ISSN 2310–001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 66 2 2025

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 66, № 2 (390) **Март—апрель, 2025**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2025

Адрес редакции:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 510.5

О ТЕОРИИ ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДПОРЯДКОВ С КОНКАТЕНАЦИЕЙ

Д. Б. Алиш, Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев

Аннотация. Предпорядок R называют линейным, если соответствующий фактор-порядок является линейно упорядоченным. Данная работа посвящена изучению вычислимой сводимости на бинарных отношениях. В работе исследуется степенная структура **Celps** вычислимо перечислимых линейных предпорядков относительно вычислимой сводимости.

Операция конкатенации дает упорядоченную сумму двух данных линейных предпорядков. Доказано, что элементарная теория структуры **Celps** с операцией конкатенации рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка. Также показано, что теория всех счетных линейных предпорядков (относительно вычислимой сводимости) с операцией конкатенации рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.201

Ключевые слова: вычислимая сводимость, позитивный линейный предпорядок, вычислимо перечислимый предпорядок, арифметика первого порядка, счетный линейный предпорядок.

1. Введение

В работе изучается вычислимая сводимость для предпорядков, заданных на множестве натуральных чисел ω. Пусть R и S — бинарные отношения на ω. Отношение R *вычислимо сводится* к S (обозначается через $R \leq_c S$), если существует всюду определенная вычислимая функция $f(x)$ такая, что для любых $x, y \in \omega$ выполнено

$$(x\, R\, y) \;\Leftrightarrow\; (f(x)\, S\, f(y)).$$

Систематические исследования вычислимой сводимости для позитивных (вычислимо перечислимых) отношений эквивалентности были инициированы Ю. Л. Ершовым [1, 2]. В частности, он построил один из первых примеров универсальной позитивной эквивалентности (т. е. позитивной эквивалентности E такой, что любая позитивная эквивалентность F вычислимо сводится к E). Вначале исследования в области вычислимой сводимости были в основном сосредоточены на естественных подклассах универсальных позитивных эквивалентностей (см., например, статьи [3, 4] и недавний обзор [5]).

Исследование поддержано Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP19576325). Работа Н. А. Баженова выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0011).

В последние годы исследования сфокусированы на структурных свойствах частично упорядоченного множества $(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$. Множество **Ceers** содержит все $\leq_c$-степени позитивных эквивалентностей. Отметим, что аббревиатура *ceer* (которая расшифровывается как "computably enumerable equivalence relation") была введена в [6]. В настоящее время эта аббревиатура стала стандартным синонимом термина «позитивная эквивалентность» (positive equivalence).

В данной работе изучается сложность элементарных теорий для некоторых естественных степенных структур, связанных с вычислимой сводимостью.

В теории вычислимости для многих естественных степенных структур $\mathbf{D}$ их элементарные теории $\mathrm{Th}(\mathbf{D})$ имеют максимальную возможную m-степень. Приведем лишь несколько примеров таких структур.

• Симпсон [7] доказал, что для верхней полурешетки $\mathbf{D}_T$ всех тьюринговых степеней ее теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_T)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

• Шор [8] доказал, что для полурешетки $\mathbf{D}_T(\leq \mathbf{0}')$ Δ^0_2 тьюринговых степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_T(\leq \mathbf{0}'))$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.

• Нероуд и Шор [9] доказали, что для полурешетки $\mathbf{D}_m$ всех m-степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{D}_m)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.

• Нис [10] доказал, что для полурешетки $\mathbf{R}_m$ в.п. m-степеней теория $\mathrm{Th}(\mathbf{R}_m)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.

Оказывается, что для вычислимой сводимости соответствующие теории $\mathrm{Th}(\mathbf{D})$ также обычно имеют максимально возможную сложность.

В фундаментальной работе [11] Эндрюс и Сорби разработали сложные методы работы с $\leq_c$-степенями позитивных отношений эквивалентности. На основе этих методов в [12] была доказана следующая теорема: теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка. После этого были получены следующие результаты в этом направлении.

(a) Для множества **Ceprs**, содержащего $\leq_c$-степени всех в.п. предпорядков, теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Ceprs}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка [13].

(b) Для множества **ER**, содержащего $\leq_c$-степени всех отношений эквивалентности на ω, теория $\mathrm{Th}(\mathbf{ER}, \leq_c)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка [14].

(c) В [15] результаты работы [12] перенесены на случай обобщенной теории вычислимости на несчетных множествах.

В данной работе продолжаются исследования [12–14]. В [13] выделена важная подструктура структуры **Ceprs** (т. е. структуры в.п. предпорядков), которая интересна и сама по себе: эта подструктура **Celps** содержит $\leq_c$-степени всех *в.п. линейных предпорядков*.

Напомним, что *предпорядок* — это рефлексивное и транзитивное отношение. Говорят, что предпорядок R *линейный*, если все $x, y \in \mathrm{dom}(R)$ удовлетворяют следующему свойству: $(x\,R\,y) \vee (y\,R\,x)$.

В статье [13] структура $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ использовалась для того, чтобы установить элементарную определимость $(\mathbf{Ceers}, \leq_c)$ в структуре предпорядков $(\mathbf{Ceprs}, \leq_c)$. На основе этого результата об элементарной определимости в [13] получен результат (a), упомянутый выше. Отметим, что вопрос о точной сложности теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ остается открытым.

В данной работе рассматривается дополнительная операция $\oplus$ на линейных предпорядках. Пусть L и R — линейные предпорядки на ω. Их *конкатенация* (или упорядоченная сумма) $L \oplus R$ задается следующим образом. Для $x, y \in \omega$ соотношение $(x, y) \in L \oplus R$ верно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

- $x = 2k$, $y = 2m$ и $(k, m) \in L$;
- $x = 2k + 1$, $y = 2m + 1$ и $(k, m) \in R$;
- $x = 2k$ и $y = 2m + 1$.

Говоря неформально, операция конкатенации $\oplus$ соответствует (обычной) сумме порядковых типов (см., например, определение 1.29 в [16]). Нетрудно проверить следующее: если линейные предпорядки L и R вычислимо перечислимы, то предпорядок $L \oplus R$ также вычислимо перечислим. Следовательно, операция $\oplus$ корректно определена на множестве **Celps**.

Работа построена следующим образом. Разд. 2 содержит необходимые предварительные сведения. В разд. 3 доказывается, что теория в.п. линейных предпорядков с конкатенацией (т. е. теория $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$) рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка (теорема 3.1 и следствие 3.2).

В разд. 4 разработанные методы применяются к классу **LP**, содержащему $\leq_c$-степени всех счетных линейных предпорядков на ω. Доказывается, что $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка (теорема 4.1).

2. Предварительные сведения

Если не оговорено обратное, предполагаем, что каждое рассматриваемое бинарное отношение задано на ω. Бинарное отношение R является *предпорядком* если R рефлексивно и транзитивно. Для предпорядка R определяется соответствующее отношение эквивалентности $\mathrm{supp}(R)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(R) = \{(x, y) : (x\, R\, y) \,\&\, (y\, R\, x)\}.$$

Для элемента $a \in \omega$ и отношения эквивалентности E через $[a]_E$ обозначается класс E-эквивалентности элемента a.

Для предпорядка R его $\leq_c$-степень задается стандартным образом:

$$\deg_c(R) = \{S : S \equiv_c R\}.$$

Через $\leq_{\mathbb{N}}$ обозначается стандартный линейный порядок на натуральных числах. Более подробные сведения о счетных линейных порядках можно найти в монографии [16].

Напомним, что предпорядок R является *линейным*, если все $x, y \in \omega$ удовлетворяют следующему условию: $(x\, R\, y) \vee (y\, R\, x)$. Линейный предпорядок R индуцирует естественный линейный порядок на классах $\mathrm{supp}(R)$-эквивалентности:

$$[a]_{\mathrm{supp}(R)} \leq_R [b]_{\mathrm{supp}(R)} \text{ тогда и только тогда, когда } (a\, R\, b).$$

Через **Celps** обозначаем множество всех $\leq_c$-степеней в.п. линейных предпорядков.

Как обычно, иногда будем отождествлять линейный предпорядок R и его степень $\deg_c(R)$. В случаях, когда это ясно из контекста, также будем отождествлять предпорядок R и соответствующий фактор-порядок $(\omega/\mathrm{supp}(R), \leq_R)$.

Для натурального числа $n \geq 1$ зададим вычислимый линейный предпорядок Lin_n следующим образом:

$$(x,y) \in \mathrm{Lin}_n \ \Leftrightarrow \ \mathrm{rest}(x,n) \leq_{\mathbb{N}} \mathrm{rest}(y,n),$$

где $\mathrm{rest}(x,n)$ — это остаток от деления x на n. Для Lin_n его $\leq_c$-степень обозначается через $\mathbf{l}_n$.

Замечание 2.1. Отметим следующие простые свойства степеней $\mathbf{l}_n$:

(a) $\mathbf{l}_n <_c \mathbf{l}_{n+1} <_c \deg_c(R)$ для любого (не обязательно в.п.) линейного предпорядка R такого, что соответствующее отношение эквивалентности $\mathrm{supp}(R)$ имеет бесконечно много классов;

(b) $\mathbf{l}_n \oplus \mathbf{l}_k = \mathbf{l}_{n+k}$ для всех $n, k \geq 1$.

Известно, что частично упорядоченное множество $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ имеет наибольший элемент U (см., например, теорему 3.1 в [17]). Как обычно, такой предпорядок U называем *универсальным в.п. линейным предпорядком.* Обзор других известных результатов о частично упорядоченном множестве $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$ можно найти в [18].

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначаем стандартную нумерацию упорядоченных пар, осуществляемую функцией

$$\langle x, y \rangle = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + x.$$

Через ζ обозначается порядковый тип целых чисел.

Вычислимые линейные порядки рассматриваются на основе стандартного подхода теории вычислимых структур: вычислимый линейный порядок L задается вычислимым бинарным отношением, которое является рефлексивным, транзитивным, линейным и *антисимметричным.* Заметим, что каждый вычислимый линейный порядок L (с областью определения ω) является позитивным линейным предпорядком.

Для предпорядка R его *обращение* R^* определяется стандартным образом: $x \leq_{R^*} y$ верно тогда и только тогда, когда $y \leq_R x$.

Если L_1 и L_2 — (вычислимые) линейные порядки на ω, то полагаем, что их произведение $L_1 \cdot L_2$ имеет область определения ω и задается следующим образом. Имеет место $\langle a, b \rangle \leq_{L_1 \cdot L_2} \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда либо $b <_{L_2} d$, либо ($b = d$ и $a \leq_{L_1} c$).

Если L — линейный порядок и a, b — элементы L, то говорят, что a и b принадлежат одному и тому же *блоку* внутри L, если множество $\{x : (a \leq_L x \leq_L b) \vee (b \leq_L x \leq_L a)\}$ конечно.

Прежде чем переходить к основным результатам, установим следующий факт.

Лемма 2.2. *Операция конкатенации $\oplus$ не является формульно определимой в частично упорядоченном множестве* $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$.

Доказательство. Заметим, что отображение обращения $R \mapsto R^*$ индуцирует автоморфизм Ψ частично упорядоченного множества $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$. Выберем теперь пару вычислимых линейных порядков следующим образом: L изоморфен ω и R изоморфен ω^*. Тогда ясно, что

$$\Psi(L \oplus R) \cong \omega + \omega^*, \quad \Psi(L) \oplus \Psi(R) \cong \omega^* + \omega \cong \zeta.$$

Следовательно, $\Psi(L \oplus R) \not\equiv_c \Psi(L) \oplus \Psi(R)$, а отображение $\oplus$ не может быть определимым в $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$.

3. Интерпретация арифметики первого порядка в Celps

Основным результатом этого раздела является следующая

Теорема 3.1. *Теория* $\mathrm{Th}(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ *m-сводится к* $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Основная идея доказательства теоремы 3.1 следует идеям теоремы 2.6 из [19]. Заметим, что структура $(\{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}, \oplus)$ изоморфна структуре $(\omega \setminus \{0\}, +)$. Таким образом, говоря неформально, наша основная цель заключается в том, чтобы получить формульную определимость для умножения $\times$ в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Эта цель достигается путем «кодирования» графика умножения $\times$ через соответствующий параметр p_L (который является вычислимым линейным порядком): будет получена формула $\psi(x, y, z; p_L)$ сигнатуры $\{\leq_c, \oplus\}$, при этом эта формула определяет умножение $(\mathbf{l}_x, \mathbf{l}_y) \mapsto \mathbf{l}_{x\times y}$. После этого необходимо «элиминировать» параметр p_L из формулы ψ.

Доказательство теоремы 3.1 состоит из двух частей. Первая часть (п. 3.1) является подготовительной: приводится список некоторых полезных множеств, формульно определимых в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Во второй части (п. 3.2) описывается нужный вычислимый линейный порядок p_L (который кодирует умножение) и приводятся формулы, дающие элементарную определимость для $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Прежде чем привести доказательство теоремы 3.1, сформулируем основное следствие этой теоремы.

Следствие 3.2. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ *рекурсивно изоморфна арифметике первого порядка.*

Доказательство. Напомним, что множество $A \subseteq \omega$ является *цилиндром*, если $A \times \omega \leq_1 A$. Если A — цилиндр и $B \leq_m A$, то $B \leq_1 A$ (см., например, разд. 7.6 в [20]).

Известно, что теории $\mathrm{Th}(\omega, +, \times)$ и $\mathrm{Th}(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ 1-эквивалентны. Поскольку каждая элементарная теория является цилиндром, из теоремы 3.1 вытекает, что $\mathrm{Th}(\omega, +, \times) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. С другой стороны, заметим, что структура $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ имеет $\mathbf{0}^{(3)}$-вычислимую изоморфную копию, и из этого следует, что $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus) \leq_1 \mathrm{Th}(\omega, +, \times)$. Заключаем, что теории $\mathrm{Th}(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ и $\mathrm{Th}(\omega, +, \times)$ рекурсивно изоморфны.

3.1. Вспомогательные определимые множества. В силу того, что рассматриваются $\leq_c$-степени для вычислимых линейных порядков, следует быть внимательными, когда речь идет о конкретных линейных порядках. В самом деле, нетрудно заметить, что два изоморфных вычислимых линейных порядка L_1 и L_2 могут обладать разными $\leq_c$-степенями (см., например, работу [21], в которой подробно рассмотрен случай, когда L_i изоморфны наименьшему предельному ординалу ω). Поэтому выделим некоторые конкретные «стандартные» вычислимые линейные порядки:

- ω_{st} — стандартный линейный порядок на натуральных числах;
- ω^*_{st} — это обращение для ω_{st} (т. е. $x \leq_{\omega^*_{st}} y$ тогда и только тогда, когда $y \leq_{\omega_{st}} x$);
- $\zeta_{st} = \omega^*_{st} \oplus \omega_{st}$;
- ζ^2_{st} — это «стандартный» квадрат ζ_{st}, т. е. $(\langle i_1, j_1\rangle, \langle i_2, j_2\rangle) \in \zeta^2_{st}$ тогда и только тогда, когда либо $j_1 <_{\zeta_{st}} j_2$, либо ($j_1 = j_2$ и $i_1 \leq_{\zeta_{st}} i_2$).

Вначале установим следующий вспомогательный результат:

Предложение 3.3. *Следующие подмножества являются формульно определимыми в структуре* $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$*:*
(1) $\{\mathbf{l}_n\}$ *для каждого* $n \geq 1$*;*
(2) $\mathbf{Fin} = \{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}$*;*
(3) $\{\omega_{st}\}$, $\{\omega^*_{st}\}$, $\{\zeta_{st}\}$*;*
(4) $\{\zeta^2_{st}\}$.

Доказательство. Для каждого из подмножеств приведем формулу логики первого порядка, показывающую определимость этого подмножества.

(1) Степень $\mathbf{l}_1$ является наименьшей в частично упорядоченном множестве $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$, следовательно, формула

$$\psi_{\mathbf{1}}(x) := \forall y[x \leq y]$$

определяет множество $\{\mathbf{l}_1\}$. Ясно, что формула

$$\psi_{\mathbf{n}}(x) := (x = \underbrace{\mathbf{l}_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{l}_1}_{n \text{ раз}})$$

определяет множество $\{\mathbf{l}_n\}$ при $n \geq 2$.

(2) Сначала напомним следующую лемму.

Лемма 3.4 [13, лемма 2.1]. *Пусть R — неуниверсальный в.п. линейный предпорядок со следующим свойством:* $\mathrm{supp}(R)$ *имеет бесконечно много классов эквивалентности. Тогда существует в.п. линейный предпорядок S такой, что S и R несравнимы относительно* $\leq_c$.

Получаем, что формула

$$\psi_{fin}(x) = \forall t[x \leq t \vee t \leq x] \,\&\, \forall y \forall z[(y \leq x \,\&\, z \leq x) \to (y \leq z \ \vee \ z \leq y)]$$

определяет множество $\mathbf{Fin}$ в $(\mathbf{Celps}, \leq_c)$. Действительно, первая часть конъюнкции говорит о том, что x должен быть сравним с любой степенью (по лемме 3.4, этому условию удовлетворяют только все $\mathbf{l}_n$ и универсальная степень). Вторая часть конъюнкции говорит о том, что нижний конус для x линейно упорядочен (по лемме 3.4 универсальная степень не удовлетворяет этому условию).

(3.a) Покажем, что формула

$$\psi_\omega(x) = [\mathbf{l}_1 \oplus x = x] \,\&\, \forall z((\mathbf{l}_1 \oplus z = z) \to x \leq z)$$

определяет множество $\{\omega_{st}\}$. Формула $\psi_\omega(x)$ говорит о том, что x является наименьшей степенью среди тех, которые удовлетворяют $\mathbf{l}_1 \oplus x = x$. Следовательно, если существует степень x со свойством $\psi_\omega(x)$, то такой x должен быть единственным. Заметим, что $\mathbf{l}_1 \oplus \omega_{st} \equiv_c \omega_{st}$. Поэтому достаточно установить следующий факт.

Лемма 3.5. *Если T — (необязательно в.п.) линейный предпорядок, удовлетворяющий* $\mathrm{Lin}_1 \oplus T \leq_c T$, *то* $\omega_{st} \leq_c T$.

Доказательство. Пусть $f : \mathrm{Lin}_1 \oplus T \leq_c T$. Построим сводящую функцию $g : \omega_{st} \leq_c T$ следующим образом:

$$g(0) = f(0), \quad g(x+1) = f(2g(x)+1).$$

Поскольку f является сводящей функцией, заметим следующее:

$$[f(2y+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(0)]_{\mathrm{supp}(T)}$$

верно для всех $y \in \omega$. Кроме того, если $[v]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [z]_{\mathrm{supp}(T)}$, то

$$[f(2v+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)}.$$

Следовательно, условие $[g(z+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(z)]_{\mathrm{supp}(T)}$ истинно для всех $z \in \omega$ и, таким образом, g является вычислимой функцией, сводящей ω_{st} к T. Лемма 3.5 доказана.

(3.b) Несложно получить результат, аналогичный лемме 3.5, для порядка ω^*_{st}, т. е. если $T \oplus \mathrm{Lin}_1 \le_c T$, то $\omega^*_{st} \le_c T$. Отсюда получаем, что формула

$$\psi_{\omega^*}(x) = [x \oplus \mathbf{1}_1 = x] \,\&\, \forall z((z \oplus \mathbf{1}_1 = z) \to x \le z)$$

определяет множество $\{\omega^*_{st}\}$.

(3.c) Порядок ζ_{st} определяется следующим образом:

$$\psi_\zeta(x) := (x = \omega^*_{st} \oplus \omega_{st}).$$

(4) Заметим, что $\zeta^2_{st} \equiv_c \zeta_{st} \cdot \omega^*_{st} \oplus \zeta_{st} \cdot \omega_{st}$. Следовательно, достаточно привести формулы, задающие $\le_c$-степени для порядков $\zeta_{st} \cdot \omega^*_{st}$ и $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$.

Покажем, что формулы

$$\psi_{\zeta_{st}\cdot\omega_{st}}(x) = [\zeta_{st} \oplus x = x] \,\&\, \forall z(\zeta_{st} \oplus z = z \to x \le z),$$

$$\psi_{\zeta_{st}\cdot\omega^*_{st}}(x) = [x \oplus \zeta_{st} = x] \,\&\, \forall z(z \oplus \zeta_{st} = z \to x \le z)$$

определяют множества $\{\zeta_{st}\cdot\omega_{st}\}$ и $\{\zeta_{st}\cdot\omega^*_{st}\}$ соответственно. Аналогично п. (3.a) для $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$ достаточно установить следующее свойство.

Лемма 3.6. *Если T — (необязательно в.п.) линейный предпорядок, удовлетворяющий $\zeta_{st} \oplus T \le_c T$, то $\zeta_{st} \cdot \omega_{st} \le_c T$.*

Доказательство. Пусть $f : \zeta_{st} \oplus T \le_c T$. Для удобства рассуждений полагаем, что элементы из ζ_{st} отождествляются с целыми числами. Также полагаем, что каждый элемент из $\zeta_{st}\cdot\omega_{st}$ отождествляется с парой (x, y), где $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$. Определим вычислимую функцию $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathrm{dom}(T)$ следующим образом. Для $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ положим

$$g(x, 0) = f(2x), \quad g(x, y+1) = f(2g(x, y) + 1).$$

Заметим следующее: $[f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2x)]_{\mathrm{supp}(T)}$ верно для всех $z \in \mathrm{dom}(T)$ и $x \in \mathbb{Z}$. Более того, если $[v]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [z]_{\mathrm{supp}(T)}$, то

$$[f(2v+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [f(2z+1)]_{\mathrm{supp}(T)}.$$

Следовательно, применяя индукцию по y, можно показать, что

$$[g(x, y+1)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(x', y)]_{\mathrm{supp}(T)}$$

для всех $y \in \mathbb{N}$ и $x, x' \in \mathbb{Z}$.

Кроме того, нетрудно установить, что $[g(x+1, y)]_{\mathrm{supp}(T)} >_T [g(x, y)]_{\mathrm{supp}(T)}$ для всех $x \in \mathbb{Z}$ и $y \in \mathbb{N}$ (при $y = 0$ это непосредственно следует из того, что функция f сводит $\zeta_{st} \oplus T$ к T). Из этого утверждения и полученного выше факта выводим, что g задает сводимость из $\zeta_{st} \cdot \omega_{st}$ в T. Лемма 3.6 доказана.

Доказательство для порядка $\zeta_{st} \cdot \omega^*_{st}$ строится аналогично лемме 3.6 (с соответствующими изменениями).

Заключаем, что все подмножества из пп. (1)–(4) являются формульно определимыми в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Предложение 3.3 доказано.

Определимые подмножества из предложения 3.3 будут использованы в кодировании стандартной модели арифметики в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$.

Будем кодировать ненулевое натуральное число n посредством степени $\mathbf{l}_n$. Отметим, что сложение определяется следующим образом: $m + n = k$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{l}_m \oplus \mathbf{l}_n = \mathbf{l}_k$. Более формально, зададим следующую формулу:

$$\psi_+(x, y, z) := (x, y, z \in \mathbf{Fin}) \,\&\, (x \oplus y = z). \tag{1}$$

Дадим определения, необходимые для кодирования (графика) умножения.

Определение 1. Пусть $(n_1, n_2, n_3) \in (\omega \setminus \{0\})^3$ — упорядоченная тройка. Через $t(n_1, n_2, n_3)$ обозначается следующий вычислимый линейный порядок:

$$t(n_1, n_2, n_3) = \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_1} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_3} \oplus \zeta_{st}.$$

Определение 2. Пусть $x, y \in \mathbf{Celps}$. Будем писать $x \sqsubseteq y$, если

$$\exists u, v(u \oplus x \oplus v = y \,\&\, \forall z_1, z_2[(x = z_1 \oplus z_2 \,\&\, x \neq z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus z_2) \to u \oplus (z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus z_2) \oplus v \neq y]). \tag{2}$$

Говоря неформально, определение 2 описывает «точное» вложение линейного предпорядка X в линейный предпорядок Y. Основные полезные свойства отношения $\sqsubseteq$ заключаются в следующем.

• Порядок Y можно «разбить» на три части U, X, V так, что $Y \leq_c U \oplus X \oplus V$ и $U \oplus X \oplus V \leq_c Y$.

Подчеркнем, что порядковые типы структур Y и $U \oplus X \oplus V$ *не обязательно совпадают* (это составляет ключевое отличие от доказательств в [19]). Действительно, заметим, что $\zeta_{st}^2 \equiv_c \zeta_{st} \cdot \omega_{st}^* \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \zeta_{st} \cdot \omega_{st}$.

• Для любого «разбиения» $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ такого, что $\leq_c$-степень $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ отлична от $\leq_c$-степени X (в этом случае ясно, что $Z_1 \oplus Z_2$ строго ниже $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$), порядок $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ не $\leq_c$-сводится к Y. Неформально говоря, порядок $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ становится «слишком большим» для вложения в Y.

По предложению 3.3 каждый порядок $t(n_1, n_2, n_3)$ и отношение $\sqsubseteq$ являются формульно определимыми в структуре $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$. Кроме того, из предложения 3.3 также вытекает

Следствие 3.7. *Существует формула $\psi_C(x_1, x_2, x_3; y)$ со следующим свойством. Для данной степени $\mathbf{p}$ из $\mathbf{Celps}$ множество*

$$\mathbf{C}(\mathbf{p}) = \{(\mathbf{l}_m, \mathbf{l}_n, \mathbf{l}_k) : t(m, n, k) \sqsubseteq \mathbf{p}\} \tag{3}$$

определимо в $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ посредством формулы $\psi_C(x_1, x_2, x_3; \mathbf{p})$.

Определение 3. Для данной степени $\mathbf{p}$ будем говорить, что $\mathbf{C}(\mathbf{p})$ — это *тернарный предикат, закодированный посредством* $\mathbf{p}$.

3.2. Кодирование умножения с помощью вычислимого линейного порядка. Вначале дадим ключевое определение, которое позволит закодировать бесконечное множество $A \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ с помощью параметра $t_L(A)$. Здесь L — данный счетный линейный порядок, а параметр $t_L(A)$ будет $\deg_T(L \oplus A)$-вычислимым линейным порядком. Для удобства чтения можно думать об A как о графике умножения для положительных целых чисел.

Определение 4. Пусть $A = \{x_i = (n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})\}_{i \in \omega} \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ — бесконечное множество, а L — счетный линейный порядок (с областью определения ω). Тогда *L-кодом для A* называем порядок $t_L(A)$, заданный следующим образом:

$$t_L(A) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i \in L} t(x_i)\Big) \oplus \zeta_{st}^2. \tag{4}$$

Здесь сумма $S = \sum\limits_{i \in L} M_i$ определяется стандартным образом: для любых $i, j, k, l \in \omega$

$$\langle k, i \rangle \leq_S \langle l, j \rangle \ \Leftrightarrow\ (i <_L j) \vee (i = j \ \&\ k \leq_{M_i} l).$$

Порядки $t(x_i) = t(n_{i,1}, n_{i,2}, n_{i,3})$ были ранее введены в определении 1.

Определение 5. Для порядка $t_L(A)$ из уравнения (4) и $i \in \omega$ будем называть интервал $t(x_i)$ *i-м фрагментом* порядка $t_L(A)$.

Заметим следующее: если A — бесконечное вычислимое множество и L — вычислимый линейный порядок, то структура **Celps** содержит L-код для множества A.

Напомним следующий вспомогательный результат.

Лемма 3.8. (1) *Для Δ_2^0 тьюринговой степени $\mathbf{D}$ существует вычислимый линейный порядок $L_{\mathbf{D}}$, имеющий порядковый тип $\omega + \omega^*$ такой, что степень начального ω-сегмента для $L_{\mathbf{D}}$ равна $\mathbf{D}$ (предложение* 3.1 *в* [22]*).*

(2) *Если $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ является не в.п. тьюринговой степенью, то порядки ω_{st} и ω_{st}^* не $\leq_c$-сводимы к $L_{\mathbf{D}}$.*

Доказательство. (2) Пусть $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ и $\mathbf{D}$ — это не в.п. степень. Допустим, что $f : \omega_{st} \leq_c L_{\mathbf{D}}$. Заметим, что все элементы $f(x)$, $x \in \omega$, принадлежат начальному ω-сегменту в $L_{\mathbf{D}}$. Обозначим этот начальный сегмент через $\Omega(L_{\mathbf{D}})$. Тогда множество $\Omega(L_{\mathbf{D}})$ является в.п. Действительно, $y \in \Omega(L_{\mathbf{D}})$ тогда и только тогда, когда $\exists x (f(x) >_{L_{\mathbf{D}}} y)$. Это противоречит выбору степени $\mathbf{D} = \deg_T(\Omega(L_{\mathbf{D}}))$. Заключаем, что $\omega_{st} \not\leq_c L_{\mathbf{D}}$. Аналогичным образом показывается, что $\omega_{st}^* \not\leq_c L_{\mathbf{D}}$. Лемма 3.8 доказана.

Приведем ключевое свойство L-кодов из определения 4.

Лемма 3.9. *Пусть множество $A \subseteq (\omega \setminus \{0\})^3$ бесконечно, и пусть тьюрингова степень $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ не в.п. Выберем порядок $L = L_{\mathbf{D}}$ из леммы* 3.8. *Тогда*

$$t(n_1, n_2, n_3) \sqsubseteq t_L(A) \ \Leftrightarrow\ (n_1, n_2, n_3) \in A.$$

Другими словами, можно отождествить A с множеством $\mathbf{C}(t_L(A))$ из уравнения (3).

Доказательство. ($\Leftarrow$) Пусть $A = \{x_i : i \in \omega\}$ и $x_e = (n_1, n_2, n_3) \in A$. Будем обозначать $t(x_e)$ через X. Наша цель — показать, что $X \sqsubseteq t_L(A)$. Во-первых, определим линейные порядки

$$U := \zeta_{st}^2 \oplus \sum_{i <_L e} t(x_i), \quad V := \sum_{i >_L e} t(x_i) \oplus \zeta_{st}^2.$$

Нетрудно заметить, что $U \oplus X \oplus V \equiv_c t_L(A)$.

Теперь нужно установить вторую часть конъюнкции из уравнения (2). Пусть $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ и $X \not\equiv_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ для некоторых Z_1 и Z_2. Заметим, что $Z_1 \oplus Z_2 \leq_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ выполнено всегда, следовательно, имеет место $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \not\leq_c Z_1 \oplus Z_2 \equiv_c X$.

От противного, допустим, что

$$U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \equiv_c t_L(A) \equiv_c U \oplus X \oplus V.$$

Зафиксируем вычислимую сводимость $f : U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \leq_c U \oplus X \oplus V$. Поскольку $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \not\leq_c X$, существует элемент p, принадлежащий $(Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2)$-части, такой, что $f(p)$ не лежит в e-м фрагменте $t(x_e) = X$. Заметим, что $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-части порядка V, поскольку в противном случае отображение f давало бы изоморфное вложение $1 \oplus \zeta^2_{st}$ в ζ^2_{st}. Аналогично $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-части порядка U.

Для удобства будем считать, что в обоих порядках $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$ и $U \oplus X \oplus V$ элементы i-го фрагмента имеют вид $\langle y, i\rangle$ для $y \in \omega$.

Поскольку $f(p)$ не принадлежит ζ^2_{st}-частям в $U \oplus X \oplus V$, элемент $f(p)$ принадлежит i_0-му фрагменту для некоторого $i_0 \neq e$.

Случай 1. Предположим, что $i_0 >_L e$. Поскольку $f(p)$ принадлежит i_0-му фрагменту и $\mathbf{l}_1 \oplus t(x_{i_0}) \not\leq_c t(x_{i_0})$, существует элемент $\langle y_0, i_0\rangle$ такой, что $f(\langle y_0, i_0\rangle)$ строго больше (в порядке $U \oplus X \oplus V$), чем каждый элемент из i_0-го фрагмента. Находим $\leq_{\mathbb{N}}$-наименьший y_0 с таким свойством. Ясно, что $f(\langle y_0, i_0\rangle) = \langle z, i_1\rangle$ для некоторого $i_1 >_L i_0$. После того как индекс i_1 найден, аналогичная процедура вычисляет y_1 такой, что $f(\langle y_1, i_1\rangle) = \langle z', i_2\rangle$ для некоторого $i_2 >_L i_1$.

Действуя аналогичным образом, можно построить вычислимую последовательность $(i_k)_{k\in\omega}$ такую, что $i_{k+1} >_L i_k$ для всех k. Следовательно, функция $h : k \mapsto i_k$ дает вычислимую сводимость ω_{st} к L. Это противоречит выбору $L = L_{\mathbf{D}}$, см. лемму 3.8(2).

Случай 2. В противном случае имеем $i_0 <_L e$. Тогда рассуждение, аналогичное рассуждению для случая 1 показывает, что $\omega^*_{st} \leq_c L$, и это вновь противоречит выбору L.

В обоих случаях, рассмотренных выше, приходим к противоречию. Поэтому заключаем, что вторая часть конъюнкции из уравнения (2) истинна.

($\Rightarrow$) Пусть $X = t(n_1, n_2, n_3)$ для некоторых ненулевых n_1, n_2, n_3, и пусть $X \sqsubseteq t_L(A)$.

Фиксируем порядки U и V такие, что $U \oplus X \oplus V \equiv_c t_L(A)$. Также фиксируем сводящую функцию

$$f : U \oplus X \oplus V \leq_c t_L(A).$$

Главная техническая цель здесь заключается в следующем: дать анализ возможных f-образов для блоков $\mathbf{l}_{n_1}, \mathbf{l}_{n_2}, \mathbf{l}_{n_3}$ из порядка $t(n_1, n_2, n_3)$.

Заметим следующее: если $X \equiv_c Z_1 \oplus Z_2$ и $X \not\equiv_c Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$, то $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2$ является $\equiv_c$-эквивалентным одному из следующих порядков:

$$t(n_1 + 1, n_2, n_3), \quad t(n_1, n_2 + 1, n_3), \quad t(n_1, n_2, n_3 + 1). \tag{5}$$

Действительно, это легко следует из того факта, что $\zeta_{st} \equiv_c \omega^*_{st} \oplus \mathbf{l}_1 \oplus \omega_{st}$.

В дальнейшем сосредоточимся на f-образе для $\mathbf{l}_{n_1}$-блока. Для удобства работы с этим случаем предполагаем, что $Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2 \equiv_c t(n_1 + 1, n_2, n_3)$. Заметим, что всегда выполнено $t_L(A) \equiv_c U \oplus X \oplus V \leq_c U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V$. В силу того, что $U \oplus (Z_1 \oplus \mathbf{l}_1 \oplus Z_2) \oplus V \not\equiv_c t_L(A)$, выводим, что

$$U \oplus t(n_1 + 1, n_2, n_3) \oplus V \not\leq_c t_L(A). \tag{6}$$

Если для некоторого элемента p из $\mathbf{l}_{n_1}$ его образ $f(p)$ принадлежит ζ-блоку B в порядке $t_L(A)$, то ясно, что все точки a из блоков $C \neq \mathbf{l}_{n_1}$ (внутри $U \oplus X \oplus V$)

удовлетворяют $f(a) \notin B$. Следовательно, множество $B \cap \mathrm{range}(f)$ имеет мощность не более чем n_1, и поэтому легко получить вычислимую сводящую функцию $f_1 : U \oplus t(n_1+1, n_2, n_3) \oplus V \leq_c t_L(A)$ такую, что $f \subset f_1$. Это противоречит уравнению (6). Получаем, что точки из $\mathbf{l}_{n_1}$-блока не могут отображаться функцией f в ζ-блок.

Аналогичные рассуждения показывают следующее.

• Для элемента p из $\mathbf{l}_{n_1}$ его образ $f(p)$ не может принадлежать $\mathbf{l}_m$-блоку $t_L(A)$ при $m > n_1$.

• Если p и q — элементы из $\mathbf{l}_{n_1}$, то $f(p)$ и $f(q)$ должны принадлежать одному и тому же конечному блоку в $t_L(A)$.

Работая с другими случаями из уравнения (5), можно получить аналогичные свойства для блоков $\mathbf{l}_{n_2}$ и $\mathbf{l}_{n_3}$. Таким образом, выводим, что для каждого $i \in \{1,2,3\}$ $\mathbf{l}_{n_i}$-блок в X (сюръективно) отображается посредством f на некоторый $\mathbf{l}_{n_i}$-блок в $t_L(A)$.

Предположим, что (например) $\mathbf{l}_{n_1}$-блок и $\mathbf{l}_{n_2}$-блок в X отображаются посредством f в различные фрагменты $t(m_1, m_2, m_3)$ и $t(m_1', m_2', m_3')$ в $t_L(A)$. Рассмотрим блоки $B_1 = f(\mathbf{l}_{n_1})$ и $B_2 = f(\mathbf{l}_{n_2})$. Тогда внутри $t_L(A)$ существуют как минимум два ζ_{st}-блока, лежащие строго между B_1 и B_2. Так как $(\mathbf{l}_{n_1} \oplus \mathbf{l}_1) \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2} \leq_c \mathbf{l}_{n_1} \oplus \zeta_{st} \oplus \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_{n_2}$, можно получить сводящую функцию $f_1 : U \oplus t(n_1+1, n_2, n_3) \oplus V \leq_c t_L(A)$ такую, что $f \subset f_1$, а $f_1(\mathbf{l}_{n_1} \oplus \mathbf{l}_1)$ — подмножество фрагмента $t(m_1, m_2, m_3)$. Это противоречит уравнению (6).

Аналогичные рассуждения показывают, что для всех $i \in \{1,2,3\}$ образы $f(\mathbf{l}_{n_i})$ должны принадлежать одному и тому же фрагменту в $t_L(A)$. Это означает, что этот конкретный фрагмент в $t_L(A)$ равен $t(n_1, n_2, n_3)$, а следовательно, тройка (n_1, n_2, n_3) принадлежит множеству A. Лемма 3.9 доказана.

Из леммы 3.9 выводим

Следствие 3.10. *Существует степень* $\mathbf{p}_0$ *в* **Celps** *такая, что* $\mathbf{p}_0$ *кодирует график умножения* $\times$ *(в смысле определения* 3*). Следовательно, структура* $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ *формульно определима (с параметром* $\mathbf{p}_0$*) внутри* $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ *посредством формул* $\psi_{Dom}(x) = (x \in \mathbf{Fin})$, $\psi_+(x,y,z)$ *из уравнения* (1) *и* $\psi_C(x,y,z;\mathbf{p}_0)$ *из следствия* 3.7.

Последний необходимый этап в доказательстве теоремы 3.1 — элиминация параметра $\mathbf{p}_0$ из следствия 3.10. Для этого заметим следующий факт.

Данная $\leq_c$-степень $\mathbf{p}$ кодирует график умножения тогда и только тогда, когда $\mathbf{p}$ удовлетворяет следующим двум условиям.

(a) Тернарный предикат Γ, закодированный посредством $\mathbf{p}$, является графиком функции $g_{\mathbf{p}}$. Более формально,

$$\forall k_1 \forall k_2 \exists! k_3 (t(k_1, k_2, k_3) \sqsubseteq \mathbf{p}).$$

(b) Функция $g_{\mathbf{p}}$ удовлетворяет стандартному примитивно рекурсивному определению умножения на $\omega \setminus \{0\}$:

$$g_{\mathbf{p}}(k, 1) = k, \quad g_{\mathbf{p}}(k, m+1) = g_{\mathbf{p}}(k, m) + k.$$

Следовательно, используя формулы ψ_+ и ψ_C, можно формульно определить множество $P_\times$ всех параметров $\mathbf{p} \in \mathbf{Celps}$, кодирующих график умножения. Затем, заменяя в следствии 3.10 формулу $\psi_C(x,y,z;\mathbf{p}_0)$ формулой

$$\widehat{\psi}_\times(x,y,z) = \forall p (p \in P_\times \to \psi_C(x,y,z;p)), \tag{7}$$

получаем формульное определение $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ внутри $(\mathbf{Celps}, \leq_c, \oplus)$ без параметров. Теорема 3.1 доказана.

4. Интерпретация арифметики второго порядка в счетных линейных предпорядках

В этом разделе рассмотрим множество $\mathbf{LP}$, содержащее $\leq_c$-степени *всех* счетных линейных предпорядков с областью определения ω. Докажем следующий результат.

Теорема 4.1. *Теория* $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ *рекурсивно изоморфна арифметике второго порядка.*

Доказательство. Рассмотрим двусортную структуру

$$\mathscr{N}_2 = (\omega, \mathscr{P}(\omega); +, \times, \in).$$

Заметим, что в $\mathscr{N}_2$ условие $\langle x, y\rangle \in X$ эквивалентно формуле

$$\exists w \exists z[2w = (x + y)(x + y + 1) \,\&\, z = w + x \,\&\, z \in X].$$

Следовательно, можно использовать функцию нумерации пар $\langle\cdot,\cdot\rangle$ при определении формул в сигнатуре структуры $\mathscr{N}_2$.

Вначале установим элементарную определимость $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ в структуре $\mathscr{N}_2$. Введем следующие вспомогательные формулы.

• Формула $\xi_{Dom}(X)$ говорит, что для всех x, y, z выполнено:
— $\langle x, x\rangle \in X$,
— $(\langle x, y\rangle \in X \,\&\, \langle y, z\rangle \in X) \to \langle x, z\rangle \in X$,
— $(\langle x, y\rangle \in X \vee \langle y, x\rangle \in X)$.

Неформально говоря, формула $\xi_{Dom}(X)$ выделяет $X \in \mathscr{P}(\omega)$ такие, что X кодирует некоторый линейный порядок R_X с областью определения ω.

• Можно задать формулу $\xi_\varphi(e, m, n)$, выражающую (в $\mathscr{N}_2$), такую, что $\varphi_e(m)\downarrow = n$ (подробности см., например, в разд. 15.1 в [20]).

• Формула $\xi_{\leq_c}(X, Y)$ выражает, что линейный предпорядок R_X вычислимо сводится к R_Y. Более формально, $\xi_{\leq_c}(X, Y)$ утверждает о том, что

$$\exists e[\forall m \exists n \xi_\varphi(e, m, n) \;\&\; \forall m \forall m' \forall n \forall n'[(\xi_\varphi(e, m, n) \,\&\, \xi_\varphi(e, m', n')) \\ \to (\langle m, m'\rangle \in X \leftrightarrow \langle n, n'\rangle \in Y)]].$$

• $\xi_{\equiv_c}(X, Y) = \xi_{\leq_c}(X, Y) \,\&\, \xi_{\leq_c}(Y, X)$.

• Формула $\xi_\oplus(X, Y, Z)$ выражает, что R_Z эквивалентно (относительно $\leq_c$) предпорядку $R_X \oplus R_Y$. Более формально, $\xi_\oplus(X, Y, Z)$ говорит, что существует V такой, что $\xi_{\equiv_c}(V, Z)$ и для всех x, y условие $\langle x, y\rangle \in V$ истинно тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:
— $\exists k \exists m(x = 2k \,\&\, y = 2m + 1)$,
— $\exists k \exists m(x = 2k \,\&\, y = 2m \,\&\, \langle k, m\rangle \in X)$,
— $\exists k \exists m(x = 2k + 1 \,\&\, y = 2m + 1 \,\&\, \langle k, m\rangle \in Y)$.

Рассмотрим структуру $\mathscr{L}$ в сигнатуре $\{\leq, \oplus\}$, которая задана следующим образом:

• область определения $\mathscr{L}$ равна фактор-множеству $\xi_{Dom}[\mathscr{N}_2]/\xi_{\equiv_c}[\mathscr{N}_2]$;

• отношение $\leq_{\mathscr{L}}$ и график для $\oplus_{\mathscr{L}}$ определяются формулами $\xi_{\leq_c}$ и $\xi_\oplus$, соответственно.

Ясно, что структура $\mathscr{L}$ является изоморфной копией для $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Таким образом, получаем элементарную определимость $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ внутри $\mathscr{N}_2$. Следовательно, стандартное рассуждение показывает, что $\mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathscr{N}_2)$.

Известно, что для структур $\mathscr{N}_2 = (\omega, \mathscr{P}(\omega); +, \times, \in)$ и $\widehat{\mathscr{N}_2} = (\omega \setminus \{0\}, \mathscr{P}(\omega \setminus \{0\}); +, \times, \in)$ их элементарные теории рекурсивно изоморфны. Поэтому для завершения доказательства теоремы достаточно установить следующий факт.

Предложение 4.2. $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2}) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.

Доказательство. Во-первых, отметим, что все множества из предложения 3.3 являются формульно определимыми в структуре $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Действительно, анализ доказательства предложения 3.3 показывает, что все аргументы доказательства работают и для $\mathbf{LP}$, за исключением одной ключевой части: для $\mathbf{LP}$ необходимо ввести новую формулу $\widehat{\psi}_{fin}(x)$, определяющую множество

$$\mathbf{Fin} = \{\mathbf{l}_n : n \geq 1\}.$$

Формула $\widehat{\psi}_{fin}(x)$ утверждает следующее:
(a) для каждого y $\leq_c$-степени x и y имеют инфимум;
(b) нижний конус для x линейно упорядочен;
(c) $\forall y[y \leq x \to (y = \mathbf{l}_1 \ \vee \ \exists z(y = z \oplus \mathbf{l}_1))]$.

Лемма 4.3. *Формула $\widehat{\psi}_{fin}(x)$ определяет множество $\mathbf{Fin}$ внутри $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.*

Доказательство. Пусть $X = \mathrm{Lin}_n$ для некоторого $n \geq 1$. Ясно, что свойства (b) и (c) из определения формулы $\widehat{\psi}_{fin}$ выполнены для степени $\mathbf{l}_n = \deg_c(\mathrm{Lin}_n)$.

Пусть Y — произвольный счетный линейный предпорядок. Если Y имеет не менее чем n классов $\mathrm{supp}(Y)$-эквивалентности, то $\mathrm{Lin}_n \leq_c Y$ и $\inf(\mathrm{Lin}_n, Y) = \mathrm{Lin}_n$. Если Y имеет $k < n$ $\mathrm{supp}(Y)$-классов, то $\inf(\mathrm{Lin}_n, Y) = \mathrm{Lin}_k$. Действительно, это вытекает из того факта, что нижний конус для Lin_n равен $\{\mathrm{Lin}_m : m \leq n\}$ (кроме того, заметим, что $\mathrm{Lin}_m \leq_c Y$ тогда и только тогда, когда $m \leq k$). Следовательно, Lin_n удовлетворяет формуле $\widehat{\psi}_{fin}(x)$.

Предположим теперь, что $X \notin \mathbf{Fin}$. Тогда линейный предпорядок X удовлетворяет одному из следующих трех случаев.

Случай 1. Пусть $\omega_{st} \leq_c X$ и $\omega^*_{st} \leq_c X$. Тогда нижний конус X не является линейно упорядоченным.

Случай 2. Пусть $(\omega_{st} \nleq_c X$ или $\omega^*_{st} \nleq_c X)$ и при этом X имеет бесконечно много классов $\mathrm{supp}(X)$-эквивалентности.

Без ограничения общности можно считать, что $\omega_{st} \nleq_c X$. Тогда множество нижних граней для пары (X, ω_{st}) в точности равно $\mathbf{Fin}$, а следовательно, (X, ω_{st}) не имеет инфимума.

Случай 3. В противном случае X имеет лишь конечное число $\mathrm{supp}(X)$-классов и при этом X имеет не менее двух невычислимых $\mathrm{supp}(X)$-классов. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $X = \mathrm{Lin}_k \oplus Y$, где все $\mathrm{supp}(Y)$-классы невычислимы. Тогда выполнено $\forall Z(Y \not\equiv_c Z \oplus \mathrm{Lin}_1)$ и, следовательно, X не удовлетворяет свойству (c) из определения для $\widehat{\psi}_{fin}$.

Получаем, что каждый линейный предпорядок $X \notin \mathbf{Fin}$ не удовлетворяет $\widehat{\psi}_{fin}(x)$. Лемма 4.3 доказана.

Применяя лемму 4.3 и следуя доказательству предложения 3.3, заключаем, что все множества из предложения 3.3 формульно определимы в структуре $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$.

Дальнейший анализ доказательства теоремы 3.1 показывает, что после предложения 3.3 все последующие рассуждения не использовали специальные свойства в.п. линейных предпорядков, следовательно, эти рассуждения работают и для счетных линейных предпорядков. В частности, имеем

Следствие 4.4. *Структура* $(\omega \setminus \{0\}, +, \times)$ *формульно определима внутри* $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$ *посредством следующих формул:*
- $\widehat{\psi}_{Dom}(x) = \widehat{\psi}_{fin}(x)$,
- $\widehat{\psi}_{+}(x, y, z) = (x \oplus y = z)$,
- *формула* $\widehat{\psi}_{\times}(x, y, z)$ *из уравнения* (7).

Последняя компонента доказательства теоремы 4.1 описывает, как «кодируются» подмножества $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$ внутри $(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Это кодирование похоже на то, что было описано в определении 4.

Для ненулевого числа $b \in \omega$ определяем

$$t^1(b) = \zeta_{st} \oplus \mathbf{l}_b \oplus \zeta_{st}.$$

Определение 6. Пусть $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$, и пусть тьюрингова степень $\mathbf{D} \leq \mathbf{0}'$ не в.п. Выберем порядок $L = L_{\mathbf{D}}$ из леммы 3.8. *Код для* B определяется как следующий счетный линейный порядок $T(B)$.
- Если $B = \varnothing$, то положим $T(\varnothing) = \zeta_{st}$.
- Если $B = \{b_0 <_{\mathbb{N}} b_1 <_{\mathbb{N}} \cdots <_{\mathbb{N}} b_k\}$, то

$$T(B) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i \leq k} t^1(b_i)\Big) \oplus \zeta_{st}^2.$$

- Пусть $B = \{b_i : i \in \omega\}$, где $b_i <_{\mathbb{N}} b_{i+1}$ для всех i. Тогда положим

$$T(B) = \zeta_{st}^2 \oplus \Big(\sum_{i \in L} t^1(b_i)\Big) \oplus \zeta_{st}^2.$$

Аналогично лемме 3.9 можно установить следующий вспомогательный результат.

Лемма 4.5. *Пусть* $B \subseteq \omega \setminus \{0\}$. *Тогда каждое* $b \in \omega \setminus \{0\}$ *удовлетворяет следующему свойству:*

$$t^1(b) \sqsubseteq T(B) \;\Leftrightarrow\; b \in B.$$

Говоря неформально, лемма 4.5 показывает, что определение 6 позволяет закодировать *каждое* множество B формульно определимым образом.

Наконец, для формулы $\psi(x_1, \ldots, x_n; X_1, \ldots, X_m)$ в сигнатуре структуры $\widehat{\mathscr{N}_2}$ определим новую формулу $\psi^*(u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}; V_{X_1}, \ldots, V_{X_m})$ в сигнатуре $\{\leq_c, \oplus\}$. Как обычно, без ограничения общности можем считать, что в ψ каждая подформула вида $t(\bar{x}) = q(\bar{x})$ содержит не более одного вхождения функциональных символов.

1. Если ψ равно $x = y$, то положим $\psi^* = (u_x = u_y)$.
2. Если $\psi = (X = Y)$, то положим $\psi^* = \forall b(t^1(b) \sqsubseteq V_X \leftrightarrow t^1(b) \sqsubseteq V_Y)$.
3. Если $\psi = (x + y = z)$, то $\psi^* = \widehat{\psi}_{+}(u_x, u_y, u_z)$.
4. Если $\psi = (x \times y = z)$, то $\psi^* = \widehat{\psi}_{\times}(u_x, u_y, u_z)$.
5. Если $\psi = (x \in X)$, то $\psi^* = (t^1(u_x) \sqsubseteq V_X)$.
6. Если $\psi = \psi_1 \# \psi_2$ для $\# \in \{\&, \vee, \to\}$, то $\psi^* = \psi_1^* \# \psi_2^*$.
7. Если $\psi = \neg\psi_1$, то $\psi^* = \neg\psi_1^*$.
8. Если $\psi = \exists x \psi_1$, то $\psi^* = \exists u_x(\widehat{\psi}_{fin}(u_x) \,\&\, \psi_1^*)$.
9. Если $\psi = \forall x \psi_1$, то $\psi^* = \forall u_x(\widehat{\psi}_{fin}(u_x) \to \psi_1^*)$.
10. Если $\psi = \exists X \psi_1$, то $\psi^* = \exists V_X \psi_1^*$.
11. Если $\psi = \forall X \psi_1$, то $\psi^* = \forall V_X \psi_1^*$.

Заметим, что описанное преобразование $\psi \mapsto \psi^*$ эффективно.

Стандартное индуктивное рассуждение устанавливает следующий факт.

Лемма 4.6. *Пусть* $a_1, \dots, a_n \in \omega \setminus \{0\}$ *и* $B_1, \dots, B_m \in \mathscr{P}(\omega \setminus \{0\})$. *Тогда*

$$\widehat{\mathscr{N}_2} \models \psi(a_1, \dots, a_n; B_1, \dots, B_m) \\ \Leftrightarrow (\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus) \models \psi^*(\mathbf{l}_{a_1}, \dots, \mathbf{l}_{a_n}; T(B_1), \dots, T(B_m)).$$

Из леммы 4.6 вытекает, что предложение ψ принадлежит $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2})$ в том и только том случае, когда $\psi^* \in \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Следовательно, имеет место $\mathrm{Th}(\widehat{\mathscr{N}_2}) \leq_1 \mathrm{Th}(\mathbf{LP}, \leq_c, \oplus)$. Доказательство предложения 4.2 завершено.

Теорема 4.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Позитивные эквивалентности // Алгебра и логика. 1971. Т. 10, № 6. С. 620–650.
2. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
3. *Bernardi C.* On the relation provable equivalence and on partitions in effectively inseparable sets // Stud. Logic. 1981. V. 40, N 1. P. 29–37.
4. *Bernardi C., Sorbi A.* Classifying positive equivalence relations // J. Symbol. Logic. 1983. V. 48, N 3. P. 529–538.
5. *Andrews U., Badaev S. A., Sorbi A.* A survey on universal computably enumerable equivalence relations // Lect. Notes Comput. Sci. 2017. V. 10010. P. 418–451.
6. *Gao S., Gerdes P.* Computably enumerable equivalence relations // Stud. Logic. 2001. V. 67, N 1. P. 27–59.
7. *Simpson S. G.* First-order theory of the degrees of recursive unsolvability // Ann. Math. 1977. V. 105, N 1. P. 121–139.
8. *Shore R. A.* The theory of degrees below $\mathbf{0}'$ // J. Lond. Math. Soc. 1981. V. 24, N 1. P. 1–14.
9. *Nerode A., Shore R. A.* Reducibility orderings: Theories, definability and automorphisms // Ann. Math. Logic. 1980. V. 18, N 1. P. 61–89.
10. *Нис А.* Последний вопрос о рекурсивно-перечислимых m-степенях // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 5. С. 550–563.
11. *Andrews U., Sorbi A.* Joins and meets in the structure of ceers // Computability. 2019. V. 8, N 3–4. P. 193–241.
12. *Andrews U., Schweber N., Sorbi A.* The theory of ceers computes true arithmetic // Ann. Pure Appl. Logic. 2020. V. 171, N 8. P. 102811.
13. *Бадаев С. А., Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.* О структуре позитивных предпорядков // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 3. С. 293–314.
14. *Andrews U., Belin D. F., San Mauro L.* On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers // J. Symb. Logic. 2023. V. 88, N 3. P. 1038–1063.
15. *Andrews U., Lempp S., Mustafa M., Schweber N. D.* The first-order theory of the computably enumerable equivalence relations in the uncountable setting // J. Logic Comput. 2022. V. 32, N 1. P. 98–114.
16. *Rosenstein J. G.* Linear orderings. New York: Acad. Press, 1982.
17. *Баженов Н. А., Калмурзаев Б. С.* О темных вычислимо перечислимых отношениях эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 29–40.
18. *Bazhenov N., Kalmurzayev B., Zubkov M.* A note on joins and meets for positive linear preorders // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. V. 20, N 1. P. 1–16.
19. *Kach A. M., Montalbán A.* Undecidability of the theories of classes of structures // J. Symb. Logic. 2014. V. 79, N 4. P. 1001–1019.
20. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. Cambridge, MA: MIT Press, 1987.
21. *Askarbekkyzy A., Bazhenov N. A., Kalmurzayev B. S.* Computable reducibility for computable linear orders of type ω // J. Math. Sci. 2022. V. 267, N 4. P. 429–443.

22. *Harizanov V. S.* Turing degrees of certain isomorphic images of computable relations // Ann. Pure Appl. Logic. 1998. V. 93, N 1–3. P. 103–113.

Поступила в редакцию 20 августа 2024 г.
После доработки 17 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Алиш Дарын Бакытович (ORCID 0000-0002-4933-0575)
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
alish.darynn@gmail.com

Баженов Николай Алексеевич (ORCID 0000-0002-5834-2770)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
bazhenov@math.nsc.ru

Калмурзаев Биржан Сеилханович (ORCID 0000-0002-4386-5915)
Казахстанско-Британский технический университет,
ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан
birzhan.kalmurzayev@gmail.com

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.3

ПРОСТРАНСТВА МЕРОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫЕ С ДЕЗИНТЕГРИРОВАНИЯМИ

М. Арсенович, В. И. Богачев, М. Крстич

Аннотация. Изучается несколько нормированных пространств измеримых отображений со значениями в пространствах ограниченных мер. Такие пространства отображений естественно возникают в связи с дезинтегрированиями мер и являются более широкими, чем классическое пространство интегрируемых по Бохнеру отображений. Они определяются посредством интегрируемости значений на множествах или посредством норм типа Канторовича — Рубинштейна.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.202

Ключевые слова: пространство мер, измеримое отображение, дезинтегрирование.

Посвящается 85-летию Александра Александровича Толстоногова

§ 1. Введение

Пусть $(X, \mathscr{B}, \mu)$ — измеримое пространство с конечной мерой $\mu \geq 0$ и $(Y, \mathscr{A})$ — измеримое пространство. Символ $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ обозначает пространство счетно-аддитивных мер на $\mathscr{A}$, наделенное вариационной нормой (под мерой подразумевается вещественная счетно-аддитивная мера). Напомним, что всякая мера $\nu \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ обладает разложением Хана — Жордана $\nu = \nu^+ - \nu^-$, где ν^+ и ν^- — взаимно сингулярные неотрицательные меры, называемые соответственно *положительной* и *отрицательной* частями меры ν. Мера $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ называется *полной вариацией* ν, а величина $\|\nu\| = |\nu|(Y)$ называется *вариацией* ν. Далее *μ-измеримой функцией* называется функция, которая определена μ-почти всюду и измерима относительно пополнения меры μ (см. [1]).

Во многих задачах полезно использовать различные пространства интегрируемых отображений на X со значениями в пространстве $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$. Наиболее классическая конструкция основана на интеграле Бохнера (см., например, [2]), что приводит к пространству $L^1(\mu, E)$ интегрируемых по Бохнеру отображений со значениями в нормированном пространстве E. Пространство $L^1(\mu, E)$ состоит из классов эквивалентности отображений $f : X \to E$ таких, что имеется последовательность простых отображений $f_n : X \to E$, т. е. отображений с конечным числом значений, принимаемых на разбиении пространства X на

Работа поддержана грантом MPNTR No. 174017 (Сербия) и проектом 23-Ш05-16 в рамках Междисциплинарных научных школ МГУ им. М.В. Ломоносова.

конечное число множеств из $\mathscr{B}$, с тем свойством, что $f_n(x) \to f(x)$ для μ-почти всех $x \in X$ и

$$\int_X \|f_n(x) - f(x)\|_E \, \mu(dx) \to 0.$$

Тогда векторные интегралы отображений f_n образуют фундаментальную последовательность, причем если E полно, то они сходятся к вектору из E, называемому *интегралом Бохнера* от f. Норма на $L^1(\mu, E)$ задается равенством

$$\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\|_E \, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности. Если E полно, то $L^1(\mu, E)$ тоже полно. В частности, в нашем случае получаем банахово пространство $L^1(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ мерозначных отображений. Однако это пространство оказывается довольно узким, поскольку всякое интегрируемое по Бохнеру отображение почти наверное принимает значения в сепарабельном подпространстве в E, что не выполнено во многих интересных случаях. Например, если $f(x) = \delta_x$ — мера Дирака в точке x для всякого x из $[0, 1]$ с мерой Лебега, то f не является интегрируемым по Бохнеру.

В этой работе рассматривается несколько более широких классов мерозначных интегрируемых отображений. Первое пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, рассматриваемое в § 2, состоит из мерозначных отображений $\Lambda = (\lambda^x)_{x \in X}$, для которых функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ являются μ-интегрируемыми и также функция $x \mapsto \|\lambda^x\|$ интегрируема. Для счетно-порожденной σ-алгебры $\mathscr{A}$ это пространство банахово и в типичных случаях шире, чем пространство интегрируемых по Бохнеру отображений, которое является замкнутым подпространством в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. В § 3 изучается пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ мерозначных отображений, которые также имеют интегрируемые значения на множествах, но не обязательно обладают интегрируемыми вариациями. Это пространство обычно неполно, но при некоторых дополнительных предположениях об Y его подмножество, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Наконец, в §4 введено пространство мерозначных отображений с интегрируемыми нормами Канторовича — Рубинштейна. Это пространство обычно также неполно, но его подмножество из отображений со значениями в неотрицательных мерах полно относительно соответствующей метрики. В нашей готовящейся к печати работе изучаются некоторые дополнительные свойства таких пространств.

§ 2. Пространство отображений с интегрируемой вариацией

Естественное пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, содержащее отображения типа рассмотренных в простом примере выше, состоит из классов эквивалентности измеримых мерозначных отображений (как обычно, эквивалентность означает равенство почти всюду), для которых вариация μ-интегрируема, где, однако, измеримость определяется в более слабом смысле: требуется, чтобы функция $x \mapsto f(x)(A)$ была μ-измеримой для каждого множества $A \in \mathscr{A}$.

В лемме ниже показано, что если σ-алгебра $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, то пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ линейно и может быть наделено нормой

$$\|f\|_1 = \int_X \|f(x)\| \, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности, более того, эта норма полна. Чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело с мерозначными отображениями, будем использовать также символ $\Lambda = (\lambda^x)_{x\in X}$ для таких отображений.

Для счетно-порожденной σ-алгебры $\mathscr{A}$ равенство $f(x) = g(x)$ выполнено для μ-почти всех $x \in X$ в точности тогда, когда для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеем $f(x)(A) = g(x)(A)$ для μ-почти всех $x \in X$. Достаточно также иметь это равенство для всех множеств из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$.

Условие μ-интегрируемости функции $x \mapsto \|f(x)\|$ включает μ-измеримость, но в общем случае $\mathscr{B}$-измеримость функций $x \mapsto \|f(x)\|$ и $x \mapsto \|g(x)\|$ не влечет $\mathscr{B}$-измеримость функции $x \mapsto \|f(x) + g(x)\|$. Эта проблема не возникает для счетно-порожденных σ-алгебр, так как следующая лемма показывает, что в таком случае $\mathscr{B}$-измеримость $x \mapsto \|f(x)\|$ вытекает из $\mathscr{B}$-измеримости функций $x \mapsto f(x)(A)$, $A \in \mathscr{A}$. Более того, достаточно иметь измеримость таких функций для множеств A из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$.

Лемма 2.1. *Предположим, что найдется счетная алгебра $\mathscr{A}_0$, порождающая $\mathscr{A}$, причем функции $x \mapsto f(x)(A)$ являются $\mathscr{B}$-измеримыми для всех множеств $A \in \mathscr{A}_0$. Тогда функции*

$$x \mapsto f(x)^+(Y), \quad x \mapsto f(x)^-(Y), \quad x \mapsto |f(x)|(Y) = \|f(x)\|$$

также $\mathscr{B}$-измеримы.

Доказательство. Справедливы равенства

$$f(x)^+(Y) = \sup_{A\in\mathscr{A}} f(x)(A) = \sup_{E\in\mathscr{A}_0} f(x)(E).$$

Итак, функция $f(x)^+(Y)$ есть супремум счетного набора $\mathscr{B}$-измеримых функций и также $\mathscr{B}$-измерима. Тогда то же самое верно для $f(x)^-(Y)$, значит, также и для $\|f(x)\|$. $\square$

Следующий простой пример показывает, что для общей σ-алгебры $\mathscr{A}$ предыдущая лемма может быть неверной.

Пример 2.2. Пусть $X = [0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$ и мерой Лебега μ и $Y = [0,1]$ с σ-алгеброй $\mathscr{A}$, порожденной всеми одноточечными множествами. Возьмем неизмеримую по Лебегу функцию $\varphi : [0,1] \to (0,1]$ и положим

$$f(x) = (\varphi(x) + 1)\delta_x - \varphi(x)\delta_{x/2}.$$

Тогда $f(x)([0,1]) = 1$ для всех $x \in [0,1]$. Для всякого $a \in [0,1]$ функция $x \mapsto f(x)(\{a\})$ является $\mathscr{B}$-измеримой, ибо она равна нулю вне точек a и $2a$. Следовательно, функция $x \mapsto f(x)(A)$ оказывается $\mathscr{B}$-измеримой для всех $A \in \mathscr{A}$, поскольку $\mathscr{A}$ состоит из всех не более чем счетных множеств и их дополнений. Однако функция

$$x \mapsto |f(x)|([0,1]) = ((\varphi(x) + 1)\delta_x + \varphi(x)\delta_{x/2})([0,1]) = 1 + 2\varphi(x)$$

неизмерима по Лебегу.

Предложение 2.3. *Пусть σ-алгебра $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной. Тогда пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ банахово.*

Доказательство. Для всякого $f \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ имеется представитель, для которого функция $x \mapsto \|f(x)\|$ является $\mathscr{B}$-измеримой по лемме 2.1. Значит, если $f, g \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, то $\alpha f + \beta g \in L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ для всех скаляров α, β. Поэтому

$L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ — линейное пространство. Ясно, что $f \mapsto \|f\|_1$ — норма на этом пространстве.

Пусть $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$. Можно считать, что $f_1 = 0$, и иметь дело с представителями классов эквивалентности. Переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что

$$\|f_{n+1} - f_n\|_1 \le 2^{-n}.$$

Тогда ряд из интегралов от $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|$ сходится, значит, для μ-почти всех x сходится ряд из $\|f_{n+1}(x) - f_n(x)\|$. Поскольку $\mathscr{M}_\mathscr{A}$ полно, это означает, что для таких x ряд из $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ сходится в $\mathscr{M}_\mathscr{A}$. Это влечет сходимость из $f_{n+1}(x)$ по вариационной норме. Предел $f(x) \in \mathscr{M}_\mathscr{A}$ определен почти всюду, более того, функция $x \mapsto f(x)(A)$ является μ-измеримой для всякого $A \in \mathscr{A}$, ибо $f(x)(A) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)(A)$ почти всюду. Наконец, заметим, что $f_n \to f$ в пространстве $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое число N, что $2^{-N} < \varepsilon/2$. Тогда при $n, k \ge N$ имеем $\|f_n - f_k\|_1 \le \varepsilon$, т. е.

$$\int\limits_X \|f_n(x) - f_k(x)\|\, \mu(dx) \le \varepsilon.$$

Полагая $k \to \infty$, по теореме Фату получаем, что $\|f_n - f\|_1 \le \varepsilon$. $\square$

Пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ не обязано быть линейным для произвольной σ-алгебры $\mathscr{A}$. Предположение, что $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, важно в предыдущем предложении, как видно из следующего примера, аналогичного предыдущему.

Пример 2.4. Пусть опять X — отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$ и мерой Лебега μ и Y есть $[0,1]$ с σ-алгеброй $\mathscr{A}$, порожденной всеми одноточечными множествами. Возьмем неизмеримую по Лебегу функцию $g : [0,1] \to \{-1, 1\}$ и положим $f_1(x) = 2\delta_x$, $f_2(x) = -g(x)\delta_{x/2} + g(x)\delta_x$. Отображение f_1 очевидным образом измеримо вместе с $x \mapsto \|f_1(x)\|$. Отображение f_2 также измеримо, поскольку $f_2(x)([0,1]) = 0$ и для каждой точки $a \in [0,1]$ значение $f_2(x)(\{a\})$ может отличаться от нуля лишь при $x = a$ и $x = 2a$. Следовательно, функция $x \mapsto f_2(x)(A)$ является $\mathscr{B}$-измеримой для всех $A \in \mathscr{A}$. Кроме того, $\|f_2(x)\| = 2|g(x)| = 2$ при $x \in (0,1]$. С другой стороны, для $x \in (0,1]$ имеем равенство $|f_1(x) + f_2(x)| = |2 + g(x)|\delta_x + |g(x)|\delta_{x/2}$, поэтому функция

$$x \mapsto \|f_1(x) + f_2(x)\| = |2 + g(x)| + |g(x)| = 3 + g(x)$$

неизмерима по Лебегу.

Пространство $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_\mathscr{A})$ содержит типичные отображения, возникающие при дезинтегрировании мер. Например, типична следующая ситуация. Предположим, что $F : X \to Y$ — некоторое измеримое отображение и σ — образ меры μ при F, определенный формулой

$$\sigma(A) = \mu \circ F^{-1}(A) := \mu(F^{-1}(A)), \quad A \in \mathscr{A}.$$

Известно (см. [1, гл. 10]), что при широких предположениях (например, когда X и Y — суслинские пространства с их борелевскими σ-алгебрами и F — борелевское отображение) существуют борелевские вероятностные меры μ^y на X, $y \in Y$, называемые условными мерами, такие, что для σ-почти всякого y верно равенство $\mu^y(F^{-1}(y)) = 1$, функции $y \mapsto \mu^y(B)$ борелевски измеримы для всех $B \in \mathscr{B}$, причем

$$\mu(B) = \int\limits_Y \mu^y(B)\,\sigma(dy).$$

В типичных случаях отображение $y \mapsto \mu^y$ не является интегрируемым по Бохнеру, так как меры μ^y взаимно сингулярны, но очевидным образом оно входит в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$.

§ 3. Пространство отображений с интегрируемыми значениями на множествах

Теперь рассмотрим два других пространства, которые могут представлять интерес.

Обозначим через $B_1(X)$ и $B_1(Y)$ классы функций, ограниченных по модулю 1 и измеримых относительно $\mathscr{B}$ и $\mathscr{A}$ соответственно.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ классов μ-эквивалентности таких отображений $\Lambda : x \mapsto \lambda^x$ со значениями в пространстве $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$, что функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ являются μ-интегрируемыми для каждого $A \in \mathscr{A}$. Эти функции имеют $\mathscr{B}$-измеримых представителей.

Теорема 3.1. *Для всякого элемента $\Lambda = (\lambda^x)_{x\in X} \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ функция множества $\nu_\Lambda : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, определенная формулой*

$$\nu_\Lambda(A) = \int\limits_X \lambda^x(A)\,\mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}, \tag{3.1}$$

является счетно-аддитивной вещественной мерой и

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} := \sup_{A\in\mathscr{A}} \int\limits_X |\lambda^x(A)|\,\mu(dx) < \infty.$$

Кроме того, для всякой функции $g \in B_1(Y)$ функция

$$x \mapsto \int\limits_Y g(y)\,\lambda^x(dy)$$

μ-интегрируема.

Доказательство. Сначала проверим счетную аддитивность ν_Λ. Предположим, что множества $A_n \in \mathscr{A}$ попарно дизъюнктны. Пусть $\mathscr{A}_0$ — под-σ-алгебра, порожденная этими множествами. Тогда имеется счетная алгебра $\mathscr{A}_1$, порождающая $\mathscr{A}_0$. Можно выбрать версию Λ так, что функции $x \mapsto \lambda^x(A)$ будут $\mathscr{B}$-измеримы для всех $A \in \mathscr{A}_1$.

Пусть $p(x)$ — вариация меры λ^x, рассматриваемой на $\mathscr{A}_0$. По лемме 2.1 функция p является $\mathscr{B}$-измеримой. Множества

$$X_N = \{x \in X : p(x) \le N\}$$

$\mathscr{B}$-измеримы. Функции множества $\nu_{\Lambda,N} : \mathscr{A}_0 \to \mathbb{R}$, заданные формулой

$$\nu_{\Lambda,N}(A) = \int\limits_{X_N} \lambda^x(A)\,\mu(dx), \quad A \in \mathscr{A}_0,$$

являются счетно-аддитивными мерами на $\mathscr{A}_0$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. Кроме того,

$$\nu_\Lambda(A) = \lim_{N\to\infty} \nu_{\Lambda,N}(A) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{A}_0.$$

По теореме Никодима последовательность мер $\{\nu_{\Lambda,N}\}$ ограничена по вариации, а по теореме Витали — Лебега — Хана — Сакса мера ν_Λ также счетно-аддитивна на $\mathscr{A}_0$ (см. [1, теорема 4.6.3]). В частности,

$$\nu_\Lambda\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \nu_\Lambda(A_n).$$

Следовательно, для всякой функции $f \in B_1(X)$ мера $\nu_{f\Lambda} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$, заданная формулой

$$\nu_{f\Lambda}(A) = \int_X f(x)\lambda^x(A)\,\mu(dx),$$

счетно-аддитивна на $\mathscr{A}$. Семейство мер $(\nu_{f\Lambda})_{f\in B_1(X)}$ равномерно ограничено на каждом множестве $A \in \mathscr{A}$ интегралом от $|\lambda^x(A)|$. Значит, по теореме Никодима эти меры равномерно ограничены по вариации некоторым числом M. Следовательно,

$$\int_X |\lambda^x(A)|\,\mu(dx) \le M \ \text{ для всех } \ A \in \mathscr{A},$$

ибо можно использовать функции $f(x) = \operatorname{sign}\lambda^x(A)$ из $B_1(X)$. Итак,

$$\|\nu_{f\Lambda}\| \le 2 \sup_{A\in\mathscr{A}} |\nu_{f\Lambda}(A)| \le 2\|f\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \quad \text{для всех } f \in B_1(X).$$

Зафиксируем $g \in B_1(Y)$ и обозначим через $\mathscr{A}_0$ под-σ-алгебру, порожденную g; она счетно-порожденная (будучи порожденной всеми множествами вида $g^{-1}((-\infty, r))$, где $r \in \mathbb{Q}$). Пусть

$$f(x) = \operatorname{sign} G(x), \quad G(x) = \int_Y g(y)\,\lambda^x(dy).$$

Чтобы доказать μ-интегрируемость G, достаточно показать, что интегралы от $|G|$ по множествам X_N, определенным выше для $\mathscr{A}_0$, равномерно ограничены. Заметим, что

$$\int_{X_N} |G(x)|\,\mu(dx) = \int_X \left(I_{X_N}(x)f(x)\int_Y g(y)\,\lambda^x(dy)\right)\mu(dx) = \int_Y g(y)\,\nu_{fI_{X_N}\Lambda}(dy).$$

Последнее равенство выполнено, так как оно верно для функций g, являющихся индикаторами множеств из $\mathscr{A}_0$, значит, оно верно для $\mathscr{A}_0$-измеримых функций с конечным числом значений, а тогда и для их равномерных пределов. Последний интеграл оценивается числом $\|\nu_{fI_{X_N}\Lambda}\| \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$. $\square$

Замечание 3.2. Предыдущая теорема справедлива также для мер μ со значениями в $[0,\infty]$. В самом деле, случай σ-конечной меры μ сводится к рассмотренному, поскольку можно взять конечную меру μ_0, эквивалентную μ, так что μ задается плотностью Радона — Никодима ϱ относительно μ_0. Тогда вместо мер λ^x и μ можно иметь дело с $\varrho(x)\lambda^x$ и μ_0. В общем случае, имея счетный набор множеств A_n, для которых функции $x \mapsto \lambda^x(A_n)$ являются μ-интегрируемыми, получаем такое множество $X_0 \in \mathscr{B}$, что эти функции равны нулю вне X_0 и мера μ является σ-конечной на X_0.

Чтобы наделить пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ конечной нормой

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = \sup_{A\in\mathscr{A}} \int\limits_X |\lambda^x(A)|\, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности, удобнее использовать более слабое отношение эквивалентности: $\Lambda_1 = (\lambda_1^x) \sim \Lambda_2 = (\lambda_2^x)$, если для каждого $A \in \mathscr{A}$ имеем $\lambda_1^x(A) = \lambda_2^x(A)$ для μ-почти всех $x \in X$.

Если $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, то это сводится к равенству $\lambda_1^x = \lambda_2^x$ для μ-почти всех $x \in X$, но в общем случае может случиться, что $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} = 0$, хотя $\lambda^x \neq 0$ для μ-почти всех $x \in X$. Достаточно взять $\lambda^x = \delta_x - \delta_{x/2}$ для всех $x \in [0,1]$ в примере 2.4.

Эта норма эквивалентна норме

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{f\in B_1(X),\, g\in B_1(Y)} \int\limits_X \int\limits_Y f(x)g(y)\, \lambda^x(dy)\, \mu(dx). \tag{3.2}$$

В самом деле, очевидно, что $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1}$. С другой стороны, для всякой фиксированной функции $f \in B_1(X)$ в доказательстве теоремы 3.1 мы задали меру $\nu_{f\Lambda}$ на $\mathscr{A}$ равенством

$$\nu_{f\Lambda}(A) = \int\limits_X f(x)\lambda^x(A)\, \mu(dx)$$

и показали, что $\|\nu_{f\Lambda}\| \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$. Следовательно, для всех $g \in B_1(Y)$ имеем

$$\int\limits_Y g(y)\, \nu_{f\Lambda}(dy) \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}},$$

что дает оценку $\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} \le 2\|\Lambda\|_{\mathfrak{L}}$.

Согласно теореме 3.1 для всяких $\Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ и $B \in \mathscr{B}$ можно задать меру $\int\limits_B \lambda^x\, \mu(dx)$ на $\mathscr{A}$ посредством

$$\Bigl(\int\limits_B \lambda^x\, \mu(dx)\Bigr)(A) = \int\limits_B \lambda^x(A)\, \mu(dx) \quad \text{для всех } A \in \mathscr{A}.$$

В обозначениях доказательства теоремы 3.1 это мера $\nu_{I_B\cdot\Lambda}$. Конечно, это же можно сделать и в случае отображений со значениями в пространстве комплексных мер на $\mathscr{A}$. Для иллюстрации этого определения заметим, что

$$\int\limits_{[0,1]} \delta_x\, \mu(dx) = \mu,$$

где μ — мера Лебега.

Замечание 3.3. Для некоторых пространств удобнее использовать меньшие подмножества в $B_1(X)$ и $B_1(Y)$, задающие ту же самую норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1}$.

Предположим, что $\Phi \subset B_1(X)$ и $\Psi \subset B_1(Y)$ — подмножества с тем свойством, что для каждой вещественной меры m на $\mathscr{B}$ и каждой функции $f \in B_1(X)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_X f\,dm \le \sup_{\varphi\in\Phi}\int\limits_X \varphi\,dm$$

и аналогично для каждой меры η на $\mathscr{A}$ и каждой функции $g \in B_1(Y)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_Y g\,d\eta \le \sup_{\psi\in\Psi}\int\limits_Y \psi\,d\eta.$$

Тогда

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\varphi\in\Phi,\,\psi\in\Psi}\int\limits_X\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx). \tag{3.3}$$

В самом деле, если функция $f \in B_1(X)$ фиксирована, можно заменить множество $B_1(Y)$ в (3.2) множеством Ψ при взятии супремума интегралов по мере $\nu_{f\Lambda}$. Далее, когда функция $\psi \in \Psi$ фиксирована, супремум

$$\int\limits_X\int\limits_Y f(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx)$$

по $f \in B_1(X)$ может быть заменен супремумом по $\varphi \in \Phi$, так как этот интеграл можно записать как интеграл от f относительно меры m, заданной плотностью Радона — Никодима

$$\varrho(x) = \int\limits_Y \psi(y)\,\lambda^x(dy)$$

относительно μ. Та же самая самая норма может быть определена равенством

$$\|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{\varphi\in\Phi,\psi\in\Psi}\int\limits_X\biggl|\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\biggr|\,\mu(dx). \tag{3.4}$$

В самом деле, правая часть (3.3) мажорируется правой частью (3.4). С другой стороны, если $\varphi \in \Phi, \psi \in \Psi$ фиксированы и $\varepsilon > 0$, можно взять функцию ϱ и определенную выше меру m и найти такую функцию $\varphi_1 \in \Phi$, что

$$\int\limits_X |\varphi(x)|\,m(dx) \le \int\limits_X \varphi_1(x)\,m(dx) + \varepsilon.$$

Значит, правая часть (3.4) оценивается правой частью (3.3) плюс ε. Полагая $\varepsilon \to 0$, получаем наше утверждение.

Например, если X и Y — полные сепарабельные метрические пространства, то в качестве Φ и Ψ можно взять подходящие счетные наборы непрерывных функций с модулями не больше 1 или подходящие счетные наборы функций с конечными множествами значений. Последнее всегда возможно, если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ являются счетно-порожденными, что выполнено, например, в случае, когда X и Y — суслинские пространства (см. [1, следствие 6.7.5]). Если лишь $\mathscr{A}$ является счетно-порожденной, можно использовать $\Phi = B_1(X)$ и взять в качестве Ψ счетное множество в $B_1(Y)$, состоящее из функций с конечным числом значений, принимаемых на множествах из счетной алгебры, порождающей $\mathscr{A}$. Если

Y — компактное метрическое пространство, можно взять в качестве Ψ счетное множество, плотное в единичном шаре пространства $C_b(Y)$ ограниченных непрерывных функций на Y с его sup-нормой.

Замечание 3.4. Если $\Lambda_1 = (\lambda_1^x), \Lambda_2 = (\lambda_2^x) \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, то

$$\|\nu_{\Lambda_1} - \nu_{\Lambda_2}\| \le 2\|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}},$$

так как для всякого $A \in \mathscr{A}$ имеем

$$|\nu_{\Lambda_1}(A) - \nu_{\Lambda_2}(A)| \le \int\limits_X |\lambda_1^x(A) - \lambda_2^x(A)|\,\mu(dx) \le \|\Lambda_1 - \Lambda_2\|_{\mathfrak{L}}.$$

В типичных случаях пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ несепарабельно, поскольку оно содержит подпространство, изоморфное пространству $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с вариационной нормой. В самом деле, всякая мера $\sigma \in \mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ задает элемент Λ с $\lambda^x \equiv \sigma$, для которого верны оценки

$$\mu(X)\|\sigma\|/2 \le \|\Lambda\|_{\mathfrak{L},1} = \sup_{A\in\mathscr{A}} |\sigma(A)|\mu(X) \le \mu(X)\|\sigma\|.$$

Пространство $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ шире пространства $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ измеримых мерозначных отображений с μ-интегрируемой вариацией. Рассмотрим пример отображения из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, для которого функция $x \mapsto \|\lambda^x\|$ не является μ-интегрируемой.

Пример 3.5. Пусть $X = Y = [0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и μ — мера Лебега. Для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$ и каждого $x \in J_n = ((n+1)^{-1}, n^{-1}]$ пусть λ^x — мера с плотностью $n\sin(2\pi ny)$ на $[0,1]$. Для всяких борелевского множества $A \subset [0,1]$ и $x \in J_n$ имеем

$$\lambda^x(A) = n\int\limits_A \sin(2\pi ny)\,dy = n(I_A, \varphi_n)_{L^2}, \quad \varphi_n(y) = \sin(2\pi ny).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^1 \lambda^x(A)\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n+1}(I_A, \varphi_n)_{L^2},$$

где ряд сходится, так как $\sum\limits_n |(I_A, \varphi_n)_{L^2}|^2 < \infty$. Однако интеграл от $\|\lambda^x\|$ бесконечен, поскольку

$$\|\lambda^x\| = n\int\limits_0^1 |\sin(2\pi ny)|\,dy \ge n\int\limits_0^1 |\sin(2\pi ny)|^2\,dy = \frac{n}{2}$$

при $x \in J_n$ и длина J_n равна $n^{-1}(n+1)^{-1}$.

Вместо $\sin(2\pi ny)$ можно использовать функции Радемахера (см. [3]). В этом примере построенное отображение не входит в $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, но приближается элементами из $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ относительно нормы $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Неясно, всегда ли $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ плотно в $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$.

Теперь построим пример, показывающий, что $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ неполно в типичных случаях.

Пусть μ — мера Лебега на $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй $\mathscr{B}$. Возьмем винеровский процесс $\{w_t(\omega)\}_{t\in[0,1]}$ на вероятностном пространстве $([0,1],\mathscr{B},\mu)$ (см. [4] или [5]) и соответствующий броуновский мост

$$b_t(\omega) = w_t(\omega) - tw_1(\omega).$$

Ниже используется стохастический интеграл Винера

$$\int_0^1 h(s)\, dw_s$$

для неслучайных функций $h \in L^2[0,1]$, представляющий собой гауссовскую случайную величину ξ с нулевым средним и дисперсией (средним ξ^2), равной $\|h\|^2_{L^2}$ (см. [4] или [5]). Это задает также стохастический интеграл относительно db_s. Такой интеграл не является интегралом типа Стилтьеса, но если функция h непрерывно дифференцируема, то верна следующая формула интегрирования по частям (см. [5, §2.2]):

$$\int_0^1 h(s)\, dw_s = h(1)w_1 - \int_0^1 h'(s)\, w_s\, ds,$$

которая дает и аналогичную формулу с b_s:

$$\int_0^1 h(s)\, db_s = -\int_0^1 h'(s)\, b_s\, ds.$$

Положим

$$c_n = (1+\ln|n|)^{-1},\ n\neq 0,\ c_0 = 0,$$

$$\xi_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \int_0^1 b_s(\omega)\exp(-i2\pi ns)\, ds\ \exp(i2\pi nt),$$

$$\xi_{N,t}(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z},\, |n|\le N} c_n \int_0^1 b_s(\omega)\exp(-i2\pi ns)\, ds\ \exp(i2\pi nt).$$

Эти процессы вещественны, мы используем комплексный базис в L^2 лишь для упрощения обозначений. Рассмотрим отображение Λ_N такое, что λ_N^ω есть мера с плотностью $\partial_t\xi_{N,t}(\omega)$ относительно меры Лебега на $[0,1]$, т. е. $\xi_{N,t}(\omega)$ есть функция распределения меры λ_N^ω.

Теорема 3.6. *Последовательность $\{\Lambda_N\}$ фундаментальна в $\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, но не имеет предела в этом пространстве.*

Доказательство. Сначала покажем, что $\{\Lambda_N\}$ — последовательность Коши. Пусть $f\in B_1(X)$, $g\in B_1(Y)$ и $M>N$. Оценим

$$D_{N,M} := \sum_{n:N<|n|\le M} c_n \int_0^1\int_0^1 f(\omega)g(t)\int_0^1 \exp(-i2\pi ns)b_s(\omega)\, ds \\ \times (i2\pi n)\exp(i2\pi nt)\, dtd\omega.$$

Заметим, что по упомянутой выше формуле интегрирования по частям

$$(i2\pi n)\int_0^1 \exp(-i2\pi ns)b_s(\omega)\,ds = \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,db_s(\omega)$$

$$= \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,dw_s(\omega) = \eta_n(\omega)$$

для всякого $n \neq 0$, так как $db_s = dw_s - w_1 ds$ и интеграл от $\exp(-i2\pi ns)$ по $[0,1]$ равен нулю. Итак,

$$\int_0^1\int_0^1 f(\omega)g(t)(\lambda_M^\omega - \lambda_N^\omega)(dt)\,d\omega = \sum_{n:N<|n|\le M} c_n g_n \int_0^1 f(\omega)\eta_n(\omega)\,d\omega,$$

где

$$g_n = \int_0^1 g(t)\exp(i2\pi nt)\,dt.$$

Поскольку функции $\exp(-i2\pi ns)$ ортонормированы в $L^2[0,1]$, их стохастические интегралы η_n относительно винеровского процесса также ортонормированы в $L^2[0,1]$. Значит,

$$\sum_n \left|\int_0^1 f(\omega)\eta_n(\omega)\,d\omega\right|^2 \le \|f\|_{L^2}^2 \le 1.$$

Кроме того, $\sum\limits_n |g_n|^2 \le \|g\|_{L^2}^2 \le 1$, что по неравенству Коши дает оценку

$$D_{N,M} \le c_N.$$

Итак, $\{\Lambda_N\}$ — последовательность Коши.

Предположим, что она сходится к некоторому элементу $\Lambda \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, заданному борелевскими мерами λ^ω на $[0,1]$. Поскольку

$$\xi_{N,t}(\omega) = \lambda_N^\omega([0,t))$$

и $\xi_{N,t}(\omega) \to \xi_t(\omega)$ для всяких фиксированных ω и t, заключаем, что

$$\lambda^\omega([0,t)) = \xi_t(\omega) \tag{3.5}$$

при фиксированном t для почти всех ω. В самом деле, найдутся такие возрастающие номера N_k, что

$$\|\Lambda - \Lambda_{N_k}\|_{\mathfrak{L},1} \le 2^{-k}.$$

Следовательно, для всякого фиксированного t и всякой функции $f \in B_1(X)$ имеем

$$\left|\int_0^1 f(\omega)\big(\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))\big)\,d\omega\right| \le 2^{-k}.$$

Беря в качестве $f(\omega)$ знак $\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))$, получаем

$$\int_0^1 \big|\lambda^\omega([0,t)) - \lambda_{N_k}^\omega([0,t))\big|\,d\omega \le 2^{-k},$$

что есть
$$\int\limits_0^1 |\lambda^\omega([0,t)) - \xi_{N_k,t}(\omega)|\,d\omega \le 2^{-k}.$$
Полагая $k\to\infty$, приходим к (3.5).

Чтобы получить противоречие, остается показать, что $\xi_t(\omega)$ имеет неограниченную вариацию для почти каждого ω. Без множителей $(1+\ln n)^{-1}$ это было бы стандартным фактом для броуновского движения или броуновского моста. Эти множители приводят к иному центрированному гауссовскому процессу. Однако этот процесс ξ_t имеет траектории, которые гёльдеровы со всяким показателем $\alpha\in(0,1/2)$. В самом деле, записав ξ_t, как и выше, в виде
$$\xi_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z},n\ne 0} \frac{c_n}{i2\pi n}\int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,dw_s\ \exp(i2\pi nt),$$
получаем, что комплексные гауссовские случайные величины с нулевым средним
$$\eta_n = \int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,dw_s$$
независимы и имеют вариации 1. Поскольку
$$\sum_{n:2^j\le|n|\le 2^{j+1}} \frac{1}{(1+\ln|n|)^2}\frac{1}{|n|^2} = O(2^{-j/2}),$$
процесс ξ_t имеет выборочные траектории, которые гёльдеровы со всяким показателем $\alpha<1/2$ (см. [6, гл. VII, теорема 2]). Это же можно усмотреть из теоремы Колмогорова о гёльдеровости выборочных траекторий случайных процессов (см. [5]). В самом деле, среднее случайной величины $|\xi_\tau(\omega)-\xi_t(\omega)|^2$ оценивается через $|\tau-t|$, ибо оно не больше среднего $|b_\tau(\omega)-b_t(\omega)|^2$. Это следует из того, что дисперсия ряда $\sum\limits_n \alpha_n\eta_n$ с числовыми коэффициентами α_n равна $\sum\limits_n |\alpha_n|^2$ и $|c_n|\le 1$. С другой стороны, среднее $|b_\tau(\omega)-b_t(\omega)|^2$ равно $|\tau-t|-|\tau-t|^2$, так как среднее $w_\tau w_t$ равно $\min(\tau,t)$. Значит, среднее $|\xi_\tau(\omega)-\xi_t(\omega)|^4$ оценивается через $|\tau-t|^2$.

Предположим теперь, что $\xi_t(\omega)$ имеет ограниченную вариацию. Тогда в силу результата Зигмунда (см. [7, гл. IX, п. 3, следствие 1] или [8, гл. VI, теорема 3.6]) ряд Фурье функции $\xi_t(\omega)$ сходится абсолютно. Однако ряд
$$\sum_{n\in\mathbb{Z},\,n\ne 0} \frac{1}{1+\ln|n|}\frac{1}{|n|}\left|\int\limits_0^1 \exp(-i2\pi ns)\,dw_s\right|$$
расходится почти наверное. Это вытекает из теоремы Колмогорова о трех рядах: если ξ_n — независимые случайные величины, причем ряд из ξ_n сходится почти всюду, то для всякого $c>0$ сходится ряд из средних ξ_n^c, где $\xi_n^c=\xi_n$ при $|\xi_n|\le c$ и $\xi_n^c=0$ при $|\xi_n|>c$ (см. [9, гл. IV, §2, теорема 2]). Легко видеть, что в нашем случае сходимость средних ξ_n^c влечет сходимость средних ξ_n, которая не имеет места, как проверено ниже. Заметим также, что по закону нуля или единицы Колмогорова наш ряд сходился бы почти всюду, если бы он сходился на множестве положительной меры. Есть также иное обоснование:

случайные величины, заданные стохастическими интегралами от $\exp(-i2\pi ns)$, могут быть представлены (после интегрирования по частям) как непрерывные линейные функционалы на пространстве $C[0,1]$ с мерой Винера. Тогда частные суммы ряда выше являются непрерывными полунормами на $[0,1]$, которые возрастают и имеют конечный предел почти всюду относительно меры Винера. Следовательно, их предел — измеримая полунорма, значит, она интегрируема по теореме Ферника (см. [10, теорема 2.8.5]). Поэтому в случае сходимости этот ряд был бы интегрируем по ω. Однако интегралы

$$\int_0^1 \left| \int_0^1 \exp(-i2\pi ns)\, dw_s \right| d\omega$$

отделены от нуля. В самом деле,

$$\int_0^1 \cos(2\pi ns)\, dw_s$$

есть центрированная гауссовская случайная величина с дисперсией

$$\int_0^1 |\cos(2\pi ns)|^2\, ds = 1/2.$$

Значит, среднее ее модуля равно $\pi^{-1/2}$. $\square$

Стоит отметить, что элементы $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ интегрируемы по Петтису, если $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ наделить топологией сходимости на множествах или топологией двойственности с пространством $B_{\mathscr{A}}$ ограниченных $\mathscr{A}$-измеримых функций, ибо сопряженные к $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с этими топологиями суть пространство простых $\mathscr{A}$-измеримых функций и $B_{\mathscr{A}}$ соответственно. Например, для функционала L, порожденного множеством $A \in \mathscr{A}$, интеграл Петтиса от Λ по множеству $B \in \mathscr{B}$ есть мера $\nu_{I_B\Lambda}$, так как интеграл от $L(\lambda^x) = \lambda^x(A)$ по B равен $\nu_{I_B\Lambda}(A)$. Однако интегрируемости по Петтису может не быть, если мы рассматриваем $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ как банахово пространство с вариационной нормой. В самом деле, если $Y = [0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и $X = [0,1]$ с мерой Лебега μ, то существует непрерывный линейный функционал L на $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ с $L(\mu) = 1$ и $L(\delta^x) = 0$ при всех x. Тогда интеграл от $L(\delta_x)$ равен нулю. Более того, функция $L(\lambda^x)$ может быть неизмеримой по Лебегу. Достаточно взять неизмеримую функцию ψ, положить $L(\delta_x) = \psi(x)$, распространить L по линейности на линейные комбинации дираковских мер и затем продолжить на все $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ по теореме Хана — Банаха.

§ 4. Пространство отображений с нормой типа Канторовича

Еще одно интересное пространство мерозначных отображений возникает, если Y — полное сепарабельное метрическое пространство с его борелевской σ-алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{B}(Y)$, а пространство мер $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ наделено нормой Канторовича — Рубинштейна

$$\|\nu\|_{KR} = \sup\left\{ \int_Y \varphi(y)\, \nu(dy) : \varphi \in \mathrm{Lip}_1,\ |\varphi| \le 1 \right\},$$

где Lip_1 — множество 1-липшицевых функций на Y. Норма Канторовича — Рубинштейна метризует слабую топологию на множестве неотрицательных мер (но не на знакопеременных мерах), см. [1] или [11]. Если Y содержит бесконечную последовательность Коши, то $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ неполно относительно нормы Канторовича — Рубинштейна. В самом деле, если бы эта норма была полной, то по теореме Банаха она была бы эквивалентна вариационной норме ввиду оценки $\|\nu\|_{KR} \le \|\nu\|$. Однако если $\{a_n\}$ — последовательность Коши, то $\|\delta_{a_n} - \delta_{a_k}\|_{KR} = d(a_n, a_k)$ для достаточно больших n и k, хотя $\|\delta_{a_n} - \delta_{a_k}\| = 2$ при $a_n \ne a_k$. Тем не менее метрика d_{KR}, порожденная этой нормой, полна на множестве неотрицательных мер. Это влечет следующее утверждение.

Пусть $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ — пространство классов эквивалентности μ-измеримых отображений

$$f : X \to (\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$$

таких, что функция $x \mapsto \|f(x)\|_{KR}$ является μ-интегрируемой (она μ-измерима из-за сепарабельности Y). Это пространство наделено нормой

$$\|f\|_{1,KR} = \int\limits_Y \|f(x)\|_{KR}\, \mu(dx),$$

где используются представители классов эквивалентности. Ясно, что пространство $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ неполно, если Y не дискретно. Заметим, что пространство $(\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$ сепарабельно, поэтому пространство $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ имеет упомянутый во введении вид $L^1(\mu, E)$ с $E = (\mathscr{M}_{\mathscr{A}}, \|\cdot\|_{KR})$, но здесь E неполно.

Предложение 4.1. *Подмножество в $L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_{1,KR}$.*

Доказательство. Аналогично доказательству предложения 2.3 предположим, что $\{f_n\} \subset L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|f_{n+1} - f_n\|_{1,KR} \le 2^{-n}$, $f_1 = 0$. В силу того же рассуждения, что и выше, она сходится к отображению $f \in L^1_{KR}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, для которого $f(x) \ge 0$, так как множество неотрицательных мер в $\mathscr{M}_{\mathscr{A}}$ полно относительно метрики d_{KR}. $\square$

Аналогичный результат верен для пространства $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, если Y является более специальным пространством.

Теорема 4.2. *Предположим, что Y — такое хаусдорфово топологическое пространство с его борелевской σ-алгеброй $\mathscr{A} = \mathscr{B}(Y)$, что все ограниченные меры на $\mathscr{B}(Y)$ радоновы и компактные множества в Y метризуемы* (например, Y — суслинское пространство). *Тогда подмножество в $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, состоящее из отображений со значениями в неотрицательных мерах, полно относительно метрики, порожденной нормой $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай компактного метризуемого Y. Пусть $\{\Lambda_n\} \subset \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, $\Lambda_n = (\lambda_n^x)$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|\Lambda_{n+1} - \Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} \le 2^{-n}$, $\Lambda_1 = 0$. Можно выбрать версии, для которых функции $x \mapsto \lambda_n^x(A)$ являются $\mathscr{B}$-измеримыми для всех $A \in \mathscr{A}$. Найдется счетное множество Ψ, плотное в единичном шаре $C_b(Y)$. Воспользуемся замечанием 3.3 и вычислим норму $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1} \le 2\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$ с помощью (3.4) с $\Phi = B_1(X)$. Для каждого фиксированного $\psi \in \Psi$ имеем μ-почти

всюду
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl|\int\limits_Y \psi(y)\lambda^x_{n+1}(dy)-\int\limits_Y \psi(y)\lambda^x_n(dy)\Bigr|<\infty,$$
поскольку ряд из интегралов относительно μ сходится. Следовательно, множество X_0 всех таких точек $x\in X$, что ряд выше сходится для всех $\psi\in\Psi$, принадлежит $\mathscr{B}$ и $\mu(X\backslash X_0)=0$. Тогда для $x\in X_0$ имеем сходимость ряда без модулей под знаком интеграла, что означает сходимость интегралов от ψ относительно мер λ^x_n. Это дает слабую сходимость мер λ^x_n к некоторым неотрицательным борелевским мерам λ^x, $x\in X_0$. В самом деле, поскольку Y компактно, последовательность мер λ^x_n имеет предельную точку в слабой топологии, но из-за сходимости интегралов от функций из Ψ предельная точка единственна.

Легко видеть, что функции $x\mapsto\lambda^x(A)$ являются μ-измеримыми для всех $A\in\mathscr{B}(Y)$, ибо таковы все функции
$$\int\limits_Y h(y)\,\lambda^x(dy),\quad h\in\Psi,$$
а тогда и все такие функции с $h\in C_b(Y)$. Интеграл от $\lambda^x(Y)$ по мере μ конечен по теореме Фату, поскольку
$$\int\limits_X \lambda^x_n(Y)\,\mu(dx)\le\|\Lambda_n\|_{\mathfrak{L}}\le\sup_j\|\Lambda_j\|_{\mathfrak{L}}.$$
Следовательно, получаем отображение $\Lambda=(\lambda^x)$ из $\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ с неотрицательными мерами λ^x. Остается доказать сходимость Λ_n к Λ относительно нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{L}}$. Теперь снова используем замечание 3.3 для вычисления нормы $\|\cdot\|_{\mathfrak{L},1}$ с помощью (3.4). Имеем $\|\Lambda_n-\Lambda_k\|_{\mathfrak{L},1}\le 2^{1-n}$ при $k\ge n$. Зафиксируем n. Для всяких $\varphi\in\Phi$ и $\psi\in\Psi$ имеем
$$\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x_k(dy)\,\mu(dx)\to\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\,\mu(dx)$$
для всех $x\in X_0$ в силу слабой сходимости λ^x_k к λ^x. Следовательно, по теореме Фату
$$\int\limits_X\Bigl|\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x_n(dy)\,\mu(dx)-\int\limits_Y \varphi(x)\psi(y)\,\lambda^x(dy)\Bigr|\mu(dx)\le 2^{1-n}.$$
Взяв супремумы по φ и ψ, получаем $\|\Lambda_n-\Lambda\|_{\mathfrak{L},1}\le 2^{1-n}$.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть $\{\Lambda_n\}\subset\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, $\Lambda_n=(\lambda^x_n)$ — последовательность отображений со значениями в неотрицательных мерах с $\|\Lambda_{n+1}-\Lambda_n\|_{\mathfrak{L}}\le 2^{-n}$, $\Lambda_1=0$. Из замечания 3.4 вытекает, что борелевские меры ν_{Λ_n}, определенные формулой (3.1), сходятся по вариации, значит, их предел есть ограниченная неотрицательная борелевская мера ν на Y, которая автоматически радонова по нашему предположению. Более того,
$$\|\nu-\nu_{\Lambda_n}\|\le 2^{1-n}.$$
Выберем возрастающие компактные множества $K_j\subset Y$ так, что $\nu(Y\backslash K_j)\le 2^{-j}$. Зафиксируем j. Тогда получаем элементы Λ^j_n из $\mathfrak{L}(\mu,\mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, определенные следующим образом:
$$\Lambda^j_n=(\lambda^{j,x}_n),\quad \lambda^{j,x}_n(A):=\lambda^x_n(A\cap K_j).$$

Имеем
$$\big\|\Lambda^j_{n+1} - \Lambda^j_n\big\|_{\mathfrak{L}} \le \|\Lambda_{n+1} - \Lambda_n\|_{\mathfrak{L}} \le 2^{-n}.$$
Поскольку все меры $\lambda^{j,x}_n$ сосредоточены на метризуемом компактном множестве K_j, заключаем в силу первого этапа, что при $n \to \infty$ отображения Λ^j_n сходятся к элементу $\Lambda^j = (\lambda^{j,x}) \in \mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, где все меры $\lambda^{j,x} \ge 0$ сосредоточены на K_j. Кроме того, при всех $n \ge 1$ выполнено неравенство
$$\|\Lambda^j_n - \Lambda^j\|_{\mathfrak{L}} \le 2^{1-n}. \tag{4.1}$$
Заметим, что для μ-почти всех x и всех j
$$\lambda^{j,x} \le \lambda^{j+1,x}.$$
Достаточно проверить это для каждого фиксированного j. Напомним, что согласно первому этапу почти все меры $\lambda^{j,x}$ являются слабыми пределами ограничений мер λ^x_n на K_j и аналогично для $\lambda^{j+1,x}$. Поэтому нам нужен следующий факт: если неотрицательные меры η_n на компактном метрическом пространстве K слабо сходятся к мере η и их ограничения на меньшее компактное множество S слабо сходятся к мере ξ на S, то $\xi \le \eta$ на S. Покажем, что $\xi(C) \le \eta(C)$ для всякого компактного множества $C \subset S$. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдется такая непрерывная функция $f : K \to [0,1]$, что
$$\xi(C) \le \int\limits_S f\,d\xi, \quad \eta(C) \ge \int\limits_K f\,d\eta - \varepsilon.$$
Поскольку
$$\int\limits_S f\,d\xi = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S f\,d\eta_n, \quad \int\limits_K f\,d\eta = \lim_{n\to\infty} \int\limits_K f\,d\eta_n, \quad \int\limits_S f\,d\eta_n \le \int\limits_K f\,d\eta_n,$$
получаем оценку $\xi(C) \le \eta(C) - \varepsilon$, что доказывает наше утверждение. Следовательно, для μ-почти всех x последовательность мер $\lambda^{j,x}$ возрастает. Такое же рассуждение, как и выше, показывает, что для почти всех x последовательность $\lambda^x_n(Y)$ сходится к конечному пределу, так как ряд из интегралов от $|\lambda^x_{n+1}(Y) - \lambda^x_n(Y)|$ сходится. Поскольку $\lambda^{j,x}_n(Y) \le \lambda^x_n(Y)$ и $\lambda^{j,x}(Y) \le \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^x_n(Y)$, заключаем, что для μ-почти всех x меры $\lambda^{j,x}$ возрастают к ограниченной борелевской мере λ^x, для которой функция $x \mapsto \lambda^x$ является μ-измеримой. Интегралы от функций $\lambda^x_n(Y)$ относительно μ, равные $\nu_{\Lambda_n}(Y)$, сходятся к $\nu(Y)$ и равномерно ограничены. По теореме Фату функция $x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} \lambda^x_n(Y)$ оказывается μ-интегрируемой, значит, меньшая функция $x \mapsto \lambda^x(Y)$ также μ-интегрируема.

Наконец, покажем, что $\Lambda = (\lambda^x)$ является пределом $\{\Lambda_n\}$. Имеем
$$\begin{aligned}\|\Lambda_n - \Lambda^j_n\|_{\mathfrak{L}} &= \sup_{A\in\mathscr{A}} \int\limits_X |\lambda^x_n(A) - \lambda^x_n(A\cap K_j)|\,\mu(dx)\\ &= \sup_{A\in\mathscr{A}} \int\limits_X (\lambda^x_n(A) - \lambda^x_n(A\cap K_j))\,\mu(dx)\\ &= \sup_{A\in\mathscr{A}} (\nu_n(A) - \nu_n(A\cap K_j)) = \nu_n(Y\backslash K_j) \le \|\nu_n - \nu\| + 4^{-j}.\end{aligned}$$
Аналогично, поскольку $\lambda^x \ge \lambda^{j,x}$ и $\lambda^x(Y) - \lambda^{j,x}(Y) \to 0$ почти всюду, имеем
$$\|\Lambda - \Lambda^j\|_{\mathfrak{L}} \le \int\limits_X (\lambda^x(Y) - \lambda^{j,x}(Y))\,\mu(dx) \to 0.$$

Теперь для заданного $\varepsilon > 0$ возьмем такое j, что $\|\Lambda - \Lambda^j\|_{\mathfrak{L}} \le \varepsilon/4$ и $4^{-j} \le \varepsilon$. В силу (4.1) и оценок выше получаем

$$\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le \left\|\Lambda_n - \Lambda_n^j\right\|_{\mathfrak{L}} + \left\|\Lambda_n^j - \Lambda^j\right\|_{\mathfrak{L}} + \|\Lambda_j - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le \|\nu_n - \nu\| + \frac{\varepsilon}{2} + 2^{1-n} \le \varepsilon,$$

когда $\|\nu_n - \nu\| + 2^{1-n} \le \varepsilon/2$, что дает желаемое заключение. □

Мы не знаем, важны ли дополнительные предположения об Y, использованные в доказательстве этого утверждения.

Наконец, стоит отметить, что множество $\mathscr{P}$, состоящее из таких отображений $\Lambda = (\lambda^x)$, что почти каждая мера λ^x является вероятностной, полно с метрикой из банахова пространства $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$, а также с метрикой из нормированного пространства $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Однако топологии на $\mathscr{P}$, порожденные этими метриками, не совпадают. Рассмотрим пример, где X и Y — единичный отрезок $[0,1]$ с борелевской σ-алгеброй и μ — мера Лебега.

Пример 4.3. Для каждого $n \ge 1$ возьмем разбиение отрезка $[0,1]$ на n полуинтервалов $U_1, \ldots, U_n$ длины $1/n$ и положим $\lambda_n^x(dy) = (1 + \sin(2\pi k y))\,dy$ при $x \in U_k$. Соответствующие отображения $\Lambda_n = (\lambda_n^x)_{x\in[0,1]}$ сходятся в $\mathscr{P}$ с метрикой из $\mathfrak{L}(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$ к отображению $\Lambda = (\lambda^x)_{x\in[0,1]}$, где $\lambda^x = \lambda$ — мера Лебега для всех $x \in [0,1]$, но нет сходимости по метрике из $L^1_w(\mu, \mathscr{M}_{\mathscr{A}})$. Действительно, для всякого борелевского множества A из $[0,1]$ имеем

$$\int_0^1 |\lambda_n^x(A) - \lambda^x(A)|\,dx = n^{-1}\sum_{k=1}^n \left|\int_A \sin(2\pi k x)\,dx\right|$$
$$\le n^{-1/2}\left(\sum_{k=1}^n \left|\int_A \sin(2\pi k y)\,dy\right|^2\right)^{1/2} \le n^{-1/2}\|I_A\|_{L^2}.$$

Следовательно, $\|\Lambda_n - \Lambda\|_{\mathfrak{L}} \le n^{-1/2}$. С другой стороны,

$$\|\Lambda_n - \Lambda\|_1 = \int_0^1 \|\lambda_n^x - \lambda^x\|\,dx = n^{-1}\sum_{k=1}^n \int_0^1 |\sin(2\pi k y)|\,dy \ge 4^{-1}$$

для достаточно больших n, так как интегралы от $|\sin(2\pi k y)|$ больше $1/4$ для больших k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bogachev V. I.* Measure theory. V. 2. New York: Springer, 2007.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. I. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
3. *Асташкин С. В.* Система Радемахера в функциональных пространствах. М.: Наука, 2017.
4. *Маккин Г.* Стохастические интегралы. М.: Мир, 1972.
5. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. М.: Наука, 1975.
6. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
7. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
8. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. Т. 1, 2. 6-е изд.. М.: МЦНМО, 2017.
10. *Bogachev V. I.* Gaussian measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1998.

11. *Bogachev V. I.* Weak convergence of measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2018.

Поступила в редакцию 15 января 2025 г.
После доработки 15 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Арсенович Милош (ORCID 0000-0002-5450-2407)
Белградский университет, факультет математики,
Студенческая пл. 16, Белград, Сербия
milos.arsenovic@matf.bg.ac.rs

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048
vibogach@mail.ru

Крстич Михайло (ORCID 0000-0003-3575-3216)
Белградский университет, факультет математики,
Студенческая пл. 16, Белград, Сербия
mihailo.krstic@matf.bg.ac.rs

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП СВОБОДНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ГРУПП С НОРМАЛЬНОЙ ОБЪЕДИНЕННОЙ ПОДГРУППОЙ

Д. Р. Баранов, Е. В. Соколов

Аннотация. Предположим, что C — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, фактор-групп и декартовых сплетений, G — свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H, нормальной в свободных множителях и содержащейся в них собственным образом. Предположим также, что подгруппа группы автоморфизмов подгруппы H, составленная из ограничений на указанную подгруппу всех внутренних автоморфизмов группы G, конечна или абелева, или порождается ограничениями внутренних автоморфизмов одного из свободных множителей. В настоящей статье найдено описание C-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G при условии, что последняя аппроксимируется классом C. При этом критерий C-аппроксимируемости группы G известен.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.203

Ключевые слова: отделимость абелевых подгрупп, аппроксимируемость корневыми классами, обобщенное свободное произведение

§ 1. Введение

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп. Следуя А. И. Мальцеву [1], подгруппу Y группы X будем называть *$\mathscr{C}$-отделимой* в этой группе, если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что группа X *аппроксимируется классом $\mathscr{C}$* (или, более коротко, является *$\mathscr{C}$-аппроксимируемой*) тогда и только тогда, когда ее единичная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима. Напомним также, что отделимость и аппроксимируемость классом всех конечных групп принято называть *финитной*.

Будем говорить, что класс групп $\mathscr{C}$ является *корневым*, если он содержит хотя бы одну неединичную группу, замкнут относительно взятия подгрупп и удовлетворяет любому из приводимых ниже условий, равносильность которых установлена в [2]:

1) для всякой группы X и для каждого субнормального ряда $1 \leqslant Z \leqslant Y \leqslant X$ из включений $X/Y \in \mathscr{C}$ и $Y/Z \in \mathscr{C}$ следует существование нормальной подгруппы T группы X такой, что $T \leqslant Z$ и $X/T \in \mathscr{C}$ (*условие Грюнберга*);

2) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия декартовых сплетений;

3) класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия расширений и вместе с любыми двумя группами X, Y содержит декартово произведение $\prod\limits_{y \in Y} X_y$, где X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00307, https://rscf.ru/project/24-21-00307/

Понятие корневого класса впервые появилось в работе [3] и оказалось весьма полезным при изучении аппроксимационных свойств свободных конструкций групп, позволяя систематизировать и усиливать полученные ранее результаты об аппроксимируемости указанных конструкций конкретными корневыми классами групп (см., например, [4–11]). Нетрудно показать, что корневыми являются классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Легко видеть также, что пересечение произвольного числа корневых классов — снова корневой класс, если оно содержит хотя бы одну неединичную группу.

В [12, 13] Чжоу и Ким показали, что при изучении финитной отделимости конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп могут использоваться те же методы, что и при исследовании финитной аппроксимируемости. В [14, 15] их результаты распространены на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп $\mathcal{C}$ и фундаментальной группы произвольного графа групп. Предложенный подход позволяет получить критерий $\mathcal{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы практически для любой свободной конструкции, аппроксимируемость которой классом $\mathcal{C}$ была установлена ранее. В [15] приводится несколько примеров его применения к изучению отделимости подгрупп фундаментальных групп графов групп с центральными реберными подгруппами. Настоящая статья продолжает данное направление исследований и использует указанный подход для описания отделимых подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой, нормальной в свободных множителях.

Всюду далее запись $G = \langle A * B;\ H\rangle$ будет означать, что G — обобщенное свободное произведение групп A и B с объединенной подгруппой H. Отметим, что если $A = H$ или $B = H$, то группа G совпадает с одним из свободных множителей A, B и потому данный случай можно считать вырожденным. Будем говорить, что группа G *удовлетворяет условию* (α), если $A \neq H \neq B$ и подгруппа H нормальна в группах A и B. Аппроксимируемость такого обобщенного свободного произведения различными классами групп изучалась в [6, 16–27]. В ряде случаев необходимыми и достаточными условиями его $\mathcal{C}$-аппроксимируемости служат $\mathcal{C}$-аппроксимируемость групп A, B и $\mathcal{C}$-отделимость в них подгруппы H (см., например, [23, теорема 1; 24, теорема 1; 25, теорема 1; 27, теорема 2]). В формулировках условий аппроксимируемости группы G конечными p-группами встречается также подгруппа H^pH', где $H^p = \mathrm{sgp}\{h^p \mid h \in H\}$ и H' — коммутант группы H [18, 27]. Однако наиболее универсальным и продуктивным подходом к исследованию аппроксимируемости рассматриваемого обобщенного свободного произведения является использование описанной ниже группы автоморфизмов подгруппы H, индуцированных внутренними автоморфизмами группы G.

Заметим, что если X — некоторая группа и Y — ее нормальная подгруппа, то ограничение на последнюю любого внутреннего автоморфизма группы X оказывается автоморфизмом подгруппы Y. Множество всех таких автоморфизмов образует группу, обозначаемую далее через $\mathrm{Aut}_X(Y)$. Если подгруппа H нормальна в группах A и B, то она нормальна и в группе G, что позволяет определить группу $\mathrm{Aut}_G(H)$. Идея использования свойств последней для описания условий аппроксимируемости группы G впервые была предложена в [17] и затем успешно применялась в [6, 21, 22, 26, 27]. В частности, в [6, 26] был получен критерий аппроксимируемости гомоморфно замкнутым корневым классом групп $\mathscr{C}$ обобщенного свободного произведения $G = \langle A * B;\ H\rangle$, удовлетворяющего условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий:

(β) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна;

(γ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева;

(δ) группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_A(H)$ или с группой $\mathrm{Aut}_B(H)$.

Целью настоящей статьи является описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющей условиям упомянутого критерия.

§ 2. Формулировка полученных результатов

Пусть X — некоторая группа и $\mathfrak{S}$ — семейство нормальных подгрупп группы X. Будем говорить, что подгруппа Y группы X *отделима семейством* $\mathfrak{S}$, если $\bigcap\limits_{N\in\mathfrak{S}} YN = Y$. Всюду далее, если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, то через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$. Поскольку подгруппы семейства $\mathscr{C}^*(X)$ — это ядра всевозможных гомоморфизмов группы X на группы из класса $\mathscr{C}$, подгруппа Y группы X $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathscr{C}^*(X)$. В частности, группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда семейством $\mathscr{C}^*(X)$ отделима ее единичная подгруппа.

Если $G = \langle A * B;\ H\rangle$, то через $\mathscr{C}^+(A, B)$ будем обозначать семейство пар подгрупп группы G, определенное следующим образом: $(R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)$ тогда и только тогда, когда $R \in \mathscr{C}^*(A)$, $S \in \mathscr{C}^*(B)$ и $R \cap H = S \cap H$. Положим также

$$\mathscr{C}^+(A) = \{R \mid (R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)\} \quad \text{и} \quad \mathscr{C}^+(B) = \{S \mid (R, S) \in \mathscr{C}^+(A, B)\}.$$

Упомянутый в конце предыдущего параграфа критерий аппроксимируемости группы G выглядит следующим образом.

Теорема 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. [6, теорема 2] *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда*

   (a) *единичная подгруппа отделима семействами $\mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^+(B)$;*

   (b) *подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B;*

   (c) $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$.

2. [26, теорема 1] *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда справедливы утверждения (a) и (b).*

Перейдем к описанию отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп обобщенного свободного произведения, удовлетворяющего условиям теоремы 1.

Если $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathscr{C}$. В случае, когда класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, положим $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ равным множеству всех простых чисел. Будем говорить, что подгруппа Y группы X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-*изолирована* в этой группе, если для любого элемента $x \in X$ и для любого простого числа $q \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$.

Очевидно, что если множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ содержит все простые числа, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной. В противном случае нетрудно показать (см., например, [28, предложение 5]), что если подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе. Как следствие, свойство $\mathscr{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных подгрупп. В связи с этим соображением и с характером интересующих нас подгрупп *$\mathscr{C}$-дефектом* группы X будем называть семейство всех $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы, не являющихся $\mathscr{C}$-отделимыми в X.

Понятно, что задача поиска критерия $\mathscr{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы группы $G = \langle A * B;\ H\rangle$, удовлетворяющей условиям теоремы 1, сводится к описанию $\mathscr{C}$-дефекта данной группы. При этом идеальной можно считать ситуацию, когда для такого описания достаточно знать лишь $\mathscr{C}$-дефекты свободных множителей A и B. К сожалению, в общем случае (теорема 2 ниже) выполнения последнего требования добиться не удалось. Однако при некоторых дополнительных предположениях получено именно идеальное решение (см. теоремы 3–5).

Пусть (X, Y) — пара конечно порожденных абелевых подгрупп группы G и символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Рассмотрим следующий набор условий.

$(\lambda_{\mathscr{C}}^{1,Z})$ X— $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathscr{C}$-дефекту); $Y = 1$.

$(\mu_{\mathscr{C}}^{1,Z})$ X— подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе (и, следовательно, принадлежащая ее $\mathscr{C}$-дефекту); Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

$(\lambda_{\mathscr{C}}^{2,Z})$ X — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся отделимой в этой группе семейством $\mathscr{C}^{+}(Z)$; $Y = 1$.

$(\mu_{\mathscr{C}}^{2,Z})$ X— подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^{+}(Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X, Y] = 1$.

Обозначим через $\mathfrak{D}_{\mathscr{C}}^{k}(G)$, $k = \overline{1,2}$, семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы G, удовлетворяющих хотя бы одному из условий $(\lambda_{\mathscr{C}}^{k,A})$, $(\lambda_{\mathscr{C}}^{k,B})$, $(\mu_{\mathscr{C}}^{k,A})$, $(\mu_{\mathscr{C}}^{k,B})$, и положим $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^{k}(G) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_{\mathscr{C}}^{k}(G)\}$.

Известно (см. [29, теорема 2] и [14, предложение 5]), что произвольная конечно порожденная абелева подгруппа группы G сопряжена либо с подгруппой одного из свободных множителей A, B, либо с прямым произведением подгрупп X и Y, где $X \leqslant H$ и Y — бесконечная циклическая подгруппа, тривиально пересекающаяся с A и с B. Поэтому для задания семейства $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^{1}(G)$, помимо умения строить конечно порожденные абелевы подгруппы группы G, достаточно знать описания $\mathscr{C}$-дефектов групп A и B. Определения семейств $\mathscr{C}^{+}(A, B)$ и $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^{2}(G)$ сложнее: они зависят не только от свойств групп A и B, но и от того, как данные группы склеиваются при построении обобщенного свободного произведения. При этом из включений $\mathscr{C}^{+}(A) \subseteq \mathscr{C}^{*}(A)$, $\mathscr{C}^{+}(B) \subseteq \mathscr{C}^{*}(B)$ следует, что $\mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^{1}(G) \subseteq \mathfrak{A}_{\mathscr{C}}^{2}(G)$.

Общее решение рассматриваемой задачи дает

Теорема 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп,* *замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(G)$.*

Приводимые далее теоремы 3–5 указывают некоторые частные случаи, в которых описание $\mathscr{C}$-дефекта обобщенного свободного произведения G можно дать с использованием семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. Отметим, что содержащиеся в этих теоремах критерии $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G являются нетривиальными следствиями теоремы 1 и потому представляют самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, $A/H \in \mathscr{C}$ и $B/H \in \mathscr{C}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1\. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$.*

2\. *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

3\. *Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathscr{C}$-дефекта, если она $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-дефекта нет в группах A и B.*

Непосредственно из теоремы 3 вытекает

Следствие 1. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ). Если подгруппа H имеет конечные индексы в группах A и B, то справедливы следующие утверждения.*

1\. *Если группы A и B финитно аппроксимируемы, то и группа G финитно аппроксимируема.*

2\. *Если в группах A и B все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы, то и в группе G все конечно порожденные абелевы подгруппы финитно отделимы.*

Пусть $\mathscr{C}$ — класс групп, состоящий из периодических групп. Следуя [30], будем говорить, что

1) абелева группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой группы из класса $\mathscr{C}$;

2) разрешимая (нильпотентная) группа *$\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Будем говорить также, что

1) абелева группа *сильно $\mathscr{C}$-ограничена*, если в любой ее фактор-группе каждая примарная компонента периодической части, соответствующая некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$, конечна;

2) разрешимая (нильпотентная) группа *сильно $\mathscr{C}$-ограничена*, если она обладает конечным субнормальным (соответственно центральным) рядом с сильно $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами.

Отметим, что при любом выборе класса групп $\mathcal{C}$ каждая конечно порожденная абелева группа оказывается сильно $\mathcal{C}$-ограниченной. Поэтому все конечно порожденные нильпотентные группы являются сильно $\mathcal{C}$-ограниченными нильпотентными, а все полициклические группы — сильно $\mathcal{C}$-ограниченными разрешимыми.

Как обычно, целое число будем называть $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-*числом*, если все его простые делители принадлежат множеству $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$. Через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$ будем обозначать дополнение множества $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ в множестве всех простых чисел.

Теорема 4. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также группы A и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, подгруппа H является сильно $\mathcal{C}$-ограниченной разрешимой и каждая ее нормальная подгруппа конечного $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-индекса $\mathcal{C}$-отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения* 1–3 *теоремы* 3.

Согласно предложению 5 из [31] если $\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, то понятия $\mathcal{F}$-ограниченной и сильно $\mathcal{F}$-ограниченной разрешимой группы совпадают с понятием разрешимой группы, ограниченной в смысле А. И. Мальцева [1]. Поэтому из теоремы 4 вытекает

Следствие 2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ). Пусть также подгруппа H является ограниченной разрешимой в смысле А. И. Мальцева и каждая ее нормальная подгруппа конечного индекса финитно отделима в группах A и B. Тогда справедливы утверждения* 1 *и* 2 *следствия* 1.

Теорема 5. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также $\mathcal{N}$ — класс $\mathcal{C}$-ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения, группы A и B $\mathcal{N}$-аппроксимируемы и обладают гомоморфизмами на $\mathcal{N}$-группы, действующими инъективно на подгруппе H. Тогда справедливы приводимые ниже утверждения* 1 *и* 2, *а также утверждение* 3 *теоремы* 3.

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*

2. *Если выполняется условие (γ) или условие (δ), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппа H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолирована в группах A и B.*

Следствие 3. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из дополнительных условий (β)–(δ), $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также A и B — $\mathcal{C}$-ограниченные нильпотентные группы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если выполняется условие (β), то группа G $\mathcal{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathcal{C}$ и подгруппы* 1 *и H $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированы в группах A и B.*

2. *Если выполняется условие* (γ) *или условие* (δ), *то группа* G $\mathscr{C}$*-аппроксимируема тогда и только тогда, когда подгруппы* 1 *и* H $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$*-изолированы в группах* A *и* B.

3. *Если группа* G $\mathscr{C}$*-аппроксимируема, то она не имеет* $\mathscr{C}$*-дефекта.*

Говорят (см., например, [32]), что группа имеет *конечный ранг Гирша — Зайцева*, если она обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо периодической, либо бесконечной циклической группой.

Следствие 4. *Пусть группа* $G = \langle A * B;\ H\rangle$ *удовлетворяет условию* (α) *и хотя бы одному из дополнительных условий* (β)*–*(δ), $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Пусть также* $\mathscr{N}_0$ *— класс* $\mathscr{C}$*-ограниченных нильпотентных групп без кручения, группы* A *и* B $\mathscr{N}_0$*-аппроксимируемы и подгруппа* H *имеет конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда выполняются утверждения* 1 *и* 2 *теоремы* 5 *и утверждение* 3 *следствия* 3.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству теорем 2–5 и следствий 3, 4.

§ 3. Некоторые вспомогательные утверждения

Предложение 3.1 [27, предложение 3.1]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,* X *— некоторая группа,* Y *и* Z *— подгруппы группы* X. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $Y \in \mathscr{C}^*(X)$, *то* $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(Z)$. *Как следствие, если группа* X *аппроксимируется классом* $\mathscr{C}$, *то и подгруппа* Z *является* $\mathscr{C}$*-аппроксимируемой.*

2. *Если* $Y, Z \in \mathscr{C}^*(X)$, *то* $Y \cap Z \in \mathscr{C}^*(X)$.

Предложение 3.2 [6, предложение 18]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— класс групп без кручения, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей,* X *—* $\mathscr{C}$*-аппроксимируемая группа,* Y *— подгруппа группы* X, *имеющая конечный ранг Гирша — Зайцева. Тогда существует подгруппа* $Z \in \mathscr{C}^*(X)$ *такая, что* $Z \cap Y = 1$.

Предложение 3.3 [26, предложение 17]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда произвольная группа из класса* $\mathscr{C}$ *имеет конечный период.*

Предложение 3.4 [33, предложение 8]. *Пусть* $\mathscr{C}$ *— корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Конечная разрешимая группа принадлежит классу* $\mathscr{C}$ *тогда и только тогда, когда ее порядок является* $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$*-числом.*

Отметим, что разрешимая (абелева) группа сильно $\mathscr{C}$-ограничена тогда и только тогда, когда она является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-ограниченной разрешимой (соответственно абелевой) в смысле определения, данного в [31]. Поэтому из предложений 2 и 3 указанной работы вытекает

Предложение 3.5. *Если* $\mathscr{C}$ *— класс групп, состоящий из периодических групп, то справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченных разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп и гомоморфных образов.*

2. *Если сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченная разрешимая группа является абелевой, то она принадлежит классу сильно* $\mathscr{C}$*-ограниченных абелевых групп.*

Ввиду отмеченной выше равносильности определений приводимое далее утверждение совпадает с предложением 18 из [26].

Предложение 3.6. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Тогда произвольная сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа, принадлежащая классу $\mathscr{C}$, конечна.*

Предложение 3.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и X — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группа конечного периода. Тогда группа X конечна и принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

Доказательство. Пусть Y — произвольный фактор некоторого нормального разрешимого ряда группы X. Тогда Y — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группа конечного периода, являющаяся сильно $\mathscr{C}$-ограниченной абелевой в силу предложения 3.5. Ввиду конечности периода количество примарных компонент группы Y конечно. Каждая из этих компонент соответствует некоторому числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ и потому конечна. Следовательно, группа Y (а вместе с ней и группа X) также конечна. Принадлежность группы X классу $\mathscr{C}$ вытекает из предложения 3.4.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-квазирегулярна* по своей подгруппе Y, если для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Предложение 3.8. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, X — некоторая группа, Y — подгруппа группы X. Тогда группа X $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, если выполняется хотя бы одно из следующих условий*:

(1) $Y \in \mathscr{C}^*(X)$;

(2) *все подгруппы семейства $\mathscr{C}^*(Y)$ $\mathscr{C}$-отделимы в группе X и имеют конечные индексы в группе Y;*

(3) *класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и замкнут относительно взятия фактор-групп, Y — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа и каждая нормальная подгруппа группы Y конечного $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-индекса $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Доказательство. Если выполняется условие (1), $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y вытекает из условия Грюнберга. Пусть имеет место условие (2), $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ и $\{1, y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы Y по подгруппе M. Так как последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X и множество $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq X \setminus M$ конечно, то, пользуясь утверждением 2 предложения 3.1, можно найти подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющую условию $y_1, \ldots, y_n \notin MN$. Если $N \cap Y \nleqslant M$ и $y \in (N \cap Y) \setminus M$, то $y = xy_i$ для подходящих $x \in M$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ и $y_i = x^{-1}y \in MN$ вопреки выбору подгруппы N. Следовательно, $N \cap Y \leqslant M$ и $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y имеет место.

Пусть выполняется условие (3). Если $M \in \mathscr{C}^*(Y)$, то согласно предложениям 3.5 и 3.6 фактор-группа Y/M оказывается сильно $\mathscr{C}$-ограниченной разрешимой и, следовательно, конечной. Очевидно также, что ее порядок является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом и потому подгруппа M $\mathscr{C}$-отделима в группе X. Стало быть, имеет место условие (2), которое и гарантирует $\mathscr{C}$-квазирегулярность X по Y.

Следующие два утверждения вытекают из теоремы 2.4 и предложений 5.2, 6.1, 6.3 работы [30].

Предложение 3.9. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{N}$ — класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп без $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения, X — некоторая группа и Y — ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа. Если группа X $\mathscr{N}$-аппроксимируема и обладает гомоморфизмом на $\mathscr{N}$-группу, действующим инъективно на подгруппе Y, то она $\mathscr{C}$-аппроксимируема и $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, а последняя $\mathscr{C}$-отделима в группе X.*

Предложение 3.10. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и прямых произведений конечного числа сомножителей.*

2. *Если периодическая $\mathscr{C}$-ограниченная нильпотентная группа имеет конечный период, являющийся $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом, то она принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

§ 4. Доказательство теоремы 2

Всюду далее, если $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп, X — группа и Y — подгруппа группы X, то через $\mathscr{C}^*(X,Y)$ будем обозначать семейство подгрупп $\{N \cap Y \mid N \in \mathscr{C}^*(X)\}$.

Предложение 4.1 [6, предложение 10]. *Если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее единичная подгруппа отделима семействами $\mathscr{C}^*(G,A)$ и $\mathscr{C}^*(G,B)$.*

Как и выше, обозначим через $\mathfrak{D}^3_{\mathscr{C}}(G)$ семейство всех пар конечно порожденных абелевых подгрупп группы $G = \langle A * B;\ H\rangle$, удовлетворяющих хотя бы одному из определенных далее условий $(\lambda^{3,Z}_{\mathscr{C}})$, $(\mu^{3,Z}_{\mathscr{C}})$, где $Z = A$ или $Z = B$, и положим $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G) = \big\{XY \mid (X,Y) \in \mathfrak{D}^3_{\mathscr{C}}(G)\big\}$.

$(\lambda^{3,Z}_{\mathscr{C}})$ X — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы Z, не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^*(G,Z)$; $Y = 1$.

$(\mu^{3,Z}_{\mathscr{C}})$ X — подгруппа группы H, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная в группе Z, но не являющаяся отделимой семейством $\mathscr{C}^*(G,Z)$; Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap Z = 1$ и $[X,Y] = 1$.

Следующее предложение объединяет в себе частные случаи теорем 2.2 и 2.3 из [15].

Предложение 4.2. *Пусть $G = \langle A * B;\ H\rangle$ и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Тогда справедливы приводимые далее утверждения.*

1. *Если подгруппы 1 и H отделимы семействами $\mathscr{C}^*(G,A)$ и $\mathscr{C}^*(G,B)$, то группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G)$.*

2. *Пусть группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в этих группах и группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппам A и B. При таких предположениях группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, а ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа является $\mathscr{C}$-дефектной тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(G)$. В частности, группа G не имеет $\mathscr{C}$-дефекта, если тем же свойством обладают группы A и B.*

Предложение 4.3 [6, предложение 11]. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и фактор-групп. Тогда подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группе A (в группе B) тогда и только тогда, когда она отделима семейством $\mathscr{C}^*(G, A)$ (соответственно семейством $\mathscr{C}^*(G, B)$).*

Предложение 4.4 [26, предложение 12]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий*:

(γ) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева*;

(δ) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ совпадает с группой $\mathrm{Aut}_A(H)$ или с группой $\mathrm{Aut}_B(H)$*;

(ε) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ принадлежит классу $\mathscr{C}$.*

Если $\mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^+(B)$ — семейства подгрупп группы G, определенные в § 2, то $\mathscr{C}^*(G, A) = \mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B) = \mathscr{C}^+(B)$.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1 подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B. Ввиду предложения 4.3 это равносильно ее отделимости семействами $\mathscr{C}^*(G, A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B)$. В силу предложения 4.1 теми же семействами отделима единичная подгруппа группы G. Если выполняется условие (β), то по теореме 1 справедливо включение $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$. Поэтому можно воспользоваться предложением 4.4, согласно которому $\mathscr{C}^*(G, A) = \mathscr{C}^+(A)$ и $\mathscr{C}^*(G, B) = \mathscr{C}^+(B)$. Отсюда $\mathfrak{A}^3_{\mathscr{C}}(G) = \mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(G)$ и, следовательно, доказываемая теорема вытекает из утверждения 1 предложения 4.2.

§ 5. Доказательства теорем 3–5 и следствий 3, 4

Приводимое далее утверждение отмечено без доказательства в [34] и может быть легко проверено индукцией по k.

Предложение 5.1. *Пусть $\{\upsilon_k(x, y) \mid k \geqslant 1\}$ — множество слов в (групповом) алфавите $\{x, y, x^{-1}, y^{-1}\}$, $\upsilon_1(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ и при $k \geqslant 2$ слово $\upsilon_k(x, y)$ получается из слова $x^{-1}\upsilon_{k-1}(x, y)^{-1}x\upsilon_{k-1}(x, y)$ путем удаления подслова xx^{-1}. Тогда для каждого $k \geqslant 1$ слово $\upsilon_k(x, y)$ имеет длину 2^{k+1}, начинается на $x^{-1}y^{-1}$, заканчивается на xy и не содержит подслов вида $x^\xi x^\zeta$ или $y^\xi y^\zeta$, где $\xi, \zeta = \pm 1$.*

Напомним, что запись элемента g группы $G = \langle A * B;\ H\rangle$ в виде произведения $g_1 g_2 \ldots g_n$, где $g_1, g_2, \ldots, g_n \in A \cup B$, называется *несократимой*, если никакие два соседних сомножителя этого произведения не лежат одновременно в A или в B. Число n называют *длиной* данной несократимой записи. Теорема о нормальной форме для обобщенных свободных произведений (см., например, [35, глава IV, теорема 2.6]) утверждает, что если элемент $g \in G$ обладает несократимой записью неединичной длины, то он отличен от 1.

Предложение 5.2. *Пусть группа $G = \langle A * B;\ H\rangle$ удовлетворяет условию (α), $\mathscr{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп, и подгруппа H нильпотентна. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то подгруппа H $\mathscr{C}$-отделима в группах A и B.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа H не является $\mathscr{C}$-отделимой в группе A. Тогда существует элемент $a \in A \setminus H$ такой, что $a\sigma \in H\sigma$ при любом гомоморфизме σ группы A на группу из класса $\mathscr{C}$. Пользуясь условием $H \neq B$, выберем некоторый элемент $b \in B \setminus H$ и положим $g = \upsilon_c(a, b^{-1}ab)$, где c — ступень нильпотентности подгруппы H и $\upsilon_c(x, y)$ — слово из предложения 5.1. Согласно указанному предложению элемент g имеет несократимую запись неединичной длины и, следовательно, отличен от 1. Вместе с тем, если σ — произвольный гомоморфизм группы G на $\mathscr{C}$-группу, то $a\sigma \in H\sigma$ ввиду выбора элемента a и замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп, $(b^{-1}ab)\sigma \in H\sigma$ в силу нормальности подгруппы H в группе B и $g\sigma = 1$, поскольку элемент $v_c(a, b^{-1}ab)\sigma$ принадлежит $(c+1)$-му члену нижнего центрального ряда группы $H\sigma$, а c — ступень нильпотентности группы H. Таким образом, группа G не является $\mathscr{C}$-аппроксимируемой вопреки условию предложения. $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в группе B доказывается аналогично.

Предложение 5.3. *Пусть выполняются условия предложения* 4.4. *Если группы A и B $\mathscr{C}$-квазирегулярны по подгруппе H и каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G, то группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппам A и B.*

Доказательство. Пусть $L \in \mathscr{C}^*(A)$, $M \in \mathscr{C}^*(B)$ и $P = L \cap M \cap H$. Для завершения доказательства достаточно найти подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(G)$ такую, что $N \cap A \leqslant L$ и $N \cap B \leqslant M$. Согласно предложению 3.1

$$L \cap H \in \mathscr{C}^*(H), \quad M \cap H \in \mathscr{C}^*(H) \quad \text{и} \quad P = (L \cap H) \cap (M \cap H) \in \mathscr{C}^*(H).$$

По условию настоящего предложения существует подгруппа $Q \in \mathscr{C}^*(H)$, лежащая в P и нормальная в G. Пользуясь $\mathscr{C}$-квазирегулярностью групп A и B по подгруппе H, найдем подгруппы $U \in \mathscr{C}^*(A)$ и $V \in \mathscr{C}^*(B)$, удовлетворяющие соотношениям $U \cap H \leqslant Q$ и $V \cap H \leqslant Q$. Положим $R = QU \cap L$ и $S = QV \cap M$. Так как $A/U \in \mathscr{C}$, $B/V \in \mathscr{C}$ и класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, то $A/QU \cong (A/U)/(QU/U) \in \mathscr{C}$ и $B/QV \cong (B/V)/(QV/V) \in \mathscr{C}$. Отсюда ввиду предложения 3.1 получаем, что $R \in \mathscr{C}^*(A)$ и $S \in \mathscr{C}^*(B)$. Из соотношений $U \cap H \leqslant Q$ и $V \cap H \leqslant Q$ легко следует, что $QU \cap H = Q = QV \cap H$. Так как $Q \leqslant P \leqslant L \cap M$, то $R \cap H = Q = S \cap H$ и, стало быть, $R \in \mathscr{C}^+(A)$, $S \in \mathscr{C}^+(B)$. В силу предложения 4.4 $R \in \mathscr{C}^*(G, A)$ и $S \in \mathscr{C}^*(G, B)$, т. е. существуют подгруппы $N_1, N_2 \in \mathscr{C}^*(G)$, удовлетворяющие соотношениям $N_1 \cap A = R$ и $N_2 \cap B = S$. Положим $N = N_1 \cap N_2$. Тогда $N \in \mathscr{C}^*(G)$ в силу предложения 3.1, $N \cap A \leqslant R \leqslant L$ и $N \cap B \leqslant S \leqslant M$. Следовательно, подгруппа N искомая.

Предложение 5.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, обобщенное свободное произведение $G = \langle A * B;\ H \rangle$ удовлетворяет условию (α) и хотя бы одному из следующих дополнительных условий*:

(1) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна или принадлежит классу $\mathscr{C}$*;

(2) $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$ *и группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H*;

(3) *группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ является абелевой, $H \in \mathscr{C}^*(B)$ и группа A $\mathscr{C}$-квазирегулярна по подгруппе H*;

(4) *класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп и подгруппа H является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной или сильно $\mathscr{C}$-ограниченной разрешимой.*

Тогда каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G.

Доказательство. Пусть $M \in \mathscr{C}^*(H)$. Построение искомой подгруппы проведем отдельно для каждого из дополнительных условий (1)–(4).

(1) Положим $N = \bigcap\limits_{\theta \in \mathrm{Aut}_G(H)} M\theta$. Согласно определению группы $\mathrm{Aut}_G(H)$ подгруппа N совпадает с пересечением $\bigcap\limits_{g \in G} g^{-1}Mg$ и потому нормальна в группе G. По теореме Ремака (см., например, [36, теорема 4.3.9]) фактор-группа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/M\theta$, каждая из которых изоморфна $\mathscr{C}$-группе H/M. Указанное декартово произведение, а вместе

с ним и группа H/N принадлежат классу $\mathscr{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и а) расширений, если группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ конечна; б) декартовых степеней указанного в определении корневого класса вида, если $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$. Таким образом, подгруппа N является искомой.

(2) Ввиду $\mathscr{C}$-квазирегулярности группы A по подгруппе H найдется подгруппа $L \in \mathscr{C}^*(A)$, удовлетворяющая условию $L \cap H \leqslant M$. Положим $N = L \cap H$. Тогда подгруппа N нормальна в группе A и принадлежит семейству $\mathscr{C}^*(H)$ в силу предложения 3.1. Так как $\mathrm{Aut}_G(H) = \mathrm{Aut}_A(H)$, то указанная подгруппа оказывается нормальной в группе G и, следовательно, является искомой.

(3) Как и выше, воспользуемся $\mathscr{C}$-квазирегулярностью группы A по подгруппе H, найдем подгруппу $L \in \mathscr{C}^*(A)$, удовлетворяющую условию $L \cap H \leqslant M$, и положим $Q = L \cap H$, $N = \bigcap\limits_{\theta \in \mathrm{Aut}_G(H)} Q\theta$. Тогда подгруппа Q нормальна в группе A, подгруппа N нормальна в группе G, $Q \in \mathscr{C}^*(H)$ и $N \leqslant M$. Пусть $\{b_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ — некоторая полная система представителей смежных классов группы B по подгруппе H. Поскольку группа $\mathrm{Aut}_G(H)$ абелева, любой ее элемент совпадает с ограничением на подгруппу H внутреннего автоморфизма, производимого элементом вида ab, где $a \in A$, $b \in B$. Понятно, что каждое такое произведение можно переписать в виде cb_i для подходящих $c \in A$, $i \in \mathscr{I}$. Поэтому

$$N = \bigcap_{i \in \mathscr{I},\, c \in A} b_i^{-1} c^{-1} Q c b_i = \bigcap_{i \in \mathscr{I}} b_i^{-1} Q b_i$$

и фактор-группа H/N вкладывается в декартово произведение групп $H/b_i^{-1}Qb_i$, изоморфных $\mathscr{C}$-группе H/Q. Так как множество $\mathscr{I}$ равномощно $\mathscr{C}$-группе B/H, группа H/N содержится в классе $\mathscr{C}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и декартовых степеней. Следовательно, N — искомая подгруппа.

(4) Согласно предложению 3.3 $\mathscr{C}$-группа H/M имеет конечный период q, являющийся, очевидно, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-числом. Положим $N = \mathrm{sgp}\{h^q \mid h \in H\}$. Тогда подгруппа N содержится в M и нормальна в G, а фактор-группа H/N имеет период q. Если подгруппа H является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной, то в силу предложения 3.10 группа H/N принадлежит классу $\mathscr{C}$. В случае, когда H — сильно $\mathscr{C}$-ограниченная разрешимая группа, аналогичное утверждение вытекает из предложений 3.5 и 3.7. Следовательно, подгруппа N искомая.

Доказательство теорем 3 и 4. Необходимость условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$ для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G в утверждении 1 каждой из теорем 3, 4 обеспечивается теоремой 1. Докажем одновременно утверждения 2, 3 и достаточность в утверждении 1. Согласно предложению 3.8 группы A и B $\mathscr{C}$-квазирегулярны по подгруппе H. Поэтому в силу предложения 5.4 каждая подгруппа семейства $\mathscr{C}^*(H)$ содержит подгруппу того же семейства, нормальную в G. Из предложения 5.3 теперь следует, что группа G $\mathscr{C}$-квазирегулярна по свободным множителям A и B. $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в тех же сомножителях гарантируется либо включениями $A/H, B/H \in \mathscr{C}$ (в случае теоремы 3), либо условием теоремы (в случае теоремы 4). Таким образом, $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы G и утверждение 3 следуют из утверждения 2 предложения 4.2.

Доказательство теоремы 5. Заметим, что в силу предложения 3.9 группы A и B $\mathscr{C}$-аппроксимируемы, а условие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности подгруппы H в этих группах равносильно требованию ее $\mathscr{C}$-отделимости. Из вложимости подгруппы H в $\mathscr{N}$-группу и предложения 3.10 следует, что указанная подгруппа является $\mathscr{C}$-ограниченной нильпотентной. Поэтому ее $\mathscr{C}$-отделимость в группах A и B необходима для $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы G в силу предложения 5.2. Как и выше, необходимость условия $\mathrm{Aut}_G(H) \in \mathscr{C}$ в утверждении 1 обеспечивается теоремой 1. Для проверки утверждения 3 и достаточности в утверждениях 1 и 2 можно воспользоваться в точности теми же рассуждениями, что и при доказательстве теорем 3 и 4, с той лишь разницей, что вместо предложения 3.8 нужно сослаться на предложение 3.9, а $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы H в группах A и B гарантируется условием теоремы 5 и сделанным в начале доказательства замечанием.

Доказательство следствия 3. Очевидно, что принадлежность свободных множителей A и B классу $\mathscr{N}$ из формулировки теоремы 5 и $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность в них же единичной подгруппы имеют место одновременно. Если группа G $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то согласно предложению 3.1 группы A и B также обладают данным свойством. Последнее утверждение равносильно $\mathscr{C}$-отделимости и влечет за собой $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность единичной подгруппы в указанных группах. Таким образом, включение $A, B \in \mathscr{N}$ оказывается выполненным при любых предположениях, содержащихся в утверждениях 1–3, и поскольку $\mathscr{N}$-группы не имеют $\mathscr{C}$-дефекта в силу предложения 3.9, следствие 3 вытекает из теоремы 5.

Доказательство следствия 4. Пусть символ Z обозначает один из свободных множителей A, B. Из предложения 3.10 следует, что класс $\mathscr{N}_0$ замкнут относительно взятия подгрупп и прямых произведений конечного числа сомножителей. Поэтому в силу предложения 3.2 группа Z обладает гомоморфизмом на $\mathscr{N}_0$-группу, инъективным на подгруппе H. Более того, так как любая конечно порожденная абелева подгруппа X группы Z имеет, очевидно, конечный ранг Гирша — Зайцева, то согласно тому же предложению найдется гомоморфизм группы Z на $\mathscr{N}_0$-группу, действующий инъективно на подгруппе X. Отсюда и из предложения 3.9 следует, что подгруппа X $\mathscr{C}$-отделима в группе Z, если она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе, и, стало быть, группа Z не имеет $\mathscr{C}$-дефекта. Таким образом, доказываемое утверждение вытекает из теоремы 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Уч. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.
2. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Commun. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.
3. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.
4. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. Т. 5. С. 6–10.
5. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости относительно сопряженности некоторых свободных конструкций групп корневыми классами конечных групп // Мат. заметки. 2015. Т. 97, № 5. С. 767–780.
6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.
7. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп Баумслага — Солитэра // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 700–709.
8. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

9. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

10. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of generalized Baumslag–Solitar groups // J. Algebra. 2021. V. 582. P. 1–25.

11. *Sokolov E. V.* Certain residual properties of HNN-extensions with central associated subgroups // Commun. Algebra. 2022. V. 50, N 3. P. 962–987.

12. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. V. 28, N 3. P. 543–552.

13. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 4. P. 651–660.

14. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.

15. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. II // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 207–228.

16. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Am. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.

17. *Higman G.* Amalgams of p-groups // J. Algebra. 1964. V. 1, N 3. P. 301–305.

18. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости конечными p-группами свободных произведений групп с нормальным объединением // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 1. С. 125–131.

19. *Wong K. B., Wong P. C.* Polygonal products of residually finite groups // Bull. Korean Math. Soc. 2007. V. 44, N 1. P. 61–71.

20. *Kim G., Lee Y., McCarron J.* Residual p-finiteness of certain generalized free products of nilpotent groups // Kyungpook Math. J. 2008. V. 48, N 3. P. 495–502.

21. *Туманова Е. А.* Некоторые условия аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальной объединенной подгруппой // Чебышевский сб. 2013. Т. 14, № 3. С. 134–141.

22. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

23. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.

24. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость некоторыми классами конечных групп обобщенного свободного произведения групп с нормальной объединенной подгруппой // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 249–264.

25. *Розов А. В.* Об аппроксимируемости конечными π-группами некоторых свободных произведений групп с центральными объединенными подгруппами // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2016. № 2. С. 37–44.

26. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами некоторых свободных произведений групп с нормальными объединенными подгруппами // Изв. вузов. Математика. 2020. № 3. С. 48–63.

27. *Sokolov E. V.* On the residual nilpotence of generalized free products of groups // J. Algebra. 2024. V. 657. P. 292–326.

28. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

29. *Молдаванский Д. И.* О некоторых подгруппах групп с одним определяющим соотношением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 6. С. 1370–1384.

30. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory. 2023. V. 26, N 4. P. 751–777.

31. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентных групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 6. С. 1381–1390.

32. *Dixon M. R., Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya.* On various rank conditions in infinite groups // Algebra Discr. Math. 2007. N 4. P. 23–43.

33. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

34. *Азаров Д. Н., Иванова Е. А.* К вопросу о нильпотентной аппроксимируемости свободного произведения с объединением локально нильпотентных групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 1999. Т. 2. С. 5–7.

35. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

36. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 26 ноября 2024 г.
После доработки 26 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Баранов Даниил Романович (ORCID 0009-0000-4964-7874),
Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
d.r.baranov.404@gmail.com, ev-sokolov@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.53

О МНОЖИТЕЛЯХ ВЕЙЛЯ ДЛЯ БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ П.В. ДЛЯ ВСПЛЕСКОВ СТРЁМБЕРГА

Г. Г. Геворкян

Аннотация. Получено необходимое и достаточное условие на возрастающую последовательность положительных чисел, чтобы она была множителем Вейля безусловной сходимости п.в. для периодических вейвлетов Стрёмберга.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.204

Ключевые слова: Всплеск Стрёмберга, безусловная сходимость п.в., множитель Вейля.

1. Введение

Напомним некоторые определения из теории ортогональных рядов (см. [1]).

Определение 1. Пусть $\psi = \{\psi_n : n = 1, 2, \dots\}$ — ортонормальная система в $L^2(0,1)$. Монотонно растущая последовательность положительных чисел ω_n называется *множителем Вейля п.в. безусловной сходимости* (*для* ψ), если любой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x)$$

с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n < \infty,$$

п.в. безусловно сходится.

Теорему Орлича о множителях Вейля п.в. безусловной сходимости (см. например, [2]) П. Л. Ульянов сформулировал и доказал в более простой, но эквивалентной форме в статье [3]: если последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n n \ln n} < \infty,$$

то последовательность $\{\omega_n \ln^2 n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля п.в. безусловной сходимости для любой ортонормированной системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке комитета науки и высшего образования МНОКС РА (грант No 25RG-1A195).

П. Л. Ульянов доказал (см. [3, 4]), что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля п.в. безусловной сходимости для системы Хаара тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} < \infty. \tag{1}$$

В статье [5] доказано, что последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля п.в. безусловной сходимости для системы Франклина тогда и только тогда, когда выполняется (1). В работе [6] получен аналогичный результат для систем Чисельского.

В настоящей работе доказана теорема о множителях Вейля п.в. безусловной сходимости для вейвлетов на $[0, 1]$.

Отметим также, что С. В. Бочкарев [7] и Наката [8] доказали необходимость условия (1) для того, чтобы последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ была множителем Вейля для системы Уолша. Аналогичный результат для тригонометрической системы недавно получил Г. А. Карагулян [9].

Будем использовать следующими обозначения:
- $\mathbb{Z}_+$ — множество натуральных чисел,
- $\mathbb{Z}_-$ — множество отрицательных целых чисел,
- C, c_1, c_2, … — постоянные,
- $\|f\|_2$ и $\|f\|_1$ — норма функции f в $L^2[0, 1]$ и $L^1[0, 1]$ соответственно,
- $]n[$ — целая часть от $\log_2 n$.

2. Определения и формулировка основного результата

Стрёмберг [10] определил систему сплайн-всплесков на $\mathbb{R}^n$. Здесь напомним определение только на $\mathbb{R}$.

Пусть $A_0 = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \frac{1}{2}\mathbb{Z}_-$ и $A_1 = A_0 \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$. A_0 разбивает $\mathbb{R}$ на интервалы $\{I_\sigma\}_{\sigma\in A_0}$ (σ — левая концевая точка I_σ). Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$ и S_0^m — подпространство функций $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap C^m(\mathbb{R})$, являющихся алгебраическими полиномами степени $m+1$ на каждом I_σ, $\sigma \in A_0$. Пусть S_1^m — соответствующее подпространство пространства $L^2(\mathbb{R})$ с заменой A_0 на A_1. Ясно, что S_0^m — подпространство S_1^m коразмерности 1 в S_1^m. Следовательно, из условий

$$\tau \in S_1^m,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \tau(x) f(x)\, dx = 0 \quad \text{для всех } f \in S_0^m, \tag{2}$$

$$\|\tau\|_{L^2} = 1 \tag{3}$$

с точностью до знака единственным образом определяется функция τ.

Стрёмберг [10] доказал, что система $\{f_{j,k}(x)\}_{(j,k)\in\mathbb{Z}^2}$, определяемая формулой

$$f_{j,k}(x) = 2^{j/2}\tau(2^j x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

образует полную ортонормированную систему в $L^2(\mathbb{R})$ и является безусловным базисом в $H^p(\mathbb{R})$, $p > \frac{1}{m+1}$.

Поскольку заданная формулой (4) система является ортонормированным базисом в $L^2(\mathbb{R})$, функция τ является ортогональным всплеском (см., например, [11, с. 44]). Стрёмберг [10] доказал следующее неравенство:

$$|\tau(x)| \le C r^{|x|}, \quad x \in \mathbb{R},\ r \in (0, 1),\ C \text{ — положительная постоянная}. \tag{5}$$

Из (5) и (2) следует, что τ — интегрируемая функция на $\mathbb{R}$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tau(t)\,dt=0$. В (5) постоянные r и C зависят от m. В настоящей статье m — произвольное, но фиксированное неотрицательное целое число. Поэтому будем опускать m и напишем C вместо C_m.

Стрёмберг [10] определил также систему $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ на $[0,1]$.

Положим

$$F_{j,k}(x)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}f_{j,k}(x-l),\quad j,k\in\mathbb{Z}. \tag{6}$$

Ясно, что

$$F_{j,k}(x)=F_{j,k}(x+1)\quad\text{и}\quad F_{j,k+2^j}(x)=F_{j,k}(x).$$

Для фиксированного $j\geq 0$ существуют 2^j различных функций $F_{j,k}(x)$, $k=0,1,\ldots,2^j-1$. Положим

$$F_n(x)=F_{j,k}(x),\ t_n:=\frac{2k-1}{2^{j+1}},\ \text{если}\ n=2^j+k,\ j\geq 0,k=0,\ldots,2^j-1, \tag{7}$$

и $F_0(x)=1$.

Теорема 1. *Неубывающая последовательность положительных чисел $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля п.в. безусловной сходимости для системы $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда выполняется* (1).

Из одного результата недавней работы А. Камонт и Г. Карагуляна следует (см. [12, следствие 1.6]), что если выполняется условие (1) и $\omega_n/\log(n+1)$ возрастающая, то последовательность $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ является множителем Вейля п.в. безусловной сходимости для системы $\{F_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$. В силу теоремы 1 условие возрастания последовательности $\omega_n/\log(n+1)$ не является необходимым.

3. Вспомогательные леммы

Обозначим

$$g(x):=\int\limits_x^{\infty}\tau(t)\,dt,\quad x\in\mathbb{R}. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}g(x)=0.$$

Поэтому существует хотя бы одна точка η со свойством

$$|g(\eta)|=\max_{x\in\mathbb{R}}|g(x)|=:d. \tag{9}$$

Если таких точек более одной, обозначим через η одну из ближайших к 0. Не ограничивая общности, можем предположить, что $g(\eta)>0$.

Лемма 1. *Существуют такие положительные числа j_0, ν и c_1, что для любого $n=2^j+k$, $j\geq j_0$ и $k=\nu,\nu+1,\ldots,2^j-\nu$, существуют точки η_n и $\xi_n\in[\eta_n,1]$, удовлетворяющие условиям*

(a) $\int\limits_{\eta_n}^{x}F_n(t)\,dt\geq c_1\|F_n\|_1$ *для любого $x\in[\xi_n,1]$,*

(b) $|\eta_n-t_n|\leq\nu 2^{-j}$,

(c) $\xi_n - \eta_n \le \nu 2^{-j}$.

Доказательство. Из (4)–(6) следует неравенство

$$\|F_n\|_1 \le c_2 2^{-\frac{j}{2}}, \quad \text{если } n = 2^j + k. \tag{10}$$

Существует такое $\xi > |\eta|$, что

$$\int\limits_{|t|>\xi} |\tau(t)|\,dt < \frac{d}{100}. \tag{11}$$

Пусть ν — натуральное число, для которого

$$\eta, \xi \in [-\nu + 1, \nu - 1]. \tag{12}$$

Пусть $2^{j_0+1} \le \nu < 2^{j_0+2}$ и $n = 2^j + k$, $j \ge j_0$, $k = \nu, \nu+1, \ldots, 2^j - \nu$. Обозначим

$$\eta_n = 2^{-j}(\eta + k), \quad \xi_n = 2^{-j}(\xi + k). \tag{13}$$

Проверим, что η_n и ξ_n, определяемые формулами (13), удовлетворяют условиям (a)–(c) леммы. Действительно, (b) и (c) сразу следуют из (12), (13), (7) и если n удовлетворяет условиям леммы и $x \in [\xi_n, 1]$, то (последовательно применяются (4), (6), (8), (9), (11), (11))

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\eta_n}^{x} F_n(t)\,dt &= 2^{j/2} \sum_{l\in\mathbb{Z}} \int\limits_{2^{-j}(\eta+k)}^{x} \tau(2^j(t-l)-k)\,dt \\
&= 2^{j/2} \left[\int\limits_{2^{-j}(\eta+k)}^{x} \tau(2^j t - k)\,dt + \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\ne 0} \int\limits_{2^{-j}(\eta+k)}^{x} \tau(2^j(t-l)-k)\,dt \right] \\
&\ge 2^{-j/2} \left[\int\limits_{\eta}^{2^j x - k} \tau(t)\,dt - \sum_{l\in\mathbb{Z}, l\ne 0} \int\limits_{-2^j l - k}^{-2^j l} |\tau(t)|\,dt \right] \\
&\ge 2^{-j/2} \left[\int\limits_{\eta}^{\xi} \tau(t)\,dt - \int\limits_{\xi}^{2^j - k} |\tau(t)|\,dt - \int\limits_{|t|>\xi} |\tau(t)|\,dt \right] \\
&\ge 2^{-j/2} \left[\int\limits_{\eta}^{\xi} \tau(t)\,dt - 2 \int\limits_{|t|>\xi} |\tau(t)|\,dt \right] > 2^{-j/2} \cdot 0.98d > c_1 \|F_n\|_1.
\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Следующая лемма является аналогом леммы 2 из [6] и доказывается почти дословным повторением.

Лемма 2. *Существуют такие положительные постоянные c_3, c_4, что для любых натуральных чисел $j_2 > j_1 > j_0$ и любых $a_n = b_j \ge 0$, $2^j < n \le 2^j$ и $j_1 \le j \le j_2$, существует перестановка P_σ полинома*

$$P(x) := \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n F_n(x),$$

удовлетворяющая неравенству

$$\operatorname{mes}\left\{x \in J_i : \delta(P_\sigma(x)) \geq c_3 \sum_{j=j_1}^{j_2} b_j 2^{j/2}\right\} > c_4 \operatorname{mes}(J_i), \tag{14}$$

где

$$J_i := \left[\frac{4\nu i}{2^{j_1}}, \frac{4\nu(i+1)}{2^{j_1}}\right], \quad i = 0, 1, \dots,]2^{j_1-2}\nu^{-1}[-1,$$

и $\delta(P_\sigma(x))$ — *колебание частичных сумм переставленного полинома* $P_\sigma(x)$ *в точке* x.

Доказательство. Из (4)–(6) следует, что

$$\sum_{n=2^j+1}^{2^{j+1}} |b_j F_n(x)| \leq b_j \sum_{k=0}^{2^j-1} |F_{j,k}(x)|$$

$$\leq b_j \sum_{k=0}^{2^j-1} \Big|\sum_{l\in\mathbb{Z}} f_{jk}(x-l)\Big| \leq 2^{j/2} b_j \sum_{k=0}^{2^j-1} \sum_{l\in\mathbb{Z}} |\tau(2^j x - 2^j l - k)|$$

$$\leq C b_j 2^{j/2} \sum_{k=1}^{2^j} \sum_{l\in\mathbb{Z}} r^{|2^j x - 2^j l - k|} < C 2^{j/2} b_j \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{2^j x - m} \leq c_5 b_j 2^{j/2}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} |a_n F_n(x)| \leq c_5 \sum_{j=j_1}^{j_2} b_j 2^{j/2}. \tag{15}$$

Обозначим

$$\widetilde{J}_i = \left[\frac{4\nu i + \nu}{2^{j_1}}, \frac{4\nu i + \nu + 1}{2^{j_1}}\right].$$

Заметим, что если $t_n \in \widetilde{J}_i$, то $\xi_n, \eta_n \in J_i$ (см. лемму 1) и

$$\int_{\eta_n}^{x} a_n F_n(t)\,dt \geq c_1 b_j 2^{-j/2}, \quad \text{если } x \in [\xi_n, 1] \text{ и } 2^j \leq n \leq 2^{j+1}-1. \tag{16}$$

Сначала полином $P(x)$ разделим на две части:

$$P(x) \equiv \sum_i \sum_{t_n \in \widetilde{J}_i} a_n F_n(x) + \sum_i \sum_{t_n \notin \widetilde{J}_i} a_n F_n(x) =: P_1(x) + P_2(x).$$

Далее слагаемые в P_1 переставим так, чтобы η_n в новой нумерации были возрастающими. После слагаемых полинома $P_1(x)$ напишем слагаемые полинома $P_2(x)$ в любом порядке. Перестановки полиномов $P_1(x)$ и $P(x)$ обозначим через $P_{\sigma,1}(x)$ и $P_\sigma(x)$, а колебание их частичных сумм — через $\delta(P_{\sigma,1}(x))$ и $\delta(P_\sigma(x))$ соответственно. Очевидно, что если $x \in J_i$, то

$$\delta(P_\sigma(x)) \geq \delta(P_{\sigma,1}(x)) \geq \sum_{t_n \in \widetilde{J}_i : \eta_n < x} a_n F_n(x). \tag{17}$$

Из (17) следует, что

$$\int_{J_i} |\delta(P_\sigma)(x)|\,dx \geq \sum_{t_n \in \widetilde{J}_i} \int_{\eta_n}^{\frac{4\nu(i+1)}{2^{j_1}}} a_n F_n(x)\,dx.$$

Из (16) и (17) имеем

$$\int\limits_{J_i} |\delta(P_\sigma(x))|\,dx \geq c_6 \sum_{j=j_1}^{j_2} \sum_{t_n\in\widetilde{J}_i,]n[=j} b_j 2^{-j/2} = c_6 \sum_{j=j_1}^{j_2} b_j \sum_{t_n\in\widetilde{J}_i,]n[=j} 2^{-j/2}. \tag{18}$$

Учитывая, что количество натуральных n, удовлетворяющих условиям $]n[= j$ и $t_n \in \widetilde{J}_i$, равно 2^{j-j_1} и ν — фиксированное число, из (18) получим

$$\int\limits_{J_i} |\delta(P_\sigma(x))|\,dx \geq c_7 \operatorname{mes}(J_i) \sum_{j=j_1}^{j_2} b_j 2^{j/2}. \tag{19}$$

Из (15) и (19) следует существование положительных чисел c_3 и c_4, удовлетворяющих условию (14). Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1

Пусть ω_n удовлетворяет условию (1). Тогда (см. (10))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^1 |a_n F_n(x)|\,dx \leq c_8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\sqrt{n}} = c_8 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\sqrt{\omega_n}\frac{1}{\sqrt{n\omega_n}}$$
$$\leq c_8 \left\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2\omega_n\right\}^{\frac12} \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n}\right\}^{\frac12} < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n F_n(x)| < \infty$$

п.в. и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n F_n(x)$ п.в. безусловно сходятся.

Докажем необходимость условия (1). Если

$$\omega_n \uparrow \infty \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} = \infty,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{2^j}} \geq \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \sum_{k=0}^{2^j-1} \frac{1}{\omega_{2^j+k}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n} = \infty.$$

Следовательно, найдется такая монотонная последовательность положительных чисел q_j, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{2^{j+1}} q_j} = \infty \tag{20}$$

и

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{2^{j+1}} q_j^2} < \infty. \tag{21}$$

Обозначим

$$b_j = \frac{1}{\omega_{2^{j+1}} q_j 2^{j/2}}. \tag{22}$$

Пусть $a_n = b_j$, если $2^j \le n < 2^{j+1}$, $j = 1, 2, \dots$. Можем считать также, что $2^{j/2} b_j < 1$. Из (22) и (20) следует существование возрастающей последовательности j_p со свойством

$$1 \le \sum_{j=j_p}^{j_{p+1}-1} 2^{j/2} b_j < 2.$$

Из (22) и (21) следует, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n^2 \omega_n = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n^2 \omega_n = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{2^{j+1}} q_j^2} < \infty.$$

Применяя лемму 2, найдем перестановку полинома

$$P^{(p)}(x) = \sum_{j=j_p}^{j_{p+1}-1} \sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1} a_n F_n(x),$$

удовлетворяющую неравенству

$$\operatorname{mes}\bigl\{x \in J_i^{(p)} : \delta\bigl(P_\sigma^{(p)}(x)\bigr) \ge c_3\bigr\} > c_4 \operatorname{mes}\bigl(J_i^{(p)}\bigr), \tag{23}$$

где $J_i^{(p)} := \bigl[\frac{4\nu i}{2^{j_p}}, \frac{4\nu(i+1)}{2^{j_p}}\bigr]$, $i = 0, 1, \dots,]2^{j_p-2}\nu^{-1}[-1$, а $\delta\bigl(P_\sigma^{(p)}(x)\bigr)$ — колебание частичных сумм переставленного полинома $P_\sigma^{(p)}(x)$ в точке x.

Ясно, что ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} P_\sigma^{(p)}(x) \tag{24}$$

является перестановкой ряда $\sum\limits_{n=2^{j_1}}^{\infty} a_n F_n(x)$. Докажем, что ряд (24) расходится п.в.

Допустим обратное: ряд (24) сходится на множестве положительной меры. Тогда он равномерно сходится на некотором множестве E с положительной мерой. Следовательно, для достаточно больших p выполняется

$$\delta\bigl(P_\sigma^{(p)}(x)\bigr) < c_3, \quad x \in E. \tag{25}$$

Известно, что почти все точки множества с положительной мерой являются точками плотности этого множества. Поэтому существуют достаточно большие p и i такие, что

$$\operatorname{mes}\bigl\{x \in J_i^{(p)} \cap E\bigr\} > (1 - c_4) \operatorname{mes}\bigl(J_i^{(p)}\bigr). \tag{26}$$

Неравенство (26) противоречит (25). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
2. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 1958.
3. *Ульянов П. Л.* О множителях Вейля для безусловной сходимости // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 1. С. 39–62.
4. *Ульянов П. Л.* Расходящиеся ряды Фурье // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 61–142.
5. *Геворкян Г. Г.* О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Франклина // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 6. С. 789–797.
6. *Геворкян Г. Г.* О множителях Вейля для безусловной сходимости рядов по системе Чисельского // Мат. заметки. 2024. Т. 116, № 5. С. 707–713.

7. *Бочкарев С. В.* Перестановки рядов Фурье — Уолша // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1979. Т. 43, № 5. С. 1025–1041.

8. *Nakata S.* On the unconditional convergence of Walsh series // Anal. Math. 1979. V. 6, N 5. P. 201–205.

9. *Карагулян Г. А.* О множителях Вейля переставленной тригонометрической системы // Мат. сб. 2020. Т. 211, № 12. С. 49–82.

10. *Strömberg J. O.* A modified Franklin system and higher-order spline systems on $\mathbb{R}^n$ as unconditional bases for Hardy spaces // Harmonic analysis. Conf. in Honor A. Zygmund, Chicago 1981. V. 2. P. 475–494.

11. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: Физматлит, 2006.

12. *Kamont A., Karagulyan G. A.* On wavelet polynomials and Weyl multipliers // J. Anal. Math. 2023. V. 150, N 2. P. 529–549.

Поступила в редакцию 21 ноября 2024 г.
После доработки 2 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Геворкян Гегам Григорьевич
Ереванский государственный университет,
ул. Алека Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
`ggg@ysu.am`

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.98

ЛАТЕРАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ И ГОМОМОРФИЗМЫ БАНАХОВЫХ РАССЛОЕНИЙ

А. Е. Гутман, А. В. Коптев

Аннотация. Введены и исследованы понятия инъективной и латеральной сходимости в топологическом пространстве. Получен ряд результатов о существовании гомоморфизмов непрерывных банаховых расслоений, а также непрерывных и слабо непрерывных вектор-функций и сечений, принимающих наперед заданные значения в точках инъективно и латерально сходящихся последовательностей.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.205

Ключевые слова: топологическое пространство, отделимость, сходящаяся последовательность, непрерывное банахово расслоение, гомоморфизм, сечение.

Александру Александровичу Толстоногову
в связи с его 85-летием

Говоря о непрерывных банаховых расслоениях (НБР), используем термины и обозначения из [1; 2, 2.4]. В общей топологии следуем терминологии монографий [3, 4]. В частности, понятия регулярного и вполне регулярного топологического пространства включают отделимость. Под окрестностью точки понимаем множество, которое включает какое-либо открытое подмножество, содержащее данную точку. Символ «$\subset$» обозначает нестрогое включение.

Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над топологическим пространством Q, символом $Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ обозначается множество всех гомоморфизмов из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. (В [1, 2] это множество обозначается символом $Hom_Q(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, а его элементы именуются в [1] Q-гомоморфизмами.) Согласно теореме [1, 2.4.4] $Hom(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ совпадает с множеством всех отображений H, которые сопоставляют точкам $q \in Q$ ограниченные линейные операторы $H(q) \in B(\mathscr{X}(q),\mathscr{Y}(q))$, имеют локально ограниченную поточечную норму $\|\!|H|\!\|\colon q \in Q \mapsto \|H(q)\|$ и удовлетворяют условию $H \otimes u \in C(Q,\mathscr{Y})$ для всех $u \in C(Q,\mathscr{X})$, где $H \otimes u\colon q \in Q \mapsto H(q)u(q) \in \mathscr{Y}(q)$. Символом $\mathscr{X}^*$ обозначается множество $Hom(\mathscr{X}, Q \times \{\mathbb{R}\})$ всех гомоморфизмов, действующих из $\mathscr{X}$ в постоянное НБР над Q со слоем $\mathbb{R}$.

Для каждой точки $q \in Q$ рассмотрим подпространство $\mathscr{X}^*(q) := \{H(q) : H \in \mathscr{X}^*\}$ сопряженного банахова пространства $\mathscr{X}(q)' = B(\mathscr{X}(q),\mathbb{R})$. В теории НБР остается открытым вопрос о представительности $\mathscr{X}^*(q)$ в $\mathscr{X}(q)'$. Так, имеются разнообразные широкие классы расслоений $\mathscr{X}$ (см., например, [5, 3.4.4]), для которых в каждой точке $q \in Q$ пространство $\mathscr{X}^*(q)$ является нормирующим, т. е. удовлетворяет условию

$$\|x\| = \sup\{|\langle x \,|\, y\rangle| : y \in \mathscr{X}^*(q),\ \|y\| \leqslant 1\}, \quad x \in \mathscr{X}(q),$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0004).

но пока не обнаружен ни один случай нарушения этого условия. Более того, находится под вопросом возможность равенства $\mathscr{X}^* = \{0\}$ для ненулевого расслоения $\mathscr{X}$, в то время как для всех известных на данный момент расслоений справедливо соотношение

$$\|x\| = \sup\{|H(q)x| : H \in \mathscr{X}^*,\ \|H\|_\infty \leqslant 1\}, \quad x \in \mathscr{X}(q).$$

В этой связи сохраняют актуальность общие методы построения гомоморфизмов НБР, обладающих теми или иными аппроксимирующими свойствами. К их числу относятся полученные в этой статье результаты о существовании гомоморфизмов H, принимающих наперед заданные значения $H(q_n)$ и $H(q)$ для данной сходящейся последовательности $q_n \to q$.

Последовательность точек $q_n \in Q$ условимся называть *инъективно сходящейся* к точке $q \in Q$, если $q_n \to q$, $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$ и $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. *Покрытием последовательности* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ назовем произвольную последовательность окрестностей U_n точек q_n. Покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *латерально прикасающимся* к точке q, если

$$\operatorname{cl} U_m \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n\neq m} U_n = \varnothing \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

и, кроме того, q является собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$.

В регулярном пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает покрытие, латерально прикасающееся к q (см. предложение 1.5). Если же пространство является вполне регулярным, то инъективная сходимость $q_n \to q$ позволяет конструировать непрерывные вектор-функции, сечения и гомоморфизмы, принимающие наперед заданные значения в точках q_n и q. Один из результатов в этом направлении — предложение 2.6 — утверждает наличие гомоморфизма $H \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающего значения $H(q_n) = H_n(q_n)$ для любой наперед заданной последовательности гомоморфизмов $H_n \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, удовлетворяющей условию $\|H_n\|_\infty \to 0$.

Требование равномерной сходимости $\|H_n\|_\infty \to 0$ является довольно ограничительным. В рассматриваемом контексте более естественно выглядит условие, аналогичное поточечной сходимости: $\|H_n(q_n)u(q_n)\| \to 0$ для достаточно представительного набора сечений $u \in C(Q, \mathscr{X})$. Существование искомого гомоморфизма H в этом случае удается обеспечить за счет более аккуратного покрытия последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (см. теорему 2.10) — а именно, такого покрытия $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, удовлетворяющего условию (1), что q является *единственной* собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$. Покрытие с таким свойством называется *латерально сходящимся* к точке q.

В упомянутой выше теореме 2.10 наличие латерально сходящегося покрытия является существенным требованием. Пример 2.11 показывает, что одной лишь инъективной сходимости $q_n \to q$ недостаточно для существования искомого гомоморфизма H — даже в случае компактного пространства Q.

Параграф 1 посвящен исследованию латеральных покрытий сходящихся последовательностей, а в параграфе 2 полученные результаты применяются для построения непрерывных вектор-функций, сечений и гомоморфизмов, принимающих наперед заданные значения на последовательностях, допускающих латеральные покрытия.

§ 1. Латеральная сходимость

Всюду ниже Q — произвольное топологическое пространство.

1.1. Определение. Условимся называть множества $U, V \subset Q$ *дизъюнктными* и писать $U \perp V$, если $\operatorname{cl} U \cap \operatorname{cl} V = \varnothing$.

Будем говорить, что последовательность множеств $U_n \subset Q$

(a) *дизъюнктна*, если ее члены попарно дизъюнктны: $U_m \perp U_n$ при $m \neq n$;

(b) *латеральна*, если $U_m \perp \bigcup\limits_{n \neq m} U_n$ для всех $m \in \mathbb{N}$ или, что то же самое, $U_m \perp \bigcup\limits_{n > m} U_n$ для всех $m \in \mathbb{N}$;

(c) *латерально прикасается* к точке $q \in Q$, если эта последовательность латеральна и, кроме того, q является собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$, т. е.

$$q \in \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n;$$

(d) *латерально сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность латеральна и, кроме того, q является единственной собственной предельной точкой объединения $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$, т. е.

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\};$$

(e) *стягивается* к точке $q \in Q$, если для любой окрестности V точки q найдется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $U_n \subset V$ для всех $n \geqslant m$ (т. е. фильтр, порожденный хвостами $\bigcup\limits_{n \geqslant m} U_n$, $m \in \mathbb{N}$, сходится к q).

1.2. Лемма. *Пусть $U_n \subset Q$ $(n \in \mathbb{N})$ и $q \in Q$. Положим $\mathscr{U}_m := \bigcup\limits_{n \geqslant m} \operatorname{cl} U_n$ $(m \in \mathbb{N})$. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *(U_n) латерально сходится к q, т. е. (U_n) латеральна и $\operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 = \{q\}$;*

(b) *(U_n) дизъюнктна и $\operatorname{cl} \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$;*

(c) *(U_n) дизъюнктна, $q \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1$ и $(\forall\, p \in Q \setminus \{q\})(\exists\, m \in \mathbb{N})(p \notin \operatorname{cl} \mathscr{U}_m)$;*

(d) *$q \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1$ и $(\forall\, p \in Q \setminus \{q\})(\exists\, m \in \mathbb{N})\big(p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n \neq m} U_n\big)$.*

$\vartriangleleft$ (a)$\Rightarrow$(b). Достаточно показать равенство $\operatorname{cl} \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ для $m \geqslant 2$. Для всех $i \in \{1, \dots, m-1\}$ имеем

$$\operatorname{cl} U_i \cap \operatorname{cl} \mathscr{U}_m \subset \operatorname{cl} U_i \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq i} U_n = \varnothing;$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname{cl} \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m &= (\operatorname{cl} \mathscr{U}_m \setminus (\operatorname{cl} U_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= ((\operatorname{cl} U_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{m-1} \cup \operatorname{cl} \mathscr{U}_m) \setminus (\operatorname{cl} U_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= (\operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus (\operatorname{cl} U_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{m-1})) \setminus \mathscr{U}_m \\
&= \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 = \{q\}.
\end{aligned}$$

(b)$\Rightarrow$(c). Пусть $p \in Q \setminus \{q\}$. Поскольку множества $\operatorname{cl} U_n$ попарно не пересекаются, найдется такой номер m, что $p \notin \mathscr{U}_m$. Тогда из равенства $\operatorname{cl} \mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m = \{q\}$ следует $p \notin \operatorname{cl} \mathscr{U}_m$.

(c)$\Rightarrow$(d). Пусть $p \in Q \setminus \{q\}$. Рассмотрим наименьший номер $k \in \mathbb{N}$, для которого $p \notin \operatorname{cl} \mathscr{U}_k$. Если $k \leqslant 2$, то доказывать нечего. Пусть $k > 2$. Тогда

$$p \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_{k-1} = \operatorname{cl} U_{k-1} \cup \operatorname{cl} \mathscr{U}_k,$$

а значит, $p \in \operatorname{cl} U_{k-1}$. Поскольку множества $\operatorname{cl} U_1, \dots, \operatorname{cl} U_{k-2}$ не пересекаются с $\operatorname{cl} U_{k-1}$, получаем

$$p \notin \operatorname{cl} U_1 \cup \dots \cup \operatorname{cl} U_{k-2} \cup \operatorname{cl} \mathscr{U}_k = \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq k-1} U_n.$$

(d)⇒(a). Согласно условию (d) для любой точки $p \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \{q\}$ имеется такой номер m, что

$$p \in \operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n = \operatorname{cl} U_m \cup \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq m} U_n = \operatorname{cl} U_m \subset \mathscr{U}_1,$$

а значит, $\operatorname{cl} \mathscr{U}_1 \setminus \mathscr{U}_1 \subset \{q\}$.

Чтобы обосновать равенство

$$\operatorname{cl} U_k \cap \operatorname{cl} \bigcup_{n \neq k} U_n = \varnothing, \quad k \in \mathbb{N},$$

достаточно заметить, что для любой точки $p \in \operatorname{cl} U_k$ фигурирующий в условии (d) номер m не может отличаться от k. ▷

1.3. Определение. *Покрытием последовательности* точек $q_n \in Q$ условимся называть произвольную последовательность множеств $U_n \subset Q$, каждое из которых является окрестностью соответствующей точки q_n. Покрытие, состоящее из открытых (замкнутых) окрестностей, назовем *открытым* (*замкнутым*) *покрытием*.

1.4. Определение. Будем говорить, что последовательность точек $q_n \in Q$

(a) *инъективна*, если $q_n \neq q_m$ при $n \neq m$;

(b) *инъективно сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность сходится к q, является инъективной и, кроме того, $q_n \neq q$ для всех $n \in \mathbb{N}$;

(c) *латерально сходится* к точке $q \in Q$, если эта последовательность сходится к q и допускает покрытие, латерально сходящееся к q.

1.5. Предложение. *В регулярном топологическом пространстве Q всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает покрытие, латерально прикасающееся к точке q.*

◁ Из инъективной сходимости $q_n \to q$ и хаусдорфовости Q следует, что

$$q_n \notin \operatorname{cl}\{q_m : m > n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Определим открытые множества U_n и V_n $(n \in \mathbb{N})$ посредством следующей рекурсивной процедуры: положим $V_0 := Q$ и, привлекая регулярность Q, для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем открытые подмножества $U_n, V_n \subset V_{n-1}$ так, чтобы

$$q_n \in U_n, \quad \operatorname{cl}\{q_m : m > n\} \subset V_n, \quad U_n \perp V_n.$$

Тогда $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — искомое покрытие, поскольку

$$\operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} \bigcup_{m>n} U_n \subset \operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} V_n = \varnothing \text{ для всех } n \in \mathbb{N};$$

$$q \in \operatorname{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n;$$

$$q \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl}\{q_m : m > n\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (Q \setminus \operatorname{cl} U_n) = Q \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n. \ ▷$$

1.6. Предложение. (a) *Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — два покрытия последовательности точек $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, причем $V_n \subset \operatorname{cl} U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является дизъюнктным (латеральным, латерально прикасающимся к q, латерально сходящимся к q), то тем же свойством обладает $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

(b) *Если последовательность точек допускает дизъюнктное (латеральное, латерально прикасающееся к q, латерально сходящееся к q) покрытие, то она допускает открытое покрытие и замкнутое покрытие, обладающие тем же свойством.*

(c) *Если последовательность точек латерально сходится к q, то она инъективно сходится к q.*

(d) *Если последовательность точек латерально сходится к q, то точка q служит единственным пределом этой последовательности.*

1.7. Пример. В хаусдорфовом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность изолированных точек q_n сходится латерально. Соответствующим сходящимся латеральным покрытием служит последовательность синглетонов $\{q_n\}$. В частности, в компактном ординале $\omega + 1$, где ω — первый бесконечный ординал, последовательность $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к ω.

1.8. Предложение. (a) *В метризуемом пространстве совпадают классы инъективно сходящихся и латерально сходящихся последовательностей.*

(b) *Если в метрическом пространстве (Q, d) последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к точке q, то на роль латерально сходящегося к q покрытия последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ подходит последовательность замкнутых шаров $B(q_n, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n > 0$, которые попарно не пересекаются и не содержат точку q. Это условие выполняется, например, в случае, когда*

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2} \inf_{m\neq n} d(q_m, q_n) \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

◁ Пусть $q_n \to q$ в метрическом пространстве (Q, d), и пусть $B(q_n, \varepsilon_n)$ — попарно непересекающиеся замкнутые шары, не содержащие точку q. Согласно условию (c) леммы 1.2 достаточно рассмотреть точку $p \in Q\backslash\{q\}$ и найти номер m, для которого $p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} B(q_n, \varepsilon_n)$. Положим $\varepsilon := d(q, p)$ и рассмотрим номер m, для которого $q_n \in B(q, \frac{1}{3}\varepsilon)$ при $n \geqslant m$. Поскольку $q \notin B(q_n, \varepsilon_n)$, при $n \geqslant m$ имеем $\varepsilon_n < \frac{1}{3}\varepsilon$ и поэтому $B(q_n, \varepsilon_n) \subset B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$, так как из неравенства $d(r, q_n) \leqslant \varepsilon_n$ следует

$$d(r, q) \leqslant d(r, q_n) + d(q_n, q) \leqslant \varepsilon_n + \frac{1}{3}\varepsilon < \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Следовательно, $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} B(q_n, \varepsilon_n) \subset B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$, в то время как $p \notin B(q, \frac{2}{3}\varepsilon)$.

Далее, в случае (2) шары $B(q_n, \varepsilon_n)$ попарно не пересекаются, поскольку при существовании точки $p \in B(q_m, \varepsilon_m) \cap B(q_n, \varepsilon_n)$, $m \neq n$, были бы выполнены противоречивые соотношения

$$d(q_m, q_n) \leqslant d(q_m, p) + d(p, q_n) \leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_n < \frac{1}{2} d(q_m, q_n) + \frac{1}{2} d(q_m, q_n) = d(q_m, q_n).$$

Кроме того, из (2) следует $q \notin B(q_n, \varepsilon_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, так как $d(q_m, q_n) > 2\varepsilon_n$ при $m > n$ и поэтому

$$d(q, q_n) = \lim_{m\to\infty} d(q_m, q_n) \geqslant 2\varepsilon_n > \varepsilon_n.$$

Остается заметить, что из инъективной сходимости $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ вытекает неравенство $\inf\limits_{m\neq n} d(q_m, q_n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. ▷

1.9. Пример. Существует компактное хаусдорфово пространство, содержащее последовательность, которая сходится инъективно, он не латерально.

$\triangleleft$ Рассмотрим декартово произведение $Q = (\omega + 1) \times (\omega_1 + 1)$ компактных ординалов $\omega + 1$ и $\omega_1 + 1$, где ω — первый бесконечный ординал, ω_1 — первый несчетный ординал. Тогда в пространстве Q последовательность $((n, \omega_1))_{n\in\mathbb{N}}$, инъективно сходящаяся к (ω, ω_1), не сходится латерально.

В самом деле, рассмотрим произвольное покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $((n, \omega_1))_{n\in\mathbb{N}}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ в пространстве $\omega_1 + 1$ имеется такая окрестность V_n точки ω_1, что $\{n\} \times V_n \subset U_n$. Поскольку в $\omega_1 + 1$ пересечение $V = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ является окрестностью ω_1, существует отличный от ω_1 элемент $\alpha \in V$. Тогда для всех $m \in \mathbb{N}$

$$(\omega, \omega_1) \neq (\omega, \alpha) = \lim_{n\to\infty} (n, \alpha) \in \operatorname{cl} \bigcup_{n\geqslant m} \{n\} \times V \subset \operatorname{cl} \bigcup_{n\geqslant m} U_n,$$

а значит, согласно лемме 1.2(c) покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не сходится к (ω, ω_1). $\triangleright$

1.10. Отметим еще несколько простых свойств латерально сходящихся последовательностей.

Предложение. *Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q в пространстве Q.*

(a) *Всякая подпоследовательность $(q_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q.*

(b) *Если Q_0 — топологическое подпространство Q, содержащее $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и q, то $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q в Q_0.*

(c) *Пусть τ — топология на множестве Q, более сильная, чем топология пространства Q. Если последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится в τ, то она латерально сходится к q в τ.*

(d) *Если $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — латерально сходящееся покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $p_n \in \operatorname{cl} U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\operatorname{cl}\{p_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \{p_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \{q\}$. В частности, если $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится, то $p_n \to q$.*

1.11. Теорема. *Для латеральной сходимости $q_n \to q$ в пространстве Q необходима, а если Q регулярно, то и достаточна, конъюнкция следующих двух условий:*

(a) *$q_n \to q$ инъективно;*

(b) *существуют открытое множество U, содержащее $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, и последовательность $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ окрестностей точки q такие, что*

$$\operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\}. \tag{3}$$

$\triangleleft$ Необходимость. Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — открытое покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально сходящееся к q (см. предложение 1.6(b)). Инъективная сходимость $q_n \to q$ отмечена в предложении 1.6(c). Далее, поскольку $q \notin \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n$, для каждого $n \in \mathbb{N}$ множество $V_n := Q \setminus \operatorname{cl} U_n$ служит окрестностью точки q. Полагая $U := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n$, заключаем, что

$$\begin{aligned} \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n &= \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus \operatorname{cl} U_n) = \operatorname{cl} U \cap \Big(Q \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n\Big) \\ &= \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}. \end{aligned}$$

Достаточность. Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к q, и пусть U и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяют условию (b). Не нарушая общности, потребуем $V_1 = Q$. Ввиду регулярности пространства Q для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое открытое множество G_n, что $q \in G_n$ и $\operatorname{cl} G_n \subset V_n$, причем $G_1 = Q$. Заменяя G_n пересечением $G_1 \cap \dots \cap G_n$, будем считать, что $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$.

Поскольку

$$U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \subset \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{q\},$$

любой отличный от q элемент U принадлежит лишь конечному числу множеств G_m. В частности, для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно рассмотреть номер

$$m(n) = \max\{m \in \mathbb{N} : q_n \in G_m\}. \tag{4}$$

Используя регулярность пространства Q, которая гарантирует отделимость каждой точки q_n от замкнутого множества $\{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \cup \{q\}$, и применяя рекурсию, несложно определить две последовательности открытых множеств U_n и W_n, удовлетворяющих для всех $n \in \mathbb{N}$ следующим условиям:

$$\begin{aligned} &\operatorname{cl} U_n \cap \operatorname{cl} W_n = \varnothing; \\ &q_n \in U_n \subset U \cap G_{m(n)} \cap W_{n-1}; \\ &\{q_{n+1}, q_{n+2}, \dots\} \cup \{q\} \subset W_n \subset W_{n-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $W_0 = Q$. Покажем, что последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к точке q, проверив условие (c) леммы 1.2. Из соотношений (5) и сходимости $q_n \to q$ видно, что последовательность $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ дизъюнктна и

$$q \in \operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n.$$

Далее, рассмотрим произвольную точку $p \neq q$. Если $p \notin \operatorname{cl} U$, то $p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant 1} U_n$, поскольку $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} U_n \subset U$. Пусть теперь $p \in \operatorname{cl} U \setminus \{q\}$. Из равенства (3) и включений $\operatorname{cl} G_n \subset V_n$ следует, что $p \notin \operatorname{cl} G_k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Поскольку $q_n \to q \in G_k$, имеется такой номер $m \in \mathbb{N}$, что $g_n \in G_k$ при $n \geqslant m$. Согласно (4) из $g_n \in G_k$ следует $m(n) \geqslant k$, а значит, $G_k \supset G_{m(n)} \supset U_n$ при $n \geqslant m$. Таким образом, $p \notin \operatorname{cl} G_k \supset \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\geqslant m} U_n$. ▷

1.12. Следствие. *Для латеральной сходимости $q_n \to q$ в пространстве Q необходима, а если Q регулярно, то и достаточна, конъюнкция следующих двух условий:*

(a) *последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективна и $q_n \to q$;*

(b) *$(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускает такое покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что*

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}.$$

◁ В пояснении нуждается лишь достаточность. Пусть инъективная последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к q и ее покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию (b). Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $q \notin \operatorname{cl} U_n$, откуда $q_n \neq q$ (и тем самым сходимость $q_n \to q$ инъективна) и $V_n := Q \setminus \operatorname{cl} U_n$ —

окрестность точки q. Кроме того, открытое множество $U := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} U_n$ содержит $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и удовлетворяет следующим условиям:

$$q \in \operatorname{cl} U \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{int} U_n\Big) \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus \operatorname{cl} U_n)$$
$$\subset \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \cap \Big(Q \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n\Big) = \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}.$$

Остается привлечь теорему 1.11. ▷

1.13. Предложение. *Пусть в регулярном топологическом пространстве последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ инъективно сходится к точке q и допускает покрытие, стягивающееся к q. Тогда $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q.*

◁ Рассмотрим стягивающееся к q покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Не нарушая общности, можно считать, что $q \notin \operatorname{cl} U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда, с одной стороны,

$$q \in \operatorname{cl}\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n \subset \Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n.$$

С другой стороны, если V — произвольная окрестность точки q и $U_n \subset V$ при $n > m$, то

$$\Big(\operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n \subset \Big(\bigcup_{n\leqslant m} \operatorname{cl} U_n \cup \operatorname{cl} \bigcup_{n>m} U_n\Big) \setminus \bigcup_{n\leqslant m} \operatorname{cl} U_n$$
$$\subset \operatorname{cl} \bigcup_{n>m} U_n \subset \operatorname{cl} V.$$

Следовательно, $\big(\operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} U_n\big) \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} U_n = \{q\}$, и согласно следствию 1.12 последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q. ▷

1.14. Теорема. *Пусть $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность, латерально сходящаяся к точке q в регулярном пространстве Q. Следующие утверждения равносильны:*

(a) *любое латерально сходящееся к q покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ стягивается к q;*

(b) *пространство Q счетно компактно.*

◁ (a)⇒(b). Предположим вопреки доказываемому, что пространство Q не является счетно компактным. Тогда в Q существует бесконечное множество, не имеющее предельных точек (см., например, [3, гл. III, задача 189]). Несомненно, такое множество содержит лишь конечное число членов последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а значит, в нем можно выделить инъективную последовательность элементов p_n, не принадлежащих $\{q_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{q\}$. Отметим, что каждое из множеств $P_m := \{p_n : n \geqslant m\}$ $(m \in \mathbb{N})$ не имеет предельных точек и поэтому замкнуто.

По условию последовательность $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ допускает латерально сходящееся к q покрытие $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Благодаря регулярности пространства Q существует такое замкнутое покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, что $V_n \subset W_n \setminus P_1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$U_n := V_n \cup \{p_n\} \ (n \in \mathbb{N}), \quad \mathscr{U}_m := \bigcup_{n\geqslant m} U_n, \ \mathscr{V}_m := \bigcup_{n\geqslant m} V_n \ (m \in \mathbb{N}).$$

Покажем, что замкнутое покрытие $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q, проверив условие (b) леммы 1.2. Действительно, согласно предложению 1.6(a) покрытие $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к q. Поэтому

$$U_m \cap U_n = V_m \cap V_n = \varnothing \ \text{ при } m \neq n$$

и, кроме того,

$$\begin{aligned}\operatorname{cl}\mathscr{U}_m \setminus \mathscr{U}_m &= \operatorname{cl}(\mathscr{V}_m \cup P_m) \setminus (\mathscr{V}_m \cup P_m) = (\operatorname{cl}\mathscr{V}_m \cup P_m) \setminus (\mathscr{V}_m \cup P_m)\\ &= (\operatorname{cl}\mathscr{V}_m \setminus \mathscr{V}_m) \setminus P_m = \{q\} \setminus P_m = \{q\}\end{aligned}$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Остается заметить, что $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не стягивается к q, так как $p_n \in U_n$ и $p_n \nrightarrow q$.

(b)⇒(a). Допустим, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — покрытие $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально сходящееся, но не стягивающееся к q. Тогда существуют окрестность V точки q и последовательности $(n_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ и $(p_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset Q$ такие, что $n_m \to \infty$ и $p_m \in U_{n_m} \setminus V$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Из дизъюнктности последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ следует, что множество $P := \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$ бесконечно. Очевидно, $q \notin \operatorname{cl} P$. Кроме того, из утверждения 1.2(d) видно, что элементы $Q\setminus\{q\}$ также не могут быть предельными для P. Таким образом, Q содержит бесконечное множество, не имеющее предельных точек, и тем самым не является счетно компактным (см. [3, гл. III, задача 189]). ▷

1.15. Напомним, что *псевдохарактером* $\psi(q,Q)$ T_1-пространства Q в точке $q \in Q$ называется наименьшая среди мощностей $|\mathscr{V}|$ множеств $\mathscr{V}$, состоящих из открытых подмножеств Q и удовлетворяющих равенству $\cap\mathscr{V} = \{q\}$:

$$\psi(q,Q) := \min\{|\mathscr{V}| : \mathscr{V} \subset Open(Q),\ \cap\mathscr{V} = \{q\}\}.$$

Например, псевдохарактер T_1-пространства в точке, имеющей счетную базу окрестностей, счетен.

Следующее утверждение с очевидностью вытекает из теоремы 1.11.

Предложение. *Пусть Q — регулярное пространство и $q \in Q$. Если псевдохарактер $\psi(q,Q)$ счетен, то всякая последовательность в Q, инъективно сходящаяся к точке q, сходится латерально.*

1.16. Пример. Утверждение, обратное к предложению 1.15, не имеет места даже при дополнительном предположении о компактности пространства Q. Действительно, пусть $Q = D \cup \{q\}$ — одноточечная компактификация несчетного дискретного пространства D. Псевдохарактер $\psi(q,Q)$ несчетен, поскольку для любой последовательности $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых окрестностей точки q дополнение $Q \setminus \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (Q \setminus V_n)$ является счетным. При этом всякая инъективная последовательность элементов D латерально сходится к q (см. пример 1.7).

1.17. Опишем еще один наглядный случай, когда компактное пространство имеет несчетный псевдохарактер в пределе латерально сходящейся последовательности.

Пример. Пусть P — хаусдорфово компактное пространство, имеющее в некоторой своей точке p несчетный псевдохарактер $\psi(p,P)$ (или, что в данном случае то же самое, содержащее точку p, для которой не существует счетной базы окрестностей, см. [3, гл. III, задача 68; 4, упр. 3.1.F]). Будем считать, что P не пересекается с $\mathbb{N}$. Снабдим $Q := P \cup \mathbb{N}$ топологией, в которой роль открытых множеств играют объединения $U \cup V$, где U — открытое подмножество P, а V — подмножество $\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию

$$(\exists\, m \in \mathbb{N})(\forall\, n \geqslant m)(n \in V)$$

в случае $p \in U$. (Такое топологическое пространство Q гомеоморфно соединению $P \cup_{\{(p,\,\omega)\}} (\omega+1)$ в смысле [4, 2.1.12] или же фактор-пространству суммы $P \oplus (\omega+1)$ по отношению эквивалентности, отождествляющему точки p и ω.) Тогда Q — хаусдорфово компактное пространство (см., например, [4, 3.2.11]), имеющее несчетный псевдохарактер $\psi(p,Q)$, в то время как последовательность $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ латерально сходится к p (см. пример 1.7).

§ 2. Гомоморфизмы банаховых расслоений

В этом параграфе устанавливается ряд результатов о существовании гомоморфизмов НБР, а также непрерывных и слабо непрерывных вектор-функций и сечений, принимающих наперед заданные значения в точках инъективно и латерально сходящихся последовательностей. Как и прежде, Q — топологическое пространство.

2.1. Определение. *Функциональным покрытием последовательности* точек $q_n \in Q$ условимся называть произвольную последовательность непрерывных функций $f_n \colon Q \to [0,1]$ таких, что $f_n(q_n) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходящейся последовательности $q_n \to q$ назовем *латерально прикасающимся* (*латерально сходящимся*) к точке q, если таковой является последовательность носителей $\operatorname{supp} f_n := \operatorname{cl}\{q \in Q : f_n(q) \neq 0\}$.

2.2. Как легко видеть, для любого покрытия $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ во вполне регулярном пространстве найдется такое функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ этой последовательности, что $\operatorname{supp} f_n \subset U_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В частности, если сходящаяся последовательность $q_n \to q$ во вполне регулярном пространстве допускает покрытие, латерально прикасающееся (латерально сходящееся) к точке q, то эта последовательность допускает и функциональное покрытие, обладающее тем же свойством. С учетом этого наблюдения из предложения 1.5 вытекает следующий факт.

Предложение. *Во вполне регулярном топологическом пространстве всякая инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ допускает функциональное покрытие, латерально прикасающееся к точке q.*

2.3. Определение. Опишем конструкцию поточечной суммы дизъюнктной последовательности сечений расслоения векторных пространств, которая будет многократно использована в дальнейшем в различных частных случаях (пп. 2.4, 2.6, 2.7, 2.9, 2.10).

Пусть $\mathscr{X} := (\mathscr{X}(q))_{q\in Q}$ — семейство векторных пространств, $S(Q,\mathscr{X}) := \prod_{q\in Q} \mathscr{X}(q)$ — векторное пространство сечений $\mathscr{X}$, и пусть $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность сечений $s_n \in S(Q,\mathscr{X})$, имеющих попарно дизъюнктные носители $\operatorname{supp} s_n := \operatorname{cl}\{q \in Q : s_n(q) \neq 0\}$. В этом контексте возникает возможность рассмотреть сечение $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n \in S(Q,\mathscr{X})$, которое представляет собой поточечную сумму сечений s_n и принимает следующие значения в точках $q \in Q$:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n\Big)(q) = \begin{cases} s_n(q), & q \in \operatorname{supp} s_n, \\ 0, & q \in Q \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} s_n. \end{cases}$$

В большинстве рассматриваемых ниже случаев отображения s_n в том или ином смысле непрерывны, принадлежат подпространству $S(Q,\mathscr{X})$, имеющему естественную векторную топологию, а сечение $\sum_{n\in\mathbb{N}} s_n$ оказывается поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$.

2.4. Лемма. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X}$ — НБР над Q;*
(d) *$x_n \in \mathscr{X}(q_n)$, $\|x_n\| \to 0$.*
Тогда существует ограниченное непрерывное сечение $s \in C(Q,\mathscr{X})$, принимающее значения

$$s(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad s(q) = 0.$$

$\lhd$ По теореме Дюпре [6, 1.1] для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется непрерывное сечение $s_n \in C(Q,\mathscr{X})$ такое, что $s_n(q_n) = x_n$ и $\|s_n\| \leqslant \|x_n\|$. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Тогда сечение $s := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n s_n \in S(Q,\mathscr{X})$ принимает требуемые значения и, кроме того, является ограниченным и непрерывным, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n s_n$ в банаховом пространстве $C^b(Q,\mathscr{X}) \subset \ell^{\infty}(Q,\mathscr{X})$ ограниченных непрерывных сечений (см. [1, 2.3.6]). $\rhd$

2.5. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X}$ — НБР над Q;*
(d) *$x_n \in \mathscr{X}(q_n)$, $x \in \mathscr{X}(q)$;*
(e) *$(q_n, x_n) \to (q, x)$ в топологическом пространстве $Q \otimes \mathscr{X}$* (см. [1, 2.1.4]).
Тогда существует ограниченное непрерывное сечение $s \in C(Q,\mathscr{X})$, принимающее значения

$$s(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad s(q) = x.$$

$\lhd$ По теореме Дюпре [6, 1.1] существует сечение $s_x \in C^b(Q,\mathscr{X})$, принимающее значение $s_x(q) = x$. Из предложения [1, 2.3.8] следует $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - s_x(q_n)\| = 0$. Согласно лемме 2.4 существует такое сечение $s_0 \in C^b(Q,\mathscr{X})$, что $s_0(q_n) = x_n - s_x(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $s_0(q) = 0$. Тогда сечение $s := s_0 + s_x$ является искомым. $\rhd$

2.6. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*
(c) *$\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q;*
(d) *$H_n \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, $\|H_n\|_{\infty} \to 0$.*
Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in \mathrm{Hom}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, принимающий значения

$$H(q_n) = H_n(q_n) \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = 0.$$

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{Z}$ банахово расслоение над Q со слоями $B(\mathscr{X}(p),\mathscr{Y}(p))$ в точках $p \in Q$. Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Тогда сечение $H := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n H_n \in S(Q,\mathscr{X})$ принимает требуемые значения и, кроме того, является ограниченным гомоморфизмом из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n H_n$ в банаховом пространстве $Hom^b(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \subset \ell^\infty(Q,\mathscr{X})$ ограниченных гомоморфизмов (см. [1, 2.4.11]). $\triangleright$

2.7. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*

(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*

(c) *X — топологическое векторное пространство;*

(d) *последовательность векторов $x_n \in X$ сходится к $x \in X$.*

Тогда существует непрерывная функция $u\colon Q \to X$, принимающая значения

$$u(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad u(q) = x. \tag{6}$$

Если, кроме того, множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ограничено, то существует ограниченная функция $u \in C(Q,X)$, удовлетворяющая (6).

$\triangleleft$ Пусть $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — функциональное покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к точке q (см. предложение 2.2). Определим функцию $u_0\colon Q \to X$, полагая $u_0 := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \otimes (x_n - x)$. Тогда $u_0(q_n) = x_n - x$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $u_0(q) = 0$ и, кроме того, функция u_0 ограничена и непрерывна, будучи поточечной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \otimes (x_n - x)$, равномерно сходящегося относительно равномерности пространства X. Следовательно, функция $u := u_0 + x$ является искомой. $\triangleright$

2.8. Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *Q — вполне регулярное топологическое пространство;*

(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*

(c) *$\mathscr{X} = Q \times \{X\}$ — постоянное НБР над Q со слоем X;*

(d) *последовательность функционалов $y_n \in X'$ слабо* сходится к $y \in X'$.*

Тогда существует ограниченный гомоморфизм $H \in \mathscr{X}^*$, принимающий значения

$$H(q_n) = y_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = y.$$

$\triangleleft$ Согласно предложению 2.7 имеется слабо* ограниченное слабо* непрерывное отображение $H\colon Q \to X'$, принимающее значения $H(q_n) = y_n$ $(n \in \mathbb{N})$ и $H(q) = y$. Ясно, что $H \otimes u \in C(Q)$ для всех постоянных функций $u\colon Q \to X$. Кроме того, в силу полноты X отображение H ограничено по норме. Остается воспользоваться теоремой [1, 2.4.9]. $\triangleright$

2.9. Говорят, что последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ в банаховом пространстве X *w-w*-сходится* к $x \in X$, если для любых $y_n, y \in X'$ из слабой* сходимости $y_n \to y$ следует $\langle x_n \,|\, y_n\rangle \to \langle x \,|\, y\rangle$ (см. [5, 3.1.7]). Сечение $w \in S(Q,\mathscr{X})$ НБР $\mathscr{X}$ над Q называют *слабо непрерывным* и пишут $w \in C_{\mathrm{w}}(Q,\mathscr{X})$, если $H \otimes w \in C(Q)$ для всех $H \in \mathscr{X}^*$ (см. [5, 3.5]).

Предложение. *Пусть выполнены следующие условия:*

(a) *Q — вполне регулярное пространство Фреше — Урысона;*

(b) *последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;*

(c) *$\mathscr{X} = Q \times \{X\}$ — постоянное НБР над Q со слоем X;*

(d) *последовательность векторов $x_n \in X$ w-w*-сходится к $x \in X$.*

Тогда существует слабо непрерывное сечение $w \in C_{\mathrm{w}}(Q,\mathscr{X})$, принимающее значения

$$w(q_n) = x_n \ (n \in \mathbb{N}), \quad w(q) = x.$$

◁ Как и в доказательстве предложения 2.7, рассмотрим функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально прикасающееся к q (см. предложение 2.2), и положим $u := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \otimes (x_n - x) \in S(Q, \mathscr{X})$, т. е.

$$u(p) = \begin{cases} f_n(p)(x_n - x), & p \in \operatorname{supp} f_n, \\ 0, & p \in Q \setminus S, \end{cases}$$

где $S := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{supp} f_n$. Тогда сумма $w := u + x$ принимает требуемые значения в точках q_n и q, и нужно лишь установить, что $u \in C_{\mathrm{w}}(Q, \mathscr{X})$.

Рассмотрим произвольный гомоморфизм $H \in \mathscr{X}^*$ и покажем непрерывность функции $H \otimes u \colon Q \to \mathbb{R}$. Прежде всего заметим, что функция $H \otimes u$ непрерывна на дополнении $Q \setminus \operatorname{cl} S$, так как на нем она тождественно равна нулю. Далее, $H \otimes u$ непрерывна на S, так как каждый из носителей $\operatorname{supp} f_n$ содержится в открытом множестве $Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup\limits_{m\neq n} \operatorname{supp} f_m$, на котором

$$H(p)u(p) = f_n(p)H(p)(x_n - x).$$

Остается показать непрерывность функции $H \otimes u$ на $\operatorname{cl} S \setminus S$. Допустим, эта функция разрывна в некоторой точке $p \in \operatorname{cl} S \setminus S$. Тогда существуют число $\varepsilon > 0$, последовательность точек $p_m \in S$ и строго возрастающая последовательность номеров $n_m \in \mathbb{N}$ такие, что

$$p \in \operatorname{cl}\{p_m : m \in \mathbb{N}\}, \quad p_m \in \operatorname{supp} f_{n_m}, \quad |H(p_m)u(p_m)| > \varepsilon$$

для всех $m \in \mathbb{N}$. Поскольку Q является пространством Фреше — Урысона, имеется подпоследовательность $p_{m_k} \to p$. Легко проверить, что последовательность векторов $u(p_m) = f_{n_m}(p_m)(x_{n_m} - x)$ w-w*-сходится к нулю, а значит, это верно и для ее подпоследовательности $u(p_{m_k})$. Вместе с тем $H(p_{m_k}) \to H(p)$ слабо*, откуда вытекают противоречивые соотношения

$$\varepsilon < |H(p_{m_k})u(p_{m_k})| \to |H(p)u(p)| = 0. \ \triangleright$$

2.10. Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*
(a) Q *— вполне регулярное топологическое пространство;*
(b) *последовательность точек* $q_n \in Q$ *латерально сходится к* $q \in Q$*;*
(c) $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *— НБР над* Q*;*
(d) $H_n \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $\|H_n\|_\infty \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$*;*
(e) $\mathscr{U}$ *— счетное подмножество* $C(Q, \mathscr{X})$*;*
(f) $\operatorname{cl} \mathscr{U}(q) = \mathscr{X}(q)$, *где* $\mathscr{U}(q) := \{u(q) : u \in \mathscr{U}\}$*;*
(g) $\|H_n(q_n)u(q_n)\| \to 0$ *для всех* $u \in \mathscr{U}$.
Тогда существует такой гомоморфизм $H \in \mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, *что*

$$\|H\|_\infty \leqslant 1, \quad H(q_n) = H_n(q_n) \ (n \in \mathbb{N}), \quad H(q) = 0.$$

◁ Обозначим через $\mathscr{Z}$ банахово расслоение над Q со слоями $B(\mathscr{X}(p), \mathscr{Y}(p))$ в точках $p \in Q$. По теореме [1, 2.4.9] ограниченное сечение $H \in S(Q, \mathscr{Z})$ принадлежит $\mathit{Hom}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, если существует такое послойно плотное в $\mathscr{X}$ множество $\mathscr{V} \subset C(Q, \mathscr{X})$, что $H \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $v \in \mathscr{V}$. Начнем с введения множества $\mathscr{V}$, удобного для дальнейших выкладок.

Рассмотрим латерально сходящееся к q покрытие $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и положим

$$\mathscr{W} := \Big\{ w \in C(Q, \mathscr{X}) \ : \ w = 0 \text{ на } \operatorname{cl} \bigcup_{m\neq n} W_m \text{ для некоторого } n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

Заметим, что $\mathscr{W}(p) = \mathscr{X}(p)$ для каждой точки

$$p \in Q \backslash \{q\} = \Big(Q \setminus \operatorname{cl} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n\Big) \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n.$$

Действительно, в силу полной регулярности пространства Q в каждом из случаев $p \notin \operatorname{cl} \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} W_n$ и $p \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{cl} W_n$ существует такая непрерывная функция $f\colon Q \to [0,1]$, что $f(p) = 1$ и $f = 0$ на $\operatorname{cl} \bigcup\limits_{m\neq n} W_m$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. По теореме Дюпре [6, 1.1] для каждого элемента $x \in \mathscr{X}(p)$ имеется сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$ со значением $u(p) = x$, а значит, x является значением в точке p сечения fu, принадлежащего множеству $\mathscr{W}$. Таким образом, $\mathscr{W}(p) = \mathscr{X}(p)$ для всех $p \neq q$, и поэтому объединение

$$\mathscr{V} := \mathscr{W} \cup \{u_m : m \in \mathbb{N}\}$$

послойно плотно в $\mathscr{X}$, где $\{u_m : m \in \mathbb{N}\} = \mathscr{U}$.

Далее, согласно условию (g) имеется строго возрастающая последовательность номеров $n_m \in \mathbb{N}$, для которой

$$\|H_n(q_n)u_1(q_n)\| < \frac{1}{m},\ \ldots,\ \|H_n(q_n)u_m(q_n)\| < \frac{1}{m}, \quad m, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_m.$$

Как легко видеть, существует покрытие последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, состоящее из таких подокрестностей $V_n \subset W_n$, что

$$|\!|\!| H_n \otimes u_1 |\!|\!| \leqslant \frac{1}{m},\ \ldots,\ |\!|\!| H_n \otimes u_m |\!|\!| \leqslant \frac{1}{m} \ \text{ на } V_n \text{ при } n_m \leqslant n < n_{m+1}.$$

Рассмотрим функциональное покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такое, что $\operatorname{supp} f_n \subset V_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. п. 2.2). Ясно, что покрытие $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, как и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, латерально сходится к q (см. предложение 1.6(a)), причем

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n H_n \otimes u_m\|_\infty = 0 \quad \text{для всех } m \in \mathbb{N}.$$

Тогда сечение

$$H := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n H_n \in S(Q, \mathscr{X})$$

принимает требуемые значения в точках q_n и q и, кроме того, $\|H\|_\infty \leqslant 1$. Остается показать, что $H \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$ для всех $v \in \mathscr{V}$.

Если $v \in \mathscr{W}$, то имеется номер $n \in \mathbb{N}$, для которого $v = 0$ на множестве

$$\operatorname{cl} \bigcup_{m\neq n} W_m \supset \bigcup_{m\neq n} V_m \supset \bigcup_{m\neq n} \operatorname{supp} f_m H_m,$$

и тогда $H \otimes v = f_n H_n \otimes v \in C(Q, \mathscr{Y})$. Если же $v = u_m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n H_n \otimes v\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \|f_n H_n \otimes u_m\|_\infty = 0,$$

и тогда сечение $H \otimes v = \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n H_n \otimes v$ непрерывно, будучи поточечной суммой равномерно сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (f_n H_n \otimes v)$ в банаховом пространстве $C^b(Q, \mathscr{Y})$ ограниченных непрерывных сечений (см. [1, 2.3.6]). ▷

2.11. Следующий пример показывает, что условие (b) о латеральной сходимости $q_n \to q$ в теореме 2.10 является существенным и не может быть ослаблено до инъективной сходимости.

Пример. Возможна ситуация, когда выполнены следующие условия:

(a) Q — компактное хаусдорфово пространство;

(b) последовательность точек $q_n \in Q$ инъективно сходится к $q \in Q$;

(c) $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — НБР над Q;

(d) $H_n \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, $\|H_n\|_\infty \leqslant 1$ $(n \in \mathbb{N})$;

(e) $\mathscr{X}(q) = \{0\}$,

но нет такого гомоморфизма $H \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, что $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

$\triangleleft$ Рассмотрим компактное хаусдорфово пространство S, имеющее в некоторой точке $t \in S$ несчетный псевдохарактер $\psi(t, S)$, и положим

$$Q = (\omega + 1) \times S, \quad q_n = (n, t), \quad q = (\omega, t).$$

(Например, в случае $S = \omega_1 + 1$ и $t = \omega_1$ пространство Q и инъективно сходящаяся последовательность $q_n \to q$ совпадают с рассмотренными в примере 1.9.) В качестве $\mathscr{Y}$ возьмем постоянное НБР над Q со слоем $\mathbb{R}$, а на роль $\mathscr{X}$ пригласим подрасслоение $\mathscr{Y}$ со слоями

$$\mathscr{X}(p) = \begin{cases} \mathbb{R}, & p \neq q; \\ \{0\}, & p = q \end{cases}$$

и непрерывной структурой $\{u \in C(Q) : u(q) = 0\} = C(Q, \mathscr{X})$ (см. [1, 2.2.1, 2.2.2]). Для каждого $n \in \mathbb{N}$ обозначим через χ_n характеристическую функцию подмножества $\{n\} \times S \subset Q$:

$$\chi_n(\alpha, s) = \begin{cases} 1, & \alpha = n; \\ 0, & \alpha \neq n \end{cases}$$

для всех $(\alpha, s) \in Q$. Заметим, что функции $\chi_n \colon Q \to \mathbb{R}$ непрерывны, причем в силу равенства $\chi_n(q) = \chi_n(\omega, t) = 0$ они принадлежат $C(Q, \mathscr{X})$. Наконец, определим последовательность гомоморфизмов $H_n \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, полагая

$$H_n(\alpha, s)x = \begin{cases} \chi_n(\alpha, s)x & \text{при четном } n; \\ 0 & \text{при нечетном } n \end{cases}$$

для всех $(\alpha, s) \in Q$ и $x \in \mathscr{X}(\alpha, s)$.

Предположим вопреки доказываемому, что существует гомоморфизм $H \in Hom(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, принимающий значения $H(q_n) = H_n(q_n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $H(n, t)\chi_n(n, t) = 1$ при четном n и $H(n, t)\chi_n(n, t) = 0$ при нечетном n, а значит, в пространстве S найдется окрестность V_n точки t такая, что

$$H \otimes \chi_n > \tfrac{2}{3} \ \text{ на } \{n\} \times V_n \ \text{ при четном } n;$$

$$H \otimes \chi_n < \tfrac{1}{3} \ \text{ на } \{n\} \times V_n \ \text{ при нечетном } n.$$

Поскольку псевдохарактер $\psi(t, S)$ несчетен, существует точка $t' \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} V_n \setminus \{t\}$. Рассмотрим функцию $f \in C(S)$, принимающую значения $f(t') = 1$ и $f(t) = 0$, и определим сечение $u \in C(Q, \mathscr{X})$, полагая

$$u(\alpha, s) = f(s), \quad (\alpha, s) \in Q.$$

Тогда $(n, t') \to (\omega, t')$, в то время как последовательность чисел

$$(H \otimes u)(n, t') = H(n, t')f(t') = H(n, t')1 = H(n, t')\chi_n(n, t') = (H \otimes \chi_n)(n, t')$$

не имеет предела. $\triangleright$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
2. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
3. *Архангельский А. В., Пономарев В. И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. М.: Мир, 1986.
5. *Гутман А. Е., Коптев А. В.* Сопряженные банаховы расслоения // Нестандартный анализ и векторные решетки, изд. 2-е. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005. С. 125–201.
6. *Коптев А. В.* Несколько классов банаховых расслоений с непрерывными слабо непрерывными сечениями // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 3. С. 600–612.

Поступила в редакцию 14 января 2025 г.
После доработки 14 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Коптев Александр Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
koptev@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 512.542

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ НОРМАЛЬНЫХ ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП КОНЕЧНЫХ ГРУПП

С. Йи, Б. Ченг, Р. В. Бородич, С. Ф. Каморников

Аннотация. Предлагаются бесконечные серии подгрупповых m-функторов и регулярных подгрупповых m-функторов θ, обладающих тем свойством, что θ-подгруппа Фраттини каждой нормальной холловой подгруппы H любой конечной группы G равна пересечению H с θ-подгруппой Фраттини группы G.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.206

Ключевые слова: конечная группа, холлова подгруппа, подгрупповой m-функтор, θ-подгруппа Фраттини.

Введение

Пусть θ — отображение, ставящее в соответствие каждой группе G некоторое множество $\theta(G)$ ее подгрупп. Следуя [1], назовем отображение θ *подгрупповым функтором*, если $(\theta(G))^{\phi} = \theta(G^{\phi})$ для любого изоморфизма ϕ каждой конечной группы G.

Первоначально понятие подгруппового функтора использовалось в основном для обобщения определенных теоретико-групповых объектов, в частности, $\mathfrak{X}$-проекторов и $\mathfrak{X}$-инъекторов (см., например, [1]). Позже было замечено, что специальные подгрупповые функторы — удобный и достаточно эффективный аппарат исследования свойств групп и их классов. В частности, в [2] метод регулярных подгрупповых функторов применен для изучения свойств локальных формаций, замкнутых относительно систем подгрупп, выделяемых подгрупповыми функторами. В [3–5] идея наследственного и транзитивного подгруппового функтора позволила открыть новые решетки подгрупп.

В [6] получил развитие функциональный подход, обосновывающий необходимость рассмотрения с позиции классов задачи о пересечениях максимальных подгрупп конечных групп. В основу этого подхода положены понятия m-функтора и обобщенной подгруппы Фраттини.

Подгрупповой функтор θ называется *m-функтором*, если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит группу G и некоторые ее максимальные подгруппы.

Подгруппа $\Phi_\theta(G)$, равная пересечению всех подгрупп из $\theta(G)$, называется *подгруппой фраттиниева типа, индуцированной m-функтором* θ, или, короче,

Работа первого автора выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (проект № 12371021). Исследования третьего и четвертого авторов выполнены при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект № 20211749).

θ-подгруппой Фраттини группы G. Отметим, что если для любой группы G множество $\theta(G)$ содержит все максимальные подгруппы из G, то $\Phi_\theta(G) = \Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G. Так как множество всех максимальных θ-подгрупп группы G автоморфно допустимо, $\Phi_\theta(G)$ — характеристическая подгруппа группы G.

Особое место занимают регулярные m-функторы, возникшие на основе аксиоматизации свойства инвариантности некоторых m-функторов при всех гомоморфизмах групп. Подгрупповой m-функтор θ называется *регулярным*, если выполняются следующие условия:

1) из $N \trianglelefteq G$ и $M \in \theta(G)$ следует $MN/N \in \theta(G/N)$;

2) из $M/N \in \theta(G/N)$ следует $M \in \theta(G)$.

В данной работе с использованием подгрупповых m-функторов исследуется связь между подгруппами фраттиниева типа группы G и ее нормальных холловых подгрупп.

Бэр в [7] указал на следующее замечательное свойство силовских подгрупп конечной группы: *если P — нормальная силовская подгруппа группы G, то* $\Phi(P) = P \cap \Phi(G)$. В работе [8] этот результат получил существенное развитие.

Теорема 1 [8]. *Если H — нормальная холлова подгруппа конечной группы G, то*

$$\Phi(H) = H \cap \Phi(G).$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит классический результат Гашюца из [9] о существовании в группе G дополнения к нормальной абелевой p-подгруппе, дополняемой в некоторой силовской p-подгруппе из G.

Будем говорить, что *подгрупповой m-функтор θ обладает* Hall Φ-*свойством*, если равенство $\Phi_\theta(H) = H \cap \Phi_\theta(G)$ выполняется для любой нормальной холловой подгруппы H каждой группы G.

В 2007 г. Л. А. Шеметковым отмечены следующие две задачи, открывающие новые свойства холловых подгрупп:

1. *Найти все подгрупповые m-функторы, обладающие* Hall Φ-*свойством.*

2. *Найти все регулярные подгрупповые m-функторы, которые обладают* Hall Φ-*свойством.*

В качестве дополнительного обоснования, инициирующего рассмотрение отмеченных задач, выступает тот факт, что необходимость исследования связи подгрупп фраттиниева типа группы и ее нормальных холловых подгрупп возникает при изучении свойств $\mathfrak{F}$-критических групп и конструировании ее обобщенно префраттиниевых подгрупп (см., например, работы [10, 11]).

В данной работе строятся бесконечные серии регулярных и нерегулярных m-функторов, обладающих Hall Φ-свойством. Отметим, что многие известные подгрупповые m-функторы не являются Hall Φ-функторами.

Пусть $\mathfrak{I}$ — класс всех простых групп (включая абелевы простые группы). Следуя [1], для подкласса $\mathfrak{X}$ класса $\mathfrak{I}$ через $E\mathfrak{X}$ обозначим класс тех групп, все композиционные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. Простая проверка показывает, что $E\mathfrak{X}$ — формация Фиттинга.

Из определения класса Фиттинга следует, что для любого класса $\mathfrak{X}$ простых групп в каждой группе G существует наибольшая нормальная $E\mathfrak{X}$-подгруппа, равная произведению всех ее нормальных $E\mathfrak{X}$-подгрупп. Эта подгруппа обозначается $G_{E\mathfrak{X}}$ и называется *$E\mathfrak{X}$-радикалом* группы G.

Пусть далее $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе G все ее максимальные подгруппы, содержащие $E\mathfrak{X}$-радикал $G_{E\mathfrak{X}}$, а $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$ — подгруппа фраттиниева типа группы G, индуцированная m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Следующая теорема устанавливает, что подгрупповой m-функтор $\theta_{E\mathfrak{X}}$ обладает Hall Φ-свойством.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. Если H — нормальная холлова подгруппа группы G, то $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.*

Если $\mathfrak{X}$ — пустой класс, то $E\mathfrak{X}$ — класс единичных групп, а значит, в этом случае $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Таким образом, теорема 2 включает отмеченные выше результаты работ [7, 8].

Если π — некоторое множество простых чисел и $\mathfrak{X}$ — класс всех простых π-групп, то $E\mathfrak{X} = \mathfrak{G}_\pi$ — класс всех π-групп и $G_{E\mathfrak{X}} = O_\pi(G)$.

Пусть π — некоторое множество простых чисел и θ_π — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на числа из π. Этот подгрупповой m-функтор является регулярным. Следуя [1], подгруппу фраттиниева типа группы G, индуцированную m-функтором θ_π, будем обозначать через $\Phi_\pi(G)$. В случае, когда множество π состоит из одного простого числа p и θ — подгрупповой m-функтор, выделяющий в каждой группе все ее максимальные подгруппы, индексы которых не делятся на p, θ-подгруппа Фраттини $\Phi_\theta(G)$ группы G совпадает с введенной Дескинсом в [12] подгруппой $\Phi_p(G)$.

Отметим, что в общем случае m-функторы $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π различны. В отличие от m-функтора $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ m-функтор θ_π является регулярным. В то же время для ряда множеств π подгруппы фраттиниева типа, индуцированные m-функторами $\theta_{\mathfrak{G}_\pi}$ и θ_π, в любой конечной группе совпадают (это имеет место, например, если множество π одноэлементно). Поэтому из теоремы 2 следует, что существует бесконечное множество регулярных подгрупповых m-функторов, которые обладают Hall Φ-свойством.

1. Основные определения и предварительные результаты

В работе рассматриваются только конечные группы, используются определения и обозначения, принятые в [1]. Информацию, касающуюся теории решеток, можно найти в [13].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π.

Подгруппа H называется *π-холловой подгруппой* группы G, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π-холловых подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$.

Далее

— $\mathscr{M}$ — множество всех подгрупповых m-функторов;

— $\mathscr{M}_{reg}$ — множество всех регулярных подгрупповых m- функторов;

— $(\mathfrak{X})$ — наименьший класс групп, содержащий все группы из множества $\mathfrak{X}$, в частности, (G) — наименьший класс групп, содержащий группу G.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если* $N \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, *то* $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N$;

(2) $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Доказательство. (1) Так как класс $E\mathfrak{X}$ замкнут относительно расширений и $N \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, то $(G/N)_{E\mathfrak{X}} = G_{E\mathfrak{X}}/N$. Отсюда следует, что максимальная подгруппа M/N группы G/N содержит $E\mathfrak{X}$-радикал $(G/N)_{E\mathfrak{X}}$ группы G/N тогда и только тогда, когда максимальная подгруппа M группы G содержит $E\mathfrak{X}$-радикал $G_{E\mathfrak{X}}$ группы G. Следовательно, справедливо равенство $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N$.

(2) Так как класс $E\mathfrak{X}$ замкнут относительно расширений, справедливо равенство $(G/G_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}} = 1$. Поэтому каждая максимальная подгруппа группы $G/G_{E\mathfrak{X}}$ содержит ее $E\mathfrak{X}$-радикал. Отсюда и из определения подгруппы фраттиниева типа, индуцированной m- функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$, следует, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}} = \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. Тогда для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется включение $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма неверна. Тогда в G найдется нормальная подгруппа N такая, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N)$ не содержится в $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $N_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/N_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы имеем $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N/N_{E\mathfrak{X}}) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/N_{E\mathfrak{X}})$. Так как $N_{E\mathfrak{X}} \subseteq G_{E\mathfrak{X}}$, отсюда в силу утверждения (1) леммы 1 $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N)/N_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/N_{E\mathfrak{X}}$, а значит, $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Пришли к противоречию.

Случай 2. $N_{E\mathfrak{X}} = 1$. В силу утверждения (2) леммы 1 заключаем, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) = \Phi(N)$. Так как по теореме A.9.2 из [14] $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$, отсюда $\Phi(N)G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}$. Снова применяя теорему A.9.2 из [14], получаем, что $\Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi(G/G_{E\mathfrak{X}})$, а значит, в силу утверждения (2) леммы 1

$$\Phi(G)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Таким образом, $\Phi(N)G_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}$. Отсюда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(N) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Снова пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений.

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;

2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G, принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. Тогда для любой группы G и каждой ее нормальной подгруппы N выполняется равенство $N \cap G_{E\mathfrak{X}} = N_{E\mathfrak{X}}$.*

Доказательство. Так как класс $E\mathfrak{X}$ является классом Фиттинга, в силу леммы II.2.9 из [14] имеем $N \cap G_{E\mathfrak{X}} = N_{E\mathfrak{X}}$.

Лемма доказана.

Группа G называется *монолитической*, если она обладает единственной минимальной нормальной подгруппой и $\Phi(G) = 1$. В этом случае минимальная нормальная подгруппа группы G называется ее *монолитом*.

Лемма 4. *Пусть S и R — не изоморфные простые группы. Если H — монолитическая группа с монолитом, принадлежащим классу $E(S)$, то существует монолитическая группа G с монолитом N такая, что $G/N \cong H$ и $N \in E(R)$.*

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. Пусть R — группа порядка p. Так как группа H монолитическая и группы S и R неизоморфны, то $O_p(H) = 1$. Тогда по теореме B.10.3 из [14] существует точный неприводимый H-модуль N над полем F_p. Рассмотрим группу $G = [N]H$. Ясно, что $\Phi(G) = 1$, группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G/N = [N]H/N \cong H$.

Случай 2. Пусть R — простая неабелева группа. Рассмотрим регулярное сплетение $G = R \wr H = [N]H$ групп R и H, где N — база сплетения. Так как R — простая неабелева группа, из свойств регулярного сплетения следует, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, а значит, $\Phi(G) = 1$. Очевидно, $G/N \cong H$ и $N \in E(R)$.

Лемма доказана.

2. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна, и H — нормальная σ-холлова подгруппа группы G для некоторого множества σ простых чисел из $\pi(G)$. Предположим, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \neq H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$.

Так как подгруппа H нормальна в G, ввиду леммы 2 выполняется включение $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \subseteq \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $H_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/H_{E\mathfrak{X}}$ и ее нормальную σ-холлову подгруппу $H/H_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы G из $|G/H_{E\mathfrak{X}}| < |G|$ имеем

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(H/H_{E\mathfrak{X}}) = H/H_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/H_{E\mathfrak{X}}).$$

Отсюда в силу утверждения (1) леммы 1 заключаем, что $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Получаем противоречие с выбором группы G и ее нормальной σ-холловой подгруппы H.

Случай 2. Пусть $H_{E\mathfrak{X}} = 1$. Тогда в силу леммы 3 имеем равенство $H \cap G_{E\mathfrak{X}} = 1$. Так как H — нормальная σ-холлова подгруппа группы G, то $G_{E\mathfrak{X}}$ — нормальная σ'-холлова подгруппа группы $HG_{E\mathfrak{X}}$. Таким образом, справедливо равенство $HG_{E\mathfrak{X}} = H \times G_{E\mathfrak{X}}$.

Если $G_{E\mathfrak{X}} = 1$, то ввиду утверждения (2) леммы 1 справедливы равенства $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = \Phi(H)$ и $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = \Phi(G)$. Ввиду теоремы 1 отсюда имеем $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$, что противоречит выбору группы G и ее нормальной σ-холловой подгруппы H.

Таким образом, $G_{E\mathfrak{X}} \neq 1$. Рассмотрим группу $G/G_{E\mathfrak{X}}$ и ее нормальную σ-холлову подгруппу $HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}$. Ввиду выбора группы G из $|G/G_{E\mathfrak{X}}| < |G|$ имеем

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}) = HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/G_{E\mathfrak{X}}).$$

Так как $H_{E\mathfrak{X}} = 1$, то $(HG_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}} = G_{E\mathfrak{X}}$. Отсюда ввиду утверждения (1) леммы 1 справедливо равенство

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}}) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}})/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Если M — максимальная подгруппа группы $HG_{E\mathfrak{X}}$ и содержит ее $E\mathfrak{X}$-радикал $(HG_{E\mathfrak{X}})_{E\mathfrak{X}}$, то $M = (M \cap H) \times G_{E\mathfrak{X}}$ и $M \cap H$ — максимальная подгруппа группы H. Так как $H_{E\mathfrak{X}} = 1$, то $M \cap H$ содержит $E\mathfrak{X}$-радикал группы H. Верно и обратное: если S — максимальная подгруппа группы H, то $SG_{E\mathfrak{X}}$ — максимальная подгруппа из $HG_{E\mathfrak{X}}$, содержащая $E\mathfrak{X}$-радикал подгруппы $HG_{E\mathfrak{X}}$. Поэтому

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(HG_{E\mathfrak{X}}) = \Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \times G_{E\mathfrak{X}}.$$

Ввиду утверждения (1) леммы 1 имеем

$$HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G/G_{E\mathfrak{X}}) = HG_{E\mathfrak{X}}/G_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)/G_{E\mathfrak{X}}.$$

Кроме того, в силу тождества Дедекинда

$$HG_{E\mathfrak{X}} \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G) = (H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G))G_{E\mathfrak{X}}.$$

Таким образом, $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) \times G_{E\mathfrak{X}} = (H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G))G_{E\mathfrak{X}}$. Так как группа $HG_{E\mathfrak{X}}$ является прямым произведением своих холловых подгрупп H и $G_{E\mathfrak{X}}$, отсюда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(H) = H \cap \Phi_{E\mathfrak{X}}(G)$. Снова пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Напомним, что группа G обладает свойством C_π, если в группе существует по крайней мере одна π-холлова подгруппа и любые две такие подгруппы сопряжены. Если $\mathfrak{X}$ — класс всех простых π-групп, то с учетом леммы 2.3.1 из [6] имеем

Следствие 1. *Если H — нормальная холлова подгруппа C_π-группы G, то $\Phi_\pi(H) = H \cap \Phi_\pi(G)$.*

Следствие 2. *Если R — нормальная силовская подгруппа группы G, то $\Phi_p(H) = H \cap \Phi_p(G)$ для любого простого числа p.*

Замечание 1. В общем случае подгрупповой m-функтор $\theta_{E\mathfrak{X}}$ не является регулярным. Пусть, например, $\mathfrak{X} = (Z_3)$, где Z_3 — циклическая группа порядка 3, и G — симметрическая группа степени 4. Так как $O_3(G) = 1$, любая максимальная подгруппа из G входит в $\theta_{E\mathfrak{X}}(G)$. Пусть N — нормальная подгруппа из G, имеющая порядок 4, и M — такая максимальная подгруппа из G, что $|M| = 8$. Очевидно, $N \subseteq M$, но из $|O_3(G/N)| = 3$ следует, что M/N не принадлежит множеству $\theta_{E\mathfrak{X}}(G/N)$.

3. Классы $\Phi_{E\mathfrak{X}}$-эквивалентных подгрупповых m-функторов

Подгрупповые m-функторы θ_1 и θ_2 будем называть Φ-*эквивалентными*, если для любой группы G справедливо равенство $\Phi_{\theta_1}(G) = \Phi_{\theta_2}(G)$ (в этом случае мы пишем $\theta_1 \equiv_\Phi \theta_2$).

Пример 1. Пусть p — некоторое простое число. Тогда ввиду леммы 2.3.1 из [6] и леммы 1 подгрупповые m-функторы $\theta_{\mathfrak{G}_p}$ и θ_p Φ-эквивалентны.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп и H — простая неабелева группа, не принадлежащая классу $\mathfrak{X}$. Если M — максимальная подгруппа группы H, то положим, что $\theta_{\{H,M\}}$ — отображение, ставящее в соответствие группе H множество

$$\theta_{\{H,M\}}(H) = \{H, M^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(H)\},$$

а для любой группы S, которая не изоморфна H, положим

$$\theta_{\{H,M\}}(S) = \theta_{E\mathfrak{X}}(S).$$

Простая проверка показывает, что $\theta_{\{H,M\}}$ — подгрупповой m-функтор и для любой группы G справедливо равенство

$$\Phi_{\theta_{\{H,M\}}}(G) = \Phi_{\theta_{E\mathfrak{X}}}(G),$$

т. е. подгрупповые m-функторы $\theta_{\{H,M\}}$ и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ являются Φ-эквивалентными. Отсюда, в частности, следует, что если простая неабелева группа H содержит n различных классов автоморфно сопряженных максимальных подгрупп и H не принадлежит классу простых групп $\mathfrak{X}$, то существует по крайней мере n различных подгрупповых m-функторов, Φ-эквивалентных с подгрупповым m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Так как отношение $\equiv_\Phi$ является отношением эквивалентности, оно разбивает множество $\mathscr{M}$ всех подгрупповых m-функторов на попарно не пересекающиеся классы. Класс эквивалентности, содержащий подгрупповой m-функтор θ, будем обозначать далее через $[\theta, \equiv_\Phi]$. Из определения следует, что классы $[\theta_1, \equiv_\Phi]$ и $[\theta_2, \equiv_\Phi]$ совпадают тогда и только тогда, когда $\Phi_{\theta_1}(G) = \Phi_{\theta_1}(G)$ для любой группы G. Из примера 1 следует, что класс эквивалентности $[\theta, \equiv_\Phi]$ может содержать в общем случае как регулярные, так и нерегулярные подгрупповые m-функторы.

На множестве $\mathscr{M}$ всех подгрупповых m-функторов определим операции пересечения и объединения m-функторов следующим образом:

$$(\theta_1 \cap \theta_2)(G) = \theta_1(G) \cap \theta_2(G), \quad (\theta_1 \cup \theta_2)(G) = \theta_1(G) \cup \theta_2(G)$$

для любых двух m-функторов θ_1 и θ_2 и любой группы G. Простая проверка показывает, что $\theta_1 \cap \theta_2$ и $\theta_1 \cup \theta_2$ — подгрупповые m-функторы.

На множестве $\mathscr{M}$ естественным образом введем отношение частичного порядка: $\theta_1 \leq \theta_2$ тогда и только тогда, когда $\theta_1(G) \subseteq \theta_2(G)$ для любой группы G. Тогда $\mathscr{M}$ — полная бесконечно дистрибутивная решетка, в которой

$$\theta_1 \wedge \theta_2 = \theta_1 \cap \theta_2, \quad \theta_1 \vee \theta_2 = \theta_1 \cup \theta_2.$$

Минимальным элементом (нулем) этой решетки является *нулевой m-функтор*, т. е. такой m-функтор θ, что $\theta(G) = \{G\}$ для любой группы G. В качестве ее максимального элемента (единицы) выступает максимальный m-функтор, т. е. m-функтор, который выделяет в каждой группе все ее максимальные подгруппы.

Каждый элемент решетки $\mathscr{M}$ дополняем (в качестве дополнения m-функтора θ выступает дополнительный m-функтор, т. е. такой подгрупповой m-функтор, который в каждой группе G выделяет саму группу G и все те ее максимальные подгруппы, которые не принадлежат $\theta(G)$). Следовательно, решетка $\mathscr{M}$ является булевой.

Для любого подгруппового m-функтора θ класс эквивалентности $[\theta, \equiv_\Phi]$ является верхней полурешеткой, но в общем случае $[\theta, \equiv_\Phi]$ не является подрешеткой решетки $\mathscr{M}$. Пусть, например, $H \cong PSL(2,7)$ и $\mathfrak{X}$ — класс простых групп, не содержащий H. Пусть $\theta_1 = \theta_{\{H,M\}}$, где $M \cong S_4$, и $\theta_2 = \theta_{\{H,M\}}$, где $M \cong Z_7 : Z_3$. Тогда $\theta_1, \theta_2 \in [\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$, но подгрупповой m-функтор $\theta_1 \cap \theta_2$ не принадлежит $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$.

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс простых групп. В данном разделе исследуется мощность класса $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$, все подгрупповые m-функторы которого ввиду теоремы 2 обладают Hall Φ-свойством.

Напомним, что максимальная подгруппа M группы G *не покрывает* ее главный фактор A/B, если $B \subseteq M$ и $MA = G$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — собственный непустой подкласс класса всех простых групп. Тогда класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ содержит бесконечное число подгрупповых m-функторов.*

Доказательство. Покажем, что для любого натурального n существует по крайней мере n различных подгрупповых m-функторов, Φ-эквивалентных с m-функтором $\theta_{E\mathfrak{X}}$.

Так как $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{I}$, найдется по крайней мере одна простая группа S, которая не принадлежит $\mathfrak{X}$. Кроме того, из $\mathfrak{X} \neq \varnothing$ следует, что существует простая группа R, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Ясно, что группы S и R не являются изоморфными. Полагая, что $G_0 = S$, для $i = 1, \ldots, n$ построим рекурсивно по алгоритмам, описанным в лемме 4, монолитические группы

$$G_i = [N_i]([N_{i-1}](\ldots([N_1]S)\ldots)$$

с монолитом $N_i \in E(R)$, если i — нечетное число, $N_i \in E(S)$, если i — четное число. Поэтому $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_i) = N_i$, если i — нечетное число, и $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_i) = 1$, если i — четное число. Кроме того, в главном ряду

$$\begin{aligned}1 \subset N_i = A_1 \subset N_iN_{i-1} = A_2 \subset \cdots \subset N_iN_{i-1}\ldots N_1 \\ = A_i \subset N_iN_{i-1}\ldots N_1S = A_{i+1} = G_i\end{aligned}$$

группы G_i все главные факторы A_j/A_{j-1} $(j = 1, \ldots, i+1)$ нефраттиниевы. Поэтому для каждого главного фактора A_j/A_{j-1} в G_i найдется максимальная подгруппа M_j, которая его не покрывает.

Пусть для определенности n — четное число. Тогда $\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_n) = 1$. Так как группа G_n монолитическая с монолитом N_n и M_1 не покрывает N_n, то $\mathrm{Core}_{G_n}(M_1) = 1$. Для $j = 1, \ldots, n{+}1$ пусть $\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}$ — отображение, ставящее в соответствие группе G_n множество

$$\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}(G_n) = \{G_n, M_1^\alpha, M_j^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}(G_n)\},$$

а для любой группы G, которая не изоморфна G_n, положим

$$\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}(G) = \theta_{E\mathfrak{X}}(G).$$

Простая проверка показывает, что $\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}$ — подгрупповой m-функтор и для любой группы D справедливо равенство $\Phi_{\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}}(D) = \Phi_{\theta_{E\mathfrak{X}}}(D)$, т. е. подгрупповые m-функторы $\theta_{\{G_n, M_1, M_j\}}$ и $\theta_{E\mathfrak{X}}$ являются Φ-эквивалентными. Таким образом, если n — четное число, то класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ содержит не менее $n+1$ различных подгрупповых m-функторов.

Если n — нечетное число, то с учетом равенств

$$\Phi_{E\mathfrak{X}}(G_n) = N_1, \quad \mathrm{Core}_{G_n}(M_2) = N_1$$

класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_\Phi]$ также содержит не менее n различных подгрупповых m-функторов.

Предложение доказано.

Требование в предложении 1 собственности подкласса $\mathfrak{X}$ в классе $\mathfrak{I}$ всех простых групп существенно. Действительно, при $\mathfrak{X} = \mathfrak{I}$ для любой группы G справедливо равенство $G_{\mathfrak{X}} = G$. Поэтому нулевой m-функтор является единственным элементом класса эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_{\Phi}]$.

По аналогии с предложением 1 можно показать, что для пустого класса $\mathfrak{X}$ класс эквивалентности $[\theta_{E\mathfrak{X}}, \equiv_{\Phi}]$ также является бесконечным.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каморников С. Ф., Селькин М. В.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп. Минск: Белорусская наука, 2003.

2. *Скиба А. Н.* Алгебра формаций. Минск: Белорусская наука, 1997.

3. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф.* О функторном методе изучения решеток подгрупп конечных групп // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 1. С. 30–40.

4. *Каморников С. Ф.* О решетке регулярных транзитивных подгрупповых функторов // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 5. С. 1034–1040.

5. *Ballester-Bolinches A., Cosme-Llopez E., Kamornikov S. F.* On subgroup functors of finite soluble groups // Sci. China Math. 2017. V. 60. P. 439–448.

6. *Селькин М. В.* Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп. Минск: Белорусская наука, 1997.

7. *Baer R.* Supersoluble immersion // Canad. J. Math. 1959. V. 11. P. 353–369.

8. *Berkovich Y.* Alternate proofs of some basic theorems of finite groups theory // Glasnik Matematicki. 2005. V. 40. P. 207–233.

9. *Gaschütz W.* Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen // J. Reine Angew. Math. 1952. V. 190. P. 93–107.

10. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

11. *Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.* Новые свойства префраттиниевых подгрупп конечных разрешимых групп // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. 2011. № 1. С. 43–47.

12. *Deskins W. E.* A condition for the solvability of a finite group // Ill. J. Math. 1961. V. 5, N 2. P. 306–313.

13. *Гретцер Г.* Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

14. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

Поступила в редакцию 28 ноября 2024 г.
После доработки 28 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Йи Сяолан (Yi Xiaolan) (ORCID 0000-0001-8603-5893)
Чжэцзянский политехнический университет
(Zhejiang Sci-Tech University),
Ханчжоу 310018, Китай
yixiaolan2005@126.com

Ченг Биньхуэй (Cheng Binhui) (ORCID 0009-0000-7834-8881)
Чжэцзянский политехнический университет
(Zhejiang Sci-Tech University),
Ханчжоу 310018, Китай
t1776477642@126.com

Бородич Руслан Викторович (ORCID 0000-0002-9715-721X)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
borodich@gsu.by

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 510.5

ОБ ОДНОМ ВОПРОСЕ ТЕОРИИ НУМЕРОВАННЫХ ГРУПП

Н. Х. Касымов

Аннотация. Установлено, что ядро представления любой нумерованной группы является перестановочно вычислимой эквивалентностью. Доказано существование перестановочно вычислимой эквивалентности, над которой не определима никакая группа.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.207

Ключевые слова: нумерованная группа, определимость группы над эквивалентностью, перестановочно вычислимая эквивалентность.

1. Введение

Следуя Ю. Л. Ершову [1, с. 297], дадим определение нумерованной универсальной алгебры эффективной сигнатуры $\sigma = \langle =, f_0^{m_0}, f_1^{m_1}, \dots \rangle$, где m_i — число аргументов функции, в которую интерпретируется функциональный символ $f_i^{m_i}$ и отображение $h : n \longmapsto m_n$ вычислимо.

Определение 1. *Нумерацией* алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; g_0, g_1, \dots \rangle$ сигнатуры σ называется всякое отображение $\nu : \omega \longrightarrow A$ множества натуральных чисел ω на основное множество A алгебры $\mathfrak{A}$, для которого выполнено следующее условие: существует двухместная вычислимая функция G такая, что для любого $n \in \omega$ и любых $y_1, \dots, y_{m_n}$ имеет место равенство $g_n(\nu y_1, \dots, \nu y_{m_n}) = \nu G(n, c^{m_n}(y_1, \dots, y_{m_n}))$, где c^{m_n} — канторовская функция нумерации всех последовательностей натуральных чисел длины m_n.

Другими словами, по ν-номерам элементов из A и номеру операции g_n можно эффективно найти некоторый ν-номер результата применения этой операции к данным элементам.

Если $\nu : \omega \longrightarrow A$ — нумерация алгебры $\mathfrak{A}$, то пара $(\mathfrak{A}, \nu)$ называется *нумерованной алгеброй.*

Отметим, что всякая не более чем счетная алгебра эффективной сигнатуры имеет нумерацию [1].

Под *представлением* будем понимать нумерацию. *Ядром представления* ν *нумерованной алгебры* $(\mathfrak{A}, \nu)$ будем называть эквивалентность $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$. Если ν — представление, то его ядро будем обозначать через $\ker(\nu)$.

Для фиксированной системы классической является проблема изучения различных ее алгоритмических представлений и соотношений между ними (см.

Автор поддержан в рамках Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2024-1438).

работу [2] С. С. Гончарова и Ю. Л. Ершова), в частности, проблема существования хороших представлений (в первую очередь конструктивных) и их числа (в том числе единственности с точностью до вычислимого изоморфизма).

С другой стороны, в рамках парадигмы двойственности можно фиксировать ядро представления и изучать общие свойства систем, обладающих представлениями с данным ядром. Этот подход представляется целесообразным с точки зрения теории алгоритмических представлений систем в целом ряде задач, в том числе в теоретической информатике (см. статью [3] и обзор [4]).

Изучению алгоритмических свойств эквивалентностей на множестве натуральных чисел в настоящее время уделяется большое внимание. Здесь можно отметить работы Эндрюса, Сорби, Бернарди, Сан Мауро, Лемппа, Нг, С. А. Бадаева, Н. А. Баженова, Б. С. Калмурзаева и др. Библиографию по этим вопросам можно найти в списках литературы к работам [5, 6]. Богатая библиография в рамках вышеупомянутой парадигмы есть у С. С. Гончарова и Ю. Л. Ершова в [2]. Тесно примыкают к этой проблематике вопросы строения алгебр, определимых над эквивалентностями.

Если η — эквивалентность на множестве натуральных чисел ω, то универсальная алгебра $\mathfrak{A}$ называется *определимой над* η (или η-*алгеброй*), если существует ее нумерация ν с ядром, равным η (т. е. $\eta = \{\langle x, y\rangle \mid \nu x = \nu y\}$). Другими словами, алгебра $\mathfrak{A}$ определима над эквивалентностью η, если существует такое семейство (не обязательно эффективное) F вычислимых функций, согласованных с η, т. е. для каждой

$$f \in F : \forall \overline{x}, \overline{y}\ [\overline{x} = \overline{y} \pmod{\eta} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\eta}]$$

такой, что $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; F\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ по конгруэнции η. При этом естественный проектирующий гомоморфизм $\nu(x) = x/\eta$ и является нумерацией из вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ на $\mathfrak{A}$. Уместно отметить, что роль и место вычислимых алгебр в теории нумерованных алгебр подобны роли и месту абсолютно свободных алгебр подходящего ранга в теории универсальных алгебр, так как и в том, и в другом случае существует гомоморфизм из подходящей вычислимой (некоторой свободной) алгебры на $\mathfrak{A}$. При таком подходе свойство универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ быть η-алгеброй равносильно существованию такого семейства (не обязательно вычислимого) F вычислимых функций, что $\mathfrak{A}$ изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; F\rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; F\rangle$ по конгруэнции η.

Слово *эквивалентность* означает отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел ω. Если η — эквивалентность, то множество $\alpha \subseteq \omega$ называется η-*замкнутым*, если α является объединением подходящих η-классов (т. е. $x \in \alpha \wedge x = y \,(\mathrm{mod}\,\eta) \Rightarrow y \in \alpha$).

Если η — эквивалентность на ω, то семейство η-замкнутых вычислимых (вычислимо перечислимых) множеств задает базу вычислимой (перечислимой) топологии $\tau(\eta)_C$ (соответственно $\tau(\eta)_{CE}$) на фактор-множестве ω/η.

Эквивалентность η называется вычислимо отделимой (отделимой), если для любых $x \neq y \pmod{\eta}$ существует вычислимое η-замкнутое множество, содержащее x и не содержащее y (существует такое вычислимо перечислимое η-замкнутое множество α, что $x \in \alpha \wedge y \notin \alpha$ либо $y \in \alpha \wedge x \notin \alpha$).

Пусть (N, ν) — нумерованное множество. Подмножество N_0 множества N называется ν–*вычислимым* (ν-*перечислимым*, ν-*коперечислимым*), если вычислимо (вычислимо перечислимо, коперечислимо) множество $\nu^{-1}N_0$. Если из контекста будет ясно, какая нумерация множества имеется в виду, то его подмножества будем называть просто *вычислимыми* (*перечислимыми, коперечислимыми*) без приставки ν.

Нумерация называется *вычислимо отделимой* (*отделимой*), если вычислимо отделимо (отделимо) ее ядро. Нумерация ν называется *эффективно отделимой*, если таково ее ядро $\ker(\nu)$, т. е. существует такое вычислимое семейство $\mathfrak{S}$ вычислимо перечислимых $\ker(\nu)$-замкнутых множеств, что для любых $x, y \in \omega$ если $\nu x \neq \nu y$, то найдется $S \in \mathfrak{S}$ такое, что $\nu x \in \nu S \wedge \nu y \notin \nu S$ либо $\nu y \in \nu S \wedge \nu x \notin \nu S$ [7]. Такие семейства будем называть *полными*.

Таким образом, если отделимость обеспечивает T_0-отделимость пространства, порожденного ν-перечислимыми подмножествами, то эффективная отделимость гарантирует наличие вычислимой нумерации для подходящего полного отделяющего семейства.

2. Нумерованные группы и перестановочно вычислимые эквивалентности

Исходя из вышесказанного, если η — эквивалентность на ω, то группа G называется *определимой над* η (или η-группой), если существует вычислимая универсальная алгебра $\langle \omega; *, [\ ]^{-1} \rangle$ (в сигнатуре с одной бинарной $*$ и одной унарной $[\ ]^{-1}$ функциями) с вычислимыми операциями $*, [\ ]^{-1}$, для которых η является конгруэнцией (т. е. $x_0 = y_0 \pmod{\eta} \wedge x_1 = y_1 \pmod{\eta} \Rightarrow x_0 * x_1 = y_0 * y_1 \pmod{\eta}$ и $x = y \pmod{\eta} \Rightarrow [x]^{-1} = [y]^{-1} \pmod{\eta}$) такая, что группа G изоморфна фактор-алгебре $\langle \omega/\eta; *, [\ ]^{-1} \rangle$ вычислимой алгебры $\langle \omega; *, [\ ]^{-1} \rangle$ по конгруэнции η.

Определение 2. Эквивалентность η называется *перестановочно вычислимой*, если существует вычислимое семейство F вычислимых функций, согласованных с η (т. е. $\forall f \in F[\overline{x} = \overline{y} \pmod{\eta} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \pmod{\eta}]$), индуцирующих такие перестановки фактор-множества ω/η, что для любой пары натуральных чисел x, y найдется функция из F, которая m-сводит класс x/η к классу y/η.

Тривиальными примерами перестановочно вычислимых эквивалентностей являются вычислимые эквивалентности, над которыми, очевидно, определимы вычислимо представимые группы.

Будем использовать стандартные λ-обозначения Черча вида $f = \lambda x.[\ldots x \ldots]$, где x — аргумент функции f.

Теорема 2.1. *Ядро любой нумерации всякой группы — перестановочно вычислимая эквивалентность.*

Доказательство. Пусть (G, ν) — нумерованная группа. Тогда почти очевидно, что ядро $\ker(\nu)$ нумерации ν — перестановочно вычислимая эквивалентность. В самом деле, для произвольных $x, a, b \in \omega$ имеем цепочку эквивалентностей:

$$x \in a/\eta \Leftrightarrow \nu x = \nu a \Leftrightarrow \nu x(\nu a)^{-1}\nu b = \nu a(\nu a)^{-1}\nu b$$
$$\Leftrightarrow \nu(x * ([a]^{-1} * b)) = \nu b \Leftrightarrow x * ([a]^{-1} * b) \in b/\eta,$$

откуда следует, что вычислимая функция $\lambda x.[x * ([a]^{-1} * b)]$ m-сводит a/η к b/η.

Очевидно, что семейство всех таких функций имеет вычислимую нумерацию, и каждая такая функция задает на элементах группы G перестановку $\nu x \mapsto \nu x((\nu a)^{-1}\nu b)$. $\square$

Сделаем три замечания по поводу почти тривиального доказательства теоремы 2.1:

Во-первых, в предъявленном доказательстве мы неявно пользовались теоремой Кэли о вложимости группы в симметрическую группу перестановок на ней. В самом деле, элементу a группы G сопоставляется перестановка $\pi_a = \lambda x.[xa]$ на G и изоморфность этого соответствия очевидна, так как $\pi_{ab}(x) = \pi_b(\pi_a(x))$.

Во-вторых, естественная нумерация $\mu : \omega \longrightarrow F$, где $F = \{\lambda x.[xa] \mid a \in G\}$ и $\mu(a) = \lambda x.[xa]$, есть вычислимая нумерация семейства F, ядро которой совпадает с $\ker(\nu)$, так как $\mu u = \mu v \Leftrightarrow \nu u = \nu v$. Таким образом, теорема 2.1 подтверждает эффективную природу теоремы Кэли.

Наконец, в-третьих, отметим, что m-сводящий алгоритм в доказательстве теоремы 2.1 находится эффективно равномерно по a и b.

3. Постановка вопроса и его решение

В связи с теоремой 2.1 возник естественный вопрос о возможности ее обращения: *над всякой ли перестановочно вычислимой эквивалентностью определима некоторая группа?*

Иными словами, всякая ли перестановочно вычислимая эквивалентность является ядром нумерации подходящей нумерованной группы?

В работе [8] утверждалось, что существует контрпример. Однако в доказательстве имеется существенный пробел, заключающийся в том, что ключевым его моментом является апелляция к непрерывности вычислимых функций относительно эффективно порожденных топологий. В настоящий момент вопрос о непрерывности открыт. Тем не менее факт существования перестановочно вычислимой эквивалентности, над которой не определима никакая группа, оказался верным, доказательству чего и посвящена настоящая статья.

Определение 3. Множество называется *вычислимо прошиваемым*, если существует вычислимая перестановка без конечных циклов с бесконечным числом орбит, в каждой из которых содержится ровно один элемент этого множества.

Если множество α содержит в точности по одному элементу в каждой орбите вычислимой перестановки p без конечных циклов с бесконечным числом орбит, то будем говорить, что *p прошивает α* (или, что *α прошивается p*). Для множества α, прошиваемого вычислимой перестановкой p, через $\eta_{\alpha,p}$ обозначим эквивалентность

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}\ (p^n(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha),$$

где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел и $p^0(x) = x$, которая, очевидно, является перестановочно вычислимой эквивалентностью, любая пара смежных классов которой вычислимо изоморфна.

Эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ будем называть *вычислимо прошиваемой, порожденной множеством α и перестановкой p*. Заметим, что для любого $n \in \mathbb{Z}$ эквивалентность $\eta_{\alpha_n,p}$ совпадает с $\eta_{\alpha,p}$, где $\alpha_n = p^n(\alpha)$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее в целях сокращения вместо «вычислимо прошивается» иногда будем говорить «прошивается», а говоря о перестановках на ω будем подразумевать вычислимые перестановки.

Предложение 3.1. *Если вычислимо перечислимое множество α прошивается перестановкой p, то эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ разрешима.*

Доказательство. В самом деле,

$$x = y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}(p^m(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha \wedge m = n).$$

Ясно также, что

$$x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,p}} \Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}(p^m(x) \in \alpha \wedge p^n(y) \in \alpha \wedge m \neq n). \quad \square$$

Таким образом, если хотя бы один класс прошиваемой эквивалентности вычислимо перечислим (в частности, если прошиваемая эквивалентность позитивна), то и все классы таковы же, а сама эквивалентность разрешима и над ней тривиально определима любая вычислимо представимая бесконечная группа.

Назовем эквивалентность *локально негативной*, если хотя бы один смежный класс этой эквивалентности коперечислим.

Предложение 3.2. *Всякая нумерация группы с локально негативным ядром является негативной.*

Доказательство. Пусть (G, ν) — локально негативная группа, $*$ — вычислимая функция, представляющая групповую операцию группы G в нумерации ν и $[\,]^{-1}$ — вычислимая операция, поддерживающая операцию взятия обратного элемента.

Допустим, что множество $\nu^{-1}a$ коперечислимо и $\nu a_0 = a$. Тогда для произвольных $x, y \in \omega$ имеем

$$\nu x = \nu y \Leftrightarrow a = \nu x(\nu x)^{-1}a = \nu y(\nu x)^{-1}a$$
$$\Leftrightarrow a = \nu((y * [x]^{-1}) * a_0) \Leftrightarrow (y * [x]^{-1}) * a_0 \in \nu^{-1}a,$$

откуда следует негативность ν. $\square$

В работе [9] доказано следующее

Предложение 3.3. *Существуют вычислимо прошиваемое множество α и прошивающая его вычислимая перестановка p такие, что*

(1) *каждый $\eta_{\alpha,p}$-класс коперечислим, но эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ не является негативной;*

(2) *всякая пара непустых вычислимо перечислимых $\eta_{\alpha,p}$-замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Назовем эквивалентность η *хаусдорфовой* (T_1-*отделимой*), если топологическое пространство $(\omega/\eta; \tau)_{CE}$ является T_2-отделимым (T_1-отделимым).

Теорема 3.4. *Существует эффективно отделимая перестановочно вычислимая нехаусдорфова T_1-отделимая эквивалентность, над которой не определима никакая группа.*

Доказательство. Возьмем $\eta_{\alpha,p}$ из предложения 3.3. Свойство 1 из предложения 3.3 обеспечивает не-негативность этой эквивалентности. T_1-отделимость следует из того, что каждый $\eta_{\alpha,p}$-класс коперечислим. Нехаусдорфовость вытекает из свойства 2 предложения 3.3.

Допустим, что существует $\eta_{\alpha,p}$-группа. Тогда в силу локальной негативности эквивалентности $\eta_{\alpha,p}$ согласно предложению 3.2 эта эквивалентность должна быть негативной; противоречие.

Покажем, что эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ эффективно отделима. Положим $\alpha_0 = \omega \setminus \alpha$ и $\alpha_n = p^n(\alpha_0)$. Тогда семейство $\mathfrak{S} = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ — полное T_1-отделяющее семейство вычислимо перечислимых $\eta_{\alpha,p}$-замкнутых множеств. В самом деле, пусть $x \neq y \pmod{\eta_{\alpha,p}}$ и $p^m(x) \in \alpha$, $p^n(y) \in \alpha$. По условию $m \neq n$. Множество α_m, являющееся вычислимо перечислимым и $\eta_{\alpha,p}$-замкнутым, не содержит x и содержит y, поэтому оно является вычислимо перечислимой окрестностью элемента $y/\eta_{\alpha,p}$, отделяющей этот элемент от $x/\eta_{\alpha,p}$. Симметрично $y \notin \alpha_n \wedge x \in \alpha_n$

и α_n — вычислимо перечислимая окрестность элемента $x/\eta_{\alpha,p}$, отделяющая его от $y/\eta_{\alpha,p}$. Следовательно, эквивалентность $\eta_{\alpha,p}$ является не просто T_1-отделимой, но и обладает вычислимым семейством $\mathfrak{S} = \{\alpha_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ отделящих множеств. Теперь построим следующую нумерацию $\mu : \omega \longrightarrow \mathfrak{S}$ семейства $\mathfrak{S}$. Определим $\mu(0) = \alpha_0$ и $\mu(2k) = \alpha_k$, $\mu(2k+1) = \alpha_{-k-1}$ для всех $k \in \omega$. Тогда μ — вычислимая нумерация семейства $\mathfrak{S}$, причем нумерация однозначная (фридбергова). $\square$

Подчеркнем, что эффективная отделимость эквивалентности означает, что она лежит в классе Π^0_2 арифметической иерархии, хотя не имеет в ней четкой «координатизации», так как существуют как эффективно отделимые эквивалентности вне класса Δ^0_2, так и Δ^0_2-эквивалентности, не являющиеся эффективно отделимыми, однако как Σ^0_1-эквивалентности, так и Π^0_1-эквивалентности лежат в классе эффективно отделимых эквивалентностей [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.
2. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
3. *Касымов Н. Х.* Нумерованные алгебры с равномерно рекурсивно отделимыми классами // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 5. С. 85–102.
4. *Kasymov N. Kh., Dadazhanov R. N., Ibragimov F. N.* Separable algorithmic representations of classical systems and their applications // J. Math. Sci. 2024. V. 278, N 3. P. 476–519.
5. *Andrews U., Lempp S., Miller J., Ng K., San Mauro L., Sorbi A.* Universal computably enumerable equivalence relations // J. Symbol. Logic. 2014. V. 79, N 1. P. 60–88.
6. *Andrews U., Belin D. F., San Mauro L.* On the structure of computable reducibility on equivalence relations of natural numbers // J. Symbol. Logic. 2022. V. 88, N 3. P. 1038–1063.
7. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
8. *Касымов Н. Х., Дадажанов Р. Н., Джавлиев С. К.* Uniform m-equivalences and numberings of classical systems // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 1. С. 400–424.
9. *Касымов Н. Х., Морозов А. С., Ходжамуратова И. А.* О T_1-отделимых нумерациях подпрямо неразложимых алгебр // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 4. С. 37–57.

Поступила в редакцию 15 августа 2024 г.
После доработки 28 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Касымов Надимулла Хабибуллаевич (ORCID 0000-0003-4940-0649)
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
ул. Университетская, 4, Ташкент 100174, Республика Узбекистан
nadim59@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.929

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Обуховский, М. И. Каменский, Г. Г. Петросян, Т. А. Ульвачева, Ш. Цзэн

Аннотация. Исследуются системы дробно-дифференциальных включений в банаховом пространстве, правые части которых являются многозначными отображениями типа Каратеодори, зависящими от времени, конечного набора функций и их производных. Для решения задачи существования решений такой системы применяется теория дробного математического анализа и теория топологической степени для многозначных уплотняющих отображений.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.208

Ключевые слова: дифференциальное включение, дробная производная, краевая задача, мера некомпактности, неподвижная точка, уплотняющее мультиотображение.

Посвящается юбилею профессора А. А. Толстоногова

Введение

В последние десятилетия теория дифференциальных включений в банаховых пространствах активно развивается и находит многочисленные интересные приложения в теории управления (см., например, [1–3]). В то же время интерес исследователей в России и за рубежом к различным аспектам дробного анализа и теории дифференциальных уравнений и включений дробного порядка существенно возрастает. Значимость этой темы во многом обусловлена ее разнообразными приложениями во многих областях прикладной математики, физики, техники, биологии, экономики и т. д. (см., например, монографии [4–7]). В настоящее время топологический подход, восходящий к [3–8] и использующий методы многозначного анализа, теории полугрупп, теории топологической степени и неподвижных точек (см. [9–23] и ссылки в них), продемонстрировал свою высокую эффективность при исследовании различных задач теории дробных дифференциальных включений.

В настоящей работе изучаются системы дифференциальных включений дробных порядков в произвольных банаховых пространствах. Вводится разрешающий многозначный оператор для этой системы и описываются его свойства. В частности, показано, что этот мультиоператор является уплотняющим

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.

относительно специальной векторной меры некомпактности, заданной на декартовом произведении банаховых пространств. Это позволяет, применяя некоторые теоремы о неподвижной точке для мультиоператоров такого типа, доказать локальную и глобальную теоремы существования интегральных решений этой системы.

Настоящая работа имеет следующую структуру. В разд. 1 приведены необходимые сведения из дробного и многозначного анализа, а также из теории мер некомпактности, уплотняющих мультиоператоров и теории неподвижных точек. В разд. 2 вводится и исследуется разрешающий мультиоператор для системы и приведена локальная и глобальная теоремы существования интегральных решений системы дифференциальных включений. В последнем случае также устанавливаются компактность множества решений и полунепрерывная сверху зависимость множества решений от начальных данных.

1. Предварительные сведения

1.1. Дробные интеграл и производная. Вначале введем необходимые понятия и обозначения из дробного математического анализа (см. [4, 5]).

Определение 1.1. *Дробным интегралом порядка $q > 0$ функции $g : [0,T] \to E$* называется функция $I^q g$ следующего вида:

$$I_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} g(s)\, ds,$$

где Γ — гамма-функция Эйлера.

Определение 1.2. *Дробной производной Герасимова — Капуто порядка $q \in (N-1, N]$ функции $g \in C^N([0,T];E)$* называется функция ${}^C D_0^q g$ следующего вида:

$${}^C D_0^q g(t) = \frac{1}{\Gamma(N-q)} \int\limits_0^t (t-s)^{N-q-1} g^{(N)}(s)\, ds.$$

Для $g \in C^N([0,T];E)$ имеет место следующая формула:

$${}^C D_0^q I_0^q g(t) = g(t), \quad I_0^q\ {}^C D_0^q g(t) = g(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} t^k.$$

1.2. Многозначные отображения. Нам понадобятся некоторые сведения из многозначного анализа и теории топологической степени для уплотняющих отображений (см., например, [3, 8]).

Пусть $\mathscr{E}$ – банахово пространство, обозначим:

- $P(\mathscr{E}) = \{A \subseteq \mathscr{E} : A \neq \varnothing\}$ совокупность всех непустых подмножеств $\mathscr{E}$;
- $Pb(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ ограничено$\}$;
- $Pv(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ выпукло$\}$;
- $C(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ замкнуто$\}$;
- $K(\mathscr{E}) = \{A \in P(\mathscr{E}) : A$ компактно$\}$;
- $Kv(\mathscr{E}) = \{Pv(\mathscr{E}) \cap K(\mathscr{E})\}$ — совокупность всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\mathscr{E}$.

Определение 1.3. Пусть $(\mathscr{A}, \geq)$ — частично упорядоченное множество. Функция $\beta : Pb(\mathscr{E}) \to \mathscr{A}$ называется *мерой некомпактности* (МНК) в $\mathscr{E}$, если для любого множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ имеет место равенство $\beta(\overline{\mathrm{co}}\,\Omega) = \beta(\Omega)$, где $\overline{\mathrm{co}}\,\Omega$ – замыкание выпуклой оболочки Ω.

Мера некомпактности β называется:

(1) *монотонной*, если для всех $\Omega_0, \Omega_1 \in Pb(\mathscr{E})$ из $\Omega_0 \subseteq \Omega_1$ следует, что $\beta(\Omega_0) \leq \beta(\Omega_1)$;

(2) *несингулярной*, если для каждого $a \in E$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$ имеем $\beta(\{a\} \cup \Omega) = \beta(\Omega)$.

Если $\mathscr{A}$ – конус в банаховом пространстве, то МНК β называется:

(3) *правильной*, если равенство $\beta(\Omega) = 0$ эквивалентно относительной компактности множества $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$;

(4) *вещественной*, если $\mathscr{A}$ — множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ с естественным порядком.

Примером МНК, удовлетворяющей всем вышеперечисленным свойствам, является МНК Хаусдорфа $\chi(\Omega)$:

$$\chi(\Omega) = \inf\{\varepsilon > 0, \text{ для которых } \Omega \text{ имеет конечную } \varepsilon\text{-сеть в } \mathscr{E}\}.$$

Заметим, что МНК Хаусдорфа удовлетворяет свойству полуоднородности, т. е. $\chi(\lambda\Omega) = |\lambda|\chi(\Omega)$ для каждого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого $\Omega \in Pb(\mathscr{E})$.

Для $M \subset \mathscr{E}$ норма определяется как $\|M\| = \sup\limits_{x \in M} \|x\|_{\mathscr{E}}$.

Определение 1.4 (см., например, [3, 8]). Пусть X — метрическое пространство. Многозначное отображение (мультиотображение) $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ называется:

(i) *полунепрерывным сверху* (п.н.св.), если $\mathscr{F}^{-1}(V) = \{x \in X : \mathscr{F}(x) \subset V\}$ открыто в X для любого открытого множества $V \subset \mathscr{E}$;

(ii) *замкнутым*, если его график $\Gamma_{\mathscr{F}} = \{(x, y) : y \in \mathscr{F}(x)\}$ есть замкнутое подмножество $X \times \mathscr{E}$;

(iii) *компактным*, если $\mathscr{F}(X) = \bigcup\limits_{x \in X} F(x)$ относительно компактно в $\mathscr{E}$;

(iv) *квазикомпактным*, если его сужение на любое компактное подмножество $A \subset X$ компактно.

Лемма 1.1 (см. [3, теорема 1.1.12]). *Пусть мультиотображение $\mathscr{F} : X \to P(\mathscr{E})$ квазикомпактно, тогда $\mathscr{F}$ — п.н.св.*

Пусть X — замкнутое подмножество банахова пространства $\mathscr{E}$.

Определение 1.5. П.н.св. мультиотображение $\mathscr{F} : X \to K(\mathscr{E})$ или п.н.св. семейство мультиотображений $\Psi : X \times [0, 1] \to K(\mathscr{E})$ называются *β-уплотняющими*, если для любого $\Omega \subset X$, которое не является относительно компактным, имеем соответственно

$$\beta(\mathscr{F}(\Omega)) \ngeq \beta(\Omega),$$

или

$$\beta(\Psi(\Omega \times [0, 1])) \ngeq \beta(\Omega).$$

Теорема 1.1 (см. [3, следствие 3.3.1]). *Пусть β — несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$, $\mathfrak{M}$ — непустое выпуклое замкнутое ограниченное подмножество $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \mathfrak{M} \to Kv(\mathfrak{M})$ — β-уплотняющее мультиотображение. Тогда $\mathscr{F}$ имеет хотя бы одну неподвижную точку $x_\star \in \mathfrak{M}$, $x_\star \in \mathscr{F}(x_\star)$.*

Теорема 1.2 (см. [3, следствие 3.3.3]). *Пусть β — монотонная несингулярная мера некомпактности в $\mathscr{E}$, $\mathscr{U}$ — ограниченная открытая окрестность точки $a \in \mathscr{E}$ и $\mathscr{F} : \overline{U} \to Kv(\mathscr{E})$ — β-уплотняющее мультиотображение, удовлетворяющее граничному условию*

$$x - a \notin \lambda(\mathscr{F} - a)$$

для всех $x \in \partial\mathscr{U}$ и $0 < \lambda \leq 1$. Тогда множество всех неподвижных точек $\mathscr{F}$ непусто и компактно.

1.3. Измеримые мультифункции. Напомним некоторые сведения (см., например, [3, 8]). Пусть E — банахово пространство.

Определение 1.6. Пусть $p \geq 1$. Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ называется:

• L^p*-интегрируемой*, если G допускает L^p-интегрируемое по Бохнеру сечение, т. е. существует функция $g \in L^p([0,T]; E)$ такая, что $g(t) \in G(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$;

• L^p*-интегрально ограниченной*, если существует функция $\xi \in L^p([0,T])$ такая, что $\|G(t)\| \leq \xi(t)$ для п.в. $t \in [0,T]$.

Множество всех L^p-интегрируемых сечений $G : [0,T] \to K(E)$ будем обозначать через $\mathscr{W}_G^p$.

Мультифункция $G : [0,T] \to K(E)$ называется *измеримой*, если для каждого открытого подмножества $V \subset E$ множество $G^{-1}(V)$ измеримо по Лебегу.

Лемма 1.2 (см. [3, теорема 4.2.1]). *Пусть последовательность функций $\{\xi_n\} \subset L^1([0,T]; E)$ является L^1-ограниченной и*

$$\chi(\{\xi_n\}(t)) \leq \alpha(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0,T]$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$, где $\alpha \in L^1_+([0,T])$. Тогда для любого $\delta > 0$ существуют компактное множество $K_\delta \subset E$, множество $m_\delta \subset [0,T]$ с мерой Лебега $m_\delta < \delta$ и множество функций $G_\delta \subset L^1([0,T]; E)$ со значениями в K_δ такие, что для каждого $n \geq 1$ существует функция $b_n \in G_\delta$, для которой

$$\|\xi_n(t) - b_n(t)\|_E \leq 2\alpha(t) + \delta, \quad t \in [0,T] \setminus m_\delta.$$

Более того, последовательность $\{b_n\}$ может быть выбрана так, что $b_n \equiv 0$ на m_δ и эта последовательность слабо компактна.

2. Основные результаты

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — банаховы пространства. Рассмотрим банахово пространство

$$E^N = E_1^N \times \cdots \times E_n^N$$

где $E_i^N = E_i \times E_i \times \cdots \times E_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, с нормой

$$\|x\|_{E^N} = \max_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq N} \|x_{ij}\|_{E_i^j}, \quad x = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nN}).$$

Будем изучать следующую систему дифференциальных включений дробного порядка в пространстве E^N:

$$
\begin{cases}
{}^C D_0^{q_1} x_1(t) \in F_1(t, \Delta^N x_1(t), \dots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0, T], \\
{}^C D_0^{q_2} x_2(t) \in F_2(t, \Delta^N x_1(t), \dots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0, T], \\
\dots \\
{}^C D_0^{q_n} x_n(t) \in F_n(t, \Delta^N x_1(t), \dots, \Delta^N x_n(t)), \quad t \in [0, T],
\end{cases}
\tag{1}
$$

где ${}^C D_0^{q_i}$ — дробные производные Герасимова — Капуто порядков q_i, $N-1 < q_i < N$, $i = 1, \dots, n$, $N \geq 1$, и $\Delta^N x_i = \left(x_i, x_i', x_i'', \dots x_i^{(N-1)}\right)$. Мультиоператор $F_i : [0, T] \times E^N \to Kv(E_i)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяет следующим условиям:

$(F1_i)$ для каждого $x \in E^N$ мультифункции $F_i(\cdot, x) : [0, T] \to Kv(E_i)$ имеют сильно измеримое сечение;

$(F2_i)$ для п.в. $t \in [0, T]$ мультиоператоры $F_i(t, \cdot) : E^N \to Kv(E_i)$ п.н.св.;

$(F3_i)$ для $p_i > \frac{1}{q_i - N + 1}$ мультиотображения F_i локально L^{p_i}–интегрально ограничены, т. е. для каждого $r > 0$ существуют функции $w_{ri} \in L_+^{p_i}(0, T)$ такие, что для всех $x \in E^N$, $\|x\|_{E^N} \leq r$:

$$
\|F_i(t, x)\|_{E_i} := \sup\{\|y\|_{E_i} : y \in F_i(t, x)\} \leq w_{ri}(t) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T].
$$

Введем в рассмотрение многозначное отображение $F : [0, T] \times E \to Kv(E)$,

$$
F(t, x) = F_1(t, x) \times \dots \times F_n(t, x).
$$

Для формулировки следующего свойства F_i введем в пространстве E^N векторную МНК Хаусдорфа $\mathscr{X}$, полагая для ограниченного множества $\Omega \subset E^N$

$$
\mathscr{X}(\Omega) = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_1}\left(\Omega_1^j\right), \dots, \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_n}\left(\Omega_n^j\right) \right)^T \in \mathbb{R}_+^n,
$$

где χ_{E_i} — МНК Хаусдорфа в E_i, $\Omega_i^j = \left\{x_i^{(j)} : x_i \in \Omega_i^0 = \Omega_i\right\}$, $j = 0, \dots, N-1$, и Ω_i^j — проекция множества Ω^j на E_i, $i = 1, \dots, n$. Будем полагать, что мультиотображение F, удовлетворяет следующему условию $\mathscr{X}$-регулярности:

$(F4_i)$ существуют функции $\mu_i \in L_+^{p_i}(0, T)$, $i = 1, \dots, n$, такие, что для всех ограниченных множеств $\Omega^j \subset E$, $j = 0, 1, \dots, N-1$, имеем

$$
\mathscr{X}(F(t, \Omega)) \leq \mathscr{M}(t) \mathscr{X}(\Omega) \quad \text{для п.в. } t \in [0, T],
$$

где матрица $\mathscr{M}(t)$ имеет следующий вид:

$$
\mathscr{M}(t) = \begin{pmatrix}
\mu_1(t) & 0 & \dots & 0 \\
0 & \mu_2(t) & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & \mu_n(t)
\end{pmatrix}.
$$

Перейдем к рассмотрению задачи существования интегральных решений $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ для системы (1), удовлетворяющих начальным условиям

$$
\Delta^N x_1(0) = X_{01} \in E_1^N, \dots, \Delta^N x_n(0) = X_{0n} \in E_n^N, \tag{2}
$$

где $X_{0i} = (x_{0i}, x_{1i}, \dots, x_{N-1i})$, $i = 1, 2, \dots, n$. Положим $X_0 = (X_{01}, X_{02}, \dots, X_{0n}) \in E^N$.

Введем в рассмотрение суперпозиционный мультиоператор

$$\Phi_{F_i} : [0,\tau] \to Kv(E), \quad \Phi_{F_i}(t) = F_i(t, \Delta^N x_1(t), \ldots, \Delta^N x_n(t)).$$

Функции $x_i : [0,\tau] \to E_i$ непрерывны. Поэтому с учетом свойств $(F1_i)$–$(F3_i)$ Φ_{F_i} L^{p_i}-интегрируемо и L^{p_i}-локально ограничено (см. [3]). Определим мультифункцию $\mathscr{P}_{F_i}$ по формуле

$$\mathscr{P}_{F_i}(x_i) = \{f_i \in L^{p_i}([0,\tau]; E_i) : f_i(t) \in \Phi_{F_i}(t)\}.$$

Справедливо следующее свойство слабой замкнутости для $\mathscr{P}_{F_i}$, доказательство которого может быть проведено по аналогии с леммой 5.1.1 из [3].

Лемма 2.1. *Пусть $\{x_i^m\}$ — последовательность в $C([0,\tau]; E_i)$, сходящаяся к $x_i^* \in C([0,\tau]; E_i)$. Предположим, что последовательность $\{f_i^m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E_i)$, $f_i^m \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i^m)$, слабо сходится к функции f^*. Тогда $f^* \in \mathscr{P}_{F_i}(x^*)$.*

Определение 2.1. *Интегральным решением задачи* (1), (2) на промежутке $[0,\tau]$, $0 < \tau \le T$, называется функция $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где

$$x_i(\cdot) \in C([0,\tau]; E_i), \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$x_i(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} x_i^{(j)}(0) + \frac{1}{\Gamma(q)} \int\limits_0^t (t-s)^{q-1} f_i(s)\, ds, \quad f_i \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i).$$

Для заданного $\tau \in [0,T]$ определим операторы

$$S_i : L^{p_i}([0,\tau]; E) \to C([0,\tau]; E_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$S_i(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q_i)} \int\limits_0^t (t-s)^{q_i - 1} f(s)\, ds,$$

и рассмотрим мультиоператоры $G_i : C([0,\tau]; E_i) \multimap C([0,\tau]; E_i)$,

$$G_i(x_i) = x_i^* + S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}(x_i),$$

где

$$x_i^* = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{t^j}{j!} x_i^{(j)}(0).$$

Для изучения свойств мультиоператоров G_i исследуем множество операторов $S_i^j : L^{p_i}([0,T]; E_i) \to C([0,T]; E_i)$, $j = 0, 1, \ldots, N-1$, где $S_i^0 = S_i$ и

$$S_i^j(f)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S_i(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{q_i - j - 1} f(s)\, ds$$

для $1 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$.

Лемма 2.2 (см. [20]). *Операторы S_i^j, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$, обладают следующими свойствами:*

(S_1) существуют константы C_{ij}, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$, такие, что

$$\left\|S_i^j(\xi)(t) - S_i^j(\eta)(t)\right\|_{E_i}^{p_i} \le C_{ij}^{p_i} \int\limits_0^t \|\xi(s) - \eta(s)\|_{E_i}^{p_i}\, ds, \quad \xi, \eta \in L^{p_i}([0,\tau]; E_i).$$

(S_2) для каждого компактного множества $K \subset E_i$ и последовательности $\{\xi_m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E_i)$ такой, что $\{\xi_m(t)\} \subset K$ для п.в. $t \in [0,\tau]$, слабая сходимость $\xi_m \rightharpoonup \xi_0$, влечет сходимость $S_i^j(\xi_m) \to S_i^j(\xi_0)$ в $C([0,\tau]; E_i)$.

Определение 2.1. Последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ называется L^{p_i}*-полукомпактной*, если она L^{p_i}-интегрально ограничена и множество $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ относительно компактно в E_i для п.в. $t \in (0,\tau)$.

Используя свойство 3.4 из [24], можно установить следующий аналог теоремы 5.1.1 из [3].

Лемма 2.3. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ является L^{p_i}-полукомпактной последовательностью в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$. Тогда $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо компактно в $L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ и последовательность $\{S_i^j f_k\}_{k=1}^{\infty}$ относительно компактна в $C([0,\tau]; E_i)$. Более того, если $f_k \rightharpoonup f$, то $S_i^j f_k \to S_i^j f$, $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$.*

Доказательство следующих утверждений может быть найдено в [22].

Лемма 2.4. *Пусть последовательность $\{\xi_m\} \subset L^{p_i}([0,\tau]; E)$ удовлетворяет условиям леммы 1.2. Тогда для $0 \le j \le N-1$, $1 \le i \le n$ имеет место неравенство*

$$\chi\bigl(\bigl\{S_i^j(\xi_m(t))\bigr\}\bigr) \le 2C_{ij} \left(\int\limits_0^t |\alpha(s)|^{p_i}\, ds\right)^{1/p_i}, \quad t \in [0,\tau].$$

Лемма 2.5. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ мультиоператоры G_i замкнуты и имеют выпуклые значения.*

Теорема 2.1. *Для каждого $i = 1, \ldots, n$ мультиоператоры G_i п.н.св.*

Доказательство. Легко видеть, что утверждение достаточно доказать для $S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}$. Рассмотрим сходящуюся последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C([0,\tau]; E_i)$ и произвольную последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L^{p_i}((0,\tau); E_i)$ такую, что $f_k \in \mathscr{P}_{F_i}(x_k)$, $k \ge 1$. Из свойств $(F3_i)$ и $(F4_i)$ следует, что последовательность $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ L^{p_i}-полукомпактна. Используя лемму 2.3, получаем, что последовательность $\{S_i f_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C([0,\tau]; E_i)$ относительно компактна и тем самым мультиоператор $S_i \circ \mathscr{P}_{F_i}$ квазикомпактен. Остается сослаться на лемму 1.1.

Перейдем к исследованию мультиоператора $G : C([0,\tau]; E) \multimap C([0,\tau]; E)$, определяемого по формуле

$$G(x) = G_1(x) \times \cdots \times G_n(x).$$

Легко видеть, что функция $x(\cdot) \in C([0,\tau]; E)$ является интегральным решением задачи (1), (2) на промежутке $[0,\tau]$ тогда и только тогда, когда $x(\cdot)$ — неподвижная точка для G.

Из свойств многозначных отображений (см., например, [3, 8]), леммы 2.5 и теоремы 2.1 следует, что мультиоператор G п.н.св. и имеет компактные значения. Более того, мультиоператор G имеет выпуклые значения.

Докажем, что мультиоператор G уплотняющий. Введем следующую меру некомпактности в пространствах $C^{N-1}([0,\tau];E_i)$.

Модифицированный модуль послойной некомпактности

$$\gamma_i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\gamma_i(\Omega_i) = \sup_{t\in[0,\tau]} e^{-L_i t} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\left(\frac{d^j}{dt^j}\Omega_i(t)\right),$$

где $\frac{d^j}{dt^j}\Omega_i(t) := \left\{\frac{d^j}{dt^j}v(t); v\in\Omega_i\right\}$ и константы L_i выбраны так, что

$$l_i := 2\sum_{j=0}^{N-1} C_{ij} \sup_{t\in[0,\tau]}\left(\int_0^t e^{-L_i p_i(t-s)}\mu_i^p(s)\,ds\right)^{1/p_i} < 1,$$

где $\mu_i(\cdot)$ — функции из условия $(F4_i)$.

Модуль равностепенной непрерывности:

$$\mathrm{mod}_C^i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+,$$

$$\mathrm{mod}_C^i(\Omega_i) = \lim_{\delta\to 0}\sup_{v\in\Omega_i}\max_{0\le j\le N-1}\max_{|t_1-t_2|<\delta}\|v^{(j)}(t_1)-v^{(j)}(t_2)\|.$$

Векторная мера некомпактности $\nu_i(\Omega_i)$:

$$\nu_i : P(C^{N-1}([0,\tau];E_i)) \to \mathbb{R}_+^2, \quad \nu_i(\Omega_i) = \max_{D\in\Delta(\Omega_i)}\big(\gamma_i(D), \mathrm{mod}_C^i(D)\big),$$

где $\Delta(\Omega_i)$ — совокупность всех счетных подмножеств Ω_i и максимум берется в смысле частичного порядка в конусе $\mathbb{R}_+^2$.

Введем в пространстве $C([0,\tau];E)$ векторную меру некомпактности $\mathscr{V}$, ставящую в соответствие ограниченному множеству $\Omega\subset C([0,\tau];E)$ вектор $\mathscr{V}(\Omega)\in\mathbb{R}_+^{2n}$ по правилу

$$\mathscr{V}(\Omega) = (\nu_1(\Omega_1),\dots,\nu_n(\Omega_n)),$$

где $\Omega_i\subset C([0,\tau];E_i)$, $i=1,\dots,n$, — проекции множества Ω.

Легко видеть, что МНК $\mathscr{V}$ обладает всеми вышеперечисленными свойствами мер некомпактности.

Теорема 2.2. *Мультиоператор G является $\mathscr{V}$-уплотняющим.*

Доказательство. Пусть $\Omega\subset E$ — ограниченное множество такое, что

$$\mathscr{V}(G(\Omega)) \ge \mathscr{V}(\Omega). \tag{3}$$

Покажем, что Ω относительно компактно. Выражение (3) влечет, что для каждого $i=1,\dots,n$

$$\nu_i(G_i(\Omega_i)) \ge \nu_i(\Omega_i). \tag{4}$$

Пусть $\nu_i(G_i(\Omega_i))$ достигается на последовательности $\{z_m\}\subset G_i(\Omega_i)$, т. е.

$$\nu_i(G_i(\Omega_i)) = \big(\gamma_i(\{z_m\}), \mathrm{mod}_C^i(\{z_m\})\big),$$

где $z_m = x_i^* + S_i(\xi_m)$, $\xi_m \in \mathscr{P}_{F_i}(v_m)$, $\{v_m\} \subset \Omega_i$.

Из неравенства (4) вытекает, что

$$\gamma_i(\{z_m\}) \geq \gamma_i(\{v_m\}). \tag{5}$$

Условие $(F4_i)$ влечет оценку

$$\chi_{E_i}(\{\xi_n(s)\}) \leq \mu_i(s) \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\{v_n^{(j)}(s)\}\big)$$
$$= \mu_i(s) e^{L_i s} e^{-L_i s} \sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\big(\{v_n^{(j)}(s)\}\big) = e^{L_i s}\mu_i(s)\gamma_i(\{v_n\}).$$

Используя лемму 2.4, получаем, что

$$\chi_{E_i}\big(\{S_i^j(\xi_m(t))\}\big) \leq 2C_{ij}\left(\int\limits_0^t e^{p_i L_i s}\mu_i^{p_i}(s)\,ds\right)^{1/p_i} \gamma_i(\{v_n\}) \tag{6}$$

для всех $t \in [0,\tau]$ и $j = 0,1,\ldots,N-1$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Замечая, что

$$S_i^j(\xi_m)(t) = \frac{d^j}{dt^j} S_i(\xi_m)(t) = \frac{d^j}{dt^j} z_m(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t) = z_m^{(j)}(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t), \quad t \in [0,\tau],$$

и используя (6), имеем

$$e^{-L_i t}\sum_{j=0}^{N-1} \chi_{E_i}\left(\left\{z_m^{(j)}(t) - \frac{d^j}{dt^j}x_i^*(t)\right\}\right) = e^{-L_i t}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_{E_i}\big(\{z_m^{(j)}(t)\}\big)$$
$$\leq e^{-L_i t}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_{E_i}\big(\{S_i^j(\xi_m)(t)\}\big) \leq 2\sum_{j=0}^{N-1} C_{ij}\left(\int\limits_0^t e^{-L_i p_i (t-s)}\mu_i^{p_i}(s)\,ds\right)^{1/p_i} \gamma_i(\{v_m\}).$$

Учитывая (5), приходим к оценке

$$\gamma_i(\{v_m\}) \leq \gamma_i(\{z_m\}) = \sup_{t\in[0,\tau]} e^{-L_i t}\sum_{j=0}^{N-1}\chi_{E_i}\big(\{z_m^{(j)}(t)\}\big) \leq l\gamma_i(\{v_m\}).$$

Поэтому $\gamma_i(\{v_m\}) = 0$, а, в свою очередь, $\gamma_i(\{z_m\}) = 0$, и

$$\chi_{E_i}\big(\{v_m^{(j)}(t)\}\big) = 0, \quad j = 0,1,\ldots,N-1,\ i = 1,2,\ldots,n,\ t \in [0,\tau].$$

Воспользовавшись свойствами $(F3_i)$, $(F4_i)$ снова, получаем, что $\{\xi_m\}$ — L^p-полукомпактная последовательность. Тогда по лемме 2.3 $\big\{S_i^j(\xi_m)\big\}$ относительно компактно в $C([0,\tau]; E_i)$ для всех $j = 0,1,\ldots,N-1$, $i = 1,2,\ldots,n$. Это влечет, что $\{z_m\}$ относительно компактно в $C^{N-1}([0,\tau]; E_i)$, поэтому $\mathrm{mod}_C^i(\{z_m\}) = 0$. Таким образом, $\nu_i(\{z_m\}) = \nu_i(\Omega_i) = (0,0)$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$.

В силу произвольности выбора i получаем, что $\mathscr{V}(\Omega) = 0$ и поэтому множество Ω относительно компактно.

Перейдем к доказательству основных утверждений настоящей статьи. Вначале докажем локальную теорему существования решений задачи (1), (2).

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия* $(F1_i)$–$(F4_i)$. *Тогда существует* $\tau \in (0, T]$ *такое, что задача* (1), (2) *имеет интегральное решение в* $C([0, \tau]; E)$.

Доказательство. Пусть $r_i > 0$ таковы, что $\|\Delta^N x_1(t), \dots, \Delta^N x_n(t)\|_{E^N} \leq r_i$, и пусть $p_i' = \frac{p_i}{p_i - 1}$ для $p_i > \frac{1}{q_i - N + 1}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Заметим, что $q_i - j - \frac{1}{p_i} > 0$ для каждого $j = 0, 1, \dots, N-1$. Возьмем $\tau_i \in (0, T]$ настолько малыми, что

$$\frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i} \, ds \right)^{1/p_i} \left(\frac{1}{(q_i - j - 1)p_i' + 1} \right)^{1/p_i'} \tau_i^{q_i - j - 1/p_i} \leq \frac{r_i}{N}$$

для всех $j = 0, 1, \dots, N-1$.

Обозначим через $B_{r_i}(x_i^*)$ замкнутый шар в $C^{N-1}([0, \tau_i]; E_i)$,

$$B_{r_i}(x_i^*) = \{x \in C^{N-1}([0, \tau_i]; E_i) : \|x - x_i^*\| \leq r_i\}.$$

Для $x \in C^{N-1}([0, \tau_i]; E_i)$, $f \in \mathscr{P}_{F_i}(x)$ и $y \in G_i(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \|y(t) - x_i^*(t)\|_{E_i} &\leq \frac{1}{\Gamma(q_i)} \int\limits_0^t (t-s)^{q_i - 1} \|f(s)\|_E \, ds \leq \frac{1}{\Gamma(q_i)} \int\limits_0^t (t-s)^{q_i - 1} w_{ri}(s) \, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q_i)} \left(\int\limits_0^t (t-s)^{(q_i - 1)p_i'} \, ds \right)^{1/p_i'} \left(\int\limits_0^t |w_{ri}(s)|^{p_i} \, ds \right)^{1/p_i} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q_i)} \left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i} \, ds \right)^{1/p_i} \left(\frac{1}{(q_i - 1)p_i' + 1} \right)^{1/p_i'} \tau_i^{q_i - 1/p_i} \leq \frac{r_i}{N} \end{aligned}$$

для $t \in [0, \tau_i]$. Поскольку для всех $j = 1, \dots, N-1$

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{d^j}{dt^j} y(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t) \right\|_{E_i} \leq \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \int\limits_0^t (t-s)^{q_i - j - 1} w_{ri}(s) \, ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \left(\int\limits_0^T |w_{ri}(s)|^{p_i} \, ds \right)^{1/p_i} \left(\frac{1}{(q_i - j - 1)p_i' + 1} \right)^{1/p_i'} \tau_i^{q_i - j - 1/p_i} \leq \frac{r_i}{N}, \end{aligned}$$

справедлива оценка

$$\sum_{j=0}^{N-1} \sup_{t \in [0, \tau_i]} \left\| \frac{d^j}{dt^j} y(t) - \frac{d^j}{dt^j} x_i^*(t) \right\|_{E_i} \leq r_i,$$

эквивалентная следующей:

$$\|y - x_i^*\|_{C^{N-1}([0, \tau_i]; E_i)} \leq r_i.$$

Поэтому G_i отображает $B_{r_i}(x_i^*)$ в себя.

Теперь пусть $r = \min_i r_i$ и $\tau = \min_i \tau_i$, для $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда мультиоператор G преобразует в себя замкнутый шар $B_r(x^*)$ в пространстве $C^{N-1}([0, \tau]; E)$. Поэтому для доказательства остается лишь сослаться на теорему 1.1.

Для доказательства глобальной теоремы о существовании решений потребуется условие $(F3_i)$ заменить более строгим

$(F3'_i)$ для каждого $i = 1, \dots, n$ существуют функции $\alpha_i(\cdot) \in L_+^{p_i}(0,T)$ такие, что

$$\|F_i(t,x)\|_{E_i} \le \alpha_i(t)(1 + \|x_i\|_{E_i^N}), \quad \text{для п.в. } t \in [0,T].$$

Также потребуется обобщенная лемма Беллмана — Гронуолла (см, например, [25]).

Лемма 2.6. *Пусть $u(\cdot), u_0(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — неубывающие интегрируемые функции на $[0,T]$, удовлетворяющие интегральному неравенству*

$$u(t) \le u_0(t) + \int_0^t v(s)u(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Тогда

$$u(t) \le u_0(t) + \int_0^t \exp\left(\int_s^t v(\theta)d\theta\right) v(s)u_0(s)\,ds, \quad t \in [0,T].$$

Теорема 2.4. *При выполнении условий $(F1_i)$, $(F2_i)$, $(F3'_i)$, $(F4_i)$ множество решений задачи* (1), (2) *в $\mathscr{C}([0,T],E)$ непусто и компактно.*

Доказательство. Заметим, что если $x_i \in C^{N-1}([0,T];E_i)$, то

$$x_i - x_i^* \in \lambda(G_i(x) - x_i^*),$$

для $\lambda \in (0,1]$ и $i = 1, 2, \dots, n$.

Используя свойство $(F3'_i)$, для $f \in \mathscr{P}_{F_i}(x_i)$ и $j = 0, 1, \dots, N-1$ имеем

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}x_i(t) - \frac{d^j}{dt^j}x_i^*(t)\right\|_{E_i} \le \frac{\lambda}{\Gamma(q_i - j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\|f(s)\|_{E_i}\,ds$$
$$\le \frac{\lambda}{\Gamma(q_i - j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(t)(1 + \|\Delta^N x_i(t)\|_{E_i^N})\,ds.$$

Воспользовавшись последней оценкой, получаем

$$\left\|\frac{d^j}{dt^j}x_i(t)\right\|_{E_i} \le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i - j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)(1 + \|\Delta^N x_i(s)\|_{E_i^N})\,ds$$
$$\le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i - j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)\,ds$$
$$+ \frac{1}{\Gamma(q_i - j)}\int_0^t (t-s)^{q_i-j-1}\alpha_i(s)\|x_i\|_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\,ds$$
$$\le \|X_{0i}\|_{E_i^N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{T^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(q_i - j)}\left[\frac{1}{(q_i - j - 1)p'_i + 1}\right]^{1/p'_i} T^{q_i - j - \frac{1}{p_i}}$$
$$\times \left(\int_0^T |\alpha_i(s)|^{p_i}\,ds\right)^{1/p_i} + \frac{1}{\Gamma(q_i - j)}\left[\frac{1}{(q_i - j - 1)p'_i + 1}\right]^{1/p'_i} T^{q_i - j - \frac{1}{p_i}}$$

$$\times \left(\int\limits_0^T |\alpha_i(s)|^{p_i} \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\, ds \right)^{1/p_i}.$$

Положим

$$C_j = \frac{1}{\Gamma(q_i - j)} \left[\frac{1}{(q_i - j - 1)p_i' + 1} \right]^{1/p_i'} T^{q_i - j - \frac{1}{p_i}},$$

$$C = \max\{C_j,\ j = 0, 1, \ldots, N-1\},$$

$$g_0 = N \|X_{0i}\|_{E_i^N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{T^k}{k!} + NC \left(\int\limits_0^T \|\alpha_i(s)\|^{p_i}\, ds \right)^{1/p_i},$$

$$h(s) = [NC]^{1/p_i} \alpha_i(s), \quad s \in [0, T].$$

Тогда

$$\|x_i\|_{C^{N-1}([0,t];E_i)} \le g_0 + \left(\int\limits_0^t |h(s)|^{p_i} \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,s];E_i)}\, ds \right)^{1/p_i}.$$

Пусть $u(t) = \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,t];E_i)}$. Последнее неравенство перепишется в виде

$$u(t) \le 2^{p_i} g_0^{p_i} + 2^{p_i} \int\limits_0^t |h(s)|^{p_i} u(s)\, ds$$

для всех $t \in [0, T]$. В соответствии с леммой 2.6 получаем оценку

$$u(t) = \|x_i\|^{p_i}_{C^{N-1}([0,t];E_i)} \le 2^{p_i} g_0^{p_i} \left(1 + \int\limits_0^T \exp\left\{ 2^{p_i} \int\limits_s^T |h(\theta)|^{p_i}\, d\theta \right\} |h(s)|^{p_i}\, ds \right),$$

для всех $t \in [0, T]$. Последнее неравенство гарантирует, что

$$\|x_i\|_{C^{N-1}([0,T];E_i)} \le R_{0i},$$

где

$$R_{0i} = 2g_0 \sqrt[p_i]{1 + \int\limits_0^T \exp\left\{ 2^{p_i} \int\limits_s^T |h(\theta)|^{p_i}\, d\theta \right\} |h(s)|^{p_i}\, ds}.$$

Теперь возьмем $R = \max_i R_{0i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $a = x^*$, $\mathscr{F} = G$ и применим теорему 1.2 к множеству

$$\overline{\mathscr{U}} = \{v \in C^{N-1}([0, T]; E),\ \|v\|_{C^{N-1}([0,T];E)} \le R\}.$$

Тогда получаем, что $FixG$ непусто и компактно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховых пространствах. Новосибирск: Наука, 1986.

2. *Deimling K.* Multivalued differential equations. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications).

3. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Zecca P.* Condensing multivalued maps and semilinear differential inclusions in Banach spaces. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2001. (De Gruyter Series in Nonlinear Analysis and Applications).

4. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: North-Holland Mathematics Studies; Elsevier Science B.V., 2006.

5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999.

6. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics. Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. London; New York: Springer, 2010.

7. *Zhou Y.* Fractional evolution equations and inclusions: analysis and control. London: Elsevier Acad. Press, 2016.

8. *Obukhovskii V., Gel'man B.* Multivalued maps and differential inclusions. Elements of theory and applications. Hackensack, NJ: World Sci., 2020.

9. *Agarwal R., Ahmad B.* Existence theory for anti-periodic boundary value problems of fractional differential equations and inclusions // Comput. Math. Appl. 2011. V. 62. P. 1200–1214.

10. *Appell J., Lopez B., Sadarangani K.* Existence and uniqueness of solutions for a nonlinear fractional initial value problem involving Caputo derivatives // J. Nonlinear Var. Anal. 2018. V. 2. P. 25–33.

11. *Belmekki M., Nieto J. J., Rodriguez-Lopez R.* Existence of periodic solution for a nonlinear fractional differential equation // Boundary Value Problems. 2009. V. 11. P. 1–18.

12. *Benedetti I., Obukhovskii V., Taddei V.* On generalized boundary value problems for a class of fractional differential inclusions // Fract. Calc. Appl. Anal. 2017. V. 20. P. 1424–1446.

13. *Gomoyunov M. I.* Fractional derivatives of convex Lyapunov functions and control problems in fractional order systems // Fractional Calculus Appl. Anal. 2018. V. 21. P. 1238–1261.

14. *Gomoyunov M. I.* Approximation of fractional order conflict-controlled systems // Progress in Fractional. Differentiation and Applications. 2019. V. 5. P. 143–155.

15. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On semilinear fractional order differential inclusions in Banach spaces // Fixed Point Theory. 2017. V. 18, N 1. P. 269–292.

16. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* Boundary value problems for semilinear differential inclusions of fractional order in a Banach space // Appl. Anal. 2018. V. 97, N 4. P. 571–591.

17. *Kamenskii M., Obukhovskii V., Petrosyan G., Yao J.-C.* On a periodic boundary value problem for a fractional-order semilinear functional differential inclusions in a Banach space // Mathematics. 2019. V. 7, N 12. P. 5–19.

18. *Kamenskii M. I., Petrosyan G. G., Wen C.-F.* Existence result for a periodic boundary value problem of fractional semilinear differential equations in a Banach space // J. Nonlinear Var. Anal. 2021. V. 5, N 1. P. 155–177.

19. *Kamenskii M., Petrosyan G., Raynaud de Fitte R., Yao J.-C.* On a periodic boundary value problem for fractional quasilinear differential equations with a self-adjoint positive operator in Hilbert spaces // Mathematics. 2022. V. 10, N 2. P. 219–231.

20. *Ke T. D., Obukhovskii V. V., Wong N.-C., Yao J.-C.* On a class of fractional order differential inclusions with infinite delays // Appl. Anal. 2013. V. 92, N 1. P. 115–137.

21. *Petrosyan G.* Antiperiodic boundary value problem for a semilinear differential equation of fractional order // The Bull. Irkutsk State Univ. Ser. Mathematics. 2020. V. 34. P. 51–66.

22. *Zhang Z., Liu B.* Existence of mild solutions for fractional evolution equations // Fixed point theory. 2014. V. 15. P. 325–334.

23. *Zhou Y., Jiao F.* Existence of mild solutions for fractional neutral evolution equations // Comput. Math. Appl. 2010. V. 59. P. 1063–1077.

24. *Diestel J., Ruess W. M., Schachermayer W.* Weak Compactness in $L^1(\mu, X)$ // Proc. Am. Math. Soc. 1993. V. 118. P. 447–453.

25. *Qin Y.* Nonlinear parabolic-hyperbolic coupled systems and their attractors. Operator theory:

advances and applications. Basel: Birkhauser-Verl., 2008.

Поступила в редакцию 5 февраля 2025 г.
После доработки 5 февраля 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Обуховский Валерий Владимирович
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
valerio-ob2000@mail.ru

Каменский Михаил Игоревич
Воронежский государственный университет,
кафедра функционального анализа и операторных уравнений,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
t1776477642@126.com

Петросян Гарик Гагикович
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
borodich@gsu.by

Ульвачева Татьяна Александровна
Воронежский государственный педагогический университет,
кафедра высшей математики,
ул. Ленина, 86, Воронеж 394043
sfkamornikov@mail.ru

Шенда Цзен
Национальный центр прикладной математики в Чунцине;
Школа математических наук, Чунцинский педагогический университет,
Чунцин 401331, Китай

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.51

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ ЧЕЗАРО СО СТЕПЕННЫМ ВЕСОМ

Д. В. Прохоров

Аннотация. Для всех случаев параметров дано описание вещественного интерполяционного пространства пары пространств Чезаро со степенным весом. Показано, что результатом их вещественной интерполяции является пространство Чезаро с другим степенным весом, показатель которого определяется параметрами интерполяции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.209

Ключевые слова: пространства Чезаро и Копсона, интерполяция, K-метод.

1. Введение

Пусть $I := (c, d) \subset \mathbb{R}$, $q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$, $\mathfrak{M}(I)$ — вещественное векторное пространство всех измеримых по Лебегу функций $f : I \to [-\infty, \infty]$, $L^0(I)$ — векторное пространство классов эквивалентных по мере Лебега функций из $\mathfrak{M}(I)$, $L^q(I)$ — пространство Лебега.

Обозначим (если мера в интеграле не указана, то интеграл берется по мере Лебега)

$$L^1_{\mathrm{loc}}([c, d)) := \{f \in L^0(I) \mid \|\chi_{(c,x)} f\|_{L^1(I)} < \infty \ \forall x \in I\},$$
$$L^1_{\mathrm{loc}}((c, d]) := \{f \in L^0(I) \mid \|\chi_{(x,d)} f\|_{L^1(I)} < \infty \ \forall x \in I\};$$
$$(H^\times(f))(x) := \int_c^x f \quad \forall x \in I, \ \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}([c, d)),$$
$$(H_\times(f))(x) := \int_x^d f \quad \forall x \in I, \ \forall f \in L^1_{\mathrm{loc}}((c, d]).$$

Пусть $w \in \mathfrak{M}(I)$, $w > 0$ почти всюду по мере Лебега на I. Рассматриваются нормированные пространства

$$\mathrm{Ces}_{q,w}(I) := \big\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}([c, d)) \mid \|f\|_{\mathrm{Ces}_{q,w}(I)} := \|wH^\times(|f|)\|_{L^q(I)} < \infty\big\},$$
$$\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I) := \big\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}([c, d)) \mid \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)} := \|wH^\times(f)\|_{L^q(I)} < \infty\big\},$$
$$\mathrm{Cop}_{q,w}(I) := \big\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}((c, d]) \mid \|f\|_{\mathrm{Cop}_{q,w}(I)} := \|wH_\times(|f|)\|_{L^q(I)} < \infty\big\},$$
$$\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I) := \big\{f \in L^1_{\mathrm{loc}}((c, d]) \mid \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I)} := \|wH_\times(f)\|_{L^q(I)} < \infty\big\}.$$

Пространство $\mathrm{Ces}_{q,w}(I)$ называется *пространством Чезаро*, $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$ — *пространством типа Чезаро*. Пространство $\mathrm{Cop}_{q,w}(I)$ называется *пространством Копсона*, $\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I)$ — *пространством типа Копсона*. Ясно, что

$\mathrm{Ces}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$ и $\mathrm{Cop}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I)$, где символ $\hookrightarrow$ означает непрерывность вложения. При $w^q \in L^1_{\mathrm{loc}}((c,d])$ пространство $\mathrm{Ces}_{q,w}(I)$ имеет запас элементов (в частности, содержит χ_K для любого компакта $K \subset I$), $\mathrm{Ces}_{q,w}(I)$ полное [1, лемма 3.1], $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$ может не быть полным [2, теорема 2.1(e)]. Пространства Копсона обладают аналогичными свойствами в случае $w^q \in L^1_{\mathrm{loc}}([c,d))$.

Обозначим $I_* := (0,\infty)$ и $\varphi_\beta(x) := \frac{1}{x^\beta}$, $x \in I_*$, $\beta \in \mathbb{R}$. Пространства $\mathrm{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*)$ и $\mathrm{Cop}_{q,\varphi_1}(I_*)$ (со степенным весом) активно изучались с 1970-х гг. (см. [3] и литературу к ней). Оба пространства $\mathrm{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*)$ и $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,\varphi_1}(I_*)$ появляются при решении задачи об описании пространств ассоциированных к одному весовому пространству Соболева на вещественной прямой [4]. Некоторые общие свойства пространств $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$, $\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$ получены в статьях [2, 5]. Ряд работ посвящены описанию пространств, ассоциированных к пространствам $\mathrm{Ces}_{q,w}(I)$, $\mathrm{Cop}_{q,w}(I)$ [1, 6] и к $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$, $\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I)$ [7, 8] с произвольными весами. В [9, теорема 2.1(ii)] показано, что $\mathrm{Ces}_{q,\varphi_1}(I_*) = \mathrm{Cop}_{q,\varphi_1}(I_*)$ является результатом вещественной интерполяции пары весовых пространств Лебега.

По теории интерполяции написан ряд монографий (см., например, [10–12]). Приведем основные определения. Пусть X, Y — два вещественных нормированных пространства. Класс всех линейных непрерывных операторов $T : X \to Y$ обозначим через $L(X,Y)$. Пара пространств (X,Y) называется *интерполяционной парой*, если существует хаусдорфово топологическое векторное пространство $\mathcal{V}$ такое, что X непрерывно вложено в $\mathcal{V}$ и Y непрерывно вложено в $\mathcal{V}$. В этом случае определяются сумма

$$X + Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z = x + y,\ x \in X,\ y \in Y\}$$

и пересечение

$$X \cap Y := \{z \in \mathcal{V} \mid z \in X,\ z \in Y\}$$

с нормами

$$\|z\|_{X+Y} := \inf_{z=x+y,\, x\in X,\, y\in Y} (\|x\|_X + \|y\|_Y), \quad \|z\|_{X\cap Y} := \max\{\|z\|_X, \|z\|_Y\}.$$

Для интерполяционной пары (X,Y) *промежуточным пространством* называется любое нормированное пространство E такое, что $X \cap Y \hookrightarrow E \hookrightarrow X + Y$. *Интерполяционным пространством* между X и Y называют любое промежуточное для (X,Y) пространство E такое, что для $T \in L(X+Y, X+Y)$, у которого $T|_X \in L(X,X)$ и $T|_Y \in L(Y,Y)$, выполнено $T|_E \in L(E,E)$.

Одним из способов построения интерполяционного пространства для интерполяционной пары (X,Y) является K-метод (метод вещественной интерполяции), сформулированный ниже.

***K*-метод.** Пусть (X,Y) — интерполяционная пара. Для $z \in X + Y$ и $t \in (0,\infty)$ положим

$$K(t,z,X,Y) := \inf_{z=x+y,\, x\in X,\, y\in Y} \left(\|x\|_X + t\|y\|_Y\right).$$

Для $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$ пространство

$$(X,Y)_{\theta,p} := \{z \in X + Y \mid \|z\|_{(X,Y)_{\theta,p}} < \infty\},$$

где

$$\|z\|_{(X,Y)_{\theta,p}} := \begin{cases} \left(\int\limits_0^\infty K(t,z,X,Y)^p t^{-\theta p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty), \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{t\in(0,\infty)} t^{-\theta} K(t,z,X,Y), & p = \infty, \end{cases}$$

является интерполяционным пространством между X и Y.

Пусть $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ и $\theta \in (0,1)$. В [9, следствие 2.4] при помощи теоремы реитерации (см. [10, теорема 2.4, с. 311; 11, теорема 3.5.3]) доказано равенство

$$(\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_1}(I_*), \mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_1}(I_*))_{\theta,p_\theta} = \mathrm{Ces}_{p_\theta,\varphi_1}(I_*),$$

где $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Основной результат данной работы находится в п. 2.2, где доказано другой техникой равенство

$$(\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*), \mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p} = \mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*) \tag{1}$$

для любых $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$ и $\beta > \frac{1}{p_0}$. В п. 2.3 показано, что схема п. 2.2 неприменима для интерполяции пространств $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$. Аналогичные результаты для пространств Копсона приведены в п. 2.4.

Всюду в работе произведения вида $0\cdot\infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim_{\{\dots\}} B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей от параметров перечисленных в $\{\dots\}$; $A \approx_{\{\dots\}} B$ равносильно ($A \lesssim_{\{\dots\}} B$ и $B \lesssim_{\{\dots\}} A$).

2. Результаты

2.1. Общие факты.

Предложение 1. *Любые два пространства семейства* $\{\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)\}_{q\in[1,\infty]} \cup \{\mathrm{Ces}_{q,w}(I)\}_{q\in[1,\infty]}$ *образуют интерполяционную пару.*

Доказательство. Пусть $\{a_k\}_1^\infty \subset I$, $\{b_k\}_1^\infty \subset I$, $a_1 < b_1$, $a_k \downarrow c$, $b_k \uparrow d$. Для $k \in \mathbb{N}$ и $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([c,d))$ положим

$$\|f\|_{(k)} := \int_{a_k}^{b_k} w(x) \left| \int_c^x f \right| dx$$

и определим вещественное векторное пространство

$$\mathcal{V} := \left\{ f \in L^1_{\mathrm{loc}}([c,d)) \mid \|f\|_{\mathcal{V}} < \infty \right\},$$

где

$$\|f\|_{\mathcal{V}} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\|f\|_{(k)}}{b_k - a_k + 1}.$$

Фиксируем произвольное $q \in [1,\infty]$. В силу неравенства Гёльдера для произвольного $f \in \mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$ выполнено

$$\|f\|_{\mathcal{V}} \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{(b_k - a_k)^{1-\frac{1}{q}} \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)}}{b_k - a_k + 1} \le \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)},$$

т. е. $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathcal{V}$. Так как $\mathrm{Ces}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathscr{C}\mathrm{es}_{q,w}(I)$, то $\mathrm{Ces}_{q,w}(I) \hookrightarrow \mathcal{V}$. $\square$

Пусть $p_0, p_1 \in [1,\infty]$ и $\theta \in (0,1)$. Определим γ равенством $\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}$, p_θ — равенством $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Заметим, что $\frac{\theta}{\gamma} = \theta\big[\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}\big] = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_\theta}$ и $\frac{1-\theta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} - \frac{\theta}{\gamma} = \frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p_1}$.

Для элемента $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$ и $s \in I_*$ положим $I_{0,s} := (0,s]$, $I_{1,s} := (s,\infty)$, $f_{0,s} := f\chi_{I_{0,s}}$, $f_{1,s} := f\chi_{I_{1,s}}$. Если $f_{0,s} \in X$, $f_{1,s} \in Y$, то из определения функционала K вытекает

$$K(s^{\frac{1}{\gamma}}, f, X, Y) \le \|f_{0,s}\|_X + s^{\frac{1}{\gamma}} \|f_{1,s}\|_Y.$$

При $p \in [1,\infty)$

$$\left(\int_0^\infty K(t,f,X,Y)^p t^{-\theta p-1}\,dt\right)^{\frac{1}{p}} = \gamma^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty K(s^{\frac{1}{\gamma}},f,X,Y)^p s^{-\frac{\theta p}{\gamma}-1}\,ds\right)^{\frac{1}{p}},$$

ибо $-\frac{1}{\gamma}(\theta p+1)+\frac{1}{\gamma}-1=-\frac{\theta p}{\gamma}-1$, и

$$\|f\|_{(X,Y)_{\theta,p}} \lesssim_{\gamma,p} \left[\int_{I_*}\|f_{0,s}\|_X^p s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_0})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_{I_*}\|f_{1,s}\|_Y^p s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}}. \quad (2)$$

При $p=\infty$ выполнено

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\infty)} t^{-\theta}K(t,f,X,Y) = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} s^{-\frac{\theta}{\gamma}}K(s^{\frac{1}{\gamma}},f,X,Y)$$

и

$$\|f\|_{(X,Y)_{\theta,\infty}} \le \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} s^{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_0}}\|f_{0,s}\|_X + \operatorname*{ess\,sup}_{s\in(0,\infty)} s^{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1}}\|f_{1,s}\|_Y. \quad (3)$$

Кроме того, из определения K существуют $g_{s,0}\in X$ и $g_{s,1}\in Y$ такие, что $f=g_{s,0}+g_{s,1}$ и

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}},f,X,Y) \ge \|g_{s,0}\|_X + s^{\frac{1}{\gamma}}\|g_{s,1}\|_Y. \quad (4)$$

Для произвольного веса $w\in\mathfrak{M}(I_*)$ можно доказать следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $1\le p\le p_0<p_1\le\infty$, $\theta\in(0,1)$. *Тогда*

$$(\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p} \hookrightarrow \mathscr{C}\mathrm{es}_{p,w\cdot\varphi_{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*), \quad (5)$$

$$(\mathrm{Ces}_{p_0,w}(I_*),\mathrm{Ces}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p} \hookrightarrow \mathrm{Ces}_{p,w\cdot\varphi_{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*). \quad (6)$$

Доказательство. Фиксируем $f\in(\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p}$. Для доказательства (5) достаточно показать, что для любого $s\in I_*$ выполнено

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}},f,\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,w}(I_*)) \ge \left[\int_0^s\left|w(x)\int_0^x f\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}}, \quad (7)$$

ибо в этом случае перестановкой интегралов получаем

$$2\|f\|_{(\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p}} \gtrsim_{\gamma,p} \left[\int_{I_*}\int_0^s\left|w(x)\int_0^x f\right|^p dx\, s^{\frac{p}{p_0}-\frac{\theta p}{\gamma}-2}\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\approx_{p_0,p_1,p,\theta} \left[\int_{I_*}\left|\frac{w(x)}{x^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}\int_0^x f\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Фиксируем $s\in I_*$. Пусть $g_{s,i}\in\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_i,w}(I_*)$, $i\in\{0,1\}$, о которых говорится в (4). Применяя обратное неравенство Гёльдера, оценим

$$\|g_{s,0}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,w}(I_*)} + s^{\frac{1}{\gamma}}\|g_{s,1}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,w}(I_*)}$$

$$\geq \left[\int_0^s \left|w(x)\int_0^x g_{s,0}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}} + \left[\int_0^s \left|w(x)\int_0^x g_{s,1}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}+\frac{1}{\gamma}}$$

$$\geq \left[\int_0^s \left|w(x)\int_0^x f\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}},$$

тем самым (7) доказано. Вложение (6) доказывается аналогично. $\square$

Далее работаем с пространствами со степенными весами.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leq p_0 < p_1 \leq p \leq \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0,1)$. *Тогда*

$$\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*) \hookrightarrow (\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*), \mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}. \tag{8}$$

Доказательство. Фиксируем $f \in \mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)$. Для $s \in I_*$ имеем

$$\|f_{0,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*)} = \left[\int_0^s \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_0} dx + \int_s^\infty \frac{dx}{x^{\beta p_0}}\left|\int_0^s f\right|^{p_0}\right]^{\frac{1}{p_0}}$$

$$\lesssim_{\beta,p_0} \left[\int_{I_{0,s}} \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_0} dx\right]^{\frac{1}{p_0}} + s^{\frac{1}{p_0}-\beta}\left|\int_0^s f\right|;$$

при $p_1 < \infty$

$$\|f_{1,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)} = \left[\int_s^\infty \left|\frac{1}{x^\beta}\int_s^x f\right|^{p_1} dx\right]^{\frac{1}{p_1}}$$

$$\lesssim_{\beta,p_1} \left[\int_{I_{1,s}} \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_1} dx\right]^{\frac{1}{p_1}} + s^{\frac{1}{p_1}-\beta}\left|\int_0^s f\right|;$$

при $p_1 = \infty$

$$\|f_{1,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)} = \sup_{x>s}\left|\frac{1}{x^\beta}\int_s^x f\right| \leq \sup_{x>s}\left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right| + \frac{1}{s^\beta}\left|\int_0^s f\right|.$$

Следовательно, для $i \in \{0,1\}$ и $s \in I_*$ выполнено

$$\|f_{i,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} \lesssim_{\beta,p_i} \|\varphi_\beta H^\times(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_i}-\beta}\left|\int_0^s f\right|. \tag{9}$$

1. Случай $p < \infty$. Пусть $p_1 < p$ и $i \in \{0,1\}$. Применяя неравенство Гёльдера, получим оценку

$$\left[\int_{I_{i,s}} \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_i} dx\right]^{\frac{1}{p_i}} \leq \left[\int_{I_{i,s}} \left|\frac{1}{x^{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}\int_0^x f\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{I_{i,s}} x^{\mu_i}\,dx\right]^{\frac{1}{p_i}-\frac{1}{p}}, \tag{10}$$

где $\mu_i := \frac{(p_\theta - p)p_i}{p_\theta(p-p_i)}$. Правая часть (10) конечна, ибо $\mu_i + 1 > 0$ при $i = 0$ и $\mu_i + 1 < 0$ при $i = 1$. При $p_1 = p$

$$\left[\int_s^\infty \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_1} dx\right]^{\frac{1}{p_1}} \le \left[\int_s^\infty \left|\frac{1}{x^{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}\int_0^x f\right|^{p} dx\right]^{\frac{1}{p}} s^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}} < \infty.$$

Таким образом, $f_{0,s} \in \mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*)$ и $f_{1,s} \in \mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)$.

Для нашего случая $(X, Y) = (\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*), \mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))$, $i \in \{0, 1\}$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{I_*} \|f_{i,s}\|^p_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\, ds\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\lesssim_{\beta,p_i} \left[\int_{I_*}\left(\int_{I_{i,s}} \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_i} dx\right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\, ds\right]^{\frac{1}{p}} + \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}\\
&\qquad\lesssim_{p_0,p_1,p,\theta} \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}, \qquad (11)
\end{aligned}$$

где последняя оценка при $p_i < p$ получена применением неравенства Харди [13] для неотрицательных функций вида

$$\left[\int_{I_*}\left(\int_{I_{i,s}} x^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})p_i} g(x)\, dx\right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\, ds\right]^{\frac{p_i}{p}} \lesssim_{p_0,p_1,p,\theta} \left[\int_{I_*} g(x)^{\frac{p}{p_i}}\, dx\right]^{\frac{p_i}{p}},$$

ибо для $s \in I_*$ выполнено (см. (10))

$$\left[\int_{I_*\setminus I_{i,s}} y^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\, dy\right]^{\frac{p_i}{p}} \left[\int_{I_{i,s}} x^{\mu_i}\, dx\right]^{1-\frac{p_i}{p}} \approx_{p_0,p_1,p,\theta} 1.$$

При $p_1 = p$ имеем

$$\begin{aligned}
&\left[\int_{I_*}\left(\int_s^\infty \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p_1} dx\right)^{\frac{p}{p_1}} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1})-1}\, ds\right]^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad = \left[\int_{I_*} \left|\frac{1}{x^\beta}\int_0^x f\right|^{p} \int_0^x s^{\frac{p}{p_\theta}-2}\, ds\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \approx_{p_0,p_1,p,\theta} \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.
\end{aligned}$$

В силу (2) вложение (8) доказано для случая $p < \infty$.

2. Случай $p = \infty$. Для $i \in \{0, 1\}$ и $s \in I_*$ имеем

$$\begin{aligned}
&s^{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i}}\|f_{i,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} \lesssim_{\beta,p_i} s^{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i}}\|\varphi_\beta H^\times(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_\theta}-\beta}\left|\int_0^s f\right|\\
&\quad\le \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{\infty,\varphi_{\beta-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}[s^{\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i}}\|\varphi_{\frac{1}{p_\theta}}\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + 1] \lesssim_{p_0,p_1,\theta} \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{\infty,\varphi_{\beta-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.
\end{aligned}$$

Применяя (3), получим (8) для случая $p = \infty$. Теорема доказана. □

2.2. Интерполяция пространств $\mathrm{Ces}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$ K**-методом.** Заметим, что $\mathrm{Ces}_{q,\varphi_\beta}(I_*) = \{0\}$ при ($q < \infty$ и $\beta \le \frac{1}{q}$) или ($q = \infty$ и $\beta < 0$).

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0,1)$, $p \in [1,\infty]$. *Тогда выполнено* (1).

Доказательство. 1. Сначала докажем вложение

$$\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*) \hookrightarrow (\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*), \mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}. \tag{12}$$

При $p \in [p_1,\infty]$ (12) доказывается аналогично доказательству теоремы 2.

Пусть $p < p_1$. Фиксируем $f \in \mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)$. Покажем, что для $i \in \{0,1\}$ выполнено $f_{i,s} \in \mathrm{Ces}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)$ и имеет место оценка

$$\left[\int\limits_{I_*} \|f_{i,s}\|^p_{\mathrm{Ces}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p_0,p_1,p,\theta} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}. \tag{13}$$

В силу (9) имеем

$$\|f_{i,s}\|_{\mathrm{Ces}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} = \||f_{i,s}|\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} \lesssim_{\beta,p_i} \|\varphi_\beta H^\times(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})} + s^{\frac{1}{p_i}-\beta}\int\limits_0^s |f|$$

и, учитывая $f \in L^1_{\mathrm{loc}}([0,\infty))$, достаточно показать конечность первого слагаемого при $s = 1$.

При $p \le p_i < \infty$ применяем дискретизацию выражения $\|\varphi_\beta H^\times(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,1})}$ и неравенство Йенсена для сумм. Пусть $Z_0 := \mathbb{Z} \cap (-\infty,0]$, $Z_1 := \mathbb{Z} \cap [1,\infty)$. Имеем

$$\|\varphi_\beta H^\times(|f|)\|_{L^{p_i}(I_{i,1})} = \left[\sum_{k\in Z_i}\int\limits_{2^{k-1}}^{2^k}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x |f|\right]^{p_i} dx\right]^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\lesssim_{\beta,p_i} \left[\sum_{k\in Z_i}\left[(2^k)^{p(\frac{1}{p_i}-\beta)}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{p_i}{p}}\right]^{\frac{1}{p_i}} \le \left[\sum_{k\in Z_i}(2^k)^{p(\frac{1}{p_i}-\beta)}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\sum_{k\in Z_i}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\beta)}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta,p_\theta,p} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

При $p_1 = \infty$ действуем аналогично:

$$\sup_{x>1}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x|f|\right] = \sup_{k\in Z_1}\sup_{x\in(2^{k-1},2^k]}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x|f|\right] \lesssim_\beta \left[\sup_{k\in Z_1}(2^k)^{-p\beta}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left[\sum_{k\in Z_1}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\beta)}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta,p_\theta,p} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

При $p_0 < p$ конечность $\|f_{0,s}\|_{\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*)}$ доказывается с помощью неравенства Гёльдера, как сделано в (10). Таким образом, $f_{i,s} \in \mathrm{Ces}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)$ для $i \in \{0,1\}$.

При $p_i < \infty$, учитывая (11), для доказательства (13) достаточно показать выполнение неравенства

$$\left[\int\limits_{I_*}\left(\int\limits_{I_{i,s}}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x|f|\right]^{p_i}dx\right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{p_0,p_1,p,\theta} \|f\|_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

Пусть $Z_{0,k} := \mathbb{Z} \cap (-\infty, k]$, $Z_{1,k} := \mathbb{Z} \cap [k, \infty)$. Применяя дискретизацию и [14, предложение 2.1], получим

$$\left[\int\limits_{I_*}\left(\int\limits_{I_{i,s}}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x |f|\right]^{p_i} dx\right)^{\frac{p}{p_i}} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim_{p_0,p_1,p,\theta} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})}\left[\sum_{n\in Z_{i,k}}\int\limits_{2^{n-1}}^{2^n}\left(\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x |f|\right)^{p_i} dx\right]^{\frac{p}{p_i}}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\approx_{\beta,p_i,p} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_i})}\left[\sum_{n\in Z_{i,k}}(2^n)^{1-\beta p_i}\left(\int\limits_0^{2^n}|f|\right)^{p_i}\right]^{\frac{p}{p_i}}\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\approx_{\beta,p_0,p_1,p,\theta} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\beta)}\left(\int\limits_0^{2^k}|f|\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta,p_\theta,p} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

При $p_1 = \infty$ имеем

$$\left[\int\limits_{I_*}\|f_{1,s}\|^p_{\mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)} s^{p(\frac{1}{p_\theta}-\frac{1}{p_1})-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int\limits_{I_*}\left[\sup_{x>s}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_s^x |f|\right]\right]^p s^{\frac{p}{p_\theta}-1}\,ds\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim_{p,p_\theta} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^k)^{\frac{p}{p_\theta}}\sup_{m\ge k}\sup_{2^{m-1}<x\le 2^m}\left[\frac{1}{x^\beta}\int\limits_0^x|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\lesssim_{p,p_\theta} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}}(2^k)^{p(\frac{1}{p_\theta}-\beta)}\left[\int\limits_0^{2^k}|f|\right]^p\right]^{\frac{1}{p}} \lesssim_{\beta,p,p_\theta} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

2. Покажем обратное к (12) вложение. Фиксируем элемент $f \in (\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*), \mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}$. Фиксируем $s \in I_*$. Пусть $g_{s,i} \in \mathrm{Ces}_{p_i,w}(I_*)$, $i \in \{0,1\}$, о которых говорится в (4). Заметим, что

$$\|g_{s,i}\|_{\mathrm{Ces}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)} \ge \|\varphi_\beta\|_{L^{p_i}((s,\infty))}\int\limits_0^s |g_{s,i}| \approx_{\beta,p_i} s^{\frac{1}{p_i}-\beta}\int\limits_0^s |g_{s,i}|.$$

Следовательно,

$$\|g_{s,0}\|_{\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*)} + s^{\frac{1}{\gamma}}\|g_{s,1}\|_{\mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)} \gtrsim_{\beta,p_0,p_1} s^{\frac{1}{p_0}-\beta}\int\limits_0^s |f|.$$

Отсюда

$$\|f\|_{(\mathrm{Ces}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*),\mathrm{Ces}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}} \gtrsim_{\beta,p_0,p_1,p} \|f\|_{\mathrm{Ces}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)}.$$

Таким образом, (1) доказано. $\square$

2.3. Контрпример. Следующее утверждение показывает, что схема п. 2.2 неприменима для пространств $\mathscr{C}\mathrm{es}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$ при $p < p_1$.

Предложение 2. *Пусть* $1 \le p_0 < p_1 < \infty$, $\beta > \frac{1}{p_0}$, $\theta \in (0,1)$, $p \in [1, p_1)$. *Существует* $f \in \mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)$ *такой, что для любого* $s \in [0,\infty)$ *выполнено* $\chi_{(s,\infty)} f \notin \mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)$.

Доказательство. Пусть $\nu > \beta + \frac{p}{p_1-p}\left|\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p}\right|$, $0 < \eta < \min\left\{1, \frac{p_1}{p} - 1\right\}$. Для $k \in \mathbb{N}$ положим

$$\varepsilon_k := \begin{cases} \frac{1}{k^{2+\eta}}, & k \text{ четное}, \\ \frac{1}{k^\eta}, & k \text{ нечетное}; \end{cases} \qquad b_k := \begin{cases} k^{\frac{1}{p\nu}}, & k \text{ четное}, \\ k^{-\frac{1}{p\nu}}, & k \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Определим $\{\alpha_k\}_1^\infty \subset [2,\infty)$ и $\{a_k\}_1^\infty \subset (0,1)$ индуктивно. Положим $\alpha_1 := 2$, $a_1 := \varepsilon_1 2^{-p_1(\nu-\beta)}$. Пусть $\{\alpha_j\}_1^k$ и $\{a_j\}_1^k$ построены. Положим

$$\alpha_{k+1} := \frac{\alpha_k^2}{\alpha_k - a_k} = \alpha_k + a_k + \frac{a_k^2}{\alpha_k - a_k} \quad \text{и} \quad a_{k+1} := \varepsilon_{k+1}\alpha_{k+1}^{-p_1(\nu-\beta)}. \tag{14}$$

Тогда $\alpha_{k+1} > \alpha_k \ge 2$ и $0 < a_{k+1} < \varepsilon_{k+1} < 1$.

Из (14) вытекает, что последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ растет и

$$\alpha_{k+1} \ge \sum_{j=1}^k a_j = \sum_{j=1}^k \varepsilon_j \alpha_j^{-p_1(\nu-\beta)} \ge \alpha_{k+1}^{-p_1(\nu-\beta)} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j,$$

откуда с учетом расходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^\infty \varepsilon_j$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \infty$. Кроме того, из (14) имеем

$$a_k = \alpha_k - \frac{\alpha_k^2}{\alpha_{k+1}} = \frac{\alpha_k\alpha_{k+1} - \alpha_k^2}{\alpha_{k+1}} = \frac{(\alpha_{k+1} - \alpha_k)\alpha_k}{\alpha_{k+1}}.$$

Далее, для $q \in (1,\infty)$ имеем

$$\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^q} = \frac{1}{q-1}\left[\frac{1}{\alpha_k^{q-1}} - \frac{1}{\alpha_{k+1}^{q-1}}\right] = \frac{1}{q-1}\left[\frac{\alpha_{k+1}^{q-1} - \alpha_k^{q-1}}{\alpha_k^{q-1}\alpha_{k+1}^{q-1}}\right],$$

стало быть,

$$\frac{\min\{q-1,1\}}{q-1}\frac{a_k}{\alpha_k^q} \le \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^q} \le \frac{\max\{q-1,1\}}{q-1}\frac{a_k}{\alpha_k^q}.$$

Пусть $\alpha_0 = b_0 := 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ выберем $\delta_k \in (0, \alpha_{k+1} - \alpha_k)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}} < \int\limits_{\alpha_k+\delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}},$$

$$[2(b_{k-1}\alpha_{k-1})^\nu + (b_k\alpha_k)^\nu]^p \int\limits_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta_k} \frac{dx}{x^{p(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})}} < \frac{1}{2^k}.$$

Положим

$$f(x) := \sum_{j=1}^\infty \frac{(b_j\alpha_j)^\nu - (b_{j-1}\alpha_{j-1})^\nu}{\delta_j}\chi_{(\alpha_j,\alpha_j+\delta_j)}(x), \quad x \in I_*.$$

Заметим, что для $y \in [\alpha_k + \delta_k, \alpha_{k+1}]$ выполнено

$$\int_2^y f = \int_2^{\alpha_k+\delta_k} f = \sum_{j=1}^k [(b_j\alpha_j)^\nu - (b_{j-1}\alpha_{j-1})^\nu] = (b_k\alpha_k)^\nu,$$

а для $y \in (\alpha_k, \alpha_k + \delta_k)$

$$\left|\int_2^y f\right| \le \left|\int_2^{\alpha_k} f\right| + \left|\int_{\alpha_k}^y f\right| \le 2(b_{k-1}\alpha_{k-1})^\nu + (b_k\alpha_k)^\nu.$$

Так как

$$p\nu - p\left[\beta + \frac{1}{p} - \frac{1}{p_\theta}\right] \le p(\nu-\beta) + p\left|\frac{1}{p_\theta} - \frac{1}{p}\right| < p(\nu-\beta) + (p_1 - p)(\nu-\beta) = p_1(\nu-\beta),$$

то

$$\|f\|^p_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)} = \sum_{k=1}^\infty \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{1}{x^{p(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})}} \left|\int_2^x f\right|^p dx$$

$$\le \sum_{k=1}^\infty \left[\int_{\alpha_k}^{\alpha_k+\delta_k} \frac{[2(b_{k-1}\alpha_{k-1})^\nu + (b_k\alpha_k)^\nu]^p}{x^{p(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})}} dx + [b_k\alpha_k]^{p\nu} \int_{\alpha_k+\delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})}}\right]$$

$$\lesssim_{\beta,p,p_\theta} \sum_{k=1}^\infty \left[2^{-k} + b_k^{p\nu} a_k \alpha_k^{p\nu - p(\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta})}\right]$$

$$\le 1 + \sum_{k=1}^\infty b_k^{p\nu} a_k \alpha_k^{p_1(\nu-\beta)} = 1 + \sum_{k=1}^\infty b_k^{p\nu}\varepsilon_k = 1 + \sum_{k=1}^\infty k^{-(1+\eta)} < \infty.$$

Фиксируем произвольное $s \in [0, \infty)$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_m^\nu > 2$ и $m^{\frac{1}{p}} > \left|\int_2^{\max\{2,s\}} f\right|$. Тогда для четных $k \ge m$

$$\frac{1}{(b_k\alpha_k)^\nu}\left|\int_2^{\max\{2,s\}} f\right| = \frac{1}{k^{\frac{1}{p}}\alpha_k^\nu}\left|\int_2^{\max\{2,s\}} f\right| \le \frac{1}{m^{\frac{1}{p}}\alpha_m^\nu}\left|\int_2^{\max\{2,s\}} f\right| < \frac{1}{2}$$

и, следовательно,

$$\|\chi_{(s,\infty)} f\|^{p_1}_{\mathscr{C}\mathrm{es}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*)} \ge \sum_{k=m}^\infty \int_{\alpha_k+\delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}} \left|\int_s^{\alpha_k+\delta_k} f\right|^{p_1}$$

$$= \sum_{k=m}^\infty \int_{\alpha_k+\delta_k}^{\alpha_{k+1}} \frac{dx}{x^{p_1\beta}} \left|(b_k\alpha_k)^\nu - \int_2^{\max\{2,s\}} f\right|^{p_1}$$

$$\gtrsim_{\beta,p_1} \sum_{k=m}^\infty a_k b_k^{p_1\nu} \alpha_k^{p_1(\nu-\beta)} \left|1 - \frac{1}{(b_k\alpha_k)^\nu} \int_2^{\max\{2,s\}} f\right|^{p_1} \ge \frac{1}{2^{p_1}} \sum_{j=m}^\infty b_{2j}^{p_1\nu}\varepsilon_{2j} = \infty,$$

ибо $b_{2j}^{p_1\nu}\varepsilon_{2j} = (2j)^{\frac{p_1}{p}-2-\eta}$. $\square$

2.4. Интерполяция пространств $\mathrm{Cop}_{q,\varphi_\beta}(I_*)$ K**-методом.** Заметим, что $\mathrm{Cop}_{q,\varphi_\beta}(I_*) = \{0\}$ при ($q < \infty$ и $\beta \ge \frac{1}{q}$) или ($q = \infty$ и $\beta > 0$).

Предложение 3. *Любые два пространства семейства* $\{\mathscr{C}\mathrm{op}_{q,w}(I)\}_{q\in[1,\infty]}\cup\{\mathrm{Cop}_{q,w}(I)\}_{q\in[1,\infty]}$ *образуют интерполяционную пару.*

Теорема 4. *Пусть* $1\le p\le p_0<p_1\le\infty$, $\theta\in(0,1)$. *Тогда*

$$(\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p}\hookrightarrow\mathscr{C}\mathrm{op}_{p,w\cdot\varphi_{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*),$$

$$(\mathrm{Cop}_{p_0,w}(I_*),\mathrm{Cop}_{p_1,w}(I_*))_{\theta,p}\hookrightarrow\mathrm{Cop}_{p,w\cdot\varphi_{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*).$$

Теорема 5. *Пусть* $1\le p_0<p_1\le p\le\infty$, $\beta<\frac{1}{p_1}$ *при* $p_1<\infty$, $\beta\le 0$ *при* $p_1=\infty$, $\theta\in(0,1)$. *Тогда*

$$\mathscr{C}\mathrm{op}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*)\hookrightarrow(\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}.$$

Теорема 6. *Пусть* $1\le p_0<p_1\le\infty$, $\beta<\frac{1}{p_1}$ *при* $p_1<\infty$, $\beta\le 0$ *при* $p_1=\infty$, $\theta\in(0,1)$, $p\in[1,\infty]$. *Тогда выполнено*

$$(\mathrm{Cop}_{p_0,\varphi_\beta}(I_*),\mathrm{Cop}_{p_1,\varphi_\beta}(I_*))_{\theta,p}=\mathrm{Cop}_{p,\varphi_{\beta+\frac{1}{p}-\frac{1}{p_\theta}}}(I_*).$$

Теоремы 4–6 доказываются аналогично теоремам 1–3 с заменой $\int\limits_0^x f$ на $\int\limits_x^\infty f$. Так, утверждение теоремы 4 вытекает из оценки

$$2K(s^{\frac{1}{\gamma}},f,\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_0,w}(I_*),\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_1,w}(I_*))\ge\left[\int\limits_0^s\left|w(x)\int\limits_x^\infty f\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}s^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p}},$$

которая доказывается, как (7). А в разложениях $f=f_{0,s}+f_{1,s}$ и $f=g_{s,0}+g_{s,1}$ для $i\in\{0,1\}$ и $s\in I_*$ имеем

$$\|f_{i,s}\|_{\mathscr{C}\mathrm{op}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)}\lesssim_{\beta,p_i}\|\varphi_\beta H_\times(f)\|_{L^{p_i}(I_{i,s})}+s^{\frac{1}{p_i}-\beta}\left|\int\limits_s^\infty f\right|,$$

$$\|g_{s,i}\|_{\mathrm{Cop}_{p_i,\varphi_\beta}(I_*)}\ge\|\varphi_\beta\|_{L^{p_i}((0,s))}\int\limits_s^\infty|g_{s,i}|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kaminska A., Kubiak D.* On the dual of Cesàro function space // Nonlinear Anal. 2012. V. 75. P. 2760–2773.
2. *Prokhorov D. V.* On the associate spaces for altered Cesàro space // Anal. Math. 2022. V. 48. P. 1169–1183.
3. *Astashkin S. V., Maligranda L.* Structure of Cesàro function spaces: a survey // Function Spaces X (H. Hudzik et al., eds.). Proc. Int. Conf. 2014. V. 102. P. 13–40.
4. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 119–158.
5. *Stepanov V. D.* On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 507, N 1. 125764.
6. *Степанов В. Д.* Об ассоциированных пространствах к весовым пространствам Чезаро и Копсона // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 443–450.

7. *Prokhorov D. V.* On the dual spaces for weighted altered Cesàro and Copson spaces // J. Math. Anal. Appl. 2022. V. 514, N 2. 126325.

8. *Prokhorov D. V.* On the associated spaces of the weighted altered Cesàro space // Euras. Math. J. 2024. V. 15, N 1. P. 55–64.

9. *Astashkin S. V., Maligranda L.* Interpolation of Cesàro sequence and function spaces // Studia Math. 2013. V. 215. P. 39–69.

10. *Bennett C., Sharpley R.* Interpolation of operators. Boston, MA etc.: Acad. Press, Inc., 1988.

11. *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. Berlin: Springer-Verl., 1976.

12. *Lunardi A.* Interpolation theory. Paris: Publications of the Scuola Normale Superiore 3rd ed., 2018.

13. *Muckenhoupt B.* Hardy's inequalities with weights // Studia Math. 1972. V. 44, N 1. P. 31–38.

14. *Gol'dman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.

Поступила в редакцию 19 ноября 2024 г.
После доработки 24 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Прохоров Дмитрий Владимирович (ORCID 0000-0003-1802-6121)
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000
prohorov@as.khb.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.956

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение, главная часть которого совпадает с волновым оператором, а в младших членах присутствуют нелинейное слагаемое $q(\mathbf{x})u^m$, $m > 1$, и интегральный нелинейный оператор. Этот оператор моделирует память среды и содержит переменный коэффициент $p(\mathbf{x})$. Для исходного уравнения изучается структура решения задачи Коши с нулевыми начальными данными и точечным импульсным источником, локализованным в некоторой точке $(\mathbf{y}, 0)$ четырехмерного пространства переменных $(\mathbf{x}, t)$. Предполагается, что функции $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ финитны и их носители содержатся в шаре B_0 с центром в начале координат и границей S_0, а точка $\mathbf{y}$ принадлежит концентрической с S_0 сфере S большего радиуса. Точка $\mathbf{y}$ является параметром задачи и может пробегать всю сферу S. Изучается обратная задача об определении функций $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ в B_0. При этом используется следующая информация. Для любой точки $\mathbf{y}$, лежащей на сфере S, и для точек $\mathbf{x}$, лежащих на определенной части той же сферы, задается решение задачи Коши для исходного интегро-дифференциального уравнения для моментов времени, близких к приходу волны от источника в $\mathbf{y}$ до точек $\mathbf{x}$. Показано, что эта обратная задача редуцируется к двум идентичным задачам интегральной геометрии на семействе прямых с заданной весовой функцией, инвариантной относительно всевозможных вращений вокруг центра шара B_0. Установлена теорема единственности и предложен метод решения этих задач.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.210

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение с памятью, обратная задача, структура решения, интегральная геометрия, единственность, метод решения.

1. Введение

Пусть $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R\}, S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$, $B_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R_0\}$, $R > R_0 > 0$, $d = R - R_0$. Для $\mathbf{y} \in S$ определим

$$S((\mathbf{y}) = \bigl\{\mathbf{x} \in S \mid |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geq 2\sqrt{R^2 - R_0^2}\bigr\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}\mathscr{L}u \equiv \Box u - q(\mathbf{x})u^m - \int\limits_0^t K(\mathbf{x}, t-s)u^\ell(\mathbf{x}, s)\,ds = f_0 H(t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ u|_{t<0} = 0,\ (\mathbf{x}, t) \in \Omega_T,\end{gathered} \tag{1}$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

где $\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ — волновой оператор, $m > 1$, $\ell \geq 1$ — вещественные числа. В уравнении (1) f_0 — положительная постоянная, $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geq 0$ и $H(t) = 0$ для $t < 0$, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — дельта-функция Дирака, $\Omega_T = \mathbb{R}^3 \times (-\infty, T]$, $T > 2R$. В дальнейшем будем предполагать, что ядро уравнения (1) представимо в виде

$$K(\mathbf{x}, t) = p(\mathbf{x}) K_0(t), \tag{2}$$

в котором $K_0(0) = 1$, $K_0 \in C[0, T]$. Функции $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ предполагаются финитными с носителями, лежащими в области B_0.

Прямая задача. *При заданных $q(\mathbf{x})$, $K(x,t)$, m, ℓ, $\mathbf{y}$ и f_0 найти функцию $u(\mathbf{x}, t)$ как решение задачи* (1).

Точка $\mathbf{y}$ является параметром задачи. Поэтому ее решение обозначим через $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$. Так как уравнение (1) нелинейно, то нельзя гарантировать существование его решения при любом $T > 0$. В следующем разделе будет доказано его существование на некотором множестве, лежащем в области Ω_T.

Обратная задача. *В предположении, что выполнено равенство* (2) *с известной функцией $K_0(t)$, найти функции $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ в области B_0 по функции $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$, заданной формулой*

$$F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in S, \ \forall \mathbf{x} \in S(\mathbf{y}), \ t \in [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \eta], \tag{3}$$

в которой $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ — решение прямой задачи, $\eta > 0$ — произвольно малое число.

Обратные задачи для линейных уравнений с памятью начали изучаться довольно давно. Упомянем здесь работы [1–12], в которых рассмотрены задачи восстановления ядер гиперболических уравнений и систем уравнений электродинамики и упругости. Более подробную библиографию по этим задачам можно найти в книге [12]. Обратные задачи для нелинейных уравнений интенсивно изучаются в последнее время. В работах [13–17] изучены задачи, в которых квазилинейные уравнения гиперболического типа рассматриваются на лоренцевом многообразии. При этом изучены задачи об определении лоренцевой метрики, либо коэффициентов при нелинейностях. В статье [18] исследована задача для системы нелинейных уравнений теории упругости. В работах [19–28] изучены обратные задачи об определении коэффициентов нелинейного волнового уравнения, содержащего одну или две нелинейности. В статье [29] исследована обратная задача для нелинейного уравнения переноса.

В настоящей работе изучается обратная задача об определении коэффициентов $p(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Новизна этой работы состоит в том, что в ней впервые в рассматриваемое исходное уравнение входит наряду с нелинейным дифференциальным оператором и нелинейный интегро-дифференциальный оператор. В разд. 2 доказывается существование решения прямой задачи (1) в некотором сужении области Ω_T и дается представление этого решения в окрестности характеристического конуса $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$. Затем в разд. 3 исследуется обратная задача. Показывается, что задачи об определении функций $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ в шаре B_0 сводятся к идентичным задачам об их отыскании по интегралам вдоль всевозможных прямых линий, пересекающих шар B_0, с заданной весовой функцией, которая инвариантна относительно всевозможных вращений вокруг центра B_0. Устанавливается теорема единственности и формулируется возможный метод решения этих задач. В целом постановка обратной задачи и полученные результаты являются новыми.

2. Теорема существования и представление решения прямой задачи

Обозначим через $\nu(\mathbf{x},\mathbf{y})$ единичный вектор, вычисляемый по формуле

$$\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}| = \frac{\mathbf{x}-\mathbf{y}}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \mathbf{x}\neq\mathbf{y}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{y}\in S$ *— фиксированная точка, функции* $q(\mathbf{x})$, $p(\mathbf{x})$ *финитны в* B_0 *и* $q\in C^2(B)$, $p\in C(B)$, $K_0\in C[0,T]$. *Тогда найдется положительное число* η_0 *такое, что в области* $\Omega_T(\mathbf{y},\eta_0)=\Omega_T\setminus\{(\mathbf{x},t)\mid t>|\mathbf{y}-\mathbf{x}|+\eta_0\}$ *существует единственное обобщенное (в смысле теории распределений) решение задачи* (1) *и это решение представимо в виде*

$$u(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)] + v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}), \tag{4}$$

в котором

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = 0, \text{ если } \begin{cases} t<|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \quad t\le T,\\ |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le t\le 2d-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|. \end{cases}$$

Кроме того, функция $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ *непрерывна и*

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim \beta(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2, \text{ если } t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0. \tag{5}$$

Функции $\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})$, $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *и* $\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *вычисляются по формулам*

$$\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{f_0}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \tag{6}$$

$$\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{f_0^m}{2(4\pi)^m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})} q(\xi)s^{1-m}\,ds, \tag{7}$$

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{4|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})}\big[\Delta\alpha_1(\xi,\mathbf{y}) + mq(\xi)\alpha_0^{m-1}(\xi,\mathbf{y})\alpha_1(\xi,\mathbf{y}) + p(\xi)\alpha_0^{\ell}(\xi,\mathbf{y})\big]s\,ds, \tag{8}$$

в которых $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *— отрезок прямой, соединяющий точки* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$, $\xi=\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y})$ *— промежуточная точка интегрирования,* $s\in[0,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|]$.

Доказательство. Непосредственные вычисления с использованием представления (4) приводят к равенствам

$$\Box u(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = f_0H(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\bigg[2\nabla\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - \Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\bigg] + \Box v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),$$

$$u^m(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \Phi_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})),$$

$$\int\limits_0^t K(\mathbf{x},t-s)u^{\ell}(\mathbf{x},s,\mathbf{y})\,ds = p(\mathbf{x})\Phi_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})),$$

в которых

$$\Phi_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = \{H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]+v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\}^m - H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

$$\Phi_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = \int\limits_0^t K_0(t-s)\{H(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ + \alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)] + v(\mathbf{x},s,\mathbf{y})\}^\ell\, ds.$$

В итоге этих вычислений находим, что

$$\mathscr{L}u(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = f_0 H(t)\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \Box v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\Big[2\nabla\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ + 2\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} - q(\mathbf{x})\alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y})\Big] - \Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})),$$

где

$$\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = H(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \\ + q(\mathbf{x})\Phi_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) + p(\mathbf{x})\Phi_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})).$$

Подставим $\mathscr{L}u$ в формулу (1) и выберем $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ из условия

$$2\nabla\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\cdot\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) + 2\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} = q(\mathbf{x})\alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y}). \tag{9}$$

Тогда получим, что функция $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ должна быть решением задачи

$$\Box v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})), \quad v|_{t<0} = 0,\ (\mathbf{x},t)\in\Omega_T. \tag{10}$$

Из формулы (9) следует равенство (7). Действительно, уравнение (9), с учетом формулы (6) можно представить вдоль $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в виде

$$2\frac{d}{ds}\alpha_1(\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}) + \frac{2}{s}\alpha_1(\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y}) = q(\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}))\left(\frac{f_0}{4\pi}\right)^m s^{-m}$$

и, умножая на s, записать его так:

$$2\frac{d}{ds}[s\alpha_1(\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})] = q(\mathbf{y}+s\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}))\left(\frac{f_0}{4\pi}\right)^m s^{1-m}.$$

Интегрируя последнее равенство по промежутку $[0,|\mathbf{x}-\mathbf{y}|]$, приходим к формуле (7). Заметим, что в силу финитности $q(\mathbf{x})$ в B_0 функция $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ отлична от нуля только тогда, когда $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет непустое пересечение с областью B_0. При этом $q(\xi)=0$ для $|\xi-\mathbf{y}|\le d = R-R_0$.

Функция $\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))$ при $t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<0$ определяется равенством

$$\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = q(\mathbf{x})v^k(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \int\limits_0^t K(\mathbf{x},t-s)v^\ell(\mathbf{x},s,\mathbf{y})\,ds.$$

Следовательно, задача (10) при $t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|<0$ не содержит источников возмущений. В силу конечной скорости распространения сигналов

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\equiv 0 \text{ для } t<|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \quad t\le T.$$

Кроме того, в силу финитности функций $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ в B_0

$$\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = 0, \text{ если } |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le t\le 2d-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Отсюда следует, что $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \equiv 0$ в области $G_0(\mathbf{y},d) = \{((\mathbf{x},t) \mid |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le t \le 2d - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\}$.

Используя формулу Кирхгофа и равенство $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = 0$ для $t < |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, выпишем для функции $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ в области $t \ge |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, $t \le T$, интегральное уравнение:

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{D(\mathbf{x},\mathbf{y},t)} \frac{\Phi(\xi, t-|\xi-\mathbf{x}|, \mathbf{y}, v(\xi, t-|\xi-\mathbf{x}|, \mathbf{y}))}{|\xi-\mathbf{x}|}\, d\xi, \quad t \ge |\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \tag{11}$$

в котором область интегрирования $D(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ представляет собой внутренность эллипсоида вращения

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y},t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi-\mathbf{x}| = t - |\xi-\mathbf{y}|\}$$

с фокусами в точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Для исследования уравнения (11) удобно ввести некоторые специальные криволинейные координаты точки ξ. Введем в рассмотрение семейство софокусных эллипсоидов

$$E(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi-\mathbf{x}| + |\xi-\mathbf{y}| = \tau\}, \quad \tau \in [|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, t],$$

и примем в качестве одной из криволинейных координат параметр τ, характеризующий расположение точки ξ. Заметим, что при $\tau \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}| + 0$ эллипсоид $E(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)$ вырождается в отрезок $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Введем также новую декартову систему координат $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ с центром в точке $\mathbf{y}$ и связанную с ней сферическую систему координат r, θ, φ. Положим

$$\xi = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^{3} \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = r\sin\theta\cos\varphi, \quad \xi'_2 = r\sin\theta\sin\varphi, \quad \xi'_3 = r\cos\theta, \\ \theta \in [0,\pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \tag{12}$$

Единичные орты $\mathbf{e}_i, i = 1,2,3$, выберем так, чтобы орт $\mathbf{e}_3$ совпал с единичным вектором $\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta)$, $\vartheta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0,2\pi)$, а орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ примем ортогональными друг другу и орту $\mathbf{e}_3$. При этом ϑ и ϕ являются функциями $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Более точно, выберем $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$, в виде

$$\mathbf{e}_1 = (\cos\vartheta\cos\phi, \cos\vartheta\sin\phi, -\sin\vartheta), \quad \mathbf{e}_2 = (-\sin\phi, \cos\phi, 0),$$

$$\mathbf{e}_3 = (\sin\vartheta\cos\phi, \sin\vartheta\sin\phi, \cos\vartheta).$$

Тогда из формулы (12) следует, что

$$|\xi-\mathbf{y}| = r, \quad |\xi-\mathbf{x}| = (|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 - 2r|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos\theta + r^2)^{1/2},$$

и уравнение, определяющее эллипсоид $E(\mathbf{x},\mathbf{y},\tau)$, имеет вид

$$r = \frac{\tau^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{2(\tau - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos\theta)}.$$

В качестве второй криволинейной координаты примем угол φ, а в качестве третьей — цилиндрическую координату

$$z = \xi'_3 = r\cos\theta = \frac{(\tau^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2)\cos\theta}{2(\tau - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\cos\theta)}, \quad \theta \in [0,\pi].$$

Выразим $\cos\theta$ и $\sin\theta$ через z,τ. Используя предыдущую формулу, находим, что

$$\cos\theta(z,\tau)=\frac{2z\tau}{\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|},\tag{13}$$

$$\sin\theta(z,\tau)=\frac{[(\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2-4z^2\tau^2]^{1/2}}{\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}.\tag{14}$$

Формула (13) позволяет найти уравнение эллипсоида в координатах z,τ:

$$r=r(z,\tau)=\frac{z}{\cos\theta(z,\tau)}=\frac{1}{2\tau}(\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|).$$

Из этой формулы следует, что

$$z\in[z_1(\tau),z_2(\tau)],\quad z_1(\tau)=-\frac{\tau-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{2},\quad z_2(\tau)=\frac{\tau+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}{2}.$$

При этом

$$r\in[r_1(\tau),r_2(\tau)],\quad r_1(\tau)=\tau-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,\quad r_2(\tau)=\tau+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|.$$

Из формулы (14) следует также равенство

$$r(z,\tau)\sin\theta=\frac{1}{2\tau}[(\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2-4z^2\tau^2]^{1/2}=:f(z,\tau).$$

В результате этих вычислений формула (12) преобразуется к виду

$$\xi=\mathbf{y}+\sum_{i=1}^{3}\xi_i'\mathbf{e}_i,\quad \xi_1'=f(z,\tau)\cos\varphi,\quad \xi_2'=f(z,\tau)\sin\varphi,\quad \xi_3'=z,\ \varphi\in[0,2\pi).\tag{15}$$

В криволинейных координатах z,φ,τ имеем

$$d\xi=f(z,\tau)\frac{\partial f(z,\tau)}{\partial\tau}\,d\tau dz d\varphi.$$

Вычисляя $\frac{1}{2}\frac{\partial f^2(z,\tau)}{\partial\tau^2}$, находим, что

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f^2(z,\tau)}{\partial\tau^2}=\frac{1}{4\tau^3}(\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)(\tau^2-|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2-2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|).$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi}{|\xi-\mathbf{x}|}=\frac{1}{2\tau^2}(\tau^2-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2+2z|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\,d\tau dz d\varphi=\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\tau dz d\varphi.\tag{16}$$

Учитывая формулу (16), запишем уравнение (11) в виде

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}\Phi(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y},v(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y}))\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau,\tag{17}$$

$$t\geq|\mathbf{x}-\mathbf{y}|,$$

в котором переменная ξ определена формулой (15).

Пусть $\eta\in(0,d]$. Напомним, что $d=R-R_0$ и $G_0(\mathbf{y},d)=\{(\mathbf{x},t)\mid|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq t\leq 2d-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\}$. Определим множества

$$G_1(\mathbf{y},\eta,T)=\{(\mathbf{x},t)\mid|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq t\leq\eta+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\}\cap\Omega_T,$$

$$G(\mathbf{y},\eta,T,d)=G_1(\mathbf{y},\eta,T)\setminus G_0(\mathbf{y},d).$$

Заметим, что для $(\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d)$ при $\eta\le d$ справедливы неравенства

$$d/2\le|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le T,\quad t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le\eta\le d,\quad t+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le 2T. \tag{18}$$

В дальнейшем будем рассматривать уравнение (17) в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$. Определим для $(\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d)$ функции

$$\begin{cases}\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^m-\alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y}),\\ \Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}K_0(t-s)[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^\ell\,ds,\\ \Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+q(\mathbf{x})\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})+p(\mathbf{x})\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))&=q(\mathbf{x})\{[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})]^m\\&\qquad-[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^m\}\\&+p(\mathbf{x})\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}K_0(t-s)\{[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v(\mathbf{x},s,\mathbf{y})]^\ell\\&\qquad-[\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^\ell\}\,ds.\end{aligned} \tag{20}$$

Тогда функция Φ, входящая в уравнение (17), может быть записана в виде

$$\Phi(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))=\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})+\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})). \tag{21}$$

Оценим отдельные слагаемые функции $\Phi_0(\mathbf{x},t)$ для всех $(\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d)$. Прежде всего оценим $\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Лемма 1. *Пусть функция $q(\mathbf{x})$ финитна в B_0 и для нее выполнено условие*

$$\|q\|_{C^2(B)}=\max(\max_{1\le j,k\le 3}\max_{x\in B}|q_{x_jx_k}(\mathbf{x})|,\max_{1\le j\le 3}\max_{x\in B}|q_{x_j}(\mathbf{x})|,\max_{x\in B}|q(\mathbf{x})|)\le q_1<\infty. \tag{22}$$

Тогда имеет место оценка

$$|\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|\le a_{11},\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d), \tag{23}$$

в которой

$$a_{11}=\frac{q_1f_0^m}{2(4\pi)^md^{m-1}}[3+2(m-1)d^{-1}+(m-1)^2d^{-2}].$$

Доказательство. Выполняя в (7) замену переменной $s=\zeta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, запишем формулу для $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в виде

$$\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{f_0^m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-m}}{2(4\pi)^m}\int\limits_0^1 q(\mathbf{y}+\zeta(\mathbf{x}-\mathbf{y}))\zeta^{1-m}\,d\zeta. \tag{24}$$

В силу финитности $q(\mathbf{x})$ в B_0

$$\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=0 \text{ для } |\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le d=R-R_0.$$

Для $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|>d$ из формулы (24) следует равенство

$$\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})=\frac{f_0^m}{2(4\pi)^m}\int\limits_0^1\{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-m}\zeta^2\Delta_\xi q(\xi)+2\zeta\nabla_\xi q(\xi)\cdot\nabla_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-m}$$

$$+ q(\xi)\Delta_{\mathbf{x}}|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-m}\}\zeta^{1-m}\,d\zeta$$

$$= \frac{f_0^m}{2(4\pi)^m}\int\limits_0^1 \{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{1-m}\zeta^2\Delta_\xi q(\xi) + 2(1-m)\zeta|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-(m+1)}\nabla_\xi q(\xi)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

$$+ q(\xi)(m-1)^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-(m+1)}\}\zeta^{1-m}\,d\zeta, \quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > d. \tag{25}$$

Из равенства (25) и условия (22) тогда следует оценка

$$|\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \frac{q_1 f_0^m}{2(4\pi)^m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{m-1}}\int\limits_{d/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^1 [3\zeta^2 + 2(m-1)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1}\zeta$$

$$+ (m-1)^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2}]\zeta^{1-m}\,d\zeta, \quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > d.$$

В этой формуле нижний предел заменен на $d/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$, так как функция $q(\xi)$ равна нулю для $\zeta < d/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$. Замечая, что функция, стоящая в интеграле в квадратных скобках, монотонно возрастает, а функция ζ^{1-m} монотонно убывает, и интервал интегрирования не превосходит 1, положим $\zeta = 1$ в выражении в квадратных скобках и $\zeta = d/|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ в сомножителе. Заменяя длину промежутка интегрирования на 1, находим, что

$$|\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \frac{q_1 f_0^m}{2(4\pi)^m d^{m-1}}[3 + 2(m-1)|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-1} + (m-1)^2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^{-2}], \quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > d.$$

Окончательная оценка $\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ имеет вид

$$|\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \frac{q_1 f_0^m}{2(4\pi)^m d^{m-1}}[3 + 2(m-1)d^{-1} + (m-1)^2 d^{-2}] = a_{11}, \quad |\mathbf{x}-\mathbf{y}| > d. \tag{26}$$

Из сделанного выше замечания, что $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ для $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le d$, и неравенства (26) следует оценка (23). $\square$

Оценим функции Φ_{10} и Φ_{20}.

Лемма 2. *Пусть функция $q(\mathbf{x})$ финитна в B_0 и выполнены неравенства*

$$\|q\|_{C(B)} \le q_0, \quad |K_0\|_{C[0,T]} \le K_{00} \tag{27}$$

с некоторыми положительными постоянными q_0, K_{00}. Тогда в $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$ при достаточно малом числе $\eta > 0$ имеют место оценки

$$|\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le b_1(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|), \quad |\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le b_2(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|), \tag{28}$$

в которых постоянные b_1 и b_2 определены равенствами

$$b_1 = \frac{m f_0^m q_0 R_0}{(4\pi)^m d^m}\left[\frac{f_0}{2\pi d} + \frac{f_0^m q_0 R_0}{2(4\pi)^m d^{m-2}}\right]^{m-1}, \quad b_2 = K_{00}\left[\frac{f_0}{2\pi d} + \frac{f_0^m q_0 R_0}{2(4\pi)^m d^{m-2}}\right]^{\ell}.$$

Доказательство. В области $G(\mathbf{y},\eta,d)$, справедливы неравенства (18). Поэтому из формулы (6) и первого неравенства (18) следует, что в этой области

$$a_{00} := \frac{f_0}{4\pi T} \le \alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le \frac{f_0}{2\pi d} =: a_{01}. \tag{29}$$

Используя формулу (7) и финитность в B_0 функции $q(\mathbf{x})$, находим, что

$$|\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le \frac{f_0^m q_0 R_0}{(4\pi)^m d^m} =: a_{10}. \tag{30}$$

Из оценок (29) и (30) следует, что

$$\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \geq a_{00} - a_{10}\eta > 0,$$

если

$$\eta < \eta_{01} =: \min(a_{00}/a_{10}, d).$$

В дальнейшем будем полагать, что число η выбрано из этого условия. Полученное неравенство гарантирует корректность определения функций $\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и $\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$.

Преобразуем выражение для $\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, представив его в виде

$$\begin{aligned}\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) &= [\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^m - \alpha_0^m(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ &= m\int\limits_{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})}^{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)} z^{m-1}\,dz = (t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\Psi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}),\end{aligned} \quad (31)$$

в котором

$$\Psi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = m\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\int\limits_0^1 [\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)z_1]^{m-1}\,dz_1. \quad (32)$$

Из последней формулы и второго неравенства (18) следует, что

$$\begin{aligned}|\Psi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| &\leq m|\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|[|\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})| + |\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^{m-1} \\ &\leq ma_{10}[a_{01}+a_{10}d]^{m-1} = b_1.\end{aligned}$$

Из формулы (19) для функции $\Psi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и оценок (29), (30) находим, что

$$\begin{aligned}|\Psi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| &\leq \int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t} |K_0(t-s)|[|\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})| + |\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)]^{\ell}\,ds \\ &\leq K_{00}[a_{01}+a_{10}d]^{\ell}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = b_2(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|). \quad \square\end{aligned}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *функции* $q(\mathbf{x})$ *и* $p(\mathbf{x})$ *финитны в* B_0 *и выполнено условие*

$$\|p\|_{C(B)} \leq p_0 \quad (33)$$

с некоторой положительной постоянной p_0. *Тогда при достаточно малом числе* $\eta > 0$ *имеет место оценка*

$$|\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \leq A_0(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|), \quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d), \quad (34)$$

в которой

$$A_0 = a_{11} + q_0b_1 + p_0b_2.$$

Кроме того, справедливо равенство эквивалентности

$$\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim \gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \quad \text{при } t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0 \quad (35)$$

с функцией $\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y})$, *определенной формулой*

$$\gamma(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) + mq(\mathbf{x})\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha_0^{m-1}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + p(\mathbf{x})\alpha_0^{\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y}). \quad (36)$$

Доказательство. Примем, что $\eta < \eta_{01}$. Используя оценки (23), (28) для отдельных слагаемых функции $\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и условия (27) и (33), находим, что

$$
\begin{aligned}
|\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| &\le |\Delta\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})|(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + |q(\mathbf{x})||\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| + |p(\mathbf{x})||\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \\
&\le a_{11}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + q_0 b_1(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) + p_0 b_2(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = A_0(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|).
\end{aligned}
$$

Это неравенство доказывает оценку (34).

Из формул (31) и (32) следует, что при $(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\to +0$ справедливо соотношение

$$
\Phi_{10}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim mq(\mathbf{x})\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})\alpha_0^{m-1}(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|). \tag{37}
$$

Аналогично из формулы (19) для $\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и условия $K_0(0)=1$ следует соотношение

$$
\Phi_{20}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim p(\mathbf{x})\alpha_0^{\ell}(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \quad \text{при} \ \ (t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\to +0. \tag{38}
$$

Из (37) и (38) вытекают формулы (35) и (36). $\square$

Определим функцию $v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ равенством

$$
v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_0^{2\pi}\Phi_0(\xi, t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau, \quad t\ge|\mathbf{x}-\mathbf{y}|, \tag{39}
$$

и изучим ее свойства в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия лемм 1–3 и $\eta<\eta_{01}$. Тогда функция $v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ непрерывна в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$ и для нее справедлива оценка*

$$
|v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2, \quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d). \tag{40}
$$

с положительной постоянной

$$
A_{00} = A_0 T/2.
$$

Кроме того, имеет место равенство

$$
v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim \beta(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2 \quad \text{при } t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0, \tag{41}
$$

в котором функция $\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определена формулой (8).

Доказательство. Функция $\Phi_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ непрерывна в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$. Поэтому подынтегральное выражение в формуле (40) является непрерывной функцией в этой области. Следовательно, и функция $v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ обладает этим же свойством непрерывности. Оценим ее, используя неравенство (34), соотношения

$$
r(z,\tau)\le\tau+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le t+|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\le 2T, \quad z_2(\tau)-z_1(\tau)=\tau
$$

и (18). Тогда

$$
|v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_0^{2\pi} A_0(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau
$$

$$
\le A_0 T\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}(t-\tau)\,d\tau = \frac{A_0T}{2}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2 = A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2, \ (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d).
$$

Эта оценка доказывает формулу (40).

Если $t \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0$, то $\tau \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0$ и

$$\frac{r(z,\tau)}{\tau} \to \frac{z}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad \xi \to \mathbf{y} + z\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad z_1(\tau) \to 0, \quad z_2(\tau) \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|$$

равномерно по $(\mathbf{x},t)$ в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$. При этом эллипсоид $E(\mathbf{x},\mathbf{y},t)$ стягивается к отрезку $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Поэтому, используя (35), находим, что

$$v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) \sim \frac{1}{2}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)} \gamma(\xi,\mathbf{y})(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)\frac{z}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\,dzd\tau$$

$$= \frac{1}{2|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{0}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \gamma(\mathbf{y}+z\nu(\mathbf{x},\mathbf{y}),\mathbf{y})(t-\tau)z\,dzd\tau$$

$$= (t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2\frac{1}{4|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\int\limits_{0}^{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}\gamma(\xi,\mathbf{y})z\,dz = \beta(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2, \quad t \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0.$$

Таким образом, установлено соотношение (41). $\Box$

Из равенств (17), (39) следует, что уравнение (17) в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$ может быть представлено в виде

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}\widehat{\Phi}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y},v(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y}))\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dzd\tau. \quad (42)$$

Используя формулу (20), преобразуем функцию $\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))$, входящую в это уравнение, следующим образом:

$$\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = mq(\mathbf{x})\int\limits_{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}^{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}\zeta^{m-1}\,d\zeta$$

$$+ \ell p(\mathbf{x})\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}K_0(t-s)\int\limits_{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}^{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v(\mathbf{x},s,\mathbf{y})}\zeta^{\ell-1}\,d\zeta$$

$$= mq(\mathbf{x})v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\widehat{\Psi}_m(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) + \ell p(\mathbf{x})\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}K_0(t-s)v(\mathbf{x},s,\mathbf{y})\widehat{\Psi}_\ell(\mathbf{x},s,\mathbf{y},v(\mathbf{x},s,\mathbf{y}))\,ds. \quad (43)$$

В формуле (43) функции $\widehat{\Psi}_m(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))$ и $\widehat{\Psi}_\ell(\mathbf{x},s,\mathbf{y},v(\mathbf{x},s,\mathbf{y}))$ определены равенствами

$$\widehat{\Psi}_m(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})) = \int\limits_0^1\{v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\zeta_1 + \alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\}^{m-1}\,d\zeta_1, \quad (44)$$

$$\widehat{\Psi}_\ell(\mathbf{x},s,\mathbf{y},v(\mathbf{x},s,\mathbf{y}))=\int\limits_0^1\{v(\mathbf{x},s,\mathbf{y})\zeta_1+\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)\}^{\ell-1}\,d\zeta_1. \quad (45)$$

Рассмотрим для уравнения (42) метод последовательных приближений:

$$v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_0^{2\pi}\widehat{\Phi}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y},v_{n-1}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y}))\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau, \quad (46)$$

для $n=1,2,\dots$.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия лемм 1–3. Тогда найдется положительное число $\eta_0=\eta_0(R_0,T,d,m,\ell,q_1,q_0,p_0,K_{00})$ такое, что последовательные приближения, определенные формулой (46), сходятся в области $G(\mathbf{y},\eta_0,T,d)$ равномерно к непрерывной функции $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, для которой имеют место соотношения*

$$|v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})-v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|\le\frac{A_{00}}{\eta_0}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^3,\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta_0,T,d), \quad (47)$$

$$v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\sim\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2\quad \text{при } t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0. \quad (48)$$

причем функция $\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ определена формулой (8).

Доказательство. Пусть $\eta\in(0,\eta_{01})$. Тогда все последовательные приближения $v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ непрерывны в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$. Это устанавливается так же, как и ранее непрерывность функции $v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. Покажем, что эти приближения удовлетворяют неравенству

$$|v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|\le 2A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2,\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d),\ n=1,2,\dots. \quad (49)$$

Так как
$$|v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|\le A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2,\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d),$$
то
$$|v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|\le A_{00}\eta^2\le 2A_{00}\eta^2,\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d).$$
Выберем число $\eta_{02}\in(0,\eta_{01})$ так, чтобы выполнялось условие

$$\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})\ge a_{00}-a_{10}\eta_{02}-2A_{00}\eta_{02}^2>0. \quad (50)$$

Это условие необходимо для корректности определения $\widehat{\Psi}_m$ и $\widehat{\Psi}_\ell$.

При $\eta\in(0,\eta_{02}]$ справедливы неравенства

$$\begin{cases}|\widehat{\Psi}_m(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))|\le(2A_{00}d^2+a_{01}+a_{10}d)^{m-1},\\ |\widehat{\Psi}_\ell(\mathbf{x},s,\mathbf{y},v_0(\mathbf{x},s,\mathbf{y}))|\le(2A_{00}d^2+a_{01}+a_{10}d)^{\ell-1}.\end{cases} \quad (51)$$

Из этих неравенств и (43) вытекает оценка функции $\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))$:

$$|\widehat{\Phi}(\mathbf{x},t,\mathbf{y},v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y}))|\le C(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2,\quad (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta,T,d),$$

в которой постоянная $C=C(R_0,T,d,m,\ell,q_1,q_0,p_0,K_{00})$ определяется формулой

$$C=2A_{00}[mq_0(2A_{00}d^2+a_{01}+a_{10}d)^{m-1}+\ell p_0K_{00}(2A_{00}d^2+a_{01}+a_{10}d)^{\ell-1}].$$

Из формулы (46) при $n = 1$ и оценки (51) находим, что

$$|v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le |v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}|\widehat{\Phi}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y},v_0(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y}))|\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau$$
$$\le A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2 + \frac{C}{2}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)^2\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,dz d\tau.$$

Так как

$$r(z,\tau) \le \tau + |\mathbf{x}-\mathbf{y}| \le 2T, \quad z_2(\tau) - z_1(\tau) = \tau,$$

продолжая предыдущее неравенство, приходим к оценке

$$|v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2 + CT\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}(t-\tau)^2\,d\tau$$
$$= A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2 + \frac{CT}{3}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^3 \le \left[A_{00} + \frac{CT}{3}\eta\right](t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2.$$

Выберем η_0 из условия

$$\eta_0 = \min[\eta_{02}, 3A_{00}/(CT)].$$

Тогда из полученного выше неравенства следует оценка

$$|v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 2A_{00}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2. \tag{52}$$

Таким образом, при $n = 1$ верно неравенство (49).

Рассмотрим теперь приближение $v_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. При оценке его интегральной составляющей роль $v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ играет функция $v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. Заметим, что в оценке (50) мы заменили в ней v_0 на $2A_{00}\eta_{02}^2$. Поэтому оценки (50), (51) останутся верными при замене в них v_0 на функцию v_1, так как для нее верно то же самое неравенство. Следовательно, оценка (52) также останется верной с той же постоянной C при замене в ней v_1 на v_2. В итоге, повторяя для оценки $v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, $n \ge 3$, выкладки, аналогичные проделанным выше, приходим к выводу, что неравенство (49) верно и при любом натуральном n.

Так как неравенство (49) верно при любом v_n, то справедлива и оценка

$$|v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) - v_0(\mathbf{x},t,\mathbf{y})|$$
$$\le \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}|\widehat{\Phi}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y},v_{n-1}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y}))|\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau$$
$$\le CT\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}(t-\tau)^2\,d\tau = \frac{CT}{3}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^3 \le \frac{A_{00}}{\eta_0}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^3. \tag{53}$$

Покажем сходимость последовательности $v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. Введем разности

$$w_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) - v_{n-1}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Используя оценку (53) при $n = 1$, находим, что

$$|w_1(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| \le \frac{6A_{00}}{\eta_0} \frac{(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^3}{3!}, \quad (\mathbf{x}, t) \in G(\mathbf{y}, \eta_0, T, d). \tag{54}$$

Чтобы оценить $w_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ для $n \ge 2$, необходимо преобразовать разность

$$\widehat{\Phi}(\xi, t, \mathbf{y}, v_n(\xi, t, \mathbf{y})) - \widehat{\Phi}(\xi, t, \mathbf{y}, v_{n-1}(\xi, t, \mathbf{y}))$$

к виду, удобному для выполнения этих оценок. Представим эту разность в виде

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Phi}(\xi, t, \mathbf{y}, v_n(\xi, t, \mathbf{y})) - \widehat{\Phi}(\xi, t, \mathbf{y}, v_{n-1}(\xi, t, \mathbf{y})) \\
&\quad = q(\mathbf{x})\{[\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})]^m \\
&\quad - [\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_{n-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})]^m\} \\
&+ p(\mathbf{x}) \int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t} K_0(t - s)\{[\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(s - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_n(\mathbf{x}, s, \mathbf{y})]^\ell \\
&\quad - [\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(s - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_{n-1}(\mathbf{x}, st, \mathbf{y})]^\ell\} \, ds \\
&\quad = mq(\mathbf{x}) \int\limits_{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v_{n-1}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}^{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})} \zeta^{m-1} \, d\zeta \\
&+ \ell p(\mathbf{x}) \int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t} K_0(t - s) \int\limits_{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v_{n-1}(\mathbf{x},s,\mathbf{y})}^{\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y})+\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})(s-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)+v_n(\mathbf{x},s,\mathbf{y})} \zeta^\ell \, d\zeta \, ds \\
&= mq(\mathbf{x}) w_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \Psi_{3n}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) + \ell p(\mathbf{x}) \int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t} K_0(t - s) w_n(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) \Psi_{4n}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) \, ds,
\end{aligned} \tag{55}$$

в котором Ψ_{3n} и Ψ_{4n} вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\Psi_{3n}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \int\limits_0^1 &\{[v_n(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) - v_{n-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})]\zeta_1 \\
&+ [\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_{n-1}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})]\}^{m-1} \, d\zeta_1,
\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{4n}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) = \int\limits_0^1 &\{[v_n(\mathbf{x}, s, \mathbf{y}) - v_{n-1}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y})]\zeta_1 \\
&+ [\alpha_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})(s - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v_{n-1}(\mathbf{x}, s, \mathbf{y})]\}^{\ell-1} \, d\zeta_1.
\end{aligned} \tag{57}$$

Оценим Ψ_{3n} и Ψ_{4n} в области $G(\mathbf{y}, \eta_0, T, d)$. Используя неравенства (49), находим, что

$$\begin{aligned}
|\Psi_{3n}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})| &\le \int\limits_0^1 \{4A_{00}d^2\zeta_1 + [a_{01} + a_{10}d + 2A_{00}d^2]\}^{m-1} \, d\zeta_1 \\
&\le \{6A_{00}d^2 + a_{01} + a_{10}d\}^{m-1} =: D_m.
\end{aligned} \tag{58}$$

Аналогично

$$|\Psi_{4n}(\mathbf{x},s,\mathbf{y})| \le \{6A_{00}d^2 + a_{01} + a_{10}d\}^{\ell-1} =: D_\ell. \tag{59}$$

Используя представление (55) и оценки (58), (59), получаем оценку

$$|w_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}\Bigg\{mq_0D_m|w_1(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})|$$

$$+\ell D_\ell K_{00}\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}|w_1(\xi,s,\mathbf{y})|\,ds\Bigg\}\frac{r(z,\tau}{\tau}\,d\varphi\,dzd\tau.$$

В силу неравенства (54) имеем

$$|w_1(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})| \le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\frac{(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)^3}{3!} = \frac{6A_{00}}{\eta_0}\frac{(t-\tau)^3}{3!},$$

$$\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}|w_1(\xi,s,\mathbf{y})|\,ds \le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}\frac{(s-|\xi-\mathbf{y}|)^3}{3!}\,ds$$

$$\le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\frac{(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)^3}{3!}(t-|\xi-\mathbf{x}|-|\xi-\mathbf{y}|)$$

$$\le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\frac{(t-\tau)^3}{3!}(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\eta_0\frac{(t-\tau)^3}{3!}.$$

Здесь при оценке интегрального члена мы несколько загрубили эту оценку, подставив вместо переменной s ее значение на верхнем пределе, а затем воспользовавшись неравенством треугольника. Однако это загрубление упрощает дальнейшие выкладки. Продолжая оценку $w_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$, находим, что

$$|w_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le \frac{6A_{00}T}{\eta_0}(mq_0D_m+\ell D_\ell K_{00}\eta_0)\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\frac{(t-\tau)^3}{3!}\,d\tau$$

$$= \frac{6A_{00}}{\eta_0}T(mq_0D_m+\ell D_\ell K_{00}\eta_0)\frac{(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^4}{4!}.$$

Методом математической индукции устанавливается общая оценка

$$|w_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le \frac{6A_{00}}{\eta_0}\{T[mq_0D_m+\ell D_\ell K_{00}\eta_0]\}^{n-1}\frac{(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^{n+2}}{(n+2)!}$$

$$\le 6A_{00}\{T[mq_0D_m+\ell D_\ell K_{00}\eta_0]\}^{n-1}\frac{\eta_0^{n+1}}{(n+2)!},\ n=1,2,\ldots. \tag{60}$$

Доказательство ее предоставляется читателю.

Из оценки (60) следует равномерная сходимость последовательности $v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ в области $G(\mathbf{y},\eta_0,T,,d)$ к некоторой предельной функции $v(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. Эта функция непрерывна, так как непрерывны все $v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. Из неравенства (53) следует неравенство (47). Из него, в свою очередь, с учетом формулы (41) вытекает равенство эквивалентности (48). □

Установим единственность решения интегрального уравнения (42).

Лемма 6. *Пусть выполнены условия лемм 1–3. Тогда решение уравнения (42) в классе непрерывных функций в области $G(\mathbf{y},\eta_0,T,d)$ единственно.*

Доказательство. Допустим, что существуют два непрерывных решения $v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ и $v_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ уравнения (42). Обозначим

$$\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = v_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) - v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y}).$$

Воспользуемся представлением (55), положив в нем чисто формально $n=2$ и заменив w_n на $\widetilde{v}$. Тогда из (42) получим для $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ уравнение

$$\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}\Bigg\{mq(\mathbf{x})\widetilde{v}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})\Psi_{32}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})$$
$$+\ell p(\mathbf{x})\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}K_0(t-s)\widetilde{v}(\xi,s,\mathbf{y})\Psi_{42}(\xi,s,\mathbf{y})\,ds\Bigg\}\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau. \quad (61)$$

В этом уравнении функции Ψ_{32} и Ψ_{42} определены равенствами (56), (57) при $n=2$. Непрерывные в области $G(\mathbf{y},\eta_0,T,d)$ функции v_1 и v_2 ограничены некоторой константой, какой именно — не влияет на доказательство леммы. Примем, что

$$|v_k(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 2A_{00}\eta_0^2, \quad k=1,2,\ (\mathbf{x},t)\in G(\mathbf{y},\eta_0,T,d).$$

Тогда неравенства (58), (59) будут выполнены для Ψ_{32} и Ψ_{42}. Используя их и формулу (61), оценим $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ следующим образом:

$$|\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le \frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\int\limits_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)}\int\limits_{0}^{2\pi}\Bigg\{mq_0D_m|\widetilde{v}(\xi,t-|\xi-\mathbf{x}|,\mathbf{y})|$$
$$+\ell p_0D_\ell K_{00}\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}|\widetilde{v}(\xi,s,\mathbf{y})|\,ds\Bigg\}\frac{r(z,\tau)}{\tau}\,d\varphi dz d\tau. \quad (62)$$

Из оценки (62) фактически и следует, что $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})=0$. В самом деле, для $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ верно неравенство

$$|\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le |v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| + |v_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 4A_{00}\eta_0^2.$$

Поэтому из (62) для $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ следует и другая оценка

$$|\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 4A_{00}\eta_0^2T\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}\Bigg\{mq_0D_m+\ell p_0D_\ell K_{00}\int\limits_{|\xi-\mathbf{y}|}^{t-|\xi-\mathbf{x}|}ds\Bigg\}\,d\tau$$
$$\le 4A_{00}\eta_0^2T[mq_0D_m+\ell p_0D_\ell K_{00}\eta_0]\int\limits_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}^{t}d\tau$$
$$= 4A_{00}\eta_0^2T[mq_0D_m+\ell p_0D_\ell K_{00}\eta_0](t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|).$$

Подставим эту оценку в правую часть неравенства (62). Тогда получим новую оценку

$$|\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 4A_{00}\eta_0^2\{T[mq_0D_m+\ell p_0D_\ell K_{00}\eta_0]\}^2\frac{(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^2}{2!}.$$

Повторяя этот процесс итераций в (62) n раз, найдем, что

$$|\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y})| \le 4A_{00}\eta_0^2\{T[mq_0D_m + \ell p_0 D_\ell K_{00}\eta_0]\}^n \frac{(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)^n}{n!}$$
$$\le 4A_{00}\eta_0^2\{T[mq_0D_m + \ell p_0 D_\ell K_{00}\eta_0]\}^n\}^n \frac{\eta_0^n}{n!}.$$

При $n \to \infty$ правая часть этого равенства равномерно стремится к нулю в области $G(\mathbf{y},\eta_0,T,d)$. Поэтому $\widetilde{v}(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = 0$, значит, $v_1(\mathbf{x},t,\mathbf{y}) = v_2(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$. $\square$

Из леммы 6 следует, что прямая задача также имеет в области $\Omega_T(\mathbf{y},\eta_0)$ единственное обобщенное решение. Заметим, что это решение положительно в области $G(\mathbf{y},\eta,T,d)$, так как на каждом шаге метода последовательных приближений мы следили за тем, чтобы сумма $\alpha_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \alpha_(\mathbf{x},\mathbf{y})(t-|\mathbf{x},\mathbf{y}|) + v_n(\mathbf{x},t,\mathbf{y})$ была положительной. Последнее замечание завершает доказательство теоремы 1. $\square$

3. Анализ обратной задачи

Из представления (4) и данных обратной задачи (3) следует, что

$$\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{\partial u(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t}\bigg|_{t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0} = \frac{\partial F(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t}\bigg|_{t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}, \ \mathbf{y}\in S, \ \mathbf{x}\in S(\mathbf{y}). \quad (63)$$

Таким образом, данные обратной задачи позволяют найти функцию $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y}\in S$ и всех $\mathbf{x}\in S(\mathbf{y})$. Воспользуемся теперь формулой (7). Из нее и формулы (63) следует, что на том же самом множестве можно найти интегралы

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})} q(\xi)s^{1-m}\,ds = h_1(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in S, \ \mathbf{x}\in S(\mathbf{y}), \quad (64)$$

в которых

$$h_1(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 2f_0^{-m}(4\pi)^m|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y}).$$

Значит, задача об определении финитной в области B_0 функции $q(\mathbf{x})$ сводится к решению задачи интегральной геометрии: заданы интегралы (64) по всевозможным прямым, пересекающим область B_0, требуется по ним найти функцию $q(\mathbf{x})$. Эта задача несколько более общая по сравнению с задачей рентгеновской томографии за счет присутствия в интегралах весовой функции $s^{1-m} = |\xi-\mathbf{y}|^{1-m}$. Так же, как и трехмерная задача рентгеновской томографии, она распадается на серию двумерных задач в сечениях шара B_0 плоскостями, проходящими через его центр. При этом семейство прямых линий и весовая функция инвариантны относительно всевозможных вращений вокруг центра шара B_0. Задачи интегральной геометрии, обладающие таким свойством инвариантности, рассмотрены в [30, с. 35–40]. Предложенный там метод устанавливает теорему единственности решения задачи и дает способ ее решения. Для удобства читателя кратко укажем, в чем этот метод заключается.

Каждая из задач (64) для двумерных сечений шара B_0 идентична любой другой, поэтому, не ограничивая общности, рассмотрим сечение B_0 плоскостью $x_3 = 0$ и в дальнейшем будем полагать, что $\mathbf{y} = R(\cos\psi_1, \sin\psi_1, 0)$, $\mathbf{x} = R(\cos\psi_2, \sin\psi_2, 0)$. На плоскости переменных ξ_1,ξ_2 введем полярную систему координат r,ψ и положим $\xi_1 = r\cos\psi$, $\xi_2 = r\sin\psi$. Рассмотрим прямую, проходящую через точку с полярными координатами (ρ,ψ_0), $\rho\in[0,R_0]$, $\psi\in[0,2\pi)$, ортогонально вектору $\nu^0 = (\cos\psi_0, \sin\psi_0)$. Тогда уравнение этой прямой можно представить в виде двух ветвей:

$$\psi = \psi_0 + \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right), \ r \in [\rho, R_0]; \quad \psi = \psi_0 - \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right), \ r \in [\rho, R_0],$$

причем первая ветвь соответствует части линии $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, соединяющей точку с полярными координатами (ρ, ψ_0) с точкой $\mathbf{y}' = R(\cos\psi_1, \sin\psi_1)$, а вторая ветвь — части этой линии, соединяющей ту же точку с точкой $\mathbf{x}' = R(\cos\psi_2, \sin\psi_2)$. Значения ψ_1 и ψ_2 находятся по формулам

$$\psi_1 = \psi_0 + \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \quad \psi_2 = \psi_0 - \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right).$$

Заметим также, что расстояние s, равное длине отрезка прямой линии, соединяющей точки $R(\cos\psi_1, \sin\psi_1)$ и $r(\cos\psi, \sin\psi)$, определяется равенствами

$$s = s_1(r, \rho) =: (R^2 - \rho^2)^{1/2} - (r^2 - \rho^2)^{1/2}, \quad s = s_2(r, \rho) =: (R^2 - \rho^2)^{1/2} + (r^2 - \rho^2)^{1/2}$$

для первой и второй ветвей соответственно. При этом $|ds| = r\,dr/\sqrt{r^2 - \rho^2}$.

В силу сказанного выше уравнение (64) в выбранном сечении можно записать в виде

$$\int\limits_{\rho}^{R_0} \left[s_1^{1-m}(r, \rho) q\left(r, \psi_0 + \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right) + s_2^{1-m}(r, \rho) q\left(r, \psi_0 - \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)\right]$$
$$\times \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \widehat{h}_1(\rho, \psi_0), \quad \rho \in [0, R_0], \ \psi_0 \in [0, 2\pi), \quad (65)$$

в котором правая часть — некоторая заданная функция.

Инвариантность к вращениям вокруг центра шара B_0 проявляется здесь в том, что переменная ψ_0 входит аддитивно в подынтегральную функцию. Это позволяет для решения уравнения (65) использовать метод Фурье.

Представим вещественную функцию $q(r, \psi)$ ее рядом Фурье

$$q(r, \psi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_n(r) e^{in\psi}. \quad (66)$$

При этом комплексные коэффициенты $q_n(r)$ обладают свойством $q_{-n}(r) = \overline{q}_n(r)$. Умножая обе части уравнения (65) на $e^{-ik\psi_0}/(2\pi)$ и интегрируя по ψ_0 по отрезку $[0, 2\pi]$, получаем интегральное уравнение для отыскания коэффициента $q_k(r)$:

$$\int\limits_{\rho}^{R_0} T_k(r, \rho) q_k(r) \frac{rdr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \widehat{h}_{1k}(\rho), \quad \rho \in [0, R_0], \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (67)$$

где функция $T_k(r, \rho)$ вычисляется по формуле

$$T_k(r, \rho) = s_1^{1-m}(r, \rho) \exp\left(ik \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right) + s_2^{1-m}(r, \rho) \exp\left(-ik \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right),$$

а правая часть $\widehat{h}_{1k}(\rho)$ — коэффициент Фурье функции $\widehat{h}_1(\rho, \psi_0)$.

Функция $T_k(r, \rho)$ бесконечно дифференцируема для всех $0 < \rho \le r \le R_0$ и $T_k(\rho, \rho) = 2(R^2 - \rho^2)^{(1-m)/2} \ne 0$.

Уравнение (67) относится к уравнениям типа Абеля. Благодаря свойствам функции $T_k(r,\rho)$ это уравнение дифференцированием половинного порядка относительно ρ^2 приводится к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным на множестве $\rho_0 \le \rho \le r \le R_0$ ядром при любом $\rho_0 > 0$. Для таких уравнений справедлива теорема единственности, а метод последовательных приближений сходится равномерно и факториально быстро к непрерывному решению уравнения. В силу произвольности ρ_0 каждый коэффициент $q_k(r)$ определяется однозначно при $r \in [0, R_0]$. Поэтому однозначно определяется и функция $q(r,\psi)$ для $r \in [0, R_0]$, $\psi \in [0, 2\pi)$.

Заметим, однако, что в вычислительном отношении построение функции $q(r,\psi)$ по ее коэффициентам Фурье $q_k(r)$ имеет определенные трудности. Это связано с тем, что ядра интегральных уравнений Вольтерра второго рода выражаются через производные функции $T_k(r,\rho)$ по r и ρ и поэтому неограниченно растут с ростом $|k|$. В результате неограниченно растут и ошибки при численном решении этих уравнений и суммирование ряда (66) представляет собой некорректную задачу. Для ее решения необходимо использовать методы регуляризации, развитые в хорошо известных работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и других авторов. Заметим также, что на основе методов регуляризации можно получить и оценку условной устойчивости решения задачи (64).

Из изложенного выше следует

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция* $q(\mathbf{x})$ *однозначно определяется в области* B_0 *по заданной информации* (3). *Ее можно найти на основе решения уравнения* (64), *в котором правая часть определяется по данным* (3).

Предположим теперь, что функция $q(\mathbf{x})$ найдена в B_0. Тогда функцию $\alpha_1(\mathbf{x},\mathbf{y})$ можно вычислить при любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Воспользуемся опять представлением (4) и данными (3) обратной задачи. Из них выводятся равенства

$$\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}\bigg|_{t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F(\mathbf{x},t,\mathbf{y})}{\partial t^2}\bigg|_{t\to|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}, \quad \mathbf{y}\in S,\ \mathbf{x}\in S(\mathbf{y}).$$

Эти равенства означают, что данные обратной задачи определяют функцию $\beta(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y}\in S$ и всех $\mathbf{x}\in S(\mathbf{y})$.

Из формулы (8) следует, что на том же самом множестве можно найти интегралы

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})} p(\xi)\alpha_0^{\ell}(\xi,\mathbf{y})s\,ds = h_2(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in S,\ \mathbf{x}\in S(\mathbf{y}), \tag{68}$$

в которых

$$h_2(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 4|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\beta(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})} [\Delta\alpha_1(\xi,\mathbf{y}) + mq(\xi)\alpha_0^{m-1}(\xi,\mathbf{y})\alpha_1(\xi,\mathbf{y})]s\,ds$$

является известной функцией. Из формулы (6) следует равенство $\alpha_0(\xi,\mathbf{y}) = f_0/(4\pi s)$. Поэтому формулу (69) можно записать в виде

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\mathbf{y})} p(\xi)s^{1-\ell}\,ds = \left(\frac{4\pi}{f_0}\right)^{\ell} h_2(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}\in S,\ \mathbf{x}\in S(\mathbf{y}). \tag{69}$$

Это уравнение для отыскания функции $p(\mathbf{x})$ в B_0 качественно ничем не отличается от уравнения (64). Поэтому оно может быть решено предложенным выше методом.

Резюмируя рассмотрение обратной задачи, сформулируем итоговую теорему.

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 1 *обратная задача имеет не более одного решения. Она сводится к двум идентичным задачам интегральной геометрии* (64) *и* (69), *для решения которых можно использовать метод Фурье.*

Замечание. Рассмотренная выше обратная задача является переопределенной: для отыскания двух функций трех пространственных переменных задается функция $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ пяти переменных. Сформулирована она так для большей простоты восприятия. Однако нетрудно ее постановку изменить, сняв отмеченную переопределенность. Во-первых, вместо задания функции $F(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ можно считать известными пару функций

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t}\bigg|_{t \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}, \quad F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})}{\partial t^2}\bigg|_{t \to |\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}.$$

Как мы убедились выше, знание этих функций для всех $\mathbf{y} \in S$ и $\mathbf{x} \in S(\mathbf{y})$ достаточно, чтобы однозначно найти функции $\alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на том же множестве. Во-вторых, на самом деле это множество можно сузить при решении задач интегральной геометрии (64) и (69). Рассмотрим, например, сечения шара B однопараметрическим семейством плоскостей, проходящих через ось x_1. Обозначим

$$\Sigma(\varphi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 \sin\varphi + x_3 \cos\varphi = 0\}, \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Тогда в обратной задаче можно считать заданными функции

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \text{ для всех } \mathbf{y} \in S \cap \Sigma(\varphi), \quad \mathbf{x} \in S(\mathbf{y}) \cap \Sigma(\varphi),\ \varphi \in [0, 2\pi).$$

Эта информация позволяет однозначно найти решения обеих задач интегральной геометрии и она не является переопределенной: в ней для отыскания $q(\mathbf{x})$ и $p(\mathbf{x})$ используются только две функции $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и $F_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ трех переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A., Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory. I // Nonlinear Analysis. Theory Methods & Applications. 1988. V. 12. P. 1217–1335.
2. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 3. С. 574–582.
3. *Janno J., von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. Methods Appl. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.
4. *Durdiev D. K.* Global solvability of an inverse problem for an integro-differential equation of electrodynamics // Differ. Equ. 2008. V. 44, N 7. P. 893–899.
5. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lame kernel in a viscoelastic system // Applicable Anal. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.
6. *Lorenzi A., Romanov V. G.* Recovering two Lamé kernels in a viscoelastics system // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.
7. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости решения задачи об определении ядра в интегро-дифференциальных уравнениях электродинамики // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 4. С. 451–455.
8. *Романов В. Г.* Трехмерная обратная задача вязкоупругости // Докл. АН. 2011. Т. 441, № 4. С. 452–455.
9. *Романов В. Г.* Оценки устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 86–98.

10. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* The problem of determining the one dimensional matrix kernel of the system of viscoelasticity equations // Math. Meth. Appl. Sci. 2018. V. 41, N 17. P. 8019–8032.

11. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendran L. M., Wohlmuth B.* Determining kernels in linear viscoelasticity // J. Comput. Phys. 2022. V. 464. 111331.

12. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* Kernel determination problems in hyperbolic integro-differential equations // Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences. Singapore: Springer, 2023.

13. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.

14. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds* // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.

15. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Intern. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.

16. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.

17. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.

18. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.

19. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.

20. *Barreto A. S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105.

21. *Barreto A. S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.

22. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // J. Differ. Equ. 2022. V. 337. P. 395–435.

23. *Barreto A. S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // Pure Appl. Anal. 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.

24. *Романов В. Г., Бугуева Т. В.* Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169.

25. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 635–652.

26. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 560–576.

27. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С. 508–520.

28. *Romanov V. G., Bugueva T. V.* An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // Euras. J. Math. Comp. Appl. 2024. V. 12, N 2. P. 134–154.

29. *Романов В. Г.* Обратная задача для нелинейного уравнения переноса // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 1022–1028.

30. *Романов В. Г.* Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 16 января 2025 г.
После доработки 16 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.51

ОБ ИТЕРАЦИОННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ НА КОНУСЕ МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

В. Д. Степанов, Г. Э. Шамбилова

Аннотация. Представлена характеризация квазилинейных интегральных операторов итерационного типа на конусах неубывающих функций пространств Лебега на вещественной полуоси.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.211

Ключевые слова: весовое пространство Лебега, билинейный интегральный оператор, конус монотонных функций.

§ 1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех измеримых по Лебегу функций на $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$. Обозначим через $\mathfrak{M}^+ \subset \mathfrak{M}$ подмножество всех неотрицательных функций и через $\mathfrak{M}^\uparrow \subset \mathfrak{M}^+$ — подмножество всех неубывающих функций.

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^+$, $0 < p, r, q \leq \infty$. В работе изучается задача характеризации неравенства

$$\left(\int_0^\infty [Rf(x)]^r \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C \left(\int_0^\infty [f(x)]^p v(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{$*$}$$

где константа C не зависит от f и полагается выбранной наименьшей из возможных. В качестве R рассматриваются итерационные интегральные операторы вида

$$Tf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_0^t fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{1}$$

$$\mathscr{T}f(x) := \left(\int_0^x \left(\int_t^\infty fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{2}$$

$$Sf(x) := \left(\int_x^\infty \left(\int_t^\infty fu\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{3}$$

Российский научный фонд (проект 24-11-00170).

$$\mathscr{S}f(x) := \left(\int_0^x \left(\int_0^t fu \right)^q w(t)\,dt \right)^{\frac{1}{q}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}. \tag{4}$$

Задача характеризации весовых интегральных неравенств с квазилинейными интегральными операторами на конусах монотонных и квазивогнутых функций появилась в связи с исследованиями ограниченности операторов классического анализа в пространствах Лебега и Лоренца [1–10].

В данной работе рассмотрены неравенства $(*)$ на конусе $\mathfrak{M}^{\uparrow}$ возрастающих функций, которые изучены слабее, хотя для неравенств Харди этот случай появился [11] почти одновременно с исследованием неравенств на убывающих функциях [1–4]. Для решения задачи используется метод редукции [12–15] для квазилинейных операторов итерационного типа, уже эффективно применяемый в ряде статей авторов [16–20]. Для операторов T и S задача решена в [21] (см. § 2), в § 3 дано решение для операторов $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$.

Одной из мотиваций изучения задачи $(*)$ является характеризация билинейного неравенства Харди. В [22] билинейные неравенства изучались на конусе $\mathfrak{M}^{+}$ неотрицательных функций как дополнение к некоторым результатам о мультилинейных неравенствах [23–25], а в [26] задача рассмотрена на конусе $\mathfrak{M}^{\downarrow}$ убывающих функций. В § 4 рассматривается билинейное неравенство с операторами Копсона на конусе неубывающих функций.

Всюду в работе произведения вида $0 \cdot \infty$ полагаются равными 0. Соотношение $A \lesssim B$ означает $A \le cB$ с константой c, зависящей только от p, q и r; $A \approx B$ равносильно $A \lesssim B \lesssim A$. $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, χ_E — характеристическую функцию (индикатор) множества $E \subset (0,\infty)$. Если $1 \le p \le \infty$, то $p' := \frac{p}{p-1}$ при $1 < p < \infty$, $p' := \infty$ при $p = 1$ и $p' := 1$ при $p = \infty$.

§ 2. Операторы T и S

Если $0 < p \le \infty$ и $v \in \mathfrak{M}^{+}$, то положим

$$L_v^p := \left\{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L_v^p} := \left(\int_0^\infty |f(x)|^p v(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\},$$

$$L_v^\infty := \{ f \in \mathfrak{M} : \|f\|_{L_v^\infty} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \ge 0} v(x)|f(x)| < \infty \}$$

и аналогично $L_v^p[a,b]$ для функций, заданных на отрезке $[a,b]$.

Пусть $u, v, w, \rho \in \mathfrak{M}^{+}$. Положим

$$\begin{gathered} V(t) := \int_0^t v, \quad V_*(t) := \int_t^\infty v, \quad U_*(t) := \int_t^\infty u, \quad W(t) := \int_t^\infty w, \\ \mathfrak{u}(t) := \frac{u(t)}{V_*^{\frac{2}{p}}(t)}, \quad \mathfrak{U}(t) := \int_0^t \mathfrak{u}, \quad 0 < t < \infty. \end{gathered} \tag{5}$$

Будем считать, что

$$0 < \int_0^x \rho < \infty$$

при любом $x > 0$ и
$$\int\limits_0^\infty \rho = \infty.$$
Определим последовательность $\{a_n\} \subset (0, \infty)$ из уравнений
$$\int\limits_0^{a_n} \rho = 2^n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$
Пусть функции $\sigma : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и $\sigma^{-1} : [0, \infty) \to [0, \infty)$ задаются формулами (здесь $\inf \varnothing = \infty$)
$$\sigma(x) := \inf \left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \rho \geq 2 \int\limits_0^x \rho \right\}, \quad \sigma^{-1}(x) := \inf \left\{ y > 0 : \int\limits_0^y \rho \geq \frac{1}{2} \int\limits_0^x \rho \right\}. \quad (6)$$
Пусть $\sigma^2(x) := \sigma(\sigma(x))$. Для $0 < c < d \leq \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим
$$\mathscr{T}_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(t)}^x \left(\int\limits_z^\infty h V_* \right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\, dz \right)^p,$$
$$\mathscr{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_{\sigma^{-1}(c)}^x \left(\int\limits_z^d h V_* \right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\, dz \right)^p,$$
$$\|\mathscr{T}_t\|_{L_v^p \to L_w^q} := \sup_{0 \neq h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int_0^\infty [\mathscr{T}_t h]^q w \right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int_0^\infty [h]^p v \right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Теорема 2.1 [21, теорема 1]. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_T в неравенстве*
$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^y f u \right)^q w(y)\, dy \right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_T \left(\int\limits_0^\infty [f]^p v \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \qquad (7)$$
выполняется оценка
$$C_T \approx A_1 + A_2 + B,$$
где A_1, A_2 — наилучшие константы в неравенствах
$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) [W(x)]^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_z^\infty h V_* \right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\, dz \right)^r dx \right)^{\frac{p}{r}} \leq A_1^p \int\limits_0^\infty h,$$
$$\left(\int\limits_0^\infty \left[\left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_y^\infty h V_* \right)^{\frac{q}{p}} [\mathfrak{U}(y)]^q w(y)\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{p}{r}} \leq A_2^p \int\limits_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho\right) \left\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 2.1. (1) При $q = \infty$ имеем $C_T \approx A_1 + A_2 + B$, где A_1, A_2 — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)[W(x)]^r \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_1^p \int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} \left[\left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{U}(y) w(y)\,dy\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le A_2^p \int\limits_0^\infty h$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$, а константа B имеет вид

$$B := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int\limits_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\mathscr{T}_{tt}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L_w^\infty}, & p \le r, \\ \left(\int\limits_0^\infty \rho(x) \left[\left(\int\limits_0^x \rho\right) \left\|\mathscr{T}_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1 \to L_w^\infty}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p = \infty$ или $r = \infty$ имеем

$$C_T = \left\|T\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L_\rho^r},\ p = \infty, \quad C_T = \sup_{t>0} R(t) \|\mathscr{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1 \to L_w^{\frac{q}{p}}},\ r = \infty,$$

где

$$R(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{0<z<t} \rho(z), \quad W(x) := \operatorname*{ess\,sup}_{t \ge x} w(t).$$

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$T_t h(x) := \chi_{[t,\infty)}(x) \left(\int\limits_x^{\sigma(t)} \left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p,$$

$$T_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x) \left(\int\limits_x^{\sigma(d)} \left(\int\limits_c^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p$$

и

$$\|T_t\|_{L_v^p \to L_w^q} := \sup_{0 \ne h \in \mathfrak{M}^+} \frac{\left(\int\limits_0^\infty [T_t h]^q w\right)^{\frac{1}{q}}}{\left(\int\limits_0^\infty [h]^p v\right)^{\frac{1}{p}}}.$$

Теорема 2.2 [21, теорема 2]. *Пусть $0 < q < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < r < \infty$. Тогда для наилучшей константы C_S в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty \left(\int_y^\infty fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_S \left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{8}$$

выполняется оценка

$$C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + \mathbb{B},$$

где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \left[\left(\int_x^\infty \left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} [U_*(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_x^{\sigma^2(x)} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \rho\right) \left\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p, \end{cases}$$

где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Замечание 2.2. (1) При $q = \infty$ имеем $C_S \approx \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2 + B$, где $\mathbb{A}_1, \mathbb{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{y \ge x} \left[\left(\int_0^y h\right)^{\frac{1}{p}} U_*(y) w(y)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{x \le y \le \sigma^2(x)} [w(y)]^r \left(\int_{\sigma^2(x)}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbb{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbb{B}$ имеет вид

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_0^t \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^\infty_w}, & p \le r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \rho\right) \left\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\right\|_{L^1_{V_*} \to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

(2) При $p = \infty$ или $r = \infty$ имеем

$$C_S = \left\|S\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho}, \ p = \infty, \quad C_S = \sup_{t>0} R(t) \|T_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, \ r = \infty,$$

где $R(t) := \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<z<t} \rho(z)$.

§ 3. Операторы $\mathscr{T}$ и $\mathscr{S}$

Будем считать, что $0 < \int_x^\infty \rho < \infty$ при любом $x > 0$ и $\int_0^\infty \rho = \infty$. Определим последовательность $\{b_n\} \subset (0, \infty)$ из уравнений

$$\int_{b_n}^\infty \rho = 2^{-n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Пусть функции $\zeta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ и $\zeta^{-1} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ задаются формулами (здесь $\sup \varnothing = 0$)

$$\zeta(x) := \sup\left\{y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq \frac{1}{2}\int_x^\infty \rho\right\}, \quad \zeta^{-1}(x) := \sup\left\{y > 0 : \int_y^\infty \rho \geq 2\int_x^\infty \rho\right\}. \tag{10}$$

Пусть $\zeta^{-2}(x) = \zeta^{-1}(\zeta^{-1}(x))$. Для $0 < c < d \leq \infty$, $0 < t, p < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим

$$\widetilde{T}_t h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p, \tag{11}$$

$$\widetilde{T}_{[c,d]} h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_x^{\zeta(d)} \left(\int_c^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^p. \tag{12}$$

Теорема 3.1. *Пусть $0 < q, p, r < \infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Предположим, что $V(\infty) = \infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{T}}$ в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_y^\infty fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq C_{\mathscr{T}} \left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^{\uparrow}, \tag{13}$$

выполняется оценка

$$C_{\mathscr{T}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_0^x \left(\int_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} [U_*(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbf{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \leq \mathbf{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}$ имеет вид

$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0} \left(\int_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p \leq r, \\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_x^\infty \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p. \end{cases}$$

Доказательство. Замена $f^p \to f$ в неравенстве (13) приводит к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_y^\infty f^{\frac{1}{p}}(z)u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \le C_{\mathscr{T}}^p \int_0^\infty fv.$$

Используя [12, теорема 3.3], получим эквивалентное неравенство

$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\left(\int_y^\infty u(z)\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} dx\right)^{\frac{p}{r}} \lesssim C_{\mathscr{T}}^p \int_0^\infty hV_* \tag{14}$$

при $h \in \mathfrak{M}^+$.

Оценка сверху. В дальнейшем будем пользоваться известным соотношением (см., например, [7, предложение 2.1])

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n}\Big(\sum_{i\le n} a_i\Big)^s \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-n} a_n^s, \tag{15}$$

верным для любых последовательностей неотрицательных чисел и фиксированного $s > 0$. Обозначим

$$T_p h(y) := \left(\int_y^\infty u(z)\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
J &:= \sum_n \int_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\left(\int_0^x w(y)\,(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_0^{b_n} w(y)\,(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} = \sum_n 2^{-n}\left(\sum_{i\le n}\int_{b_{i-1}}^{b_i} w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)(T_p h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \\
&\approx \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{b_{n+1}}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r \\
&+ \sum_n 2^{-n}\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w(y)\left(\int_y^{b_{n+1}}\left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

Далее,

$$J_1 \approx \sum_n \int_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx\left(\int_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_{b_{n+1}}^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x) \left(\int\limits_0^x w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_x^\infty \left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx \le \mathbf{A}_2^r \left(\int\limits_0^\infty hV_*\right)^{\frac{r}{p}}$$

и

$$J_2 \approx \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_y^{b_{n+1}} \left(\int\limits_0^{b_{n-1}} h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_y^{b_{n+1}} u(z) \left(\int\limits_{b_{n-1}}^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: J_{2,1} + J_{2,2}.$$

Запишем

$$J_{2,1} \le \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} [U_*(y)]^q w(y) \left(\int\limits_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\le \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x [U_*(y)]^q w(y) \left(\int\limits_0^y h\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \le \mathbf{A}_1^r \left(\int\limits_0^\infty hV_*\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Используя (11) и (12), получим

$$J_{2,2} = \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) (\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]} h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\le \sum_n 2^{-n} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_{V_*}[b_{n-1},b_{n+1}] \to L^{\frac{q}{p}}_w[b_{n-1},b_n]} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_{n+1}} hV_*\right)^{\frac{r}{p}}.$$

При $p \le r$, применяя неравенство Йенсена, имеем

$$J_{2,2} \lesssim \sup_n 2^{-n} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w} \left(\int\limits_0^\infty hV_*\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Отсюда

$$J_{2,2}^{\frac{p}{r}} \lesssim \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{p}{r}} \|\widetilde{T}_t\|_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w} \int\limits_0^\infty hV_* \le \mathbf{B}^p \int\limits_0^\infty hV_*.$$

При $r < p$, используя неравенство Гёльдера ($\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$), получим

$$J_{2,2} \lesssim \Big(\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*} \to L^{\frac{q}{p}}_w}\Big)^{\frac{r}{s}} \left(\int\limits_0^\infty hV_*\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$

$$\approx \sum_n \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho\right)\left(\int\limits_{b_n}^{\infty} \rho\right)^{\frac{s}{p}} \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(b_n),\zeta(b_{n-1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \int\limits_0^{\infty} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx = \mathbf{B}^s,$$

оценка сверху $C_{\mathscr{T}} \lesssim \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования в (14), имеем
(1) $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{A}_1$ при $[0,z] \to [0,y]$,
(2) $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{A}_2$ при $[y,\infty] \to [x,\infty]$.
Также из неравенства (14) для $h \in \mathfrak{M}^+$ следует

$$\left(\int\limits_t^{\infty} \rho\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_0^t w(y)\left(\int\limits_y^{\infty} u(z)\left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \lesssim C^p_{\mathscr{T}} \int\limits_0^{\infty} hV_*.$$

Поэтому $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{B}$ и теорема доказана при $p \le r$.

Из (14) для любого $t \in (0,\infty)$ имеем

$$\left(\int\limits_{\zeta(t)}^{\infty} \rho\right)^{\frac{p}{r}} \left(\int\limits_{\zeta^{-1}(t)}^{\zeta(t)} w(y)\left(\int\limits_y^{\zeta(\zeta(t))} u(z)\left(\int\limits_{\zeta^{-1}(t)}^{z} h\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{p}{q}} \lesssim C^p_{\mathscr{T}} \int\limits_0^{\infty} hV_*,$$

т. е.

$$\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w} < \infty.$$

Поэтому $\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$ можно вычислить по плотному подмножеству в $L^1_{V_*}$. Пространство $L^1_{V_*}$ сепарабельно. Пусть $X \subset L^1_{V_*}$ — его счетное плотное подмножество. Тогда для любого $t \in (0,\infty)$ выполнено

$$\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w} = \sup_{0\ne h\in X} \frac{\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}h\|_{L^{\frac{q}{p}}_w}}{\|h\|_{L^1_{V_*}}},$$

т. е. функция $t \mapsto \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(t),\zeta(t)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}$ измерима по Борелю.

При $r < p$ запишем

$$\mathbf{B}^s = \int\limits_0^{\infty} \rho(x)\left[\left(\int\limits_x^{\infty} \rho\right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$= \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x) \left[\left(\int\limits_x^\infty \rho \right) \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}} \right]^{\frac{s}{p}} dx$$

$$\le \sum_n \int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^\infty \rho \right)^{\frac{s}{p}} \|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(b_{n-1}),\zeta(b_{n+1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}}$$

$$\approx \sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Отсюда

$$\mathbf{B}^s \lesssim \sum_n 2^{-\frac{ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}} =: \mathfrak{B}^s.$$

Пусть $\theta \in (0,1)$ — произвольное фиксированное число. Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ существует функция $h_n \in L^1_{V_*}[b_{n-2}, b_{n+3}]$ такая, что $\|h_n\|_{L^1_{V_*}[b_{n-2},b_{n+3}]} = 1$ и

$$\|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} h_n\|_{L_w^{\frac{q}{p}}} \ge \theta \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}}.$$

Положим

$$g_n := 2^{\frac{-ns}{r}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}} h_n, \quad \mathbf{T}_n := \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]}\|_{L^1_{V_*}\to L_w^{\frac{q}{p}}}, \quad g := \sum g_n.$$

Тогда

$$\|g\|_{L^1_{V_*}} \lesssim \sum_n \int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+3}} g_n V_* = \sum_n 2^{\frac{-ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \mathfrak{B}^s.$$

С другой стороны,

$$D := \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x w(y) (T_p g(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{r}{q}} dx$$

$$\gtrsim \sum_n \int\limits_{b_{n+2}}^{b_{n+3}} \rho(x)\,dx \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y)(T_p g(y))^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\gtrsim \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y) \left[\left(\int\limits_y^{b_{n+3}} u(z) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^z g_n \right)^{\frac{1}{p}} dz \right)^p \right]^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_{n+2}} w(y) (\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} g_n)^{\frac{q}{p}}\, dy \right)^{\frac{p}{q}} \right]^{\frac{r}{p}}$$

$$= \sum_n 2^{-n} 2^{\frac{-ns}{p}} \mathbf{T}_n^{\frac{sr}{p^2}} \|\widetilde{T}_{[b_{n-2},b_{n+2}]} h_n\|^{\frac{r}{p}}_{L_w^{\frac{q}{p}}} \ge \theta^{\frac{r}{p}} \sum_n 2^{\frac{-ns}{r}} \mathbf{T}_n^{\frac{s}{p}} = \theta^{\frac{r}{p}} \mathfrak{B}^s.$$

Отсюда

$$\mathfrak{B}^s C^p_{\mathscr{T}} \gtrsim C^p_{\mathscr{T}} \|g\|_{L^1_{V_*}} \overset{(14)}{\gtrsim} D^{\frac{p}{r}} \gtrsim \theta \mathfrak{B}^{\frac{sp}{r}}.$$

Следовательно,
$$C_{\mathscr{T}} \gtrsim \theta^{\frac{1}{p}}\mathfrak{B} \gtrsim \theta^{\frac{1}{p}}\mathbf{B}.$$
В силу произвольности $\theta \in (0,1)$ получаем, что $C_{\mathscr{T}} \gtrsim \mathbf{B}$. $\square$

Замечание 3.1. (1) При $q = \infty$ имеем $C_{\mathscr{T}} \approx \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{B}$, где $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах
$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}\left[\left(\int_0^y h\right)^{\frac{1}{p}} U_*(y)w(y)\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_1^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$
$$\left(\int_0^\infty \rho(x) \operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}[w(y)]^r \left(\int_x^\infty \left(\int_0^z h\right)^{\frac{1}{p}} u(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathbf{A}_2^p \int_0^\infty hV_*, \quad h \in \mathfrak{M}^+,$$
а константа $\mathbf{B}$ имеет вид
$$\mathbf{B} := \begin{cases} \sup\limits_{t>0}\left(\int_t^\infty \rho\right)^{\frac{1}{r}} \|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^\infty_w}, & p \le r,\\ \left(\int_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int_x^\infty \rho\right)\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_*}\to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}} dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r < p,\end{cases}$$
где $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

(2) При $p = \infty$ или $r = \infty$ имеем
$$C_{\mathscr{T}} = \left\|\mathscr{T}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho}, \ p = \infty, \quad C_{\mathscr{T}} \approx \sup_{t>0}\mathscr{R}(t)\|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1_{V_*}\to L^{\frac{q}{p}}_w}, \ r = \infty,$$
где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z\ge t}\rho(z)$.

Для $0 < c < d \le \infty$, $0 < t < \infty$, $h \in \mathfrak{M}^+$ положим
$$\widetilde{\mathscr{T}_t}h(x) := \chi_{(0,t]}(x)\left(\int_0^x \left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p, \tag{16}$$
$$\widetilde{\mathscr{T}}_{[c,d]}h(x) := \chi_{[c,d]}(x)\left(\int_{\zeta^{-1}(c)}^x \left(\int_z^d hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^p. \tag{17}$$

Теорема 3.2. *Пусть $0 < q,p,r < \infty$, $\frac{1}{s} := \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$. Предположим, что $V(\infty) = \infty$. Тогда для наилучшей константы $C_{\mathscr{S}}$ в неравенстве*
$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \left(\int_0^y fu\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{r}{q}} \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C_{\mathscr{S}}\left(\int_0^\infty [f]^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{18}$$
выполняется оценка
$$C_{\mathscr{S}} \approx \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + \mathscr{B},$$
где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах
$$\left(\int_0^\infty \rho(x)\left(\int_{\zeta^{-2}(x)}^x w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int_0^{\zeta^{-2}(x)}\left(\int_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}} \le \mathscr{A}_1^p \int_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \rho(x)\left[\left(\int\limits_0^x\left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{q}{p}}\mathfrak{U}^q(y)w(y)\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}dx\right)^{\frac{p}{r}}\le \mathscr{A}_2^p\int\limits_0^\infty h$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, *а константа* $\mathscr{B}$ *имеет вид*

$$\mathscr{B}:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty\rho\right)^{\frac{1}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}_t}\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}, & p\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p.\end{cases}$$

Доказательство. Замена $f^p\to f$ в (18) приведет к неравенству

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left(\int\limits_0^x w(y)\left(\int\limits_0^y f^{\frac{1}{p}}(z)u(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}dx\right)^{\frac{p}{r}}\le C^p_{\mathscr{S}}\int\limits_0^\infty fv.$$

Используя [12, теорема 3.4], получим эквивалентное неравенство

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left(\int\limits_0^x w(y)\left(\int\limits_0^y\mathfrak{u}(z)\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}dx\right)^{\frac{p}{r}}\lesssim C^p_{\mathscr{S}}\int\limits_0^\infty h \tag{19}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$.

Оценка сверху. Положим

$$\mathscr{T}_p h(y):=\left(\int\limits_0^y\mathfrak{u}(z)\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}dz\right)^p.$$

Имеем

$$\begin{aligned}I:=\sum_n\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}\rho(x)\left(\int\limits_0^x w(y)\left(\mathscr{T}_ph(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}dx\\
\approx\sum_n 2^{-n}\left(\int\limits_0^{b_n}w(y)\left(\mathscr{T}_ph(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}=\sum_n 2^{-n}\left(\sum_{i\le n}\int\limits_{b_{i-1}}^{b_i}w(y)\left(\mathscr{T}_ph(y)\right)^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\\
\approx\sum_n 2^{-n}\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}w(y)(\mathscr{T}_ph(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{r}{q}}\\
\approx\sum_n 2^{-n}\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_0^{b_{n-2}}\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r\\
+\sum_n 2^{-n}\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}w(y)\left(\int\limits_{b_{n-2}}^y\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}=:I_1+I_2.\end{aligned}$$

Далее,

$$I_1 \approx \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{b_{n-2}} \left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r$$

$$\leq \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-2}(x)}^{x} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)} \left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx$$

$$= \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_{\zeta^{-2}(x)}^{x} w\right)^{\frac{r}{q}} \left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)} \left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx \leq \mathscr{A}_1^r \left(\int\limits_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}},$$

$$I_2 \approx \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{y} \left(\int\limits_z^{b_n} hV_*\right)^{\frac{1}{p}} \mathfrak{u}(z)\,dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$+ \sum_n 2^{-n} \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{y} \mathfrak{u}(z) \left(\int\limits_{b_n}^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}} dz\right)^q dy\right)^{\frac{r}{q}} =: I_{2,1} + I_{2,2}.$$

Запишем

$$I_{2,2} \leq \sum_n \int\limits_{b_n}^{b_{n+1}} \rho(x)\,dx \left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} [\mathfrak{U}(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}}$$

$$\leq \int\limits_0^\infty \rho(x) \left(\int\limits_0^x [\mathfrak{U}(y)]^q w(y) \left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{q}{p}} dy\right)^{\frac{r}{q}} dx \leq \mathscr{A}_2^r \left(\int\limits_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Воспользовавшись обозначениями (16) и (17), получим

$$I_{2,1} = \sum_n 2^{-n} \left[\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n} w(y) (\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]} h(y))^{\frac{q}{p}}\,dy\right)^{\frac{p}{q}}\right]^{\frac{r}{p}}$$

$$\leq \sum_n 2^{-n} \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1[b_{n-2},b_n]\to L_w^{\frac{q}{p}}[b_{n-1},b_n]} \left(\int\limits_{b_{n-2}}^{b_n} h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Применим неравенство Йенсена при $p \leq r$:

$$I_{2,1} \lesssim \sup_n 2^{-n} \|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{r}{p}}_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} \left(\int\limits_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Поэтому

$$I_{2,1}^{\frac{p}{r}} \lesssim \sup_{t>0} \left(\int\limits_t^\infty \rho\right)^{\frac{p}{r}} \|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|_{L^1\to L_w^{\frac{q}{p}}} \int\limits_0^\infty h \leq \mathscr{B}^p \int\limits_0^\infty h.$$

Применив неравенство Гёльдера при $r<p$ ($\frac{1}{s}=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$), получим

$$I_{2,1}\lesssim\Bigl(\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\Bigr)^{\frac{r}{s}}\left(\int\limits_0^\infty h\right)^{\frac{r}{p}}.$$

Так как

$$\sum_n 2^{-\frac{ns}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[b_{n-1},b_n]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$
$$\approx\sum_n\left(\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}\rho\right)\left(\int\limits_{b_n}^\infty\rho\right)^{\frac{s}{p}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(b_n),\zeta(b_{n-1})]}\|^{\frac{s}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}$$
$$\le\sum_n\int\limits_{b_{n-1}}^{b_n}\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx$$
$$=\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx=\mathscr{B}^s,$$

оценка сверху $C_{\mathscr{S}}\lesssim\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{B}$ доказана.

Оценка снизу. Сужая области интегрирования в (19), имеем
(1) $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{A}_1$ при $[0,x]\to[\zeta^{-2}(x),x]$,
(2) $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{A}_2$ при $[z,\infty]\to[y,\infty]$.
Аналогично теореме 3.1 доказывается, что $C_{\mathscr{S}}\gtrsim\mathscr{B}$. $\square$

Замечание 3.2. (1) При $q=\infty$ имеем $C_{\mathscr{S}}\approx\mathscr{A}_1+\mathscr{A}_2+\mathscr{B}$, где $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\operatorname*{ess\,sup}_{\zeta^{-2}(x)\le t\le x}[w(t)]^r\left(\int\limits_0^{\zeta^{-2}(x)}\left(\int\limits_z^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{u}(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p}{r}}\le\mathscr{A}_1^p\int\limits_0^\infty h,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\operatorname*{ess\,sup}_{0\le y\le x}\left[\left(\int\limits_y^\infty hV_*\right)^{\frac{1}{p}}\mathfrak{U}(y)w(y)\,dy\right]^r dx\right)^{\frac{p}{r}}\le\mathscr{A}_2^p\int\limits_0^\infty h$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа $\mathscr{B}$ имеет вид

$$\mathscr{B}:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty\rho\right)^{\frac{1}{r}}\|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^\infty_w}, & p\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\rho(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\rho\right)\|\widetilde{\mathscr{T}}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1\to L^\infty_w}\right]^{\frac{s}{p}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p,\end{cases}$$

где $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p}$.

(2) При $p=\infty$ или $r=\infty$ имеем

$$C_{\mathscr{S}}=\left\|\mathscr{S}\left(\frac{1}{v}\right)\right\|_{L^r_\rho},\ p=\infty,\quad C_{\mathscr{S}}\approx\sup_{t>0}\mathscr{R}(t)\|\widetilde{\mathscr{T}}_t\|^{\frac{1}{p}}_{L^1\to L^{\frac{q}{p}}_w},\ r=\infty,$$

где $\mathscr{R}(t) := \operatorname*{ess\,sup}_{z \geq t} \rho(z)$.

Замечание 3.3. Точные двусторонние оценки наилучших констант $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{B}$ в теореме 3.1, $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$, $\mathscr{B}$ в теореме 3.2 и аналогичных констант в теоремах 2.1, 2.2 явными интегральными функционалами находятся с помощью редукционных теорем и характеризаций интегральных неравенств из [27, гл. XI, теорема 4], см. также [12, теорема 1.1; 13–15, 28, 29].

§ 4. Билинейные неравенства на конусе неубывающих функций

Пусть $0 < p_1, p_2, q < \infty$, $v_1, v_2, u_1, u_2, w \in \mathfrak{M}^+$.

Рассмотрим задачу характеризации неравенства

$$\|H^*_{u_1} f \cdot H^*_{u_2} g\|_{L^q_w} \leq C \|f\|_{L^{p_1}_{v_1}} \|g\|_{L^{p_2}_{v_2}}, \quad f, g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{20}$$

где константа C не зависит от f и g и предполагается наименьшей из возможных, а операторы имеют вид

$$H^*_{u_i} f(t) := \int_t^\infty f u_i, \quad i = 1, 2.$$

Для решения задачи фиксируем в неравенстве (20) функцию $g \in \mathfrak{M}^\uparrow$ и рассмотрим неравенство Харди

$$\|H^*_{u_1} f\|_{L^q_\rho} \leq C \|f\|_{L^{p_1}_{v_1}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{21}$$

где

$$\rho(x) := \frac{\left(\int_x^\infty g u_2\right)^q w(x)}{\|g\|^q_{L^{p_2}_{v_2}}}.$$

Так как двусторонняя оценка константы C точным функционалом известна для всех значений параметров $p_1, q \in (0, \infty]$ [12], основная задача сводится к характеризации или редукции неравенства на конусе возрастающих функций с этим функционалом, в котором в зависимости от параметров суммирования участвуют линейные или квазилинейные интегральные операторы, изученные в предыдущих разделах.

Положим

$$V_i(t) := \int_0^t v_i, \quad V_{i*}(t) := \int_t^\infty v_i, \quad U_{i*}(t) := \int_t^\infty u_i, \quad 0 < t < \infty, \ i = 1, 2.$$

Теорема 4.1. *Пусть $0 < q, p < \infty$. Тогда для наилучшей константы C в неравенстве*

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_x^\infty f u\right)^q \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^\infty f^p v\right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{22}$$

верно следующее.

(i) *Если* $1 < p \le q < \infty$, *то* $C \approx A_0 + A_1$, *где*

$$A_0 := \sup_{x>0} \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{1}{q}} [V_*(x)]^{-\frac{1}{p}} < \infty,$$

$$A_1 := \sup_{x>0} \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_x^\infty \left(\frac{U_*}{V_*} \right)^{p'} v \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

(ii) *Если* $0 < q < p < \infty$, $1 < p < \infty$, *то* $C \approx B_0 + B_1$, *где*

$$B_0 := \left(\int_0^\infty V_*^{-\frac{r}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{r}{p}} U_*^q(x) \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$$B_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_x^\infty \left(\frac{U_*}{V_*} \right)^{p'} v \right)^{\frac{r}{p'}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

(iii) *Если* $0 < q < p \le 1$, *то* $C \approx C_0 + C_1$, *где*

$$C_0 := \left(\int_0^\infty V_*^{-\frac{r}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{r}{p}} U_*^q(x) \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty,$$

$$C_1 := \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{r}{p}} \left(\sup_{z\in[x,\infty)} \frac{U_*^p(z)}{V_*(z)} \right)^{\frac{r}{p}} \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

(iv) *Если* $0 < p \le q < \infty$, $0 < p \le 1$, *то* $C \approx D_0 + D_1$, *где*

$$D_0 := \sup_{x>0} V_*^{-\frac{1}{p}}(x) U_*(x) \left(\int_0^x \rho \right)^{\frac{1}{q}} < \infty, \quad D_1 := \sup_{x>0} V_*^{-\frac{1}{p}}(x) \left(\int_x^\infty U_*^q \rho \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Доказательство. Для $f \in \mathfrak{M}^\uparrow$ и $\varphi \in \mathfrak{M}^+$ введем обозначения

$$g(x) := f\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathfrak{M}^\downarrow, \quad \widetilde{\varphi}(x) := \varphi\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2} \in \mathfrak{M}^+, \quad x \in (0,\infty).$$

Замены $z \to \frac{1}{z}$ в левой части и $t \to \frac{1}{t}$ в правой части неравенства (22) приведут к неравенству

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^{\frac{1}{x}} g\widetilde{u} \right)^q \rho(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty g^p \widetilde{v} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\downarrow.$$

Заменяя $x \to \frac{1}{x}$ в левой части этого неравенства, получим

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^x g\widetilde{u} \right)^q \widetilde{\rho}(x)\, dx \right)^{\frac{1}{q}} \le C \left(\int_0^\infty g^p \widetilde{v} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\downarrow. \tag{23}$$

Неравенство (22) эквивалентно (23), которое охарактеризовано в теореме 2.5 из [12]. □

Будем предполагать, что

$$V_{1*}(x) = \int_x^\infty v_1 < \infty,\ U_{1*}(x) = \int_x^\infty u_1 < \infty,\ x \in (0,\infty),\ V_{1*}(0) = \infty,\ V_2(\infty) = \infty. \tag{24}$$

Случай 1. $1 < p_1 \le q < \infty$, $1 < p_2 \le q < \infty$.

Применив теорему 4.1 в неравенстве (21) при фиксированном $g \in \mathfrak{M}^\uparrow$ и при $1 < p_1 \le q < \infty$, получим $C \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$, где $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\sup_{x>0}\left(\int_x^\infty U_{1*}^q(t)\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}[V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}} \le \mathbf{A}_0\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow,$$

$$\sup_{x>0}\left(\int_0^x\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{1}{p_1'}} \le \mathbf{A}_1\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}},\ g \in \mathfrak{M}^\uparrow.$$

Снова применив теорему 4.1 при $1 < p_2 \le q < \infty$, получим $C \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$,

$$\mathbf{A}_0 \approx \sup_{x>0}[V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}}[\mathbf{A}_{01}(x) + \mathbf{A}_{02}(x)], \tag{25}$$

где

$$\mathbf{A}_{01}(x) := \sup_{t>x}\left(\int_t^\infty [U_{1*}U_{2*}]^q w\right)^{\frac{1}{q}}[V_{2*}(t)]^{-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathbf{A}_{02}(x) := \sup_{t>x}\left(\int_x^t [U_{1*}]^q w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^\infty\left(\frac{U_{2*}}{V_{2*}}\right)^{p_2'}v_2\right)^{\frac{1}{p_2'}},$$

$$\mathbf{A}_1 = \sup_{x>0}\left(\int_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{1}{p_1'}}\left[\mathbf{A}_{11}(x) + \mathbf{A}_{12}(x)\right], \tag{26}$$

где

$$\mathbf{A}_{11}(x) := \sup_{0<t<x}\left(\int_t^x U_{2*}^q w\right)^{\frac{1}{q}}[V_{2*}(t)]^{-\frac{1}{p_2}},$$

$$\mathbf{A}_{12}(x) := \sup_{0<t<x}\left(\int_0^t w\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_t^x\left(\frac{U_{2*}}{V_{2*}}\right)^{p_2'}v_2\right)^{\frac{1}{p_2'}}.$$

Случай 2. $0 < q < p_1 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$ или $0 < q < p_2 < \infty$, $1 < p_2 < \infty$.

Используя теорему 4.1 в неравенстве (21) при $0 < q < p_1 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, $\frac{1}{r} := \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}$, получим $C \approx \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, где $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int_0^\infty\left(\int_0^x\left(\int_t^\infty gu_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{r}{q}}\alpha(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{B}_0\left(\int_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{27}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\left(\int\limits_x^\infty U_{1*}^q(t)w(t)\left(\int\limits_t^\infty gu_2\right)^q dt\right)^{\frac{r}{q}}\beta(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}}\le \mathbf{B}_1\left(\int\limits_0^\infty g^{p_2}v_2\right)^{\frac{1}{p_2}},\quad g\in\mathfrak{M}^\uparrow, \tag{28}$$

где

$$\alpha(x):=-\frac{d}{dx}\left[\left(\int\limits_x^\infty\left(\frac{U_{1*}}{V_{1*}}\right)^{p_1'}v_1\right)^{\frac{r}{p_1'}}\right],\quad \beta(x):=\frac{d}{dx}[[V_{1*}(x)]^{-\frac{r}{p_1}}].$$

Далее характеризуем неравенство (27) применением теоремы 3.1. Получим $\mathbf{B}_0\approx\mathbf{B}_{01}+\mathbf{B}_{02}+\mathbf{B}_{03}$, где $\mathbf{B}_{01}$, $\mathbf{B}_{02}$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty\alpha(x)\left(\int\limits_0^x w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_x^\infty\left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p_2}}u_2(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p_2}{r}}\le\mathbf{B}_{01}^{p_2}\int\limits_0^\infty hV_{2*},\quad h\in\mathfrak{M}^+,$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\alpha(x)\left[\left(\int\limits_0^x\left(\int\limits_0^y h\right)^{\frac{q}{p_2}}[U_{2*}(y)]^q w(y)\,dy\right)^{\frac{p_2}{q}}\right]^{\frac{r}{p_2}}dx\right)^{\frac{p_2}{r}}\le\mathbf{B}_{02}^{p_2}\int\limits_0^\infty hV_{2*},\ h\in\mathfrak{M}^+,$$

а константа $\mathbf{B}_{03}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_{03}:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_t^\infty\alpha\right)^{\frac{1}{r}}\|\widetilde{T}_t\|^{\frac{1}{p_2}}_{L^1_{V_{2*}}\to L_w^{\frac{q}{p_2}}}, & p_2\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\alpha(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\alpha\right)\|\widetilde{T}_{[\zeta^{-1}(x),\zeta(x)]}\|_{L^1_{V_{2*}}\to L_w^{\frac{q}{p_2}}}\right]^{\frac{s}{p_2}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p_2.\end{cases}$$

Здесь $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p_2}$, а функции ζ, ζ^{-1} определены по формулам (10) при $\rho=\alpha$.

Аналогично, используя теорему 2.2 для константы $\mathbf{B}_1$ в неравенстве (28), находим $\mathbf{B}_1\approx\mathbf{B}_{11}+\mathbf{B}_{12}+\mathbf{B}_{13}$, где $\mathbf{B}_{11}$, $\mathbf{B}_{12}$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty\beta(x)\left[\left(\int\limits_x^\infty\left(\int\limits_0^y h\right)^{\frac{q}{p_2}}U_{1*}^q(y)U_{2*}^q(y)w(y)\,dy\right)^{\frac{p_2}{q}}\right]^{\frac{r}{p_2}}dx\right)^{\frac{p_2}{r}}\le\mathbf{B}_{11}^{p_2}\int\limits_0^\infty hV_{2*},$$

$$\left(\int\limits_0^\infty\beta(x)\left(\int\limits_x^{\sigma^2(x)}U_{1*}^q w\right)^{\frac{r}{q}}\left(\int\limits_{\sigma^2(x)}^\infty\left(\int\limits_0^z h\right)^{\frac{1}{p_2}}u_2(z)\,dz\right)^r dx\right)^{\frac{p_2}{r}}\le\mathbf{B}_{12}^{p_2}\int\limits_0^\infty hV_{2*}$$

при $h\in\mathfrak{M}^+$, а константа $\mathbf{B}_{13}$ имеет вид

$$\mathbf{B}_{13}:=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}\left(\int\limits_0^t\beta\right)^{\frac{1}{r}}\|T_t\|^{\frac{1}{p_2}}_{L^1_{V_{2*}}\to L^{\frac{q}{p_2}}_{wU_{1*}^q}}, & p_2\le r,\\ \left(\int\limits_0^\infty\beta(x)\left[\left(\int\limits_0^x\beta\right)\|T_{[\sigma^{-1}(x),\sigma(x)]}\|_{L^1_{V_{2*}}\to L^{\frac{q}{p_2}}_{wU_{1*}^q}}\right]^{\frac{s}{p_2}}dx\right)^{\frac{1}{s}}, & r<p_2,\end{cases}$$

где $\frac{1}{s}:=\frac{1}{r}-\frac{1}{p_2}$, а функции σ, σ^{-1} определены по формулам (6) при $\rho=\beta$.

Случай $0<q<p_2<\infty, 1<p_2<\infty$ рассматривается аналогично.

Случай 3. $0 < q < \min(p_1, p_2) \le 1$. Применив теорему 4.1 в неравенстве (21) при $0 < q < p_1 \le 1$, имеем $C \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1$, где $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_x^\infty U_{1*}^q(t) w(t) \left(\int\limits_t^\infty g u_2\right)^q dt\right)^{\frac{r}{q}} \mu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{C}_0 \left(\int\limits_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{29}$$

$$\left(\int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_t^\infty g u_2\right)^q w(t)\,dt\right)^{\frac{r}{q}} \nu(x)\,dx\right)^{\frac{1}{r}} \le \mathbf{C}_1 \left(\int\limits_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{30}$$

где

$$\mu(x) := \frac{d}{dx}([V_{1*}(x)]^{-\frac{r}{p_1}}), \quad \nu(x) := -\frac{d}{dx}\left(\sup_{t \in (x,\infty)} \left[\frac{U_{1*}^{p_1}(t)}{V_{1*}(t)}\right]\right)^{\frac{r}{p_1}}.$$

Рассматривая задачу характеризации квазилинейных операторов в неравенствах (29), (30), заметим, что решение этой задачи аналогично случаю 2, т. е. достаточно применить теорему 2.2 и теорему 3.1.

Случай 4. $0 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$, $0 < \max(p_1, p_2) \le 1$.

Воспользовавшись теоремой 4.1 в неравенстве (21) при $0 < p_1 \le q < \infty$, $0 < p_1 \le 1$, получим $C \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, где $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{D}_1$ — наилучшие константы в неравенствах

$$\sup_{x>0} [V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}} U_{1*}(x) \left(\int\limits_0^x \left(\int\limits_y^\infty g u_2\right)^q w(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \le \mathbf{D}_0 \left(\int\limits_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow, \tag{31}$$

$$\sup_{x>0} [V_{1*}(x)]^{-\frac{1}{p_1}} \left(\int\limits_x^\infty U_{1*}^q(y) w(y) \left(\int\limits_y^\infty g u_2\right)^q dy\right)^{\frac{1}{q}} \le \mathbf{D}_1 \left(\int\limits_0^\infty g^{p_2} v_2\right)^{\frac{1}{p_2}}, \quad g \in \mathfrak{M}^\uparrow. \tag{32}$$

Для характеризации неравенств (31), (32) так же, как и в случае 1, снова применим теорему 4.1.

Теорема 4.2. *Пусть* $0 < p_1, p_2, q < \infty$. *Тогда для наилучшей константы* C *в неравенстве* (20) *выполняется следующее.*

(i) *Пусть* $1 < p_1 \le q < \infty$, $1 < p_2 \le q < \infty$. *Тогда* $C \approx \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$, *где* $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1$ *определены в* (25) *и* (26).

(ii) *Пусть* $0 < q < p_1 < \infty$, $1 < p_1 < \infty$, *тогда* $C \approx \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, *где* $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (27) *и* (28) *при условии* (24).

(iii) *Пусть* $0 < q < \min(p_1, p_2) \le 1$, *тогда* $C \approx \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_1$, *где* $\mathbf{C}_0$, $\mathbf{C}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (29) *и* (30) *при условии* (24).

(iv) *Пусть* $0 < \max(p_1, p_2) \le q < \infty$, $0 < \max(p_1, p_2) \le 1$. *Тогда* $C \approx \mathbf{D}_0 + \mathbf{D}_1$, *где* $\mathbf{D}_0, \mathbf{D}_1$ — *наилучшие константы в неравенствах* (31) *и* (32).

Благодарность. Авторы выражают глубокую признательность рецензенту статьи за тщательное прочтение рукописи и ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ariño M., Muckenhoupt B.* Maximal functions on classical Lorentz spaces and Hardy's inequality with weights for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1990. V. 320, N 2. P. 727–735.
2. *Sawyer E.* Boundedness of classical operators on classical Lorentz spaces // Studia Math. 1990. V. 96, N 2. P. 145–158.
3. *Stepanov V. D.* The weighted Hardy's inequality for nonincreasing functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 338, N 3. P. 173–186.
4. *Stepanov V. D.* Integral operators on the cone of monotone functions // J. London Math. Soc. 1993. V. 48, N 3. P. 465–487.
5. *Carro M., Soria J.* Weighted Lorentz spaces and the Hardy operator // J. Funct. Anal. 1993. V. 112, N 2. P. 480–494.
6. *Carro M., Soria J.* Boundedness of some integral operators // Canad. J. Math. 1993. V. 45, N 6. P. 1155–1166.
7. *Goldman M. L., Heinig H. P., Stepanov V. D.* On the principle of duality in Lorentz spaces // Canad. J. Math. 1996. V. 48, N 5. P. 959–979.
8. *Sinnamon G.* Embeddings of concave functions and duals of Lorentz spaces // Publ. Mat. 2002. V. 46, N 2. P. 489–515.
9. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Об интегральных операторах на конусах монотонных функций // Докл. АН. 2012. Т. 446, № 4. С. 367–370.
10. *Gogatishvili A., Stepanov V. D.* Reduction theorems for operators on the cones of monotone functions // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 405, N 1. P. 156–172.
11. *Heing H. P., Stepanov V. D.* Weighted Hardy inequalities for increasing functions // Canad. J. Math. 1993. V. 45, N 1. P. 104–116.
12. *Гогатишвили А., Степанов В. Д.* Редукционные теоремы для весовых интегральных неравенств на конусе монотонных функций // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, № 4. С. 3-68.
13. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах Харди в смешанных нормах // Тр. МИАН. 2013. Т. 283. С. 155–170.
14. *Прохоров Д. В., Степанов В. Д.* Весовые неравенства для квазилинейных интегральных операторов на полуоси и приложения к пространствам Лоренца // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 8. С. 135–162.
15. *Прохоров Д. В.* Об одном классе весовых неравенств, содержащих квазилинейные операторы // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 280–295.
16. *Шамбилова Г. Э.* Весовые неравенства для одного класса квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 912–936.
17. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.* Hardy-type inequalities on the weighted cones of quasi-concave functions // Banach J. Math. Anal. 2015. V. 9, N 1. P. 21–34.
18. *Persson L.-E., Shambilova G. E., Stepanov V. D.* Weighted Hardy type inequalities for supremum operators on the cones of monotone functions // J. Inequal. Appl. 2016. V. 237. P. 1–18.
19. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* Ограниченность квазилинейных интегральных операторов на конусе монотонных функций // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1131–1155.
20. *Stepanov V. D., Shambilova G. E.* On the boundedness of quasilinear integral operators of iterated type with Oinarov's kernels on the cone of monotone functions // Euras. Math. J. 2017. V. 8, N 2. P. 47–73.
21. *Степанов В. Д., Шамбилова Г. Э.* Редукция билинейных весовых неравенств с операторами интегрирования на конусе неубывающих функций // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 3. С. 639-658.
22. *Aguilar Cañestro M. I., Ortega Salvador P., Ramírez Torreblanca C.* Weighted bilinear Hardy inequalities // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 387, N 1. P. 320–334.
23. *Cwikel M., Kerman R.* Positive multilinear operators acting on weighted L_p spaces // J. Funct. Anal. 1992. V. 106, N 1. P. 130-144.
24. *Grafakos L., Torres R. H.* A multilinear Schur test and multiplier operators // J. Funct. Anal. 2001. V. 187, N 1. P. 1–24.
25. *Krepela M.* Bilinear weighted Hardy inequality for nonincreasing functions // Publ. Mat. 2017. V. 61. P. 3–50.
26. *Krepela M.* Iterating bilinear Hardy inequalities // Proc. Edinburg Math. Soc. 2017. V. 60. P. 955–971.
27. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

28. *Sinnamon G., Stepanov V.D.* The weighted Hardy inequality: new proofs and the case $p = 1$ // J. London Math. Soc. 1996. V. 54, N 1. P. 89–101.

29. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Inequal. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.

Поступила в редакцию 13 ноября 2024 г.
После доработки 24 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Степанов Владимир Дмитриевич
Вычислительный центр ДВО РАН,
ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
stepanov@mi-ras.ru

Шамбилова Гульдарья Эрмаковна (ORCID 0000-0002-3656-7821)
Московский государственный строительный университет,
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
shambilova@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.911.5+517.977.57

РЕЛАКСАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ОПИСЫВАЕМОЙ СВЯЗАННОЙ СИСТЕМОЙ С МАКСИМАЛЬНО МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

А. А. Толстоногов

Аннотация. Изучается задача минимизации интегрального функционала на решениях связанной системы. Система состоит из эволюционного включения в сепарабельном гильбертовом пространстве с максимально монотонными операторами и обыкновенного дифференциального уравнения в сепарабельном банаховом пространстве, содержащего управление. Ограничением на управление является многозначное отображение с замкнутыми невыпуклыми значениями, а интегрант является невыпуклой по управлению функцией. Наряду с исходной задачей рассматривается задача минимизации интегрального функционала с овыпукленным по управлению интегрантом на решениях системы с овыпукленным ограничением на управление (релаксационная задача).

Доказаны теоремы существования решения систем. Рассмотрены вопросы аппроксимации как решений овыпукленной системы, так и значений овыпукленного функционала на решениях овыпукленной системы решениями исходной системы и значениями исходного функционала на решениях исходной системы (теорема релаксации). Доказана теорема существования оптимального управления в релаксационной системе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.212

Ключевые слова: максимально монотонные операторы, невыпуклый интегрант, релаксация.

§ 1. Введение

Пусть $T = [0, a]$, $a > 0$, — отрезок числовой прямой R, $\overline{R} = (-\infty, +\infty]$, $R^+ = [0, +\infty)$, H — сепарабельное гильбертово пространство, Y — сепарабельное банахово пространство.

Через $W^{1,1}(T, H)$ обозначается пространство абсолютно непрерывных функций из T в H, имеющих производные из пространства $L^1(T, H)$.

Пусть $A : D(A(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов [1] с областью определения $D(A(t))$.

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t) \quad \text{п.в.}, \tag{1.1}$$

$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\dot{y}(t) = f(t, z(t), y(t)) + Eu(t) \quad \text{п.в.}, \tag{1.2}$$

$$y(0) = y_0$$

с ограничением на управление

$$u(t) \in U(t, z(t), y(t)) \quad \text{п.в.} \tag{1.3}$$

Здесь $f : T \times H \times H \to H$ — однозначное отображение переменных t, z, y, $E : Y \to H$ — непрерывный линейный оператор, $U : T \times H \times H \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутыми, не обязательно выпуклыми, значениями.

Включение (1.1) и уравнение (1.2) взаимосвязаны между собой. Совокупность соотношений (1.1), (1.2) будем называть *связанной управляемой системой с ограничением* (1.3) *на управление.*

Под *решением управляемой системы* (1.1)–(1.3) понимается тройка функций $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, $z(0) = z_0$, $z(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $y(0) = y_0$, $z(\cdot) \in W^{1,1}(T, H)$, $y(\cdot) \in W^{1,1}(T, H)$, $u(\cdot) \in L^1(T, Y)$, удовлетворяющих соотношениям (1.1)–(1.3).

Для числовой функции $g : T \times H \times H \times Y \to R$ рассмотрим задачу

$$J(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_T g(t, z(t), y(t), u(t))\, dt \to \inf \tag{P}$$

на решениях управляемой системы (1.1)–(1.3).

Пусть $g_U : T \times H \times H \times Y \to \overline{R}$ — функция, определенная по правилу

$$g_U^{**}(t, z, y, u) = \begin{cases} g(t, z, y, u), & u \in U(t, z, y), \\ +\infty, & u \notin U(t, z, y), \end{cases} \tag{1.4}$$

где $g_U^{**}(t, z, y, u)$ — биполяра (вторая сопряженная) функции $u \to g_U(t, z, y, u)$ [2, 3].

Наряду с задачей (P) рассмотрим релаксационную задачу

$$J^{**}(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) = \int\limits_T g_U^{**}(t, z(t), y(t), u(t))\, dt \to \inf \tag{RP}$$

на решениях управляемой системы (1.1), (1.2) с овыпукленным ограничением на управление

$$u(t) \in \overline{\text{co}}U(t, z(t), y(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{1.5}$$

где символ $\overline{\text{co}}$ означает замкнутую выпуклую оболочку множества.

Решение управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением на управление (1.5) определяется аналогично решению управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением (1.3).

Множества решений управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3) и (1.5) на управление будем обозначать через $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ соответственно. Под $C(T, H)$ понимается пространство непрерывных функций из T в H с топологией равномерной сходимости на T.

Целью работы является установление взаимосвязей между задачами (P) и (RP) и множествами $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$. При достаточно общих предположениях доказывается, что

1) множества $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ непустые;

2) для любых $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0, y_0)$ существует последовательность $(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0, y_0)$, $m \geq 1$,

$$(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \to (z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)), \tag{1.6}$$

в пространстве $C(T, H) \times C(T, H) \times |\omega|\text{-}L^1(T, Y)$,

$$J(z_m(\cdot), y_m(\cdot), u_m(\cdot)) \to J^{**}(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)), \tag{1.7}$$

где $|\omega|$-$L^1(T,Y)$ — пространство $L^1(T,Y)$ с так называемой «слабой» нормой [4];

3) имеет место равенство

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) = \inf_{\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)). \tag{1.8}$$

Связь между задачами (P) и (RP) вытекает из равенства (1.8), а связь между решениями $\mathscr{R}_U(z_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$ устанавливается соотношением (1.6).

Если значениями ограничения $U(t,z,y)$ являются компактные множества, а пересечение $D(A(t))$, $t\in T$, с любым ограниченным множеством — относительно компактное множество, доказано существование оптимального решения задачи (RP).

В работе продолжаются исследования автора, относящиеся к релаксации в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых различными классами уравнений (см. [5–9] и др.).

Для управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением, связанным с процессом выметания, существование оптимального управления и относящиеся к нему вопросы изучались в работах [9–11].

В работе [10] рассматривалась задача минимизации интегрального функционала

$$J(z,y,u) = \int\limits_0^T \left(L(t,z(t),y(t)) + \frac{1}{2}u(t)^T E u(t)\right) dt \tag{1.9}$$

на решениях управляемой системы в конечномерном пространстве R^m

$$-z(t) \in \mathscr{N}_C z(t) - \dot y(t), \tag{1.10}$$

$$z(0) = z_0 \in C,$$

$$\dot y(t) = f(t,z(t),y(t)) + Eu(t), \tag{1.11}$$

$$y(0) = y_0,$$

$$u(t) \in \Omega. \tag{1.12}$$

Здесь $C\subset R^m$ — замкнутое выпуклое множество, $\mathscr{N}_C z$ — нормальный конус в смысле выпуклого анализа множества C в точке $z\in C$, $f: T\times R^m\times R^m \to R^m$ — нелинейное отображение, $\Omega\subset R^d$ — выпуклый компакт, E — матрица.

Была доказана теорема существования оптимального решения и получены необходимые условия оптимальности.

В работе [11] изучалась задача минимизации функционала

$$J(z,y,u) = \int\limits_0^T [L_1(t,z(t),y(t)) + L_2(u(t))]\,dt + L_3(z(T),y(T)) \tag{1.13}$$

на решениях управляемой системы в пространстве R^m

$$-\dot z(t) \in \mathscr{N}_{C(t)} z(t) - R\dot y(t) \tag{1.14}$$

и (1.11), (1.12), где $C: T \rightrightarrows R^m$ — многозначное отображение с замкнутыми выпуклыми значениями, $L_2: R^d\to R$ — выпуклая функция, E и R — матрицы соответствующих размеров, $\Omega\subset R^d$ — выпуклый компакт. Была предложена схема численного решения этой задачи, включая доказательство существования оптимального решения.

Подобная задача с такими же результатами была рассмотрена в работе [12], в которой в конечномерном пространстве изучался вопрос минимизации функционала (1.13) на решениях системы

$$-\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t), \tag{1.15}$$

$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$
$$\dot{y}(t) = f(t, z(t), y(t)) + u(t), \tag{1.16}$$
$$y(0) = y_0$$

с ограничением (1.12). В (1.15) $A(t) \subset D(A(t)) \subset R^m$ — семейство максимально монотонных операторов.

Впервые вопросы релаксации в задаче оптимального управления, описываемой связанной системой в бесконечномерном пространстве, изучались в работе [9]. В ней были рассмотрены проблемы (P) и (RP) на решениях процесса выметания (1.14) в сепарабельном гильбертовом пространстве H и обыкновенного дифференциального уравнения (1.16) в сепарабельном банаховом пространстве Y с ограничениями (1.3) и (1.5). Если в [9] существование оптимального управления в задаче (RP) было доказано в предположении конечномерности пространств H и Y, в настоящей работе эта задача решена в бесконечномерных пространствах. Наличие оператора E в уравнении (1.2) естественно для задачи оптимального управления и значительно усложняет задачу по сравнению с работой [9]. Полученные в работе результаты носят не только теоретический характер, но имеют и прикладное значение.

Дело в том, что необходимые условия оптимальности, как правило, получены только для выпуклых задач, т. е. задач, в которых интегрант является выпуклой по управлению функцией, а ограничение на управление своими значениями имеет замкнутые выпуклые множества. В свою очередь вычислительные алгоритмы для решения задач оптимального управления базируются на необходимых условиях оптимальности. Результаты настоящей работы позволяют обосновать с точки зрения вычислительных погрешностей переход от невыпуклых задач оптимального управления к овыпукленным и использовать известные необходимые условия оптимальности и вычислительные алгоритмы для выпуклых задач при численном анализе невыпуклых задач управления.

Работа состоит из шести параграфов.

В § 1 дается постановка задачи и приводится обзор известных результатов в этом направлении. В § 2 вводятся основные обозначения, определения и формулируется ряд необходимых результатов. Основное содержание § 3 составляет доказательство теоремы существования решения системы (1.1)–(1.3). В § 4 доказывается теорема релаксации. § 5 посвящен доказательству теоремы существования решения в задаче (RP). В § 6 дается конкретизация предположений, относящихся к семейству операторов $A(t)$, $t \in T$.

§ 2. Основные обозначения, определения и предварительные сведения

Пусть $T = [0, 1]$ — отрезок числовой полупрямой $R^+ = [0, +\infty)$ с мерой Лебега, $\overline{R} = (-\infty, +\infty]$, H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и нормой $\| \cdot \|$, Y — сепарабельное банахово пространство с нормой $\| \cdot \|_Y$. Через Θ, Θ_Y обозначаем нулевые элементы пространств H

и Y, B, $\overline{B}$ и B_Y, $\overline{B}_Y$ — открытые и замкнутые единичные шары в пространствах H и Y соответственно.

Символы ω-H и ω-Y означают, что пространства H и Y наделены слабыми топологиями. Расстояние по Хаусдорфу между замкнутыми множествами из пространства Y обозначается через $\mathrm{haus}(\cdot,\cdot)$. Поскольку функция $\mathrm{haus}(\cdot,\cdot)$ может принимать значения $+\infty$, она называется *обобщенной метрикой Хаусдорфа.*

Пространства $L^1(T,H)$ и $L^1(T,Y)$ со слабыми топологиями обозначаются через ω-$L^1(T,H)$ и ω-$L^1(T,Y)$. На пространстве $L^1(T,Y)$ наряду со стандартной нормой $\|\cdot\|_{L^1(T,Y)}$ рассматривается так называемая «слабая» норма [4]

$$\|f\|_{\|w\|} = \max_{0\le t_1\le t_2\le 1}\left\|\int\limits_{t_1}^{t_2} f(s)\,ds\right\|_Y .$$

Она эквивалентна норме

$$|\,\|f\|\,| = \max_{t\in T}\left\|\int\limits_{0}^{t} f(s)\,ds\right\|_Y .$$

Пространство $L^1(T,Y)$ с этой нормой обозначается через $|w|$-$L^1(T,Y)$.

Для множества $C\subset Y$ пусть

$$\|C\|_Y = \sup\{\|y\|_Y;\ y\in C\},$$

а $d_Y(x,C)$ означает расстояние от точки $x\in Y$ до множества $C\subset Y$.

Функция $\omega : T\times R^+\times R^+\to R^+$ называется *интегрально ограниченной* на ограниченных множествах из $R^+\times R^+$ функцией Каратеодори, если

1) функция $t\to\omega(t,\alpha,\beta)$ измерима, $\alpha,\beta\in R^+$;

2) функция $(\alpha,\beta)\to\omega(t,\alpha,\beta)$ непрерывна п.в., $(\alpha,\beta)\in R^+\times R^+$;

3) для любого $m>0$ существует функция $L_m(\cdot)\in L^1(T,R^+)$ такая, что

$$\omega(t,\alpha,\beta)\le L_m(t)\ \text{п.в.},\quad 0\le\alpha\le m,\ 0\le\beta\le m.$$

Типичным примером функции $\omega(t,\alpha,\beta)$ может служить функция $\omega(t,\alpha,\beta) = k(t)(\alpha+\beta)$, $k(\cdot)\in L^1(T,R^+)$.

В определениях измеримости как однозначных, так и многозначных отображений следуем работе [13].

Пусть $A(t) : D(A(t))\subset H\rightrightarrows H$, $t\in T$, — семейство максимально монотонных операторов. Рассмотрим включение

$$\dot z(t)\in A(t)z(t)+f(t), \tag{2.1}$$

$$z(0)=z_0\in D(A(0)),\quad f(\cdot)\in L^1(T,H).$$

Под *решением включения* (2.1) понимается абсолютно непрерывная функция $z(f) : T\to H$, $z(f)(0)=z_0$, $z(f)(t)\in D(A(t))$, $t\in T$, производная $\dot x(f)(t)$ которой удовлетворяет включению

$$\dot z(f)(t)\in A(t)z(f)(t)+f(t)\quad \text{п.в.}$$

Гипотезы $H(A)$**.** (1) *Для любого* $f(\cdot) \in L^1(T, H)$ *включение* (2.1) *имеет решение;*

(2) *для любого* $\beta(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *множество*

$$\{z(f)(\cdot);\ f(\cdot) \in S_\beta\},\ \ S_\beta = \{f(\cdot) \in L^1(T, H);\ \|f(t)\| \le \beta(t) \text{ п.в.}\}$$

равностепенно непрерывно;

(3) *для любого* $r \ge d(\Theta, D(A(t)))$ *множество* $D(A(t)) \cap r\overline{B}$ *относительно компактно.*

Условия, при которых справедливы гипотезы $H(A)$, будут даны в разд. 6.

Гипотезы $H(f)$**.** *Функция* $f : T \times H \times H \to H$ *обладает следующими свойствами:*

(1) *функция* $t \to f(t, z, y)$ *измерима;*

(2) *существует функция* $k_f(\cdot) \in L^1(T, R)$, $k_f(t) > 0$, $t \in T$, *такая, что*

$$\|f(t, z_1, y_1) - f(t, z_2, y_2)\| < k_f(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|) \quad \text{п.в.}; \tag{2.2}$$

(3) *справедливо неравенство*

$$\|f(t, \Theta, y_0\| < c_f(t), \quad c_f(t) > 0, \quad c_f(\cdot) \in L^1(T, R^+). \tag{2.3}$$

Гипотеза $H(E)$**.** *Оператор* $E : Y \to H$ *является линейным и непрерывным.*

Гипотезы $H(U)$**.** *Многозначное отображение* $U : T \times H \times H \to Y$ *с замкнутыми значениями обладает следующими свойствами:*

(1) *отображение* $t \to U(t, z, y)$ *измеримо,* $z, y \in H$*;*

(2) *существует функция* $k_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$, $k_U(t) > 0$, $t \in T$, *такая, что*

$$\text{haus}(U(t, z_1, y_1), U(t, z_2, y_2)) < k_U(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|); \tag{2.4}$$

(3) *справедливо неравенство*

$$d_Y(\Theta_Y, U(t, \Theta, y_0)) < c_U(t), \tag{2.5}$$

$c_U(t) > 0$, $t \in T$, $c_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$;

(3^*) *имеет место неравенство*

$$\|U(t, \Theta, y_0)\|_Y < c_U(t), \tag{2.6}$$

$c_U(t) > 0$, $t \in T$, $c_U(\cdot) \in L^1(T, R^+)$.

Гипотезы $H(g)$**.** *функция* $g : T \times H \times H \times Y \to R$ *обладает свойствами*

(1) *функция* $t \to g(t, z, y, u)$ *измерима,* $z, y \in H$, $u \in Y$*;*

(2) *для любого* $M > 0$ *существует интегрально ограниченная на ограниченных множествах функция Каратеодори* $\omega_M : T \times R^+ \times R^+ \to R^+$, $\omega_M(t, 0, 0) = 0$ *п.в., и число* $k_M > 0$ *такие, что*

$$|g(t, z_1, y_1, u_1) - g(t, z_2, y_2, u_2)| \le \omega_M(t, \|z_1 - z_2\|, \|y_1 - y_2\|) + k_M\|u_1 - u_2\|_Y \text{ п.в.}, \tag{2.7}$$
$$\|z_i\| \le M, \quad \|y_i\| \le M, \quad u_i \in Y,\ i = 1, 2;$$

(3) *справедливы неравенства*

$$|g(t, z, y, u)| \le \alpha_M(t), \quad \|y\| \le M, \quad \|z\| \le M,$$

$$u \in \overline{\text{co}}U(t,z,y) \quad \alpha_M(\cdot) \in L^1(T,R^+).$$

Типичным примером функции $g : T \times Z \times H \times Y \to R$ со свойствами $H(g)(2),(3)$ может служить функция, удовлетворяющая неравенствам

$$|g(t,z_1,y_1,u_1) - g(t,z_2,y_2,u_2)| \le k_g(t)(\|z_1 - z_2\| + \|y_1 - y_2\|) + \alpha_U \|u_1 - u_2\|_Y,$$
$$k_g(\cdot) \in L^1(T,R^+), \quad \alpha_U > 0,\ z_i, y_i \in H,\ u_i \in Y,\ i = 1,2,$$
$$|g(t,\Theta,\Theta,u)| \le \alpha(t), \quad z,y \in H,\ u \in \overline{\text{co}}U(t,z,y),$$

при выполнении гипотезы $H(U)(3^*)$, $\alpha(\cdot) \in L^1(T,R^+)$.

Всюду в дальнейшем считаем, что выполняются гипотезы $H(f)$, $H(U)(1)$–(3), $H(g)$.

Приведем результаты, которые понадобятся в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть выполняется гипотеза $H(A)(1)$. Тогда для любого $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$ решение $z(\dot{v})$ включения (2.1) единственно и имеет место неравенство*

$$\|z(\widehat{v}_1)(t) - z(\widehat{v}_2)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_1(s) - \widehat{v}_2(s)\|\,ds \tag{2.8}$$

для любых $\widehat{v}_i(\cdot) \in L^1(T,H)$, $i = 1,2$.

Если выполняется гипотеза $H(A)(2)$, последовательность $\widehat{v}_n(\cdot) \in L^1(T,H)$, $n \ge 1$, сходится к $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$ и имеет место неравенство

$$\|\widehat{v}_n(t)\| \le \beta(t) \text{ п.в.}, \quad n \ge 1,\ \beta(\cdot) \in L^1(T,R^+), \tag{2.9}$$

а множество $\left\{\bigcup \widehat{v}_n(t);\ n \ge 1\right\} \subset H$ относительно компактно при почти всех $t \in T$, то последовательность $z(v_n)(\cdot)$, $n \ge 1$, сходится в пространстве $C(T,H)$ к $z(\widehat{v})(\cdot)$.

Доказательство. Единственность решения $z(\widehat{v})(\cdot)$ включения и неравенство (2.8) хорошо известны.

Пусть $z(\Theta)(\cdot)$ — решение включения (2.1) при $f(t) \equiv \Theta$, $t \in T$. Воспользовавшись неравенствами (2.8), (2.9), получим

$$\|z(\widehat{v}_n)(t)\| \le \|z(\Theta)(t)\| + \int\limits_0^t \beta(\tau)\,d\tau.$$

Из этого неравенства следует, что

$$z(v_n)(t) \subset r\overline{B}, \quad n \ge 1,\ t \in T,$$

при некотором $r > 0$.

Множество $r\overline{B}$ является метризуемым компактом в пространстве ω-H. Рассматривая $r\overline{B}$ как самостоятельное метрическое пространство и воспользовавшись гипотезой $H(C)(2)$ и теоремой Арцела — Асколи, получаем, что существует подпоследовательность $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $m \ge 1$, сходящаяся в $C(T,\omega\text{-}r\overline{B})$ к некоторой функции $y(\cdot)$. Так как $y(\cdot) \in L^1(T,H)$, получим хорошо известное неравенство

$$\frac{1}{2}\|z(\widehat{v}_{n_m})(t) - z(\widehat{v}_0)(t)\|^2 \le \int\limits_0^t \langle z(\widehat{v}_{n_m})(\tau) - y(\tau), \widehat{v}_0)(\tau) - \widehat{v}_{n_m}(\tau)\rangle\,d\tau$$
$$+ \int\limits_0^t \langle y(\tau) - z(\widehat{v}_0)(\tau), \widehat{v}_0(\tau) - v_{n_m}(\tau)\rangle\,d\tau, \quad t \in T.$$

Воспользовавшись этим неравенством и хорошо известными аргументами (см., например, доказательство теоремы 3.2 в [14]), получим, что последовательность $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $m \geq 1$, сходится к $z(\widehat{v})(\cdot)$ в пространстве $C(T, H)$.

Доказательство сходимости самой последовательности $z(\widehat{v}_{n_m})(\cdot)$, $n \geq 1$, в $C(T, H)$ к $z(\widehat{v})$ проводится с помощью использования аргументов от противного (см. теорему 3.2. в [14]). Лемма доказана.

Пусть $\widehat{v}_* \in L^1(T, H)$ и $z(\widehat{v}_*)(\cdot)$, $z(\widehat{v}_*)(0) = z_0 \in D(A(0))$ — решение включения

$$-\dot{z}(\widehat{v}_*)(t) \in A(t)z(\widehat{v}_*(t)) + \widehat{v}_*(t). \tag{2.10}$$

Положим

$$v_*(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_*(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{2.11}$$

Пусть

$$D(A(\widehat{v}_*)(t) = D(A(t)) + v_*(t), \quad t \in T, \tag{2.12}$$

и $A(\widehat{v}_*)(t) : D(A(\widehat{v}_*)(t)) \subset H \rightrightarrows H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов

$$A(\widehat{v}_*)(t)(w) = A(t)(w - v_*(t)), \quad w \in D(A(\widehat{v}_*)(t)),\ t \in T. \tag{2.13}$$

Рассмотрим включение

$$-x(\widehat{w})(t) \subset A(\widehat{v}_*)(t)x(\widehat{w}(t)) + \widehat{w}(t), \tag{2.14}$$

$x(\widehat{w})(0) = z_0 \in D(A(0))$, $\widehat{w}(\cdot) \in L^1(T, H)$.

Лемма 2.2. *Пусть выполняется гипотеза $H(A)(1)$. Тогда для любого $w(\cdot) \in L^1(T, H)$ включение (2.14) имеет единственное решение и функция $x(\widehat{w})(t)$ является решением включения (2.14) тогда и только тогда, когда функция $z(\cdot)$, $z(0) = z_0$,*

$$z(t) = x(\widehat{w})(t) - v_*(t), \tag{2.15}$$

является решением включения

$$-\dot{z}(t) \in A(t)(z(t)) + \widehat{v}(t) \tag{2.16}$$

с функцией

$$\widehat{v}(t) \in \widehat{w}(t) + \widehat{v}_*(t), \tag{2.17}$$

т. е. $z(t) = z(\widehat{v})(t)$.

Доказательство достаточно очевидно и вытекает из равенств (2.12), (2.13) и гипотезы $H(A)(1)$.

Пусть $x(\Theta)(\cdot)$ — решение включения (2.14) с $\widehat{w}(t) = \Theta$, $t \in T$. Тогда из (2.15), (2.17) вытекает

$$z(\widehat{v})(t) = x(\Theta)(t) - v_*(t). \tag{2.18}$$

Рассмотрим пространство $\widetilde{Y} = Y \times R$. Элементы пространства $\widehat{Y}$ будем обозначать через $\widetilde{y} = (y, \lambda)$, $y \in Y$, $\lambda \in R$. Наделим пространство $\widetilde{Y}$ нормой

$$\|\widetilde{y}\|_{\widetilde{Y}} = \max(\|y\|_Y, |\lambda|), \quad y \in Y,\ \lambda \in R. \tag{2.19}$$

Пространство $\widetilde{Y} = Y \times R$ будет сепарабельным банаховым пространством.

Согласно (2.19) слабая норма $|||\widetilde{y}|||$ на ω-$L^1(T,\widetilde{Y})$ имеет вид

$$|||\widetilde{y}||| = \sup_{0\le t\le 1}\left\{\max\left(\left\|\int\limits_0^t y(s)\,ds\right\|_Y, \quad \left|\int\limits_0^t \lambda(s)\,ds\right|\right)\right\}. \tag{2.20}$$

Пусть $G : T\times Y\times H \to \widetilde{Y}$ — многозначное отображение, определенное по правилу

$$G(t,z,y) = \{(u,\lambda);\ u\in U(t,z,y),\ \lambda = g(t,z,y,u)\}. \tag{2.21}$$

Лемма 2.3. *Пусть выполняются гипотезы $H(U)(1),(2)$ и $H(g)$. Тогда $G : T\times H\times H \to \widetilde{Y}$ является многозначным отображением с замкнутыми значениями и*

(1) *отображение $t\mapsto G(t,z,y)$ измеримо, $z,y\in H$;*

(2) *при почти всех $t\in T$ отображение $(z,y)\mapsto G(t,z,y)$ непрерывно в метрике Хаусдорфа $\mathrm{haus}_{\widetilde{Y}}(\cdot,\cdot)$ на пространстве замкнутых множеств из $\widetilde{Y}$.*

Доказательство леммы дословно повторяет доказательство подобной леммы из [9].

Лемма 2.4. *Пусть выполняются гипотезы $H(U)(1)$–(3) и $H(g)$. Тогда*

(1) *для почти всех $t\in T$*

$$\mathrm{dom}\, g_U^{**}(t,z,y) = \overline{\mathrm{co}}U(t,z,y), \tag{2.22}$$

где $\mathrm{dom}\, g_U^{**}(t,z,y) = \{u\in Y;\ g_U^{**}(t,z,y,u) < \infty\}$;

(2) *для любого $u\in \overline{\mathrm{co}}U(t,z,y)$*

$$g_U^{**}(t,z,y,u) = \min\{\lambda\in R;\ (u,\lambda)\in \overline{\mathrm{co}}G(t,z,y)\} \tag{2.23}$$

и

$$(u, g_U^{**}(t,z,y,u)) \in \overline{\mathrm{co}}G(t,z,y); \tag{2.24}$$

(3) *для любого $\varepsilon>0$ существует замкнутое множество $T_\varepsilon\subset T$ с мерой Лебега $\mu(T\backslash T_\varepsilon)\le\varepsilon$ такое, что функция $(t,z,y,u)\to g_U^{**}(t,z,y,u)$ полунепрерывна снизу на $T_\varepsilon\times H\times H\times Y$.*

Лемма является полным аналогом подобной леммы 2.5 в [9].

Следующая лемма является частным случаем леммы 3.8 в [8].

Лемма 2.5. *Пусть $V\subset \omega$-$L^1(T,Y)$ — компактное множество. Если последовательность $\widehat{v}_n(\cdot)\in V$, $n\ge 1$, сходится в пространстве $|\omega|$-$L^1(T,Y)$ к $\widehat{v}(\cdot)$, то она сходится к $\widehat{v}(\cdot)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$.*

§ 3. Существование решений

В этом параграфе, не оговаривая особо, считаем, что выполняются гипотезы $H(C)(1)$, $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) и $E : Y\to H$ — непрерывный линейный оператор.

Обозначим через $z(\Theta)(\cdot)$ решение включения (2.1) при $f(t)\equiv\Theta$.

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|f(t,z(\Theta)(t),v_0)\| < a_f(t), \quad a_f(t)>0,\ t\in T, \tag{3.1}$$

$$d(\Theta_Y, U(t,z(\Theta)(t)),v_0) < a_U(t), \quad a_U(t)>0,\ t\in T, \tag{3.2}$$

$a_f(\cdot), a_U(\cdot)\in L^1(T,R^+)$.

Пусть
$$a(t) = a_f(t) + \|E\| a_U(t), \tag{3.3}$$
$$k(t) = k_f(t) + \|E\| k_U(t), \tag{3.4}$$
где $k_f(t)$ и $k_U(t)$ — функции из неравенств (2.2), (2.4).

Рассмотрим дифференциальное уравнение
$$\dot r(t) = a(t) + 2k(t)r(t), \quad r(0) = 0, \tag{3.5}$$
которое имеет единственное решение
$$r(t) = \int\limits_0^t e^{m(t)-m(s)} a(s)\,ds, \quad t \in T, \tag{3.6}$$
где
$$m(t) = 2\int\limits_0^t k(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{3.7}$$

Если $\widehat v(\cdot) \in L^1(T,H)$, то всюду в дальнейшем через $v(\cdot)$ будем обозначать функцию $v(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, определенную равенством
$$v(t) = \int\limits_0^t \widehat v(s)\,ds. \tag{3.8}$$
Пусть
$$f_*(t,z,v) = f(t,z,v+y_0), \tag{3.9}$$
$$U_*(t,z,v) = U(t,z,v+y_0), \tag{3.10}$$
$z, v \in H$.

Из гипотез $H(f)(1)$,(2) вытекает, что отображения $f_* : T \times H \times H \to H$ и $U_* : T \times H \times H \to Y$ обладают свойствами (1), (2) в гипотезах $H(f)$ и $H(U)$ и удовлетворяют тем же неравенствам (2.2), (2.4) с константами $k_f(t)$ и $k_U(t)$.

Рассмотрим управляемую систему
$$-\dot z(t) \in A(t)z(t) + \widehat v(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.11}$$
$$z(0) = z_0 \in D(A(0)),$$
$$\widehat v(t) = f_*(t, z(t), v(t)) + Eu(t), \tag{3.12}$$
$$u(t) \in U_*(t, z(t), v(t)), \tag{3.13}$$
где функция $v(t)$ определена равенством (3.8).

Под *решением системы* (3.11)–(3.13) понимается тройка $(z(\widehat v),\ \widehat v(\cdot), u(\cdot))$, $z(\widehat v)(0) = z_0$, $z(\widehat v)(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $z(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $\widehat v(\cdot) \in L^1(T,H)$, $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$, удовлетворяющая
$$-\dot z(\widehat v)(t) \in A(t)z(\widehat v)(t) + \widehat v(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.14}$$
$$\widehat v(t) = f_*(t, z(\widehat v)(t), v(t)) + Eu(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.15}$$
$$u(t) \in U_*(t, z(\widehat v)(t), v(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{3.16}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполняются неравенства* (3.1), (3.2). *Тогда для любого* $z_0 \in D(A(0))$ *управляемая система* (3.11), (3.12) *имеет решение* $(z(\widehat{v})(\cdot), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$ *такое, что*

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)\| \le r(t), \quad t \in T, \tag{3.17}$$

$$\|\widehat{v}(t)\| \le \dot{r}(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.18}$$

$$\|v(t)\| \le r(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.19}$$

$$\|u(t)\| \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.20}$$

где $r(t)$ — *решение уравнения* (3.4).

Доказательство. Рассмотрим отображения

$$\widetilde{f}(t,z,v) = f_*(t, z + z(\Theta)(t), v), \tag{3.21}$$

$$\widetilde{U}(t,z,v) = U_*(t, z + z(\Theta)(t), v). \tag{3.22}$$

Из гипотез $H(f)$, $H(U)(1),(2)$, (3.1), (3.2), (3.8)–(3.10), (3.21), (3.22) вытекает, что

1) отображения $t \to \widetilde{f}(t,z,v)$, $t \to \widetilde{U}(t,z,v)$ измеримы;

2) имеют место неравенства

$$\|\widetilde{f}(t,z_1,v_1) - \widetilde{f}(t,z_2,v_2)\| < k_f(t)(\|z_1 - z_2\| + \|v_1 - v_2\|); \tag{3.23}$$

$$\mathrm{haus}_Y(\widetilde{U}(t,z_1,v_1), \widetilde{U}(t,z_2,v_2)) < k_U(t)(\|z_1 - z_2\| + \|v_1 - v_2\|); \tag{3.24}$$

3) выполнено неравенство

$$\|\widetilde{f}(t,z,v)\| < a_f(t) + k_f(t)(\|z\| + \|v\|), \tag{3.25}$$

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t,z,v)) < a_U(t) + k_U(t)(\|z\| + \|v\|). \tag{3.26}$$

Из этого неравенства и (3.24) вытекает

$$\widetilde{U}(t,z,v) \cap (a_U(t) + k_U(\|z\| + \|v\|))B \neq \varnothing \tag{3.27}$$

и

$$\widetilde{U}(t,z,v) \cap (a_U(t) + k_U(\|z\| + \|v\|))\overline{B} \subset \widetilde{U}(t,x,w) + k_U(t)(\|z-x\| + \|v-w\|)B. \tag{3.28}$$

Построим по индукции последовательность

$$y_0(t) = \Theta, \quad v_0(t) = \Theta, \quad t \in T, \tag{3.29}$$

$$\widehat{v}_i(t) = \widehat{f}(t, y_i(t), v_i(t)) + Eu_i(t), \quad i \ge 0, \tag{3.30}$$

$$u_i(t) \in \widetilde{U}(t, y_i(t), v_i(t)), \quad i \ge 0, \tag{3.31}$$

$$y_{i+1}(t) = z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t), \quad v_{i+1}(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_i(s)\,ds, \tag{3.32}$$

где $z(\widehat{v}_i)(t)$ — решение включения (3.14) при $\widehat{v}(t) = \widehat{v}_i(t)$, со свойствами

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le \dot{r}(t), \quad \widehat{v}_i(\cdot) \in L^1(T,H), \tag{3.33}$$

$$\|u_i(t)\|_Y \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t), \quad u_i(\cdot) \in L^1(T,Y), \tag{3.34}$$

$$\|y_{i+1}(t)\| \le r(t), \quad \|v_{i+1}(t)\| \le r(t), \tag{3.35}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\|_Y \le k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|), \quad i \ge 1, \tag{3.36}$$

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le k(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|), \quad i \ge 1, \tag{3.37}$$

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le 2k(t)\int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i-1}}{(i-1)!}a(s)\,ds, \quad i \ge 1, \tag{3.38}$$

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \le \int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i}}{i!}a(s)\,ds, \quad i \ge 1, \tag{3.39}$$

$$\|v_{i+1}(t) - v_i(t)\| \le \int\limits_0^t \frac{[m(t)-m(s)]^{i}}{i!}a(s)\,ds. \tag{3.40}$$

Из (3.26), (3.29) вытекает, что

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t, y_0(t), v_0(t))) < a_U(t) \quad \text{п.в.}$$

Используя это неравенство и рассуждая, как и при доказательстве теоремы 3.1 в [9] (см. неравенства (3.27), (3.28)), получим, что существует измеримая функция $u_0(t)$ такая, что

$$\|u_0(t)\|_Y \le a_U(t) \quad \text{п.в.}, \tag{3.41}$$

$$u_0(t) \in \widetilde{U}(t, y_0(t), v_0(t)). \tag{3.42}$$

Из (3.41) следует, что $u_0(\cdot) \in L^1(T, Y)$. Воспользовавшись (3.30), (3.25), (3.29), (3.3)–(3.5), получим

$$\|\widehat{v}_0(t)\| \le a(t) \le \dot{r}(t), \tag{3.43}$$

$$\|y_0(t)\| \le r(t), \quad \|v_0(t)\| \le r(t). \tag{3.44}$$

Из (3.32) и (3.43), (2.8) вытекает, что

$$\|y_1(t)\| = \|z(\widehat{v}_0(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t a(s)\,ds \le r(t), \tag{3.45}$$

$$\|v_1(t)\| \le \int\limits_0^t a(s)\,ds. \tag{3.46}$$

Из (3.42), (3.24) получаем

$$d_Y(u_0(t), \widetilde{U}(t, y_1(t), v_1(t))) < k_U(t)(\|y_1(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|).$$

Из этого неравенства, воспользовавшись (3.27), (3.28) и рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1 в [9] (см. неравенства (3.34), (3.35)), получим, что существует измеримая функция $u_1(t)$ такая, что

$$u_1(t) \in \widetilde{U}(t, y_1(t), v_1(t)) \quad \text{п.в.}, \tag{3.47}$$

$$\|u_1(t) - u_0(t)\|_Y \le k_U(t)(\|y_1(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|). \tag{3.48}$$

Из этого неравенства, (3.29), (3.41), (3.45), (3.46) вытекает, что

$$\|u_1(t)\| \le a_U(t) + 2k(t)r(t). \tag{3.49}$$

Воспользовавшись (3.48), (3.23), (3.30), (3.4), получим

$$\|\widetilde{v}_1(t) - \widetilde{v}_0(t)\| \le k(t)(\|y_i(t) - y_0(t)\| + \|v_1(t) - v_0(t)\|). \tag{3.50}$$

Из этого неравенства и (3.43), (3.45), (3.46), (3.29) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_1(t)\|_Y \le a(t) + 2k(t)r(t) = \dot{r}(t). \tag{3.51}$$

Поэтому согласно (2.8), (3.32), (3.51)

$$\|y_2(t)\| = \|z(\widehat{v}_1)(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_1(s)\|\,ds \le r(t). \tag{3.52}$$

$$\|v_2(t)\| \le r(t). \tag{3.53}$$

Из (2.8), (3.50), (3.45), (3.46) и (3.32) имеем

$$\|\widehat{v}_1(t) - \widehat{v}_0(t)\|_Y \le 2k(t)\int\limits_0^t a(s)\,ds, \tag{3.54}$$

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| = \int\limits_0^t 2k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\,ds\right)\,d\tau. \tag{3.55}$$

Учитывая (3.7), получаем

$$\int\limits_0^t 2k(\tau)\left(\int\limits_0^\tau a(s)\,ds\right)\,d\tau = \int\limits_0^t\int\limits_0^t 2k(\tau)a(s)\,dsd\tau - \int\limits_0^t 2k(t)\left(\int\limits_\tau^t a(s)\,ds\right)\,d\tau$$
$$= \int\limits_0^t m(t)a(s)\,ds - \int\limits_0^t a(s)\left(\int\limits_0^s 2k(t)\,d\tau\right)\,ds = \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]a(s)\,ds.$$

Из этого равенства и (3.55) вытекает, что

$$\|y_2(t) - y_1(t)\| \le \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]\,ds. \tag{3.56}$$

Согласно (3.32)

$$\|v_2(t) - v_1(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_1(s) - \widehat{v}_0(s)\|\,ds.$$

Воспользовавшись этим неравенством и (3.54), по аналогии с (3.56) имеем

$$\|v_2(t) - v_1(t)(t)\| \le \int\limits_0^t [m(t) - m(s)]a(s)\,ds. \tag{3.57}$$

Из (3.47)–(3.54), (3.56), (3.57) вытекает, что соотношения (3.31), (3.33)–(3.40) справедливы при $i = 1$.

Предположим, что построены $y_i(t) = z(\widehat{v}_{i-1})(t) - z(\Theta)(t)$, $\widehat{v}_{i-1}(t)$, $v_i(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_{i-1}(s)\,ds$, $u_{i-1}(t)$, удовлетворяющие (3.31), (3.33)–(3.40). Тогда

$$u_{i-1}(t) \in \widetilde{U}(t, v_{i-1}(t), y_{i-1}(t)), \tag{3.58}$$

$$\|y_{i-1}(t)\| \le r(t), \quad \|v_{i-1}(t)\| \le r(t), \quad \|\widehat{v}_{i-1}\|_Y \le \dot{r}(t). \tag{3.59}$$

Из (3.58), (3.24) получим

$$d_Y(u_{i-1}(t), \widetilde{U}(t, v_i(t), y_i(t))) < k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|).$$

Рассуждая, как при доказательстве включения (3.43) и неравенства (3.44) в работе [9], получим, что существует $u_i \in L^1(T, Y)$ такая, что

$$u_i(t) \in \widetilde{U}(t, v_i(t), y_i(t)), \tag{3.60}$$

$$\|u_i(t) - u_{i-1}(t)\| \le k_U(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\|_Y + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|). \tag{3.61}$$

Тогда из (3.23), (3.30), (3.4) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \le k(t)(\|v_i(t) - v_{i-1}(t)\| + \|y_i(t) - y_{i-1}(t)\|). \tag{3.62}$$

Воспользовавшись (3.62), получим

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le k(t)\left(\sum_{j=1}^{i}(\|v_j(t) - v_{j-1}(t)\| + \|y_j(t) - y_{j-1}(t)\|)\right) + \|\widehat{v}_0(t)\|.$$

Используя это неравенство и (3.39), (3.40), (3.43), придем к неравенству

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le 2k(t)\int\limits_0^t \left[\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t) - m(s)]^j}{j!}a(s)\,ds\right] + a(t). \tag{3.63}$$

Так как

$$1 + \frac{\alpha}{1!} + \ldots + \frac{\alpha^j}{j!} \le e^{\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

из (3.63), (3.5), (3.6) вытекает, что

$$\|\widehat{v}_i(t)\| \le a(t) + 2k(t)r(t) = \dot{r}(t). \tag{3.64}$$

Используя (3.61), (3.39)–(3.41), по аналогии с (3.63) получим

$$\|u_i(t)\|_Y \le 2k_U(t)\int\limits_0^t \left[\sum_{j=0}^{i-1}\frac{[m(t) - m(s)]^j}{j!}a(s)\,ds\right] + a_U(t).$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|u_i(t)\| \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t). \tag{3.65}$$

Из (3.64), (3.32) вытекает, что

$$\|y_{i+1}(t)\| = \|z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}_i(s)\|\,ds \le r(t), \tag{3.66}$$

$$\|v_{i+1}(t)\| \leq \int\limits_0^t \|\widehat{v}_i(s)\|_Y \, ds \leq r(t). \tag{3.67}$$

Воспользовавшись (3.61), (3.39), (3.40), имеем

$$\|\widehat{v}_i(t) - \widehat{v}_{i-1}(t)\| \leq 2k(t) \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s) \, ds. \tag{3.68}$$

Из (3.68), (3.32), (2.8) вытекает неравенство

$$\|y_{i+1}(t) - y_i(t)\| \leq \int\limits_0^t \|v_i(s) - v_{i-1}(s)\| \, ds \leq \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds. \tag{3.69}$$

При доказательстве неравенства (3.69) использовано равенство

$$\int\limits_0^t 2k(\tau) \left(\int\limits_0^\tau \frac{[m(\tau) - m(s)]^{i-1}}{(i-1)!} a(s) \, ds \right) d\tau = \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds.$$

Справедливость этого равенства проверяется дифференцированием левой и правой частей с использованием (3.7).

Аналогично, воспользовавшись (3.68), имеем

$$\|v_{i+1}(t) - v_i(t)\| \leq \int\limits_0^t \frac{[m(t) - m(s)]^i}{i!} a(s) \, ds. \tag{3.70}$$

Из (3.60)–(3.62), (3.64)–(3.70) получим, что соотношения (3.33)–(3.40) справедливы при i.

Тем самым последовательности $y_{i+1}(t)$, $v_{i+1}(t)$, $\widehat{v}_i(t)$, $u_i(t)$, $i \geq 0$, с требуемыми свойствами построены.

Из (3.68) вытекает, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|\widehat{v}_{i+1}(t) - \widehat{v}_i(t)\|$ сходится для почти каждого $t \in T$. Поэтому последовательность $\widehat{v}_i(t)$, $i \geq 1$, для почти всех $t \in T$ является последовательностью Коши и для почти всех $t \in T$ последовательность $\widehat{v}_i(t)$, $i \geq 1$, сходится к измеримой функции $\widehat{v}(t)$. Из (3.33) вытекает, что последовательность $\widehat{v}_i(\cdot)$, $i \geq 1$, сходится к $\widehat{v}(\cdot)$ в пространстве $L^1(T, Y)$ и

$$\|\widehat{v}(t)\|_Y \leq \dot{r}(t). \tag{3.71}$$

Из (3.36), (3.39), (3.40) следует, что ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \|u_{i+1}(t) - u_i(t)\|_Y$ сходится при почти всех $t \in T$.

Рассуждая, как и для последовательности $\widehat{v}_i$, $i \geq 1$, получим, что последовательность $u_i(t)$, $i \geq 1$, для почти всех $t \in T$ сходится к измеримой функции $u(t)$. Из (3.34) вытекает, что последовательность $u_i(\cdot)$, $i \geq 1$, сходится к $u(\cdot)$ в пространстве $L^1(T, Y)$ и справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leq a_U(t) + 2k_U(t) r(t). \tag{3.72}$$

Пусть $z(\widehat{v})$ — решение включения (3.11) и $v(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}(s)\,ds$. Тогда из (2.8), (3.32)

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\widehat{v}_i)(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}(s) - \widehat{v}_i(s)\|\,ds, \quad \|v(t) - v_i(t)\| \le \int\limits_0^t \|\widehat{v}(s) - \widehat{v}_i(s)\|\,ds.$$

Из этих неравенств вытекает, что последовательности $z(\widehat{v}_i), v_i(\cdot)$, $i \ge 1$, сходятся в пространстве $C(T,H)$ к $z(\widehat{v})$ и $v(\cdot)$ соответственно.

Стало быть, последовательность $y_{i+1}(t) = z(\widehat{v}_i)(t) - z(\Theta)(t)$ сходится в пространстве $C(T,H)$ к $y(t) = z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)$. Из (3.35) вытекает, что

$$\|y(t)\| = \|z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)\| \le r(t), \tag{3.73}$$

$$\|v(t)\| \le r(t). \tag{3.74}$$

Из (3.31), (3.24) получаем

$$d(u_i(t), \widetilde{U}(t, v(t), y(t))) < k(t)(\|v_i(t) - v(t)\|_Y + \|y_i(t) - y(t)\|).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, учитывая (3.22) и равенство $y(t) = z(\widehat{v})(t) - z(\Theta)(t)$, получим

$$u(t) \in U_*(t, z(t), y(t)). \tag{3.75}$$

Аналогично, используя (3.30) и (3.23), (3.21), имеем

$$\widehat{v}(t) = f_*(t, z(\widehat{v})(t), v(t)) + Eu(t). \tag{3.76}$$

Из (3.11), (3.75), (3.76) вытекает, что $(z(\widehat{v}), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$ является решением системы (3.11)–(3.13). Что касается неравенств (3.17)–(3.19), то они вытекают из неравенств (3.73), (3.74), (3.71), (3.72). Теорема доказана.

Замечание 3.1. Если выполняются гипотезы $H(f)(2),(3)$, то в неравенствах (3.1), (3.2) в качестве $a_f(t), a_U(t)$ можно брать функции

$$a_f(t) = c_f(t) + k_f(t)\|z(\Theta)(t)\|, \tag{3.77}$$

$$a_U(t) = c_U(t) + k_U(t)\|z(\Theta)(t)\|. \tag{3.78}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполняются гипотезы $H(f)(1),(2)$, $H(U)(1),(2)$ и неравенства (3.1), (3.2). Тогда для любых $z_0 \in D(A(0))$, $y_0 \in H$ управляемая система (1.1), (1.2) с ограничением (1.3) имеет решение $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$, удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(t) - z(\Theta)(t)\| \le r(t), \quad t \in T, \tag{3.79}$$

$$\|y(t) - y_0\| \le r(t), \quad t \in T, \tag{3.80}$$

$$\|u(t)\|_Y \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t).$$

Доказательство. Согласно теореме 3.1 существуют функции $z(\widehat{v})(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $z(\widehat{v})(0) = z_0$, $z(\widehat{v})(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, $v(\cdot) \in W^{1,1}(T,H)$, $\widehat{v}(\cdot) \in L^1(T,H)$, $v(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}(s)\,ds$, $t \in T$, $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$, удовлетворяющие включениям (3.14), (3.16) и уравнению (3.15).

Положим

$$z(t) = z(\widehat{v})(t), \quad y(t) = y_0 + v(t). \tag{3.81}$$

Воспользовавшись (3.9), (3.10), (3.14)–(3.16), (3.17)–(3.20), (3.81), получим, что функции $z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)$ являются решением управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничением (3.5), удовлетворяющим неравенствам (3.79)–(3.81). Теорема доказана.

§ 4. Релаксация

В этом параграфе докажем теорему релаксации для задачи минимизации интегрального функционала.

Пусть $z(\widehat{v}_*)(t)$, $z(\widehat{v}_*)(0) = z_0 \in D(A(0))$ — решение включения

$$-\dot{z}(\widehat{v}_*) \in A(t)z(\widehat{v}_*)(t) + \widehat{v}_*(t), \quad \widehat{v}_*(\cdot) \in L^1(T, H), \tag{4.1}$$

$$v_*(t) = \int\limits_0^t \widehat{v}_*(s)\, ds, \tag{4.2}$$

$f_* : T \times H \times H \to H$ и $U_* : T \times Y \times H \to Y$ — отображения, определенные равенствами (3.9), (3.10).

Теорема 4.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(f)(1),(2)$, $H(U)(1),(2)$ *и*

$$\widehat{v}_*(\cdot) = \widetilde{f}(t) + E\widetilde{u}(t), \quad \widetilde{f}(\cdot) \in L^1(T, H), \quad \widetilde{u}(\cdot) \in L^1(T, Y). \tag{4.3}$$

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|\widetilde{f}(t) - f_*(t, z(\widehat{v}_*)(t), v_*(t))\| < a_f(t), \tag{4.4}$$

$$d_Y(\widetilde{u}(t), U_*(t, z(\widehat{v}_*)(t), v_*(t)) < a_U(t). \tag{4.5}$$

Тогда существует решение $(z(\widehat{v}(\cdot), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot)))$ *системы* (3.11)–(3.13), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(\widehat{v})(t) - z(\widehat{v}_*)(t)\| \le r(t), \tag{4.6}$$

$$\|\widehat{v}(t) - \widehat{v}_*(t)\| \le \dot{r}(t), \tag{4.7}$$

$$\|u(t) - \widetilde{u}(t)\| \le a_U(t) + 2k_U(t)r(t). \tag{4.8}$$

Доказательство. Пусть

$$\widetilde{f}(t, x, w) = -\widetilde{f}(t) + f_*(t, x - v_*(t), w + v_*(t)),$$

$$\widetilde{U}(t, x, w) = -\widetilde{u}(t) + U_*(t, x - v_*(t), w + v_*(t)).$$

Рассмотрим управляемую систему

$$-\dot{x}(t) \in A(\widehat{v}_*)(t)x(t) + \widehat{w}(t), \tag{4.9}$$

$$x(0) = z_0 \in D(A(0)),$$

$$\widehat{w}(t) = \widetilde{f}(t, x(t), w(t)) + Eu(t), \tag{4.10}$$

$$u(t) \in \widetilde{U}(t, x(t), w(t)), \tag{4.11}$$

где операторы $A(\widehat{v}_*)(t)$, $t \in T$, определены равенствами (2.13) с областями определения (2.12). Из леммы 2.2 следует, что для любого $\widehat{w}(\cdot) \in L^1(T, H)$ включение (4.9) имеет решение $x(\widehat{w})(\cdot)$. Пусть $x(\Theta)(t)$ — решение включения (4.9) при $\widehat{w}(t) = \Theta$, $t \in T$. Согласно лемме 2.2 справедливо равенство

$$z(\widehat{v}_*)(t) = x(\Theta)(t) - v_*(t). \tag{4.12}$$

Из этого равенства, (4.4), (4.5) и определения $\widetilde{f}(t, x, w), \widetilde{U}(t, x, w)$ вытекает

$$\|\widetilde{f}(t, x(\Theta)(t), \Theta)\| = \|\widetilde{f}(t) - f_*(t, x(\Theta)(t) - v_*(t), v_*(t))\| < a_f(t),$$

$$d_Y(\Theta_Y, \widetilde{U}(t, x(\Theta)(t)\Theta)) = d(\widetilde{u}(t), U_*(t, x(\Theta)(t) - v_*(t), v_*(t)) < a_U(t).$$

Из этих неравенств следует, что $\widetilde{f}(t,x,w)$ и $\widetilde{U}(t,x,w)$ обладают теми же свойствами, что и отображения $f_*(t,z,v)$, $\widetilde{U}_*(t,z,v)$ в теореме 3.1. Используя эту теорему, получаем, что система (4.9)–(4.11) имеет решение

$$(x(\widehat{w})(\cdot),\widehat{w}(\cdot),u(\cdot)),\quad x(\widehat{w})(0)=z_0,$$

$$x(\widehat{w})(t)\in D(A(v_*)(t)),\ t\in T,\quad w(t)=\int\limits_0^t \widehat{w}(s)\,ds,$$

$$\widehat{w}(t)=-\widetilde{f}(t)+f_*(t,x(\widetilde{w})(t)-v_*(t),w(t)+v_*(t))+Eu(t),\tag{4.13}$$

$$u(t)\in-\widetilde{u}(t)+U_*(t,x(\widetilde{w})(t)-v_*(t),w(t)+v_*(t)),\tag{4.14}$$

удовлетворяющее неравенствам

$$\|x(\widehat{w})(t)-x(\Theta)(t)\|\le r(t),\tag{4.15}$$

$$\|\widehat{w}(t)\|\le \dot{r}(t),\tag{4.16}$$

$$\|u(t)\|_Y\le a_U(t)+2k_U(t)r(t).\tag{4.17}$$

Из леммы 2.2 вытекает, что функция

$$z(\widehat{v})(t)=x(\widehat{w})(t)-v_*(t)\tag{4.18}$$

является решением включения (3.11) при

$$\widehat{v}(t)=\widehat{w}(t)+\widehat{v}_*(t).\tag{4.19}$$

Воспользовавшись (4.3), (4.12)–(4.19), получаем, что $(z(\widehat{v})(t),\widehat{v}(t),u(\cdot))$ является решением системы (3.11)–(3.13), удовлетворяющим неравенствам (4.6)–(4.8). Теорема доказана.

Теорема 4.2 (теорема существования). *Пусть выполняются гипотезы* $H(f)(1),(2)$, $H(U)(1),(2)$, $y_*(\cdot)\in W^{1,1}(T,H)$, $y_*(0)=y_0$ *и*

$$\dot{y}_*(t)=\widetilde{y}(t)+E\widetilde{u}(t),$$

$\widetilde{y}(\cdot)\in L^1(T,H)$, $\widetilde{u}(t)\in L^1(T,Y)$, $z_*(\cdot)\in W^{1,1}(T,H)$, $z_*(0)=z_0$, — *решения включения* (1.1) *при* $\dot{y}(\cdot)=\dot{y}_*(\cdot)$.

Предположим, что выполняются неравенства

$$\|\widetilde{y}_*(t)-f(t,z_*(t),y_*(t))\|<a_f(t),\tag{4.20}$$

$$d_Y(\widetilde{u}(t),U(t,z_*(t),y_*(t)))<a_U(t).\tag{4.21}$$

Тогда существует решение $(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot))$ *системы* (1.1)–(1.3), *удовлетворяющее неравенствам*

$$\|z(t)-z_*(t)\|\le r(t),\tag{4.22}$$

$$\|\dot{y}(t)-\dot{y}_*(t)\|\le \dot{r}(t),\tag{4.23}$$

$$\|y(t)-y_*(t)\|\le r(t),\tag{4.24}$$

$$\|u(t)-\widetilde{u}(t)\|\le a_U(t)+2k_U(t)r(t).\tag{4.25}$$

Доказательство. Обозначим $\dot{y}_*(t)=\widehat{v}_*(t)$. Тогда $z_*(\cdot)=z(\widehat{v}_*)(\cdot)$, где $z(\widehat{v}_*)$ — решение включения (4.1). Из (3.9), (3.10) и (3.21), (3.22) вытекают неравенства (4.4), (4.5). Воспользовавшись теоремой 4.1, получим, что существуют функции $(z(\widehat{v}), \widehat{v}(\cdot), u(\cdot))$, которые являются решением системы (3.11)–(3.13), удовлетворяющим неравенствам (4.6)–(4.8).

Положим $z(t) = z(\widehat{v})(t)$, $\dot{y}(t) = \widehat{v}(t)$, $y(t) = y_0 + v(t)$. Тогда из (3.8)–(3.10) вытекает, что функции $(z(t), y(t), u(t))$ являются решением системы (1.1)–(1.3). Неравенства (4.22)–(4.25) вытекают из неравенств (4.6)–(4.8). Теорема доказана.

Если выполняются гипотезы $H(f)(2),(3)$ и $H(U)(2),(3)$, то будут иметь место неравенства

$$\|f(t,z,y)\| < c_f(t) + k_f(t)(\|y - y_0\| + \|z\|), \tag{4.26}$$

$$d_Y(\Theta_Y, U(t,z,y)) < c_U(t) + k_U(t)(\|y - y_0\| + \|z\|). \tag{4.27}$$

Пусть $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ — множество решений управляемой системы (1.1), (1.2) с ограничениями (1.3) и (1.6) на управление. Если выполняются гипотезы $H(f)(1)$–(3) и $H(U)(1)$–(3), то из замечания 3.1 и теоремы 3.2 вытекает, что множества $\mathscr{R}_U(z_0, y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ непустые.

Основное содержание данного раздела составляет

Теорема 4.3 (теорема релаксации). *Предположим, что выполняются гипотезы $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) и $H(g)$. Тогда для любого решения $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$ существует последовательность решений $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0, y_0)$, $k \geq 1$, такая, что*

$$z_k(\cdot) \to z_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.28}$$

$$y_k(\cdot) \to y_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.29}$$

$$u_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,Y), \tag{4.30}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s, y_*(s), z_*(s), u_*(s)) - g(s, y_k(s), z_k(s), u_k(s)))\, ds \right| = 0. \tag{4.31}$$

Доказательство. Пусть $(z_*(\cdot), y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0, y_0)$. Из (2.4) и гипотезы $H(U)(1)$ вытекает, что многозначное отображение $t \to U(t, y_*(t), z_*(t))$ измеримо с замкнутыми значениями. Обозначим через S_U множество измеримых селекторов отображения $U(t, y_*(t), z_*(t))$, являющихся элементами пространства $L^1(T,Y)$. Из (4.27) вытекает, что множество S_U непусто. Воспользовавшись гипотезами $H(g)(1),(2)$, получаем, что функция $t \to g(t, y_*(t), z_*(t), u_*(t))$ измерима. Согласно утверждению (3) леммы 2.4 измеримой является и функция $t \to g^{**}(t,\, y_*(t), z_*(t), u_*(t))$. Из леммы 2.3 вытекает, что отображение $t \to G(t, u_*(t), z_*(t))$ является измеримым с замкнутыми значениями в пространстве $\widetilde{Y}$. Воспользовавшись гипотезой $H(g)(3)$, получаем, что существует функция $\beta(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ такая, что

$$|g(t, y_*(t), z_*(t), u)| \leq \beta(t), \quad u \in U(t, y_*(t), z_*(t)). \tag{4.32}$$

Обозначим через S_G совокупность всех измеримых селекторов отображения $t \to G(t, y_*(t), z_*(t))$, которые являются элементами пространства $L^1(T, \widetilde{Y})$. Из определения (2.21) отображения $G(t,y,z)$, непустоты множества S_U и (4.32) следует, что множество S_G непусто.

Пусть $S_{\overline{\mathrm{co}}U}$ и $S_{\overline{\mathrm{co}}G}$ — совокупности элементов $u(\cdot) \in L^1(T,Y)$ и $\widetilde{u}(\cdot) \in L^1(T,\widetilde{Y})$, являющихся селекторами отображений $t \to \overline{\mathrm{co}}U(t,y_*(t),z_*(t))$ и $t \to \overline{\mathrm{co}}G(t,y_*(t),z_*(t))$. Из (2.21), (2.23) и (4.32) вытекает, что

$$|g_U^{**}(t,y_*(t),z_*(t),u_*(t))| \le \beta(t) \quad \text{п.в.}$$

Поэтому согласно (2.24)

$$(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) \in S_{\overline{\mathrm{co}}G}, \tag{4.33}$$

где

$$\lambda_*(t) = g_U^{**}(t,y_*(t),z_*(t),u_*(t)). \tag{4.34}$$

Как следует из теоремы 1.5 в [15],

$$S_{\overline{\mathrm{co}}G} = \overline{\mathrm{co}}S_G,$$

где замкнутая выпуклая оболочка $\overline{\mathrm{co}}$ в правой части этого равенства берется в пространстве $L^1(T,\widetilde{Y})$. Из этого равенства и (4.33) вытекает, что $(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) \in \overline{\mathrm{co}}S_G$. Следовательно, для любого $n \ge 1$ существует элемент $(u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot)) \in L^1(T,\widetilde{Y})$ такой, что

$$(u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot)) \in \mathrm{co}\, S_G, \tag{4.35}$$

$$\|(u_*(\cdot),\lambda_*(\cdot)) - (u_n(\cdot),\lambda_n(\cdot))\|_{L^1(T,\widetilde{Y})} \le 1/n. \tag{4.36}$$

Из этого неравенства, (2.19) и (4.34) получим

$$\|u_*(\cdot) - u_n(\cdot)\|_{L^1(T,Y)} \le 1/n, \tag{4.37}$$

$$\int\limits_T |g_U^{**}(s,y_*(s),z_*(s),u_*(s)) - \lambda_n(s)|\,ds \le 1/n. \tag{4.38}$$

Пусть

$$\widehat{v}_n(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + Eu_n(t). \tag{4.39}$$

Из (4.26) и гипотез $H(f)(1)$, $H(U)(1)$ вытекает, что функция $\widehat{v}_n(\cdot)$ является элементом пространства $L^1(T,H)$.

Положим

$$y(\widehat{v}_n)(t) = y_0 + \int\limits_0^t \widehat{v}_n(s)\,ds, \quad t \in T. \tag{4.40}$$

Пусть $z(\widehat{v}_n)(\cdot)$ — решение включения (3.14) при $\widehat{v}(t) = \widehat{v}_n(t)$. Так как

$$\dot{y}_*(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + Eu_*(t), \quad t \in T, \tag{4.41}$$

из (2.8), (4.37), (4.41), (4.33) имеем

$$\|z(\widehat{v}_n)(t) - z_*(t)\| \le \int\limits_0^t \|\dot{y}_*(s) - \widehat{v}_n(s)\|\,ds \le \|E\| \int\limits_0^t \|u_n(s) - u_*(s)\|\,ds \le \frac{\|E\|}{n}. \tag{4.42}$$

Аналогично из (3.39)–(4.41), (4.37) получаем

$$\|y_*(t) - y(\widehat{v}_n)(t)\| \le \frac{\|E\|}{n}, \quad t \in T. \tag{4.43}$$

Согласно (4.35) существует конечный набор функций

$$(\widetilde{u}_i(\cdot),\widetilde{\lambda}_i(\cdot)) \in S_G, \quad i = 1,\dots,k, \tag{4.44}$$

и чисел $\alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i = 1$, такой, что

$$u_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \widetilde{u}_i(\cdot), \quad \lambda_n(\cdot) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \widetilde{\lambda}_i(\cdot).$$

Пусть $F : T \to \widetilde{Y}$ — многозначное отображение

$$F(t) = \{(\widetilde{u}_i(t), \widetilde{\lambda}_i(t)),\ i = 1, \ldots, k\}, \quad t \in T.$$

Тогда

$$(u_n(t), \lambda_n(t)) \in \operatorname{co} F(t) \quad \text{п.в.}, \tag{4.45}$$

где символ co означает замкнутую выпуклую оболочку множества и $\operatorname{co} F(t)$ является выпуклым компактом в $\widetilde{Y}$. Из (4.44) вытекает, что функция

$$t \to \|F(t)\|_{\widetilde{Y}} = \max\{\|\widetilde{y}\|_{\widetilde{Y}};\ \widetilde{y} \in F(t)\}$$

является элементом пространства $L^1(T, R^+)$.

Пусть $n \geq 1$ фиксировано. Тогда из (4.45) и [16, следствия 4.5, 5.4] вытекает, что существует последовательность $(u_{m(n)}(\cdot),\ \lambda_{m(n)}(\cdot)) \in L^1(T, \widetilde{Y})$, $m(n) \geq 1$, такая, что

$$(u_{m(n)}(t), \lambda_{m(n)}(t)) \in F(t) \in G(t, y_*(t), z_*(t)), \quad m(n) \geq 1, \tag{4.46}$$

и

$$(u_{m(n)}(\cdot), \lambda_{m(n)}(\cdot)) \to (u_n(\cdot), \lambda_n(\cdot)) \tag{4.47}$$

в пространстве $|\omega|$-$L^1(T, \widetilde{Y})$.

Согласно (4.46), (4.47), (2.20), (2.21) получаем, что

$$u_{m(n)}(t) \in U(t, y_*(t), z_*(t)) \quad \text{п.в.}, \quad m(n) \geq 1,$$

$$\lambda_{m(n)}(t) = g(t, y_*(t), z_*(t), u_{m(n)}(t))$$

и

$$\sup_{t \in T} \left\| \int_0^t (u_{m(n)}(s) - u_n(s))\, ds \right\|_Y \to 0, \quad m(n) \geq 1, \tag{4.48}$$

$$\sup_{u \in T} \left| \int_0^t (\lambda_n(s) - g(s, y_*(s), z_*(s), u_{m(n)}(s))\, ds \right| \to 0, \quad m(n) \geq 1. \tag{4.49}$$

Из (4.48) вытекает, что последовательность $Eu_{m(n)}(\cdot)$ сходится к $Eu_n(\cdot)$ в пространстве $|\omega|$-$L^1(T, H)$.

Пусть

$$\widehat{v}_{m(n)}(t) = f(t, y_*(t), z_*(t)) + Eu_{m(n)}(t), \tag{4.50}$$

$$y(\widehat{v}_{m(n)})(t) = y_0 + \int_0^t \widehat{v}_{m(n)}(s)\, ds, \quad t \in T. \tag{4.51}$$

Из (4.39), (4.50) вытекает, что

$$\widehat{v}_{m(n)} \to \widehat{v}_n(\cdot) \text{ в } |\omega|\text{-}L^1(T, H), \quad m(n) \to \infty. \tag{4.52}$$

Аналогично из (4.51) и (4.52) получаем, что

$$y(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot) \to y(\widehat{v}_n)) \text{ в } C(T,H),\ m(n) \to \infty \tag{4.53}$$

Обозначим через $z(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot)$ решение включения (3.14) при $\widehat{v}(\cdot) = \widehat{v}_{m(n)})(\cdot)$.

Пусть $\operatorname{pr}_Y F(t)$ — проекция множества $F(t) \subset \widetilde{Y}$ на пространство Y. Тогда из (4.46) вытекает, что

$$u_{m(n)}(t) \subset \operatorname{pr}_Y F(t). \tag{4.54}$$

Так как значениями отображения $t \to \operatorname{pr} F(t)$ являются компактные множества в пространстве Y и $\|\operatorname{pr} F(t)\|$ — элемент пространства $L^1(T,R^+)$, согласно лемме 2.5 $u_{n(m)}(\cdot) \to u_n(\cdot)$ в ω-$L^1(T,Y)$. Поэтому последовательность $\widehat{v}_{n(m)}(\cdot)$ сходится к $\widehat{v}_n(\cdot)$ в пространстве ω-$L^1(T,Y)$.

Так как функция $t \to \|F(t)\|$ является элементом пространства $L^1(T,R^+)$, существует $\gamma(\cdot) \in L^1(T,R^+)$, при котором справедливо неравенство

$$\|u_{n(m)}(t)\| \le \gamma(t), \quad n(m) > 1.$$

Поэтому согласно (4.50) существует $\beta(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ такое, что

$$\|v_{n(m)}(t)\| \le \beta(\cdot), \quad n(m) \ge 1.$$

Воспользовавшись этим неравенством, относительной компактностью множества $\bigcup\limits_{n(m)\ge 1}^{\infty} \widehat{v}_{n(m)}(t)$ и леммой 2.1, получим, что

$$z(\widehat{v}_{m(n)})(\cdot) \to z(\widehat{v}_n)(\cdot) \quad \text{в } C(T,H). \tag{4.55}$$

Из (4.38)–(4.40), (4.42), (4.43), (4.48)–(4.55) вытекает, что существуют последовательности

$$\widetilde{u}_k(t) \in U(t,y_*(t),z_*(t)), \quad \widetilde{u}_k(\cdot) \in L^1(T,Y), \tag{4.56}$$

$$\widehat{v}_k(t) = f(t,y_*(t),z_*(t)) + E\widetilde{u}_k(t), \quad k \ge 1, \tag{4.57}$$

такие, что

$$\widehat{u}_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,Y), \tag{4.58}$$

$$\widehat{v}_k(\cdot) \to \widehat{v}_*(\cdot) \quad \text{в } |\omega|\text{-}L^1(T,H), \tag{4.59}$$

$$z(\widehat{v}_k)(\cdot) \to z_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.60}$$

$$y(\widehat{v}_k)(\cdot) \to y_*(\cdot) \quad \text{в } C(T,H), \tag{4.61}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int_0^t (g_U^{**}(s,y_*(s),z_*(s),u_*(s)) - g(s,y_*(s),z_*(s),\widetilde{u}_k(s)))\,ds \right| = 0. \tag{4.62}$$

Из гипотез $H(f)(2)$, $H(U)(2)$ и (4.55) получаем

$$\|f(t,y_*(t),z_*(t)) - f(t,y(\widehat{v}_k)(t),z(\widehat{v}_k)(t)\| \\ < k_f(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|), \tag{4.63}$$

$$d_Y(\widetilde{u}_k(t),U(t,y(\widehat{v}_k)(t),z(\widehat{v}_k)(t)) \\ < k_U(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|). \tag{4.64}$$

Положим

$$a_f^k(t) = k_f(t)(\|y(\widehat{v}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|). \tag{4.65}$$

$$a_U^k(t) = k_U(t)(\|\widehat{y}_k)(t) - y_*(t)\| + \|z_*(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\|). \tag{4.66}$$

Из (4.57), (4.63)–(4.66) и теоремы 4.2 вытекает существование решения $(z_k(\cdot), y_k(\cdot), u_k(\cdot))$ управляемой системы (1.1)–(1.3) такого, что

$$\|z_k(t) - z(\widehat{v}_k)(t)\| \le r_k(t), \tag{4.67}$$

$$\|\dot{y}_k(t) - \widehat{v}_k(t)\| \le \dot{r}_k(t), \tag{4.68}$$

$$\|y_k(t) - y(\widehat{v}_k)(t)\| \le r_k(t), \tag{4.69}$$

$$\|u_k(t) - \widetilde{u}_k(t)\| \le a_f^k(t) + 2k_U(t)r_k(t), \tag{4.70}$$

где $r_k(t)$ — решение дифференциального уравнения

$$\dot{r}_k(t) = a_k(t) + 2k(t)r_k(t), \quad r_k(0) = 0, \tag{4.71}$$

с

$$a_k(t) = a_f^k(t) + \|E\|a_U^k(t), \quad k(t) = k_f(t) + \|E\|k_U(t). \tag{4.72}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$r_k(t) = \int\limits_0^t e^{m(t)-m(s)} a_k(s)\, ds, \tag{4.73}$$

где $m(t)$ определяется равенством (3.7).

Из (4.72), (4.73), (4.64), (4.65), (4.60), (4.61) вытекает, что $a_k(\cdot) \to 0$ в $L^1(T, R^+), a_f^k(\cdot) \to 0$ в $L^1(T, R^+)$. Поэтому согласно (4.71), (4.73)

$$r_k(\cdot) \to 0 \text{ в } C(T, R^+), \quad \dot{r}_k(\cdot) \to 0 \text{ в } L^1(T, R^+). \tag{4.74}$$

Воспользовавшись (4.58)–(4.60), (4.67)–(4.70), (4.74), получим, что

$$z_k(\cdot) \to z_*(\cdot),\ y_k(\cdot) \to y_*(\cdot) \text{ в } C(T, H), \tag{4.75}$$

$$u_k(\cdot) \to u_*(\cdot) \text{ в } \omega\text{-}L^1(T, Y). \tag{4.76}$$

Из (4.70), (4.65), (4.74), (4.75) следует, что

$$u_k(\cdot) - \widetilde{u}_k(\cdot) \to \Theta_{L^1(T,Y)} \text{ в } L^1(T, Y), \tag{4.77}$$

где $\Theta_{L^1(T,Y)}$ — нулевой элемент пространства $L^1(T, Y)$.

Пусть $M > 0$ таково, что

$$\|z_*(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad \|z_k(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad k \ge 1,$$
$$\|y_*(\cdot)\|_{C(T,H)} \le M, \quad \|y_k(\cdot)\|_{C(T,Y)} \le M, \quad k \ge 1.$$

Воспользовавшись (2.7), получим

$$|g(t, y_*(t), z_*(t), \widetilde{u}_k(t)) - g(t, y_k(t), z_k(t), u_k(t))|$$
$$\le \omega_M(t, \|y_*(t) - y_k(t)\|, \|z_*(t) - z_k(t)\|) + k_M\|\widetilde{u}_k(t) - u_k(t)\|_Y.$$

Из этого неравенства, (4.75), (4.77) вытекает, что

$$\int\limits_T |g(t, y_*(t), z_*(t), \widetilde{u}_k(t)) - g(t, y_k(t), z_k(t), u_k(t))|\, dt \to 0, \quad k \to \infty.$$

Поэтому согласно (4.62)

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in T} \left| \int\limits_0^t (g_U^{**}(s, y_*(s), z_*(s), u_*(s)) - g(s, y_k(s), z_k(s), u_k(s)))\, ds \right| = 0. \tag{4.78}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из (4.75), (4.76), (4.78). Теорема доказана.

§ 5. Существование решения задачи оптимального управления

Лемма 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1)$–(3) *и* $H(g)$. *Тогда*

$$\inf_{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) = \inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)). \tag{5.1}$$

Доказательство. Из (4.31) вытекает, что для любого $(z_*(\cdot),\ y_*(\cdot), u_*(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ имеет место неравенство

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \le J^{**}(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot)).$$

В силу произвольности $(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot))$

$$\inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \le \inf_{\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)).$$

Неравенство, противоположное последнему, вытекает из включения $\mathscr{R}_U(z_0,y_0) \subset \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ и неравенства

$$g_U^{**}(t,z(t),y(t),u(t)) \le g(t,z(t),y(t),u(t)) \quad \text{п.в.},$$

справедливого для $(z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0,y_0)$. Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются гипотезы* $H(A)(1)$–(3), $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1),(2),(3^*)$ *и значениями многозначного отображения* $U : T\times H\times H \rightrightarrows Y$ *являются компактные множества. Тогда множество* $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ *является компактом в пространстве* $C(T,H)\times C(T,H)\times \omega\text{-}L^1(T,Y)$.

Доказательство. Непустота множеств $\mathscr{R}_U(z_0,y_0)$ и $\mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0)$ вытекает из теоремы 3.2 и замечания 3.1.

Пусть

$$Z = \{z(\cdot)\in C(T,H)\}, \quad X = \{y(\cdot)\in C(T,H)\}, \tag{5.2}$$

$$W = \{u(\cdot)\in L^1(T,Y)\}, \quad (z(\cdot),y(\cdot),u(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\mathrm{co}}U}(z_0,y_0). \tag{5.3}$$

Положим

$$x(t) = \int_0^t \dot y(s)\,ds, \quad y(\cdot)\in X. \tag{5.4}$$

Из (2.2), (2.3), (2.5), (2.6), (1.2), (1.3) и (5.4)

$$\|\dot x(t)\| \le c(t) + k(t)(\|z(t)\| + \|x(t)\|), \tag{5.5}$$

где

$$c(t) = c_f(t) + \|E\|c_U(t), \quad k(t) = k_U(t) + \|E\|k_U(t).$$

Из (5.5) и неравенства Беллмана — Гроноулла вытекает неравенство

$$\|x(t)\| \le \int_0^t (c(s)+k(s)z(s))\,ds \exp\int_0^t k(s)\,ds.$$

Из этого неравенства и (5.5) получим

$$\|\dot x(t)\| \le c(t) + k(t)\|z(t)\| + M_1 k(t)\int_0^t [c(s)+k(s)z(s)]\,ds, \tag{5.6}$$

где $M_1 = \exp \int\limits_T k(s)\,ds$.

Воспользовавшись этим неравенством, (1.1), (5.4), (2.8), получим

$$\|z(t)\| \le M_2 + \int \left[k(s)\|z(s)\| + M_1 k(s) \int\limits_0^s k(\tau)\|z(\tau)\|\,d\tau \right] ds,$$

где

$$M_2 = \sup_{t\in T} \|z(\Theta)(t)\| + \int\limits_T c(s)\,ds + M_1 \int\limits_T k(s) \int\limits_T c(\tau)\,d\tau ds. \tag{5.7}$$

Из (5.7) и теоремы 2.1 в [17] вытекает неравенство

$$\|z(t)\| \le M_2 \exp \int\limits_0^t \left[k(s) + M_1 k(s) \int\limits_0^s k(\tau)\,d\tau \right] ds.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\|z(t)\| \le M, \quad t\in T,\ z(\cdot)\in Z, \tag{5.8}$$

при некотором $M > 0$.

Воспользовавшись этим неравенством, (5.4) и (5.6), получим

$$\|\dot y(t)\| \le c(t) + k(t)M + M_1 k(t) \int\limits_0^t (c(s) + k(s)M)\,ds, \quad t\in T,\ y(\cdot)\in X. \tag{5.9}$$

Из этого неравенства, (5.8), гипотез $H(A)(2),(3)$ и теоремы Арцела — Асколи получим, что множество $Z \subset C(T,H)$ относительно компактно.

Пусть

$$\widetilde{Z}(t) = \overline{\mathrm{co}}\Big\{\bigcup z(t);\ z(\cdot)\in Z\Big\}, \quad t\in T. \tag{5.10}$$

Тогда $\widetilde{Z} : T \rightrightarrows H$ является непрерывным в метрике Хаусдорфа многозначным отображением с компактными выпуклыми значениями.

Пусть

$$F(t,w) = f(t,\widetilde{Z}(t),w), \quad t\in T,\ w\in H, \tag{5.11}$$

$$\widetilde{U}(t,w) = U(t,\widetilde{Z}(t),w), \quad t\in T,\ w\in H. \tag{5.12}$$

Тогда $F : T\times H \rightrightarrows H$, $\widetilde{U} : T\times H \rightrightarrows Y$ являются отображениями с компактными значениями.

Из гипотез $H(f)(1)$–(3), $H(U)(1),(2),(3^*)$, непрерывности многозначного отображения $\widetilde{Z} : T \rightrightarrows H$ с выпуклыми компактными значениями вытекает, что отображения F и $\widetilde{U}$ обладают свойствами

$H(F)$:

1) отображение $t \to F(t,w)$ измеримо;

2) $\mathrm{haus}(F(t,w_1),F(t,w_2)) \le k_f(t)\|w_1 - w_2\|$;

3) $\|F(t,w)\| \le c_F(t) + k_f(t)\|w\|$,

где $c_F(t) = c_f(t) + k_f(t)\|y_0\| + k_f(t)M$;

$H(\widetilde{U})$:

1) отображение $t \to \widetilde{U}(t,w)$ измеримо;

2) $\mathrm{haus}_Y(\widetilde{U}(t,y_1,w_1),\widetilde{U}(t,w_2)) \le k_U(t)\|w_1 - w_2\|$;

3) $\|\widetilde{U}(t,w)\| \le c_{\widetilde{U}}(t) + k_U(t)\|w\|$,
где $c_{\widetilde{U}}(t) = c_U(t) + k_U(t)\|y_0\| + k_U(t)M$.

Отметим, что свойствами $H(F), H(\widetilde{U})$ обладают и многозначные отображения $\overline{\text{co}}F(t,w)$ и $\overline{\text{co}}\widetilde{U}(t,w)$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{v}(t) \in \overline{\text{co}}F(t,v(t)) + E\overline{\text{co}}\widetilde{U}(t,v(t)), \quad v(0) = y_0. \tag{5.13}$$

Пусть $\mathscr{R}(y_0)$ — множество решений включения (5.13). Из свойств $H(F)$ и $H(\widetilde{U})$ и следствия 3.1 в [18, с. 161] вытекает, что множество $\mathscr{R}(y_0)$ является компактным подмножеством пространства $C(T,H)$. Так как $X \subset \mathscr{R}(y_0)$, то X является относительно компактным подмножеством пространства $C(T,H)$. Поскольку для любого $u(\cdot) \in W$ имеет место включение

$$u(t) \in \left\{\bigcup \overline{\text{co}}\widetilde{U}(t,v(t);\ v(\cdot) \in \mathscr{R}(y_0)\right\} = Q(t) \tag{5.14}$$

и значениями многозначного отображения $Q : T \rightrightarrows Y$ являются компакты, из свойства $H(\widetilde{U})$ 3) следует, что W — относительно компактное подмножество пространства ω-$L^1(T,Y)$. Так как

$$\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0) \subset Z \times X \times W,$$

множество $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$ является относительно компактным подмножеством пространства $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$.

Докажем компактность множества $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$ в $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Для этого достаточно доказать замкнутость множества $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$ в пространстве $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Так как любой компакт в ω-$L^1(T,Y)$ метризуем, достаточно доказать секвенциальную замкнутость множества $\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)$.

Пусть последовательность $(z_n(\cdot), y_n(\cdot), u_n(\cdot)) \in \mathscr{R}_{\overline{\text{co}}F}(z_0,y_0)$, $n \ge 1$, сходится к $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot))$ в $C(T,H) \times C(T,H) \times \omega$-$L^1(T,Y)$. Тогда из (1.1) и гипотез $H(f)$ вытекает, что имеет место равенство

$$\dot{y}(t) = f(t,z(t),y(t)) + Eu(t). \tag{5.15}$$

Так как значения многозначного отображения

$$\phi(t) = \left\{\bigcup (\overline{\text{co}}F(t,v(t)) + E\overline{\text{co}}\widetilde{U}(t,v(t)); v(\cdot) \in \mathscr{R}(y_0)\right\}$$

суть компакты, из включения $\dot{y}_n(t) \in \phi(t)$ и гипотез $H(f)(2),(3)$, $H(U)(2),(3)$ и леммы 2.1 вытекает, что

$$\dot{z}(t) \in A(t)z(t) + \dot{y}(t) \quad \text{п.в.} \tag{5.16}$$

Из включения

$$u_n(t) \in U(t,z_n(t),y_n(t)) \quad \text{п.в.},$$

гипотезы $H(U)(2)$ и теоремы Мазура для слабо сходящихся последовательностей вытекает включение

$$u(t) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\text{co}} \left(\bigcup_{k \ge n}^{\infty} \overline{\text{co}}U(t,z_k(t),y_k(t)\right) \subset \overline{\text{co}}U(t,z(t),y(t)). \tag{5.17}$$

Из (5.15)–(5.17) следует, что $(z(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)) \in \mathscr{R}(z_0,y_0)$. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть выполняются предположения теоремы* 5.1 *и гипотезы* $H(g)$. *Тогда проблема* (RP) *имеет решение и*

$$\min_{\mathscr{R}_{\overline{\text{co}}U}(z_0,y_0)} J^{**}(z,y,u) = \inf_{\mathscr{R}_U(z_0,y_0)} J(z,y,u).$$

Для любого решения $(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot))$ *проблемы* $(\mathscr{R}P)$ *существует минимизирующая последовательность* $(z_k(\cdot),y_k(\cdot),u_k(\cdot)) \in \mathscr{R}_U(z_0,y_0)$, $k \geq 1$, *проблемы* (P) *такая, что справедливы соотношения* (4.28), (4.29), (4.31) *и* $u_k(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *в* ω-$L^1(T,Y)$. *Обратно, если* $(z_k(\cdot),y_k(\cdot),u_k(\cdot))$, $k \geq 1$, *— минимизирующая последовательность проблемы* (P), *то существуют подпоследовательность* $(z_{k_n}(\cdot), y_{k_n}(\cdot),u_{k_n}(\cdot))$, $n \geq 1$, *последовательности* $(z_k(\cdot),\ y_k(\cdot),u_k(\cdot))$, $k \geq 1$, *и решение* $(z_*(\cdot),y_*(\cdot),u_*(\cdot))$ *проблемы* (RP) *такие, что справедливы соотношения* (4.28), (4.29), (4.31), *в которых последовательность* $(z_k(\cdot),y_k(\cdot),u_k(\cdot))$ *заменена последовательностью* $(z_{k_n}(\cdot),y_{k_n}(\cdot),\ u_{k_n}\ (\cdot))$ *и* $u_n(\cdot) \to u_*(\cdot)$ *в* ω-$L^1(T,Y)$.

Теорема 5.2 является аналогом теоремы 5.3 в [9], доказанной для конечномерных пространств H и Y. Поскольку гипотезы $H(g)$ в [9] и в данной работе совпадают, доказательство теоремы 5.2 дословно повторяет доказательство теоремы 5.3 в [9]. При доказательстве следует использовать теорему 5.1 и лемму 2.5 вместо теоремы 5.2 и леммы 2.1 из [9]. Поэтому доказательство теоремы 5.2 опускаем.

§ 6. Конкретизация предположений $\boldsymbol{H(A)}$

Наиболее общие результаты, при которых справедливы гипотезы $H(A)(1),(2)$, сформулированы в [19]. Приведем некоторые из них.

Пусть $A(t) : D(A(t)) \subset H$, $t \in T$, — семейство максимально монотонных операторов и $\text{gr}(t)$, $t \in T$, — график оператора $A(t)$:

$$\text{gr}(A(t)) = \{(x,y) \in H \times H;\ x \in D(A(t)),\ y \in A(t)x\}.$$

График $\text{gr}(A(t))$ является замкнутым подмножеством пространства $H \times H$ [1]. Так как значениями максимально монотонного оператора являются замкнутые выпуклые множества [1], для любого $x \in D(A(t))$ существует элемент $A^0(t)x \in A(t)x$ минимальной нормы, т. е. $\|A^0(t)x\| = \min\{\|y\|,\, y \in A(t)x\}$. Если существуют функция $m(\cdot) \in L^2(T,R^+)$ и неубывающая функция $l : R^+ \to R^+$ такие, что

$$\|A^0(t)x\| \leq m(t)(1 + l(\|x\|)), \quad t \in T,\ x \in D(A(t)), \tag{6.1}$$

то $D(A(t))$, $t \in T$, является замкнутым выпуклым множеством [19]. Поэтому мы можем рассматривать процесс выметания [20]

$$-\dot{x}(t) \in \mathscr{N}(D(A(t))x(t)) + \varphi(t), \tag{6.2}$$

$$x(0) = x_0 \in D(A(t)),\ \varphi(\cdot) \in L^1(T,H),$$

где $\mathscr{N}(D(A(t))x(t))$ — нормальный конус в смысле выпуклого анализа множества $D(A(t))$ в точке $x(t) \in D(A(t))$.

Пусть $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T,R^+)$ и

$$S^1(r_{\mathscr{N}}) = \{\varphi(\cdot) \in L^1(T,H);\ \|\varphi(t)\| \leq r_{\mathscr{N}}(t) \text{ п.в.}\} \tag{6.3}$$

Под решением процесса выметания (6.2) понимается абсолютно непрерывная функция $x(\varphi) : T \to H$, $x(\varphi)(0) = x_0$, $x(\varphi)(t) \in D(A(t))$, $t \in T$, производная $\dot{x}(\varphi)(t)$ которой удовлетворяет включению

$$-\dot{x}(\varphi)(t) \in \mathscr{N}(D(A(t))x(\varphi))(t) + \varphi(t) \quad \text{п.в.}$$

Непосредственно из теоремы 4.3 в [19] вытекает

Теорема 6.1. *Пусть выполняются предположения* $\Pi(A)$*:*

(1) *отображение* $t \to \operatorname{gr} A(t)$ *измеримо;*

(2) *выполняется неравенство* (6.1).

Если для любого $\varphi(\cdot) \in L^1(T, H)$ *процесс выметания* (6.2) *имеет решение, то имеет место гипотеза* $H(A)(1)$.

Если для любого $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *множество решений*

$$\{x(\varphi)(\cdot);\ \varphi(\cdot) \in S^1(r_{\mathscr{N}})\} \tag{6.4}$$

процесса выметания (6.2) *равностепенно непрерывно, то справедлива гипотеза* $H(A)(2)$.

Условия, при которых процесс выметания (6.2) имеет решение $x(\varphi)(\cdot)$ и множество (6.4) равностепенно непрерывно, сформулированы в теореме 3.3 из [19]. Приведем наиболее распространенное условие, при котором множество (6.4) равностепенно непрерывно.

Лемма 6.1 [19]. *Предположим, что выполняются предположения* $\Pi(A)$ *и существует абсолютно непрерывная функция* $b : T \to R$ *такая, что*

$$|d(y, D(A(t))) - d(y, A(s))| \le |b(t) - b(s)|,$$

$y \in H$, $s, t \in T$. *Тогда для любого* $\varphi(\cdot) \in L^1(T, H)$ *процесс выметания* (6.2) *имеет единственное решение* $x(\varphi)(\cdot)$, $x(\varphi)(0) = x_0$, *и для любого* $r_{\mathscr{N}}(\cdot) \in L^1(T, R^+)$ *множество* (6.4) *равностепенно непрерывно.*

Более общие предположения, при которых справедлива лемма 6.1, сформулированы в теореме 3.3 из [19]. Другие условия, при которых процесс выметания (6.2) имеет решение и множество (6.4) равностепенно, можно найти в [21].

Приведем еще условия, при которых справедливы гипотезы $H(A)(1), (2)$. Они сформулированы в теореме 5.1 из [19].

Наиболее часто в силу простоты используются следующие условия.

Лемма 6.2. *Пусть выполняется неравенство* (6.1) *и существует абсолютно непрерывная функция* $b : T \to R$ *такая, что для любых* $s, t \in T$ *выполняется неравенство*

$$\operatorname{dis}(A(s), A(t)) \le |b(t) - b(s)|. \tag{6.5}$$

Тогда справедливы гипотезы $H(A)(1), (2)$.

В неравенстве (6.5) $\operatorname{dis}(A(s), A(t))$ — это псевдорасстояние по Владимирову [22] между максимально монотонными операторами,

$$\operatorname{dis}(A(s), A(t)) = \sup\left\{ \frac{\langle x_1 - x_2, y_2 - y_1\rangle}{1 + \|y_1\| + \|y_2\|};\ x_1 \in D(A(s)),\right.$$
$$\left. y_1 \in A(s),\ x_2 \in D(A(t)),\ y_2 \in A(t)x_2 \right\}.$$

Лемма вытекает из теоремы 5.1 в [19].

Что касается гипотезы $H(A)(3)$, то она автоматически выполняется в конечномерном пространстве.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Brezis H.* Operateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractious dans les espaces de Hilbert. North-Holland, Amsterdam; London: Elsevier, 1973.
2. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
3. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. *Alexiewicz A.* Linear functionals on Denjoy integrable functions // Colloq. Math. 1948. V. 1. P. 289–293.
5. *Толстоногов А. А.* Релаксация в невыпуклых задачах оптимального управления, описываемых эволюционными уравнениями первого порядка // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 11. С. 135–160.
6. *Толстоногов А. А.* Теорема Боголюбова при ограничениях, порожденных эволюционной управляемой системой второго порядка // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, № 5. С. 177–206.
7. *Толстоногов А. А.* Вариационная устойчивость задач оптимального управления с субдифференциальными операторами // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 4. С. 123–160.
8. *Tolstonogov A. A.* Relaxation in nonconvex optimal control problems containing the difference of two subdifferentials // SIAM J. Contr. Optim. 2016. V. 54, N 1. P. 175–197.
9. *Толстоногов А. А.* Теорема Н. Н. Боголюбова для управляемой системы, связанной с вариационным неравенством // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 6. С. 165–196.
10. *Brokate M., Krejci P.* Optimal control of ODE systems involving a rate independent variational inequality // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2013. V. 18, N 2. P. 331–348.
11. *Adam L., Outrata J.* On optimal control of a sweeping process coupled with an ordinary differential equation // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. 2014. V. 19, N 9. P. 2709–2738.
12. *Bouhali N., Azzam-Laouir D., Monteiro M.M.D.P.* Optimal control of an evolution problem involving time-dependent maximal monotone operators // J. Optimiz. Theory Appl. 2022. V. 194. P. 59–91.
13. *Himmelberg C. J.* Measurable relations // Fundam. Math. 1975. V. 87. P. 53–72.
14. *Tolstonogov A. A.* Upper semicontinuous convex-valued selectors of a Nemytskii operator with nonconvex values and evolution inclusions with maximal monotone operators // J. Math. Anal. Appl. 2023. V. 526. P. 127–197.
15. *Hiai F., Umegaki H.* Integrals, conditional expectations, and martingales of multivalued functions // J. Multivariate Anal. 1977. V. 7, N 1. P. 149–182.
16. *Tolstonogov A. A.* Existence and relaxation theorems for extreme continuous selectors of multifunctions with decomposable values // Topology Appl. 2008. V. 155, N 8. P. 898–905.
17. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
18. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. Новосибирск: Наука, 1986.
19. *Толстоногов А. А.* Теоремы сравнения для эволюционных включений с максимально монотонными операторами. L^2-теория // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 6. С. 110–135.
20. *Moreau J. J.* Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space // J. Differ. Equ. 1977. V. 26. P. 347–374.
21. *Толстоногов А. А.* Расстояния между максимально монотонными операторами // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 815–829.
22. *Vladimirov A. A.* Nonstationary dissipative evolution equations in a Hilbert space // Nonlinear Analysis, Theory, Meth. Appl. 1991. V. 17, N 6. P. 499–518.

Поступила в редакцию 25 декабря 2024 г.
После доработки 25 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Толстоногов Александр Александрович (ORCID 0000-0002-4758-2197)
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
aatol@icc.ru, alexander.tolstonogov@gmail.com

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 517.958

РАЗРУШЕНИЕ РЕШЕНИЯ И ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ, МОДЕЛИРУЮЩЕГО РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИИ В НЕЛИНЕЙНО–УПРУГОМ СТЕРЖНЕ

Х. Г. Умаров

Аннотация. Для нелинейного дисперсионно-диссипативного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа, моделирующего распространение продольных волн деформации в нелинейно-упругом стержне, исследуется задача Коши в пространстве непрерывных функций, заданных на всей числовой оси, для которых существуют пределы на бесконечности. Рассмотрены условия существования глобального решения и разрушения решения задачи Коши на конечном временном отрезке.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.213

Ключевые слова: продольные волны деформации в нелинейно-упругом стержне, нелинейное уравнение соболевского типа, глобальное решение, разрушение решения.

Введение

Продольные волны деформации в нелинейно-упругом стержне [1, гл. 4, § 4.3.2, (4.72)] моделируются нелинейным дифференциальным уравнением соболевского типа [2]

$$v_{tt} - \alpha_1 v_{xx} - \alpha_2 (v^2)_{xx} - \alpha_3 v_{ttxx} + \alpha_4 v_{xxxx} = k_d(\beta_1 v_x + \beta_2 (v^2)_x + \beta_3 v_{xxx}), \quad (0.1)$$

где $(t, x) \in R^1_+ \times R^1$, $R^1_+ =]0, +\infty[$, $R^1 =]\infty, +\infty[$, $v_s = \partial_s v = \partial v / \partial s$ — символы дифференцирования по переменной s, коэффициенты α_i, β_j, k_d — постоянные величины.

В настоящей статье уравнение (0.1) рассматривается в предположении, что коэффициенты α_1 и α_3, зависящие [1, гл. 4, § 4.3.2] от упругих свойств материала стержня и параметров внешней среды, положительные:

$$\alpha_1, \alpha_3 > 0. \quad (0.2)$$

Остальные требования к коэффициентам уравнения (0.1) формулируются в ходе его исследования.

Предполагаем, что стержень бесконечный. Такая идеализация допустима [3], если параметры граничного закрепления таковы, что падающие на него возмущения не отражаются, т. е. предполагается существование согласованных концевых гасителей различных видов колебаний, не дающих отраженных возмущений в системе.

Задача Коши для уравнения (0.1) исследуется в пространстве $C[R^1]$ [4, гл. VIII, § 1] непрерывных функций $g = g(x)$, для которых существуют оба предела при $x \to \pm\infty$ и норма которого $\|g\|_C = \sup\limits_{x \in R^1} |g(x)|$ в предположении, что начальные функции:

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in R^1, \tag{0.3}$$

и искомое классическое решение $v = v(t,x)$, $(t,x) \in \overline{R}^1_+ \times R^1$, $\overline{R}^1_+ = [0, +\infty[$, вместе с частными производными, входящими в уравнение (0.1), для всех значений временной переменной t по переменной x принадлежат $C[R^1]$. Под классическим решением понимается достаточно гладкая функция, имеющая все непрерывные производные нужного порядка и удовлетворяющая уравнению в каждой точке области его задания.

Через $C^{(k)}[R^1] = \{g(x) \in C[R^1] : g'(x), \dots, g^{(k)}(x) \in C[R^1]\}$, $k = 1, 2, \dots$, обозначаются подмножества дифференцируемых функций в $C[R^1]$.

Исследование задачи Коши (0.1), (0.3) проведем по следующему плану: убедимся, что постановка задачи Коши (0.1), (0.3) корректна и локальное по времени классическое решение ее существует. С этой целью для соответствующего (0.1) линейного однородного уравнения найдем решение задачи Коши. Далее для задачи Коши (0.1), (0.3) найдем временной отрезок $[0, t_1]$ существования и единственности классического решения и оценим норму в $C[R^1]$ этого локального решения. Затем найдем достаточные условия продолжения локального решения до глобального ($t \geq 0$) и разрушения на конечном временном отрезке решения задачи Коши (0.1), (0.3).

1. Задача Коши для линейного однородного уравнения

Соответствующее (0.1) линейное уравнение запишем в виде

$$\big(I - \alpha_3 \partial_x^2\big) v_{tt} = -\alpha_4 v_{xxxx} + k_d \beta_3 v_{xxx} + \alpha_1 v_{xx} + k_d \beta_1 v_x. \tag{1.1}$$

Напомним [4, гл. VIII, § 1; 5, § 2], что в пространстве $C[R^1]$ дифференциальный оператор ∂_x, с областью определения $D(\partial_x) = C^{(1)}[R^1]$ порождает сжимающую сильно непрерывную группу

$$U(\tau; \partial_x) g(x) = g(x + \tau), \quad \tau \in R^1, \ \forall g(x) \in C[R^1],$$

левых сдвигов, а оператор ∂_x^2, $D\big(\partial_x^2\big) = C^{(2)}[R^1]$, является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы

$$U\big(t; \partial_x^2\big) g(x) = \big(2\sqrt{\pi t}\big)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2/(4t)} g(x + \xi)\, d\xi, \quad t \in \overline{R}^1_+, \forall g(x) \in C[R^1],$$

причем для резольвент $(\lambda I - \partial_x)^{-1}$, $(\lambda I - \partial_x^2)^{-1}$, где I — тождественный оператор, справедливы оценки

$$\|(\lambda I - \partial_x)^{-1}\|, \|(\lambda I - \partial_x^2)^{-1}\| \leq 1/\lambda$$

при $\lambda > 0$.

Полагая, что частные производные $v_{xx}(t,x)$, $v_{txx}(t,x)$ решения уравнения (1.1) непрерывны при $t \geq 0$, произведем замену

$$w(t,x) = \bigl(I - \alpha_3 \partial_x^2\bigr) v(t,x). \tag{1.2}$$

Из замены (1.2) при условии, что $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^{(2)}[R^1]$, можно единственным образом определить начальные значения:

$$w|_{t=0} = w_0(x) = \varphi(x) - \alpha_3 \varphi''(x), \quad w_t|_{t=0} = w_1(x) = \psi(x) - \alpha_3 \psi''(x) \tag{1.3}$$

и, используя принадлежность положительной полуоси $\lambda > 0$ резольвентному множеству оператора ∂_x^2, выразить решение $v(t,x)$ уравнения (1.1) через новую неизвестную функцию $w(t,x)$:

$$v(t,x) = \bigl(I - \alpha_3 \partial_x^2\bigr)^{-1} w(t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_3}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|r|/\sqrt{\alpha_3}} w(t, x+r)\, dr. \tag{1.4}$$

В результате замены (1.2) в предположении, что $\alpha_4 > 0$, получим эквивалентное (1.1) интегро-дифференциальное уравнение

$$w_{tt} = Kw, \tag{1.5}$$

где

$$K = A^2 + B + c_3 I,$$

здесь

$$A = c_1 \partial_x - c_2 I, \quad D(A) = C^{(1)}[R^1],$$

— неограниченный,

$$B = c_4 \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}} I - \partial_x \right)^{-1} + c_5 \left(\frac{1}{\alpha_3} I - \partial_x^2 \right)^{-1}, \quad D(B) = C[R^1],$$

— ограниченный линейные операторы, действующие в пространстве $C[R^1]$, в которых параметры c_n вычисляются по формулам

$$c_1 = \sqrt{\frac{\alpha_4}{\alpha_3}}, \quad c_2 = \frac{k_d \beta_3}{2\sqrt{\alpha_3 \alpha_4}}, \quad c_3 = \frac{4\alpha_4(\alpha_4 - \alpha_1\alpha_3) - \alpha_3 k_d^2 \beta_3^2}{4\alpha_3^2 \alpha_4},$$

$$c_4 = k_d \frac{\beta_3 + \alpha_3 \beta_1}{\alpha_3^2}, \quad c_5 = \frac{1}{\alpha_3^2} \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} - k_d \frac{\beta_3 + \alpha_3 \beta_1}{\sqrt{\alpha_3}} \right).$$

Уравнение (1.5) перепишем в виде абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения в пространстве $C[R^1]$:

$$W_{tt} = K \cdot W, \tag{1.6}$$

где $W = W(t)\colon t \to w(t,x)$ — искомая вектор-функция, определенная для $t \geq 0$ и принимающая значения в $C[R^1]$.

Начальные условия (1.3) для уравнения (1.6) примут вид

$$W|_{t=0} = W_0, \quad W_t|_{t=0} = W_1, \tag{1.7}$$

где $W_0 = w_0(x)$ и $W_1 = w_1(x)$ — элементы пространства $C[R^1]$.

Абстрактная задача Коши (1.6), (1.7) равномерно корректна [5, § 1.4] только тогда, когда оператор K является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; K)$, $\tau \in R^1$.

Проверим, что операторный коэффициент K уравнения (1.6) действительно порождает косинус оператор-функцию, и найдем явный вид $C(\tau; K)$, $\tau \in R^1$, и оценку нормы $C(t; K)$, $t \in \overline{R}^1_+$, для чего предварительно исследуем компоненты оператора $K = A^2 + c_3 I + B$.

Оператор $A = c_1\partial_x - c_2 I$, полученный возмущением производящего оператора ∂_x группы левых сдвигов, порождает [5, § 8.1] в $C[R^1]$ сильно непрерывную группу

$$U(\tau; A)g(x) = e^{-c_2\tau}U(\tau; c_1\partial_x)g(x) = e^{-c_2\tau}g(x + c_1\tau), \quad \tau \in R^1,$$

а следовательно, квадрат этого оператора порождает [5, § 1.5] в $C[R^1]$ сильно непрерывную косинус оператор-функцию, для которой справедливы представление

$$C(\tau; A^2)g(x) = \frac{1}{2}[U(\tau; A) + U(-\tau; A)]g(x)$$
$$= \frac{1}{2}[e^{-c_2\tau}g(x + c_1\tau) + e^{c_2\tau}g(x - c_1\tau)], \quad \tau \in R^1,$$

и оценка нормы $\|C(t; A^2)\| \le \operatorname{ch}(c_2 t)$, $t \in \overline{R}^1_+$.

Предположим, что $c_3 > 0$. Тогда, учитывая условие $\alpha_4 > 0$, придем к неравенству $4\alpha_4^2 - 4\alpha_1\alpha_3\alpha_4 - \alpha_3 k_d^2\beta_3^2 > 0$, откуда следует требование к коэффициентам уравнения (0.1):

$$2\alpha_4 > \alpha_1\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_3 k_d^2\beta_3^2}. \qquad (1.8)$$

Возмущенный оператор $A^2 + c_3 I$ порождает [5, § 8.2] сильно непрерывную косинус оператор-функцию, для которой на произвольном элементе $g(x) \in C[R^1]$ справедливо представление

$$C(\tau; A^2 + c_3 I)g(x)$$
$$= C(\tau; A^2)g(x) + \tau\sqrt{c_3}\int_0^\tau I_1(\sqrt{(\tau^2 - s^2)c_3})C(s; A^2)g(x)\frac{ds}{\sqrt{\tau^2 - s^2}}$$
$$= \frac{1}{2}[e^{-c_2\tau}g(x + c_1\tau) + e^{c_2\tau}g(x - c_1\tau)]$$
$$+ \frac{\tau\sqrt{c_3}}{2}\int_0^\tau I_1(\sqrt{(\tau^2 - s^2)c_3})[e^{-c_2 s}g(x + c_1 s) + e^{c_2 s}g(x - c_1 s)]\frac{ds}{\sqrt{\tau^2 - s^2}},$$

где

$$I_1(2\sqrt{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1/2}}{n!(n+1)!}$$

— модифицированная функция Бесселя, и имеет место оценка нормы

$$\|C(t; A^2 + c_3 I)\| \le \operatorname{ch}(c_6 t)\ , \quad c_6 = \sqrt{c_2^2 + c_3}, \quad t \in \overline{R}^1_+. \qquad (1.9)$$

Возмущение ограниченным оператором B сохраняет способность оператора $A^2 + c_3 I$ порождать косинус оператор-функцию [5, § 8.2], поэтому оператор

$K = A^2 + c_3 I + B$ действительно является производящим оператором сильно непрерывной косинус оператор-функции $C(\tau; K)$ и, значит, абстрактная задача Коши (1.6), (1.7) равномерно корректна.

Чтобы найти явный вид оператор-функции $C(\tau; K)$ и оценку ее нормы, продолжим исследование компонентов оператора K.

Любой ограниченный оператор $\mathscr{B}$, $D(\mathscr{B}) = C[R^1]$, порождает [5, § 4.2] косинус оператор-функцию, представленную степенным рядом

$$C(\tau; \mathscr{B})g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tau^{2n}}{(2n)!} \mathscr{B}^n g(x), \quad g(x) \in C[R^1], \tag{1.10}$$

равномерно сходящимся по τ на каждом конечном отрезке из R^1.

Применяя формулу [4, гл. VIII, § 1, лемма 12]

$$(\lambda I - \mathscr{A})^{-n} g(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^{+\infty} s^{n-1} e^{-\lambda s} U(s; \mathscr{A}) g(x)\, ds, \quad \lambda > \omega,\ n \geq 1,$$

выражающую степени резольвенты производящего оператора $\mathscr{A}$ полугруппы $U(t; \mathscr{A})$, тип которой равен ω, и используя разложение (1.10), для косинус оператор-функций, порождаемых ограниченными операторами

$$B_1 = c_4((1/\sqrt{\alpha_3})I - \partial_x)^{-1},\ B_2 = c_5((1/\alpha_3)I - \partial_x^2)^{-1},\ D(B_1) = D(B_2) = C[R^1],$$

выводим формулы

$$C(\tau; B_1)g(x) = g(x) + \frac{c_4\tau^2}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s/\sqrt{\alpha_3}}\, {}_0F_2\left(; \frac{3}{2}, 2; \frac{c_4\tau^2}{4} s\right) g(x+s)\, ds, \tag{1.11}$$

где

$${}_0F_2\left(; \frac{3}{2}, 2; \frac{z}{4}\right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!(2n+2)!}$$

— обобщенная гипергеометрическая функция, и

$$C(\tau; B_2)g(x) = g(x) + \frac{\tau^2 c_5}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(c_5\tau^2, \xi) g(x+\xi)\, d\xi, \tag{1.12}$$

здесь

$$G(\eta, \xi) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s/\sqrt{\alpha_3} - \xi^2/(4s)}\, {}_0F_2\left(; \frac{3}{2}, 2; \frac{c_5\tau^2}{4} s\right) \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Для косинус оператор-функций (1.11) и (1.12) имеют место оценки норм $\|C(t; B_1)\| \leq \operatorname{ch}(tc_7)$, $\|C(t; B_2)\| \leq \operatorname{ch}(tc_8)$, $t \in \overline{R}^1_+$, где $c_7^2 = \sqrt{\alpha_3}|c_4|$ и $c_8^2 = \alpha_3|c_5|$.

Рассматривая оператор $B = B_1 + B_2$ как результат возмущения оператора B_1 оператором B_2, получим представление [5, § 8.2] сильно непрерывной косинус оператор-функции, порождаемой оператором B:

$$C(\tau; B)g(x) = C(\tau; B_1)g(x) + \frac{\tau^2}{2} \int\limits_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2}; B_1) C(\tau s; B_2) g(x)\, ds,$$

где

$$j_1(t;B_1)g(x) = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}C(tr;B_1)g(x)\,dr, \quad g(x)\in C[R^1], \tag{1.13}$$

при этом $\|C(t;B)\| \le \operatorname{ch}(tc_9)$, $c_9^2 = \sqrt{\alpha_3}|c_4| + \alpha_3|c_5|$, $t \in \overline{R}^1_+$.

Приступим к построению $C(\tau;K)$. Применяя теорему из [5, § 8.2] о представлении косинус оператор-функции, производящий оператор которой возмущен производящим оператором другой косинус оператор-функции, на элементах $g(x) \in C^{(2)}[R^1]$ имеем

$$C(\tau;K)g(x) = C(\tau;A^2+c_3I)g(x) + \frac{\tau^2}{2}\int\limits_0^1 j_1(\tau\sqrt{1-s^2};A^2+c_3I)C(\tau s;B)g(x)\,ds,$$

где операторнозначная функция $j_1(t;A^2+c_3I)$ строится по формуле (1.13) с заменой в ней оператора B_1 оператором A^2+c_3I.

Применяя оценку (1.9) и затем табличный интеграл [6, гл. 2, § 2.4.3], получим

$$\|j_1(t;A^2+c_3I)\| \le \frac{4}{\pi}\int\limits_0^1 \sqrt{1-r^2}\|C(tr;A^2+c_3I)\|\,dr \le \frac{2}{c_6 t}I_1(tc_6), \quad t\in\overline{R}^1_+,$$

поэтому имеет место цепочка соотношений

$$\|C(t;K)\| \le \operatorname{ch}(tc_6) + \frac{t}{c_6}\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{ch}(tc_9\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}I_1(trc_6)\,dr$$

(используя [7, гл. 2, § 2.15.9] табличный интеграл)

$$= \operatorname{ch}(tc_6) + \frac{\pi t}{2c_6}I_{1/2}(t(c_{10}+c_9))I_{1/2}(t(c_{10}-c_9))$$

(используя [7, приложение II, § II.10] формулу $I_{1/2}(z) = \sqrt{2/(\pi z)}\operatorname{sh} z$)

$$\begin{aligned} &= \operatorname{ch}(tc_6) + \frac{1}{c_6^2}\operatorname{sh}(t(c_{10}+c_9))\,\operatorname{sh}(t(c_{10}-c_9)) \\ &\le \operatorname{ch}(tc_6) + \frac{1}{c_6^2}\operatorname{ch}(2tc_{10}) = \sigma_1(t). \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $c_{10}^2 = c_6^2 + c_9^2$.

С косинус оператор-функцией $C(\tau;K)$ связаны синус оператор-функция [5, § 1.4]

$$S(\tau;K)g(x) = \int\limits_0^\tau C(s;K)g(x)\,ds, \quad g(x)\in C[R^1],$$

и линейное многообразие

$$C_1[R^1] = \{g(x)\in C[R^1] : C(\tau;K)g(x) \in C^{(1)}(R^1, C[R^1])\},$$

т. е. подмножество $C_1[R^1] \subset C[R^1]$ состоит из тех функций из $C[R^1]$, для которых функция $C(\tau; K)g(x) : R^1 \to C[R^1]$ является непрерывно дифференцируемой функцией переменной τ. Очевидно, что $D(K) = C^{(2)}[R^1] \subset C_1[R^1]$.

Используя оценку (1.14), имеем

$$\|S(t;K)\| \le \frac{1}{c_6}\mathrm{sh}(tc_6) + \frac{1}{2c_6^2 c_{10}}\mathrm{sh}(2tc_{10}) = \sigma_2(t), \quad t \ge 0. \tag{1.15}$$

Таким образом, абстрактная задача Коши (1.6), (1.7) равномерно корректна и ее классическое решение дается [5, § 1.4] формулой

$$W(\tau) = C(\tau; K)W_0 + S(\tau; K)W_1, \quad \tau \in \overline{R}^1_+,$$

для любых $W_0 \in D(K)$ и $W_1 \in C_1[R^1]$.

Производя обратную замену (1.14): $v(t,x) = \left(I - \alpha_3\partial_x^2\right)^{-1} w(t,x)$ и используя перестановочность резольвенты $\left(I - \alpha_3\partial_x^2\right)^{-1}$ с косинус оператор-функцией $C(t; K)$, находим решение задачи Коши (0.1), (0.3):

$$v(t,x) = C(t;K)\varphi(x) + S(t;K)\psi(x), \quad \tau \in \overline{R}^1_+. \tag{1.16}$$

Итак, имеет место

Лемма 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (0.1) *удовлетворяют условиям* (0.2) *и* (1.8), *а начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *вместе с производными до четвертого порядка включительно принадлежат пространству* $C[R^1]$. *Тогда задача Коши для линейного однородного уравнения* (1.1) *равномерно корректна, классическое решение дается формулой* (1.16) *и для него справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R^1} |v(t,x)| \le \sigma_1(t) \sup_{x\in R^1} |\varphi(x)| + \sigma_2(t) \sup_{x\in R^1} |\psi(x)| = \sigma_3(t),$$

в которой функции $\sigma_1(t)$ *и* $\sigma_2(t)$ *соответственно из* (1.14) *и* (1.15).

Замечание 1. Классическое решение $W(t)$ абстрактной задачи Коши (1.6), (1.7) принадлежит $C^{(2)}\big(\overline{R}^1_+, C[R^1]\big)$ и, значит, в силу формулы (1.4) найденное решение $v(t,x)$ принадлежит $C^{2,4}(\overline{R}^1_+, R^1)$.

2. Локальное решение задачи Коши для нелинейного уравнения

Применим к обеим частям уравнения (0.1) линейный ограниченный оператор $\left(I - \alpha_3\partial_x^2\right)^{-1}$. Тогда получим эквивалентное уравнению (0.1) нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, которое в пространстве $C[R^1]$ можно записать в виде абстрактного полулинейного уравнения

$$V_{tt} = K \cdot V + F(V), \tag{2.1}$$

где $V = V(t)$: $t \to v(t,x)$ — искомая вектор-функция, оператор K такой же, как и в уравнении (1.6), а $F(V)$ — заданный нелинейный оператор:

$$\begin{aligned} F(g) &= \left(I - \alpha_3\partial_x^2\right)^{-1}[\alpha_2(f(g))_{xx} + k_d\beta_2(f(g))_x] \\ &= \left[-\frac{\alpha_2}{\alpha_3}I + \frac{k_d\beta_2}{\alpha_3}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_3}}I - \partial_x\right)^{-1} + \frac{\alpha_2 - k_d\sqrt{\alpha_3}\beta_2}{\alpha_3^2}\left(\frac{1}{\alpha_3}I - \partial_x^2\right)^{-1}\right] f(g), \end{aligned}$$

$$\|F(g)\|_C \le c_{11}\|f(g)\|_C, \quad c_{11} = \frac{|k_d\beta_2|}{\sqrt{\alpha_3}} + \frac{|\alpha_2| + |\alpha_2 - k_d\sqrt{\alpha_3}\beta_2|}{\alpha_3}, \tag{2.2}$$

здесь $f(g)$ — оператор суперпозиции $C[R^1]$: $f(g) = g^2(x)$, $g(x) \in C[R^1]$.

Из ограниченности операторов $\left(\alpha_3^{-1/2}I - \partial_x\right)^{-1}$ и $\left(\alpha_3^{-1}I - \partial_x^2\right)^{-1}$ и непрерывной дифференцируемости оператора суперпозиции $f(\cdot)$ в пространстве непрерывных функций следует непрерывная дифференцируемость по Фреше оператора $F(\cdot)$ в пространстве $C[R^1]$ и, следовательно, найдется промежуток $[0, t_0[$, в котором абстрактная задача Коши для уравнения (2.1):

$$V|_{t=0} = V_0 = \varphi(x), \quad V_t|_{t=0} = V_1 = \psi(x), \tag{2.3}$$

для любых $V_0 \in \mathscr{D}(K)$ и $V_1 \in C_1[R^1]$ имеет [8, § 3] единственное классическое решение $V = V(t)$, которое удовлетворяет абстрактному интегральному уравнению

$$V(t) = C(t;K)V_0 + S(t;K)V_1 + \int\limits_0^t S(t-\tau;K)F(V(\tau))\,d\tau. \tag{2.4}$$

Используя оценки (1.14) и (1.15) соответственно косинус $C(t;K)$ и синус $S(t;K)$ оператор-функций и оценку (2.2) нелинейного оператора $F(\cdot)$, из абстрактного интегрального уравнения (2.4) выводим интегральное неравенство

$$\|V(t)\|_C \le \sigma_3(t) + c_{11}\int\limits_0^t \sigma_2(\tau)\|V(\tau)\|_C^2\,d\tau \le c_{12} + c_{13}\int\limits_0^t \|V(\tau)\|_C^2\,d\tau, \tag{2.5}$$

в котором $c_{12} = \max\limits_{t\in[0,t_0]} \sigma_3(t)$ и $c_{13} = c_{11}\max\limits_{t\in[0,t_0]} \sigma_2(t)$.

Из интегрального неравенства (2.5) следует [9, гл. 1, § 2, теорема 1.11] оценка нормы решения абстрактной задачи Коши (2.1), (2.3):

$$\|V(t)\|_C = \sup_{x\in R^1}|v(t,x)| \le \frac{c_{12}}{1 - c_{12}c_{13}t} = \sigma_4(t) \tag{2.6}$$

при $0 \le t \le t_1$, где $t_1 < 1/c_{12}c_{13}$.

Таким образом, имеет место

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда при* $0 \le t \le t_1 < 1/c_{12}c_{13}$ *существует единственное классическое решение задачи Коши* (0.1), (0.3) *в пространстве* $C[R^1]$, *для которого справедлива оценка* (2.6) *на временном отрезке* $t \in [0, t_1]$.

3. Существование глобального решения задачи Коши

В дальнейших рассмотрениях предполагается, что классическое решение $v = v(t,x)$, $(t,x) \in [0,t_1] \times R^1$, принадлежит вместе с частными производными, входящими в уравнение (0.1), пересечению пространства $C[R^1]$ с пространством $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом: $\partial_t^n\partial_x^m v, \partial_x^k v, v^2, v_x^2 \in C[R^1] \cap L_2(R^1)$, $n = \overline{1,2}$, $m = \overline{0,2}$; $k = \overline{0,4}$. Такое решение $v = v(t,x)$, $(t,x) \in [0,t_1] \times R^1$, будем называть *локальным классическим решением задачи Коши* (0.1), (0.3) *в пространстве* $L_2(R^1)$.

Напомним, что скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(R^1)$ функций с интегрируемым квадратом определяются соответственно формулами

$$(\varphi,\psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\psi(x)\,dx, \quad \|\varphi\|_2 = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

и что для функций $g(x)$, принадлежащих пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, справедлива оценка

$$\|g\|_C^2 \le \|g\|_{W_2^1}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(g(x))^2 + (g'(x))^2\right] dx, \tag{3.1}$$

означающая, что пространство $W_2^1(R^1)$ непрерывно вложено в пространство непрерывных ограниченных функций $C(R^1)$, причем если $g(x) \in C^{(2)}(R^1)$, то [10] предел функций $g(x)$, $g'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равен нулю.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия лемм* 1 *и* 2. *Тогда локальное классическое решение задачи Коши* (0.1), (0.3) *в пространстве* $L_2(R^1)$ *продолжается до единственного глобального классического решения задачи Коши* (0.1), (0.3) *в пространстве* $L_2(R^1)$, *для которого справедлива оценка*

$$\sup_{x\in R^1} |v(t,x)| \le \sigma_7(t), \quad t \ge 0,$$

в которой непрерывная при $t \ge 0$ *мажоранта* $\sigma_7(t)$ *определяется в ходе доказательства теоремы и зависит от параметров* α_i, β_j, k_d *и начальных функций* $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Доказательство. На временном отрезке $t \in [0, t_1]$ существования классического решения $v = v(t,x)$ задачи Коши (0.1), (0.3) в пространстве $L_2(R^1)$ введем в рассмотрение функционал

$$y(t) = (v,v) + \alpha_3(v_x, v_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v^2 + \alpha_3 v_x^2\right) dx, \quad t \in [0, t_1]. \tag{3.2}$$

Применяя к значению производной функционала (3.2)

$$y'(t) = 2((v, v_t) + \alpha_3(v_x, v_{tx}))$$

неравенство Коши — Буняковского: $|(\varphi,\psi)| \le \|\varphi\|_2 \|\psi\|_2$, и обозначая через

$$z(t) = (v_t, v_t) + \alpha_3(v_{tx}, v_{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v_t^2 + \alpha_3 v_{tx}^2\right) dx, \quad t \in [0, t_1], \tag{3.3}$$

еще один функционал, связанный с уравнением (0.1), выводим вспомогательные оценки

$$y'(t) \le y(t) + z(t) \tag{3.4}$$

и

$$[y'(t)]^2 \le 4y(t)z(t). \tag{3.5}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $v_t = v_t(t,x)$ и проинтегрируем по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$. Интегрируя по частям, получим

$$(v_{tt}, v_t) + \alpha_1(v_x, v_{tx}) + 2\alpha_2(vv_x, v_{tx}) + \alpha_3(v_{ttx}, v_{tx}) + \alpha_4(v_{xx}, v_{txx}) \\ - k_d\beta_1(v_x, v_t) - 2k_d\beta_2(vv_x, v_t) + k_d\beta_3(v_{xx}, v_{tx}) = 0,$$

откуда, обозначая

$$E(t) = z(t) + \alpha_1\|v_x\|_2^2 + \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2,$$

выводим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) = k_d\beta_1(v_x, v_t) + 2k_d\beta_2(vv_x, v_t) - k_d\beta_3(v_{xx}, v_{tx}) - 2\alpha_2(vv_x, v_{tx}).$$

Интегрируя обе части последнего равенства по переменной t, имеем

$$E(t) = E_0 + 2k_d\beta_1\int\limits_0^t (v_x, v_\tau)\,d\tau + 4k_d\beta_2\int\limits_0^t (vv_x, v_\tau)\,d\tau - 2k_d\beta_3\int\limits_0^t (v_{xx}, v_{\tau x})\,d\tau - 4\alpha_2\int\limits_0^t (vv_x, v_{\tau x})\,d\tau, \quad (3.6)$$

где $E_0 = \|\psi\|_2^2 + \alpha_1\|\varphi'\|_2^2 + \alpha_3\|\psi'\|_2^2 + \alpha_4\|\varphi''\|_2^2$. Отметим, что по условию теоремы $E_0 \geq 0$.

Применяя неравенство Коши — Буняковского и оценку нормы

$$\|vv_x\|_2^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2(\tau,x)(v_x(\tau,x))^2\,dx \leq \sup_{x\in R^1}(v(\tau,x))^2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v_x(\tau,x))^2\,dx \leq \sigma_4^2(\tau)\|v_x\|_2^2 \leq \|v_x\|_2^2\max_{\tau\in[0,t_1]}\sigma_4^2(\tau) = c_{14}\|v_x\|_2^2, \quad (3.7)$$

где $c_{14} = \max\limits_{\tau\in[0,t_1]}\sigma_4^2(\tau)$, увеличим правую часть равенства (3.6):

$$E(t) \leq E_0 + (|k_d\beta_1| + (2|k_d\beta_2| + 2|\alpha_2|)c_{14})\int\limits_0^t \|v_x\|_2^2\,d\tau + (|k_d\beta_1| + 2|k_d\beta_2|)\int\limits_0^t \|v_\tau\|_2^2\,d\tau + (|k_d\beta_3| + 2|\alpha_2|)\int\limits_0^t \|v_{\tau x}\|_2^2\,d\tau + |k_d\beta_3|\int\limits_0^t \|v_{xx}\|_2^2\,d\tau. \quad (3.8)$$

Увеличивая правую часть неравенства (3.8), получим интегральное неравенство

$$E(t) \leq E_0 + c_{15}\int\limits_0^t E(\tau)\,d\tau, \quad t\in[0,t_1], \quad (3.9)$$

где

$$c_{15} = \max\left\{\frac{|k_d\beta_1| + 2(|k_d\beta_2| + |\alpha_2|)c_{14}}{\alpha_1};\ |k_d|(|\beta_1| + 2|\beta_2|);\ \frac{|k_d\beta_3| + 2|\alpha_2|}{\alpha_3}; \frac{|k_d\beta_3|}{\alpha_4}\right\}.$$

Из интегрального неравенства (3.9) следует [9, гл. 1, § 1, следствие из теоремы 1.6] оценка

$$E(t) = z(t) + \alpha_1\|v_x\|_2^2 + \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2 \leq E_0 e^{c_{15}t}, \quad t\in[0,t_1]. \quad (3.10)$$

Уменьшая левую часть неравенства (3.10), получим оценку функционала (3.3):

$$z(t) \leq E_0 e^{c_{15}t}. \quad (3.11)$$

Совместное рассмотрение оценок (3.4) и (3.11) приводит к интегральному неравенству

$$y(t) \le y(0) + \frac{E_0}{c_{15}} e^{c_{15} t} + \int\limits_0^t y(\tau)\, d\tau$$

и, значит, справедлива оценка функционала (3.2):

$$y(t) \le \left(\|\varphi\|_2^2 + \alpha_3 \|\varphi'\|_2^2 + \frac{E_0}{c_{15}} e^{c_{15} t} \right) (1 + t e^t) = \sigma_5(t). \tag{3.12}$$

Из неравенства (3.12) следует, что классическое решение $v = v(t, x)$ уравнения (0.1) в пространстве $L_2(R^1)$ на всей числовой полуоси $t \ge 0$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$:

$$\|v\|^2_{W_2^1} = \|v\|_2^2 + \|v_x\|_2^2 \le \begin{cases} \alpha_3^{-1} \sigma_5(t), & 0 < \alpha_3 < 1, \\ \sigma_5(t), & \alpha_3 \ge 1, \end{cases} = \sigma_6(t),$$

поэтому в силу неравенства (3.1) справедлива оценка

$$\|v\|_C = \sup_{x \in R^1} |v(t, x)| \le \|v\|_{W_2^1} = \sqrt{\sigma_6(t)} = \sigma_7(t), \quad t \ge 0,$$

обеспечивающая существование глобального классического решения задачи Коши (0.1), (0.3).

Замечание 2. При продолжении априорной оценки (3.12) на всю положительную полуось $t \ge 0$ используется следующий алгоритм: принимая функции $v(t_1, x)$ и $v_t(t_1, x)$ за новые начальные функции и отмечая, что эти функции обладают тем же набором свойств, которые будучи допущенными для функций $v(0, x)$ и $v_t(0, x)$ позволили получить оценку (3.12) на отрезке $0 \le t \le t_1$, оценку (3.12) с отрезка $[0, t_1]$ можно продолжить на отрезок $[0, t_1 + T]$, где величина T зависит от параметров α_i, β_j, k_d и начальных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим неограниченное расширение временного отрезка, на котором справедлива оценка (3.12) и, значит, существование глобального классического решения задачи Коши в пространстве $L_2(R^1)$.

Замечание 3. При выполнении условий теоремы 1 классическое решение $v = v(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.3) в пространстве $L_2(R^1)$ и его частные производные $v_t = v_t(t, x)$ и $v_x = v_x(t, x)$ принадлежат пересечению пространств $C[R^1] \cap L_2(R^1)$ для всех $t \ge 0$.

4. Разрушение решения задачи Коши

Найдем достаточные условия разрушения классического решения $v = v(t, x)$ задачи Коши (0.1), (0.3) в пространстве $L_2(R^1)$ на временном отрезке $[0, t_1]$, понимая под этим возникновение разрыва второго рода для функционала $y(t)$ на некотором временном отрезке $[0, t_2] \subseteq [0, t_1]$. Отрезок $[0, t_2]$ выбираем так, чтобы на нем выполнялись неравенства $y(t) > 0$ и $y'(t) \ge 0$, которые следуют из начальных условий

$$y(0) = \|\varphi\|_2^2 + \alpha_3 \|\varphi'\|_2^2 > 0, \quad \frac{1}{2} y'(0) = (\varphi, \psi) + \alpha_3 (\varphi', \psi') > 0. \tag{4.1}$$

Умножим обе части уравнения (0.1) на $v = v(t, x)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Интегрируя по частям, получим

$$(v_{tt}, v) + \alpha_1(v_x, v_x) + 2\alpha_2(vv_x, v_x) + \alpha_3(v_{ttx}, v_x) + \alpha_4(v_{xx}, v_{xx}) - k_d\beta_1(v_x, v) + k_d\beta_2(v^2, v_x) + k_d\beta_3(v_{xx}, v_x) = 0. \quad (4.2)$$

Рассмотрим каждое слагаемое в левой части равенства (4.2) в отдельности:

1) $(v_{tt}, v) = (v_t, v)_t - (v_t, v_t) = \left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|_2^2\right)_t - \|v_t\|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|v\|_2^2 - \|v_t\|_2^2$,

2) $\alpha_1(v_x, v_x) = \alpha_1\|v_x\|_2^2$,

3) $\alpha_4(v_{xx}, v_{xx}) = \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2$,

4) используя оценку (3.7), имеем

$$2\alpha_2(vv_x, v_x) \le |\alpha_2|\left(\|vv_x\|_2^2 + \|v_x\|_2^2\right) \le |\alpha_2|(1 + c_{14})\|v_x\|_2^2, \quad (4.3)$$

5) $\alpha_3(v_{ttx}, v_x) = \alpha_3[(v_{tx}, v_x)_t - (v_{tx}, v_{tx})] = \frac{\alpha_3}{2}\frac{d^2}{dt^2}\|v_x\|_2^2 - \alpha_3\|v_{tx}\|_2^2$,

6) $k_d\beta_1(v_x, v) = \frac{k_d\beta_1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v^2)_x\,dx = \frac{k_d\beta_1}{2}v^2\big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$,

7) $k_d\beta_2(v^2, v_x) \le \frac{k_d\beta_2}{2}\left(\|v^2\|_2^2 + \|v_x\|_2^2\right)$, при этом

$$k_d\beta_2(v^2, v_x) = k_d\beta_2\int\limits_{-\infty}^{+\infty}v^2v_x\,dx = \frac{k_d\beta_2}{3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(v^3)_x\,dx = \frac{k_d\beta_2}{3}v^3\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0,$$

8) $k_d\beta_3(v_{xx}, v_x) = \frac{k_d\beta_3}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left((v_x)^2\right)_x dx = \frac{k_d\beta_3}{2}(v_x)^2\big|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Подставляя найденные представления в равенство (4.2), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\|v\|_2^2 + \alpha_3\|v_x\|_2^2\right) + \alpha_1\|v_x\|_2^2 + 2\alpha_2(vv_x, v_x) + \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2 = \|v_t\|_2^2 + \alpha_3\|v_{tx}\|_2^2$$

или

$$y''(t) + 4\alpha_2(vv_x, v_x) + 2\left(\alpha_1\|v_x\|_2^2 + \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2\right) = 2z(t), \quad t \in [0, t_1]. \quad (4.4)$$

Из равенства (4.4) найдем значение в нуле второй производной функционала (3.2) и потребуем, чтобы

$$\|\psi\|_2^2 + \alpha_3\|\psi'\|_2^2 - 2\alpha_2(\varphi, (\varphi')^2) - \alpha_1\|\varphi'\|_2^2 - \alpha_4\|\varphi''\|_2^2 > 0. \quad (4.5)$$

Тогда на некотором отрезке $[0, t_3] \subseteq [0, t_2]$ выполняется неравенство $y''(t) \ge 0$.

Используя неравенства (3.5), (3.10), (4.3) и $\|v_x\|_2^2 \le y(t)$, увеличим левую и уменьшим правую части равенства (4.4):

$$y''(t) + 4\alpha_2(vv_x, v_x) + 3\left(z(t) + \alpha_1\|v_x\|_2^2 + \alpha_4\|v_{xx}\|_2^2\right) \ge 5z(t),$$

или

$$y(t)y''(t) - \frac{5}{4}[y'(t)]^2 + c_{16}y^2(t) + c_{17}y(t) \ge 0, \quad t \in [0, t_3], \quad (4.6)$$

где $c_{16} = 2|\alpha_2|(1 + c_{14})$, $c_{17} = \max\limits_{t\in[0,t_1]} 3E_0e^{c_{15}t} = 3E_0e^{c_{15}t_1}$.

Сравнивая неравенство (4.6) с одним из основных обыкновенных дифференциальных неравенств для интеграла энергии [11, приложение, § 2, (2.38)], заключаем, что если выполнены начальные условия

$$(y'(0))^2 > 4\left(c_{16}(y(0))^2 + \frac{c_{17}}{3}y(0)\right)$$

или в подробной записи

$$((\varphi,\psi)+\alpha_3(\varphi',\psi'))^2 > \left(c_{16}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)+\frac{c_{17}}{3}\right)\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big), \qquad (4.7)$$

то интервал определения функционала $y(t)$ не может быть сколь угодно большим, а именно, имеет место оценка сверху

$$t_3 \le T < \frac{1}{c_{18}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{1/4}},$$

где

$$c_{18}^2=\frac{1}{16}(y(0))^{-5/2}\left[(y'(0))^2-4c_{16}(y(0))^2+\frac{4}{3}c_{17}y(0)\right]=\frac{1}{4}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{-5/2}$$
$$\times\left[((\varphi,\psi)+\alpha_3(\varphi',\psi'))^2-\left(c_{16}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)+\frac{c_{17}}{3}\right)\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)\right],$$

причем для функционала $y(t)$ справедлива оценка снизу

$$y(t)\ge\frac{1}{\Big(\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{-1/4}-c_{18}t\Big)^4}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть выполнены условия лемм* 1, 2, *и пусть начальные функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *удовлетворяют условиям*

(4.1): $\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2>0$ *и* $(\varphi,\psi)+\alpha_3(\varphi',\psi')>0$;

(4.5): $\|\psi\|_2^2+\alpha_3\|\psi'\|_2^2-2\alpha_2(\varphi,(\varphi')^2)-\alpha_1\|\varphi'\|_2^2-\alpha_4\|\varphi''\|_2^2>0$;

(4.7): $(\varphi,\psi)+\alpha_3(\varphi',\psi')>\big(c_{16}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)+\frac{c_{17}}{3}\big)^{1/2}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{1/2}$.

Тогда классическое решение $v=v(t,x)$ *задачи Коши* (0.1), (0.3) *в пространстве* $L_2(R^1)$ *разрушается за конечное время* $T\le c_{18}^{-1}\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{-1/4}$, *причем справедлива оценка снизу для функционала*

$$y(t)=\|v\|_2^2+\alpha_3\|v_x\|_2^2\ge\Big(\big(\|\varphi\|_2^2+\alpha_3\|\varphi'\|_2^2\big)^{-1/4}-c_{18}t\Big)^{-4}.$$

Благодарность. Автор статьи выражает благодарность рецензенту за внимательное прочтение статьи и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Порубов А. В.* Локализация нелинейных волн деформации. Асимптотические и численные методы исследования. М.: Физматлит, 2009.
2. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
3. *Ерофеев И. В.* Изгибно-крутильные, продольно-изгибные и продольно-крутильные волны в стержнях // Вестник научно-технического развития. 2012. Т. 5, № 57. С. 3–18.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И.* Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. математический анализ. Т. 8. М.: ВИНИТИ, 1990. С. 87–202.
6. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981.
7. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983.

8. *Travis C. C. Webb G. F.* Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations // Acta Math. Acad. Scientiarum Hungaricae. 1978. V. 32. P. 75–96.

9. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.

10. *Benjamin T. B., Bona J. L., Mahony J. J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. London. 1972. V. 272. P. 47–78.

11. *Корпусов М. О., Свешников А. Г., Юшков Е. В.* Методы теории разрушения решений нелинейных уравнений математической физики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2014.

Поступила в редакцию 7 октяря 2024 г.
После доработки 26 января 2025 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Умаров Хасан Галсанович
Академия наук Чеченской Республики,
ул. В. Алиева, 19 а, Грозный 364043;
Чеченский государственный педагогический университет,
ул. С. Кишиевой, 33, Грозный 364068
umarov50@mail.ru

Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2025. Том 66, № 2

УДК 510.5

ОДИН ПОДХОД К КЛАССИФИКАЦИИ МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЙ СЕМЕЙСТВ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ

М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Изучается обобщение понятия эффективно минимальной нумерации, полученное его релятивизацией относительно тьюринговых скачков подмножеств натурального ряда. На основе такого обобщения проводится классификация минимальных нумераций, вычислимых в арифметической и гиперарифметической иерархиях.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.214

Ключевые слова: нумерация, минимальная нумерация, эффективно минимальная нумерация, вычислимость с оракулом, арифметическая нумерация.

1. Введение

В теории вычислимых нумераций одними из наиболее интенсивно исследуемых объектов являются минимальные нумерации. Это вызвано тем, что образованный ими класс содержит как однозначные, так и позитивные нумерации, а сами они определяют минимальные элементы полурешеток Роджерса вычислимых семейств, ассоциированных с отношением сводимости нумераций.

Общие понятия, используемые в статье, содержатся в монографиях Ю. Л. Ершова [1] и Соара [2]. В частности, для любого частичного отображения φ области его определения и значений обозначаются через $\operatorname{dom}\varphi$ и $\operatorname{ran}\varphi$ соответственно; пишем $\varphi(x)\downarrow$, если $x \in \operatorname{dom}\varphi$, и $\varphi(x)\uparrow$ в противном случае. Через $c(x, y)$ обозначается возрастающая по каждому аргументу вычислимая биекция из $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$.

Основными объектами исследований статьи являются нумерации, вычислимые в уровнях арифметической иерархии, введенные и впервые изученные С. С. Гончаровым и А. Сорби в работе [3]. Для произвольного натурального $n > 0$ нумерация μ семейства Σ^0_n-множеств называется Σ^0_n-*вычислимой*, если

$$G_\mu \leftrightharpoons \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : y \in \mu(x)\} \in \Sigma^0_n.$$

Напомним, что нумерация μ называется *сводимой к нумерации* ν *посредством вычислимой функции* f, если $\mu = \nu \circ f$. Будем говорить, что μ *сводима* к ν и в этом случае использовать обозначение $\mu \le \nu$, если μ сводится к ν посредством некоторой вычислимой функции. Напомним также, что нумерация μ называется *минимальной*, если для любой нумерации $\nu \le \mu$ множества $\operatorname{ran}\mu$ имеет место

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 24-11-00227) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2024-1438).

сводимость $\mu \leq \nu$. Отметим, что согласно [4] любое семейство Σ^0_n-множеств, $n > 1$, обладающее Σ^0_n-вычислимой нумерацией, обладает и минимальной Σ^0_n-вычислимой нумерацией.

Цель статьи заключается в алгоритмической классификации минимальных Σ^0_n-вычислимых нумераций для любого наперед заданного $n > 0$. Она, в свою очередь, основывается на классификации минимальных нумераций, предложенной С. А. Бадаевым в работе [5]. В ней кроме однозначных, разрешимых и позитивных нумераций были исследованы обобщающие их строго минимальные и эффективно минимальные нумерации. Определение последних допускает следующую релятивизацию: для произвольного оракула A нумерация μ называется *A-эффективно минимальной посредством частично A-вычислимой функции* ψ, если для каждого e, для которого отображение $\mu \circ \varphi_e$ является нумерацией множества $\operatorname{ran}\mu$, $\psi(e)\downarrow$ и μ сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\psi(e)}$. Будем говорить, что нумерация μ *A-эффективно минимальна*, если она A-эффективно минимальна посредством некоторой частично A-вычислимой функции.

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть $n > 0$. Тогда для любого m если $0 < m \leq n + 1$, то существует $\varnothing^{(m)}$-эффективно минимальная Σ^0_n-вычислимая нумерация, которая не является $\varnothing^{(m-1)}$-эффективно минимальной.*

Эта теорема представляет собой следствие теорем 2 и 3 более общего характера, которые формулируются и доказываются в последующих разделах статьи. В заключительном разделе статьи теорема 1 распространяется на нумерации, вычислимые в уровнях гиперарифметической иерархии.

2. A'-эффективно минимальная, но не A-эффективно минимальная нумерация

Следуя [3, 6], для произвольного множества A нумерацию μ семейства подмножеств $\mathbb{N}$ назовем *A-вычислимой*, если множество G_μ вычислимо перечислимо относительно A. Таким образом, для любого $n > 0$ классы Σ^0_n-вычислимых и $\varnothing^{(n-1)}$-вычислимых нумераций совпадают.

В доказательстве следующей теоремы через $\{0,1\}^*$ обозначается множество всех конечных строк в алфавите $\{0,1\}$. Для произвольной строки $\sigma \in \{0,1\}^*$ через $|\sigma|$ будем обозначать ее длину. Если $m < |\sigma|$, то через $\sigma(m)$ обозначаем m-й символ строки σ. Если $m \leq |\sigma|$, то через $\sigma \upharpoonright m$ обозначаем начальный сегмент строки σ длины m. Для строк $\sigma, \rho \in \{0,1\}^*$ используем запись $\sigma <_L \rho$, если существует такое m, что $m < |\sigma|$, $m < |\rho|$, $\sigma(m) = 0$, $\rho(m) = 1$ и $\sigma(l) = \rho(l)$ для всех $l < m$. Будем также использовать запись $\sigma \leq_L \rho$, если $\sigma <_L \rho$ или $\sigma = \rho$.

Зафиксируем какую-нибудь вычислимую биекцию d из множества всех непустых строк в алфавите $\{0,1\}$ на $\mathbb{N}$.

Теорема 2. *Для любого множества A существует A'-эффективно минимальная A-вычислимая нумерация, которая не является A-эффективно минимальной.*

Доказательство. Чтобы для произвольного множества A определить нумерацию μ, удовлетворяющую заключению теоремы, построим двойную сильно A-вычислимую последовательность конечных множеств $\{\mu_s(x)\}_{s,x\in\mathbb{N}}$ такую, что для всех x и s справедливо включение $\mu_s(x) \subseteq \mu_{s+1}(x)$. После этого для всех x определим $\mu(x) = \bigcup\limits_s \mu_s(x)$.

Построение

Шаг 0. Положим $\mu_0(x) = \{x\}$ для каждого x. На всех последующих шагах $s+1$ построения для каждого x будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$, если не указано обратное.

В построении обеспечим, чтобы для каждого n такого, что частичная функция Φ_n^A всюду определена, нашлось число e, для которого φ_e всюду определена и $\operatorname{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \operatorname{ran}\mu$, но μ не сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi_n^A(e)}$. Тем самым мы добьемся, что нумерация μ не будет A-эффективно минимальной. Чтобы для произвольного n обеспечить выполнение этого условия, а также условия A'-эффективной минимальности μ, будем использовать конечное число стратегий, каждая из которых зависит от одной из строк σ длины $n+1$. Чтобы одна из этих стратегий была успешной, на последующих шагах построения будем использовать двойную последовательность строк $\{\sigma_n^s\}_{n,s\in\mathbb{N}}$, определенную следующим образом. Для всех n и s строка σ_n^s является такой строкой σ длины $n+1$, что для всех $m \leq n$ и всех строк τ длины, не превышающей $n-m$, тогда и только тогда выполняется равенство $\sigma(m) = 0$, когда существует тройка не превышающих s чисел x_0, x_1, x_2, в которой каждое x_i, $i = \overline{0,2}$, удовлетворяет условию

$$\varphi_{m,s}(x_i)\downarrow = 3d((\sigma \restriction m)0\tau) + i.$$

Нетрудно видеть, что для каждого n существует конечный предел

$$\sigma_n \leftrightharpoons \lim_s \sigma_n^s$$

и $\sigma_n^{s+1} \leq_L \sigma_n^s$ для всех s. Далее в построении обеспечим, что строкам σ_n, $n \in \mathbb{N}$, будут соответствовать успешные стратегии.

Зафиксируем число b такое, что φ_b нигде не определена. В построении будем также определять последовательность вычислимых функций $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, отображающих $\{0,1\}^*$ в $\mathbb{N}$. Для каждой строки σ положим $f_0(\sigma) = b$. Для всех s и σ, если не оговорено противное, будем считать, что $f_{s+1}(\sigma) = f_s(\sigma)$. На последующих шагах построения обеспечим, чтобы для каждого n существовал конечный предел $\lim_s f_s(\sigma_n) = e$ такой, что φ_e всюду определена, $\operatorname{ran}(\mu \circ \varphi_e) = \operatorname{ran}\mu$ и μ не сводится к $\mu \circ \varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi_n^A(e)}$, если Φ_n^A всюду определена.

Шаг $s+1$. Действия этого шага построения разбиваются на три этапа.

1. Если существует $n \leq s$, для которого $f_s(\sigma_n^s) = b$, то выберем наименьшее n с этим свойством и для всех $i = \overline{0,2}$ определим

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s) + i) = \bigcup_{k=0}^{2} \mu_s(3d(\sigma_n^s) + k). \tag{1}$$

После этого положим значение $f_{s+1}(\sigma_n^s)$ равным гёделевскому номеру вычислимой функции g, определенной следующим образом:

$$g(3d(\sigma_n^s) + 2) = 3d(\sigma_n^s) + 1,$$

$$g(x) = x$$

для всех x, отличных от $3d(\sigma_n^s) + 2$.

2. Если существует $n \leq s$, для которого

$$f_s(\sigma_n^s) \neq b \,\&\, \varphi_{\Phi_{n,s}^A(f_s(\sigma_n^s))}(3d(\sigma_n^s) + 2)\downarrow = 3d(\sigma_n^s) + i \tag{2}$$

при некотором $i = \overline{0,2}$ и

$$\mu_s(3d(\sigma_n^s)) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)+1) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)+2), \tag{3}$$

то выберем наименьшее n, удовлетворяющее этим условиям, и наименьшее

$$y > \max \mu_s(3d(\sigma_n^s)),$$

а затем определим

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s)) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y\}, \tag{4}$$

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s)+k) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y+1\}, \quad k = 1,2, \tag{5}$$

если $i = 0$. Если же $i > 0$, то полагаем

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s)+j) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y\}, \quad j = 0,2, \tag{6}$$

$$\mu_{s+1}(3d(\sigma_n^s)+1) = \mu_s(3d(\sigma_n^s)) \cup \{y+1\}. \tag{7}$$

3. Чтобы обеспечить минимальность нумерации μ, для всех строк ρ таких, что $|\rho| \leq s$,

$$\mu_s(3d(\rho)+i) = \mu_s(3d(\rho)+k)$$

для некоторых различных $i,k = \overline{0,2}$ и $\sigma_n^s <_L \rho$, где $n = |\rho|$, выберем наименьшее

$$y > \max \mu_s(3d(\rho)+i), \quad i = \overline{0,2},$$

и для каждого $i = \overline{0,2}$ определим

$$\mu_{s+1}(3d(\rho)+i) = \mu_s(3d(\rho)) \cup \{y+i\}.$$

Этим завершается описание построения. Непосредственно из построения следует, что нумерация μ является A-вычислимой. Также нетрудно видеть, что для произвольных строк ρ, σ и чисел $i,k = \overline{0,2}$ если $\rho \neq \sigma$, то $\mu(3d(\rho)+i) \neq \mu(3d(\sigma)+k)$. Покажем, что нумерация μ удовлетворяет остальным заключениям теоремы.

Лемма 1. *Нумерация μ не является A-эффективно минимальной.*

Доказательство. Предположим, напротив, что μ является A-эффективно минимальной посредством некоторой частично A-вычислимой функции Φ_n^A. Выберем $s \geq n$ такое, что $\sigma_n^s = \sigma_n$ и n — наименьшее число, не превышающее s, для которого $f_s(\sigma_n) = b$. Тогда на первом этапе шага $s+1$ построения значение $f_{s+1}(\sigma_n)$ полагается равным гёделевскому номеру определенной на нем вычислимой функции g. Отметим, что $\operatorname{ran} g = \mathbb{N} \setminus \{3d(\sigma_n)+2\}$. Отсюда и из присваиваний (1) следует, что на втором этапе одного из последующих шагов построения выполняются условия (2) для некоторого $i = \overline{0,2}$ и (3). Стало быть, присваивания (4)–(7) обеспечивают, что

$$\mu(3d(\sigma_n)+2) \neq \mu(\varphi_{f_{s+1}(\sigma_n)}(\varphi_{\Phi_n^A(f_{s+1}(\sigma_n))}(3d(\sigma_n)+2))).$$

Таким образом, получаем противоречие с A-эффективной минимальностью μ посредством Φ_n^A.

Лемма 2. *Нумерация μ является A'-эффективно минимальной.*

Доказательство. Выберем произвольное n и предположим, что отображение $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией семейства $\operatorname{ran}\mu$. Покажем, что тогда для любой строки ρ длины больше n и любого числа $i = \overline{0,2}$ существует x, для которого $\varphi_n(x) = 3d(\rho) + i$. Пусть $|\rho| = l > n$. Если $\sigma_{l-1} <_L \rho$, то действиями третьих этапов шагов построения обеспечивается, что для каждого $i = \overline{0,2}$ множество $\mu(3d(\rho)+i)$ имеет единственный номер в нумерации μ. Непосредственно из построения следует, что это же верно и в случае $\rho <_L \sigma_{l-1}$. Пусть $\rho = \sigma_{l-1}$. Тогда из определения последовательности $\{\sigma^s_m\}_{m,s\in\mathbb{N}}$ следует, что $\rho(n) = 0$ и для каждого $i = \overline{0,2}$ существует такое x_i, что $\varphi_i(x_i) = 3d(\rho) + i$. В самом деле, в противном случае нашлись бы строка τ и число $i = \overline{0,2}$ такие, что множество $\mu(3d((\rho \restriction n)0\tau) + i)$ имеет единственный номер, но $\varphi_n(x) \neq 3d((\rho \restriction n)0\tau) + i$ для любого x. Это противоречит тому, что $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией $\operatorname{ran}\mu$. Отсюда следует, что существует лишь конечное число строк δ таких, что для некоторых различных $i, k = \overline{0,2}$ справедливо равенство

$$\mu(3d(\delta) + i) = \mu(3d(\delta) + k).$$

Длина каждой из них не превышает n. Согласно построению все эти строки определяются эффективно по n относительно оракула A'.

Таким образом, эффективно по произвольному n относительно оракула A' определяется число e такое, что если отображение $\mu \circ \varphi_n$ является нумерацией $\operatorname{ran}\mu$, то μ сводится к $\mu \circ \varphi_n$ посредством φ_e. Этим завершается доказательство леммы и теоремы в целом.

3. A''-эффективно минимальная, но не A'-эффективно минимальная нумерация

Заметим, что любая минимальная A-вычислимая нумерация μ является A''-эффективно минимальной. Действительно, частично A''-вычислимая функция ψ, посредством которой μ является A''-эффективно минимальной, может быть определена следующим образом. Для каждого e если φ_e всюду определена, то последовательно для каждого числа n проверяем выполнение условия

$$\forall x\, [\varphi_n(x)\downarrow \;\&\; \mu(x) = \mu(\varphi_e(\varphi_n(x)))].$$

Полагаем значение $\psi(e)$ равным наименьшему n, удовлетворяющему этому условию, если такое n существует. В противном случае полагаем $\psi(e)\uparrow$.

В доказательстве следующей теоремы используется метод построения минимальных нумераций из работы [4].

Теорема 3. *Для любого множества A существует минимальная A-вычислимая нумерация, которая не является A'-эффективно минимальной.*

Доказательство. Пусть M — максимальное множество. Выберем произвольное множество A и построим A-вычислимую нумерацию μ бесконечного семейства таким образом, чтобы для всех $x, y \in M$ выполнялось равенство

$$\mu(x) = \mu(y).$$

Тогда нумерация μ будет минимальной, поскольку если для вычислимой функции f отображение $\mu \circ f$ есть нумерация семейства $\operatorname{ran}\mu$, то ввиду бесконечности $\operatorname{ran}\mu$ и минимальности M разность $\overline{M} \setminus \operatorname{ran} f$ конечна. Пусть для каждого s

$$\overline{M_s} = \{b^s_0 < b^s_1 < b^s_2 < \dots\}.$$

Для каждого m через b_m будем обозначать предел $\lim\limits_s b^s_m$. Тройки вида $b^s_{c(n,i)}$, $i = \overline{0,2}$, будем использовать, чтобы обеспечить отсутствие свойства A'-эффективной минимальности нумерации μ подобно тому, как тройки вида $3d(\sigma^s_n) + i$ использовались в доказательстве теоремы 2 для отсутствия свойства A-эффективной минимальности строящейся там нумерации. Используя лемму о пределе, выберем тьюринговый функционал Ψ такой, что для всех n и x справедливы условия

$$\forall s\,[\Psi^A(n,x,s)\downarrow],$$
$$\Phi^{A'}_n(x)\downarrow\Rightarrow \Phi^{A'}_n(x) = \lim_s \Psi^A(n,x,s).$$

Построение.

Шаг 0. Положим $\mu_0(x) = \{x\}$ для каждого x. В построении будем также определять последовательность вычислимых функций $\{f_s\}_{s\in\mathbb{N}}$, отображающих $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Для каждого n положим $f_0(n) = b$, где b — гёделевский номер нигде не определенной частично вычислимой функции. На последующих шагах построения мы обеспечим, чтобы для каждого n существовал конечный предел $\lim\limits_s f_s(n) = e$ такой, что φ_e всюду определена, $\operatorname{ran}(\mu\circ\varphi_e) = \operatorname{ran}\mu$ и μ не сводится к $\mu\circ\varphi_e$ посредством $\varphi_{\Phi^{A'}_n(e)}$, если $\Phi^{A'}_n$ всюду определена.

Для всех s и x будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$ и $f_{s+1}(x) = f_s(x)$, если не указано обратное.

Шаг $s+1$. Для всех $x \in M_s$ полагаем $\mu_{s+1}(x) = \mathbb{N}$. Для каждого $n \le s$ рассмотрим три случая.

1. Либо $f_s(n) = b$, либо для некоторого $i = \overline{0,2}$ выполняется неравенство

$$b^s_{c(n,i)} \ne b^{s+1}_{c(n,i)}.$$

В этом случае для каждого $i = \overline{0,2}$ положим

$$\mu_{s+1}\big(b^{s+1}_{c(n,i)}\big) = \bigcup_{k=0}^{2} \mu_s\big(b^{s+1}_{c(n,k)}\big)$$

и определим значение $f_{s+1}(n)$ равным гёделевскому номеру вычислимой функции g, определенной следующим образом:

$$g\big(b^{s+1}_{c(n,2)}\big) = b^{s+1}_{c(n,1)},$$
$$g(x) = x$$

для всех x, отличных от $b^{s+1}_{c(n,2)}$.

2. Условие предыдущего случая не выполняется и выполняется условие

$$\Psi^A(n, f_s(n), s) \ne \Psi^A(n, f_s(n), s+1).$$

В этом случае для каждого $i = \overline{0,2}$ положим $\mu_{s+1}\big(b^{s+1}_{c(n,i)}\big) = \bigcup\limits_{k=0}^{2} \mu_s\big(b^{s+1}_{c(n,k)}\big)$.

3. Условия первых двух случаев не выполняются. Если

$$\varphi_{\Psi^A(n,f_s(n),s)}\big(b^s_{c(n,2)}\big)\downarrow = b^s_{c(n,i)}$$

при некотором $i = \overline{0,2}$ и

$$\mu_s\big(b^s_{c(n,0)}\big) = \mu_s\big(b^s_{c(n,1)}\big) = \mu_s\big(b^s_{c(n,2)}\big),$$

то выберем наименьшее
$$y > \max \mu_s(b^s_{c(n,0)}),$$
а затем определим
$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,0)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,0)\},$$
$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,k)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,1)\}, \quad k = 1,2,$$
если $i = 0$. Если же $i > 0$, то полагаем
$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,j)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,0)\}, \quad j = 0,2,$$
$$\mu_{s+1}(b^s_{c(n,1)}) = \mu_s(b^s_{c(n,0)}) \cup \{c(y,1)\}.$$

Этим завершается описание построения. Для каждого x полагаем $\mu(x) = \bigcup\limits_s \mu_s(x)$. Непосредственно из построения следует, что нумерация μ является A-вычислимой. Также нетрудно видеть, для произвольных $l,n \in \mathbb{N}$ и $i,k = \overline{0,2}$ если $l \neq n$, то $\mu(b_{c(l,i)}) \neq \mu(b_{c(n,k)})$. Отсюда следует, что семейство $\operatorname{ran}\mu$ бесконечно. Поскольку $\mu(x) = \mathbb{N}$ для всех $x \in M$, нумерация μ минимальна. Рассуждениями, почти аналогичными доказательству леммы 1, нетрудно получить, что μ не является A'-эффективно минимальной. Этим завершается доказательство теоремы.

Теперь доказательство теоремы 1 получается как следствие теорем 2 и 3. Если $m \leq n$, то по теореме 2 при $A = \varnothing^{(m-1)}$ получаем существование $\varnothing^{(m)}$-эффективно минимальной, но не $\varnothing^{(m-1)}$-эффективно минимальной Σ^0_m-вычислимой (и, значит, Σ^0_n-вычислимой) нумерации.

Если $m = n+1$, то существование искомой нумерации получается применением теоремы 3 при $A = \varnothing^{(n-1)}$.

4. Классификации минимальных нумераций семейств гиперарифметических множеств

Определение Σ^0_n-вычислимых нумераций естественным образом распространяется на уровни гиперарифметической иерархии. Согласно [7] для конструктивного ординала $\alpha > 0$ нумерация μ семейства Σ^0_α-множеств называется Σ^0_α-*вычислимой*, если $G_\mu \in \Sigma^0_\alpha$. Таким образом, для любого бесконечного конструктивного ординала α классы Σ^0_α-вычислимых и $\varnothing^{(\alpha)}$-вычислимых нумераций совпадают. Покажем, что теорема 1 также может быть распространена на уровни гиперарифметической иерархии.

Теорема 4. *Пусть α — произвольный бесконечный конструктивный ординал. Тогда для любого ординала β если $\beta \leq \alpha + 2$, то существует $\varnothing^{(\beta)}$-эффективно минимальная Σ^0_α-вычислимая нумерация, которая ни для какого ординала $\gamma < \beta$ не является $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальной.*

Доказательство. В доказательстве теоремы используется тот факт, что для любого конструктивного ординала $\alpha > 0$ существует такое множество B, что $B' \equiv_T \varnothing^{(\alpha)}$ и $\varnothing^{(\beta)} \leq_T B$ для всех ординалов $\beta < \alpha$, который может быть установлен, например, следующим образом.

Пусть a — клиниевское обозначение ординала α и f — вычислимая функция такая, что $\operatorname{ran} f = \{b \in \mathscr{O} : b <_O a\}$. Положим $B_0 = \varnothing$. Предположим, что для некоторого s множество B_s определено. Определим конечное множество F_s, положив его равным непустому конечному множеству с наименьшим каноническим индексом, удовлетворяющему условиям:

(a) для всех k и l если существуют x, y, для которых $c(k,x) \in B_s$ и $c(l,y) \in F_s$, то $k < l$,

(b) $\max F_s$ строго больше, чем значение use-функции вычисления $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)$, если $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)\downarrow$, и для всех k и x если $c(k,x) > \max F_s$, то $c(k,x) \notin B_s$,

(c) $\Phi_s^{B_s \cup F_s}(s)\downarrow$, если существует конечное F, удовлетворяющее условиям (a) и (b) с F вместо F_s, для которого $\Phi_s^{B_s \cup F}(s)\downarrow$.

Зафиксируем наименьшее k, для которого $c(k,0) > \max F_s$, и определим

$$B_{s+1} = \begin{cases} B_s \cup F_s \cup \{c(k,x) : x \in \varnothing^{(f(s))}\} \cup \{c(k+1,2s)\}, & \text{если } s \notin \varnothing^{(\alpha)}, \\ B_s \cup F_s \cup \{c(k,x) : x \in \varnothing^{(f(s))}\} \cup \{c(k+1,2s+1)\}, & \text{если } s \in \varnothing^{(\alpha)}. \end{cases}$$

Полагаем $B = \bigcup\limits_s B_s$. Нетрудно видеть, что условия (a)–(c) проверяются эффективно по s относительно оракула $\varnothing^{(\alpha)}$. Из определений множеств B_{s+1}, $s \in \mathbb{N}$, следует, что $\varnothing^{(f(s))} \leq_T B$ и что число k, для которого среди чисел вида $c(k+1,t)$ элементом B является только одно из чисел $c(k+1,2s)$, $c(k+1,2s+1)$, определяется эффективно по s относительно оракула B'. Отсюда следует, что $B' \equiv_T \varnothing^{(\alpha)}$.

Теперь предположим по индукции, что для всех бесконечных ординалов $\alpha_0 < \alpha$ заключение теоремы верно. Тогда для любого ординала $\beta < \alpha$ существует Σ^0_β-вычислимая (и, значит, Σ^0_α-вычислимая) нумерация, которая ни для какого ординала $\gamma < \beta$ не является $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальной. Если $\beta = \alpha$, то возьмем построенное множество B и, применив теорему 2, получим B-вычислимую нумерацию μ, которая является $\varnothing^{(\beta)}$-эффективно минимальной, но не является B-эффективно минимальной. Таким образом, μ Σ^0_α-вычислима и не $\varnothing^{(\gamma)}$-эффективно минимальна ни для какого $\gamma < \beta$. Если $\alpha+1 \leq \beta \leq \alpha+2$, то искомая нумерация сразу получается применением теорем 2 и 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

2. *Soare R I.* Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; New York, etc.: Springer-Verl., 1987.

3. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.

4. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.

5. *Бадаев С. А.* Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 3–34.

6. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* Обобщенно вычислимые универсальные нумерации // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 5. С. 555–569.

7. *Badaev S. A., Goncharov S. S.* Computability and numberings / Cooper S. B., Löwe B.,

Sorbi A. (eds). New Computational Paradigms. New York, NY: Springer, 2008.

Поступила в редакцию 17 июня 2024 г.
После доработки 17 июня 2024 г.
Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович (ORCID 0000-0002-4519-9696)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
marat.faizrahmanov@gmail.com

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 28.02.2025. Уч.-изд. л. 17,5. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.03.2025. Объем файла 1.84 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.