näkki R.* Boundary behavior of quasiconformal mappings in n-space // Ann. Fennici Math. 1971. N 484. P. 1–50.
28. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
29. *Водопьянов С. К.* Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1128–1154.
30. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. М.: Наука, 1987.
31. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
32. *Kangasniemi I.* Notes on quasiregular maps between Riemannian manifolds. 2021. 70 p. arXiv:2109.01638.
33. *Vuorinen M.* Exceptional sets and boundary behavior of quasiregular mappings in n-space // Ann. Fennici Math. 1976. N 11. P. 1–44.
34. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Bertin; Heidelberg: Springer-Verl., 1988.
35. *Srebro U.* Conformal capacity and quasiregular mappings // Ann. Fennici Math. 1973. N 529. P. 1–8.
36. *Полецкий Е. А.* Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2 (10). С. 261–272.
37. *Mostow G. D.* Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of hyperbolic space forms // Publications Mathématiques de l'IHÉS. 1968. V. 34. P. 53–104.
38. *Gehring F. W., Väisälä J.* The coefficients of quasiconformality of domains in space // Acta Math. 1965. V. 114, N 1. P. 1–70.
39. *Björn A., Björn J., Shanmugalingam N.* The Mazurkiewicz distance and sets that are finitely connected at the boundary // J. Geometric Anal. 2016. V. 26. P. 873–897.
40. *Sevost'yanov E.* On boundary extension of mappings in metric spaces in the terms of prime ends // Ann. Fennici Math. 2019. V. 44, N 2. P. 65–90.

Поступила в редакцию 19 ноября 2024 г.
После доработки 19 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Сбоев Данил Алексеевич (ORCID 0009-0008-4027-9161)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
dnlsboev@gmail.com

Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2025. Том 66, № 3

УДК 512.54.03+515.122.4+515.123.4+512.562

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ ОЛИГОМОРФНОСТИ ГРУПП

Б. В. Сорин

Аннотация. При действии группы на множестве топология множества определяет допустимые групповые топологии на группе, в которых группа становится топологической, а действие непрерывным (и даже позволяет получать равномерности на множестве, на пополнения по которым действие непрерывно продолжается). Данный подход, использующий дискретную топологию на множестве и перестановочную топологию на группе, позволяет найти связи между олигоморфностью действия группы на множестве, вполне ограниченностью максимальной эквиравномерности на множестве и Roelcke-предкомпактностью группы.

Если множество простое линейно упорядоченное, то его ультраоднородность эквивалентна олигоморфности действия группы его автоморфизмов на нем и эквивалентна Roelcke-предкомпактности самой группы автоморфизмов этого множества как в перестановочной топологии, так и в топологии поточечной сходимости.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.315

Ключевые слова: олигоморфная группа, группа преобразований, эквиравномерность, ультратранзитивность, Roelcke-предкомпактность, линейно упорядоченное множество.

1. Введение

Олигоморфность группы — один из подходов к изучению ее структуры. Олигоморфность связана с теорией моделей, комбинаторикой и теорией Рамсея, градуированными алгебрами, топологической динамикой. Исследования олигоморфности групп перестановок можно, например, найти в работах Кэмерона [1], Гласса [2], Холанда [3]. Олигоморфность группы также можно рассматривать как алгебраическое свойство «малости» группы.

При исследовании «больших» топологических групп Roelcke-предкомпактность — топологическое свойство «малости» согласно В. Пестову [4]. В работах Розендаля [5] и Цанкова [6] выявляются связи олигоморфности группы и ее Roelcke-предкомпактности.

Непосредственное установление олигоморфности группы G (действующей на множестве X) часто встречает трудности, преодолеть которые во многих случаях позволяет топологизация X, рассмотрение допустимых групповых топологий на G, при которых действия не только непрерывны, но и позволяют находить эквиравномерности на X (равномерности, на пополнения X по которым действие непрерывно продолжается). Использование таких топологических свойств, как вполне ограниченность максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на X или Roelcke-предкомпактность группы G, могут существенно облегчить исследования олигоморфности.

Основным результатом статьи является топологическая характеризация олигоморфности действия группы. Действие группы G в перестановочной топологии τ_∂ на дискретном пространстве X олигоморфно в том и только том случае, если максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_X$ на X вполне ограничена (теорема 3.1). Если дополнительно у действия конечное число орбит, то предыдущие условия эквивалентны Roelcke-предкомпактности группы (G, τ_∂) (теорема 3.4). В теореме 3.5 установлено, что Roelcke-предкомпактность группы (G, τ_∂) при ее действии на дискретном пространстве эквивалентна ее изоморфности всюду плотной подгруппе предела обратного спектра из олигоморфных групп.

Если X — простое линейно упорядоченное множество, $\mathrm{Aut}(X)$ — его группа автоморфизмов, то ультраоднородность X эквивалентна олигоморфности действия $\mathrm{Aut}(X)$ на X и эквивалентна Roelcke-предкомпактности группы $\mathrm{Aut}(X)$ как в перестановочной топологии, так и в топологии поточечной сходимости (теорема 3.11). Приведенные примеры иллюстрируют, насколько упрощаются рассуждения в случае ультраоднородных линейно упорядоченных множеств.

Рассмотрение однородных GO-пространств (см. п.п. 3.3) показывает, что топологизации линейно упорядоченных множеств, сохраняющие однородность, не приводят к новым топологиям на группах их автоморфизмов, отличных от топологии поточечной сходимости и перестановочной топологии (лемма 3.14 и предложение 3.16).

Будем придерживаться терминологии и обозначений из [7, 8]. Рассматриваются непустые множества X. Пространства — тихоновские топологические пространства (X, τ) (τ — топология на X). $\mathbb{Q}$ — рациональные, $\mathbb{P}$ — иррациональные и $\mathbb{R}$ — действительные числа. $N_G(e)$ — семейство открытых окрестностей единицы топологической группы G. Для действия $\alpha : G \times X \to X$ и множеств $A \subset G$, $Y \subset X$ положим $AY = \{\alpha(g, y) \mid g \in A,\ y \in Y\}$.

Используется понятие равномерности $\mathscr{U}$ в терминах семейства (равномерных) покрытий [7, гл. 8, § 8.1], образующих фильтр покрытий. База равномерности — база фильтра покрытий. $\mathscr{U}$ меньше $\mathscr{U}'$, если $\mathscr{U} \subset \mathscr{U}'$. Равномерности на пространстве согласованы с его топологией. Считаем равномерность $\mathscr{U}$ вполне ограниченной, если существует ее база из конечных покрытий [7, гл. 8, § 8.3, упражнение 8.3.D(a)]. Понятия полной равномерности $\mathscr{U}$ и пополнения равномерного пространства $(X, \mathscr{U})$ (пополнения X по равномерности $\mathscr{U}$) см., например, в [7, гл. 8, § 8.3].

2. Предварительные сведения

2.1. Олигоморфное действие. Действие $\alpha_1 : G \times X \to X$ группы G на множестве X ($\alpha_1(g, x) := gx$) называется *эффективным*, если *ядро действия* $\{g \in G \mid gx = x,\ \forall x \in X\}$ — единица G. Если G эффективно действует на X, то G — подгруппа $\mathrm{S}(X)$, группы перестановок (биекций) X. Подгруппа

$$\mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n} = \{g \in G \mid gx_i = x_i,\ i = 1, \dots, n\}$$

группы G — *стабилизатор точек* $x_1, \dots, x_n \in X$. Множество $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ — *орбита точки* x. Орбиты различных точек или совпадают, или дизъюнктны.

По действию $\alpha_1 : G \times X \to X$ корректно определены *диагональные действия*

$$\alpha_n : G \times X^n \to X^n, \quad \alpha_n(g, x = (x_1, \dots, x_n)) = (gx_1, \dots, gx_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определение 2.1. Эффективное действие группы G на множестве X *олигоморфно*, если у диагонального действия $\alpha_n : G \times X^n \to X^n$, $n \in \mathbb{N}$, конечное число орбит.

Группа G называется *олигоморфной*, если существуют множество X и олигоморфное действие G на X. В этом случае будем также говорить, что *олигоморфность группы G реализуется ее действием на множестве X.*

Замечание 2.2. В [1] подгруппы группы перестановок $S(X)$ фиксированного множества X называются олигоморфными, если их действия олигоморфны.

В [6, определение 1.2] рассматриваются группы, олигоморфность которых реализуется действиями на счетных множествах.

Если олигоморфность G реализуется действием на X, то она также реализуется и диагональным действием G на X^n, $n \in \mathbb{N}$.

2.2. Равномерности на топологической группе и Roelcke-равномерность. Базу *правой равномерности R* (соответственно *левой равномерности L*) на топологической группе G образуют покрытия $\{Og \mid g \in G\}$ (соответственно $\{gO \mid g \in G\}$), $O \in N_G(e)$ [7, гл. 8, § 8.1, пример 8.1.17]. Топологическая группа *предкомпактна*, если правая равномерность вполне ограничена (см., например, [8]).

Необходимые сведения о *Roelcke-равномерности* $L \wedge R$ (наибольшей нижней грани правой R и левой L равномерностей) на топологической группе можно найти в [8]. Ее базу образуют покрытия $\{OgO \mid g \in G\}$, $O \in N_G(e)$. Группа *Roelcke-предкомпактна*, если Roelcke-равномерность $L \wedge R$ вполне ограничена, пополнение по ней — *Roelcke-компактификация* группы.

Факты 1. (1) *Всюду плотная подгруппа H группы G Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа G Roelcke-предкомпактна* [8, *предложение* 3.24] *и* [6, *предложение* 2.2]. *Более того, Roelcke-компактификации H и G (равномерно) изоморфны* [7, *следствие* 8.3.11].

(2) *Открытая подгруппа Roelcke-предкомпактной группы Roelcke-предкомпактна* [8, *предложение* 3.24].

(3) *Непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы — Roelcke-предкомпактная группа* [6, *предложение* 2.2].

(4) *Если нормальная подгруппа H и факторгруппа G/H группы G Roelcke-предкомпактны, то группа G Roelcke-предкомпактна* [6, *предложение* 2.2].

(5) *Если подгруппа H группы G Roelcke-предкомпактна и максимальная эквиравномерность* (*см. п.* 2.4) *на факторпространстве G/H вполне ограничена, то группа G Roelcke-предкомпактна* [9, *предложение* 6.4] (*см. также условие Roelcke-предкомпактности подмножества группы в* [8, *предложение* 9.17]).

(6) *Предел обратного спектра из Roelcke-предкомпактных групп и гомоморфизмов Roelcke-предкомпактен* [6, *предложение* 2.2].

(7) *Произведение топологических групп Roelcke-предкомпактно в том и только в том случае, если сомножители — Roelcke-предкомпактные группы* [8, *предложение* 3.35].

Двусторонняя равномерность $L \vee R$ — наименьшая верхняя грань правой R и левой L равномерностей на топологической группе G. Группа, полная по двусторонней равномерности, называется *полной по Райкову*, и ее образ замкнут при любом ее топологическом изоморфизме в любую топологическую группу [10]. Пополнение группы по двусторонней равномерности называется *пополнением по Райкову* и является полной по Райкову топологической группой. В частности, любая топологическая группа, метризуемая полной метрикой, полна по Райкову (см., например, [8, гл. 10, 13]).

Если на группе G заданы две сравнимые равномерности $\mathscr{U}_1$ и $\mathscr{U}_2$, то $\mathscr{U}_1$ сильнее $\mathscr{U}_2$ ($\mathscr{U}_2 \subset \mathscr{U}_1$), если и только если всякое окружение из $\mathscr{U}_2$ является окружением из $\mathscr{U}_1$ [11, гл. II, § 2, предложение 3].

Если на группе G даны две групповые топологии $\sigma \leq \tau$, то определены соответствующие правые R_σ, R_τ, левые L_σ, L_τ, двусторонние $(L \vee R)_\sigma$, $(L \vee R)_\tau$ равномерности и Roelcke-равномерности $(L \wedge R)_\sigma$, $(L \wedge R)_\tau$. Из задания баз правой, левой и Roelcke-равномерностей и определения двусторонней равномерности следует, что $R_\sigma \subset R_\tau$, $L_\sigma \subset L_\tau$, $(L \vee R)_\sigma \subset (L \vee R)_\tau$, $(L \wedge R)_\sigma \subset (L \wedge R)_\tau$.

Считаем кардинал κ бесконечным. *Индексом узкости* $\mathrm{in}(\mathscr{U})$ равномерности $\mathscr{U}$ называется наименьший кардинал κ такой, что у равномерности $\mathscr{U}$ существует база из покрытий, мощности которых не более κ. Понятие введено И. Гураном [12], в [13, гл. 1, § 1] оно названо индексом ограниченности.

Лемма 2.3. *Если на группе G даны две групповые топологии $\sigma \leq \tau$, то*

(1) $\mathrm{in}(R_\sigma) \leq \mathrm{in}(R_\tau)$, $\mathrm{in}(L_\sigma) \leq \mathrm{in}(L_\tau)$, $\mathrm{in}(L \vee R)_\sigma \leq \mathrm{in}(L \vee R)_\tau$, $\mathrm{in}(L \wedge R)_\sigma \leq \mathrm{in}(L \wedge R)_\tau$*;*

(2) *из предкомпактности группы (G, τ) (в этом случае $R_\tau = L_\tau = (L \vee R)_\tau = (L \wedge R)_\tau$) следует предкомпактность группы (G, σ);*

(3) *из Roelcke-предкомпактности группы (G, τ) следует Roelcke-предкомпактность группы (G, σ).* $\square$

2.3. Топологизация группы преобразований. Пусть X — топологическое пространство, $\mathrm{Hom}(X)$ — группа его гомеоморфизмов. Если группа G эффективно действует на пространстве X и каждый элемент G — гомеоморфизм X, то G естественно отождествляется с подгруппой группы $\mathrm{Hom}(X)$. Если X — дискретное пространство, то $\mathrm{Hom}(X) = \mathrm{S}(X)$.

Топология τ на группе G, эффективно действующей на топологическом пространстве X, называется *допустимой групповой топологией* [14], если (G, τ) — топологическая группа и действие $\alpha : (G, \tau) \times X \to X$ непрерывно. В этом случае (G, X, α) — *G-пространство.* Ниже непрерывное действие α обозначается через $\curvearrowright$.

Если *топология поточечной сходимости* τ_p (предбазу образуют множества вида $[x, O] = \{g \in G \mid gx \in O\}$, $x \in X$, O открыто в X) является допустимой групповой топологией на G, то она является наименьшей допустимой групповой топологией [15, лемма 3.1].

Базу окрестностей единицы *перестановочной топологии* τ_∂ на G образуют открыто-замкнутые подгруппы — стабилизаторы конечных подмножеств точек X. (G, τ_∂) является топологической группой [8, гл. 2, пример 3]. Она неархимедова (топологическая группа *неархимедова*, если базу окрестностей ее единицы образуют открыто-замкнутые подгруппы). Очевидно, что $\tau_\partial \geq \tau_p$, и если топология поточечной сходимости допустимая, то и перестановочная топология допустимая. В общем случае перестановочная топология может не быть допустимой групповой топологией. Если X — дискретное пространство, то $\tau_\partial = \tau_p$ и перестановочная топология является наименьшей допустимой групповой топологией. Из леммы 2.3 вытекает

Следствие 2.4. *Пусть группа G эффективно действует на дискретном пространстве X.*

(1) *Если* (G, τ_∂) *Roelcke-предкомпактна, то* (G, τ_p) *Roelcke-предкомпактна.*

(2) *Если* (G, τ_p) *не Roelcke-предкомпактна, то группа* G *в любой допустимой групповой топологии также не Roelcke-предкомпактна.* $\square$

Замечание 2.5. Из Roelcke-предкомпактности (G, τ_p), вообще говоря, не следует Roelcke-предкомпактность (G, τ_∂).

Действительно, действие (бесконечной) топологической группы (G, τ) самой на себя умножением слева является равномерно равностепенно непрерывным относительно левой равномерности L и $\tau_p = \tau$ (см., например, [15, пример 3.6]. Если (G, τ) компактна, то (G, τ_p) очевидно Roelcke-предкомпактна. Однако (G, τ_∂) дискретна (и бесконечна), $R_{\tau_\partial} = L_{\tau_\partial} = (L \vee R)_{\tau_\partial} = (L \wedge R)_{\tau_\partial}$ и, значит, не Roelcke-предкомпактна.

2.4. Эквиравномерности на G-пространстве. Пусть $(G, X, \curvearrowright)$ — G-пространство. Равномерность $\mathscr{U}_X$ на пространстве X называется *эквиравномерностью*, если действие $G \curvearrowright X$ *насыщено* (любой гомеоморфизм из G равномерно непрерывен) и *ограничено* (для любого покрытия $u \in \mathscr{U}_X$ существуют $O \in N_G(e)$ и покрытие $v \in \mathscr{U}_X$ такие, что покрытие $Ov := \{OV \mid V \in v\}$ вписано в u, где $OV = \{gx \mid g \in O,\ x \in V\}$). В этом случае X — *G-тихоновское пространство*, пополнение X по вполне ограниченной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ — *G-компактификация*, или *эквивариантная компактификация* X, и существует $\beta_G X$ — *максимальная G-компактификация* X, которая соответствует максимальной вполне ограниченной эквиравномерности.

Например, действие топологической группы G на факторпространстве G/H левыми сдвигами ($g(hH) = (gh)H$) непрерывно, базу максимальной эквиравномерности образуют покрытия $\{Ox \mid x \in G/H\}$, $O \in N_G(e)$.

Дополнительные сведения можно найти, например, в [16].

3. Олигоморфность и Roelcke-предкомпактность подгрупп группы перестановок

Пусть G — подгруппа $\mathrm{S}(X)$. Для диагональных действий $\alpha_n : G \times X^n \to X^n$, $n \in \mathbb{N}$, (считая пространства X^n дискретными) предбазу окрестностей единицы перестановочной топологии на G образуют подгруппы St_x, $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, совпадающие с подгруппами $\mathrm{St}_{x_1, \dots, x_n}$ (стабилизатор точек $x_1, \dots, x_n$) при действии $\alpha_1 : G \times X \to X$. Тем самым перестановочные топологии на G, определяемые действиями α_n, $n \in \mathbb{N}$, совпадают и $((G, \tau_\partial), X^n, \curvearrowright)$ — G-пространства, $n \in \mathbb{N}$.

Базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на X (соответственно $\mathscr{U}_{X^n}$ на X^n) образуют покрытия

$$\omega_{x_1,\dots,x_m} = \{\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_m} x \mid x \in X\ (X^n)\}, \quad x_1, \dots, x_m \in X\ (X^n)$$

(см., например, [17]). Так как элементы покрытий $\omega_{x_1,\dots,x_n}$ или совпадают, или не пересекаются [17], то их можно считать дизъюнктными.

Теорема 3.1. *Следующие условия для G-пространства* $((G, \tau_\partial), X, \curvearrowright)$ *эквивалентны:*

(1) *максимальная эквиравномерность* $\mathscr{U}_X$ *вполне ограничена;*

(2) *действие группы* G *на множестве* X *олигоморфно.*

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Доказательство проведем индукцией по степеням X. Если максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена, то действие $G \curvearrowright X$ имеет конечное число орбит.

Пусть диагональное действие $G \curvearrowright X^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет конечное число орбит $Y_1, \dots, Y_k$, $y_1 \in Y_1, \dots, y_k \in Y_k$. В силу вполне ограниченности $\mathscr{U}_X$ для любого $j = 1, \dots, k$ действие подгруппы St_{y_j} на X имеет конечное число орбит: $X_{j1}, \dots, X_{jm(j)}$. Зафиксируем точки $x_{j1} \in X_{j1}, \dots, x_{jm(j)} \in X_{jm(j)}$, $j = 1, \dots, k$. Для проверки шага индукции достаточно показать, что орбиты точек $(y_j, x_{jm(j)})$, $j = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, m(j)$, — покрытие $X^{n+1} = X^n \times X$.

Для произвольной точки $(y, x) \in X^n \times X$ пусть $y \in Y_j$. Существует $g \in G$ такой, что $g(y_j) = y$ (при действии $G \curvearrowright X^n$). Тогда $g^{-1}(y, x) = (y_j, x')$ (при действии $G \curvearrowright X^{n+1}$). Существуют $x_{ji} \in X$ и $h \in \mathrm{St}_{y_j}$ такие, что $h(x_{ji}) = x'$. Тем самым $gh(y_j, z_{ji}) = (y, x)$.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Стабилизаторы точек образуют базу топологии в единице группы (G, τ_∂). Пусть действие G олигоморфно, $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} \in N_G(e)$ и $y = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$.

Если орбитами действия $G \curvearrowright X^{n+1}$ являются множества $Y_1, \dots, Y_k$, то орбитами действия подгруппы $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ на $X = \{y\} \times X$ являются множества $(\{y\} \times X) \cap Y_j$, $j = 1, \dots, k$. Они образуют базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$, которая вполне ограничена. $\square$

Следствие 3.2. *Пусть действие группы G на множестве X олигоморфно. Тогда*

(а) *любая открытая подгруппа H группы (G, τ_∂) олигоморфна (в частности, стабилизаторы точек X — олигоморфные подгруппы). Более того, олигоморфность H реализуется действием на X (сужением действия на $H \times X$);*

(б) *олигоморфность G реализуется диагональным действием на X^n, $n \in \mathbb{N}$. Тем самым для действия $(G, \tau_\partial) \curvearrowright X^n$ максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_{X^n}$ на X^n вполне ограничена, $n \in \mathbb{N}$;*

(в) *группа (G, τ_∂) Roelcke-предкомпактна* [18].

Доказательство. (а) Следует из теоремы 3.1 и совпадения максимальных эквиравномерностей на X для действий $G \curvearrowright X$ и $H \curvearrowright X$.

(б) Следует из теоремы 3.1 и возможности реализации олигоморфности G диагональным действием на X^n (диагональные действия на степенях $(X^n)^m = X^{nm}$ имеют конечное число орбит, $m \in \mathbb{N}$), $n \in \mathbb{N}$.

(в) Базу Roelcke-равномерности $L \wedge R$ на (G, τ_∂) образуют покрытия

$$\Omega_{x_1,\dots,x_n} = \{\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} g \,\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} \mid g \in G\}, \quad x_1, \dots, x_n \in X.$$

В силу теоремы 3.1 достаточно показать, что любое покрытие $\Omega_{x_1,\dots,x_n}$ имеет конечное подпокрытие.

Обозначим $x = (x_1, \dots, x_n) \in X^n$, $\mathrm{St}_x = \mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$. Из свойства (б) следует, что для подмножества $\{x\} \times Gx$ слоя $\{x\} \times X^n$ произведения $X^n \times X^n$ существуют $g_1, \dots, g_m \in G$ такие, что

$$\{x\} \times Gx \subset \{x\} \times \Big(\bigcup \{\mathrm{St}_x g_i x \mid i = 1, \dots, m\}\Big).$$

Тогда для любого $h \in G$

$$(x, hx) = (gx, gg_i x) = (x, gg_i x)$$

для некоторых $g \in \mathrm{St}_x$ и $i \in \{1, \dots, m\}$. Следовательно,

$$g_i^{-1} g^{-1} h \in \mathrm{St}_x \Longleftrightarrow h \in gg_i \,\mathrm{St}_x \subset \mathrm{St}_x \, g_i \,\mathrm{St}_x,$$

и $\{\mathrm{St}_x \, g_i \,\mathrm{St}_x \mid i = 1, \dots, m\}$ — конечное подпокрытие $\Omega_{x_1,\dots,x_n}$. $\square$

Замечание 3.3. В силу свойства (а) следствия 3.2 и теоремы 3.1 свойство (в) можно рассматривать как частный случай предложения 6.4 в [9].

Теорема 3.4. *Пусть у действия $(G,\tau_\partial) \curvearrowright X$ конечное число орбит. Тогда группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если действие G на X олигоморфно.*

Доказательство. Необходимость. Возьмем по одной точке из каждой орбиты действия $G \curvearrowright X$: $x_1,\dots,x_k$. Для произвольной окрестности $O \in N_G(e)$ существует окрестность вида $V = \mathrm{St}_{x_1,\dots,x_k,y_1,\dots,y_m} \subset O$. В силу Roelcke-предкомпактности группы G существует конечное множество $g_1,\dots,g_n \in G$ такое, что

$$\bigcup\{Vg_jV \mid j=1,\dots,n\} = G.$$

Тогда $\bigcup\{Vg_jVx_i \mid j=1,\dots,n\} = Gx_i$ для любого $i=1,\dots,k$ и

$$\bigcup\{Og_jx_i \mid j=1,\dots,n, i=1,\dots,k\} = X$$

(так как $V \subset O$, $Vx_i = x_i$, $i=1,\dots,k$), т. е. любое покрытие $\{Ox \mid x \in X\}$ имеет конечное подпокрытие и равномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена.

Достаточность доказана в п. (в) следствия 3.2. $\square$

Теорема 3.5. *Следующие условия для G-пространства $((G,\tau_\partial), X, \curvearrowright)$ (действие эффективно) эквивалентны:*

(1) группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна;

(2) для сужения действия $G \curvearrowright Y$ на любое инвариантное подмножество $Y \subset X$, имеющее конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$), действие группы $G_Y = G/H_Y$ на Y олигоморфно;

(3) для сужения действия $G \curvearrowright Y$ на любое инвариантное подмножество $Y \subset X$, имеющее конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$), для G-пространства $((G_Y = G/H_Y, \tau_\partial), Y, \curvearrowright)$ максимальная эквиравномерность $\mathscr{U}_Y$ вполне ограничена.

(4) группа (G,τ_∂) — всюду плотная подгруппа предела обратного спектра из олигоморфных групп (в перестановочных топологиях).

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2). Пусть группа (G,τ_∂) Roelcke-предкомпактна и Y — инвариантное подмножество X, сужение действия на которое $G \curvearrowright Y$ имеет конечное число орбит (H_Y — ядро действия $G \curvearrowright Y$).

G-пространство $((G_Y,\tau_\partial), Y, \curvearrowright)$ корректно определено. По теореме 3.4 достаточно показать, что группа (G_Y,τ_∂) Roelcke-предкомпактна.

Легко проверить, что фактортопология на группе $G_Y = G/H_Y$ является допустимой групповой топологией для действия $G_Y \curvearrowright Y$ и тем самым более сильной, чем перестановочная топология. Стало быть, группа (G_Y,τ_∂) является Roelcke-предкомпактной группой как непрерывный гомоморфный образ Roelcke-предкомпактной группы по факту 1(3).

Эквивалентность (2) $\Longleftrightarrow$ (3) доказана в теореме 3.1.

(2) $\Longrightarrow$ (4). Если у действия $(G,\tau_\partial) \curvearrowright X$ конечное число орбит, то группа G олигоморфна по теореме 3.4 и (G,τ_∂) совпадает с пределом тривиального обратного спектра (направленное множество одноэлементно, пространство (G,τ_∂)).

Пусть $Y = \bigcup\{Gx_j \mid j=1,\dots,k\}$ — инвариантное подмножество X, имеющее конечное число орбит для сужения действия $G \curvearrowright Y$. По теореме 3.4 и п. (в) следствия 3.2 группа (G_Y,τ_∂) Roelcke-предкомпактна.

Семейство инвариантных подмножеств X, имеющих конечное число орбит для действия $G \curvearrowright Y$, является направленным по включению множеством. Если $Y' \subset Y$, то определен непрерывный гомоморфизм $\varphi_{YY'} : (G_Y,\tau_\partial) \to (G_{Y'},\tau_\partial)$

(аргументы, аналогичные приведенным в доказательстве выше), для которого $\varphi_{YY'} \circ \varphi_Y = \varphi_{Y'}$. Тем самым определен обратный спектр $\{G_Y, \varphi_{YY'}, Y\}$ из Roelcke-предкомпактных групп (G_Y, τ_∂) и гомоморфизмов. Его предел является Roelcke-предкомпактной группой (факт 1(6)).

Так как действие G эффективно, то семейство сюръективных гомоморфизмов $\varphi_Y : (G, \tau_\partial) \to (G_Y, \tau_\partial)$ является разделяющим (точки и замкнутые множества) семейством отображений (так как $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ при действии $G \curvearrowright X$ содержит ядро действия G на $Y = \bigcup\{Gx_j \mid j = 1, \dots, n\}$ и прообраз $\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n}$ при действии $G_Y \curvearrowright Y$, $x_1, \dots, x_n \in Y$). Тем самым (G, τ_∂) — всюду плотная подгруппа предела обратного спектра $\{G_Y, \varphi_{YY'}, Y\}$.

(4) $\Longrightarrow$ (1) по фактам 1(1),(6). $\square$

Замечание 3.6. Если в условиях теоремы 3.5 группа (G, τ_∂) полна по Райкову, то она совпадает с пределом обратного спектра олигоморфных групп (являясь всюду плотной и замкнутой его подгруппой).

В [6, теорема 2.4] установлена эквивалентность условий (1), (2) и усиленного условия (4) (группа (G, τ_∂) — предел обратного спектра олигоморфных групп) для подгрупп перестановок счетного множества. Действительно, в этом случае группа (G, τ_∂) является польской (т. е. сепарабельной метризуемой полной метрикой) и, следовательно, полной по Райкову.

3.1. Ультратранзитивные действия.

Определение 3.7. Действие (эффективное) группы G на множестве X *сильно n-транзитивно*, $n \geq 1$, если для любых семейств различных n точек $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ существует $g \in G$ такой, что $g(x_k) = y_k$, $k = 1, \dots, n$.

Действие $G \curvearrowright X$, сильно n-транзитивное для всех $n \in \mathbb{N}$, называется *ультратранзитивным*.

Факты 2. (1) *Группа G, действующая на множестве X ультратранзитивно, олигоморфна* (см., например, [1]), *и, следовательно, (G, τ_∂) Roelcke-предкомпактна.*

Действительно, покрытие $\{\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} x \mid x \in X\}$ дискретного пространства X состоит ровно из $n+1$ попарно различных элементов:

$$\{x_1\}, \dots, \{x_n\}, \{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}\}, \quad x_1, \dots, x_n \in X.$$

Остается сослаться на п. (в) следствия 3.2.

(2) *Группа G, действующая на X ультратранзитивно, является всюду плотной подгруппой* $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$.

Действительно, пусть множество O открыто в $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$ и $g \in O$. Тогда существуют точки $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $g\,\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} \subset O$ и $g\,\mathrm{St}_{x_1,\dots,x_n} = \{h \in G \mid h(x_i) = g(x_i),\ i = 1, \dots, n\}$ — открытая окрестность g. Поскольку G действует на X ультратранзитивно, существует $h \in G$ такой, что $h(x_i) = g(x_i)$, $i = 1, \dots, n$. Очевидно, $h \in O$. $\square$

Roelcke-предкомпактность группы $(\mathrm{S}(X), \tau_\partial)$ доказана в [19] (см, также [8, пример 9.14]).

(3) *Пространство X ультраоднородно, если действие его группы гомеоморфизмов* $\mathrm{Hom}(X)$ *ультратранзитивно. Ультраоднородными пространствами являются локально компактные метризуемые* CDH-*пространства, дополнение до любого конечного подмножества которых связно. К их числу относятся сферы*

S^{n-1} *в евклидовых пространствах* $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, *гильбертов куб* Q (*см., например,* [20]).

Группа гомеоморфизмов с перестановочной топологией ультраоднородного пространства является Roelcke-предкомпактной, хотя перестановочная топология не обязана быть допустимой групповой топологией. Группы гомеоморфизмов сфер S^n, $n \geq 2$, и гильбертова куба Q с компактно-открытой топологией (наименьшей допустимой групповой топологией) не Roelcke-предкомпактны [18]. Значит, по лемме 2.3 и в любой допустимой групповой топологии эти группы не Roelcke-предкомпактны.

3.2. Однородные линейно упорядоченные множества. Подмножество Y линейно упорядоченного множества X называется *промежутком* (или *выпуклым подмножеством*), если для для любых $x \leq y \in Y$ и $x \leq z \leq y$ вытекает $z \in Y$. Промежутками являются:

полуинтервалы $[a, b) = \{x \in X \mid a \leq x < b\}$, $[a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a \leq x\}$, $(a, b] = \{x \in X \mid a < x \leq b\}$, $(\leftarrow, b] = \{x \in X \mid x \leq b\}$;

интервалы $(a, b) = \{x \in X \mid a < x < b\}$, $(a, \rightarrow) = \{x \in X \mid a < x\}$, $(\leftarrow, b) = \{x \in X \mid x < b\}$ (считаем множество X интервалом);

отрезки $[a, b] = \{x \in X \mid a \leq x \leq b\}$ (в частности, точки X).

Определение 3.8. Пусть X — линейно упорядоченное множество, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа сохраняющих порядок биекций X ($\mathrm{Aut}(X)$ — подгруппа $\mathrm{S}(X)$). X называется *однородным линейно упорядоченным множеством*, если действие $\mathrm{Aut}(X)$ на X транзитивно (т. е. для любых $x, y \in X$ существует $f \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $f(x) = y$).

Факты 3. (1) *Однородное линейно упорядоченное множество или одноточечно, или бесконечно.*

(2) *Однородное линейно упорядоченное множество X или дискретно (для любого $x \in X$ существует x^+, $x < x^+$, и $(x, x^+) = \varnothing$ [21]), или плотно (X плотное, если для любых $x < y \in X$ существует $z \in (x, y)$ [21]).*

(3) *Линейно упорядоченное пространство (LOTS) — линейно упорядоченное множество X, базу топологии (топология линейного порядка) которого образуют интервалы. На группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ линейно упорядоченного пространства X топология поточечной сходимости τ_p является наименьшей допустимой групповой топологией для действия $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X, \tau)$ (см. [22, 23]). Топология τ_∂ является допустимой групповой топологией и $\tau_\partial \geq \tau_p$. Если X дискретно, то $\tau_\partial = \tau_p$.*

Определение 3.9. Промежуток J однородного линейно упорядоченного множества X называется *регулярным* [24, определение 5], если

$$\forall\ x, y \in J,\ \forall\ g \in \mathrm{Aut}(X)\ ((gx \in J) \Longrightarrow (gy \in J)).$$

Однородное линейно упорядоченное множество X называется *простым* [24, определение 6], если в X нет собственных регулярных промежутков (несобственные — или точки, или все X). Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *o-примитивной* [2].

Линейно упорядоченное множество X называется 2-*однородным*, если для любых пар точек $x < y$ и $x' < y'$ существует $g \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $g(x) = x'$, $g(y) = y'$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *o-2-транзитивной* [2].

Однородное линейно упорядоченное множество X называется *жестким* (rigid) [25], если для любых $x, y \in X$ существует единственный $g \in \mathrm{Aut}(X)$

такой, что $g(x) = y$. Группа $\mathrm{Aut}(X)$ в этом случае называется *регулярной* или *однозначно транзитивной* [2].

Факты 4. (1) 2-*Однородное линейно упорядоченное множество плотное.*

(2) 2-*Однородное линейно упорядоченное множество является ультраоднородным* [2, *лемма* 1.10.1] (*см, также* [22]), *т. е. для любых семейств различных* n *точек* $x_1 < \ldots < x_n$ *и* $y_1 < \ldots < y_n$ *существует* $g \in \mathrm{Aut}(X)$ *такой, что* $g(x_k) = y_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

В [24, п. 2, п. 3.5] и [2, 3] установлена справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.10. *Для однородного линейно упорядоченного множества* X *следующие условия эквивалентны:*

(1) *множество* X *простое;*

(2) *множество* X

(i) 2-*однородно* (*ультраоднородно*), *или*

(ii) *жестко и* (*порядково*) *изоморфно подгруппе* $\mathbb{R}$ (*изоморфной* $\mathrm{Aut}(X)$);

(3) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *o-примитивна;*

(4) *группа* $\mathrm{Aut}(X)$

(i) *o*-2-*транзитивна, или*

(ii) *однозначно транзитивна и является подгруппой абелевой группы* $\mathbb{R}$ (*см., также,* [25]). $\square$

Теорема 3.11. *Пусть* X — *простое* (*линейно упорядоченное*) *множество.*

(1) X *жестко* $\iff$ *группа* $\mathrm{Aut}(X)$ *не является Roelcke-предкомпактной ни в какой допустимой групповой топологии при действии на* LOTS $X \iff$ *действие* $\mathrm{Aut}(X)$ *на* X *не олигоморфно.*

(2) X *ультраоднородно* $\iff$ *группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ *Roelcke-предкомпактна* $\iff$ *группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ *Roelcke-предкомпактна* $\iff$ *действие* $\mathrm{Aut}(X)$ *на* X *олигоморфно* $\Longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ *олигоморфна.*

(3) *Группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ *Roelcke-предкомпактна в том и только в том случае, если группа* $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ *Roelcke-предкомпактна.*

Доказательство. По теореме 3.4 (орбита единственна) выполнена вторая эквивалентность в п. (1) (перестановочная топология является допустимой групповой топологией, п. 2.3) и эквивалентность в п. (2): группа $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна $\iff$ действие $\mathrm{Aut}(X)$ на X олигоморфно. Последняя импликация в п. (2) следует из определения 2.1.

Необходимость в первой эквивалентности в п. (1). По теореме 3.10 X является (неограниченной) подгруппой абелевой группы $\mathbb{R}$. Если X дискретно, то X изоморфно $\mathbb{Z}$, группа $\mathrm{Aut}(X)$ в топологии $\tau_\partial = \tau_p$ на $\mathrm{Aut}(X)$ изоморфна $\mathbb{Z}$ и не Roelcke-предкомпактна.

Если X плотно, то X — плотное неограниченное подмножество $\mathbb{R}$, группа $\mathrm{Aut}(X)$ в топологии τ_p — всюду плотная неограниченная подгруппа абелевой топологической группы $\mathbb{R}$, на которой все групповые равномерности совпадают и не являются вполне ограниченными. Значит, $(\mathrm{Aut}(X), \tau_p)$ (по следствию 2.4 ни в какой допустимой групповой топологии) не является Roelcke-предкомпактной.

Необходимость в первой эквивалентности в п. (2). Базу максимальной эквиравномерности $\mathscr{U}_X$ на дискретном пространстве (X, τ_d) при действии

$$(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial) \curvearrowright (X, \tau_d)$$

образуют конечные покрытия

$$(\leftarrow, x_1) \cup \{x_1\} \cup (x_1, x_2) \cup \{x_2\} \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup \{x_n\} \cup (x_n, \rightarrow),\ x_1 < \ldots < x_n,\ n \in \mathbb{N},$$

и равномерность $\mathscr{U}_X$ вполне ограничена. По теореме 3.1 группа $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна.

Необходимость во второй эквивалентности в (2) следует из следствия 2.4.

Достаточность в первой эквивалентности в (1) и первых двух эквивалентностях в (2). Если группа $\mathrm{Aut}(X)$ не является Roelcke-предкомпактной ни в какой допустимой групповой топологии, то $(\mathrm{Aut}(X), \tau_\partial)$ не Roelcke-предкомпактна и X не ультраоднородно. По теореме 3.10 оно жестко.

Если группа $\mathrm{Aut}(X)$ является Roelcke-предкомпактной в некоторой допустимой групповой топологии, то оно не жестко. По теореме 3.10 оно ультраоднородно.

Условие (3) является следствием (2). $\square$

Замечание 3.12. В теореме 3.11 группу автоморфизмов ультраоднородного простого множества можно заменить на любую ее подгруппу, действующую ультратранзитивно.

Roelcke-предкомпактность ультратранзитивных подгрупп группы автоморфизмов (ультраоднородных) линейно упорядоченных (и циклических) множеств в топологии поточечной сходимости (перестановочной топологии в терминах данной статьи) установлена в [9, предложение 6.6].

Примеры 3.13. (1) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$, изоморфная $\mathbb{Z}$, не олигоморфна.

Действительно, предположив ее олигоморфность, имеем: во-первых, существует (счетное) множество X, действие $\mathbb{Z}$ на котором имеет конечное число орбит; во-вторых, одна из орбит бесконечна ($\mathbb{Z}$ не может эффективно действовать на конечном множестве); в-третьих, стабилизатор точки бесконечной орбиты тривиален (иначе орбита конечна) и получаем обычное действие группы $\mathbb{Z}$ на себе, которое не олигоморфно. Получено противоречие.

Однако на $\mathbb{Z}$ существует групповая топология σ, в которой $\mathbb{Z}$ предкомпактна, и, стало быть, $(\mathbb{Z}, \sigma)$ Roelcke-предкомпактна.

Действительно, характер, ядро которого тривиально, — изоморфизм $\mathbb{Z}$ на всюду плотную подгруппу окружности S^1 и, стало быть, $\mathbb{Z}$ — предкомпактная группа в индуцируемой топологии.

Никакая групповая топология, в которой $\mathbb{Z}$ предкомпактна, не может быть перестановочной топологией при действии $\mathbb{Z}$ на дискретном пространстве.

(2) Если X и Y — линейно упорядоченные множества, то через $X \otimes_\ell Y$ обозначается их *произведение* $X \times Y$ *с лексикографическим порядком.*

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{P}$, $\mathbb{R}$, $(0,1)$, $\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{Q}$ ((линейно) изоморфно $\mathbb{Q}$) и $\mathbb{Z} \otimes_\ell \mathbb{P}$ ((линейно) изоморфно $\mathbb{P}$) — ультраоднородные множества. Их группы автоморфизмов по теореме 3.11 олигоморфны и Roelcke-предкомпактны в топологиях τ_∂ и τ_p при соответствующих действиях.

(3) Если X и Y — линейно упорядоченные множества, то через $X \Diamond Y$ обозначается их *конкатенация* (на дизъюнктном объединении X и Y линейный порядок следующий: $x < y$, если $x \in X$, $y \in Y$, ограничения линейного порядка на X и Y совпадают с линейными порядками на X и Y соответственно).

$\mathscr{L} = [0, \omega_1) \otimes_\ell [0, 1)$ — длинный луч, $\mathscr{L}_-$ — длинный луч $\mathscr{L}$ с обратным линейным упорядочением.

Легко проверить, что $L = \mathscr{L} \setminus \{(0,0)\} \subset \mathscr{L}$, $L_- = \mathscr{L}_- \setminus \{(0,0)\} \subset \mathscr{L}_-$ и $\tilde{L} = L_- \Diamond \{0\} \Diamond L$ — ультраоднородные множества и по теореме 3.11 группы их автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,(\star)$ олигоморфны и Roelcke-предкомпактны в топологиях τ_∂ и τ_p (см. [23, § 3, п. 3.3] для топологии поточечной сходимости).

(4) Для группы $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ LOTS «две стрелки Александрова»

$$\mathbf{D} = \{(0,1)\}\Diamond((0,1)\otimes_\ell \{0,1\})\Diamond\{(1,0)\}$$

наименьшей допустимой групповой топологией является топология поточечной сходимости τ_p, совпадающая с перестановочной τ_∂, так как

$$\mathrm{st}_{(x,i)} = [(x,1),[(x,1),\to)] \cap [(x,0),(\leftarrow,(x,0)]], \quad x \neq 0,1,\ i=0,1.$$

Легко проверить, что у действия две орбиты и максимальная эквиравномерность при действии $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial) \curvearrowright (\mathbf{D},\tau_d)$ вполне ограничена. Значит, по теореме 3.1 группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ олигоморфна и $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна по п. (в) следствия 3.2.

Возможен иной подход. LOTS $D = (0,1)\otimes_\ell \{-1,1\}$ является подпространством $\mathbf{D}$ и группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(D)$ и $\mathrm{Aut}(\mathbf{D})$ в перестановочных топологиях топологически изоморфны. Можно показать, что группа $(\mathrm{Aut}(D),\tau_\partial)$ (τ_∂ — наименьшая допустимая групповая топология) топологически изоморфна группе $(\mathrm{Aut}(\mathbb{R}),\tau_\partial)$. Значит, группа $(\mathrm{Aut}(\mathbf{D}),\tau_\partial)$ Roelcke-предкомпактна (п. (2)) и по теореме 3.4 олигоморфна.

(5) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbf{K})$ лексикографически упорядоченного квадрата

$$\mathbf{K} = [0,1]\Diamond((0,1)\otimes_\ell [0,1])\Diamond[0,1]$$

Roelcke-предкомпактна в топологиях τ_∂ и τ_p, так как легко проверить, что максимальная эквиравномерность при действии $(\mathrm{Aut}(\mathbf{K}),\tau_\partial) \curvearrowright (\mathbf{K},\tau_d)$ вполне ограничена (и у действия 9 орбит). Следовательно, она олигоморфна по теореме 3.4. Иной подход представлен в [26, § 5].

3.3. Однородные GO-пространства. *Обобщенно упорядоченное пространство* (GO-*пространство*) — линейно упорядоченное множество с топологией τ такой, что: (i) τ больше или равна топологии линейного порядка, (ii) базу τ образуют промежутки [27, определение 2.1].

Лемма 3.14. *В следующих топологиях однородное линейно упорядоченное множество X является GO-пространством и каждый элемент $\mathrm{Aut}(X)$ — гомеоморфизм:*

(1) *топология линейного порядка τ (база топологии — интервалы (x,y), $x<y\in X$), (X,τ) — (LOTS);*

(2) *топология «стрелки» $\tau_\to$ или $\tau_\leftarrow$ (база топологии — полуинтервалы $[x,y)$ (правая стрелка) или полуинтервалы $(x,y]$, (левая стрелка), $x<y\in X$);*

(3) *дискретная топология τ_d,*

$$\tau \le \begin{Bmatrix} \tau_\to \\ \tau_\leftarrow \end{Bmatrix} \le \tau_d,$$

$\tau = \begin{Bmatrix} \tau_\to \\ \tau_\leftarrow \end{Bmatrix} = \tau_d \iff X$ *— дискретное однородное линейно упорядоченное множество.*

Доказательство. Пусть σ — произвольная топология на X, в которой X является GO-пространством. Если X дискретно, то $\tau = \begin{Bmatrix} \tau_\to \\ \tau_\leftarrow \end{Bmatrix} = \tau_d$, так как для любого $x\in X$ существуют $x^- < x < x^+$ и интервалы (x^-,x), (x,x^+) — пустые множества.

Если X не дискретно, то пусть x — произвольная точка X. Промежутками, содержащими x, могут быть или интервалы (a,b), $a < x < b$, или полуинтервалы $[x,b)$, $x < b$, $(a,x]$, $a < x$. Случаи отрезков $[a,b]$, $[x,b]$, $[a,x]$ сводятся к предыдущим случаям, так как на GO-пространстве топология сильнее топологии линейного порядка.

Если рассматривать только открытые интервалы в качестве открытых окрестностей точки x, то они образуют базу топологии линейного порядка в точке x и в силу однородности X на X будет задана топология линейного порядка.

Если к открытым интервалам в качестве открытых окрестностей точки x добавить хотя бы один полуинтервал $[x,b)$ (соответственно $(a,x]$), то они образуют базу топологии в точке x вида $\{[x,b) \mid b > x\}$ (соответственно $\{(a,x] \mid a < x\}$) и в силу однородности X на X будет задана «топология стрелки» $\tau_{\to}$ (соответственно $\tau_{\leftarrow}$).

Если к открытым интервалам в качестве открытых окрестностей точки x добавить хотя бы один полуинтервал $[x,b)$ и хотя бы один полуинтервал $(a,x]$, то они образуют базу дискретной топологии в точке x и в силу однородности X на X будет задана дискретная топология.

Соотношения $\tau \le \begin{Bmatrix} \tau_{\to} \\ \tau_{\leftarrow} \end{Bmatrix} \le \tau_d$ очевидно выполняются.

Импликация $\tau = \tau_d \Longrightarrow X$ — дискретное однородное линейно упорядоченное множество следует из существования $x^- < x$ и $x < x^+$ таких, что (x^-,x), (x,x^+) — пустые множества. Обратная импликация установлена в начале доказательства.

Так как при биекции, сохраняющей порядок, образами интервалов и полуинтервалов являются интервалы и полуинтервалы соответственно, то элементы $\mathrm{Aut}(X)$ — гомеоморфизмы. □

Следствие 3.15. (1) *На дискретном однородном линейно упорядоченном множестве топология, в которой X — однородное GO-пространство, единственна. X — дискретное* LOTS.

(2) $\tau_{\to} < \tau_d \iff \tau_{\leftarrow} < \tau_d$.

(3) $\begin{Bmatrix} \tau_{\to} \\ \tau_{\leftarrow} \end{Bmatrix} = \tau_d \iff \tau_d = \tau$.

(4) *Если существует биекция, меняющая порядок на X, то $(X,\tau_{\to})$ и $(X,\tau_{\leftarrow})$ гомеоморфны.* □

Предложение 3.16. *Пусть X — однородное линейно упорядоченное множество.*

(1) *На группе $\mathrm{Aut}(X)$ топология поточечной сходимости τ_p является наименьшей допустимой групповой топологией для действия $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau)$. Топология τ_∂ является допустимой групповой топологией и $\tau_\partial \ge \tau_p$. Если X дискретно, то $\tau_\partial = \tau_p$.*

(2) *На группе $\mathrm{Aut}(X)$ перестановочная топология τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией для действий $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_{\to})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_{\leftarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_d)$.*

Доказательство. $(\mathrm{Aut}(X),\tau_\partial)$ — топологическая группа [8].

(1) Доказано в [22, 23].

(2) Легко проверить, что перестановочная топология τ_∂ является допустимой групповой топологией для действий $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_{\to})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_{\leftarrow})$, $\mathrm{Aut}(X) \curvearrowright (X,\tau_d)$. В последнем случае она, очевидно, наименьшая.

Пусть σ — допустимая групповая топология, например, на группе $\mathrm{Aut}\,(X,\tau_{\to})$. Для любых точки x и ее окрестности $[x,y)$, $x<y$, существуют окрестность O единицы группы и окрестность точки x вида $[x,x')$, $x<x'$, такие, что $O[x,x')\subset [x,y)$. Тогда для любого гомеоморфизма g из окрестности $O\cap O^{-1}$ единицы группы имеем $g(x)\in[x,y)$ и $g^{-1}(x)\in[x,y)$. Если, например, $g(x)=z>x$, то $g^{-1}(x)<g^{-1}(z)=x$. Значит, $g(x)=x$ для любого $g\in O\cap O^{-1}$ и $O\cap O^{-1}\subset \mathrm{st}\ x$, т. е. $\sigma\geq\tau_\partial$ и τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(X)$ для действия $\mathrm{Aut}(X)\curvearrowright(X,\tau_{\to})$. $\square$

Примеры 3.17. (1) Прямая Зоргенфрея $\mathbb{S}$ [7, пример 1.2.2] — ультраоднородное линейно упорядоченное множество, являющееся GO-пространством.

По предложению 3.16 перестановочная топология τ_∂ является наименьшей допустимой групповой топологией на группе $\mathrm{Aut}(\mathbb{S})$ и группа $(\mathrm{Aut}(\mathbb{S}),\tau_\partial)$ изоморфна $(\mathrm{Aut}(\mathbb{R}),\tau_\partial)$ (см. (2) пример 3.13).

(2) Группа $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ GO-пространства «прямая Майкла» $\mathbb{M}$ [7, пример 5.1.32] естественным образом отождествляется с группами $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ и $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ автоморфизмов инвариантных подмножеств иррациональных чисел $\mathbb{P}$ в дискретной топологии и рациональных чисел $\mathbb{Q}$ в топологии линейного порядка соответственно (две орбиты действия).

Наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$ является перестановочная топология $\tau_{\partial\mathbb{M}}$, наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$ является топология поточечной сходимости $\tau_{p\mathbb{M}}$. Легко проверить, что $\tau_{\partial\mathbb{M}}\geq\tau_{p\mathbb{M}}$, поэтому наименьшей допустимой групповой топологией на $\mathrm{Aut}(\mathbb{M})$ будет $\tau_{\partial\mathbb{M}}$. $(\mathrm{Aut}(\mathbb{M}),\tau_{\partial\mathbb{M}})$ топологически изоморфна $(\mathrm{Aut}(\mathbb{P}),\tau_\partial)$, Roelcke-предкомпактна и олигоморфна (п. (2), пример 3.13).

Благодарность. Автор благодарен профессору К. Л. Козлову за многочисленные полезные обсуждения, профессору В. Г. Пестову и профессору М. Г. Мегрелишвили за представленную полезную информацию, связанную с темой исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cameron P. J.* Oligomorphic permutation groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 152).
2. *Glass A. M. W.* Ordered permutations groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1981. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.; V. 55).
3. *Holland C.* Transitive lattice-ordered permutations groups // Math. Z. 1965. V. 87. P. 420–433.
4. *Pestov V.* Topological groups: Where to from here? // Topol. Proc. 1999. V. 24, N (Summer). P. 421–506.
5. *Rosendal C.* A topological version of the Bergman property // Forum Math. 2009. V. 21, N 2. P. 299–332.
6. *Tsankov T.* Unitary representations of oligomorphic groups // Geometric and Funct. Anal. 2012. V. 22, N 2. P. 528–555.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
8. *Roelcke W., Dierolf S.* Uniform structures on topological groups and their quotients. USA: McGraw-Hill Inc., 1981.
9. *Glasner E. Megrelishvili M.* Circular orders, ultra-homogeneous order structures and their automorphism groups in topology, geometry and dynamics: V. A. Rokhlin–Memorial. Ed.: A. M. Vershik, V. M. Buchstaber, A. V. Malyutin // Contemp. Math. 2021. V. 772. P. 133–154.
10. *Райков Д. А.* О пополнении топологических групп // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 6. С. 513–528.
11. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.
12. *Гуран И.* Топологические группы и свойства их подпространств: Дис. канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1981.

13. *Борубаев А. А.* Равномерная топология. Бишкек: Макспринт, 2013.

14. *Arens R.* Topologies for homeomorphism groups // Am. J. Math. 1946. V. 68, N 4. P. 593–610.

15. *Kozlov K. L.* Uniform equicontinuity and groups of homeomorphisms // Topol. Appl. 2022. V. 311. 26 с.

16. *Megrelishvili M.* Equivariant completions // Comment. Math. Univ. Carolin. 1994. V. 35, N 3. P. 539–547.

17. *Chatyrko V. A., Kozlov K. L.* The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions // Proc. 9th Prague Topol. Symp. Prague, 2001. P. 15–21.

18. *Rosendal C.* Global and local boundedness of Polish groups // Indiana Univ. Math. J. 2013. V. 62, N 5. P. 1621–1678.

19. *Gaughan E. D.* Topological group structures of infinite symmetric groups // Proc. Nat. Acad. Sci. 1967. V. 58, N 3. P. 907–910.

20. *Arhangel′skii A.V., van Mill J.* Topological homogeneity // Recent Progress in General Topology III, Ed.: K. P. Hart, J. van Mill. Atlantis Press, 2014. P. 1–68.

21. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.

22. *Ovchinnikov S.* Topological automorphism groups of chain // Mathware & Soft Computing. 2001. V. 8, N 1. P. 47–60.

23. *Сорин Б. В.* Компактификации групп гомеоморфизмов линейно упорядоченных компактов // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 1. С. 118–137.

24. *Ohkuma T.* Structure of homogeneous chains // Kodai Math. Sem. Rep. 1953. V. 5, N 1. P. 1–12.

25. *Glass A. M. W., Gurevich Yu., Holland W. C., Shelah S.* Rigid homogeneous chains // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1981. V. 89, N 7. P. 7–17.

26. *Sorin B. V.* The Roelcke precompactness and compactifications of transformations groups of discrete spaces and homogeneous chains. arXiv:2310.18570 math[GN] 28 oct. 2023.

27. *Lutzer D. J.* On generalized ordered spaces. Dissertationes Math. 1971. 89.

Поступила в редакцию 16 мая 2024 г.
После доработки 27 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Сорин Борис Владимирович
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра общей топологии и геометрии,
Ленинские горы, 1, Москва 119992
`bvs@imtprofi.ru`

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 30.04.2025. Уч.-изд. л. 19,4. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.05.2025. Объем файла 2.27 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.