ISSN 0037–4474

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 66 1 2025

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 66, № 1 (389) **Январь—февраль, 2025**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2025

Адрес редакции:
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 517.9

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТИПА $L_{p(\cdot)}$ $(L_{q(\cdot)})$ И ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ С ПЕРЕМЕННОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

А. Н. Артюшин

Аннотация. Определяются итерированные (квази)нормированные пространства типа $L_{p(\cdot)}$ $(L_{q(\cdot)}(\dots))$ с показателями, зависящими от всех переменных. Для таких пространств доказан аналог интегрального неравенства Минковского для смешанных норм и мультипликативное неравенство интерполяционного типа. С помощью этих теорем доказана теорема вложения для пространства функций переменной гладкости, различной по разным направлениям.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.101

Ключевые слова: дробные производные, переменный показатель гладкости, переменный показатель суммируемости, итерированные пространства.

1. Введение

Пусть $Q = (0,T) \times (0,1)$, $0 < \nu, \mu < 1$, $1 < p < \infty$. Пусть $u(t,x) \in L_p(Q)$ такова, что

$$\partial_t^\nu u(t,x) \in L_p(Q), \quad \partial_x^\mu u(t,x) \in L_p(Q).$$

Предположим, что

$$\frac{1}{p} > \frac{\nu\mu}{\nu+\mu},$$

и положим

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\nu\mu}{\nu+\mu}. \tag{1.1}$$

Тогда согласно известной теореме вложения (см. [1, 2]) справедливо включение $u(t,x) \in L_q(Q)$. Среди последних результатов в этом направлении отметим работу [3] с теоремами вложения для дробных мультианизотропных пространств.

Нас будет интересовать случай переменных показателей гладкости $\nu = \nu(x)$, $\mu = \mu(t)$. Вопросы такого рода возникают, например, при анализе уравнения дробной диффузии с переменным показателем производной

$$\partial_t^{\nu(x)} u(t,x) - \Delta u(t,x) = f(t,x).$$

Есть основания считать, что смешанная задача для такого уравнения обладает свойством максимальной регулярности в $L_p(Q)$. Иными словами, для $f(t,x) \in L_p(Q)$ имеют место включения

$$\partial_t^{\nu(x)} u(t,x), \Delta u(t,x) \in L_p(Q).$$

Естественным образом возникает вопрос: какому пространству принадлежит сама функция $u(t,x)$?

Формально применяя формулу (1.1), приходим к вложению $u(t,x) \in L_{q(\cdot)}(Q)$, где

$$\frac{1}{q(t,x)} = \frac{1}{p} - \frac{\nu(x)\mu(t)}{\nu(x)+\mu(t)}.$$

Оказывается, что при разумных условиях на показатели $\nu = \nu(x)$ и $\mu = \mu(t)$ данное вложение действительно имеет место. Вообще говоря, теоремы вложения для пространств с переменным показателем суммируемости изучаются с помощью максимальных функций Харди — Литтлвуда. Но мы получим данные результаты совершенно иным способом. А именно, применим мультипликативное неравенство интерполяционного типа для специальных анизотропных пространств суммируемых функций, обобщающих пространства типа $L_p(0,T;L_q(0,1))$. Такое обобщение сравнительно легко проделать в случае $p = p(t)$, $q = q(t,x)$ (см. [4]), но нам нужен случай полной зависимости $p = p(t,x)$, $q = q(t,x)$. Для такого обобщения требуется особая конструкция.

В [5] рассматривались пространства вида $W^1_{\overline{p}(\cdot)}(\Omega)$, $\overline{p}(x) = (p_1(x),\dots,p_n(x))$. Однако теорему вложения с предельным показателем получить не удалось. Представленные здесь результаты частично решают эту проблему. Более подробные комментарии будут даны ниже.

2. Лебеговы пространства с переменным показателем суммируемости

Напомним некоторые свойства пространств функций с переменным показателем суммируемости (см. [6]).

Пусть $\Omega \subset R^n$, $p(x)$ — измеримая функция на множестве Ω, $p_- = \operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} p(x)$, $p_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} p(x)$, причем $0 < p_- \le p_+ < \infty$. Такие функции будем называть *допустимыми*. Легко видеть, что множество допустимых показателей замкнуто относительно операций сложения, умножения и деления. Всюду далее, не оговаривая особо, рассматриваем только допустимые $p(x)$.

Пространство $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ состоит из функций с конечным интегралом

$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\,dx < \infty.$$

Для $f \in L_{p(\cdot)}(\Omega)$ корректно определена квазинорма

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \left\{\inf \lambda > 0 : \int\limits_{\Omega} \left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \le 1\right\}. \tag{2.1}$$

Отметим, что для $f \not\equiv 0$ инфимум всегда достигается (непрерывность по λ).

Особо выделяем множество

$$\mathscr{P}_1(\Omega) = \{p(x) : 1 < p_- \le p_+ < \infty\}.$$

Обычно из контекста ясно, о каком множестве идет речь. Поэтому в дальнейшем, если это не вызовет недоразумений, пишем просто $\mathscr{P}_1$ без явного указания множества Ω. Если $p(x) \in \mathscr{P}_1$, то $\|\cdot\|_{p(\cdot)}$ — норма (Люксембурга). Снабженное такой нормой $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ становится рефлексивным банаховым пространством. Сопряженным к нему является пространство $L_{q(\cdot)}(\Omega)$, где

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1.$$

Как обычно, сопряженный показатель обозначаем через $q = p'$. Легко проверяется, что $q(x) \in \mathscr{P}_1$.

В дальнейшем особую роль играет неравенство Юнга. Пусть $0 \le \theta \le 1$. Тогда для любых $a, b \ge 0$

$$a^\theta b^{1-\theta} \le \theta a + (1-\theta)b \le a + b.$$

Поточечно применяя неравенство Юнга с $\theta = 1/p(x)$, легко получаем

$$\frac{1}{\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}} \int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-}.$$

Таким образом, имеет место неравенство Гёльдера (с константой)

$$\int\limits_\Omega |f(x)g(x)|\,dx \le \left(\frac{1}{p_-} + \frac{1}{q_-}\right)\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}. \tag{2.2}$$

С другой стороны, положим

$$g_f(x) = \left(\frac{|f(x)|}{\|f(x)\|_{p(\cdot)}}\right)^{p(x)-1}.$$

Легко убедиться, что $\|g_f(x)\|_{q(\cdot)} \le 1$ и, следовательно,

$$\|f(x)\|_{p(\cdot)} = \int\limits_\Omega f(x)g_f(x)\,dx \le \sup_{\|g(x)\|_{q(\cdot)}\le 1} \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

Значит, имеет место эквивалентность норм

$$\|f(x)\|_{p(\cdot)} \sim \sup_{\|g(x)\|_{q(\cdot)}\le 1} \int\limits_\Omega f(x)g(x)\,dx.$$

3. Пространства типа $L_{(t,x),(p,q)}$

Во многих доказательствах теорем вложения используются итерированные пространства вида $L_p(0,T;L_q(\Omega))$. Мы обобщаем такие пространства на случай показателей $p(t,x)$, $q(t,x)$. Отметим, что конструкция такого рода уже была ранее описана в [7]. Но, по-видимому, никакого дальнейшего развития эта идея не получила. Хочется сказать, что определение носит довольно необычный характер, поэтому сначала более подробно рассматривается случай двух переменных. После этого будет дано индуктивное определение и для других размерностей.

В дальнейшем рассматриваются функции многих переменных и применяются к ним различные (квази)нормы по той или иной переменной. В тех случаях, когда могут возникнуть сомнения, рядом с показателем нормы указывается соответствующая переменная. Например, запись $B(t) = \|u(t,x)\|_{x,p(t,x)}$ означает следующее. Для всякого фиксированного t рассматриваем функции $\widetilde{u}(x) = u(t,x)$ и $\widetilde{p}(x) = p(t,x)$ и полагаем $B(t) = \|\widetilde{u}(x)\|_{\widetilde{p}(x)}$.

Пусть $\Omega = R^2$, $p(t,x)$ и $q(t,x)$ — допустимые показатели. Для всякой функции $u(t,x)$ формально определяем величину $B_u(t) = \||u|^p\|_{x,q/p}$. Пространство $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ состоит из функций, для которых

$$J_{(t,x),(p,q)}(u) = \int\limits_R B_u(t)\,dt < \infty.$$

Согласно (2.1) для всякого t величина $B_u(t)$ определяется из равенства

$$\int\limits_R \frac{|u|^{q(t,x)}(t,x)}{B_u^{\frac{q}{p}(t,x)}(t)}\,dx = 1 \tag{3.1}$$

при условии, что $u(t,x) \not\equiv 0$ (в противном случае $B_u(t) = 0$). Из равенства (3.1) легко выводим, что $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ — векторное пространство. Особо отметим, что в определении не требуется неравенство $p(t,x) \le q(t,x)$.

Очевидно, что переменные t и x входят в определение пространства несимметричным образом. Поэтому следует указывать явный порядок их использования. В дальнейшем, когда этот порядок не меняется и ясен из контекста, пишем просто $L_{p,q}(R^2)$ и $J_{p,q}(u)$.

Лемма 3.1. *Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $|u(t,x)| \le |v(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$, то*

$$J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(v).$$

Для любой ограниченной функции $a(t,x) \ge 0$

$$A_- J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(au) \le A_+ J_{p,q}(u), \tag{3.2}$$

где

$$A_- = \operatorname*{ess\,inf}_{R^2} a(t,x)^{p(t,x)}, \quad A_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{R^2} a(t,x)^{p(t,x)}.$$

Если $u(t,x) \not\equiv 0$, то функция $J_{p,q}(\mu u)$ непрерывна и строго монотонно возрастает при $\mu \in (0,\infty)$. При этом

$$\lim_{\mu\to 0} J_{p,q}(\mu u) \to 0, \quad \lim_{\mu\to\infty} J_{p,q}(\mu u) \to \infty. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из равенства (3.1) следует, что для п.в. $t \in R$ справедливо неравенство $B_u(t) \le B_v(t)$, а значит, $J_{p,q}(u) \le J_{p,q}(v)$.

Рассмотрим функцию $v(t,x) = u(t,x)A_+^{1/p(t,x)}$. Ясно, что $a(t,x)u(t,x) \le v(t,x)$ и $B_v(t) = A_+ B_u(t)$. Следовательно,

$$J_{p,q}(au) \le J_{p,q}(v) = A_+ J_{p,q}(u).$$

Аналогично доказываем неравенство $J_{p,q}(au) \ge A_- J_{p,q}(u)$.

Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2$. Тогда из неравенства (3.2) следует, что

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p_-} J_{p,q}(\mu_1 u) \le J_{p,q}(\mu_2 u) \le \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{p_+} J_{p,q}(\mu_1 u). \tag{3.4}$$

В частности, $J_{p,q}(\mu_2 u) > J_{p,q}(\mu_1 u)$. Устремляя либо $\mu_1 \to 0$, либо $\mu_2 \to \infty$, получаем (3.3). $\square$

Как и ранее, вводим в рассмотрение однородный функционал типа Минковского

$$\|u\|_{p,q} = \{\inf \lambda > 0 : J_{p,q}(u/\lambda) \le 1\}. \tag{3.5}$$

Из леммы 3.1 следует, что данное определение корректно и для нетривиальных $u(t,x)$ требуемый инфимум достигается при $\lambda = \|u\|_{p,q}$. Как увидим далее, этот функционал задает квазинорму, а в случае $p,q \in \mathscr{P}_1$ эта квазинорма эквивалентна некоторой норме. Пока отметим некоторые простые следствия данного определения. Легко видеть, что для постоянных $p(t,x) \equiv p$ и $q(t,x) \equiv q$ только что определенное пространство в точности совпадает с $L_p(R; L_q(R))$. В случае $p(t,x) = q(t,x)$ имеет место «естественное» равенство

$$L_{(t,x),(p,p)}(R^2) = L_{(x,t),(p,p)}(R^2) = L_p(R^2).$$

Лемма 3.2. *Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $|u(t,x)| \le |v(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$, то*

$$\|u\|_{p,q} \le \|v\|_{p,q}.$$

Доказательство. Рассмотрим функции $u_1 = u/\|u\|_{p,q}$ и $v_1 = v/\|u\|_{p,q}$. Очевидно, что $|u_1(t,x)| \le |v_1(t,x)|$ для п.в. $(t,x) \in R^2$. Следовательно, по лемме 3.1

$$1 = J_{p,q}(u_1) \le J_{p,q}(v_1),$$

и $\|v_1\|_{p,q} \ge 1$. $\square$

Лемма 3.3. *Пусть $u(t,x) \in L_{p,q}(R^2)$. Если $\|u\|_{p,q} \ge 1$, то*

$$\|u\|_{p,q}^{p_-} \le J_{p,q}(u) \le \|u\|_{p,q}^{p_+}. \tag{3.6}$$

Если $\|u\|_{p,q} \le 1$, то

$$\|u\|_{p,q}^{p_+} \le J_{p,q}(u) \le \|u\|_{p,q}^{p_-}. \tag{3.7}$$

Доказательство. Пусть $\|u\|_{p,q} > 1$. Положим $\mu_1 = 1/\|u\|_{p,q}$, $\mu_2 = 1$ и применим неравенство (3.4). Получим неравенство (3.6). Аналогично доказываем неравенство (3.7). $\square$

В дальнейшем нам понадобится одна специальная конструкция, которую назовем *разложением нормы*. Пусть $u \in L_{p,q}(R^2)$. Обозначим

$$m_u(t) = \operatorname{mes}\{x \in R : |u(t,x)| \ne 0\}, \quad R_{ut} = \{t \in R : m_u(t) \ne 0\}.$$

Оказывается, что для нетривиальной функции $u(t,x)$ единственным образом определена такая пара N_0, $N_1(t) \ge 0$, что

$$N_1(t) = 0, \quad t \notin R_{ut}, \tag{3.8}$$

$$N_1(t) > 0, \quad t \in R_{ut}, \tag{3.9}$$

$$\int\limits_R N_1(t)\,dt = 1, \tag{3.10}$$

$$\int\limits_R \frac{u^q}{N_0^q N_1^{q/p}}\,dx = 1, \quad t \in R_{ut}. \tag{3.11}$$

Для тривиальной функции $u(t,x) \equiv 0$ эти величины просто равны 0.

Действительно, положим $N_0 = \|u\|_{p,q}$ и рассмотрим функцию $v = u/N_0$. Как и ранее, рассматриваем $B_v(t)$ и полагаем $N_1(t) = B_v(t)$. Тогда согласно определениям (3.1), (3.5) выполнены соотношения (3.8)–(3.11). Покажем единственность. Пусть $t \in R_{ut}$. Из (3.11) следует, что $\|u(t,\cdot)/N_{u0}\|_{x,q/p} = N_{u1}(t)$. В силу (3.8), (3.10) $J_{p,q}(u/N_{u0}) = 1$, а значит, $N_0 = \|u\|_{p,q}$. Тогда с необходимостью $N_1(t) = B_v(t)$.

4. Теорема о сравнении перестановочных квазинорм

Как отмечено выше, переменные t и x входят в определение пространства $L_{(t,x),(p,q)}(R^2)$ несимметрично. В связи с этим возникает естественный вопрос: что произойдет, если поменять порядок переменных? Или при каких условиях можно сравнивать квазинормы $\|u\|_{(t,x),(p,q)}$ и $\|u\|_{(x,t),(q,p)}$?

Для постоянных показателей p, q сравнивать квазинормы позволяет известное интегральное неравенство Минковского (см., например, [8, с. 60]). Для переменных показателей вида $p(t) \geq q(x) \geq 1$ неравенство для смешанных норм было заявлено (с пробелами в доказательстве) в [4] (окончательный результат см. в [9]). Оказывается, что и в общем случае это можно делать при условии $p(t,x) \geq q(t,x)$ (или наоборот).

Теорема 4.1. *Пусть для допустимых показателей выполнено неравенство* $p(t,x) \geq q(t,x)$ *для п.в* $(t,x) \in R^2$. *Тогда для некоторой константы* $C(p,q)$

$$\|u\|_{(t,x),(p,q)} \leq C(p,q)\|u\|_{(x,t),(q,p)}.$$

Доказательство. Пусть $\|u\|_{(t,x),(p,q)} = 1$. Как и ранее, для $t \in R$ вводим функцию $B_u(t) = \||u|^p\|_{x,q/p}$. По определению это означает, что для $t \in R_{ut}$

$$\int\limits_R \frac{|u|^q(t,x)}{B_u^{q/p}(t)}\,dx = 1, \quad \int\limits_R B_u(t)\,dt = 1.$$

Следовательно,

$$1 = \int\limits_{R_{ut}} dt \int\limits_R B(t)\frac{|u|^q(t,x)}{B_u^{q/p}(t)}\,dx = \int\limits_R dx \int\limits_R |u|^q B_u^{(p-q)/p}\,dt. \tag{3.12}$$

Здесь можно было бы воспользоваться неравенством Гёльдера (2.2), но для этого нужно включение $(p/q) \in \mathscr{P}_1$.

Положим $\theta(t,x) = q/p$. Тогда $1-\theta = (p-q)/p$. Обозначим $N(x) = \||u|^q\|_{t,p/q}$. По неравенству Юнга если $N(x) \neq 0$, то

$$|u|^q B_u^{(p-q)/p} \leq N(x)\left(\theta\frac{|u|^p}{N^{p/q}(x)} + (1-\theta)B(t)\right).$$

Подставляя это неравенство в (3.12), получаем

$$1 \leq C_\theta \int\limits_R \|u^q\|_{(t,p/q)}\,dx$$

с константой

$$C_\theta = \operatorname*{ess\,sup}_{R^2}\theta(t,x) + \operatorname*{ess\,sup}_{R^2}(1-\theta(t,x)), \quad 1 \leq C_\theta \leq 2.$$

Поэтому

$$J_{(x,t),(q,p)}(u) \geq \frac{1}{C_\theta}.$$

По лемме 3.3

$$\|u\|_{(x,t),(q,p)}(u) \geq \frac{1}{C_\theta^{1/q_-}}. \quad \square$$

5. Многомерный случай

Рассмотрим случай произвольного количества переменных.

Пусть $n > 2$. Пусть для $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задан векторный показатель $\overline{p}(\overline{x}) = (p_1(\overline{x}), p_2(\overline{x}), \dots, p_n(\overline{x}))$ с допустимыми компонентами $p_k(\overline{x})$, $k = \overline{1,n}$. Как и в двумерном случае, следует указать некоторую перестановку индексов, задающую порядок использования переменных x_k. Это существенно осложнит все обозначения и рассуждения. Поэтому чтобы не загромождать изложение излишними обозначениями, считаем, что указана естественная перестановка в порядке возрастания индексов.

Далее индуктивным образом определяем пространство $L_{\overline{p}(\overline{x})}(R^n)$ и соответствующую квазинорму. Для $n = 2$ они уже были определены ранее ($L_{p_1,p_2}(R^2)$ и $\|\cdot\|_{p_1,q_1}$). Пусть дана функция $u(\overline{x})$. Для $x_1 \in R$ обозначим $\overline{y} = (x_2, \dots, x_n)$, $\overline{q}(\overline{y}) = (p_2(x_1, \overline{y}), \dots, p_n(x_1, \overline{y}))$, $v(\overline{y}) = |u(x_1, \overline{y})|^{p_1(x_1, \overline{y})}$. После этого формально определим
$$B_u(x_1) = \|v(\overline{y})\|_{L_{\overline{q}/p_1}(R^{n-1})}. \tag{5.1}$$
Пространство $L_{\overline{p}(\overline{x})}(R^n)$ состоит из тех функций, у которых
$$J_{\overline{p}}(u) = \int\limits_R B_u(x_1)\, dx_1 < \infty.$$
При этом формально определен однородный функционал
$$\|u\|_{\overline{p}} = \{\inf \lambda > 0 : J_{\overline{p}}(u/\lambda) \le 1\}.$$
Позже докажем, что этот функционал задает квазинорму.

Лемма 5.1. *Пусть $u(\overline{x}), v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Если $|u(\overline{x})| \le |v(\overline{x})|$ для п.в. $\overline{x} \in R^n$, то*
$$J_{\overline{p}}(u) \le J_{\overline{p}}(v). \tag{5.2}$$
Для любой ограниченной функции $a(\overline{x}) \ge 0$
$$A_- J_{\overline{p}}(u) \le J_{\overline{p}}(au) \le A_+ J_{\overline{p}}(u),$$
где
$$A_- = \operatorname*{ess\,inf}_{R^n} a(\overline{x})^{\overline{p}(\overline{x})}, \quad A_+ = \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} a(\overline{x})^{\overline{p}(\overline{x})}.$$
Если $u(\overline{x}) \not\equiv 0$, то функция $J_{\overline{p}}(\mu u)$ непрерывна и строго монотонно возрастает при $\mu \in (0, \infty)$. При этом
$$\lim_{\mu \to 0} J_{\overline{p}}(\mu u) \to 0, \quad \lim_{\mu \to \infty} J_{\overline{p}}(\mu u) \to \infty.$$
Функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ корректно определен, и $\|u\|_{\overline{p}} \le \|v\|_{\overline{p}}$.

Доказательство. Применяем индукцию по размерности. Для $n = 2$ утверждение леммы доказано в леммах 3.1 и 3.2. Пусть утверждение леммы верно для некоторого $n = n_0$. Рассмотрим случай $n = n_0 + 1$.

Фиксируем $x_1 \in R$. В силу индуктивного предположения справедливы неравенства
$$J_{\overline{q}/p_1}(|u|^{p_1}(x_1, \overline{y})) \le J_{\overline{q}/p_1}(|v|^{p_1}(x_1, \overline{y})), \quad \||u|^{p_1}(x_1, \overline{y})\|_{\overline{q}/p_1} \le \||v|^{p_1}(x_1, \overline{y})\|_{\overline{q}/p_1}.$$
А отсюда уже следует неравенство (5.2). Все остальные рассуждения дословно повторяют доказательства из лемм 3.1 и 3.2. $\square$

Введем обозначение $\overline{z}_k = (x_1, \dots, x_k)$, $k = \overline{1,n}$.

Лемма 5.2 (разложение нормы). *Для всякой нетривиальной функции* $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *однозначно определены константа* $N_{u0} > 0$ *и набор функций* $N_{uk}(\overline{z}_k) \geq 0$, $k = \overline{1, n-1}$ *со следующими свойствами. Функция* $N_{u1}(x_1)$ *нетривиальна и*

$$\int\limits_R N_{u1}\, dx_1 = 1. \tag{5.3}$$

Далее, для всякого $k = \overline{2, n-1}$ *обозначим*

$$J_k(\overline{z}_{k-1}) = \int\limits_R N_{uk}\, dx_k.$$

Тогда для любого $\overline{z}_{k-1} \in R^{k-1}$

$$\text{либо } J_k(\overline{z}_{k-1}) = 0, \quad \text{либо } J_k(\overline{z}_{k-1}) = 1. \tag{5.4}$$

Для всякого $\overline{z}_{n-1}$ *либо* $u(\overline{z}_{n-1}, x_n) \equiv 0$, *либо* $N_{uk}(\overline{z}_k) \neq 0$ *для всех* $k = \overline{1, n-1}$ *и*

$$\int\limits_R \frac{|u|^{p_n}}{N_{u0}^{p_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\, dx_n = 1. \tag{5.5}$$

При этом имеет место равенство $N_{u0} = \|u\|_{\overline{p}}$.

Доказательство. В равенстве (5.5) в знаменателе присутствуют величины, которые могут обращаться в 0. Поэтому приходится делать многочисленные оговорки. В частности, в (5.4) мы не можем требовать равенства, аналогичного (5.3). То же самое можно сказать и про условия, когда имеет место равенство (5.5). Поэтому далее исключительно ради простоты изложения считаем $|u(\overline{x})| > 0$ для всех $\overline{x} \in R^n$. При таком предположении все величины $N_{uk}(\overline{z}_k) \neq 0$ и все оговорки становятся не нужны.

При $n = 2$ требуемое (единственное) разложение вытекает из (3.10), (3.11). Рассмотрим случай $n = 3$. Положим $N_{u0} = \|u\|_{\overline{p}}$ и рассмотрим $v = u/\|u\|_{\overline{p}}$. Фиксируем $x_1 \in R$. Обозначим

$$w(x_2, x_3) = |v(x_1, x_2, x_3)|^{p_1(x_1, x_2, x_3)}.$$

Согласно (5.1) следует рассмотреть квазинорму $B_v(x_1) = \|w\|_{r_2, r_3}$ с показателями $r_2 = p_2/p_1$ и $r_3 = p_3/p_1$, причем по индуктивному предположению $\|w\|_{r_2, r_3} = N_{w0}$. Из разложения (3.10), (3.11) следует, что

$$\int\limits_R \frac{|w|^{r_3}}{N_{w0}^{r_3} N_{w1}^{r_3/r_2}(x_2)}\, dx_3 = 1, \quad \int\limits_R N_{w1}\, dx_2 = 1.$$

Для данного фиксированного x_1 полагаем

$$N_{u1}(x_1) = N_{w0}, \quad N_{u2}(x_1, x_2) = N_{w1}(x_2).$$

Тогда с учетом определения величин r_2 r_3 и равенства $v = u/N_{u0}$ получаем

$$\int\limits_R \frac{|u|^{p_3}}{N_{u0}^{p_3} N_{u1}^{p_3/p_1}(x_1) N_{u2}^{p_3/p_2}(x_1, x_2)}\, dx_3 = 1, \quad \int\limits_R N_{u2}(x_1, x_2)\, dx_2 = 1.$$

Кроме этого в силу равенства $\|v\|_{\overline{p}} = 1$ имеем

$$\int\limits_R N_{u1}(x_1)\,dx_1 = \int\limits_R B_v(x_1)\,dx_1 = 1.$$

Покажем единственность такого разложения. Пусть выполнены равенства (5.3)–(5.5). Для каждого фиксированного $x_1 \in R$ рассмотрим функцию $w = u/N_{u0}$ и равенства (5.4), (5.5). Из единственности разложения нормы для размерности 2 следует, что

$$N_{u1}(x_1) = N_{w0} = \|w^{p_1}\|_{\frac{p_2}{p_1},\frac{p_3}{p_1}}, \quad N_{u2}(x_1,x_2) = N_{w1}(x_2).$$

Из (5.3) следует $J_{\overline{p}}(u/N_{u0}) = 1$ и $\|u\|_{\overline{p}} = N_{u0}$. Но тогда и N_{u1}, N_{u2} определяются однозначно для любого $x_1 \in R$ как элементы разложения нормы однозначно определенной функции w.

Далее действуем индуктивным образом. $\square$

Ниже нам понадобится одна полезная лемма с оценкой разложения нормы.

Лемма 5.3. *Пусть $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$, и пусть для некоторых $M_0 > 0$, $M_k(\overline{z}_k) \geq 0$, $k = \overline{1, n-1}$, выполнены неравенства*

$$u(\overline{x}) = 0, \quad \text{если } \prod_{k=1}^{n-1} M_k(\overline{z}_k) = 0, \quad J_0(\overline{z}_{n-1}) = \int\limits_R \frac{|u|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{p_n/p_k}(\overline{z}_k)}\,dx_n \leq 1,$$

$$J_1 = \int\limits_R M_1(x_1)\,dx_1 \leq 1, \quad J_k(\overline{z}_{k-1}) = \int\limits_R M_k(\overline{z}_k)\,dx_k \leq 1, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

Тогда $\|u\|_{\overline{p}} \leq M_0$.

Доказательство. Положим

$$v(\overline{x}) = \frac{u(\overline{x})}{J_0^{1/p_n}(\overline{z}_{n-1}) J_1^{1/p_1} \prod\limits_{k=2}^{n-1} J_k^{1/p_k}(\overline{z}_{k-1})}, \quad \text{если } u(\overline{x}) \neq 0,$$

$$\widetilde{M}_1(x_1) = \frac{M_1(x_1)}{J_1},$$

$$\widetilde{M}_k(\overline{z}_k) = \frac{M_k(\overline{z}_k)}{J_k(\overline{z}_{k-1})}, \quad \text{если } J_k(\overline{z}_{k-1}) \neq 0, \quad k = \overline{2, n-1}.$$

Тогда при условии $\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k(\overline{z}_k) \neq 0$ имеет место равенство

$$\int\limits_R \frac{|v|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} \widetilde{M}_k^{p_n/p_k}}\,dx_n = 1$$

и для функций $\widetilde{M}_k(\overline{z}_k)$ выполнены соотношения (5.3), (5.4). Из единственности разложения нормы следует, что $\|v\|_{\overline{p}} = M_0$. При этом, очевидно, $v(\overline{x}) \geq u(\overline{x})$ для п.в. $\overline{x} \in R^n$. По лемме 5.1 $\|u\|_{\overline{p}} \leq M_0$. $\square$

Теорема 5.1. *Пусть* $\varepsilon > 0$. *Найдется константа* $C(\varepsilon)$ *такая, что для любых* $u(\overline{x}), v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *имеет место неравенство*

$$\|u+v\|_{\overline{p}} \le (1+\varepsilon)\|u\|_{\overline{p}} + C(\varepsilon)\|v\|_{\overline{p}}.$$

В частности, функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ *задает квазинорму.*

Доказательство. Пусть $u(t,x), v(t,x) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Пусть $Z, \delta, \gamma > 0$. Рассмотрим разложения нормы N_{uk}, N_{vk}, и положим

$$M_0 = (1+\varepsilon)N_{u0} + ZN_{v0}, \quad M_k = (1-\delta)N_{uk} + \delta N_{vk}, \quad k = \overline{1, n-1}.$$

Несложно убедиться, что для некоторой константы $C(\gamma) > 0$

$$|u+v|^{p_n} \le (1+\gamma)^{p_n}|u|^{p_n} + C^{p_n}(\gamma)|v|^{p_n}.$$

Поэтому

$$\frac{|u+v|^{p_n}}{M_0^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{p_n/p_k}} \le \theta^{p_n}\frac{|u|^{p_n}}{N_{u0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}} + \frac{C(\gamma,\delta)|v|^{p_n}}{Z^{p_n}N_{v0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{p_n/p_k}},$$

где

$$\theta = \frac{1+\gamma}{(1+\varepsilon)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(1-\delta)^{1/p_k}}.$$

Выбираем Z, γ, δ так, чтобы $\theta^{p_n} \le \theta_0 < 1$ и $C(\gamma,\delta)/Z^{p_n} \le 1-\theta_0$. После этого применяем лемму 5.3. $\square$

Следствие 5.1 (регуляризация разложения нормы). *Пусть* $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$, $u(\overline{x}) \not\equiv 0$. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется функция* $u_\varepsilon(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *такая, что*

$$u_\varepsilon(\overline{x}) \ne 0,\ \overline{x} \in R^n, \quad |u_\varepsilon(\overline{x}) - u(\overline{x})| \le \varepsilon,\ \overline{x} \in R^n, \quad \|u_\varepsilon\|_{L_{\overline{p}}(R^n)} \le \|u\|_{L_{\overline{p}}(R^n)} + \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Рассмотрим функцию

$$v(\overline{x}) = \begin{cases} u(\overline{x}) + \operatorname{sign}(u(\overline{x}))\delta e^{-|\overline{x}|^2}, & u(\overline{x}) \ne 0, \\ \delta e^{-|\overline{x}|^2}, & u(\overline{x}) = 0. \end{cases}$$

После этого устремляем $\delta \to 0$ и применяем теорему 5.1. $\square$

С помощью данного следствия в дальнейшем можно отказаться от всех оговорок при использовании разложения нормы.

6. Мультипликативное неравенство

Для пространств с постоянным показателем хорошо известен следующий факт. Если $u \in L_p(\Omega)$ и $u \in L_q(\Omega)$, то $u \in L_r(\Omega)$, где

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q},$$

причем

$$\|u\|_r \le \|u\|_p^\theta \|u\|_q^{1-\theta}.$$

Оказывается, что для описанных выше пространств применима интерполяция нескольких пространств $L_{\overline{p}_j}(R^n)$, $j = \overline{1, m}$, с поточечными множителями $\theta_j(\overline{x})$. Исключительно для простоты изложения ниже рассматриваем случай $m = 2$.

Теорема 6.1. *Пусть заданы два допустимых показателя $p(\overline{x})$, $q(\overline{x})$ и две измеримых функции $0 \le \theta_p(\overline{x}), \theta_q(\overline{x}) \le 1$, причем*

$$\theta_p(\overline{x}) + \theta_q(\overline{x}) = 1.$$

Определим допустимый показатель $\overline{r}(\overline{x})$ следующим образом:

$$\frac{1}{r_k} = \frac{\theta_p}{p_k} + \frac{\theta_q}{q_k}, \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.6}$$

Пусть $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$, $v(\overline{x}) \in L_{\overline{q}}(R^n)$ и их квазинормы равны $\overline{U}$, $\overline{V}$ соответственно. Обозначим

$$w(\overline{x}) = |u|^{\theta_p}|v|^{\theta_q}.$$

Тогда

$$\|w\|_{\overline{r}} \le C \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} |\overline{U}|^{\theta_p}|\overline{V}|^{\theta_q}.$$

Доказательство. Для оценки $\|w\|_{\overline{r}}$ применим лемму 5.3. Рассмотрим разложения нормы N_{uk}, N_{vk} и для $k = \overline{1, n-1}$ положим

$$M_k(\overline{z}_k) = \frac{1}{2} \operatorname*{ess\,sup}_{(x_{k+1},\ldots,x_n)\in R^{n-k}} N_{uk}^{\frac{\theta_p r_k}{p_k}} N_{vk}^{\frac{\theta_q r_k}{q_k}}.$$

В силу (5.6) можно применять неравенства Юнга

$$\int\limits_R M_k(\overline{z}_k)\, dx_k \le 1.$$

Для $k = 0$ полагаем

$$M_0 = 2^{\gamma} \operatorname*{ess\,sup}_{R^n} N_{u0}^{\theta_p} N_{v0}^{\theta_q}, \quad \gamma \ge \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r_k}\right)_+.$$

Тогда

$$\frac{w^{r_n}}{M_0^{r_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{r_n/r_k}} \le \frac{1}{2} \left(\frac{u^{p_n}}{N_{u0}^{p_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\right)^{\frac{\theta_p r_n}{p_n}} \left(\frac{v^{q_n}}{N_{v0}^{q_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{q_n/q_k}}\right)^{\frac{\theta_q r_n}{q_n}}.$$

Снова используем неравенство Юнга:

$$\int\limits_R \frac{w^{r_n}}{M_0^{r_n} \prod\limits_{k=1}^{n-1} M_k^{r_n/r_k}}\, dx_n \le 1.$$

Осталось применить лемму 5.3. $\square$

7. Сравнение перестановочных квазинорм в многомерном случае

Как и в двумерном случае, возникает вопрос о сравнении квазинорм, получаемых после перестановки переменных. Оказывается, что и в многомерном случае можно сравнивать квазинормы после перестановки двух соседних переменных при выполнении соответствующего неравенства.

Теорема 7.1. *Пусть на R^n задан допустимый показатель $\overline{p}(\overline{x})$. Предположим, что для некоторого $k < n$ для п.в. $\overline{x} \in R^n$ справедливо неравенство $p_k(\overline{x}) \geq p_{k+1}(\overline{x})$. Рассмотрим перестановку переменных $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_{k+1}, x_k, \ldots, x_n)$ и показателей $\overline{q} = (p_1, \ldots, p_{k+1}, p_k, \ldots, p_n)$. Тогда для $u \in L_{\widetilde{x},\overline{q}}(R^n)$ имеет место неравенство*

$$\|u\|_{\overline{x},\overline{p}} \leq C\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}}.$$

Доказательство. Далее без потери общности считаем, что $\|u\|_{\overline{x},\overline{p}} = 1$. Применяем индукцию по k. Пусть $k = 1$. Для простоты изложения рассмотрим случай $n = 4$. Все характерные черты доказательства будут видны и в этом случае. Рассмотрим разложение квазинормы $\|u\|_{\overline{x},\overline{p}}$: $N_1(x_1)$, $N_2(x_1, x_2)$, $N_3(x_1, x_2, x_3)$. Вместе с ним рассматриваем разложение квазинормы $\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}}$: M_0, $M_1(x_2)$, $M_2(x_2, x_1)$, $M_3(x_2, x_1, x_3)$. Обозначим

$$U = |u|^{p_4} \prod_{k=1}^{3} N_k^{1-p_4/p_k}.$$

Из (5.3)–(5.5) следует равенство

$$\int_{R^4} U\, d\overline{x} = 1.$$

Пусть $0 < s < \min((p_1)_-, (p_2)_-, (p_3)_-, (p_4)_-)$. Имеет место равенство $U = U_N U_M D_3 D_{12}$, где

$$U_N = \frac{|u|^{p_4-s}}{\prod\limits_{k=1}^{3} N_k^{(p_4-s)/p_k}}, \quad U_M = \frac{|u|^s}{M_0^s M_1^{s/p_2} M_2^{s/p_1} M_3^{s/p_3}},$$

$$D_3 = M_3^{s/p_3} N_3^{1-s/p3}, \quad D_{12} = N_1 N_2 \left(\frac{M_0 M_1^{1/p_2} M_2^{1/p_1}}{N_1^{1/p1} N_2^{1/p2}} \right)^s.$$

Фиксируем некоторое $\varepsilon > 0$. Учитывая определение s, с помощью неравенства Юнга легко получаем

$$U_N U_M \leq \frac{|u|^{p_4}}{\prod\limits_{k=1}^{3} N_k^{p_4/p_k}} + \frac{|u|^{p_4}}{M_0^{p_4} M_1^{p_4/p_2} M_2^{p_4/p_1} M_3^{p_4/p_3}},$$

$$D_3 \leq M_3 + N_3,$$

$$D_{12} \leq N_1 N_2 \left(\varepsilon + C(\varepsilon) \left(\frac{M_0 M_1^{1/p_2} M_2^{1/p_1}}{N_1^{1/p1} N_2^{1/p2}} \right)^{p_2} \right).$$

По условию $p_2(\overline{x}) \leq p_1(\overline{x})$. В последнем неравенстве снова можно применить неравенство Юнга

$$D_{12} \leq \varepsilon N_1 N_2 + C(\varepsilon) M_0^{p_2} M_1 M_2^{p_2/p_1} N_1^{1-p_2/p1} \leq \varepsilon N_1 N_2 + C(\varepsilon) M_0^{p_2} M_1 (M_2 + N_1).$$

Заметим, что $M_1(x_2)$ не зависит от x_1 и

$$\int_R (M_2(x_2, x_1) + N_1(x_1))\, dx_1 = 2.$$

Поэтому

$$1 = \int\limits_{R^4} U\,d\overline{x} \le 4\varepsilon + 8C(\varepsilon)\max\bigl(M_0^{(p_2)_+}, M_0^{(p_2)_-}\bigr).$$

Выбираем $\varepsilon < 1/4$ и получаем $\|u\|_{\widetilde{x},\overline{q}} = M_0 \ge C$. Итак, в случае $k = 1$ требуемое утверждение доказано.

Пусть утверждение теоремы справедливо для $k = k_0$. Рассмотрим случай $k = k_0 + 1$. В этом случае перестановка не меняет первый показатель p_1. По определению

$$1 = \|u\|_{\overline{x},\overline{p}} = \int\limits_{R} \||u|^{p_1}\|_{(x_2,\dots,x_n),(p_2/p_1,\dots,p_n/p_1)}\,dx_1.$$

К квазинорме под интегралом можно применить индуктивное предположение и получить неравенство $J_{\widetilde{x},\overline{q}}(u) \ge C$. Для доказательства теоремы осталось только применить многомерный аналог леммы 3.3. $\square$

8. Случай $\overline{p} \in \mathscr{P}_1$

В этом разделе, особо не оговаривая, считаем, что $p_k \in \mathscr{P}_1$, $k = \overline{1,n}$. В этом случае определены сопряженные показатели $p'_k \in \mathscr{P}_1$. Далее будем обозначать $\overline{p}' = (p'_1,\dots,p'_n)$.

Лемма 8.1 (неравенство Гёльдера для квазинормы). *Если $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ и $v \in L_{\overline{p}'}(R^n)$, то*

$$\int\limits_{R^n} |uv|\,dx \le C_{\overline{p},\overline{p}'}\|u\|_{\overline{p}}\|v\|_{\overline{p}'},$$

где

$$C_{\overline{p},\overline{p}'} = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(p_k)_-} + \frac{1}{(p'_k)_-}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим разложения норм N_{uk} и N_{vk}, $k = \overline{0,n-1}$. Очевидным образом

$$Z = \frac{|uv|}{N_{u0}N_{v0}} = \left(\frac{|u|}{N_{u0}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{1/p_k}}\frac{|v|}{N_{v0}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{1/p'_k}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\bigl(N_{uk}^{1/p_k}N_{vk}^{1/p'_k}\bigr).$$

К каждой паре в скобках применяем неравенство Юнга:

$$Z \le \left(\frac{|u|^{p_n}}{(p_n)_- N_{u0}^{p_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}} + \frac{|v|^{p'_n}}{(p'_n)_- N_{v0}^{p'_n}\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{vk}^{p'_n/p'_k}}\right)\prod_{k=1}^{n-1}\left(\frac{N_{uk}}{(p_k)_-} + \frac{N_{vk}}{(p'_k)_-}\right).$$

Осталось применить равенства (5.3)–(5.5). $\square$

Лемма 8.2. *Пусть $u \in L_{\overline{p}}(R^n)$ и $\|u\|_{\overline{p}} = 1$. Обозначим*

$$v(t,x) = |u|^{p_n-1}\prod_{k=1}^{n} N_{uk}^{1-p_n/p_k}.$$

Тогда $\|v\|_{\overline{p}'} = 1$ *и* $N_{vk}(\overline{z}_k) = N_{uk}(\overline{z}_k)$ *для* $k = \overline{1, n-1}$. *Кроме этого*

$$\int\limits_{R^n} uv\, dx = 1.$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{|v|^{p_n'}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n'/p_k'}} = |u|^{p_n} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{N_{uk}^{\frac{(p_k-p_n)}{p_k}\frac{p_n}{(p_n-1)}}}{N_{uk}^{\frac{p_n}{(p_n-1)}\frac{(p_k-1)}{p_k}}} = \frac{|u|^{p_n}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}.$$

В силу единственности разложения нормы получаем первое утверждение леммы. При этом в силу (5.3)–(5.5)

$$\int\limits_{R^n} uv\, dx = \int\limits_{R^n} \left(\prod_{k=1}^{n-1} N_{uk}\right) \frac{|u|^{p_n}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} N_{uk}^{p_n/p_k}}\, dx = 1. \quad \square$$

Определим норму в пространстве $L_{\overline{p}}(R^n)$. Обозначим

$$U_1 = \{u(t,x) : \|u\|_{\overline{p}} \le 1\}.$$

Если это множество выпуклое, то функционал $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ удовлетворяет неравенству треугольника, а значит, является нормой. В общем случае рассматриваем выпуклое уравновешенное множество $\widetilde{U}_1 = \operatorname{conv} U_1$, которое порождает некоторую полунорму. Оказывается, что на самом деле будет порождаться норма, эквивалентная квазинорме $\|\cdot\|_{\overline{p}}$. Отметим, что с технической точки зрения проще использовать множество $\widetilde{U}_1$ в неявном виде.

Пусть $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$. Рассмотрим всевозможные разложения u в конечную сумму $u(\overline{x}) = \sum\limits_k u_k(\overline{x})$ и положим

$$\Phi_{\overline{p}}(u) = \inf_{\sum\limits_k u_k = u} \sum_k \|u_k\|_{\overline{p}}. \tag{5.7}$$

Легко видеть, что функционал $\Phi_{\overline{p}}$ однородный и для него справедливо неравенство треугольника, так что этот функционал задает некоторую полунорму. Отметим между прочим, что из определения (5.7) тривиально следует неравенство $\Phi_{\overline{p}}(u) \le \|u\|_{\overline{p}}$.

Лемма 8.3 (неравенство Гёльдера для нормы). *Если* $u(\overline{x}) \in L_{\overline{p}}(R^n)$ *и* $v(\overline{x}) \in L_{\overline{p}'}(R^n)$, *то*

$$J = \int\limits_{R^n} |uv|\, dx \le C_{\overline{p},\overline{p}'} \Phi_{\overline{p}}(u) \Phi_{\overline{p}'}(v)$$

с константой $C_{\overline{p},\overline{p}'}$ *из леммы* 8.1.

Доказательство. Пусть

$$u = \sum_k u_k, \quad v = \sum_j v_j.$$

Тогда по лемме 8.1

$$J \le C_{\overline{p},\overline{p}'} \sum_{k,j} \|u_k\|_{\overline{p}} \|v_j\|_{\overline{p}'} = C_{\overline{p},\overline{p}'} \Big(\sum_k \|u_k\|_{\overline{p}}\Big) \Big(\sum_j \|v_j\|_{\overline{p}'}\Big). \quad \square$$

Теорема 8.1. *Функционал $\Phi_{\overline{p}}$ задает норму на пространстве $L_{\overline{p}}(R^n)$, причем*
$$\frac{1}{C_{\overline{p},\overline{p}'}}\|u\|_{\overline{p}} \leq \Phi_{\overline{p}}(u) \leq \|u\|_{\overline{p}}$$
с константой $C_{\overline{p},\overline{p}'}$ из леммы 8.1.

Доказательство. Как отмечалось ранее, правая часть требуемого неравенства тривиально следует из определения $\Phi_{\overline{p}}$. Пусть $\|u\|_{\overline{p}} = 1$. По лемме 8.2 найдется функция $v(t,x) \in L_{\overline{p}'}(R^n)$ такая, что $\|v\|_{\overline{p}'} = 1$ и
$$\int\limits_{R^n} uv\,dx = 1.$$
Следовательно, $\Phi_{\overline{p}'}(v) \leq \|v\|_{\overline{p}'} = 1$, и по лемме 8.3
$$1 \leq C_{\overline{p},\overline{p}'}\Phi_{\overline{p}}(u)\Phi_{\overline{p}'}(v) \leq C_{\overline{p},\overline{p}'}\Phi_{\overline{p}}(u). \quad \square$$

Из доказанной теоремы следует, что квазинорма $\|\cdot\|_{\overline{p}}$ эквивалентна некоторой норме, задаваемой функционалом $\Phi_{\overline{p}}(\cdot)$.

Замечание 8.1. Есть все основания считать, что пространство $L_{\overline{p}}(R^n)$ полное и рефлексивное, а $L_{\overline{p}'}(R^n)$ — его сопряженное. Но здесь эти факты не понадобятся, и эти вопросы не рассматриваются.

9. Теорема вложения

В качестве приложения установленных результатов докажем одну теорему вложения. Для простоты рассмотрим лишь двумерный случай.

Лемма 9.1. *Пусть $p(y) \in \mathscr{P}_1(R)$, $0 < \nu_- \leq \nu(y) \leq \nu_+ < 1$, $p_+\nu_+ < 1$. Обозначим*
$$\frac{1}{p_\nu(y)} = \frac{1}{p(y)} - \nu(y).$$
Пусть $u(x,y), \partial_x^{\nu(y)}(x,y) \in L_p(R^2)$. Тогда
$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)} + \|u\|_{(y,x),(p,p_\nu)} \leq C(\|u\|_p + \|\partial_x^{\nu(y)}u\|_p).$$

Доказательство. Как и ранее, без потери общности считаем, что
$$\|u\|_p + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u\right\|_p = 1.$$
Согласно известной теореме Харди — Литтлвуда (см., например, [1, теорема 9]) для $y \in R$
$$\|u(\cdot,y)\|_{x,p_\nu} \leq C\big(\|u(\cdot,y)\|_{x,p} + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u(\cdot,y)\right\|_{x,p}\big).$$
Но тогда (коль скоро $p(y)$ не зависит от x)
$$\|u^p(\cdot,y)\|_{x,p_\nu/p} \leq C\big(\|u(\cdot,y)\|_{x,p} + \left\|\partial_x^{\nu(y)}u(\cdot,y)\right\|_{x,p}\big)^p,$$
$$J_{(y,x),(p,p_\nu)}(u) \leq C\big(J_{(y,x),(p,p)}(u) + J_{(y,x),(p,p)}(\partial_x^{\nu(y)}u)\big) \leq C.$$
По лемме 3.3
$$\|u\|_{(y,x),(p,p_\nu)}(u) \leq C.$$
Очевидным образом $p < p_\nu$. Тогда по теореме 4.1
$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)}(u) \leq C. \quad \square$$

Теорема 9.1. *Пусть* $0 < \nu_- \le \nu(y) \le \nu_+ < 1$, $0 < \mu_- \le \mu(x) \le \mu_+ < 1$, $p(y) \in \mathscr{P}_1(R)$, $q(x) \in \mathscr{P}_1(R)$, *причем* $\nu_+ p_+ < 1$ *и* $\mu_+ q_+ < 1$. *Предположим, что*

$$u, \partial_x^{\nu(y)} u \in L_p(R^2), \quad u, \partial_y^{\mu(x)} u \in L_q(R^2).$$

Пусть $0 \le \theta(x,y) \le 1$. *Тогда*

$$u(x,y) \in L_{(x,y),(s,r)}(R^2) \cap L_{(y,x),(r,s)}(R^2),$$

где

$$\left(\frac{1}{s}, \frac{1}{r}\right) = \theta \left(\frac{1}{p} - \nu, \frac{1}{q}\right) + (1-\theta) \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} - \mu\right).$$

В частности (*см.* [2, *теорема* 2]),

$$u(x,y) \in L_{r^*(x,y)}(R^2),$$

где

$$1 = \frac{1}{p\nu} + \frac{1}{q\mu} - \left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}\right) \frac{1}{r^*}.$$

Доказательство. Обозначим

$$\frac{1}{p_\nu(y)} = \frac{1}{p(y)} - \nu(y), \quad \frac{1}{q_\mu(x)} = \frac{1}{q(x)} - \mu(x).$$

По лемме 9.1

$$\|u\|_{(x,y),(p_\nu,p)} \le C\big(\|u\|_p + \big\|\partial_x^{\nu(y)} u\big\|_p\big), \quad \|u\|_{(x,y),(q,q_\mu)} \le C\big(\|u\|_q + \big\|\partial_y^{\mu(x)} u\big\|_q\big).$$

После этого применяем теорему 6.1. В частном случае, когда $\theta = \frac{\mu}{\mu+\nu}$, имеем $s = r = r^*$. $\square$

Замечание 9.1. Случай $p_+\nu_+ \ge 1$ или $q_+\mu_+ \ge 1$ тоже поддается исследованию, хотя и существенно сложнее. Вместо леммы 9.1 приходится использовать дополнительные мультипликативные неравенства, которые здесь не приведены. В конечном итоге в докритическом случае $r_+^* < \infty$ утверждение теоремы 9.1 остается в силе при условии log-Гёльдер непрерывности всех показателей. Как отмечено выше, такой результат частично решает проблему из [5] в случае $p = p(y)$ и $q = q(x)$. Самый общий случай $p(x,y)$ и $q(x,y)$ рассмотреть не удается даже при условиях теоремы 9.1. Более того, для таких показателей утверждение леммы 9.1, по-видимому, неверно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лизоркин П. И.* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E^n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. 1963. Т. 60, № 3. С. 325–353.
2. *Лизоркин П. И.* Неизотропные бесселевы потенциалы. Теоремы вложения для пространства Соболева $L_p^{(r_1,\dots,r_n)}$ с дробными производными // Докл. АН СССР. 1966. Т. 170, № 3. С. 508–511.
3. *Карапетян Г. А.* Дробные мультианизотропные пространства и теоремы вложения для них // Мат. тр. 2019. Т. 22, № 2. С. 76–89.
4. *Бандалиев Р. А.* Об одном неравенстве в пространстве Лебега со смешанной нормой и с переменным показателем суммируемости // Мат. заметки. 2008. Т. 84, № 3. С. 323–333.
5. *Eddine N. C., Ragusa M. A., Repovš D. D.* On the concentration-compactness principle for anisotropic variable exponent Sobolev spaces and its applications. // Fract. Calc. Appl. Anal. 2024. V. 27. P. 725–756.

6. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Rùžička M.* Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Berlin: Springer-Verl., 2011.
7. *Almeida A., Hästö P.* Besov spaces with variable smoothness and integrability // J. Funct. Anal. 2010. V. 258, N 5. P. 1628–1655.
8. *Трибель Х.* Теория функциональных пространств. М.: Мир, 1986.
9. *Бандалиев Р. А.* Письмо в редакцию // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 319–320.

Поступила в редакцию 5 декабря 2024 г.
После доработки 5 декабря 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Артюшин Александр Николаевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`alexsp3@yandex.ru`

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 519.17

ОПИСАНИЕ 3–ГРАНЕЙ В 3–МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ СМЕЖНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. За последние несколько десятилетий немало исследований было посвящено задачам о строении и раскраске плоских графов, разреженных в том или ином смысле.

В этой статье рассмотрены наиболее плотные среди неплотных 3-многогранников, а именно не содержащие смежных 3-циклов. О. В. Бородин в 1996 г. доказал, что такие 3-многогранники содержат вершину степени не более 4 и, более того, ребро с суммой степеней концевых вершин не более 9, где обе оценки неулучшаемы.

Через $d(v)$ обозначим степень вершины v. Ребро $e = xy$ в 3-многограннике есть (i, j)-ребро, если $d(x) \leq i$ и $d(y) \leq j$. Известный $(3, 5; 4, 4)$-полуправильный многогранник отвечает плоской четыреангуляции, в которой каждое ребро соединяет 3-вершину с 5-вершиной. В частности, этот многогранник не содержит 3-циклов.

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова доказали, что любой 3-многогранник, не содержащий ни смежных 3-циклов, ни $(3, 5)$-ребер, содержит 3-грань с суммой степеней инцидентных вершин (весом) не более 16, причем эта оценка неулучшаема.

3-Грань $f = (x, y, z)$ называется (i, j, k)-*гранью* или *гранью типа* (i, j, k), если $d(x) \leq i$, $d(y) \leq j$ и $d(z) \leq k$. Цель данной работы — доказать, что существуют ровно два точных описания типов 3-граней в 3-многогранниках без смежных 3-граней при указанном выше необходимом условии отсутствия $(3, 5)$-ребер, а именно: $\{(3, 6, 7) \vee (4, 4, 7)\}$ и $\{(4, 6, 7)\}$.

Отсюда следует, что имеет место единственное точное описание 3-граней в 3-многогранниках без 3-вершин, не содержащих смежных 3-граней: $\{(4, 4, 7)\}$.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.102

Ключевые слова: плоский граф, 3-многогранник, разреженный 3-многогранник, структурное свойство, 3-грань, вес.

1. Введение

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике P есть число инцидентных ей ребер. k-*Вершина* (k-*грань*) это вершина (грань) степени k, k^+-*вершина* имеет степень не меньше k, и так далее. Минимальная степень вершин в P есть $\delta(P)$. Будем опускать аргументы функций везде, где это не приводит к неясности.

Ребро $e = xy$ в 3-многограннике называется (i, j)-ребром, если $d(x) \leq i$ и $d(y) \leq j$. 3-Грань $f = (x, y, z)$ есть (i, j, k)-*грань* или *грань типа* (i, j, k), если $d(x) \leq i$, $d(y) \leq j$ и $d(z) \leq k$. *Вес* $w(f)$ 3-грани f это сумма степеней инцидентных ей вершин.

Работа О. В. Бородина поддержана Министерством науки и высшего образования России (проект FWNF-2022-0017). Работа А. О. Ивановой поддержана Министерством науки и высшего образования России, грант FSRG-2023-0025.

Через $\mathbf{P}_\delta$ обозначим класс 3-многогранников с минимальной степенью δ. В частности, $\mathbf{P}_3$ включает в себя все 3-многогранники.

За последние несколько десятилетий немало исследований было посвящено задачам о строении и раскраске плоских графов, разреженных в том или ином смысле.

В частности, новые результаты о строении плоских графов с минимальной степенью 3 и 4 без смежных 3-циклов при различных дополнительных предположениях находят применение в 3-раскраске (как правильной, так и неправильной), предписанной 3- и 4-раскрасках, а также в недавно введенных 3- и 4-DP-раскрасках (такую информацию можно найти в ссылках на выдающуюся статью Дворжака, Постля [1]).

Кроме того, структурные результаты о разреженных графах и их приложении к задачам раскраски и разбиения можно найти, например, в статьях [2–11] и обзорах [12–15].

В этой статье рассматриваются наиболее плотные среди неплотных 3-многогранников, а именно не содержащие смежных 3-циклов. О. В. Бородин [16] в 1996 г. доказал, что такие 3-многогранники содержат вершину степени не более 4 и, более того, ребро с суммой степеней концевых вершин не более 9, где обе оценки неулучшаемы.

Та же работа [16] дает конструкцию, в которой все 3-вершины окружены 6-вершинами, а каждая 3-грань инцидентна 3-вершине и двум 6-вершинам, т. е. имеет тип $(3, 6, 6)$ и вес 15.

Известный $(3, 5; 4, 4)$-полуправильный многогранник отвечает плоской четыреангуляции, в которой каждое ребро соединяет 3-вершину с 5-вершиной. В частности, этот многогранник не содержит 3-циклов.

Недавно О. В. Бородин и А. О. Иванова [17] повысили нижнюю оценку 15 из [16] до неулучшаемой оценки 16 (разумеется, при соблюдении указанного чуть выше необходимого условия об отсутствии $(3, 5)$-ребер; другими словами, для класса 3-многогранников, не содержащих ни смежных 3-циклов, ни $(3, 5)$-ребер, который обозначим через $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$.

Описание $D = \{(i_1, j_1, k_1), \dots, (i_n, j_n, k_n)\}$ типов 3-граней в $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$ называется *точным*, если ни один из параметров в нем не может быть понижен и ни один из триплетов отброшен. Основная цель данной работы — доказать, что существуют ровно два точных описания типов 3-граней в 3-многогранниках из $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$, а именно $\{(3, 6, 7) \vee (4, 4, 7)\}$ и $\{(4, 6, 7)\}$.

Этот факт будет выведен из следующего утверждения.

Теорема 1. *Любой 3-многогранник, не содержащий ни смежных 3-циклов, ни $(3, 5)$-ребер, содержит 3-грань одного из типов $(3, 6, 7)$ или $(4, 4, 7)$, где все параметры неулучшаемы.*

Теорема 2. *Существуют два и только два точных описания типов 3-граней в 3-многогранниках из $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$, а именно $\{(3, 6, 7) \vee (4, 4, 7)\}$ и $\{(4, 6, 7)\}$.*

Кроме того, поскольку согласно [16] всякий 3-многогранник из $\mathbf{PTT}_3$ содержит вершину степени 3 или 4, получаем непосредственное следствие из теоремы 2, не требующее доказательства.

Следствие 3. *Имеет место лишь одно точное описание 3-граней в 3-многогранниках без 3-вершин, не содержащих смежных 3-граней, а именно $\{(4, 4, 7)\}$.*

2. Доказательство теоремы 1

2.1. Неулучшаемость параметров в теореме 1. На рис. 1 изображен 3-многогранник из [17], не содержащий ни $(3,5)$-ребер, ни смежных 3-циклов, в котором каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 7-вершине и еще одной 6^+-вершине. Отметим, что ребра, исходящие из трех 7-вершин на внешнем цикле, сходятся в невидимой 3-вершине. Таким образом, член $(3,6,7)$ в теореме 1 необходим и неулучшаем.

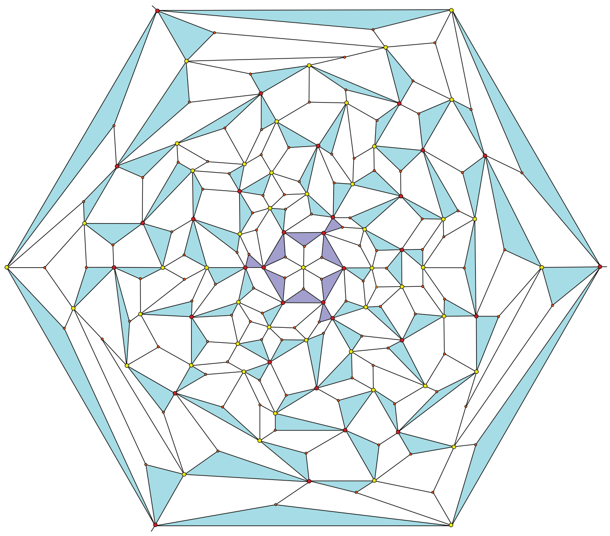

Рис. 1. Каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 7-вершине и еще одной вершине степени 6 или 7 (см. [17]).

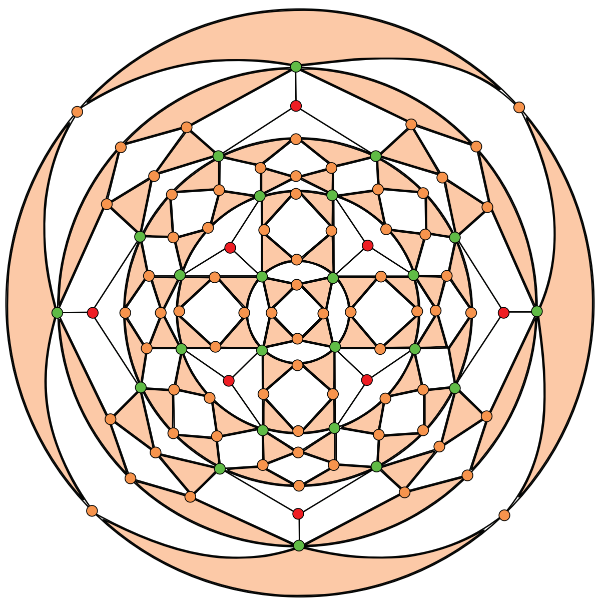

Рис. 2. Каждая 3-грань инцидентна двум 4-вершинам и 7-вершине.

Рис. 2 показывает 3-многогранник без 3-вершин, в котором нет смежных 3-граней, а каждая 3-грань инцидентна двум 4-вершинам и 7-вершине. Эта конструкция подтверждает необходимость и неулучшаемость второго члена в теореме 1.

2.2. Распределение зарядов на контрпримере к описанию $(3,6,7)\vee(4,4,7)$**.** Пусть в 3-многограннике P без смежных 3-граней и $(3,5)$-ребер нет ни $(3,6,7)$- ни $(4,4,7)$-граней.

Формулу Эйлера $|V|-|E|+|F|=2$ для P, где V,E,F суть соответственно множества вершин, ребер и граней в P, можно переписать в виде

$$\sum_{x\in V\cup F}(d(x)-4)=-8.$$

Каждая вершина или грань $x\in V\cup F$ имеет *начальный заряд* $\mu(x)=d(v)-4$. Используя свойства P как контрпримера, зададим такое локальное перераспределение зарядов μ, сохраняющее их сумму, что *новый заряд* $\mu'(x)$ будет неотрицательным для всех $x\in V\cup F$. Это даст противоречие с тем фактом, что сумма новых зарядов согласно (1) равна -8.

Отметим, что наше перераспределение зарядов довольно несложное ввиду наличия сильных конструкций, показанных на рис. 1 и 2.

Правила перераспределения зарядов следующие (рис. 3).

R1. *Каждая* 3*-вершина получает заряд* $\frac{1}{3}$ *от каждой смежной вершины.*

R2. *Каждая* 3*-грань получает* $\frac{1}{2}$ *от каждой инцидентной* 5*-вершины.*

R3. *Каждая* 3*-грань* f *получает от каждой инцидентной* 6*-вершины:*
(a) $\frac{1}{2}$*, если* f *не инцидентна* 3*-вершине, либо*
(b) $\frac{1}{3}$ *в противном случае.*

R4. *Каждая* 3*-грань* f *получает от каждой инцидентной* 7*-вершины:*
(a) $\frac{2}{3}$*, если* f *не инцидентна* 3*-вершине, либо*
(b) $\frac{1}{2}$ *в противном случае.*

R5. *Каждая* 3*-грань* f *получает от каждой инцидентной* 8^+*-вершины:*
(a) 1*, если* f *не инцидентна* 3*-вершине, либо*
(b) $\frac{2}{3}$ *в противном случае.*

2.3. Проверка того, что $\mu'(x)\geq 0$ **для всех** $x\in V\cup F$**.**

Случай 1: $f\in F$. Если $d(f)\geq 4$, то грань f не участвует в правилах R1–R5, поэтому $\mu'(f)=\mu(f)=d(f)-4\geq 0$.

Пусть $f=(x,y,z)$ имеет $d(x)\leq d(y)\leq d(z)$.

Подслучай 1.1: $d(x)=3$. Если $d(y)=6$, то f получает $\frac{1}{3}$ от вершины y по правилу R3 и не менее $\frac{2}{3}$ от 8^+-вершины z по R5 ввиду отсутствия $(3,6,7)$-граней в контрпримере P, откуда $\mu'(f)=3-4+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=0$.

Если $d(y)\geq 7$, то $d(z)\geq 7$ по предположению, поэтому f получает не менее $\frac{1}{2}$ от каждой из вершин y и z по R4b или R5b, так что $\mu'(f)\geq -1+2\times\frac{1}{2}=0$.

Подслучай 1.2: $d(x)=d(y)=4$. Теперь f получает 1 от 8^+-вершины z согласно правилу R5a, что дает $\mu'(f)\geq 0$.

Подслучай 1.3: $d(x)\geq 4$ и $d(y)\geq 5$. На этот раз f получает не менее $\frac{1}{2}$ от каждой из вершин y и z по одному из правил R2, R3a, R4a или R5a, так что снова имеем $\mu'(f)\geq -1+2\times\frac{1}{2}=0$.

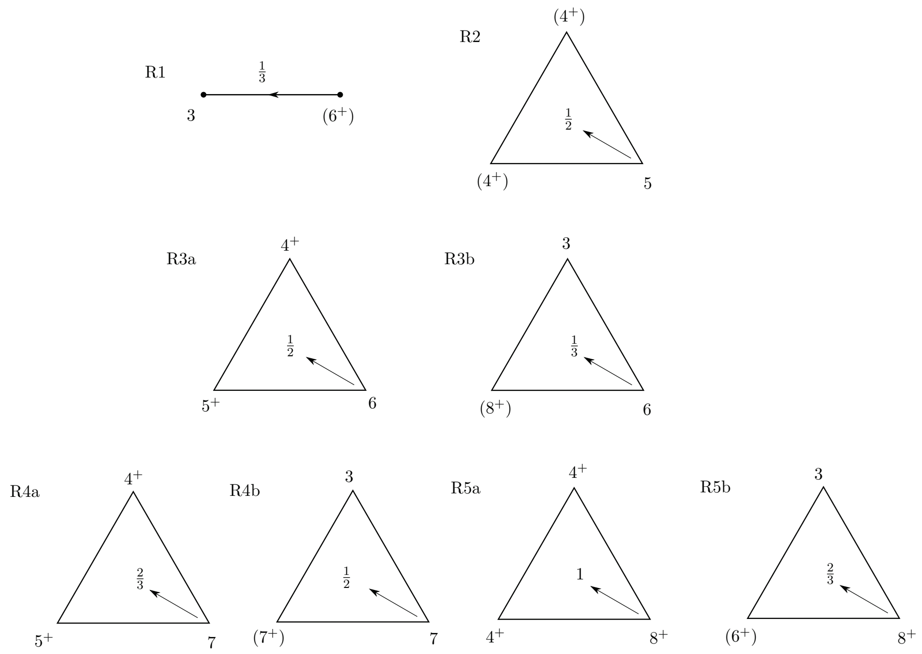

Рис. 3. Правила перераспределения зарядов.

Случай 2: $v \in V$. Пусть $T(v)$ — число 3-граней, инцидентных вершине v.

Подслучай 2.1: $d(v) = 3$. Здесь $\mu'(v) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$ ввиду R1.

Подслучай 2.2: $d(v) = 4$. Теперь $\mu'(v) = \mu(v) = 4 - 4 = 0$, поскольку v не фигурирует в правилах R1–R5.

Подслучай 2.3: $d(v) = 5$. Ввиду того, что $T(v) \leq 2$, а каждая инцидентная 3-грань получает $\frac{1}{2}$ от v согласно R2, имеем $\mu'(v) = 5 - 4 - 2 \times \frac{1}{2} = 0$.

Подслучай 2.4: $d(v) = 6$. Если 3-грань f при v инцидентна 3-вершине x, то общий расход вершины v на f и x составляет $2 \times \frac{1}{3}$ ввиду R1 в сочетании с R3b. В противном случае v расходует лишь $\frac{1}{2}$ на такую f согласно правилу R3a. Кроме этого v дает $\frac{1}{3}$ по правилу R1 не более $6 - 2T(v)$ раз на смежные 3-вершины, не принадлежащие 3-граням при v. Отсюда следует, что

$$\mu'(v) \geq 6 - 4 - T(v) \times \frac{2}{3} - (6 - 2T(v)) \times \frac{1}{3} = 0.$$

Подслучай 2.5: $d(v) = 7$. Теперь 3-грань, инцидентная 3-вершине, причиняет вершине v расход в точности $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ по R1 в сочетании с R4b, поэтому, рассуждая, как в предыдущем абзаце, получаем

$$\mu'(v) \geq 7 - 4 - T(v) \times \frac{5}{6} - (7 - 2T(v)) \times \frac{1}{3} = \frac{4 - T(v)}{6} > 0,$$

поскольку с очевидностью $T(v) \leq 3$.

Подслучай 2.6: $d(v) \geq 8$. Заметим, что каждая из $T(v)$ инцидентных вершине v граней $f = v_1 v v_2$ с $d(v_1) \leq d(v_2)$ забирает у v либо $\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$ согласно R1 в сочетании с R5b при $d(v_1) = 3$, либо 1 лишь по R5a при $d(v_1) \geq 4$.

Ясно, что $T(v) \le \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$ ввиду отсутствия смежных 3-граней в контрпримере P, а значит, $T(v) \le \frac{d(v)}{2}$. По-прежнему число смежных 3-вершин v, которые не принадлежат 3-граням при v, не превосходит $d(v) - 2T(v)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\mu'(v) &\ge d(v) - 4 - T(v) \times 1 - (d(v) - 2T(v)) \times \frac{1}{3} \\
&\ge d(v) - 4 - \frac{d(v)}{2} \times 1 - (d(v) - 2T(v)) \times \frac{1}{3} \\
&= \frac{2d(v) - 12 - T(v)}{3} \ge \frac{2d(v) - 12 - \frac{d(v)}{2}}{3} = \frac{d(v) - 8}{2} \ge 0
\end{aligned}$$

ввиду R1–R5, что и требовалось.

Итак, доказано неравенство $\mu'(x) \ge 0$ для всех $x \in V \cup F$, что противоречит (1), а значит, теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Сначала заметим, что $D_1 = \{(4,6,7)\}$ в самом деле является описанием для класса $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$ ввиду теоремы 1, поскольку и $(3,6,7)$- и $(4,4,7)$-грани являются также и $(4,6,7)$-гранями. Далеее, ни 6 ни 7 в описании D_1 не может быть уменьшено ввиду конструкции на рис. 1, тогда как 4 не может быть понижено согласно графу на рис. 2, а значит, описание D_1 является точным.

Теперь предположим, что точное описание $D = \{(i_1, j_1, k_1), \dots, (i_n, j_n, k_n)\}$ для $\mathbf{PTT}_3^{(3,5)}$ отлично от $D_2 = \{(3,6,7) \vee (4,4,7)\}$ и D_1. Чтобы учитывать $(3,6,7)$-грани на рис. 1, наше D должно содержать триплет, пусть первый, со свойством $i_1 \ge 3$, $j_1 \ge 6$ и $k_1 \ge 7$.

Если $i_1 \ge 4$, то $i_1 = 4$, $j_1 = 6$, $k_1 = 7$ и $n = 1$ ввиду точности описания D, но это означает, что $D = D_1$.

Остается предположить, что $i_1 = 3$. Тут снова $j_1 = 6$ и $k_1 = 7$ согласно точности D. Теперь D должно быть в состоянии мажорировать $(4,4,7)$-грани из конструкции на рис. 2. Это значит, что D должно содержать триплет, пусть второй, имеющий $i_2 \ge 4$, $j_2 \ge 4$ и $k_2 \ge 7$. Снова ввиду точности D получаем $i_2 = 4$, $j_2 = 4$, $k_2 = 7$ и $n = 2$. Таким образом, $D = D_2$, что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dvořák Z., Postle L.* Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8 // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 129. P. 38–54.
2. *Borodin O. V.* Structural theorem on plane graphs with application to the entire coloring // J. Graph Theory. 1996. V. 23, N 3. P. 233–239.
3. *Borodin O. V.* Structural properties of plane graphs without adjacent triangles and an application to 3-colorings // J. Graph Theory. 1996. V. 21. P. 183–186.
4. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
5. *Borodin O. V., Hartke S. G., Ivanova A. O., Kostochka A. V., West D. B.* $(5,2)$-Coloring of sparse graphs // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2008. V. 5. P. 417–426.
6. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Planar graphs without 4-cycles adjacent to 3-cycles are list vertex 2-arborable // J. Graph Theory. 2009. V. 62, N 3. P. 234–240.
7. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* An improvement of Lebesgue's description of edges in 3-polytopes and faces in plane quadrangulations // Discrete Math. 2019. V. 342, N 6. P. 1820–1827.
8. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Vasil'eva E. I.* A Steinberg-like approach to describing faces in 3-polytopes // Graphs and Combinatorics. 2017. V. 33, N 1. P. 63–71.

9. *Ferencová B., Madaras T.* Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.
10. *Hudak P., Maceková M., Madaras T., Siroczki P.* More on the structure of plane graphs with prescribed degrees of vertices, faces, edges and dual edges // Ars Math. Contemp. 2017. V. 13, N 2. P. 355–366.
11. *Jendrol' S.* A structural property of convex 3-polytopes // Geom. Dedicata. 1997. V. 68. P. 91–99.
12. *Borodin O.V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
13. *Jendrol' S.,Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
14. *Cranston D.W.,West D.B.* An introduction to the discharging method via graph coloring // Discrete Math. 2017. V. 340, N 4. P. 766–793.
15. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907, N 1. 030051.
16. *Borodin O. V.* More about the weight of edges in planar graphs // Tatra Mountains Math. Publ. 1996. V. 9. P. 11–14.
17. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Light 3-faces in 3-polytopes without adjacent triangles // Discrete Math. 2025. V. 348, N 1. 114299.

Поступила в редакцию 30 октября 2024 г.
После доработки 30 октября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна (ORCID 0000-0002-6179-3740)
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
shmgnanna@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.542

СТРОЕНИЕ КОНЕЧНЫХ ГРУПП, ИЗОСПЕКТРАЛЬНЫХ ГРУППЕ АВТОМОРФИЗМОВ ВТОРОЙ СПОРАДИЧЕСКОЙ ГРУППЫ ЯНКО

А. Х. Журтов,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Доказывается, что любой разрешимый главный фактор конечной группы, имеющей то же множество порядков элементов, что и группа автоморфизмов простой спорадической группы Янко, является 2-группой порядка 2, 2^4, 2^6 или 2^20.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.103

Ключевые слова: спектр, группа автоморфизмов, группа Янко.

1. Введение. Для конечной группы G *спектром* называется множество $\omega(G)$ порядков элементов группы G. Спектр группы G замкнут относительно делимости и поэтому однозначно определяется множеством $\mu(G)$, состоящим из максимальных относительно делимости элементов спектра $\omega(G)$.

Если для групп G и H их спектры совпадают, то G и H называются *изоспектральными.* Очевидно, что группы G и H изоспектральны тогда и только тогда, когда $\mu(G) = \mu(H)$. Число попарно не изоморфных групп, изоспектральных данной группе G, обозначается через $h(G)$. Если $h(G) = 1$, то G называется *распознаваемой по спектру*, а если $h(G)$ бесконечно, то G называется *нераспознаваемой по спектру.* В [1] доказано, что группа автоморфизмов каждой простой спорадической группы, не изоморфной M^cL, M_{12}, M_{22}, He, Suz, $O'N$ и J_2, распознается по спектру. В [2] то же самое доказано для остальных спорадических групп за исключением, быть может, J_2.

В [3] показано, что конечная неразрешимая группа G, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо изоморфна $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо содержит нетривиальную нормальную 2-подгруппу N, для которой G/N изоморфна знакопеременной группе степени 8. В [4] доказана неразрешимость G.

Основная цель настоящей работы — уточнить строение G.

Теорема. *Конечная группа G, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо изоморфна $\mathrm{Aut}(J_2)$, либо обладает нормальной нетривиальной 2-подгруппой N, фактор-группа по которой изоморфна знакопеременной группе A_8. При этом любой главный фактор группы G, лежащий в N, является абсолютно неприводимым A_8-модулем размерности* 4, 6 *или* 20.

1. Доказательство теоремы. Пусть G — конечная группа, изоспектральная $\mathrm{Aut}(J_2)$, но не изоморфная $\mathrm{Aut}(J_2)$.

Работа второго и третьего автора выполнена за счет Российского научного фонда, проект № 23-41-10003.

Лемма 1. (1) $\mu(G) = \{2^3 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 7, 3 \cdot 5\}$.

(2) $E = O_2(G) \neq 1$ *и* $G/E \simeq A_8$.

Доказательство. П. (1) вытекает из таблицы неприводимых характеров $J_2.2$ в [5], п. (2) — следствие [3] и [4].

Лемма 2. *Степень любого неприводимого представления группы* A_8 *над полем порядка* 2 *равна* 1, 4, 6, 14, 20 *или* 64.

Доказательство. В табл. 1, взятой из [6, с. 48], перечислены брауэровы характеры группы A_8 в характеристике 2.

Таблица 1. Характеры Брауэра группы A_8

	$1A$	$3A$	$3B$	$5A$	$7A$	$B**$	$15A$	$B**$
φ_1	1	1	1	1	1	1	1	1
φ_2	4	-2	1	-1	$-b7$	$**$	$-b15$	$**$
φ_3	4	-2	1	-1	$**$	$-b7$	$**$	$-b15$
φ_4	6	3	0	1	-1	-1	-2	-2
φ_5	14	2	-1	-1	0	0	2	2
φ_6	20	-4	-1	0	-1	-1	$b15-1$	$**$
φ_7	20	-4	-1	0	-1	-1	$**$	$b15-1$
φ_8	64	4	-2	-1	1	1	-1	-1

В ней $b_7 = 1/2(-1 + i\sqrt{7})$, $b_{15} = 1/2(-1 + i\sqrt{15})$, символы $**$ рядом с $-b_7$ означают числа, комплексно сопряженные с $-b_7$, а символы $**$ рядом с $-b_{15}$ и $b_{15}-1$ означают числа, комплексно сопряженные с $-b_{15}$ и $b_{15}-1$ соответственно. Характер φ_3 алгебраически сопряжен с φ_2, а φ_7 алгебраически сопряжен с φ_6. Пятая степень элемента из класса $15A$ содержится в классе $3A$.

Согласно [7] все представления группы A_8, характеры которых перечислены в табл. 1, реализуются над полем порядка 2. Лемма доказана.

Лемма 3. *Любое неприводимое представление группы* A_8 *степени* 1, 14 *и* 64 *над полем порядка* 2 *содержит ненулевую неподвижную точку циклической подгруппы* A *порядка* 15 *из* A_8.

Доказательство. Поскольку $(2, 15) = 1$, ограничение характера Брауэра φ_i, $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, на A является обыкновенным характером A, поэтому число

$$T_i = \frac{1}{|A|} \sum_{a \in A} \varphi_i(a)$$

равно размерности пространства неподвижных точек группы A в соответствующем φ_i представлении V_i группы A_8. Простые вычисления с помощью табл. 1 показывают, что $T_i > 0$ для $i = 1, 5, 8$. Лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы. Предположим противное. Пусть $1 = B_0 \leq B_1 \leq B_2 \leq \dots \leq B_m = O_2(G)$ — неуплотняемый ряд подгрупп, инвариантных в G. Тогда $V = B_k/B_{k-1}$ — неприводимый A_8-модуль над полем порядка 2 для $k = 1, 2, \dots, m$. Если для какого-то k модуль V эквивалентен V_i для $i = 1, 5, 8$, то по лемме 3 V содержит ненулевую неподвижную точку группы A и $C_{O_2(G)}(A) \neq 1$, где A — подгруппа из A_8 порядка 15. Но тогда в G есть элемент порядка 30, что противоречит лемме 1. Теорема доказана.

Отметим, что вопрос о распознаваемости группы $\mathrm{Aut}(J_2)$ по спектру остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moghaddamfar A. R., Zokayi A. R., Darafsheh A. R.* On the characterizability of the automorphism groups of sporadic simple groups by their element orders // Acta Math. Sinica. 2004. V. 20, N 4. P. 653–662.

2. *Mazurov V. D., Moghaddamfar A. R.* Recognizing by spectrum for the automorphism groups of sporadic simple groups // Commun. Math. Stat. 2015. V. 3, N 4. P. 478–483.

3. *Журтов А. Х., Шерметова М. Х.* О группах, изоспектральных группе автоморфизмов второй спорадической группе Янко // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1011–1016.

4. *Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* Неразрешимость конечных групп, изоспектральных группе автоморфизмов второй спорадической группы Янко // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 1. С. 71–75.

5. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

6. *Jansen Ch., Lux K., Parker R., Wilson R.* An atlas of Brauer characters. New York: Oxford Univ. Press Inc., 1995.

7. *Atlas of finite group representations.* Version 3. http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3/atl/A8.

Поступила в редакцию 29 августа 2024 г.
После доработки 20 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Журтов Арчил Хазешович (ORCID 0009-0004-9516-5808)
Кабардино-Балкарский государственный университет,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик 360004
`zhurtov_a@mail.ru`

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
`daria.lytkin@gmail.com`

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
`vic.mazurov@gmail.com`

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 515.12

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ ПОНТРЯГИНА — ШНИРЕЛЬМАНА

А. В. Иванов

Аннотация. Нижняя емкостная размерность метрического компакта X впервые была рассмотрена в работе Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана 1932 г., где было доказано, что величина нижней емкостной размерности всегда не меньше топологической размерности X и на любом метризуемом компакте существует метрика, для которой нижняя емкостная размерность равна топологической размерности. В настоящей статье доказано, что для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа b, больше либо равного топологической размерности X (включая бесконечность), на X существует совместимая с топологией метрика, для которой нижняя емкостная размерность X равна b.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.104

Ключевые слова: метрический компакт, емкостная размерность, теорема Понтрягина — Шнирельмана.

Нижняя емкостная размерность $\underline{\dim}_B$ метрического компакта (X,ρ) впервые рассмотрена (по названием «метрический порядок») в работе Л. С. Понтрягина и Л. Г. Шнирельмана [1], где была доказана следующая фундаментальная теорема.

Теорема 1 [1]. *Топологическая размерность* $\dim X$ *метризуемого компакта* X *совпадает с точной нижней гранью нижних емкостных размерностей этого компакта по всем метрикам, совместимым с топологией* X.

При этом в работе [1] фактически было установлено, что на X всегда существует метрика ρ, для которой $\underline{\dim}_B(X,\rho) = \dim X$. Основным результатом настоящей статьи является теорема, утверждающая, что для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа b такого, что $\dim X \le b \le \infty$, на X существует совместимая с топологией метрика ρ, для которой $\underline{\dim}_B(X,\rho) = b$.

Напомним необходимые определения. Пусть (X,ρ) — метрический компакт. Будем использовать следующие обозначения:

$$O(x,\varepsilon,\rho) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}, \quad B(x,\varepsilon,\rho) = \{y \in X : \rho(x,y) \le \varepsilon\},$$

где $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Через $N(X,\varepsilon,\rho)$ обозначим наименьшее число точек в ε-сетях X. Нижняя емкостная размерность компакта (X,ρ) определяется по формуле

$$\underline{\dim}_B(X,\rho) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(X,\varepsilon,\rho)}{-\log \varepsilon}.$$

Финансовое обеспечение исследования осуществлялось из средств федерального бюджета на выполнение государственного задания КарНЦ РАН (Институт прикладных математических исследований КарНЦ РАН).

Теория емкостных размерностей изложена в [2, гл. 2].

Нам будет удобно модифицировать данное выше определение $\underline{\dim}_B(X,\rho)$. Подмножество $A \subset X$ назовем ε-разреженным (для $\varepsilon > 0$), если $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ для любых двух различных точек $x, y \in X$. Через $K(X,\varepsilon,\rho)$ обозначим наибольшее число точек в ε-разреженных подмножествах X. Если A — максимальное (по включению) ε-разреженное подмножество X, то A — ε-сеть. Следовательно,

$$K(X,\varepsilon,\rho) \geq N(X,\varepsilon,\rho). \tag{1}$$

Покажем, что

$$K(X,\varepsilon,\rho) \leq N(X,\varepsilon/3,\rho). \tag{2}$$

Пусть B — $\varepsilon/3$-сеть в X, $|B| = N(X,\varepsilon/3,\rho)$, и A —ε-разреженное подмножество X, $|A| = K(X,\varepsilon,\rho)$. Для любой точки $x \in A$ пересечение $O(x,\varepsilon/2,\rho) \cap B$ непусто. При этом окрестности $O(x,\varepsilon/2,\rho)$ и $O(y,\varepsilon/2,\rho)$ не пересекаются для двух различных точек $x, y \in A$. Следовательно, $|A| \leq |B|$, что и требовалось. Из неравенств (1) и (2) следует

Предложение 1. *Для любого метрического компакта* (X,ρ)

$$\underline{\dim}_B(X,\rho) = \varliminf_{\varepsilon\to 0} \frac{\log K(X,\varepsilon,\rho)}{-\log\varepsilon}.$$

Справедливо также следующее

Предложение 2. *Если последовательность* $\varepsilon_k > 0$ *монотонно* ($\varepsilon_k \geq \varepsilon_{k+1}$) *сходится к* 0 *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\log\varepsilon_{k+1}}{\log\varepsilon_k} = 1$, *то*

$$\underline{\dim}_B(X,\rho) = \varliminf_{k\to\infty} \frac{\log K(X,\varepsilon_k,\rho)}{-\log\varepsilon_k}.$$

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения 1 из [3].

В дальнейшем неоднократно будем рассматривать произведения метрических компактов $(X_1,\rho_1),\ldots,(X_n,\rho_n)$ (в частности отрезков числовой прямой) и при этом всегда будем предполагать, что на $\prod\limits_{i=1}^n X_i$ задана max-метрика $\rho^{\max}$ по формуле

$$\rho^{\max}(x,y) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) : i = 1,\ldots,n\},$$

где x_i, y_i — i-е координаты точек $x, y \in \prod\limits_{i=1}^n X_i$. Известно, что метрика $\rho^{\max}$ согласована с топологией произведения.

Аналогично можно ввести метрику $\rho^{\max}$ на счетном произведении $\prod\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ метрических компактов (X_i,ρ_i), $i \in \mathbb{N}$:

$$\rho^{\max}(x,y) = \max\{\rho_i(x_i,y_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

при условии, что $\operatorname{diam}(X_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Легко проверить, что в этом случае метрика $\rho^{\max}$ согласована с топологией тихоновского произведения.

Теорема 2. *Для любого бесконечного метризуемого компакта X и любого числа $b \in [\dim X, \infty]$ существует метрика ρ на X такая, что $\underline{\dim}_B(X,\rho) = b$.*

Доказательство. Пусть $\dim X = n$. В [1] построено вложение $f_0 : X \to Q_0$ компакта X в $(2n+1)$-мерный куб $Q_0 = [0,1]^{2n+1}$, при котором max-метрика на Q_0 определяет метрику ρ_0 на X, удовлетворяющую условию $\underline{\dim}_B(X,\rho_0) = n$.

Пусть $b > n$. Поскольку $\underline{\dim}_B(X,\rho_0) < b$, существует $\varepsilon_1 > 0$ такое, что

$$K(X,\varepsilon_1,\rho_0) < [(1/\varepsilon_1)^b]$$

(квадратные скобки обозначают здесь целую часть числа).

Положим

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_1}{2^{i-1}}.$$

Пусть $k_1 = [(1/\varepsilon_1)^b]$. Покажем, что на X можно ввести метрику ρ_1 так, что для любых $x, y \in X$

1) $\rho_0(x,y) \le \rho_1(x,y)$,

2) $\rho_1(x,y) - \rho_0(x,y) \le \varepsilon_1$,

3) существует число $p > 0$ такое, что $\rho_1(x,y) \le p\rho_0(x,y)$,

4) $K(X,\varepsilon_1,\rho_1) = k_1$.

Фиксируем ε_1-разреженное подмножество $A \subset X$, для которого

$$|A| = K(X,\varepsilon_1,\rho_0) = m_1 < k_1.$$

Пусть $z \notin A$ и $r = \min\{\rho_0(z,A), \varepsilon_1/2\}$. Определим функцию $f_1^1 : X \to [0,\varepsilon_1]$ по формуле

$$f_1^1(x) = 0 \quad \text{при } x \notin O(z,r,\rho_0),$$
$$f_1^1(x) = (r - \rho_0(x,z))\varepsilon_1/r \quad \text{при } x \in B(z,r,\rho_0).$$

Легко проверить, что функция f_1^1 непрерывна и $f_1^1(z) = \varepsilon_1$.

Положим $g_1^1 = f_0 \Delta f_1^1 : X \to Q_0 \times [0,\varepsilon_1]$, где $f_0 \Delta f_1^1$ — диагональное произведение отображений, действующее по формуле

$$f_0 \Delta f_1^1(x) = (f_0(x), f_1^1(x)).$$

Отображение g_1^1 инъективно, следовательно, g_1^1 определяет вложение X в $Q_0 \times [0,\varepsilon_1]$. На произведении $Q_0 \times [0,\varepsilon_1]$ задана max-метрика, ограничение которой на X обозначим через ρ_1^1. Очевидно, что

$$\rho_1^1(x,y) = \max\bigl\{\rho_0(x,y), \bigl|f_1^1(x) - f_1^1(y)\bigr|\bigr\}. \tag{3}$$

(Здесь и далее точки $x \in X$ отождествляются с их образами при вложениях f_0, g_1^1 и др. Заметим, что при таком отождествлении ограничение проекции $Q_0 \times [0,\varepsilon_1] \to Q_0$ на X совпадает с тождественным отображением X.)

В силу выбора отображения f_1^1 для любых двух точек $x, y \in X \setminus O(z,r,\rho_0)$ будет $\rho_1^1(x,y) = \rho_0(x,y)$ и $\rho_1^1(z,a) \ge \varepsilon_1$ для любого $a \in A$. Следовательно, $A \cup \{z\}$ — ε_1-разреженное подмножество $\bigl(X,\rho_1^1\bigr)$. Таким образом,

$$K\bigl(X,\varepsilon_1,\rho_1^1\bigr) \ge m_1 + 1.$$

Докажем обратное неравенство. Предположим противное. Пусть C — ε_1-разреженное подмножество $\bigl(X,\rho_1^1\bigr)$ и $|C| = m_1 + 2$. Поскольку $\rho_1^1(x,y) = \rho_0(x,y)$ для точек $x, y \in X \setminus O(z,r,\rho_0)$, хотя бы две точки $c_1, c_2 \in C$ лежат в $O(z,r,\rho_0)$. Имеем

$$\varepsilon_1 \le \rho_1^1(c_1,c_2) = \max\bigl\{\rho_0(c_1,c_2), \bigl|f_1^1(c_1) - f_1^1(c_2)\bigr|\bigr\},$$

где $\rho_0(c_1, c_2) < 2r \le \varepsilon_1$ и $\left|f_1^1(c_1) - f_1^1(c_2)\right| < \varepsilon_1$; противоречие.

Итак, $K\bigl(X, \varepsilon_1, \rho_1^1\bigr) = m_1 + 1$. Покажем, что метрика ρ_1^1 удовлетворяет условиям 1–3, если ее рассматривать в качестве ρ_1. Условия 1 и 2 сразу следуют из формулы (3). Покажем, что

$$\rho_1^1(x, y) \le (\varepsilon_1/r)\rho_0(x, y). \tag{4}$$

Если $x, y \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$, то $\rho_1^1(x, y) = \rho_0(x, y)$ и неравенство (4) очевидно. Если же $x \in X \setminus O(z, r, \rho_0)$, $y \in O(z, r, \rho_0)$ и

$$\rho_1^1(x, y) = \max\bigl\{\rho_0(x, y), f_1^1(y)\bigr\} = f_1^1(y) = (r - \rho_0(y, z))(\varepsilon_1/r),$$

то в силу неравенства треугольника $\rho_0(z, y) + \rho_0(y, x) \ge r$, а значит, $r - \rho_0(y, z) \le \rho_0(x, y)$ и неравенство (4) выполнено.

Наконец, если $x, y \in O(z, r, \rho_0)$ и $\rho_1^1(x, y) = \left|f_1^1(x) - f_1^1(y)\right|$, то

$$\rho_1^1(x, y) = (\varepsilon_1/r)|\rho_0(x, z) - \rho_0(y, z)| \le (\varepsilon_1/r)\rho_0(x, y)$$

в силу неравенства треугольника. Проверка неравенства (4) выполнена.

На этом завершен первый шаг индуктивного построения метрики ρ_1. Если $m_1 + 1 = k_1$, то метрика $\rho_1 = \rho_1^1$ искомая. Если же $m_1 + 1 < k_1$, то делаем следующий шаг. А именно, по аналогии строим отображение $f_1^2 : X \to [0, \varepsilon_1]$ и определяем вложение

$$g_1^2 = g_1^1 \Delta f_1^2 : X \to Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^2.$$

На произведении $Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^2$ определена max-метрика, ограничение которой на X обозначим через ρ_1^2. Повторив рассуждения первого шага, получаем, что

$$K\bigl(X, \varepsilon_1, \rho_1^2\bigr) = m_1 + 2.$$

Кроме того, для ρ_1^2 выполняются условия 1, 2 и следующее условие:

3_2) $\rho_1^2(x, y) \le p_2\rho_1^1(x, y)$ для некоторой константы $p_2 > 0$.

После выполнения $k_1 - m_1$ таких шагов получим вложение

$$f_1 = g_1^{k_1 - m_1} : X \to Q_0 \times [0, \varepsilon_1]^{k_1 - m_1},$$

которое определит искомую метрику $\rho_1 = \rho_1^{k_1 - m_1}$ на компакте X. (Условие 3 для метрики ρ_1 будет выполняться для $p = p_1 \cdot \ldots \cdot p_{k_1 - m_1}$.)

В силу условия 1 для любого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$K(X, \varepsilon, \rho_1) \ge K(X, \varepsilon, \rho_0), \tag{5}$$

а в силу 3

$$K(X, \varepsilon, \rho_1) \le K(X, \varepsilon/p, \rho_0). \tag{6}$$

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$\underline{\dim}_B(X, \rho_0) = \underline{\dim}_B(X, \rho_1) = n < b.$$

Положим $Q_1 = [0, \varepsilon_1]^{k_1 - m_1}$, $s_1 = 1$. На этом первый шаг главного индукционного процесса завершен.

Переходим к второму шагу. Пусть s_2 — наименьшее натуральное число, которое больше s_1 и удовлетворяет условию $K(X, \varepsilon_{s_2}, \rho_1) < [(1/\varepsilon_{s_2})^b]$. Поскольку в силу предложений 1 и 2

$$\underline{\dim}_B(X, \rho_1) = \varliminf_{i \to \infty} \frac{\log K(X, \varepsilon_i, \rho_1)}{-\log \varepsilon_i} < b,$$

такое число s_2 существует. Положим $k_2 = [(1/\varepsilon_{s_2})^b]$, $m_2 = K(X, \varepsilon_{s_2}, \rho_1)$.

Повторим построения первого шага с увеличением всех индексов на 1 и заменой ε_1 на ε_{s_2} (напомним, что $s_1 = 1$). В результате получим вложение

$$f_2 : X \to Q_0 \times Q_1 \times Q_2,$$

где $Q_2 = [0, \varepsilon_{s_2}]^{k_2 - m_2}$. На $Q_0 \times Q_1 \times Q_2$ определена max-метрика, ограничение которой на X задает метрику ρ_2 (как и выше, точки X отождествляем с точками $f_2(X)$).

Продолжая индукцию, на шаге k получим натуральное число $s_k > s_{k-1}$, вложение

$$f_k : X \to \prod_{i=0}^{k} Q_i$$

и метрику ρ_k на X такие, что

1_k) $\rho_k(x, y) \geq \rho_i(x, y)$, $i < k$, $x, y \in X$;

2_k) $\rho_k(x, y) - \rho_i(x, y) \leq \varepsilon_{s_{i+1}}$, $i < k$, $x, y \in X$;

3_k) $K(X, \varepsilon_i, \rho_{k-1}) > [(1/\varepsilon_i)^b]$ при $i \in (s_{k-1}, s_k)$;

4_k) $K(X, \varepsilon_{s_k}, \rho_k) = [(1/\varepsilon_{s_k})^b]$;

5_k) $\underline{\dim}_B(X, \rho_k) = n < b$;

6_k) $\pi_i^k \circ f_k = f_i$ где $\pi_i^k : \prod\limits_{j=0}^{k} Q_j \to \prod\limits_{j=0}^{i} Q_j$ — проекция, $i < k$;

7_k) диаметр Q_k (по max-метрике) равен ε_{s_k}.

В результате индукционного процесса возникает обратный спектр

$$S = \left\{ \prod_{j=0}^{k} Q_j, \pi_i^k : i < k; i, k \in \mathbb{N} \right\},$$

пределом которого является $\prod\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$. В силу условия 6_k семейство вложений $f_k : X \to \prod\limits_{i=0}^{k} Q_i$, $k \in \mathbb{N}$, задает отображение компакта X в S, предел которого является вложением

$$f = \lim f_k : X \to \lim S = \prod_{j=0}^{\infty} Q_j.$$

В силу условия 7_k на $\prod\limits_{j=0}^{\infty} Q_j$ определена max-метрика, ограничение которой на $X = f(X)$ обозначим через ρ.

Покажем, что $\underline{\dim}_B(X, \rho) = b$. В силу условия 1_k $\rho(x, y) \geq \rho_i(x, y)$ для любого $i \in \mathbb{N}$ и $x, y \in X$. Отсюда в силу условий 3_k и 4_k следует, что $K(X, \varepsilon_i, \rho) \geq [(1/\varepsilon_i)^b]$ для любого i. Из этого неравенства получаем, что $\underline{\dim}_B(X, \rho) \geq b$.

Докажем обратное неравенство. Для этого достаточно показать, что

$$K(X, 2\varepsilon_{s_k}, \rho) \leq [(1/\varepsilon_{s_k})^b], \tag{7}$$

поскольку

$$\underline{\dim}_B(X, \rho) \leq \varliminf_{k \to \infty} \frac{\log K(X, 2\varepsilon_{s_k}, \rho)}{-\log \varepsilon_{s_k}}.$$

Пусть C — $2\varepsilon_{s_k}$-разреженное подмножество (X, ρ). В силу условия 2_k

$$\rho(x, y) - \rho_k(x, y) \leq \varepsilon_{s_{k+1}}.$$

Следовательно, C является ε_{s_k}-разреженным подмножеством (X, ρ_k). В силу условия 4_k имеем $|C| \le [(1/\varepsilon_{s_k})^b]$. Неравенство (7) тем самым доказано.

Для завершения доказательства теоремы осталось рассмотреть случай $b = \infty$. Здесь можно использовать схему проведенных выше рассуждений (с некоторой модификацией), но есть и более простой вариант.

Пусть Y — одноточечная компактификация натурального ряда: $Y = \mathbb{N} \cup \{p\}$. Разобьем $\mathbb{N}$ на счетное семейство непересекающихся подмножеств A_i так, что $|A_i| = 2^{i^2}$. Определим на Y метрику ρ' следующим образом:

если $x \in A_i$, $y \in A_j$ и $i \ge j$, то $\rho'(x, y) = 1/2^j$;

если $x \in A_i$, $y = p$, то $\rho'(x, y) = 1/2^i$.

Каждое множество A_i является $(1/2^i)$-разреженным подмножеством (Y, ρ'). Следовательно,

$$K(X, 1/2^i, \rho') \ge 2^{i^2}.$$

Таким образом,

$$\underline{\dim}_B(Y, \rho') = \infty.$$

По условию теоремы X является бесконечным компактом. Следовательно, Y топологически вкладывается в X. Согласно теореме Хаусдорфа (см. [4]) метрика ρ', заданная на Y, может быть продолжена до некоторой метрики ρ на X. Поскольку нижняя емкостная размерность монотонна (см. [2]), получаем, что

$$\underline{\dim}_B(X, \rho) \ge \underline{\dim}_B(Y, \rho') = \infty. \quad \square$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pontryagin L., Shnirelman L.* On one metric property of dimension // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 156–162.
2. *Песин Я. Б.* Теория размерности и динамические системы: современный взгляд и приложения. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013.
3. *Иванов А. В.* О размерности квантования вероятностных мер // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 8. С. 41–51.
4. *Torunczyk H.* A short proof of Hausdorff's theorem on extending metrics // Fundam. Math. 1973. V. 77. P. 191–193.

Поступила в редакцию 18 ноября 2024 г.
После доработки 18 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Иванов Александр Владимирович (ORCID 0000-0002-4436-4805)
Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН,
ул. Пушкинская, 11, Петрозаводск 185910
alvlivanov@krc.karelia.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.542

σ–ПРОБЛЕМА КЕГЕЛЯ — ВИЛАНДТА: РЕДУКЦИЯ К ПРОСТЫМ ГРУППАМ

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов

Аннотация. Для произвольного разбиения σ множества всех простых чисел решение σ-проблемы Кегеля — Виландта редуцируется к ее решению в классе всех σ-полных простых неабелевых групп. Приводится достаточный признак σ-субнормальности подгруппы в конечной группе для разбиения σ, в котором числа 2 и 3 содержатся в одной компоненте.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.105

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, σ-субнормальная подгруппа, холлова подгруппа, σ-проблема Кегеля — Виландта.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматриваются только конечные группы.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел и $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение $\mathbb{P}$ на попарно не пересекающиеся подмножества σ_i $(i \in I)$, т. е. $\mathbb{P} = \bigcup\limits_{i\in I} \sigma_i$ и $\sigma_i \cap \sigma_j = \varnothing$ для всех $i \neq j$. Элементы σ_i $(i \in I)$ разбиения σ будем называть его *компонентами*.

Следуя [1], будем говорить, что группа G является *σ-примарной*, если G является σ_i-группой для некоторого $i \in I$.

Подгруппа H группы G называется *σ-субнормальной*, если существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \dots \subseteq H_n = G$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ либо подгруппа H_{i-1} нормальна в H_i, либо группа $H_i/\operatorname{Core}_{H_i}(H_{i-1})$ является σ-примарной. Далее множество всех σ-субнормальных подгрупп группы G обозначается через $\operatorname{sn}_\sigma(G)$.

Понятно, что подгруппа H субнормальна в G тогда и только тогда, когда она σ-субнормальна в G для *минимального* разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$.

Группа G называется *σ-полной*, если $G \in \bigcap\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$, т. е. G обладает по крайней мере одной σ_i-холловой подгруппой для любого $i \in I$. Далее класс $\bigcap\limits_{i\in I} E_{\sigma_i}$ будем обозначить через E_σ. Для $i \in I$ пишем $H \leq_{\sigma_i} G$, если подгруппа H обладает тем свойством, что $H \cap S_i$ — σ_i-холлова подгруппа из H для любой σ_i-холловой подгруппы S_i группы G.

Если подгруппа H является σ-субнормальной в σ-полной группе G, то ввиду леммы 2.6 из [1] $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$. В связи с этим результатом в «Коуровской тетради» [2] под номером 19.86 А. Н. Скиба сформулировал следующий аналог известной гипотезы Кегеля — Виландта.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта Ф23РНФ-237.

Проблема. *Верно ли, что подгруппа H группы $G \in E_\sigma$ является σ-субнормальной в G, если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$?*

Эта проблема сегодня называется *σ-проблемой Кегеля — Виландта.* Интерес к ней обусловлен тем, что ее положительное решение дает новый критерий σ-субнормальности подгрупп, имеющих важное значение при решении целого ряда классификационных задач теории конечных групп (см., например, обзоры [3, 4]).

В данной работе показывается, что для любого разбиения σ решение σ-проблемы Кегеля — Виландта редуцируется к ее решению в классе всех σ-полных простых неабелевых групп, т. е. имеет место следующая

Теорема 1. *Тогда и только тогда σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение, когда она верна в классе всех σ-полных простых неабелевых групп.*

Ввиду теоремы 1 алгоритм решения σ-проблемы Кегеля — Виландта для заданного разбиения σ состоит в выполнении следующих двух шагов:

1) классифицировать все σ-полные простые группы;

2) на основе анализа строения σ-полных простых групп либо доказать, что для всех них проблема верна, либо указать хотя бы одну из них, для которой это не так.

Что касается второго шага алгоритма, то ввиду [5–9] для любого разбиения σ достаточно ограничиться рассмотрением σ-полных простых неабелевых групп лиева типа ранга, большего 1.

Ввиду требования σ-полноты группы G в σ-проблеме Кегеля — Виландта ее решение тесно связано со следующей проблемой 3.2 из [10].

Найти холловы подгруппы конечных простых групп.

Изучением этой проблемы занимались многие математики (см., например, обзор [10]). Полная классификация холловых подгрупп известных простых групп представлена в работе [10]. Понятно, что она не решает проблемы описания σ-полных простых групп, которая даже для конкретных разбиений σ является сложной теоретико-групповой и теоретико-числовой задачей.

Отметим, что для минимального разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ в силу теоремы Силова любая группа является σ-полной. В этом случае σ-проблема Кегеля — Виландта превращается в проблему Кегеля — Виландта, сформулированную в работах [3, 11]. Полное ее решение, опирающееся на классификацию конечных простых групп, было получено Кляйдманом в [12].

Другое решение проблемы Кегеля — Виландта, основанное на факторизационных свойствах простых групп, предложено в [13]. Кроме того, в [13] отмечается особое значение компонент разбиения σ, содержащих простые числа 2 и 3. В частности, из [13, теорема 1.4] следует, что σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение для разбиения σ, в котором одна из компонент имеет вид $\{2, 3\}$, а все другие компоненты одноэлементны.

В настоящее время кроме минимального разбиения σ-проблема Кегеля — Виландта решена для бинарного разбиения $\sigma = \{\pi, \pi'\}$ (см. [5, 14]), а также для разбиения $\sigma = \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}'\}$ (см. [15]).

В данной работе анализируется случай, когда числа 2 и 3 содержатся в одной компоненте разбиения σ.

Дополнительной мотивировкой для рассмотрения такого разбиения σ является следующее. Если H — подгруппа наименьшего порядка, для которой в простой группе G σ-проблема Кегеля — Виландта неверна, то, как следует из

[5, лемма 2.4], H — простая неабелева группа. Пусть σ_1 — компонента из σ, содержащая числа 2 и 3. Тогда за редким исключением σ_1-холловы подгруппы из H нестандартны. Простые группы с такими холловыми подгруппами перечислены в [10]. Кроме того, в [16, теорема 1.2] описаны группы Шевалле над полем характеристики p, содержащие σ_1-холлову подгруппу такую, что $p \in \sigma_1$, и указано их строение. В следующей теореме показывается, что σ-проблема Кегеля — Виландта верна для всех простых неабелевых групп $G \in E_{\sigma_1}$ лиева типа, σ_1-холлова подгруппа которых содержится в подгруппе Бореля группы G. В ее формулировке мы не указываем группы $L_2(2^{2t})$ и $U_3(2^{2t})$), так как для них σ-проблема Кегеля — Виландта верна, что следует из [9].

Теорема 2. *Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел, при котором числа 2 и 3 содержатся в одной компоненте, и $G \in \{Sp_4(2^{2t}), U_4(2^{2t}), U_5(2^{2t})\}$, где t — натуральное число. Если H — такая подгруппа из G, что $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$, то H является σ-субнормальной в группе G.*

2. Определения и предварительные результаты

Определения и обозначения в основном стандартны, их можно найти в [17]. Терминология теории σ-субнормальных подгрупп приведена в [1].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G.

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π.

Подгруппа H называется *π-холловой подгруппой* группы G, если $\pi(H) \subseteq \pi$ и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$. Множество всех π-холловых подгрупп группы G обозначается через $\mathrm{Hall}_\pi(G)$.

Будем использовать также следующие обозначения:

если p — некоторое простое число, то $\mathrm{Syl}_p(G)$ — множество всех силовских p-подгрупп группы G;

если $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества всех простых чисел и n — натуральное число, то $\sigma(n) = \{\sigma_i \cap \pi(n) \mid i \in I, \sigma_i \cap \pi(n) \neq \varnothing\}$;

$\sigma(G) = \sigma(|G|)$.

Система $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ σ-примарных холловых подгрупп группы G называется *полным холловым множеством типа* σ группы G [1], если выполняются следующие два условия:

1) $(|S_i|, |S_j|) = 1$ для всех $i \neq j \in \{1, 2, \ldots, k\}$;

2) $\pi(G) = \pi(S_1) \cup \pi(S_2) \cup \cdots \cup \pi(S_k)$.

В следующей лемме приводится список простых неабелевых групп лиева типа над полем характеристики p, имеющих содержащуюся в подгруппе Бореля холлову подгруппу, порядок которой делится на 2, 3 и p.

Лемма 1. *Пусть G — простая неабелева группа лиева типа над полем характеристики p, A — ее подгруппа такая, что $|A|$ делится на 2, 3 и p. Подгруппа A является холловой подгруппой группы G и содержится в подгруппе Бореля группы G тогда и только тогда, когда G принадлежит списку*

$$\{L_2(2^{2t}), Sp_4(2^{2t}), U_3(2^{2t}), U_4(2^{2t}), U_5(2^{2t}) \mid t \in \mathbb{N}\}$$

и A является π-холловой подгруппой разрешимой группы $N_G(U)$, где U — силовская 2-подгруппа группы G, $\pi \subseteq (2^{2t} - 1) \cup \{2\}$ и $2, 3 \in \pi$.

Доказательство следует из [16, теорема 1.2].

Подгруппа H группы G называется *π-субнормальной* (*p-субнормальной*), если $H\cap P \in \mathrm{Hall}_\pi(H)$ для любой подгруппы $P \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$ ($H\cap P \in \mathrm{Syl}_p(H)$ для любой подгруппы $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$ соответственно). Концепция p-субнормальной подгруппы предложена Кегелем в работе [11]. Если подгруппа H π-субнормальна (p-субнормальна) в G, то пишем $H \leq_\pi G$ ($H \leq_p G$).

Лемма 2. *Пусть H — подгруппа группы G, обладающей p-замкнутой π-холловой подгруппой для некоторого $p \in \pi$. Если $H \leq_\pi G$, то $H \leq_p G$.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathrm{Hall}_\pi(G)$. Тогда по условию $S_p \trianglelefteq S$.

Если $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$, то по теореме Силова справедливо равенство $P = S_p^x$ для некоторого $x \in G$. Из условия леммы следует, что $S^x \cap H$ — π-холлова подгруппа из H. Пусть $P_1 \in \mathrm{Syl}_p(S^x \cap H)$. Очевидно, P_1 — силовская p- подгруппа из H. Отсюда и из того, что $P = S_p^x$ — единственная силовская p-подгруппа в S^x, по теореме Силова имеем равенство $P \cap H = P_1$, т. е. $P \cap H$ — силовская p-подгруппа в H. Таким образом, $H \leq_p G$.

Следуя [12], для p-элемента g группы G обозначим

$$\Theta_H(g) = |\,\mathrm{Syl}_p(G)|/|\{P \in \mathrm{Syl}_p(G) \mid g \in P\}|.$$

Кроме того, пусть $[g]_G = \{g^x \mid x \in G\}$, а $\mathrm{cl}_G(g)$ — число элементов в классе $[g]_G$.

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа группы G, обладающей p-замкнутой π-холловой подгруппой для некоторого $p \in \pi$. Если $H \leq_\pi G$, то для всякого p-элемента $h \in H$ справедливо равенство $\Theta_G(h) = \Theta_H(h)$.*

Доказательство. Ввиду леммы 2 имеем $H \leq_p G$. Повторяя доказательство предложения 2.4 из [12], получаем равенство $\Theta_G(h) = \Theta_H(h)$.

Лемма 4. *Пусть P — силовская p-подгруппа группы G. Тогда*

$$\Theta_G(g) = \frac{\mathrm{cl}_G(g)}{|[g]_G \cap P|}$$

для всякого p-элемента g группы G.

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.5 работы [12].

Понадобится также следующий хорошо известный теоретико-числовой факт.

Лемма 5. *Пусть p и q — простые числа такие, что $p^m = q^n + 1$ для некоторых натуральных m и n. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(1) *$q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ и $m = 2$;*

(2) *$q = 2$, $m = 1$, n — степень числа 2 и $p = q^n + 1$ — простое число Ферма;*

(3) *$p = 2$, $n = 1$ и $q = p^m - 1$ — простое число Мерсенна, в частности, m — простое число.*

Будем использовать следующий результат, вытекающий из теоремы 1.4 работы [13].

Лемма 6. *Пусть G — простая неабелева группа и H — такая ее подгруппа, что $|H|$ делится на p и $H \leq_p G$ для некоторого простого числа $p \geq 5$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$H = G$;*

2) *$G = A_n, H \cong A_{n-1}$, где $n = sp^a > p$ и $1 \leq s < p$;*

3) *$G = U_3(5)$, $H = A_7$, $p = 5$;*

4) *G — группа Хигмана — Симса, $H = M_{22}$, $p = 5$.*

Следующий результат, приведенный в предложении 3.1 из [18], принадлежит А. Н. Фомину.

Лемма 7. *Пусть $\mu(T)$ — число силовских p-подгрупп конечной группы G, содержащих p-подгруппу T, а силовская p-подгруппа P — одна из них. Обозначим через k число подгрупп, сопряженных с T в G и содержащихся в P. Тогда имеет место равенство*

$$\mu(T) = k\frac{|N_G(T)|}{|N_G(P)|}.$$

3. Доказательство теоремы 1

Если σ-проблема Кегеля — Виландта имеет положительное решение для заданного разбиения σ, то, очевидно, она верна и в классе всех σ-полных простых неабелевых групп.

Пусть σ-проблема Кегеля — Виландта верна в классе всех σ-полных простых неабелевых групп. Покажем, что в этом случае она имеет положительное решение в классе E_σ.

Пусть G — σ-полная группа, $\sigma(G) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k\}$ и $\Sigma = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ — некоторое полное холлово множество типа σ группы G. Докажем следующее утверждение $(\star)$.

Если H — такая подгруппа группы G, что $H \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа из H для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и любого $g \in G$, то $H \in \mathrm{sn}_\sigma(G)$.

Применим индукцию по порядку группы G. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение неверно. Понятно, что G не является простой и $k \geq 2$.

Пусть H — такая подгруппа из G, что $H \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа из H для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ и любого $g \in G$, но H не является σ-субнормальной в G.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $N \trianglelefteq G$, то $N \cap S_i^g \trianglelefteq S_i^g$ и $N \cap S_i^g$ — холлова σ_i-подгруппа в N. Отсюда легко заключить, что $S_i^g \cap HN$ — холлова σ_i-подгруппа в HN. Теперь из равенства

$$S_i^g N/N \cap HN/N = \big(S_i^g \cap HN\big)N/N$$

следует, что $S_i^g N/N \cap HN/N$ — холлова σ_i-подгруппа в HN/N. Таким образом, полное холлово множество $\Sigma^g N/N$ типа σ группы G/N редуцируется в HN/N для любого элемента $g \in G$. Отсюда в силу выбора группы G подгруппа HN/N является σ-субнормальной в G/N. Но тогда ввиду леммы 2.6 из [1] HN является σ-субнормальной подгруппой группы G. Кроме того, N не содержится в H, в частности, $\mathrm{Core}_G(H) = 1$. Ясно, что $H \cap S_i^x$ — холлова σ_i-подгруппа в H для всех $x \in HN$ и система

$$\big\{HN \cap S_1^x, HN \cap S_2^x, \ldots, HN \cap S_k^x\big\}$$

является полным холловым множеством типа σ группы HN, которое редуцируется в H. Если $|HN| < |G|$, то в силу выбора группы G подгруппа H является σ-субнормальной в HN. Тогда ввиду леммы 2.6 из [1] H является σ-субнормальной подгруппой группы G, что противоречит ее выбору.

Таким образом, полагаем далее, что $G = HN$.

Пусть сначала N — элементарная абелева p-подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$. Тогда индекс $|G : H|$ — степень числа p. Отсюда и из $k \geq 2$ следует, что найдется множество σ_i, для которого $p \notin \sigma_i$. Тогда для всякого $g \in G$ подгруппа H содержит холлову σ_i-подгруппу S_i^g, причем $S_i^g \neq 1$. Поэтому $\langle S_i^g | g \in G\rangle \subseteq H$. Так как $1 \neq \langle S_i^g | g \in G\rangle \trianglelefteq G$, то $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Обозначим $K = H \cap N$. Из $\mathrm{Core}_G(H) = 1$ следует, что K — собственная подгруппа в N. Простая проверка показывает, что полное холлово множество $\Sigma^n \cap N$ типа σ группы N редуцируется в K для любого элемента $n \in N$. Отсюда и из выбора группы G следует, что подгруппа K является σ-субнормальной в N. А значит, существует цепь подгрупп

$$K = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_{n-1} \subseteq K_n = N$$

такая, что для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ либо подгруппа K_{i-1} нормальна в K_i, либо группа $K_i/\mathrm{Core}_{K_i}(K_{i-1})$ является σ-примарной.

Используя индукцию по n, покажем, что либо N является σ_i-группой для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, либо подгруппа K субнормальна в N. Понятно, что при $n = 1$ это утверждение верно.

Пусть $N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t$, где $t \geq 1$ и $N_1, N_2, \ldots, N_t$ — изоморфные простые группы.

Если подгруппа K_{n-1} не нормальна в N, то $N/\mathrm{Core}_N(K_{n-1})$ — σ_i-группа для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$. Из строения подгруппы N следует, что она является σ_i-группой. Значит, подгруппа K_{n-1} нормальна в N. По индукции либо подгруппа K_{n-1} является σ_i-группой для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, либо подгруппа K субнормальна в K_{n-1}. Если K_{n-1} является σ_i-группой для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, то из строения N следует, что N также является σ_i-группой. Если же K субнормальна в K_{n-1}, то из $K_{n-1} \trianglelefteq N$ следует, что K субнормальна в N.

Если N является σ_i-группой для некоторого $i = 1, 2, \ldots, k$, то из $G = HN$ и $k \geq 2$ следует, что для всех $g \in G$ подгруппа H содержит все холловы σ_j-подгруппы S_j^g $(j \neq i)$. Но тогда $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$, что невозможно.

Если K субнормальна в N, то из строения N следует, что K нормальна в N. Кроме того, $K = H \cap N \trianglelefteq H$. Поэтому $K \trianglelefteq \langle N, H \rangle = HN = G$. Если $K \neq 1$, то $\mathrm{Core}_G(H) \neq 1$. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, $K = H \cap N = 1$. Тогда $S_i = (N \cap S_i)(H \cap S_i)$. При этом $N \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из N, а $H \cap S_i$ — холлова σ_i-подгруппа из H. Отсюда $S_i N = (H \cap S_i)N$.

Так как для любого $x \in N$ имеет место $H \cap S_i^x \subseteq S_i^x \subseteq S_i N$, то

$$H \cap S_i^x \subseteq (H \cap S_i)N \cap H = (H \cap S_i)(N \cap H) = H \cap S_i.$$

По условию для любого $x \in N$ пересечение $H \cap S_i^x$ является холловой σ_i-подгруппой в H. Отсюда и из $H \cap S_i^x \subseteq H \cap S_i$ следует, что $H \cap S_i^x = H \cap S_i$.

Таким образом, $H \cap S_i \subseteq S_i^x$ для всех $x \in N$. Значит,

$$H \cap S_i \subseteq O_{\sigma_i}(N(H \cap S_i)) = O_{\sigma_i}(S_i N).$$

Если $O_{\sigma_i}(N) \neq 1$, то N является σ_i-группой. Последнее, как показано выше, невозможно. Поэтому $O_{\sigma_i}(N) = 1$ и холлова σ_i-подгруппа $H \cap S_i$ группы H централизует N. Так как это верно для всякого $i \in \{1, \ldots, k\}$, то $G = N \times H$ и $H \trianglelefteq G$, что невозможно. Таким образом, G является простой неабелевой группой. Снова пришли к противоречию, которое завершает доказательство утверждения $(\star)$.

Из утверждения $(\star)$ следует, что если $H \leq_{\sigma_i} G$ для любого $i \in I$, то подгруппа H является σ-субнормальной в G. Таким образом, если σ-проблема Кегеля — Виландта верна в классе всех σ-полных простых неабелевых групп, то она имеет положительное решение в классе E_σ.

Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

(1) $G \cong Sp_4(q) = Sp_4(2^{2t})$, где $t \geq 2$. Имеет место следующее равенство:

$$|G| = q^4(q^2-1)(q^4-1) = q^4(q-1)^2(q+1)^2(q^2+1).$$

Из [18, лемма 1.2] следует, что в группе G имеются максимальные торы следующих порядков: $(q-1)^2$, $(q+1)^2$, q^2+1, q^2-1. Отметим следующие равенства: $(q-1,q+1) = (q-1,q^2+1) = (q+1,q^2+1) = 1$. Поэтому группа G имеет абелевы холловы подгруппы попарно взаимно простых порядков: $(q-1)^2$, $(q+1)^2$, q^2+1.

Пусть компоненте σ_1 соответствует холлова подгруппа $S_1 = U : L$, где $U \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и L является некоторой подгруппой группы Картана. Строение группы G можно найти в [19, табл. 8.14]. В частности, отсюда следует, что любая другая холлова подгруппа группы G абелева и ее порядок делит одно из попарно взаимно простых чисел $q-1$, $q+1$, q^2+1, причем, возможно, подгруппы первого типа отсутствуют. Так как ввиду леммы 2.4 из [5] H — простая неабелева группа, множество $\pi(H)$ не содержится в σ_1. Поэтому можно считать, что найдется простое число $r \in \sigma_2$ такое, что $r \in \pi(H)$ и соответствующая холлова подгруппа S_2 группы G циклическая. Ясно, что $r \geq 5$ и по лемме 2 $H \leq_r G$. Последнее невозможно в силу леммы 6.

(2) $G \cong U_4(q) = U_4(2^{2t})$. Имеет место следующее равенство:

$$|G| = q^6(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1) = q^6(q-1)^2(q+1)^3(q^2-q+1)(q^2+1).$$

Из [18, лемма 1.2] следует, что в группе G имеются максимальные торы следующих порядков: $(q-1)(q^2+1)$, $(q-1)(q+1)^2$, $(q-1)^2(q+1)$, $(q+1)(q^2-q+1)$, $(q+1)^3$. Также имеют место равенства

$$(q-1,q+1) = (q-1,q^2+1) = (q-1,q^2-q+1) = (q+1,q^2+1) \\ = (q+1,q^2-q+1) = (q^2-q+1,q^2+1) = 1.$$

Отсюда заключаем, что группа G имеет абелевы холловы подгруппы попарно взаимно простых порядков $(q-1)^2$, $(q+1)^3$, (q^2-q+1), (q^2+1).

Пусть компоненте σ_1 соответствует холлова подгруппа $S_1 = U : L$, где $U \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и L является некоторой подгруппой группы Картана. Из [19, табл. 8.10] получаем, что любая другая холлова подгруппа группы G абелева и ее порядок делит одно из попарно взаимно простых чисел: $q-1$, $q+1$, q^2+1, q^2-q+1, причем, возможно, подгруппы первого типа отсутствуют. Так как ввиду леммы 2.4 из [5] H — простая неабелева группа, множество $\pi(H)$ не содержится в σ_1. Поэтому можно считать, что найдется простое число $r \in \sigma_2$ такое, что $r \in \pi(H)$ и соответствующая холлова подгруппа S_2 группы G циклическая. Так как $r \geq 5$, по лемме 2 $H \leq_r G$. Последнее невозможно в силу леммы 6.

(3) $G \cong U_5(q) = U_5(2^{2t})$. Имеют место следующие равенства:

$$|G| = \frac{1}{d}q^{10}(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1) \\ = \frac{1}{d}q^{10}(q-1)^2(q+1)^4(q^2-q+1)(q^2+1)(q^4-q^3+q^2-q+1),$$

где $d = (5, q+1)$. Из [18, лемма 1.2] следует, что в группе G имеются максимальные торы следующих порядков:

$$\frac{q^4-q^3+q^2-q+1}{d},\ \frac{q^4-1}{d} = \frac{(q-1)(q+1)(q^2+1)}{d},$$

$$\frac{(q+1)(q^3+1)}{d}=\frac{(q+1)^2(q^2-q+1)}{d},$$
$$\frac{(q+1)^2(q^2-1)}{d}=\frac{(q+1)^3(q-1)}{d},\ \frac{(q+1)^4}{d},$$
$$\frac{(q-1)(q^3+1)}{d}=\frac{(q-1)(q+1)(q^2-q+1)}{d},$$
$$\frac{(q-1)(q^2-1)}{d}=\frac{(q-1)^2(q+1)}{d}.$$

Имеют место равенства

$$\begin{aligned}(q-1,q+1)=(q-1,q^2+1)=(q-1,q^2-q+1)=(q-1,q^4-q^3+q^2-q+1)\\ =(q+1,q^2+1)=(q+1,q^2-q+1)=(q^2-q+1,q^2+1)\\ =(q^2-q+1,q^4-q^3+q^2+1)=(q^2+1,q^4-q^3+q^2+1)=1.\end{aligned}$$

Кроме того, $(q+1,q^4-q^3+q^2-q+1)\in\{1,5\}$.

По малой теореме Ферма число 5 делит $q^4-1=(q-1)(q+1)(q^2+1)$. Отметим, что числа $q-1$, $q+1$, q^2+1 попарно взаимно простые. Индукцией покажем, что $(5,q^2+1)=1$. Так как $q=2^{2t}$, то $q^2+1=2^{4t}+1$. При $t=1$ получим $q^2+1=17$, и это число не делится на 5. Пусть $2^{4t}+1$ не делится на 5. Тогда $2^{4(t+1)}+1=16(2^{4t}+1)-15$ не делится на 5.

Пусть 5 делит $q-1$. В этом случае $d=(5,q+1)=1$. Так как $(q-1)^2$ делит $|G|$, то 5^2 также делит $|G|$. Из [19, табл. 8.20] следует, что группа G содержит максимальные подгруппы: $(q+1)^4:5$ и $(q^4-q^3+q^2-q+1):5$, причем, как отмечалось, $(q-1,q+1)=(q-1,q^4-q^3+q^2-q+1)=1$. Поэтому подгруппы $(q+1)^4:5$ и $(q^4-q^3+q^2-q+1):5$ не холловы. Так как 5 делит $q-1$, в этом случае группа G имеет абелевы холловы подгруппы попарно взаимно простых порядков: $(q-1)^2$, $(q+1)^4$, (q^2-q+1), (q^2+1), $(q^4-q^3+q^2-q+1)$.

Пусть компоненте σ_1 соответствует холлова подгруппа $S_1=U:L$, где $U\in\mathrm{Syl}_2(G)$ и L является некоторой подгруппой группы Картана. Из [19, табл. 8.20] получаем, что любая другая холлова подгруппа группы G абелева и ее порядок делит одно из попарно взаимно простых чисел: $(q-1)^2$, $(q+1)^4$, q^2+1, q^2-q+1, $q^4-q^3+q^2-q+1$, причем, возможно, подгруппы первого типа отсутствуют. Так как ввиду леммы 2.4 из [5] H — простая неабелева группа, множество $\pi(H)$ не содержится в σ_1. Поэтому можно считать, что найдется простое число $r\in\sigma_2$ такое, что $r\in\pi(H)$ и соответствующая холлова подгруппа S_2 группы G циклическая. Ясно, что $r\geq 5$ и тем самым по лемме 2 $H\leq_r G$. Последнее невозможно в силу леммы 6.

Таким образом, 5 делит $q+1$ и в этом случае $d=(5,q+1)=5$. По лемме 1 $\sigma_1\subseteq\pi(2^{2t}-1)\cup\{2\}=\pi(q-1)\cup\{2\}$ и, следовательно, $5\notin\sigma_1$. Пусть $5\in\sigma_2$. Тогда из отмеченного выше следует, что σ_2-холлова подгруппа S_2 имеет вид $S_2=R:T$, где R — абелева группа и $\pi(R)\subseteq\pi(q+1)$ или $\pi(R)\subseteq\pi(q^4-q^3+q^2-q+1)$, $T\in\mathrm{Syl}_5(G)$. При этом возможно, что $R=1$. Все остальные σ_i-подгруппы для $i\geq 3$ будут абелевы и их порядки делят одно из взаимно простых чисел: $(q-1)^2$, $(q+1)^4_{5'}$, q^2+1, q^2-q+1, $(q^4-q^3+q^2-q+1)_{5'}$. Возможно, что подгруппы первого, второго и пятого типов отсутствуют.

Если $5\notin\pi(H)$, то найдется компонента σ_t при некотором $t\geq 2$ такая, что для некоторого $r\in\sigma_t$ число r также содержится в $\pi(H)$. Поскольку $r\geq 7$ и σ_t-холлова подгруппа содержит нормальную абелеву $5'$-подгруппу, то противоречие вытекает из лемм 2 и 6.

Следовательно, $5 \in \pi(H)$. Пусть $5 \in \sigma_2$. Холлова подгруппа S_2, соответствующая компоненте σ_2, может быть только одного из следующих видов: $S_2 = R \in \mathrm{Syl}_5(G)$ или $S_2 = T : R$, где T — абелева группа и $\pi(T) \in \pi(q+1)$ или $\pi(T) \in \pi(q^4 - q^3 + q^2 - q + 1)$, $R \in \mathrm{Syl}_5(G)$. В первом случае $H \leq_5 G$, что невозможно в силу леммы 6. Рассмотрим второй случай. Ясно, что $S_2 \cap H$ — 5-группа, в противном случае получается противоречие с леммой 2 и леммой 6. Поскольку холловы подгруппы, соответствующие компонентам σ_i для $i \geq 3$, абелевы, то $S_i \cap H = 1$. Отсюда следует, что подгруппа H пересекается в точности с двумя холловыми подгруппами группы G. При этом подгруппа H допускает холлову факторизацию: $H = LF$, где $L = U : L$ для некоторых подгрупп $U \in \mathrm{Syl}_2(H)$ и $F \in \mathrm{Syl}_5(H)$. В частности, подгруппа H факторизуется двумя разрешимыми подгруппами и имеет холлову $5'$-подгруппу. Из работы [20] следует, что $G \cong PSL_2(m)$ для соответствующего значения параметра m. Из [21] получаем, что $m+1 = 5^n$ и $m+1 = 5$ согласно лемме 5. Следовательно, $H \cong SL_2(4)$.

В группе $H \cong SL_2(4)$ силовская 2-подгруппа W является элементарной абелевой порядка 8, все инволюции группы H сопряжены, W — TI-подгруппа в H, всякая инволюция τ из H содержится в единственной силовской 2-подгруппе группы H.

Зафиксируем силовскую 2-подгруппу $W \in \mathrm{Syl}_2(H)$. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_l$ — все различные силовские 2-подгруппы группы G, для которых $P_i \cap H = W$. Предположим, что W_1 — другая силовская 2-подгруппа группы H. Тогда найдется элемент $h \in H$ такой, что $W^h = W_1$. При этом силовские 2-подгруппы $P_1, P_2, \ldots, P_l$ перейдут в силовские 2-подгруппы $P_1^h, P_2^h, \ldots, P_l^h$ и $P_i^h \cap H = W_1$.

Число силовских 2-подгрупп в H равно 5. Таким образом, подгруппа W содержится в точности в $|G : N_G(P)|/5$ различных силовских 2-подгруппах группы G, где $P \in \mathrm{Syl}_2(G)$.

Пусть τ — инволюция из W. Тогда все силовские 2-подгруппы группы G, содержащие τ, содержат W. Следовательно, число силовских 2-подгрупп группы G, содержащих τ, равно $|G : N_G(P)|/5$. Для инволюции τ в обозначениях леммы 7 имеем следующие равенства:

$$\mu(\tau) = k\frac{|C_G(\tau)|}{|N_G(P)|}; \quad |G : N_G(P)|/5 = k\frac{|C_G(\tau)|}{|N_G(P)|}; \quad \frac{|G|}{5|C_G(\tau)|} = k;$$

$$\frac{\mathrm{cl}_G(\tau)}{5} = k; \quad \frac{\mathrm{cl}_G(\tau)}{k} = 5; \quad \theta_G(\tau) = 5.$$

Поскольку все инволюции в H сопряжены, последнее равенство верно для всех инволюций из H.

Вычислим $\Theta_H(\tau)$, где τ — инволюция в H. Имеем

$$\Theta_H(\tau) = \frac{cl(\tau)}{|[\tau]_H \cap P|},$$

где $P \in \mathrm{Syl}_2(H)$. Так как подгруппа H имеет один класс сопряженных инволюций, то $|[\tau]_H \cap P| = |P|$. Таким образом,

$$\Theta_H(\tau) = |H|/(|C_H(\tau)||P|) = 15/4 < 5.$$

Пришли к противоречию с леммой 3.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Skiba A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.

2. *Нерешенные вопросы теории групп*: Коуровская тетрадь. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.

3. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // Proc. Pure Math. 1980. V. 37. P. 161–173.

4. *Skiba A. N.* On some arithmetic properties of finite groups // Note di Matematica. 2016. V. 36. P. 35–59.

5. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О σ-субнормальных подгруппах конечных групп // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 2. С. 337–343.

6. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О σ-субнормальных подгруппах конечных $3'$-групп // Укр. мат. журн. 2020. Т. 72, № 6. С. 806–811.

7. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* О некоторых аспектах σ-проблемы Кегеля — Виландта // Изв. вузов. Математика. 2022. № 2. С. 18–28.

8. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* К σ-проблеме Кегеля — Виландта // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 4. С. 564–570.

9. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* К σ-проблеме Кегеля — Виландта // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 121–129.

10. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.

11. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–211.

12. *Kleidman P. B.* A proof of the Kegel–Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. 1991. V. 133. P. 369–428.

13. *Guralnick R., Kleidman P. B., Lyons R.* Sylow p-subgroups and subnormal subgroups of finite groups // Proc. London Math. Soc. 1993. V. 66, N 3. P. 129–151.

14. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Tyutyanov V. N.* On the Kegel–Wielandt σ-problem for binary partitions // Ann. Mat. Pura Appl. 2022. V. 201. P. 443–451.

15. *Каморников С. Ф., Тютянов В. Н.* σ-Проблема Кегеля — Виландта для разбиения $\sigma = \{\{2\},\{3\},\{2,3\}'\}$ // Проблемы физики, математики и техники. 2023. № 4. С. 64–68,

16. *Ревин Д. О.* Холловы π-подгруппы конечных групп Шевалле, характеристика которых принадлежит π // Мат. тр. 1999. Т. 2, № 1. С. 160–208.

17. *Carter R. W.* Simple groups of Lie type. London: Wiley-Intersci., 1972.

18. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.

19. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. A.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013.

20. *Fismann E.* On product of two finite solvable groups // J. Algebra. 1983. V. 80, N 2. P. 517–536.

21. *Казарин Л. С.* О произведении конечных групп // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269, № 3. С. 528–531.

Поступила в редакцию 18 сентября 2024 г.
После доработки 18 сентября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета «МИТСО» пр. Октября, 46а,
Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 517.55

ОБ АНАЛОГАХ РЕКУРРЕНТНЫХ ФОРМУЛ НЬЮТОНА ДЛЯ СИСТЕМ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. М. Кытманов

Аннотация. Рассматривается общая система трансцендентных уравнений в n-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Вводится понятие σ-степенной суммы корней системы σ_α. С использованием теории многомерных вычетов получены формулы, связывающие между собой σ-степенные суммы различных порядков. Устанавливается связь между σ-степенными суммами и степенными суммами корней системы.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.106

Ключевые слова: вычетный интеграл, рекуррентные формулы Ньютона, система трансцендентных уравнений, степенная сумма корней, многомерные вычеты.

Введение

Классические рекуррентные формулы Ньютона устанавливают связь между коэффициентами многочлена и степенными суммами его корней (см., например, [1, § 53; 2, приложение 1 к гл. 5]). Напомним их. Пусть многочлен $P(z)$ степени m с комплексными коэффициентами имеет вид

$$P(z) = z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_{m-1} z + b_m.$$

Обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_m$ его корни с учетом кратностей. Определим степенную сумму S_k корней так:

$$S_k = z_1^k + \ldots + z_m^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда справедливы рекуррентные формулы Ньютона

$$\begin{gathered} S_j + S_{j-1} b_1 + \cdots + S_1 b_{j-1} + j b_j = 0, \quad \text{если} \quad 1 \le j \le n, \\ S_j + S_{j-1} b_1 + \cdots + S_{j-n} b_n = 0, \quad \text{если} \quad j > n. \end{gathered} \tag{1}$$

Будем считать, что $S_0 = m$.

Из формул Ньютона легко выводятся формулы Варинга (см. например, [3, гл. 1; 4, § 1]), позволяющие прямо вычислять степенные суммы корней через коэффициенты многочлена (и наоборот, вычислять коэффициенты многочлена по степенным суммам его корней).

Л. А. Айзенберг существенно использовал формулы (1) при построении своего метода исключения неизвестных из систем алгебраических уравнений (см. [5, гл. 4]). Этот метод основан на формуле многомерного логарифмического вычета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-21-00023.

Существует обобщение формул Ньютона для целых функций одного комплексного переменного (см. [6, гл. 1; 7, гл. 1]). В этом случае вместо степенных сумм нулей целых функций берутся степени их обратных величин, поскольку, как правило, нулей у целой функции бесконечно много и обычные степенные суммы нулей являются расходящимися рядами.

А именно, предположим, что функция $f(z)$ есть целая функция вида

$$f(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{c_j}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2}$$

с нулями $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots$, и ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{|c_j|}$$

сходится. Сходимость этого ряда гарантирует сходимость бесконечного произведения (2). Данное условие выполняется, если функция f является целой функцией первого порядка роста минимального типа (см. [8, гл. 7]).

Обозначим через σ_k степенные суммы вида

$$\sigma_k = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{c_j^k}, \quad k \geq 1.$$

Ряды σ_k — абсолютно сходятся при $k \geq 1$.

Справедливы равенства (см. [6, гл. 1; 7, гл. 1])

$$\sum_{j=0}^{k-1} a_j \sigma_{k-j} + k a_k = 0, \quad k \geq 1. \tag{3}$$

Для таких целых функций также справедливы аналоги формул Варинга (см. [6, гл. 1; 7, гл. 1]).

Для различных систем алгебраических уравнений аналоги формул Ньютона получены в [9] (см. также [10]). В [9] рассматриваются невырожденные системы уравнений и аналоги формул Ньютона отличаются друг от друга для разных старших однородных частей систем. Поскольку их описания достаточно сложны, здесь не будем их приводить. Их можно также найти в [6, гл. 2].

Для так называемых *простейших* систем трансцендентных уравнений (см., например, [11]) аналоги формул Ньютона получены в [12]. А именно, пусть дана система функций (см. [11])

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z),$$

голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^n$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, и имеющих следующий вид:

$$f_j(z) = z^{\beta^j} + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где $\beta^j = \left(\beta_1^j, \beta_2^j, \ldots, \beta_n^j\right)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j} = z_1^{\beta_1^j} \cdot z_2^{\beta_2^j} \cdots z_n^{\beta_n^j}$ и $\|\beta^j\| = \beta_1^j + \beta_2^j + \cdots + \beta_n^j = k_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Функции Q_j разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся в окрестности нуля ряды Тейлора вида

$$Q_j(z) = \sum_{\|\alpha\| > k_j} a_\alpha^j z^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \geq 0$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n}$.

В работе [12] использовались не степенные суммы корней системы, а их обратные величины, поскольку так же, как и для целых функций одного комплексного переменного, корней системы, как правило, бесконечно много и ряды из них расходящиеся. В [12] сначала рассмотрен случай так называемых вычетных интегралов, а затем уже степенных сумм корней.

Цель нашей работы получить аналоги формулы Ньютона для общих систем трансцендентных уравнений.

1. Постановка задачи

Пусть $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ — система функций, голоморфных в окрестности начала координат в многомерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$.

Разложим функции $f_1(z), f_2(z), \dots, f_n(z)$ в ряды Тейлора в окрестности начала координат и рассмотрим систему трансцендентных уравнений вида

$$f_j(z) = P_j(z) + Q_j(z) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \tag{5}$$

где $P_j(z)$ — младшая однородная часть разложения Тейлора функции $f_j(z)$. Степень всех мономов (по совокупности переменных), входящих в P_j, равна m_j. В функциях Q_j степени каждого из мономов строго больше, чем m_j. Такого типа системы возникают, например, в химической кинетике [13].

Решения системы (5) образуют аналитическое множество. Будем в дальнейшем считать, что система (5) имеет дискретное число корней (а значит, не более чем счетное множество решений). Другими словами (см. [14, гл. 1]), оно нульмерно, т. е. каждый компакт из области определения функций содержит конечное множество корней. Для алгебраических систем уравнений существуют процедуры (например, метод базисов Гребнера — Ширшова), позволяющие определять дискретность множества корней. Для трансцендентных систем уравнений этот вопрос открытый. Здесь можно только привести следствие из [14, с. 186].

Следствие 1. *Пусть A — аналитическое множество в поликруге U такое, что A входит в $U \cup \Gamma$ (Γ — остов поликруга), и A не пересекается с осями координат. Тогда A не более чем счетно.*

Разложения функций P_j, Q_j, $j = 1, \dots, n$, в окрестности нуля в ряды Тейлора, сходящиеся абсолютно и равномерно в этой окрестности, имеют вид

$$P_j(z) = \sum_{\|\beta\| = m_j} a_\beta^j z^\beta, \quad j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

$$Q_j(z) = \sum_{\|\beta\| > m_j} a_\beta^j z^\beta, \quad j = 1, \dots, n, \tag{7}$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — мультииндекс, т. е. β_j — неотрицательные целые числа, $j = 1, \dots, n$, $\|\beta\| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$. Тогда можно записать, что

$$f_j(z) = \sum_{\|\beta\| \geq m_j} a_\beta^j z^\beta, \quad j = 1, \dots, n.$$

В дальнейшем будем предполагать, что система многочленов $P_1(z), \dots, P_n(z)$ *невырожденная*, т. е. ее общим нулем служит только точка 0 — начало координат.

Рассмотрим открытое множество (*специальный аналитический полиэдр*) вида

$$D_f(r_1,\dots,r_n)=\{z:|f_j(z)|<r_j,\ j=1,\dots,n\},$$

где $r_1,\dots,r_n$ — положительные числа. Его остов имеет вид

$$\Gamma_f(r_1,\dots,r_n)=\Gamma_f(r)=\{z:|f_j(z)|=r_j,\ j=1,\dots,n\}.$$

Хорошо известно (см., например, [5, § 4]), что для систем голоморфных функций $f_1,\dots,f_n$ множество $D_f(r_1,\dots,r_n)$ относительно компактно для почти всех $r_1,\dots,r_n$, состоит из конечного числа связных компонент и его остов $\Gamma_f(r_1,\dots,r_n)$ является гладким компактным циклом.

По теореме 2.4 из [5] система $f_1,\dots,f_n$ имеет конечное число изолированных нулей в $D_f(r)$.

Нам также потребуется специальный аналитический полиэдр, построенный по системе многочленов $P_1,\dots,P_n$, а именно

$$D_P(r_1,\dots,r_n)=D_P(r)=\{z:|P_j(z)|<r_j,\ j=1,\dots,n\},$$

В дальнейшем значок r будем, как правило, опускать.

При достаточно малых r_j циклы Γ_P лежат в области голоморфности функций f_j, поэтому ряды

$$\sum_{\|\alpha\|>m_j}\left|a^j_\alpha\right|r_1^{\alpha_1}\cdots r_n^{\alpha_n}$$

сходятся, $j=1,2,\dots,n$. Тогда на цикле $\Gamma_P(tr)=\Gamma_P(tr_1,tr_2,\dots,tr_n)$ при достаточно малых $t>0$ имеем

$$|P_i(tr)|=\Big|\sum_{\|\beta\|=m_i}a^i_\beta(tr)^\beta\Big|$$

$$\le\sum_{\|\beta\|=m_i}t^{\|\beta\|}\left|a^i_\beta\right|r^\beta=t^{m_i}\sum_{\|\beta\|=m_i}\left|a^i_\beta\right|r^\beta,\quad i=1,\dots,n,$$

$$|Q_i(tr)|=\Big|\sum_{\|\alpha\|>m_i}a^i_\alpha(tr)^\alpha\Big|$$

$$\le\sum_{\|\alpha\|>m_i}t^{\|\alpha\|}|a^i_\alpha|r^\alpha=t^{m_i+1}\sum_{\|\alpha\|>m_i}|a^i_\alpha|r^\alpha t^{\|\alpha\|-(m_i+1)}.$$

Поэтому при достаточно малых t на цикле $\Gamma_P(tr)$ выполняются неравенства

$$|P_j(z)|>|Q_j(z)|,\quad j=1,2,\dots,n. \tag{8}$$

Таким образом,

$$f_j(z)\ne 0\quad\text{на}\quad\Gamma_P(tr),\quad j=1,2,\dots,n.$$

В дальнейшем будем считать, что $t=1$, т. е. неравенство (8) справедливо на цикле $\Gamma_P(r_1,\dots,r_n)$.

Рассмотрим интегралы I_α вида (в [15] такого вида интегралы назывались *вычетными*)

$$I_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_P}\frac{1}{z^\alpha}\cdot\frac{df}{f}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_P}\frac{1}{z_1^{\alpha_1}\cdot z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\dots\wedge\frac{df_n}{f_n}. \tag{9}$$

Далее также рассматриваются интегралы по остовам поликругов $\{z:|z_j|<r_j$, $j=1,\dots,n\}$.

Отметим, что эти интегралы не являются многомерными логарифмическими вычетами или вычетами Гротендика.

Наша дальнейшая цель — связать между собой эти интегралы для различных порядков α.

2. Вспомогательные результаты

Так как система многочленов $P_1, \dots, P_n$ невырожденная, по теореме Гильберта о корнях (см., например, [16, гл. 16]) существует матрица A, состоящая из многочленов $a_{jk}(z)$ вида

$$A = \|a_{jk}(z)\|_{j,k=1}^n,$$

в которой многочлены $a_{jk}(z)$ таковы, что

$$z_j^{s_j} = \sum_{k=1}^n a_{jk}(z) P_k(z), \quad j = 1, \dots, n,$$

с некоторыми натуральными числами s_j. По теореме Маколея [17] можно выбрать $s_j \leq m_1 + \ldots + m_n - n + 1$. Пусть $q_j(z)$ — функции

$$q_j(z) = \sum_{k=1}^n a_{jk}(z) Q_k(z), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Вопрос о нахождении матрицы A здесь не обсуждаем. Он исследован достаточно подробно, например, в монографиях [6, 7].

Здесь нужна будет только степень многочлена $\det A$. Можно считать, что многочлены $a_{jk}(z)$ однородные, поэтому их степень равна $s_j - m_k$. Тогда степень мономов, входящих в $\det A$, равна $\|s\| - \|m\|$, где $m = (m_1, \dots, m_n)$, $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Положим $F_j(z) = z_j^{s_j} + q_j(z)$, т. е. $(F_1, \dots, F_n) = F = Af$, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Каждый ненулевой моном в q_j имеет степень по совокупности переменных строго больше, чем s_j, $j = 1, \ldots, n$.

Пусть

$$F_j(z) = \sum_{\|\alpha\| \geq s_j} c_\alpha(j) z^\alpha$$

и $c_\alpha(j) = 1$ для $\alpha = s_j e_j$, e_j это вектор, у которого на j-м месте стоит 1, а все остальные координаты равны 0, и $c_\alpha(j) = 0$ для всех остальных α с $\|\alpha\| = s_j$.

Используя формулу преобразования вычета Гротендика (см. [18]), для неотрицательных мультииндексов α получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_f} \frac{z^\alpha \cdot \Delta_f \, dz}{f_1 \ldots f_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_F} \frac{z^\alpha \cdot \det A \cdot \Delta_f \, dz}{F_1 \ldots F_n},$$

где Δ_f — якобиан системы $f_1, \dots, f_n$, а $dz = dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n$.

Система (5) имеет конечное число корней в D_f и в D_P (как мы уже ранее отмечали), поэтому данный интеграл по формуле А. П. Южакова многомерного логарифмического вычета (см., например, [5, теорема 4.5]) равняется степенной сумме корней системы.

Выберем цикл $\Gamma_z = \{z : |z_j| = \varepsilon_j, \, j = 1, \ldots, n\}$ с $\varepsilon_j > 0$ достаточно малыми, чтобы иметь неравенства $\left|z_j^{s_j}\right| > |q_j|$, $j = 1, \ldots, n$, на Γ_z. Это, в частности, означает, что система $F_1(z) = 0, \dots, F_n(z) = 0$ имеет корень только в точке 0. Поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_F} \frac{z^\alpha \cdot \det A \cdot \Delta_f \, dz}{F_1 \ldots F_n} = 0$$

для неотрицательных мультииндексов α с $\|\alpha\| > 0$.

Используя теорему Южакова о смещенном остове (см. [5, теорема 4.8]), получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_F}\frac{z^\alpha\cdot\det A\cdot\Delta_f\,dz}{F_1\ldots F_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{z^\alpha\cdot\det A\cdot\Delta_f\,dz}{F_1\ldots F_n}.$$

В дальнейшем будем рассматривать случай, когда мультииндекс α имеет целые координаты разных знаков, а выражение

$$\sigma_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\det A\cdot\Delta_f\,dz}{z^\alpha\cdot F_1\ldots F_n}$$

назовем *σ-степенной суммой.*

Лемма 1. *Если $\|\alpha\| < 0$, то $\sigma_\alpha = 0$.*

Доказательство. Разлагая функцию

$$\frac{1}{F_j}=\frac{1}{z_j^{s_j}+q_j}$$

на Γ_z по формуле геометрической прогрессии, имеем

$$\frac{1}{F_j}=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{q_j^s}{z_j^{s_j(s+1)}}. \tag{10}$$

Тогда

$$\sigma_\alpha=\frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\|\beta\|\geq 0}(-1)^{\|\beta\|}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\det A\cdot\Delta_f\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_n^{\beta_n}\,dz}{z^\alpha\cdot z_1^{s_1(\beta_1+1)}\cdots z_n^{s_n(\beta_n+1)}}.$$

Степень знаменателя равна

$$\|\alpha\|+\sum_{j=1}^{n}s_j(\beta_j+1),$$

а степень числителя больше либо равна

$$\|s\|-\|m\|+\sum_{j=1}^{n}m_j-n+\sum_{j=1}^{n}(s_j+1)\beta_j.$$

Поэтому степень числителя плюс n минус степень знаменателя больше либо равна

$$\|s\|+\sum_{j=1}^{n}(s_j+1)\beta_j-\left(\|\alpha\|+\sum_{j=1}^{n}s_j(\beta_j+1)\right)=\|\beta\|-\|\alpha\|.$$

Интеграл σ_α может быть отличен от нуля только в случае, если $\|\beta\|-\|\alpha\|\leq 0$. Но так как $\|\alpha\| < 0$, то $\sigma_\alpha = 0$. □

Лемма 2. *Если $\|\alpha\| = 0$, то $\sigma_\alpha = m_1\cdots m_n$ при $\delta = (0,\ldots,0)$ и $\sigma_\alpha = 0$ в остальных случаях.*

Доказательство. При $\alpha = (0,\ldots,0)$ интеграл σ_α равен

$$\sigma_{(0,\ldots,0)}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\det A\cdot\Delta_f\,dz}{F_1\cdots F_n}.$$

Используя теорему Южакова о смещенном остове и формулу преобразования вычета Гротендика в обратную сторону, получим

$$\int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot \Delta_f \, dz}{F_1 \cdots F_n} = \int\limits_{\Gamma_F} \frac{\det A \cdot \Delta_f \, dz}{F_1 \dots F_n} = \int\limits_{\Gamma_f} \frac{\Delta_f \, dz}{f_1 \dots f_n}.$$

По лемме 4.9 из [5] цикл Γ_f гомологичен циклу Γ_P в силу неравенств (8). Поэтому последний интеграл равен

$$\int\limits_{\Gamma_P} \frac{\Delta_f \, dz}{f_1 \dots f_n}.$$

С другой стороны, этот интеграл равен числу корней системы (5) по формуле многомерного логарифмического вычета, а это число корней по хорошо известной теореме Безу (см., например, [14, гл. 2]) равно кратности нуля системы $P_1(z) = 0, \dots, P_n(z) = 0$, которая равна $m_1 \dots m_n$.

Если $\|\alpha\| = 0$, то доказательство леммы 1 показывает, что в этом случае

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot \Delta_f \, dz}{z^\alpha \cdot z_1^{s_1} \dots z_n^{s_n}}.$$

Если $\alpha \neq (0, \dots, 0)$, то степень мономов в якобиане J_f больше либо равна $\|m\| - n$. В $\det A$ входят мономы с неотрицательными степенями степени $\|s\| - \|m\|$. Поэтому мономы из числителя имеют степень, больше либо равную $\|s\| - n$. В мультииндекс α входит хотя бы одна отрицательная координата, поэтому в знаменателе не могут быть все z_j, а значит, $\sigma_\alpha = 0$. $\square$

Рассмотрим интеграл I_β для неотрицательного мультииндекса β:

$$I_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot \Delta_f \, dz}{z^\beta}. \tag{11}$$

Предположим, что

$$\det A \cdot \Delta_f = \sum_{\|\alpha\| \geq 0} b_\alpha z^\alpha.$$

Тогда

$$I_\beta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot \Delta_f \cdot F_1 \cdots F_n \, dz}{z^\beta \cdot F_1 \cdots F_n}$$
$$= \sum_{\|\beta - \alpha^1 - \dots - \alpha^n\| \geq 0, \, \|\alpha^j\| \geq s_j} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^n}(n) \cdot \sigma_{\beta - \alpha^1 - \dots - \alpha^n}$$

Выделим в сумме $\alpha^1 + \dots + \alpha^n$ слагаемые с $\|\alpha^j\| = s_j$, $j = 1, \dots, n$. В этом случае $c_{\alpha^j}(j) \neq 0$, только если $\alpha^j = s_j e_j$. Поэтому

$$I_\beta = \sigma_{\beta - s} + \sum_{\|\beta - \alpha^1 - \dots - \alpha^n\| > 0} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^n}(n) \cdot \sigma_{\beta - \alpha^1 - \dots - \alpha^n}$$

и, следовательно, доказан следующий результат.

Теорема 1. *Для системы* (5) *справедлива формула*

$$\sigma_{\beta-s} + \sum_{\|\beta-\alpha^1-\dots-\alpha^n\|>0} c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^n}(n)\cdot\sigma_{\beta-\alpha^1-\dots-\alpha^n} = b_{\beta-I}.$$

Эту теорему можно назвать одним из аналогов рекуррентных формул Ньютона, но она относится скорее к системе уравнений $F_1 = 0, \dots, F_n = 0$, а не к системе (5).

Рассмотрим ряд вспомогательных утверждений. Введем интеграл

$$J_\delta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{df}{z^\delta} = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\Delta_f\,dz}{z^\delta}.$$

Через $\Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n}$ обозначим определитель

$$\Delta_{\alpha_1\dots\alpha_n} = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n & \dots & \alpha_n^n \end{vmatrix} = \det(\alpha^1\dots\alpha^n),$$

где $\alpha^j = \left(\alpha_1^j, \dots, \alpha_n^j\right)$, $j = 1, \dots, n$

Лемма 3. *При сделанных предположениях для функций F_j и неотрицательного мультииндекса δ выполняются равенства*

$$J_\delta = \begin{cases} \sum\limits_{\alpha^1+\dots+\alpha^n=\delta} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n}, & \text{\textit{если}}\quad \alpha^1+\dots+\alpha^n=\delta, \\ 0 & \text{\textit{иначе.}} \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку

$$\frac{\partial f_j}{\partial z_k} = \sum_{\|\alpha\|\ge m_j}\frac{\alpha_k\cdot a^j_\alpha\cdot z^\alpha}{z_k},$$

получаем

$$\Delta_f = \begin{vmatrix} \sum\limits_{\|\alpha^1\|\ge m_1}\frac{{\alpha_1}^1\cdot a^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1}}{z_1} & \dots & \sum\limits_{\|\alpha^1\|\ge m_1}\frac{{\alpha_n}^1\cdot a^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1}}{z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{\|\alpha^n\|\ge m_n}\frac{{\alpha_1}^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n}}{z_1} & \dots & \sum\limits_{\|\alpha^n\|\ge m_n}\frac{{\alpha_n}^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n}}{z_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z_1\cdots z_n}\cdot\begin{vmatrix} \sum\limits_{\|\alpha^1\|\ge m_1}{\alpha_1}^1\cdot a^1_{\alpha_1}\cdot z^{\alpha^1} & \dots & \sum\limits_{\|\alpha^1\|\ge m_1}{\alpha_n}^1\cdot a^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum\limits_{\|\alpha^n\|\ge m_n}\alpha_1^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n} & \dots & \sum\limits_{\|\alpha^n\|\ge m_n}\alpha_n^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z_1\cdots z_n}\cdot\sum_{\|\alpha^1\|\ge m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\ge m_n}\begin{vmatrix} \alpha_1^1\cdot a^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1} & \dots & \alpha_n^1\cdot a^1_{\alpha^1}\cdot z^{\alpha^1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n} & \dots & \alpha_n^n\cdot a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{z_1\cdots z_n}\cdot\sum_{\|\alpha^1\|\ge m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\ge m_n} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot z^{\alpha^1}\cdots z^{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha^1\dots\alpha^n}.$$

Таким образом,

$$J_\delta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\Delta_f\,dz}{z^\delta} = \sum_{\|\alpha^1\|\ge m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\ge m_n} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\frac{\Delta_{\alpha^1\cdots\alpha^n}}{(2\pi i)^n}\cdot\int\limits_{\Gamma_z}\frac{z^{\alpha^1+\dots+\alpha^n}\,dz}{z^{\delta+I}} \tag{12}$$

и, вычисляя полученный интеграл, приходим к утверждению леммы. □

Лемма 4. *Если* $\|\delta\| < 0$, *то* $J_\delta = 0$.

Доказательство. В формуле (12) последний интеграл равен 0, поскольку $\|\delta\| < 0$. $\square$

(Ср. лемму 1 и лемму 4.)

3. Аналоги рекуррентных формул Ньютона

Приведем ряд аналогов формул Ньютона.

Введем обозначение для неотрицательных мультииндексов δ:

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot df}{z^\delta \cdot F_{j+1} \cdots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot F_1 \cdots F_j \, df}{z^\delta \cdot F_1 \cdots F_n}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Заметим, что при сделанных обозначениях $\sigma_\delta = J_\delta^0$, $I_\delta = J_\delta^n$. Положим также

$$\det A = \sum_{\|\beta\| = s-m} b_\beta z^\beta,$$

Предложение 1. *Для любого* j, $0 \le j \le n$, *справедлива формула*

$$J_\delta^j = \mathfrak{M}\Bigg[\sum_{\|\alpha^1\| \ge m_1} \cdots \sum_{\|\alpha^n\| \ge m_n} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \cdot \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n} \\ \times \sum_{p_{j+1} + \cdots + p_n \le \|\delta\| - s_1 - \cdots - s_j} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{(-1)^{p_{j+1} + \cdots + p_n} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n} \, \det A \, dz}{z^{\delta + I - \alpha^1 - \cdots - \alpha^n} \cdot z_{j+1}^{s_{j+1}(p_{j+1}+1)} \cdots z_n^{s_n(p_n+1)}} \Bigg],$$

где $\mathfrak{M}$ *— линейный функционал, сопоставляющий многочлену Лорана его свободный член.*

В частности,

$$J_\delta^n = \sum_{\alpha^1 + \ldots + \alpha^n + \beta = \delta} b_\beta \cdot a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \cdot \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}.$$

Доказательство. Используя вычисления леммы 3, имеем

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot df}{z^\delta \cdot F_{j+1}} \cdots F_n \\ = \sum_{\|\alpha^1\| \ge m_1} \cdots \sum_{\|\alpha^n\| \ge m_n} a^1_{\alpha^1} \cdots a^n_{\alpha^n} \cdot \frac{\Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{z^{\alpha^1 + \cdots + \alpha^n} \det A \, dz}{z^{\delta + I} \cdot F_{j+1} \cdots F_n}.$$

Взяв ε_j, $j = 1, \ldots, n$, такими, что $|z_j|^{s_j} > |q_j(z)|$ на Γ_z, и разлагая $\frac{1}{F_j(z)}$ в ряд по формуле (10), получим

$$\int\limits_{\Gamma_z} \frac{z^{\alpha^1 + \cdots + \alpha^n} \det A \, dz}{z^{\delta + I} \cdot F_{j+1} \cdots F_n} \\ = \sum_{p_{j+1}=0}^{\infty} \cdots \sum_{p_n=0}^{\infty} (-1)^{p_{j+1} + \cdots + p_n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{z^{\alpha^1 + \cdots + \alpha^n} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n} \det A \, dz}{z^{\delta + I} z_{j+1}^{s_{j+1}(p_{j+1}+1)} \cdots z_n^{s_n(p_n+1)}}.$$

Покажем, что в этом выражении все суммы конечны. Для этого подсчитаем степени числителя и знаменателя.

Учитывая, что степени мономов в q_j больше либо равны s_j+1, получаем, что степень числителя не меньше, чем

$$\|\alpha^1+\ldots+\alpha^n\|+(s_{j+1}+1)p_{j+1}+\ldots+(s_n+1)p_n+\|s\|-\|m\|,$$

а степень знаменателя равна

$$\|\delta\|+s_{j+1}(p_{j+1}+1)+\ldots s_n(p_n+1)+n.$$

Тогда

$$\begin{aligned}&\deg(\text{числителя})+\ n\ -\deg(\text{знаменателя})\\ &\quad\geq\|\alpha^1+\ldots+\alpha^n\|+p_{j+1}+\ldots+p_n-s_{j+1}-\ldots-s_n-\|\delta\|\ +\|s\|-\|m\|\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\geq p_{j+1}+\ldots+p_n+s_1+\ldots+s_j-\|\delta\|.\end{aligned}$$

Заметим, что интеграл J^j_δ может быть не равен нулю только в случае, когда последнее выражение неположительно, т. е. когда

$$p_{j+1}+\ldots+p_n\leq\|\delta\|-s_1-\ldots-s_j.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}J^j_\delta&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\det A\cdot df}{z^\delta\cdot F_{j+1}\cdots F_n}=\sum_{\|\alpha^1\|\geq m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\geq m_n}a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\frac{\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{(2\pi i)^n}\\ &\times\sum_{p_{j+1}+\cdots+p_n\leq\|\delta\|-s_1-\cdots-s_j}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{(-1)^{p_{j+1}+\cdots+p_n}\cdot q^{p_{j+1}}_{j+1}\cdots q^{p_n}_n\det A\,dz}{z^{\delta+I-\alpha^1-\cdots-\alpha^n}\cdot z^{s_{j+1}(p_{j+1}+1)}_{j+1}\cdots z^{s_n(p_n+1)}_n}.\end{aligned}$$

Возьмем $j=n$, тогда

$$\begin{aligned}J^n_\delta&=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{\det A\cdot df}{z^\delta}\\ &=\sum_{\|\alpha^1\|\geq m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\geq m_n}a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\frac{\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{z^{\alpha^1+\cdots+\alpha^n}\det A\,dz}{z^{\delta+I}}\\ &=\sum_{\|\alpha^1\|=m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|=m_n}a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\frac{\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_z}\frac{z^{\alpha^1+\cdots+\alpha^n}\det A\,dz}{z^{\delta+I}}.\end{aligned}$$

Имеем

$$J^n_\delta=\sum_{\|\alpha^1\|=m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|=m_n}\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\beta=\delta}b_\beta\cdot a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}.\quad\square$$

Теорема 2. *Для системы уравнений* (5) *справедливы следующие аналоги рекуррентных формул Ньютона:*

$$\begin{aligned}&\sigma_{\delta-s_1e_1-\cdots-s_je_j}+\sum_{s_1+\cdots+s_j<\|\alpha^1+\cdots+\alpha^j\|<\|\delta\|}c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^j}(j)\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\cdots-\alpha^j}\\ &\qquad+\sum_{\delta=\alpha^1+\cdots+\alpha^j}c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^j}(j)\cdot m_1\cdots m_n\\ &\qquad=\mathfrak{M}\Big[\sum_{\|\alpha^1\|\geq m_1}\cdots\sum_{\|\alpha^n\|\geq m_n}a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{p_{j+1}+\dots+p_n \le \|\delta\|-s_1-\dots-s_j} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{(-1)^{p_{j+1}+\dots+p_n} \cdot q_{j+1}^{p_{j+1}} \cdots q_n^{p_n} \det A\, dz}{z^{\delta+I-\alpha^1-\dots-\alpha^n} \cdot z_{j+1}^{s_{j+1}(p_{j+1}+1)} \cdots z_n^{s_n(p_n+1)}}\Bigg], \quad (13)$$

где (напомним) $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий полиному Лорана его свободный член, а e_k — векторы, у которых на k-м месте стоит 1, а остальные координаты равны нулю.

Доказательство. Пользуясь вычислениями леммы 3, получаем

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot df}{z^\delta \cdot F_{j+1} \cdots F_n} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{F_1 \cdots F_j \cdot \det A\, df}{z^\delta \cdot F_1 \cdots F_n}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\sum\limits_{\alpha^1,\dots,\alpha^j \ge 0} c_{\alpha^1}(1) \cdot z^{\alpha^1} \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot z^{\alpha^j} \cdot \det A\, df}{z^\delta \cdot F}$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\alpha^1,\dots,\alpha^j \ge 0} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\det A \cdot df}{z^{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} \cdot F}$$

$$= \sum_{\|\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j\| \ge 0} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}$$

$$= \sum_{\|\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j\| > 0} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} + \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot m_1 \cdots m_n$$

$$= \sum_{s_1+\dots+s_j \le \|\alpha^1+\dots+\alpha^j\| < \|\delta\|} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} + \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot m_1 \cdots m_n$$

$$= \sum_{\|\alpha^1+\dots+\alpha^j\| = s_1+\dots+s_j} c_{\alpha^1}(1) \cdot s c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j} + \sum_{s_1+\dots+s_j < \|\alpha^1+\dots+\alpha^j\| < \|\delta\|} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}$$
$$+ \sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot m_1 \cdots m_n.$$

Заметим, что в сумме

$$\sum_{\|\alpha^1+\dots+\alpha^j\| = s_1+\dots+s_j} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}$$

останется всего одно ненулевое слагаемое, соответствующее мономам с наименьшими степенями в $F_k(z)$, а именно $z_k^{s_k}$, и получим, что оно равно $\sigma_{\delta-s_1e_1-\dots-s_je_j}$, поскольку коэффициенты при $z_k^{s_k}$ равны 1. Таким образом,

$$J_\delta^j = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_z} \frac{\Delta_f\, dz}{F_1 \cdots F_j \cdot z^\delta} = \sigma_{\delta-s_1e_1-\dots-s_je_j}$$
$$+ \sum_{s_1+\dots+s_j < \|\alpha^1+\dots+\alpha^j\| < \|\delta\|} c_{\alpha^1}(1) \cdots c_{\alpha^j}(j) \cdot \sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^j}$$

$$+\sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^j} c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^j}((j)\cdot m_1\cdots m_n.$$

Применяя предложение 1, приходим к утверждению теоремы. □

Пользуясь этой теоремой, леммой 3 и предложением 1 и полагая $j=n$, получаем

Следствие 2. *Для системы уравнений* (5) *справедливы следующие аналоги формул Ньютона*

$$\sigma_{\delta-s}+\sum_{\|s\|<\|\alpha^1+\dots+\alpha^n\|<\|\delta\|} c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^n}(n)\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^n}$$
$$+\sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^n}(n)\cdot m_1\cdots m_n$$
$$-\sum_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n+\beta=\delta} b_\beta\cdot a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=0. \quad (14)$$

Напомним, что $s=(s_1,\ldots,s_n)$.

Пример 1. Рассмотрим случай $n=1$, тогда в силу равенства (2) и того, что $A=1$,

$$\frac{f'}{f}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{z-c_j},\quad \sigma_\alpha=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_z}\frac{df}{z^\alpha f}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{c_j^\alpha}.$$

Из следствия 1 получаем равенства (3).

Пример 2. Пусть функции $f_j(z)$ имеют вид $f_j(z)=1+Q_j(z)$, $j=1,\ldots,n$, т. е. $P_j=1$, $m_j=0$, и $s=(0,\ldots,0)$, тогда матрица A единичная (т. е. ее находить не нужно), а $Q_j(z)$ определены равенствами (7). Формула (14) запишется в виде

$$\sigma_\delta+\sum_{0<\|\alpha^1+\dots+\alpha^n\|<\|\delta\|} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\sigma_{\delta-\alpha^1-\dots-\alpha^n}$$
$$-\sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha^1\ldots\alpha^n}=0.$$

Очевидно, что σ_δ могут быть отличны от нуля лишь при $\|\delta\|\geq n$.

Рассмотрим простейшую систему трансцендентных уравнений вида (4). Тогда матрица A единичная, $\det A=1$, коэффициенты $c_\alpha(j)=a^j_\alpha$, $j=1,\ldots,n$. Поэтому формулы из теоремы 2 и следствия 1 полностью совпадают с формулами из [12].

Найдем, например, σ_γ, $\gamma=\delta-s$, если $\|\gamma\|=1$. В этом случае в формуле (14) остаются лишь первое слагаемое и последние две суммы

$$\sum_{\delta=\alpha^1+\dots+\alpha^n} c_{\alpha^1}(1)\cdots c_{\alpha^n}(n)\cdot m_1\cdots m_n-\sum_{\alpha^1+\ldots+\alpha^n+\beta=\delta} b_\beta\cdot a^1_{\alpha^1}\cdots a^n_{\alpha^n}\cdot\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n}. \quad (15)$$

Пусть $\gamma=(-\gamma_1,\ldots,-\gamma_{j-1},\gamma_j,-\gamma_{j+1},\ldots,-\gamma_n)$, где $\gamma_k\geq 0$, $k=1,\ldots,n$. Так как $\|\gamma+s\|=1+s_1+\dots+s_n$, то в (15) сумма состоит из слагаемых

$$\sigma_\gamma=c_{\alpha^j}(j)\cdot m_1\cdots m_n-b_0\Delta_{\beta,\gamma,j},$$

где определитель $\Delta_{\beta,\gamma,j}$ получен из Δ_α заменой столбца с номером j столбцом $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)^T$.

Все остальные σ_γ с $\|\gamma\| = 1$ равны нулю. Таким образом, число сумм с $\|\gamma\| = 1$ конечно. Рассматривая теперь σ_γ с фиксированной $\|\gamma\|$, из (14) по индукции получим, что число таких сумм σ_γ, отличных от нуля, конечно. Следовательно, формулы (13) действительно являются рекуррентными. Они позволяют по интегралам σ_γ с меньшей нормой γ определять вычетные интегралы с любым мультииндексом γ.

4. Сравнение со степенными суммами корней

Рассмотрим вопрос: для каких систем уравнений σ-степенные суммы σ_α совпадают со степенными суммами корней? В [19] рассмотрена система вида (5) с невырожденными младшими однородными частями $P_j(z)$, $j = 1, \ldots, n$. Нам понадобится утверждение из [19].

Предложение 2. *Если для каждой координатной плоскости $\{z_j = 0\}$ найдется невырожденная подсистема порядка $n-1$ системы*

$$P_1(z_1, \ldots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \ldots, z_n), \ldots, P_n(z_1, \ldots, z_{j-1}, 0, z_{j+1}, \ldots, z_n),$$

то для почти всех $r_1, \ldots, r_n$ остов $\Gamma_P(r_1, \ldots, r_n)$ не пересекает координатные плоскости.

Далее будем предполагать, что для системы $P_1, \ldots, P_n$ выполнены условия предложения 2. Это позволит рассматривать функции $1/z_j$ на остове полиэдра.

Сначала рассмотрим случай алгебраических систем, т. е. все $q_j(z)$ — многочлены. На них в [7] наложены условия вида (13), а именно для каждого m-го уравнения

$$\deg_{z_m} P_m < \operatorname{ord}_{z_m} Q_m, \quad \deg_{z_j} P_m \geq \operatorname{ord}_{z_j} Q_m, \quad j \neq m,$$

где $\deg_{z_m} P_m$ — степень многочлена P_m по переменной z_m, а $\operatorname{ord}_{z_m} Q_m$ — порядок многочлена Q_m по переменной z_m при фиксированных остальных переменных.

По лемме 4.9 из [5] цикл Γ_f гомологичен циклу Γ_P, поэтому, используя предложение 2, получим

$$\sigma_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_P} \frac{\Delta_f \, dz}{z^\alpha \cdot f_1 \ldots f_n}.$$

Сделаем замену переменных $z_j = 1/w_j$, $j = 1, \ldots, n$, в нашей системе. Преобразуя выражения и отбрасывая знаменатель, придем к системе (см. [19])

$$\widetilde{f}_j(w) = \widetilde{P}_j(w) + \widetilde{Q}_j(w) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Как показано в [19] (лемма 9),

$$\sigma_{\alpha+I} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_P} \frac{\Delta_f \, dz}{z^{\alpha+I} \cdot f_1 \ldots f_n} = \frac{(-1)^n}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma_{\widetilde{P}}} w^{\alpha+I} \cdot \frac{d\widetilde{f}_1}{\widetilde{f}_1} \wedge \cdots \wedge \frac{d\widetilde{f}_n}{\widetilde{f}_n}.$$

Если обозначить через $w_{(j)}$, $j = 1, \ldots, k$, корни системы (16) с учетом их кратностей (этих корней конечное число), то лемма 6 из [7] утверждает, что

$$\sigma_{\alpha+I} = (-1)^n \sum_{j=1}^{k} w_{j_1}^{\alpha_1+1} \cdots w_{j_n}^{\alpha_n+1}.$$

Если какие-то $w_{(j)}$ имеют нулевые координаты, то в последнюю сумму они входить не будут. Так что если все координаты корня $w_{(j)}$ не равны 0, то точка с координатами $z_{j_m} = \frac{1}{w_{j_m}}$, $m = 1, \dots, n$, является корнем системы (5). Так что получаем нужное равенство.

В работе [19] рассмотрены и более общие системы уравнений в случае, когда функции $f_j(z)$ мероморфны определенного вида. Для них также получены равенства σ-степенных сумм корней и степенных сумм корней в отрицательной степени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзенберг Л. А., Кытманов А. М.* Многомерные аналоги формул Ньютона для систем нелинейных алгебраических уравнений и некоторые их приложения // Сиб. мат. журн. 1981. Т. 22, № 2. С. 19-30.
2. *Кытманов А. М., Потапова З. Е.* Формулы для нахождения степенных сумм корней систем мероморфных функций в $\mathbb{C}^n$ // Изв. вузов. Математика. 2005. № 8. С. 39-48.
3. *Кытманов А. А.* Об аналогах рекуррентных формул Ньютона // Изв. вузов. Математика. 2009. № 10. С. 40-50.
4. *Passare M., Tsikh A.* Residue integrals and their Mellin transforms // Canad. J. Math. 1995. V. 47, N 5. P. 1037–1050.
5. *Кытманов А. М., Мышкина Е. К.* Вычетные интегралы и формулы Варинга для алгебраических и трансцендентных систем уравнений // Изв. вузов. Математика. 2019. № 5. С. 40-55.
6. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
7. *Bourbaki N.* Algebra. Paris: Hermann, 1971. V. 2.
8. *Mackdonald L. G.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. New York: Oxford Univ. Press, 1979.
9. *Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. М.: МЦ НПО, 2002.
10. *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.
11. *Bykov V.I., Kytmanov A.M., Lazman M.Z., Passare M. (ed.)* Elimination methods in polynomial computer algebra. Dordrecht: Springer Sci.+Business Media, 1998.
12. *Кытманов А.М.* Алгебраические и трансцендентные системы уравнений. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2019.
13. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1968. Т. 2.
14. *Cattani E., Dickenstein A.* Introduction to residues and resultants. Buenos Aires, Argentina: CIMPA Graduate School on Systems of Polynomial Equationsm, 2003.
15. *Быков В. И., Цыбенова С. Б.* Нелинейные модели химической кинетики. М.: КРАСАНД, 2011.
16. *Чирка Е. М.* Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
17. *Van der Waerden B. L.* Algebra. Berlin; Heidelberg; New York: Springer Verl., 1971.
18. *Macaulay F. S.* Algebraic theory of modular systems. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1916.
19. *Griffiths F., Harris J.* Principles of algebraic geometry. New York: Wiley, 1978.

Поступила в редакцию 7 сентября 2024 г.
После доработки 7 сентября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Кытманов Александр Мечиславович (ORCID 0000-0002-7394-1480)
Сибирский федеральный университет,
Институт математики и фундаментальной информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
akytmanov@sfu-kras.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.7

СЕРИИ КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА $\mathbb{P}^3$

А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов, С. А. Тихомиров

Аннотация. Построены две бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на комплексном трехмерном проективном пространстве. Данные серии строятся для четного и нечетного первого класса Черна. Второй и третий классы Черна в обоих случаях представимы как многочлены трех целочисленных переменных. Доказана единственность компонент в построенных сериях, описаны взаимосвязи между данными сериями и построенными ранее сериями неприводимых компонент. В построенных авторами в 2024 г. сериях найдены бесконечные подсерии рациональных компонент. Эти подсерии включаются в построенные М. Жардимом, Д. Маркушевичем и А. С. Тихомировым в 2017 г., а также Ч. Алмейдой, М. Жардимом и А. С. Тихомировым в 2022 г. с использованием других конструкций серии компонент, для которых Д. А. Васильевым в 2023 г. была доказана рациональность. Приведен пример пространства модулей, в котором имеются две неприводимые компоненты, одна из которых принадлежит серии компонент, построенных в данной работе, а другая — известной ранее. Найдены спектры пучков, классы эквивалентности которых составляют эти компоненты.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.107

Ключевые слова: полустабильный рефлексивный пучок, классы Черна, пространство модулей.

Введение

Обозначим через $M(e;n,m)$ объединение неприводимых компонент пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = e \in \{-1, 0\}$, $c_2 = n$ и $c_3 = m$ на комплексном трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$, общие точки[1)] которых являются не локально свободными рефлексивными пучками. Построение серий компонент, состоящих из классов эквивалентности стабильных или полустабильных пучков, является одним из методов исследования их пространств модулей. Вопросам построения и исследования свойств таких серий посвящен ряд работ. В частности, в работе Жардима, Д. Маркушевича и А. С. Тихомирова [1] и в работе Алмейды, Жардима и А. С. Тихомирова [2] найдены новые бесконечные серии неприводимых компонент в $M(e;n,m)$, где

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2024-1429).

[1)] Здесь и далее под общей точкой неприводимой компоненты понимается замкнутая точку, принадлежащая некоторому плотному открытому подмножеству этой компоненты.

n и m являются многочленами соответственно второй и третьей степени целочисленных параметров a, b и c. В [3] построены две серии неприводимых рациональных компонент пространства модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. В [4] доказана рациональность неприводимых компонент пространства модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, принадлежащих построенной бесконечной подсерии серии неприводимых компонент, описанных в [1].

В работах [2, 5–7] исследованы примеры $M(e;n,m)$, имеющих не более одной неприводимой компоненты, общая точка которой соответствует рефлексивному пучку: в [5] для случаев $e=0$, $n\le 3$; в [2] для случаев $e=-1$, $n\le 2$; в [6] для пучков с максимальными значениями m; в [7] для случаев $e=0$ и $e=-1$, где n и m являются многочленами соответственно второй и третьей степени от трех целочисленных параметров. В [8] были построены две бесконечные серии неприводимых компонент в $M(e;n,m)$ и частично изучены их теоретико-числовые свойства. Существенный прогресс в изучении пространств модулей полустабильных пучков был достигнут в работе Д. А. Васильева и А. С. Тихомирова [9], в которой был построен ряд бесконечных серий неприводимых и в большинстве случаев рациональных компонент полустабильных пучков ранга 2, причем не только на $\mathbb{P}^3$, но и на других рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии.

Настоящая работа посвящена построению двух ранее неизвестных бесконечных серий неприводимых компонент в $M(e;n,m)$ (теорема 1) и доказательству (теоремы 2, 3 и следствия из них) единственности компонент модулей рефлексивных пучков в данных сериях.

В § 1 приводится конструкция двух новых серий неприводимых компонент в $M(e;n,m)$ (теорема 1) и доказывается, что полученные компоненты имеют ожидаемую размерность. В § 2 изучаются теоретико-числовые свойства построенных серий, в частности, доказывается единственность компонент в $M(e;n,m)$ с соответствующими значениями классов Черна в данных сериях (теоремы 2, 3 и следствия из них). В § 3 устанавливаются взаимосвязи между новыми и ранее построенными сериями (утверждение 1) и указываются в построенных ранее авторами сериях бесконечные подсерии рациональных компонент. Эти подсерии включаются в серии компонент, построенные в [1], а также в [2] с использованием других конструкций, для которых Д. А. Васильевым в работе [4] была доказана рациональность. Кроме того, рассматривается пример значений классов Черна $(e,n,m)=(0,9,40)$, для которых существует как компонента из построенной в данной статье серии, так и компонента из уже известной, а также вычисляются спектры соответствующих пучков.

§ 1. Серии неприводимых компонент в $M(e;n,m)$

В данном параграфе приводится построение двух серий неприводимых компонент в $M(e;n,m)$, общая точка которых является стабильным рефлексивным не локально свободным пучком. Первая серия строится для $e=0$, вторая — для $e=-1$.

Через $\mathscr{R}(e;n,m)$ обозначим открытое подмножество $M(e;n,m)$, состоящее из стабильных рефлексивных пучков.

Для произвольного набора $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4_{\ge 0}$, удовлетворяющего условию

$$a+2=b+c+d, \tag{1}$$

рассмотрим семейство рефлексивных пучков F ранга 2, получаемых как коядро отображений α, чей локус вырождения

$$\delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{P}^3 : \alpha(x) \text{ не инъективно}\}$$

0-мерный:

$$0 \to a \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \xrightarrow{\alpha} b \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus c \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus d \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to F(k) \to 0. \tag{2}$$

Учитывая (1), выразим один из параметров через остальные:

$$d = a + 2 - b - c. \tag{3}$$

Требование корректности точной тройки (2) влечет следующие ограничения на $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$:

$$a > 0, \quad c \leq a - b + 2. \tag{4}$$

С учетом (3) классы Черна

$$c_1(F) = e \in \{-1, 0\}, \quad c_2(F) = n_e(a, b, c), \quad c_3(F) = m(a, b, c) \tag{5}$$

задаются формулами

$$n_0(a, b, c) = \frac{(3a - 2b - c)^2}{4} + \frac{9a - 4b - c}{2} \tag{6}$$

при $e = 0$,

$$n_{-1}(a, b, c) = \frac{(3a - 2b - c + 1)^2}{4} + 3a - b \tag{7}$$

при $e = -1$ и

$$m(a, b, c) = \frac{(3a - 2b - c)^3}{6} + \frac{(3a - 2b - c)(9a - 4b - c)}{2} + \frac{27a - 8b - c}{3}. \tag{8}$$

Обозначим

$$G_a = a \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3), \quad E_{(b,c,d)} = b \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus c \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus d \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}.$$

Теорема 1. (i) *Для целых чисел a, b, c и d, определенных в (2)–(4), положим $k := (3a - 2b - c)/2$. Тогда при $k > 0$ либо при $k = d = 0$, либо при $k = -1$, $c = d = 0$ семейство пучков F из (2) с классами Черна $c_1(F) = 0$, $c_2(F) = n_0(a, b, c)$ и $c_3(F) = m(a, b, c)$, где $n_0(a, b, c)$ и $m(a, b, c)$ задаются формулами (6) и (8), соответственно составляет гладкую в общей точке неприводимую компоненту $\mathscr{S}(a, b, c, d)$ в $\mathscr{R}(c_1(F), c_2(F), c_3(F))$ ожидаемой размерности $8c_2(F) - 3$.*

(ii) *Для тех же a, b, c и d, что и в п.* (i), *положим $k := (3a - 2b - c + 1)/2$. Тогда при $k > 0$ либо при $k = d = 0$, либо при $k = -1$, $c = d = 0$ семейство пучков F из (2) с классами Черна $c_1(F) = -1$, $c_2(F) = n_{-1}(a, b, c)$ и $c_3(F) = m(a, b, c)$, где $n_{-1}(a, b, c)$ и $m(a, b, c)$ задаются формулами (7) и (8), соответственно составляет гладкую в общей точке неприводимую компоненту $\mathscr{S}(a, b, c, d)$ в $\mathscr{R}(c_1(F), c_2(F), c_3(F))$ ожидаемой размерности $8c_2(F) - 5$.*

Замечание. Более точно, $\widetilde{\mathscr{S}}(a, b, c, d)$ представляет собой открытое подмножество $\mathrm{Hom}(G_a, E_{(b,c,d)})$, состоящее из мономорфизмов, имеющих 0-мерные локусы вырождения, так что

$$\mathscr{S}(a, b, c, d) = \widetilde{\mathscr{S}}(a, b, c, d)/((\mathrm{Aut}(G_a) \times \mathrm{Aut}(E_{(b,c,d)}))/\mathbb{C}^*).$$

Доказательство. Пусть набор $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ таков, что выполнено равенство (1). Рассмотрим морфизмы

$$\alpha : G_a \to E_{(b,c,d)}.$$

Если локус вырождения $\delta(\alpha)$ нульмерен, то коядро α есть рефлексивный пучок ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, который нормализуем для включения в короткую точную последовательность (2).

(i) Рассмотрим случай $e=c_1(F)=0$. Размерность семейства рефлексивных пучков ранга 2, построенных в короткой точной последовательности (2), находится по формуле

$$\dim \mathscr{S}(a,b,c,d)=\dim \operatorname{Hom}(G_a,E_{(b,c,d)})-\dim \operatorname{Aut}(G_a)-\dim \operatorname{Aut}(E_{(b,c,d)})+1.$$

Имеем

$$\dim \operatorname{Hom}(G_a,E_{(b,c,d)})=4ab+10ac+20ad,\quad \dim \operatorname{Aut}(G_a)=a^2,$$

$$\dim \operatorname{Aut}(E_{(b,c,d)})=b^2+4bc+10bd+c^2+4cd+d^2.$$

Отсюда после подстановки $d=a+2-b-c$ (см. равенство (1)) получаем

$$\dim \mathscr{S}(a,b,c,d)=18a^2+8b^2+2c^2-24ab+8bc-12ac+36a-16b-4c-3.$$

С другой стороны, с учетом равенств (5) и (6) имеем

$$\begin{aligned}8c_2(F)-3&=8\left(\frac{(3a-2b-c)^2}{4}+\frac{9a-4b-c}{2}\right)-3\\&=18a^2+8b^2+2c^2-24ab+8bc-12ac+36a+16b-4c-3.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что размерность нашего семейства равна $8c_2(F)-3$. Заметим, что для каждого F, задаваемого (2), с учетом введенных ограничений на параметры a,b,c и d имеет место равенство $\mathrm{H}^0(F)=0$ и тем самым пучок F всегда стабилен. Следовательно, для получения равенства

$$\dim \operatorname{Ext}^1(F,F)=8c_2(F)-3$$

нам необходимо проверить, что $\dim \operatorname{Ext}^2(F,F)=0$ (откуда по аналогии с работой [1] по теории деформаций будет следовать, что данное семейство является открытым подмножеством компоненты). В самом деле, применяя функтор $\operatorname{Hom}(\cdot,F(k))$ к последовательности (10), получаем

$$\operatorname{Ext}^1(G_a,F(k))\to \operatorname{Ext}^2(F,F)\to \operatorname{Ext}^2(E_{(b,c,d)},F(k)).$$

Группа слева зануляется, поскольку $\mathrm{H}^1(F(t))=0$ для каждого $t\in\mathbb{Z}$, в то время как группа справа зануляется, поскольку $\mathrm{H}^2(F(k))=\mathrm{H}^2(F(k+1))=\mathrm{H}^2(F(k+2))=0$ (все эти равенства вытекают из (2)). Таким образом, семейство пучков из (2) дает гладкую в общей точке неприводимую компоненту ожидаемой размерности в пространстве модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с соответствующими классами Черна.

(ii) В случае $e=c_1(F)=-1$ рассуждения и вычисления проводятся аналогично случаю (i), но с учетом равенств (5) и (7). $\square$

§ 2. Единственность компонент в $M(e;n,m)$ из новых серий

Случай четного первого класса Черна. Для $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ пусть $n_0(a,b,c)$ и $m(a,b,c)$ задаются формулами (6) и (8) соответственно. Пусть также S_0 — множество всех $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$, удовлетворяющих условиям

$$a > 0, \quad c \leq a - b + 2, \quad a \equiv c \pmod 2$$

(см. (4)).

Положим

$$k = \frac{3a - 2b - c}{2}, \quad l = \frac{9a - 4b - c}{2}.$$

Тогда

$$n_0(a,b,c) = k^2 + l, \quad m(a,b,c) = \frac{4}{3}k^3 + 2kl - \frac{4}{3}k + 2l + 2a.$$

Если $(a,b,c) \in S_0$, то k и l — целые числа, удовлетворяющие ограничениям $k \geq -1$ и $l \geq 0$ соответственно. Более того, для $(a,b,c) \in S_0$ имеем $n_0(a,b,c) > 0$, $m(a,b,c) > 0$, а также

$$3k \leq l \leq 5k + 6 \tag{9}$$

(левое неравенство сводится к верному неравенству $b + c \geq 0$, а правое — к неравенству $2c \leq 3(a - b) + 6$, которое вытекает из двойного неравенства $0 \leq c \leq a - b + 2$). Равенство $k = -1$ при $(a,b,c) \in S_0$ возможно только для $(a,b,c) \in \{(1,2,1),(2,4,0)\}$.

Нашей целью будет доказательство инъективности отображения $S_0 \to \mathbb{N}^2$, заданного формулой

$$(a,b,c) \mapsto (n_0(a,b,c), m(a,b,c)), \tag{10}$$

а также получение явного алгоритма для нахождения прообраза пары $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ в случае, если он не является пустым.

(i) Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и опишем все $(a,b,c) \in S_0$, для которых

$$n_0(a,b,c) = n. \tag{11}$$

При $n = 1$ есть только $(a,b,c) = (1,2,1)$, а при $n = 2$ — только $(a,b,c) \in \{(1,1,1),(2,4,0)\}$, при этом случаи наборов (1,2,1) и (1,1,1) не реализуются по конструкции (2) из-за нарушения условия $h^0(F) = 0$. Далее будем считать $n \geq 3$ (и тогда можно также предполагать $k \geq 0$).

Предварительно опишем представления числа $n \geq 3$ в виде

$$n = K^2 + L, \text{ где } K \geq 0 \text{ и } 3K \leq L \leq 5K + 6. \tag{12}$$

Здесь можно воспользоваться тем, что такое n однозначно представимо в виде

$$n = t^2 + 3t + r, \text{ где } t \geq 0 \text{ и } 0 \leq r < 2t + 4, \tag{13}$$

при этом $t = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+9} - 3)\right]$.

Лемма 1. *Пусть число $n \geq 3$ представлено в виде* (13)*. Если $r \in \{0,1,2\}$, то существуют в точности два представления* (12)*:*

$$(K,L) \in \{(t, 3t + r), (t - 1, 5t + r - 1)\}.$$

Иначе существует только одно представление (12), *а именно,*

$$(K, L) = (t, n - t^2).$$

Доказательство. Из представления (12) вытекает двойное неравенство

$$K^2 + 3K \le t^2 + 3t + r \le K^2 + 5K + 6.$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что $K \in \{t-1, t\}$. В самом деле, если $K \ge t+1$, то

$$t^2 + 3t + r \ge K^2 + 3K \ge (t+1)^2 + 3(t+1) = t^2 + 5t + 4 > t^2 + 3t + r,$$

поскольку $r < 2t + 4$. Аналогично если $0 \le K \le t - 2$, то

$$t^2 + 3t + r \le K^2 + 5K + 6 \le (t-2)^2 + 5(t-2) = t^2 + t - 6,$$

откуда $2t + r + 6 \le 0$, что невозможно.

Заметим теперь, что значение $K = t$ подходит для любого n, а значение $K = t - 1$ — только для тех n, для которых $r \in \{0, 1, 2\}$, что следует из неравенства

$$t^2 + 3t + r \le (t-1)^2 + 5(t-1) + 6 = t^2 + 3t + 2.$$

Наконец, если $n \ge 3$ и $r \in \{0, 1, 2\}$, то $t \ge 1$, так что $K = t - 1 \ge 0$. $\square$

Из (9) теперь следует, что все решения $(a, b, c) \in S_0$ уравнения (11) должны удовлетворять одной из систем вида

$$\frac{3a - 2b - c}{2} = K, \quad \frac{9a - 4b - c}{2} = L,$$

где пара (K, L) реализует представление (12). Следовательно,

$$b = 3a + K - L, \quad c = -3a - 4K + 2L.$$

Здесь условие $a \equiv c \pmod 2$ выполнено автоматически. В то же время неравенства $a > 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$ и $c \le a - b + 2$ имеют место тогда и только тогда, когда $a \in I(K, L)$, где

$$I(K, L) = [\max\{1, (1/3)(L - K), L - 3K - 2\}, (2/3)(L - 2K)]. \tag{14}$$

Таким образом, все решения уравнения (11) на множестве S_0 имеют вид

$$(a, b, c) = (a, 3a + K - L, -3a - 4K + 2L),$$

где a пробегает все целые числа из отрезков $I(K, L)$, где пара (K, L) реализует представление (12).

(ii) Опираясь на лемму 1, рассмотрим более подробно те значения $n \ge 3$, для которых $r \in \{0, 1, 2\}$ в представлении (13) (далее такие n называются *особыми*).

(a) Пусть $n = t^2 + 3t$, где $t \ge 1$. Тогда

$$(K, L) \in \{(t, 3t), (t - 1, 5t - 1)\}.$$

Если $(K, L) = (t, 3t)$, то отрезок $I(K, L)$ оказывается пустым при $t = 1$ и состоит из одной точки $\frac{2}{3}t$ при $t > 1$. Следовательно, при $t \not\equiv 0 \pmod 3$ искомых троек (a, b, c) нет, но при $t \equiv 0 \pmod 3$ найдется одна тройка $(a, b, c) = (\frac{2}{3}t, 0, 0)$. Если $(K, L) = (t - 1, 5t - 1)$, то

$$I(K, L) = [2t, 2t + 2/3],$$

откуда $(a,b,c)=(2t,2t,2)$. Значит, все решения $(a,b,c)\in S_0$ уравнения (11) в рассматриваемом случае суть

$$(a,b,c)\in\begin{cases}\bigl\{\bigl(\frac{2}{3}t,0,0\bigr),(2t,2t,2)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \{(2t,2t,2)\} & \text{иначе.}\end{cases}\tag{15}$$

(б) Пусть $n=t^2+3t+1$, где $t\geq 1$. Тогда

$$(K,L)\in\{(t,3t+1),(t-1,5t)\}.$$

Если $(K,L)=(t,3t+1)$, то

$$I(K,L)=[(1/3)(2t+1),(1/3)(2t+2)].$$

При $t\equiv 1 \pmod 3$ этот отрезок содержит целое число $a=\frac{1}{3}(2t+1)$, при $t\equiv 2 \pmod 3$ — целое число $a=\frac{1}{3}(2t+2)$, а при других t не содержит целых чисел. Это дает тройку

$$(a,b,c)=\begin{cases}\bigl(\frac{1}{3}(2t+1),0,1\bigr), & \text{если } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \bigl(\frac{1}{3}(2t+2),1,0\bigr), & \text{если } t\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$$

Если $(K,L)=(t-1,5t)$, то

$$I(K,L)=[2t+1,2t+4/3],$$

откуда $(a,b,c)=(2t+1,2t+2,1)$. Таким образом, все решения $(a,b,c)\in S_0$ уравнения (11) в рассматриваемом случае суть

$$(a,b,c)\in\begin{cases}\bigl\{\bigl(\frac{1}{3}(2t+1),0,1\bigr),(2t+1,2t+2,1)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \bigl\{\bigl(\frac{1}{3}(2t+2),1,0\bigr),(2t+1,2t+2,1)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 2 \pmod 3,\\ \{(2t+1,2t+2,1)\} & \text{иначе.}\end{cases}\tag{16}$$

(в) Пусть $n=t^2+3t+2$, где $t\geq 1$. Тогда

$$(K,L)\in\{(t,3t+2),(t-1,5t+1)\}.$$

Если $(K,L)=(t,3t+2)$, то

$$I(K,L)=[(1/3)(2t+2),(1/3)(2t+4)].$$

При $t\equiv 0 \pmod 3$ этот отрезок содержит целое число $a=\frac{1}{3}(2t+3)$, при $t\equiv 1 \pmod 3$ — целое число $a=\frac{1}{3}(2t+4)$, а при $t\equiv 2 \pmod 3$ — целое число $a=\frac{1}{3}(2t+2)$. Это дает тройку

$$(a,b,c)=\begin{cases}\bigl(\frac{1}{3}(2t+3),1,1\bigr), & \text{если } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \bigl(\frac{1}{3}(2t+4),2,0\bigr), & \text{если } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \bigl(\frac{1}{3}(2t+2),0,2\bigr), & \text{если } t\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$$

Если же $(K,L)=(t-1,5t+1)$, то отрезок $I(K,L)$ состоит из одной точки $2t+2$, откуда находим $(a,b,c)=(2t+2,2t+4,0)$. Следовательно, все решения $(a,b,c)\in S_0$ уравнения (11) в рассматриваемом случае суть

$$(a,b,c)\in\begin{cases}\bigl\{\bigl(\frac{1}{3}(2t+3),1,1\bigr),(2t+2,2t+4,0)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \bigl\{\bigl(\frac{1}{3}(2t+4),2,0\bigr),(2t+2,2t+4,0)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \bigl\{\bigl(\frac{1}{3}(2t+2),0,2\bigr),(2t+2,2t+4,0)\bigr\}, & \text{если } t\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}\tag{17}$$

(iii) Фиксируем теперь $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ и рассмотрим систему уравнений

$$n_0(a,b,c)=n,\quad m(a,b,c)=m \tag{18}$$

на множестве S_0. Можно считать число m четным, поскольку $m(a,b,c)$ принимает только четные значения.

Для особых значений n все те значения m, для которых система (18) разрешима, даются формулой $m\in\{m_1,m_2\}$, где

$$m_1=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3+6t^2+\frac{14}{3}t & \text{в случае (а)},\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+\frac{20}{3}t+2 & \text{в случае (б)},\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+\frac{26}{3}t+4 & \text{в случае (в)},\end{cases}$$

а значение m_2 в каждом из случаев (а), (б), (в) зависит от t и может даже не существовать. А именно, на основании формул (15)–(17) получаем

$$m_2=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3+6t^2+6t & \text{в случае (а) и } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+8t+\frac{8}{3} & \text{в случае (б) и } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+8t+\frac{10}{3} & \text{в случае (б) и } t\equiv 2 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+10t+6 & \text{в случае (в) и } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+10t+\frac{20}{3} & \text{в случае (в) и } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+6t^2+10t+\frac{16}{3} & \text{в случае (в) и } t\equiv 2 \pmod 3\end{cases}$$

(в иных случаях m_2 не существует). Всегда имеем $m_2\neq m_1$, так что прообраз пары (n,m), где n — особое число, при отображении (10) содержит не более одной тройки (a,b,c).

Для остальных значений $n\geq 3$ справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть число $n\geq 3$ не является особым. Система* (18) *разрешима на множестве S_0 тогда и только тогда, когда $M\in I(K,L)$, где*

$$M=-\frac{2}{3}K^3-KL+\frac{2}{3}K-L+\frac{1}{2}m,$$

отрезок $I(K,L)$ задан формулой (14), *а пара (K,L) определена в лемме* 1. *В случае разрешимости система* (18) *имеет единственное решение $(a,b,c)\in S_0$, а именно,*

$$(a,b,c)=(M,3M+K-L,-3M-4K+2L). \tag{19}$$

Доказательство. Решение системы (18) на множестве S_0 сводится к решению уравнения

$$m(a,-3a-K+L,-3a-4K+2L)=m$$

относительно a на отрезке $I(K,L)$. Это уравнение принимает вид

$$\frac{4}{3}K^3+2KL-\frac{4}{3}K+2L+2a=m,$$

откуда находим единственное решение $a=M$, где M указано выше. Теперь все утверждения теоремы становятся очевидными. $\square$

Следствие. *Отображение $S_0 \to \mathbb{N}^2$, заданное формулой* (10), *инъективно.*

Доказательство. Прообраз пары $(1, m)$ непуст только при $m = 2$ (и в этом случае он состоит из одной тройки $(a, b, c) = (1, 2, 1)$). Прообраз пары $(2, m)$ непуст только при $m = 4$ и $m = 6$ (и в каждом из этих случаях он также состоит из одной тройки $(a, b, c) = (2, 4, 0)$ и $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ соответственно). Случай пары (n, m), где $n \geq 3$, был рассмотрен выше (отдельно для особых значений n и в теореме 2 для остальных n). $\square$

Пример. 1. Пусть $(n, m) = (7, 28)$. Тогда $(K, L) = (1, 6)$ и $I(K, L) = [\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$. Поскольку $M = 2 \in [\frac{5}{3}, \frac{8}{3}]$, система (18) будет разрешимой, а ее решение $(a, b, c) = (2, 1, 2)$ находится по формуле (19).

2. Если $(n, m) = (13, 70)$, то система (18) неразрешима. Действительно, имеем $(K, L) = (2, 9)$. Тогда $I(K, L) = [\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$, однако $M = 4 \notin [\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$.

3. Пусть $(n, m) = (41, 360)$. Здесь значение $n = 41$ является особым ($t = 5 \equiv 2 \pmod 3$ в случае б)). Имеем $m_1 = 352$, $m_2 = 360$. Поскольку $m = m_2$, система (18) разрешима. Ее решение $(a, b, c) = (4, 1, 0)$ находится по формуле (16).

Случай нечетного первого класса Черна. Здесь справедливы совершенно аналогичные результаты, поэтому приведем только формулировки, опуская доказательства.

Для $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ пусть $n_{-1}(a, b, c)$ и $m(a, b, c)$ задаются формулами (7) и (8) соответственно. Пусть также S_{-1} — множество всех $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$, удовлетворяющих условиям

$$a > 0, \quad c \leq a - b + 2, \quad a \not\equiv c \pmod 2$$

(см. (4)).

Положим

$$k = \frac{3a - 2b - c + 1}{2}, \quad l = 3a - b.$$

Тогда

$$n_{-1}(a, b, c) = k^2 + l, \quad m(a, b, c) = \frac{4}{3}k^3 + 2kl - \frac{1}{3}k + l + 2a.$$

Если $(a, b, c) \in S_{-1}$, то k и l — целые числа, при этом $k \geq -1$ и $l \geq 0$ соответственно. Более того, для $(a, b, c) \in S_{-1}$ имеем $n_{-1}(a, b, c) > 0$, $m(a, b, c) > 0$, а также

$$2k - 1 \leq l \leq 4k + 4. \tag{20}$$

Равенство $k = -1$ при $(a, b, c) \in S_{-1}$ возможно только для $(a, b, c) = (1, 3, 0)$.

Как и ранее, мы хотим показать, что отображение $S_{-1} \to \mathbb{N}^2$, заданное формулой

$$(a, b, c) \mapsto (n_{-1}(a, b, c), m(a, b, c)), \tag{21}$$

инъективно, а также указать явный алгоритм для нахождения прообраза пары $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ в случае, когда он непуст.

(i) Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и опишем все $(a, b, c) \in S_{-1}$, для которых

$$n_{-1}(a, b, c) = n. \tag{22}$$

При $n = 1$ таковыми являются только $(a, b, c) \in \{(1, 2, 0), (1, 3, 0)\}$. Далее будем предполагать $n \geq 2$ (и тогда можно также считать $k \geq 0$).

Имея в виду (20), нам потребуется представить число $n \geq 2$ в виде

$$n = K^2 + L, \text{ где } K \geq 0 \text{ и } 2K - 1 \leq L \leq 4K + 4. \tag{23}$$

Воспользуемся тем, что такое n однозначно представимо в виде

$$n = t^2 + 2t - 1 + r, \text{ где } t \geq 1 \text{ и } 0 \leq r < 2t + 3, \tag{24}$$

при этом $t = [\sqrt{n+2} - 1]$.

Лемма 2. *Пусть число $n \geq 2$ представлено в виде (24). Если $r \in \{0, 1, 2\}$, то существуют в точности два представления (23):*

$$(K, L) \in \{(t, 2t - 1 + r), (t - 1, 4t + r - 2)\}.$$

Иначе существует только одно представление (23), а именно,

$$(K, L) = (t, n - t^2).$$

Каждое из решений $(a, b, c) \in S_{-1}$ уравнения (22) удовлетворяет одной из систем вида

$$\frac{3a - 2b - c + 1}{2} = K, \quad 3a - b = L,$$

где пара (K, L) реализует представление (23). Тогда

$$b = 3a - L, \quad c = -3a - 2K + 2L + 1.$$

Поскольку здесь $a \not\equiv c \pmod 2$, потребуется учесть только неравенства $a > 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ и $c \leq a - b + 2$. Они выполнены тогда и только тогда, когда $a \in J(K, L)$, где

$$J(K, L) = [\max\{1, (1/3)L, L - 2K - 1\}, (1/3)(2L - 2K + 1)]. \tag{25}$$

Итак, все решения уравнения (22) на множестве S_{-1} имеют вид

$$(a, b, c) = (a, 3a - L, -3a - 2K + 2L + 1),$$

где a пробегает все целые числа из отрезков $J(K, L)$, где пара (K, L) реализует представление (23).

(ii) С помощью леммы 2 рассмотрим особые значения $n \geq 2$ (те, для которых в представлении (24) имеем $r \in \{0, 1, 2\}$). Для таких n все решения $(a, b, c) \in S_{-1}$ уравнения (22) описываются следующим образом.

(а) Если $n = t^2 + 2t - 1$, где $t \geq 1$, то

$$(a, b, c) \in \begin{cases} \{\big(\frac{1}{3}(2t-1), 0, 0\big), (2t-1, 2t-2, 2)\}, & \text{если } t \equiv 2 \pmod 3, \\ \{(2t-1, 2t-1, 2)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

(б) Если $n = t^2 + 2t$, где $t \geq 1$, то

$$(a, b, c) \in \begin{cases} \{\big(\frac{2}{3}t, 0, 1\big), (2t, 2t+1, 1)\}, & \text{если } t \equiv 0 \pmod 3, \\ \{\big(\frac{1}{3}(2t+1), 1, 0\big), (2t, 2t+1, 1)\}, & \text{если } t \equiv 1 \pmod 3, \\ \{(2t, 2t+1, 1)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

(в) Если $n = t^2 + 2t + 1$, где $t \geq 1$, то

$$(a, b, c) \in \begin{cases} \{\big(\frac{1}{3}(2t+3), 2, 0\big), (2t+1, 2t+3, 0)\}, & \text{если } t \equiv 0 \pmod 3, \\ \{\big(\frac{1}{3}(2t+1), 0, 2\big), (2t+1, 2t+3, 0)\}, & \text{если } t \equiv 1 \pmod 3, \\ \{\big(\frac{1}{3}(2t+2), 1, 1\big), (2t+1, 2t+3, 0)\}, & \text{если } t \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

(iii) Фиксируем $(n,m)\in\mathbb{N}^2$ и рассмотрим систему уравнений

$$n_{-1}(a,b,c)=n,\quad m(a,b,c)=m \tag{26}$$

на множестве S_{-1}. Здесь можно считать $m\equiv n \pmod 2$.

Для особых значений n все те значения m, для которых система (26) разрешима, суть $m\in\{m_1,m_2\}$, где

$$m_1=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3+4t^2-\frac{1}{3}t-1 & \text{в случае (а)},\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+\frac{5}{3}t & \text{в случае (б)},\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+\frac{11}{3}t+1 & \text{в случае (в)},\end{cases}$$

а m_2 (если существует) дается формулой

$$m_2=\begin{cases}\frac{4}{3}t^3+4t^2+t-\frac{5}{3} & \text{в случае (а) и } t\equiv 2 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+3t & \text{в случае (б) и } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+3t+\frac{2}{3} & \text{в случае (б) и } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+5t+3 & \text{в случае (в) и } t\equiv 0 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+5t+\frac{5}{3} & \text{в случае (в) и } t\equiv 1 \pmod 3,\\ \frac{4}{3}t^3+4t^2+5t+\frac{7}{3} & \text{в случае (в) и } t\equiv 2 \pmod 3.\end{cases}$$

Для остальных значений $n\ge 2$ справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть число $n\ge 2$ не является особым. Система* (26) *разрешима на множестве S_{-1} тогда и только тогда, когда $M\in J(K,L)$, где*

$$M=-\frac{2}{3}K^3-KL+\frac{1}{6}K-\frac{1}{2}L+\frac{1}{2}m,$$

отрезок $J(K,L)$ задан формулой (25), *а пара (K,L) определена в лемме* 2. *В случае разрешимости система* (26) *имеет единственное решение $(a,b,c)\in S_{-1}$, а именно,*

$$(a,b,c)=(M,3M-L,-3M-2K+2L+1).$$

Следствие. *Отображение $S_{-1}\to\mathbb{N}^2$, заданное формулой* (21), *инъективно.*

§ 3. Взаимосвязи с известными сериями компонент в $M(e;n,m)$

Установим взаимосвязи между сериями, полученными в данной работе, и сериями, построенными ранее в работах [1, 2, 8]. Из конструкций серий получаем следующее

Утверждение 1. (i) *Условие $b=0$ задает пересечение новых серий и серий из* [8].

(ii) *Условие $b=c=0$ задает пересечение новых серий с сериями из* [1, 2].

(iii) *Условие $c=0$ задает пересечение серий из* [8] *и* [1, 2] (*см. также замечание в статье* [8]).

Отметим, что в замечании работы [8] было приведено условие $c=0$, при котором построенные в ней серии имеют пересечение с сериями из [1, 2]. Более того, ввиду теоремы 3 работы [4] и утверждения 1 нетрудно видеть, что при

$a = c = 0$ построенные в статье [8] серии дают бесконечные подсерии рациональных компонент. Данные рациональные подсерии одновременно являются подсериями серий, построенных в [1, 2]. Их рациональность для более общего случая доказана в [4].

На вопрос о том, существуют ли примеры значений классов Черна (e, n, m), для которых существует как компонента из построенной в данной статье серии, так и компонента из уже известной, можно дать положительный ответ. Таким примером является набор значений $(e, n, m) = (0, 9, 40)$. А именно, в данном случае имеется компонента серии из статьи [1], определяемая набором параметров $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$. Тем самым соответствующая точная тройка, задающая семейство пучков, имеет вид

$$0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \to 4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to F(2) \to 0. \tag{27}$$

Также в данном случае имеется компонента серии, построенной в настоящей работе. Она определяется набором параметров $a = 4$, $b = 5$, $c = 0$. Отсюда соответствующая точная тройка, задающая семейство пучков, в этом случае имеет вид

$$0 \to 4\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \to 5\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to F(1) \to 0. \tag{28}$$

Вычисления с использованием результатов п. 7 статьи [6] показывают, что пучки из (27) имеют спектр $(-4, -3, -3, -2, -2, -2, -2, -1, -1)$, а пучки из (28) имеют спектр $(-3, -3, -3, -3, -2, -2, -2, -1, -1)$.

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за ценные советы и замечания, позволившие существенно улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A. S.* Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on P3 // Annali di Mat. Pura ed Appl. 2017. V. 196, N 4. P. 1573–1608.
2. *Almeida C., Jardim M., Tikhomirov A. S.* Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on projective space // Adv. Math. 2022. V. 402. 108363.
3. *Cavalcante A., Jardim M., Santiago D.* Foliations by curves on threefolds // Math. Nachr. 2023. V. 296, N 2. P. 552–573.
4. *Васильев Д. А.* Бесконечная серия рациональных компонент пространства модулей пучков ранга 3 на пространстве $\mathbb{P}^3$ // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 465–485.
5. *Chang M.-C.* Stable rank 2 bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = 0$, $c_2 = 4$ and $a = 1$ // Math. Z. 1983. V. 184. P. 407–415.
6. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
7. *Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.* О числе неприводимых компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 123–132.
8. *Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.* Две серии компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 115–124.
9. *Васильев Д. А., Тихомиров А. С.* Модули полустабильных пучков ранга два на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 10.

С. 3-57.

Поступила в редакцию 18 сентября 2024 г.
После доработки 8 октября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Кытманов Алексей Александрович (ORCID 0000-0003-3325-099X)
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
aakytm@gmail.com

Осипов Николай Николаевич (ORCID 0000-0002-8894-609X)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nnosipov@gmail.com

Тихомиров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-7409-8464)
Ярославский гос. педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
ул. Республиканская, 108, Ярославль 150000
satikhomirov@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.7

МОДУЛИ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА ТРИ С ОСОБЕННОСТЯМИ СМЕШАННОЙ РАЗМЕРНОСТИ НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

И. Ю. Ланских, А. С. Тихомиров

Аннотация. Исследуется пространство модулей Гизекера — Маруямы нормализованных полустабильных когерентных пучков ранга три с положительным вторым классом Черна и неотрицательным третьим классом Черна на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Найден первый пример неприводимой компоненты этого пространства модулей с малыми значениями классов Черна, в которой общий пучок имеет особенности смешанной размерности, т. е. одновременно нульмерные и одномерные особенности. Ранее примеры компонент модулей полустабильных пучков с особенностями смешанной размерности были построены только для пучков ранга два в работах А. Н. Иванова и А. С. Тихомирова (2018 г.) и Ч. Алмейды, М. Жардима и А. С. Тихомирова (2022 г.).

DOI 10.33048/smzh.2025.66.108

Ключевые слова: полустабильные когерентные пучки, пучки ранга три, пространство модулей полустабильных пучков.

§ 1. Введение

Обозначим через $M_{\mathbb{P}^3}(r;e,l,m)$ пространство (схему) модулей Гизекера — Маруямы полустабильных когерентных пучков ранга r с нормализованным первым классом Черна $c_1 = e$, $-r+1 \leq e \leq 0$, и вторым и третьим классами Черна $c_2 = l \geq 1$, $c_3 = m \geq 0$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. В настоящей статье изучается геометрия пространств модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;e,l,m)$ пучков ранга $r = 3$. Исследования по геометрии модулей пучков ранга три и выше на трехмерных проективных многообразиях находятся, в отличие от случая ранга два, на самом начальном этапе своего развития. В частности, до настоящего времени оставалась открытой проблема существования неприводимых компонент пространств $M_{\mathbb{P}^3}(3;e,l,m)$, в которых общие пучки имеют особенности смешанной размерности, т. е. одновременно нульмерные и одномерные особенности. Ранее примеры компонент модулей полустабильных пучков с особенностями смешанной размерности были построены только для пучков ранга $r = 2$. А именно, в работе А. Н. Иванова и А. С. Тихомирова [1] (2018 г.) были найдены три такие компоненты пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$, обозначенные в указанной работе через $X(2,1)$, $X(1,0)$ и $X(2,0)$. Затем в статье Алмейды, Жардима и А. С. Тихомирова [2] (2022 г.) построена бесконечная серия таких компонент пространства $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,l,m)$ с растущим вторым классом Черна l.

В настоящей статье строится первый пример неприводимой компоненты схемы модулей $\mathscr{M}(3;e,l,m)$ пучков ранга 3, в которой общий пучок имеет особенности смешанной размерности. Этот пример получен для значений $(e,l,m) = (-2,3,-6)$ классов Черна. Идея построения таких пучков $E = E_{\mathscr{E},\xi}$ ранга $r = 3$ состоит в задании их в виде нетривиальных расширений вида

$$\xi : 0 \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \to E_{\mathscr{E},\xi} \to \mathscr{E} \to 0, \quad a = 1, 2, \tag{1}$$

где $\mathscr{E}$ — общий пучок ранга $r = 2$ с особенностями смешанной размерности, принадлежащий компоненте $X(2,1)$ схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$, указанной выше.

Основным результатом статьи является следующая теорема (см. теоремы 4 и 5(iii) статьи).

Основная теорема. *Существует неприводимая компонента $\overline{\mathscr{M}}$ схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-2,3,-6)$, общий пучок E в которой является стабильным пучком ранга три с особенностями смешанной размерности и имеет вид $E = E_{\mathscr{E},\xi}$, где ξ — нетривиальное расширение* (1) *при $a = 2$, а пучок $\mathscr{E}$ является общим пучком ранга два из компоненты $X(2,1)$ схемы $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$. Особенности $\operatorname{Sing} E$ представляют собой дизъюнктное объединение $l \sqcup x$ проективной прямой и точки. Компонента $\overline{\mathscr{M}}$ приведена в общей точке и имеет размерность* 19.

Другой основной результат, полученный в статье, носит качественный характер и касается структуры особенностей общих пучков $E_{\mathscr{E},\xi} \in \overline{\mathscr{M}}$. А именно, в теореме 2 доказывается, что подмножество $\operatorname{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$ множества особенностей $\operatorname{Sing}(\mathscr{E})$ пучка $\mathscr{E}$ ранга два в расширении (1), которое наследуется от рефлексивной оболочки $\mathscr{E}^{\vee\vee}$ пучка $\mathscr{E}$, не сохраняется при переходе к пучку $E_{\mathscr{E},\xi} \in \overline{\mathscr{M}}$. Другими словами, общий пучок $E_{\mathscr{E},\xi}$, в отличие от $\mathscr{E}$, локально свободен в точках множества $\operatorname{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$.

Перейдем к краткому изложению содержания статьи. В § 2 доказывается теорема 1 о том, что особенности пучка $E = E_{\mathscr{E},\xi}$, задаваемого как общее расширение (1) при a, равном 1 и 2, имеют смешанную размерность и содержатся в особенностях пучка $\mathscr{E}$. В § 3 доказывается упомянутая выше теорема 2, дающая точное описание особенностей пучка E, а также теорема 3 о стабильности по Гизекеру пучка E. § 4 посвящен нахождению размерностей семейств $\mathscr{M}_{a,n,s}$ пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$ для определенных троек целочисленных параметров (a,n,s). А именно, в теореме 4 эти размерности получены для $(a,n,s) \in \{(2,2,1),(2,2,0),(1,2,1),(1,2,0),(1,1,0)\}$. В § 5 доказывается теорема 5 о том, что для значений $(a,n,s) \in \{(2,2,1),(2,2,0)\}$ семейства $\mathscr{M}_{a,n,s}$ являются гладкими открытыми подмножествами неприводимых компонент $\overline{\mathscr{M}}_{a,n,s}$ схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-2,3,-6)$, и описываются особенности общих пучков в этих компонентах. В частности, показано, что общие пучки в компоненте $\overline{\mathscr{M}} = \overline{\mathscr{M}}_{2,2,1}$ имеют особенности смешанного типа в соответствии с утверждением основной теоремы выше. Кроме того, в теореме 5 доказывается, что оставшиеся три семейства $\mathscr{M}_{1,2,1}$, $\mathscr{M}_{1,2,0}$ и $\mathscr{M}_{1,1,0}$ имеют коразмерность ≤ 1 в содержащих их неприводимых компонентах схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-1,3,-3)$, и общие пучки в них имеют особенности чистой размерности 1 вдоль прямой.

В статье будут использоваться следующие обозначения. $\mathbf{k}$ — основное поле, $\operatorname{char}\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$, $\operatorname{Coh}(\mathbb{P}^3)$ — категория когерентных пучков на $\mathbb{P}^3$, $[E]$ — класс S-эквивалентности полустабильного по Гизекеру пучка $E \in \operatorname{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $\mathscr{O}(a) := \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(a)$, $a \in \mathbb{Z}$, $R_{\mathbb{P}^3}(r;e,l,m)$ — открытое подмножество рефлексивных пучков в схеме модулей $M_{\mathbb{P}^3}(r;e,l,m)$, $\operatorname{Sing}(\mathscr{F})$ — множество особенностей пучка

$\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $\mathrm{dh}\,\mathscr{F}_x$ — гомологическая размерность $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3,x}$-модуля $\mathscr{F}_x$, где $\mathscr{F} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $x \in \mathbb{P}^3$, $\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G}) := \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $\mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $\mathscr{E}xt^i(\mathscr{F},\mathscr{G}) := \mathscr{E}xt^i_{\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $i \geq 0, \mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $\hom(\mathscr{F},\mathscr{G}) := \dim \mathrm{Hom}(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $\mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$, $\mathrm{ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G} := \dim \mathrm{Ext}^i(\mathscr{F},\mathscr{G})$, $i \geq 0, \mathscr{F},\mathscr{G} \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$.

§ 2. Особенности смешанной размерности пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$

В этом параграфе исследуются особенности интересующего нас класса пучков $E \in \mathrm{Coh}(\mathbb{P}^3)$ ранга 3 на пространстве $\mathbb{P}^3$. Как отмечалось во введении, этот класс пучков состоит из нетривиальных расширений $E = E_{\mathscr{E},\xi}$ вида (1), в которых пучки $\mathscr{E}$ ранга 2 являются общими пучками в неприводимых компонентах $X(2,1)$, $X(1,0)$ и $X(2,0)$ пространства модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$, построенных в [1, теорема 3]. Напомним, что каждая из этих компонент $X(n,s)$, $(n,s) \in \{(2,1),(2,0),(1,0)\}$, описывается как замыкание в схеме $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$ открытого подмножества

$$X(n,s)^* = \{[\mathscr{E}] \in M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0) \mid [\mathscr{E}^{\vee\vee}] \in R_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,2n)^*$$

и пучок $\mathscr{E}$ удовлетворяет точной тройке вида

$$0 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}^{\vee\vee} \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W \to 0, \qquad (2)$$

в которой $\ell \subset \mathbb{P}^3$ — проективная прямая, а $W \in \mathbb{P}^3$ — точка при $s = 1$,

рассматриваемая как приведенная нульмерная схема длины 1,

либо $W = \varnothing$ при $s = 0$, причем

$$\mathrm{Sing}(\mathscr{E}) = \mathrm{Sing}(\mathscr{E}\mathscr{E}^{\vee\vee}) \sqcup W \sqcup \ell, \mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}) \cap (\ell \sqcup W) = \varnothing,\ \mathscr{E}^{\vee\vee}|_\ell \simeq \mathscr{O}_\ell^{\oplus 2}$$

$$\text{и } \mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}|_{\mathbb{P}^2}) = 0 \text{ для общей плоскости } \mathbb{P}^2 \supset \ell\}, \qquad (3)$$

где $R_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,2n)^*$ — плотное открытое подмножество в $R_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,2n)$, $1 \leq n \leq 2$, состоящее из рефлексивных пучков $\mathscr{F}$ с простейшими особенностями такими, что (a) $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ — общая точка в $\mathrm{Sym}^2(\mathbb{P}^3)$ и (б) проективная оболочка множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ имеет максимальную размерность, равную $2n-1$ (см. [3, с. 139; 4, леммы 2.7, 2.13]).

Замечание. Как показано в [1, теорема 3], пучки $\mathscr{E}$ из $X(n,s)^*$ стабильны.

Всюду ниже рассматриваются пучки $E = E_{\mathscr{E},\xi}$, являющиеся нетривиальными расширениями вида (1):

$$\xi : 0 \to \mathscr{O}(-a) \to E \xrightarrow{e} \mathscr{E} \to 0, \qquad (4)$$

$$[\mathscr{E}] \in X(n,s)^*, \quad (n,s) \in \{(2,1),(2,0),(1,0)\}, \quad a \in \{1,2\}.$$

В этом параграфе доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть E — пучок ранга 3 на $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющий тройке* (4). *Тогда в обозначениях* (2) *верны следующие утверждения.*

(i) *Имеют место включения*

$$\ell \sqcup W \subset \mathrm{Sing}(E) \subset \ell \sqcup W \sqcup \mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}); \qquad (5)$$

тем самым пучок E имеет особенности смешанной размерности при $W \neq \varnothing$.

(ii) *Точна тройка*

$$0 \to E \to E^{\vee\vee} \to \mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W \to 0. \qquad (6)$$

Доказательство. (i) Правое включение в (5) ввиду первого равенства в (3) равносильно включению $\mathrm{Sing}(E) \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{E})$, а последнее непосредственно следует из тройки (4), поскольку пучок $\mathscr{O}(-a)$ локально свободен. Поэтому достаточно проверить левое включение $\ell \sqcup W \subset \mathrm{Sing}(E)$. Заметим, что поскольку $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^3} \mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W = 2$, $\mathrm{codim}_{\mathbb{P}^3} \mathscr{O}_W = 3$, ввиду [5, предложение 1.1.6.i)] имеем $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W, \mathscr{O}) = \mathscr{E}xt^2(\mathscr{O}_W, \mathscr{O}) = 0$. Кроме того, поскольку $\mathscr{E}^{\vee\vee}$ — рефлексивный пучок на $\mathbb{P}^3$, то $\mathscr{E}xt^{\geq 2}(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}) = 0$ (см., например, [3, с. 131]). Поэтому, применяя функтор $\mathscr{H}om(-,\mathscr{O})$ к точной тройке из (2) и учитывая канонический изоморфизм рефлексивных пучков $\mathscr{E}^{\vee\vee\vee} \xrightarrow{\cong} \mathscr{E}^\vee$, получаем точную тройку

$$0 \to \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}) \to \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \to \mathscr{E}xt^2(\mathscr{O}_\ell(n+1-s), \mathscr{O}) \to 0 \tag{7}$$

и изоморфизмы

$$\mathscr{E}xt^2(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \cong \mathscr{E}xt^3(\mathscr{O}_W, \mathscr{O}) \cong \mathscr{O}_W, \quad \mathscr{E}xt^{\geq 3}(\mathscr{E}, \mathscr{O}) = 0. \tag{8}$$

Согласно (3) носители пучков $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O})$ и $\mathscr{E}xt^2(\mathscr{O}_\ell(n+1-s), \mathscr{O})$ не пересекаются, поэтому из (7) следует, что

$$\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \simeq \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}) \oplus \mathscr{E}xt^2(\mathscr{O}_\ell(n+1-s), \mathscr{O}).$$

Кроме того,

$$\mathscr{E}xt^2(\mathscr{O}_\ell(n+1-s), \mathscr{O}) = (\det N_{\ell/\mathbb{P}^3})(-n-1+s) = \mathscr{O}_\ell(1-n+s).$$

Отсюда находим

$$\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \simeq \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}) \oplus \mathscr{O}_\ell(1-n+s). \tag{9}$$

Применяя функтор $\mathscr{H}om(-,\mathscr{O})$ к (4), с учетом (9) выводим точную последовательность

$$0 \to \mathscr{E}^\vee \to E^\vee \to \mathscr{O}(a) \xrightarrow{\delta} \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}) \oplus \mathscr{O}_\ell(1-n+s) \to \mathscr{E}xt^1(E, \mathscr{O}) \to 0 \tag{10}$$

и изоморфизмы

$$\mathscr{E}xt^i(\mathscr{E}, \mathscr{O}) \cong \mathscr{E}xt^i(E, \mathscr{O}), \quad i \geq 2. \tag{11}$$

Покажем, что

$$\mathrm{dh}(E_x) = \mathrm{dh}(\mathscr{E}_x), \quad x \in \ell \sqcup W. \tag{12}$$

Отсюда, из включения $\mathrm{Sing}(E) \subset \mathrm{Sing}(\mathscr{E})$ и первого равенства в (3) будет следовать требуемое левое включение в (5). Ввиду (2) имеем два возможных случая: (а) $x = W$ при $s = 1$ и (б) $x \in \ell$.

(а) $x = W$ — точка. Из (8) и [6, гл. 2, лемма 1.1.1] следует, что $\mathrm{dh}(\mathscr{E}_x) = 2$, откуда ввиду (11) и снова с учетом [6, гл. 2, лемма 1.1.1] вытекает (12) для $x = W$.

(б) $x \in \ell$. Так как $(n,s) \in \{(2,1),(2,0),(1,0)\}$ и $a \in \{1,2\}$ согласно (4), то $a > 1-n+s$. Поэтому любой морфизм $\mathscr{O}(a) \to \mathscr{O}_\ell(1-n+s)$ нулевой. Кроме того, $x \notin \mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = \mathrm{Supp}(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}))$ в силу второго равенства в (3). Отсюда следует, что $\delta|_x = 0$, где δ — граничный морфизм в (10). Поэтому точная последовательность (10) показывает, что

$$\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}, \mathscr{O})|_U \xrightarrow{\cong} \mathscr{E}xt^1(E, \mathscr{O})|_U, \quad U := \mathbb{P}^3 \setminus (\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}) \sqcup W) \supset \ell. \tag{13}$$

Изоморфизм (13) вместе с (11) и [6, гл. 2, лемма 1.1.1] дает равенство (12) для $x \in \ell$.

(ii) Из длинной точной последовательности (10) следуют точные тройки

$$0 \to \mathscr{E}^\vee \to E^\vee \to \ker(\delta) \to 0, \quad 0 \to \ker(\delta) \to \mathscr{O}(a) \xrightarrow{\delta} \operatorname{im}(\delta) \to 0. \tag{14}$$

Кроме того, из изоморфизма (13) вытекает включение $\operatorname{Supp}(\operatorname{im}(\delta)) \subset \operatorname{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}) \sqcup W$, так что $\dim \operatorname{Supp}(\operatorname{im}(\delta)) = 0$ и тем самым ввиду [5, предложение 1.1.6(i)] имеем $\mathscr{E}xt^{\leq 2}(\operatorname{im}(\delta), \mathscr{O}_X) = 0$. Поэтому, применяя функтор $\mathscr{H}om(-, \mathscr{O})$ к второй тройке (14), находим соотношения $\ker(\delta)^\vee \cong \mathscr{O}(-a)$ Отсюда, применяя этот же функтор к первой тройке (14), получаем точную тройку

$$0 \to \mathscr{O}(-a) \to E^{\vee\vee} \to \mathscr{E}^{\vee\vee} \to 0. \tag{15}$$

Эта тройка вместе с тройками и (2) и (4) включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathscr{O}(-a) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathscr{O}(-a) \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "i_E"] \arrow[d] & E^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{coker}(i_E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r, "i_{\mathscr{E}}"] \arrow[d] & \mathscr{E}^{\vee\vee} \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{16}$$

в которой i_E и $i_{\mathscr{E}}$ — канонические морфизмы. Средняя горизонтальная тройка этой диаграммы совпадает с (6).

§ 3. Полное описание особенностей пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$. Стабильность пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$

В этом параграфе дается полное описание особенностей пучков $E = E_{\mathscr{E},\xi}$ в условиях теоремы 1. А именно, доказывается, что левое включение в (5) является точным равенством (см. теорему 2 ниже). Затем в теореме 3 доказана стабильность пучков E.

Рассмотрим пучок $[\mathscr{E}] \in X(n,s)^*$. В соответствии с определением (2) пучок $\mathscr{E}^{\vee\vee} \in R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^*$ — рефлексивный пучок ранга два на $\mathbb{P}^3$ с $2n$ простейшими особенностями $x_1, \ldots, x_{2n}$, т. е. такими, что

$$\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))_{x_k} \cong \mathbf{k}_{x_k}, \quad 1 \leq k \leq 2n. \tag{17}$$

Поэтому определены проекции

$$\begin{aligned}\operatorname{pr}_i : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))) \cong \bigoplus_{k=1}^{2n} \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))_{x_k}) \\ \to \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))_{x_i}) \cong \mathbf{k}\end{aligned}$$

и композиции

$$f_i : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))) \xrightarrow{pr_i} \mathrm{H}^0(\mathbf{k}_{x_i}) \cong \mathbf{k}, \quad 1 \le i \le 2n, \tag{18}$$

где f — гомоморфизм в точной последовательности

$$0 \to \mathrm{H}^1(\mathscr{E}^\vee(-a)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)) \xrightarrow{f} \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))) \to \mathrm{H}^2(\mathscr{E}^\vee(-a)), \tag{19}$$

индуцируемой спектральной последовательностью

$$E_2^{pq} = \mathrm{H}^p(\mathscr{E}xt^q(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))) \Rightarrow \mathrm{Ext}^\bullet(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)).$$

Положим

$$U_{\mathscr{E}} := \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)) \setminus \bigcup_{i=1}^{2n} \ker(f_i). \tag{20}$$

Лемма 1. *Пусть E — пучок ранга 3 на $\mathbb{P}^3$, удовлетворяющий* (4). *Рассмотрим гомоморфизм f и множество $U_{\mathscr{E}}$, определенные в* (19) *и* (20). *Тогда если f — ненулевой гомоморфизм, то верны следующие утверждения.*

(i) *$U_{\mathscr{E}}$ — плотное открытое множество в* $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))$.

(ii) *Пучок $\widetilde{E}$, определяемый как расширение*

$$0 \to \mathscr{O}(-a) \to \widetilde{E} \to \mathscr{E}^{\vee\vee} \to 0 \tag{21}$$

произвольным элементом $\xi \in U_{\mathscr{E}}$, локально свободен в точках из $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$ *и тем самым локально свободен.*

Доказательство. (i) По условию $f \ne 0$. Это означает, что не все f_i, $i = 1, \dots, 2n$, равны нулю. Пусть, например, $f_1 \ne 0$. Покажем, что

$$f_i \ne 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \tag{22}$$

воспользовавшись стандартным аргументом, основанным на неприводимости пространства модулей $R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^*$. Для этого рассмотрим морфизм факторизации $\pi : Y := (\mathbb{P}^3)^{\times 2n} \to \Pi := \mathrm{Sym}^{2n}(\mathbb{P}^3)$ по действию симметрической группы $\mathscr{S}_{2n}$. Для общей точки $w = (x_1, \dots, x_{2n}) \in \Pi$ слой $\pi^{-1}(w)$ состоит из $N = |\mathscr{S}_{2n}|$ различных точек: $\pi^{-1}(w) = \{y_1, \dots, y_N\}$. Пусть, например, $\sigma \in \mathscr{S}_{2n}$ — произвольная перестановка и

$$y_1 = \{x_1, \dots, x_{2n}\}, \quad y_2 = \{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}\}. \tag{23}$$

Простой счет параметров с использованием теоремы Бертини и гладкости Y показывает, что существует гладкая кривая $C_Y \subset Y$, проходящая через точки y_1 и y_2 и не проходящая через остальные точки слоя $\pi^{-1}(w)$, такая, что $\pi_C := \pi|_C : C_Y \to C_\Pi := \pi(C_Y)$ — бирациональный морфизм, а C_Π — кривая с особенностью в точке w. Так как пространство $R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^*$ неприводимо, по конструкции пространства модулей существует плоское семейство $\mathbb{F}$ рефлексивных пучков на $\mathbb{P}^3$ с неприводимой базой B, накрывающей $R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^*$, т. е. пучок $\mathbb{F}$ на $\mathbb{P}^3 \times B$ такой, что морфизм

$$p : B \to R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^*, \quad b \mapsto [\mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times \{b\}}]$$

сюръективен. Кроме того, по условию (a) в определении (2) морфизм $r : R_{\mathbb{P}^3}(2; 0, 2, 2n)^* \to \Pi$, $[\mathscr{F}] \mapsto \mathrm{Sing}(\mathscr{F})$ доминантен. Тем самым морфизм $q = r \circ p : B \to \Pi$, $b \mapsto \mathrm{Sing}(\mathbb{F}|_{\mathbb{P}^3 \times \{b\}})$ также доминантен. Поэтому существует неприводимая кривая $C_B \subset B$ такая, что $C'_\Pi = q(C_B)$ — открытое подмножество кривой C_Π, содержащее точку w. Положим $C'_Y = \pi_C^{-1}(C'_\Pi)$ и рассмотрим кривую $C = C_B \times_{C'_\Pi} C'_Y$ с естественными проекциями $C_B \xleftarrow{\widetilde{\pi}} C \xrightarrow{\widetilde{q}} C'_Y$. По построению $\widetilde{\pi} : C \to C_B$ — бирациональный морфизм, а значит, кривая C неприводима. Возьмем произвольную точку $b \in (q|_{C_b})^{-1}(w)$. По построению $\widetilde{\pi}^{-1}(b)$ есть пара различных точек $a_1, a_2 \in C$ таких, что

$$\widetilde{q}(a_i) = y_i,\ i = 1, 2, \quad [\mathbb{F}_C|_{\mathbb{P}^3\times\{a_1\}}] = [\mathbb{F}_C|_{\mathbb{P}^3\times\{a_2\}}], \tag{24}$$

где $\mathbb{F}_C := (\mathrm{id}_{\mathbb{P}^3} \times \widetilde{\pi})^*\mathbb{F}$ — семейство рефлексивных пучков на $\mathbb{P}^3$ с базой C. По конструкции семейства $\mathbb{F}_C$ для произвольной точки $a \in C$ точка $\widetilde{q}(a) \in C'_Y$ как точка в Y есть упорядоченный набор $2n$ точек, составляющих множество $\mathrm{Sing}(\mathbb{F}_C|_{\mathbb{P}^3\times\{b\}})$. В частности, из (23) и (24) следует, что

$$\widetilde{q}(a_1) = \{x_1, \dots, x_{2n}\}, \quad \widetilde{q}(a_2) = \{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(2n)}\}.$$

Отсюда ввиду неприводимости кривой C и условия $f_1 \neq 0$ вытекает, что $f_{\sigma(1)} \neq 0$. Так как $\sigma \in \mathscr{S}_{2n}$ — произвольная перестановка, последнее неравенство влечет (22).

(ii) Возьмем произвольную точку $x_i \in \mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$. Согласно (20) имеем ненулевой гомоморфизм

$$f_i : \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))_{x_i}) = \mathrm{H}^0(\mathbf{k}_{x_i}) = \mathbf{k}.$$

Из определения $U_{\mathscr{E}}$ следует, что

$$0 \neq f_i(\xi) \in \mathbf{k}. \tag{25}$$

Применяя к тройке (21) функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{O}(-a))$, получим связывающий гомоморфизм

$$\partial : \mathrm{H}^0(\mathscr{O}) = \mathrm{Hom}(\mathscr{O}(-a), \mathscr{O}(-a)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)), \quad 1 \mapsto \xi \tag{26}$$

(см. [7, гл. III, упражнение 6.1]). Переходя в (25) и (26) к росткам в точке x_i, получаем ненулевой гомоморфизм A-модулей, где $A = \mathscr{O}_{x_i}$ и $\mathscr{F} = \mathscr{E}^{\vee\vee}$:

$$A \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}_{x_i}, A) = \mathscr{E}xt^1(\mathscr{F}, \mathscr{O}(-a))_{x_i} = \mathbf{k}_{x_i}, \quad 1_{x_i} \mapsto f_i(\xi)_{x_i}. \tag{27}$$

Так как согласно (26) имеем $f_i(\xi)_{x_i} \neq 0$, т. е. росток $f_i(\xi)_{x_i}$ порождает A-модуль $\mathbf{k}_{x_i}$, то из (27) и леммы Серра [6, гл. 2, лемма 5.1.2] следует, что A-модуль $\widetilde{E}_{x_i}$ свободен. Другими словами, пучок $\widetilde{E}$ локально свободен в точке x_i.

Применив к тройке (2) функтор $\mathrm{Hom}(-, \mathscr{O}(-a))$, получим точную последовательность

$$\begin{aligned}\cdots \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W, \mathscr{O}(-a)) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a))\\ \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)) \to \mathrm{Ext}^2(\mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W, \mathscr{O}(-a)) \to \dots.\end{aligned} \tag{28}$$

По двойственности Серра — Гротендика получаем

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ext}^i(\mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W, \mathscr{O}(-a))\\ &\simeq \mathrm{Ext}^{3-i}(\mathscr{O}(-a+4), \mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W)^\vee \simeq H^{3-i}(\mathscr{O}_\ell(n-s+a-3) \oplus \mathscr{O}_W)^\vee.\end{aligned}$$

Так как $\dim(\ell \sqcup W) = 1$, то $H^2(\mathscr{O}_\ell(n-s+a-3) \oplus \mathscr{O}_W) = H^1(\mathscr{O}_W) = 0$. Кроме того, поскольку согласно (4) имеем $(n, s) \in \{(2,1), (2,0), (1,0)\}$, $a \in \{1, 2\}$, то $n - s + a - 3 \geq -1$, поэтому $H^1(\mathscr{O}_\ell(n-s+a-3) \oplus \mathscr{O}_W) = 0$. Отсюда

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{O}_\ell(n+1-s) \oplus \mathscr{O}_W, \mathscr{O}(-a)) = 0, \quad i = 1, 2,$$

и из (28) следует изоморфизм

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-a)) \cong \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)). \tag{29}$$

Из (29) и (18) следует, что $U_{\mathscr{E}}$ — открытое множество в $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a))$:

$$U_{\mathscr{E}} \subset \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)). \tag{30}$$

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *верны следующие утверждения.*

(i) $U_{\mathscr{E}}$ *является плотным открытым множеством в* $\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{O}(-a))$.

(ii) *Для общего расширения* ξ *в* (4), *а именно для* $\xi\in U_{\mathscr{E}}$, *левое включение в* (6) *становится точным равенством:*

$$\mathrm{Sing}(E)=\ell\sqcup W. \tag{31}$$

Другими словами, пучок E *локально свободен в точках множества* $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$. *Кроме того, пучок* $E^{\vee\vee}$ *локально свободен.*

Доказательство. (i) Ввиду леммы 1(i) достаточно проверить, что гомоморфизм

$$f:\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee},\mathscr{O}(-a))\xrightarrow{f}\mathrm{H}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee},\mathscr{O}(-a)))$$

в (19) ненулевой. Действительно, при $a=1$, $1\le n\le 2$, для рефлексивного пучка $\mathscr{E}^{\vee}\cong\mathscr{E}^{\vee\vee}$ имеем $\mathrm{H}^2(\mathscr{E}^{\vee}(-a))=0$ согласно [4, табл. 2.8.1, 2.12.2], а $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee},\mathscr{O}(-a)))=2n\ne 0$. Поэтому $\delta\ne 0$ в силу (19). При $a=2$, $n=1$ имеем $\mathrm{h}^2(\mathscr{E}^{\vee}(-a))=1$ по тем же таблицам, что и выше, а $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee},\mathscr{O}(-a)))=2$, поэтому $\delta\ne 0$ снова в силу (19). Соответственно при $a=2$, $n=2$ по тем же таблицам находим $\mathrm{h}^2(\mathscr{E}^{\vee}(-a))=2$, а $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee},\mathscr{O}(-a)))=4$, поэтому $\delta\ne 0$ опять в силу (19).

(ii) Пучки E и $E^{\vee\vee}$, определяемые как расширения вертикальными тройками в диаграмме (16), в силу (29) и (30) задаются одним и тем же элементом $\xi\in U_{\mathscr{E}}$. Поэтому согласно лемме 1(ii), в которой полагаем $\widetilde{E}=E^{\vee\vee}$, получаем, что пучок $E^{\vee\vee}$ локально свободен в точках множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$. Тем самым пучок E также локально свободен в точках множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$ в силу тройки (15) и второго равенства (3). Вдобавок пучок $E^{\vee\vee}$ локально свободен по лемме 1(ii) ввиду равенства $\widetilde{E}=E^{\vee\vee}$.

Теорема 3. *Пусть пучок* $E=E_{\mathscr{E},\xi}$ *задается расширением* (4), *где* $\xi\in U_{\mathscr{E}}$, $[\mathscr{E}]\in X(n,s)^*$ *и* $(a,n,s)\in\{(1,2,1),(1,2,0),(1,1,0),(2,2,1),(2,2,0)\}$. *Тогда* E *стабилен по Гизекеру.*

Доказательство. Сначала рассмотрим пучок $E^{\vee\vee}$ и докажем, что он является μ-стабильным. Для этого воспользуемся следующим утверждением (см. [6, гл. 2, замечание 1.2.6.b]). Рефлексивный пучок F ранга 3 на $\mathbb{P}^3$ с $c_1(F)\in\{-1,-2\}$ является μ-стабильным тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{h}^0(F)=\mathrm{h}^0(F^{\vee}(-1))=0.$$

Применим это утверждение к рефлексивному пучку $F=E^{\vee\vee}$ ранга 3. Заметим, что для него по условию теоремы выполнено соотношение $c_1(E^{\vee\vee})\in\{-1,-2\}$, поэтому достаточно проверить, что

$$\mathrm{h}^0(E^{\vee\vee})=0,\quad \mathrm{h}^0(E^{\vee}(-1))=0. \tag{32}$$

(Здесь во втором равенстве использован изоморфизм $E^{\vee\vee\vee}\cong E^{\vee}$, вытекающий из рефлексивности пучка $E^{\vee}$.) Воспользуемся точной тройкой (15), равенством $\mathrm{h}^0(\mathscr{O}(-a))=0$ при $a\in\{1,2\}$ и равенством $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee})=0$ для $\mathscr{E}^{\vee\vee}\in R_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,2n)^*, n\in\{1,2\}$ (см. [4, табл. 2.8.1, 2.12.2]); получим первое равенство (32).

Для получения второго равенства (32) применим функтор $\mathscr{H}om(-,\mathscr{O}(-1))$ к тройке (15); ввиду локальной свободы пучка $E^{\vee\vee}$ (см. теорему 2.(ii)) получим точную последовательность

$$0\to\mathscr{E}^{\vee}(-1)\to E^{\vee}(-1)\to\mathscr{O}(a-1)\to\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee},\mathscr{O}(-1))\to 0.$$

Согласно (17) пучок $\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-1))$ имеет носитель в $2n$ точках множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = \{x_1, \dots, x_{2n}\}$ и изоморфен $\mathbf{k}_{x_1} \oplus \dots \oplus \mathbf{k}_{x_{2n}}$. Поэтому

$$\mathrm{h}^0(\mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-1))) = 2n, \tag{33}$$

и предыдущая точная последовательность распадается на две точные тройки:

$$0 \to \mathscr{E}^{\vee}(-1) \to E^{\vee}(-1) \to \mathscr{J}(a-1) \to 0, \tag{34}$$

$$0 \to \mathscr{J}(a-1) \to \mathscr{O}(a-1) \to \mathscr{E}xt^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}, \mathscr{O}(-1)) \to 0, \tag{35}$$

где $\mathscr{J}$ — пучок идеалов множества $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$ как приведенной схемы. Из (33), тройки (35) и условия (б), налагаемого на $\mathrm{Sing}(\mathscr{E}^{\vee\vee})$ в определении (2), следует, что

$$\mathrm{h}^0(\mathscr{J}) = 0, \quad \mathrm{h}^0(\mathscr{J}(1)) = 4 - 2n. \tag{36}$$

Кроме того, ввиду рефлексивности пучка $\mathscr{E}^{\vee}$ имеем $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee}(-1)) = 0$ согласно [4, табл. 2.8.1, 2.12.2]). Отсюда, из (36) и тройки (34) получаем требуемое равенство $\mathrm{h}^0(E^{\vee}(-1)) = 0$ для всех a и n, удовлетворяющих условию теоремы. Таким образом, пучок $E^{\vee\vee}$ μ-стабилен.

Для доказательства стабильности по Гизекеру пучка E достаточно проверить его μ-стабильность. Пусть $0 \neq \mathscr{G} \subset E \subset E^{\vee\vee}$ — любой когерентный подпучок в E. Ввиду μ-стабильности $E^{\vee\vee}$ выполнено неравенство

$$\mu(\mathscr{G}) = \frac{c_1(\mathscr{G})}{\mathrm{rk}(\mathscr{G})} < \frac{c_1(E^{\vee\vee})}{\mathrm{rk}(E^{\vee\vee})} = \mu(E^{\vee\vee}).$$

Заметим, что $c_1(E) = c_1(E^{\vee\vee})$ и $\mathrm{rk}(E) = \mathrm{rk}(E^{\vee\vee}) = 3$, поэтому $\mu(E) = \mu(E^{\vee\vee})$, откуда получаем $\mu(\mathscr{G}) < \mu(E)$, т. е. E μ-стабилен.

§ 4. Размерности семейств $\mathscr{M}_{a,n,s}$ пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$

Для каждого набора $(a, n, s) \in \{(1,2,1), (1,2,0), (1,1,0), (2,2,1), (2,2,0)\}$ рассмотрим семейство $\widetilde{T}_{a,n,s}$ всех пучков $E_{\mathscr{E},\xi}$, удовлетворяющих условиям теоремы 3, т. е.

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_{a,n,s} := \{([\mathscr{E}], \langle\xi\rangle) \mid [\mathscr{E}] \in X(n,s)^*,\ \langle\xi\rangle \in \mathbb{P}(U_{\mathscr{E}}) \\ \subset \mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a))),\ [E_{\mathscr{E},\xi}] \in M_{\mathbb{P}^3}(3; -a, 3, -3a)\}. \end{aligned} \tag{37}$$

Из определения $\widetilde{T}_{a,n,s}$ вытекает существование морфизма $\pi : \widetilde{T}_{a,n,s} \to X(n,s)^*$, $([\mathscr{E}], \langle\xi\rangle) \mapsto [\mathscr{E}]$, такого, что $\widetilde{T}_{a,n,s}$ — плотное открытое подмножество проективного расслоения над $X(n,s)^*$ со слоем $\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)))$ над произвольной точкой $[\mathscr{E}] \in X(n,s)^*$. Отсюда

$$\dim \widetilde{T}_{a,n,s} = \dim X(n,s) + \mathrm{ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)) - 1. \tag{38}$$

Ввиду теоремы 3 определен модулярный морфизм

$$\Phi : \widetilde{T}_{a,n,s} \to M_{\mathbb{P}^3}(3; -a, 3, -3a), \quad ([\mathscr{E}], \langle\xi\rangle) \mapsto [E_{\mathscr{E},\xi}], \tag{39}$$

и пусть

$$\begin{aligned} &\overline{\mathscr{M}}_{a,n,s} - \text{замыкание в } M_{\mathbb{P}^3}(3; -a, 3, -3a) \text{ множества } \Phi(\widetilde{T}_{a,n,s}), \\ &\qquad \text{рассматриваемое как приведенная схема}, \\ &\mathscr{M}_{a,n,s} - \text{максимальное плотное открытое подмножество в } \overline{\mathscr{M}}_{a,n,s}, \\ &\qquad \text{содержащееся в } \Phi(\widetilde{T}_{a,n,s}), \text{ и } T_{a,n,s} := \Phi^{-1}(\mathscr{M}_{a,n,s}). \end{aligned} \tag{40}$$

Из тройки (4) следует, что $\Phi : T_{a,n,s} \to \mathscr{M}_{a,n,s}$ есть композиция открытого вложения и проективного расслоения над $\mathscr{M}_{a,n,s}$ со слоем $\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(E(a)))$ над произвольной точкой $[E] \in \mathscr{M}_{a,n,s}$, причем $T_{a,n,s}$ по определению есть плотное открытое подмножество в $\widetilde{T}_{a,n,s}$. Отсюда и из (38) находим

$$\dim \mathscr{M}_{a,n,s} = \dim X(n,s) + \mathrm{ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)) - \mathrm{h}^0(E(a)). \tag{41}$$

Ниже в теореме 4 находится размерность семейств $\mathscr{M}_{a,n,s}$ для вышеуказанных значений параметров (a,n,s). Для доказательства этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных лемм. В этих леммах предполагается, что пучок E удовлетворяет условиям теоремы 3.

Лемма 2. *Размерность* $d = \mathrm{ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a))$ *принимает следующие значения:*

1) $d = 6 - 2a$ *при* $a \in \{1,2\},\ n = 2,\ s \in \{0,1\}$;
2) $d = 5 - 2a$ *при* $a \in \{1,2\},\ (n,s) = (1,0)$.

Доказательство. По двойственности Серра — Гротендика имеем

$$\mathrm{ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a)) = \mathrm{ext}^2(\mathscr{O}, \mathscr{E}(a-4)) = \mathrm{h}^2(\mathscr{E}(a-4)).$$

Последнее легко вычисляется с помощью точной тройки (2) и [4, табл. 2.8.1, 2.12.2].

Лемма 3. *При* $a = 1$, $(n,s) \in \{(2,1),(2,0),(1,0)\}$ *верны равенства*

$$\mathrm{h}^0(E(1)) = \mathrm{h}^1(E(1)) = 1, \quad \mathrm{h}^2(E(1)) = 0. \tag{42}$$

Доказательство. Рассмотрим точную тройку (2), подкрученную на пучок $\mathscr{O}(1)$:

$$0 \to \mathscr{E}(1) \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(1) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_\ell(n+2-s) \oplus \mathscr{O}_W \to 0. \tag{43}$$

Так как $\mathrm{h}^0(\mathscr{O}_\ell(n+2-s) \oplus \mathscr{O}_W) = n+3$ и согласно [4, табл. 2.8.1, 2.12.2]

$$\mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) = n+2, \quad \mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = \mathrm{h}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) = \mathrm{h}^2(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) = 0,$$

отсюда и из (43) находим

$$\mathrm{h}^1(\mathscr{E}(1)) = \mathrm{h}^0(\mathscr{E}(1)) + 1, \quad \mathrm{h}^2(\mathscr{E}(1)) = 0. \tag{44}$$

Покажем, что для тройки (43) гомоморфизм

$$\mathrm{h}^0(\alpha) : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_\ell(n+2-s) \oplus \mathscr{O}_W)$$

инъективен, откуда будет следовать, что

$$\mathrm{h}^0(\mathscr{E}(1)) = 0, \quad \mathrm{h}^1(\mathscr{E}(1)) = 1, \tag{45}$$

где второе равенство вытекает из первого ввиду (44). Инъективность гомоморфизма $\mathrm{h}^0(\alpha)$, в свою очередь, является следствием инъективности гомоморфизма

$$\mathrm{h}^0(\alpha') : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_\ell(n+2-s)),$$

где α' — композиция

$$\mathscr{E}^{\vee\vee}(1) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_\ell(n+2-s) \oplus \mathscr{O}_W \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathscr{O}_\ell(n+2-s).$$

Для проверки инъективности $\mathrm{h}^0(\alpha')$ заметим, что α' также разлагается в композицию

$$\alpha' : \mathscr{E}^{\vee\vee}(1) \xrightarrow{r} \mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell \xrightarrow{\alpha|_\ell} \mathscr{O}_\ell(n+2-s), \tag{46}$$

где $r = -\otimes \mathscr{O}_\ell$ — морфизм ограничения на прямую ℓ, включающийся в точную тройку

$$0 \to \mathscr{E}^{\vee\vee}|_{\mathbb{P}^2} \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_{\mathbb{P}^2} \xrightarrow{r'} \mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell \to 0,$$

где $\mathbb{P}^2 \supset \ell$ — плоскость такая, что $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}|_{\mathbb{P}^2}) = 0$ (см. (3)). Переходя к когомологиям этой тройки, получаем мономорфизм

$$\mathrm{h}^0(r') : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_{\mathbb{P}^2}) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell).$$

С другой стороны, переходя к когомологиям в точной тройке

$$0 \to \mathscr{E}^{\vee\vee} \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(1) \xrightarrow{r''} \mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_{\mathbb{P}^2} \to 0$$

и учитывая равенство $\mathrm{h}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = 0$ (см. [4, табл. 2.8.1, 2.12.2]), получаем мономорфизм

$$\mathrm{h}^0(r'') : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_{\mathbb{P}^2}).$$

Поскольку $r = r' \circ r''$, то $\mathrm{h}^0(r) = \mathrm{h}^0(r') \circ \mathrm{h}^0(r'')$, откуда следует инъективность гомоморфизма

$$\mathrm{h}^0(r) : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell). \tag{47}$$

Далее, поскольку $\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell \cong \mathscr{O}_\ell(1)^{\oplus 2}$ ввиду (3), морфизм $\alpha|_\ell$ включается в точную тройку

$$0 \to \mathscr{O}_\ell(s-n) \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell \xrightarrow{\alpha|_\ell} \mathscr{O}_\ell(n+2-s) \to 0.$$

Так как в условиях леммы $\mathrm{h}^0(\mathscr{O}_\ell(s-n)) = 0$, из последней тройки следует инъективность гомоморфизма

$$\mathrm{h}^0(\alpha|_\ell) : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(1)|_\ell) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_\ell(n+2-s)).$$

Отсюда и из (46), (47) получаем инъективность $\mathrm{h}^0(\alpha')$.

Поскольку $a = 1$, имеем точную тройку (4), подкрученную на $\mathscr{O}(1)$: $0 \to \mathscr{O} \to E(1) \to \mathscr{E}(1) \to 0$. Переходя к когомологиям этой тройки и учитывая (44), (45) и равенства $\mathrm{h}^0(\mathscr{O}) = 1$, $\mathrm{h}^i(\mathscr{O}) = 0,\ i \geq 1$, получаем (42).

Лемма 4. *При* $a = 2$, $(n, s) \in \{(2,1),(2,0)\}$ *верны равенства*

$$\mathrm{h}^0(E(2)) = 9, \quad \mathrm{h}^1(E(2)) = 0. \tag{48}$$

Доказательство. Для $a = 2$ рассмотрим точную тройку (3), подкрученную на $\mathscr{O}(2)$:

$$0 \to \mathscr{E}(2) \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(2) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{O}_\ell(n+3-s) \oplus \mathscr{O}_W \to 0. \tag{49}$$

Покажем, что для тройки (49) гомоморфизм

$$\mathrm{h}^0(\alpha) : \mathrm{H}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}(2)) \to \mathrm{H}^0(\mathscr{O}_\ell(n+3-s) \oplus \mathscr{O}_W)$$

сюръективен. Так как в условиях леммы $\mathrm{h}^0(\mathscr{O}_\ell(n+3-s) \oplus \mathscr{O}_W) = 6$, и согласно [4, табл. 2.1214.2] имеем равенства $\mathrm{h}^0(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = 14$, $\mathrm{h}^1(\mathscr{E}^{\vee\vee}) = 0$, то отсюда и из (49) будет следовать, что

$$\mathrm{h}^0(\mathscr{E}(2)) = 8, \quad \mathrm{h}^1(\mathscr{E}(2)) = 0. \tag{50}$$

Для доказательства сюръективности $\mathrm{h}^0(\alpha)$ воспользуемся точной тройкой

$$0 \to \mathscr{O}^{\oplus 2} \to \mathscr{O}(1)^{\oplus 4} \xrightarrow{\beta} \mathscr{E}^{\vee\vee}(2) \to 0, \tag{51}$$

верной для пучка $[\mathscr{E}^{\vee\vee}] \in R_{\mathbb{P}^3}(2;0,2,4)^*$ согласно [4, лемма 2.9]. Ограничивая эту тройку на подсхему $\ell \sqcup W$ в $\mathbb{P}^3$, получаем точную тройку

$$0 \to \mathscr{O}_\ell^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}_W^{\oplus 2} \to \mathscr{O}_\ell(1)^{\oplus 4} \oplus \mathscr{O}_W^{\oplus 4} \xrightarrow{\beta|_{\ell \sqcup W}} \mathscr{O}_\ell(2)^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}_W^{\oplus 2} \to 0, \tag{52}$$

а также имеем эпиморфизм ограничения на $\ell \sqcup W$:

$$r : \mathscr{O}(1)^{\oplus 4} \twoheadrightarrow \mathscr{O}_\ell(1)^{\oplus 4} \oplus \mathscr{O}_W^{\oplus 4} \tag{53}$$

и точную тройку

$$0 \to \mathscr{O}_\ell(s-n+1) \oplus \mathscr{O}_W \to \mathscr{O}_\ell(2)^{\oplus 2} \oplus \mathscr{O}_W^{\oplus 2} \xrightarrow{\alpha|_{\ell \sqcup W}} \mathscr{O}_\ell(n+3-s) \oplus \mathscr{O}_W \to 0. \tag{54}$$

Из (49) и (51)–(53) следует равенство композиций морфизмов $\alpha \circ \beta = \alpha|_{\ell \sqcup W} \circ \beta|_{\ell \sqcup W} \circ r$ и соответствующих гомоморфизмов в сечениях:

$$\mathrm{h}^0(\alpha) \circ \mathrm{h}^0(\beta) = \mathrm{h}^0(\alpha|_{\ell \sqcup W}) \circ \mathrm{h}^0(\beta|_{\ell \sqcup W}) \circ \mathrm{h}^0(r). \tag{55}$$

Переходя к сечениям в (51)–(54), получаем сюръективность гомоморфизмов $\mathrm{h}^0(\beta)$, $\mathrm{h}^0(\beta|_{\ell \sqcup W})$, $\mathrm{h}^0(r)$ и $\mathrm{h}^0(\alpha|_{\ell \sqcup W})$. Отсюда и из (55) вытекает требуемая сюръективность гомоморфизма $\mathrm{h}^0(\alpha)$.

Для $a = 2$ рассмотрим точную тройку (4), подкрученную на $\mathscr{O}(2)$: $0 \to \mathscr{O} \to E(2) \to \mathscr{E}(2) \to 0$. Переходя к когомологиям этой тройки и учитывая (50), получаем (48).

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *и обозначениях* (3) *и* (38)–(40) *семейства* $\mathscr{M}_{a,n,s}$ *имеют следующие размерности:* $\dim \mathscr{M}_{1,2,1} = 29$, $\dim \mathscr{M}_{1,2,0} = 27$, $\dim \mathscr{M}_{1,1,0} = 24$, $\dim \mathscr{M}_{2,2,1} = 19$, $\dim \mathscr{M}_{2,2,0} = 17$.

Доказательство. Согласно [1, теорема 3] размерности многообразий $X(2,1)$, $X(2,0)$ и $X(1,0)$ равны соответственно 26, 24 и 22. Подставляя в формулу (41) эти значения вместе с числами $\mathrm{ext}^1(\mathscr{E}, \mathscr{O}(-a))$ и $\mathrm{h}^0(E(a))$, найденными в леммах 2, 3 и 4, получаем искомые размерности семейств $\mathscr{M}_{a,n,s}$.

§ 5. Семейства $\mathscr{M}_{a,n,s}$ и компоненты $\overline{\mathscr{M}}_{a,n,s}$ пространства модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3,-a,3,-3a)$

В этом параграфе доказан основной результат статьи — теорема 5 о том, что семейства $\mathscr{M}_{2,2,1}$ и $\mathscr{M}_{2,2,0}$ из теоремы 4 являются гладкими открытыми подмножествами неприводимых компонент $\overline{\mathscr{M}}_{2,2,1}$ и $\overline{\mathscr{M}}_{2,2,0}$ схемы модулей Гизекера — Маруямы $M_{\mathbb{P}^3}(3,-2,3,-6)$. При этом все пучки из $\mathscr{M}_{2,2,1}$ имеют особенности смешанной размерности, а все пучки из $\mathscr{M}_{2,2,0}$ имеют особенности чистой размерности 1. Кроме того, в этой теореме доказаны утверждения об остальных семействах из теоремы 4. Перед доказательством этой теоремы приведем следующую вспомогательную лемму.

Лемма 5. *Для* $[\mathscr{E}] \in X(n,s)^*$ *верны равенства*

$$\mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E}) = \dim X(n,s) = \begin{cases} 26, & (n,s) = (2,1), \\ 24, & (n,s) = (2,0), \\ 22, & (n,s) = (1,0), \end{cases}$$

$$\mathrm{ext}^2(\mathscr{E},\mathscr{E}) = \begin{cases} 5, & (n,s) = (2,1), \\ 3, & (n,s) = (2,0), \\ 1, & (n,s) = (1,0). \end{cases}$$

Доказательство. Значения $\mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})$ вычислены в [1, теорема 3]. Далее, для любого стабильного пучка $\mathscr{E}$ ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ имеем

$$\mathrm{ext}^2(\mathscr{E},\mathscr{E}) = 2c_1(\mathscr{E})^2 - 8c_2(\mathscr{E}) + 3 + \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})$$

(см. [3, предложение 3.4]). Поскольку $[\mathscr{E}] \in M_{\mathbb{P}^3}(2;0,3,0)$, подставляя в это равенство классы Черна $c_1(\mathscr{E}) = 0$ и $c_2(\mathscr{E}) = 3$ и размерности $\mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})$, получаем требуемые значения $\mathrm{ext}^2(\mathscr{E},\mathscr{E})$.

Перейдем к доказательству основного результата настоящей статьи.

Теорема 5. (i) *Многообразия $\mathscr{M}_{2,2,1}$ и $\mathscr{M}_{2,2,0}$ являются гладкими открытыми подмножествами неприводимых приведенных в общей точке компонент $\overline{\mathscr{M}}_{2,2,1}$ и $\overline{\mathscr{M}}_{2,2,0}$ схемы модулей Гизекера — Маруямы $M_{\mathbb{P}^3}(3;-2,3,-6)$, имеющих размерность 19 и 17 соответственно.*

(ii) *Многообразия $\mathscr{M}_{1,2,1}$, $\mathscr{M}_{1,2,0}$ и $\mathscr{M}_{1,1,0}$ имеют коразмерность ≤ 1 в содержащих их неприводимых компонентах схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-1,3,-3)$.*

(iii) *Все пучки E из $\mathscr{M}_{2,2,1}$ и $\mathscr{M}_{1,2,1}$ являются стабильными пучками ранга три на $\mathbb{P}^3$ с особенностями смешанной размерности вида $\mathrm{Sing}(E) = \ell \sqcup W$, где ℓ — прямая, а W — точка. В частности, общие пучки в компоненте $\overline{\mathscr{M}} := \overline{\mathscr{M}}_{2,2,1}$ имеют особенности смешанной размерности.*

(iv) *Общие пучки в компоненте $\overline{\mathscr{M}}_{2,2,0}$ и оставшихся двух семействах $\overline{\mathscr{M}}_{1,2,0}$ и $\overline{\mathscr{M}}_{1,1,0}$ являются стабильными пучками ранга три на $\mathbb{P}^3$ с особенностями чистой размерности 1 вдоль прямой.*

Доказательство. (i) Имеем $(a,n,s) \in \{(2,2,1),(2,2,0)\}$. Для доказательства требуемого утверждения достаточно проверить для произвольного пучка $[E] \in \mathscr{M}_{a,n,s}$ равенство

$$\dim \mathscr{M}_{a,n,s} = \dim T_{[E]} M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a), \tag{56}$$

где $T_{[E]} M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a)$ — касательное по Зарискому пространство к схеме модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a)$ в точке $[E]$. Так как по теореме 3 пучок $[E] \in \mathscr{M}_{a,n,s}$ стабилен, то

$$T_{[E]} M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a) = \mathrm{Ext}^1(E,E) \tag{57}$$

(см. [5, гл. 4]). Поэтому в силу (56) достаточно проверить равенства

$$\mathrm{ext}^1(E,E) = \dim \mathscr{M}_{a,n,s} \tag{58}$$

для вышеуказанных значений (a,n,s), где правые части равенств (58) даются теоремой 4. Заметим, что поскольку $\mathscr{M}_{a,n,s} \subset M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a)$, согласно (57) имеем $\dim \mathscr{M}_{a,n,s} \le \dim T_{[E]} M_{\mathbb{P}^3}(3;-a,3,-3a) = \mathrm{ext}^1(E,E)$. Поэтому проверка (58) равносильна проверке неравенства

$$\mathrm{ext}^1(E,E) \le \dim \mathscr{M}_{a,n,s}. \tag{59}$$

Покажем, что

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},E) = 0. \tag{60}$$

Допустим, что существует ненулевой морфизм $0 \ne f \in \mathrm{Hom}(\mathscr{E},E)$, и рассмотрим тройку (4) для $a = 2$: $0 \to \mathscr{O}(-2) \xrightarrow{g} E \xrightarrow{e} \mathscr{E} \to 0$. Напомним, что пучок $[\mathscr{E}] \in X(n,s)^*$ стабилен (см. замечание после (4)). Поэтому если $e \circ f = 0$, то $\mathrm{im}\, f \subset \mathrm{im}\, g \cong \mathscr{O}(-2)$ вопреки стабильности $\mathscr{E}$, а если $e \circ f \ne 0$, то ввиду стабильности $\mathscr{E}$ получаем, что $e \circ f$ — автоморфизм пучка $\mathscr{E}$, пропорциональный тождественному, вопреки нетривиальности расширения (4).

Применим функтор $\operatorname{Hom}(-,E)$ к (4); учитывая (60) и равенства

$$\operatorname{Ext}^1(\mathscr{O}(-2),E)=\mathrm{H}^1(E(2))=0$$

(см. лемму 4) и

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{O}(-2),E)=\mathrm{H}^0(E(2)),$$

получим длинную точную последовательность:

$$0\to\operatorname{Hom}(E,E)\to\mathrm{H}^0(E(2))\to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},E)\to\operatorname{Ext}^1(E,E)\to 0. \tag{61}$$

Так как по теореме 3 пучок E стабилен, он простой, т. е. $\hom(E,E)=1$. Отсюда, из (61) и равенства $\mathrm{h}^0(E(2))=9$ (лемма 4) следует

$$\operatorname{ext}^1(E,E)=\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},E)-8. \tag{62}$$

По двойственности Серра — Гротендика имеем $\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{O}(-2))=\mathrm{H}^2(\mathscr{E}(-2))^\vee$. Поэтому применение к тройке (4) при $a=2$ функтора $\operatorname{Hom}(\mathscr{E},-)$ с учетом (60) дает:

$$0\to\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\to\mathrm{H}^2(\mathscr{E}(-2))^\vee\to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},E)\to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})\to\dots. \tag{63}$$

Переходя к когомологиям тройки (2), подкрученной на $\mathscr{O}(-2)$, ввиду [4, табл. 2.12.2] находим $\mathrm{h}^2(\mathscr{E}(-2))=\mathrm{h}^2(\mathscr{E}^{\vee\vee}(-2))=2$. Отсюда, из (62), (63) и равенства $\hom(\mathscr{E},\mathscr{E})=1$ ($\mathscr{E}$ стабильно) вытекает неравенство

$$\operatorname{ext}^1(E,E)=\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},E)-8\le\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})+\mathrm{h}^2(\mathscr{E}(-2))-9=\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})-7.$$

Это неравенство вместе с равенствами $\dim\mathscr{M}_{2,2,1}=19$ и $\dim\mathscr{M}_{2,2,0}=17$ (теорема 4) и леммой 5 дает требуемое неравенство (59) для $(a,n,s)\in\{(2,2,1),(2,2,0)\}$.

(ii) Пусть $(a,n,s)\in\{(1,2,1),(1,2,0)\}$. В этом случае, применяя функтор $\operatorname{Hom}(\mathscr{E},-)$ к тройке (4), с учетом условия $a=1$ получаем точную последовательность:

$$\begin{aligned}0\to\operatorname{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{E})\xrightarrow{\partial}\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1))\to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},E)&\\ \to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})\to\operatorname{Ext}^2(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1)).&\end{aligned} \tag{64}$$

Здесь связывающий гомоморфизм ∂ инъективен, поскольку $\hom(\mathscr{E},\mathscr{E})=1$ ввиду стабильности $\mathscr{E}$, а $\xi=\partial(1)$ — нетривиальное расширение (4). Из (64) и леммы 2.1 находим

$$\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},E)\le\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})+3. \tag{65}$$

Применяя к тройке (4) функтор $\operatorname{Hom}(-,E)$, имеем точную последовательность

$$\dots\to\operatorname{Ext}^1(\mathscr{E},E)\to\operatorname{Ext}^1(E,E)\to\mathrm{H}^1(E(1))\to\dots. \tag{66}$$

Из (65), (66) и леммы 3 следует, что

$$\operatorname{ext}^1(E,E)\le\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},E)+\mathrm{h}^1(E(1))=\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},E)+1\le\operatorname{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E})+4. \tag{67}$$

С другой стороны, по теореме 4

$$\dim\mathscr{M}_{1,2,1}=29,\quad \dim\mathscr{M}_{1,2,0}=27,$$

так что последнее неравенство вместе с леммой 5 показывает, что

$$\dim\mathscr{M}_{1,2,s}\ge\operatorname{ext}^1(E,E)-1,\quad s\in\{0,1\}. \tag{68}$$

Это неравенство вместе с равенством (57) показывает, что многообразия $\mathscr{M}_{1,2,1}$ и $\mathscr{M}_{1,2,0}$ имеют коразмерность ≤ 1 в содержащих их неприводимых компонентах схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-1,3,-3)$, что и требовалось.

Пусть теперь $(a,n,s)=(1,1,0)$. В этом случае тройка (2), подкрученная на $\mathscr{O}(-3)$, принимает вид

$$0 \to \mathscr{E}(-3) \to \mathscr{E}^{\vee\vee}(-3) \to \mathscr{O}_{\ell}(-1) \to 0.$$

Из когомологий этой тройки и [4, табл. 2.8.1] имеем

$$\mathrm{h}^1(\mathscr{E}(-3)) = \mathrm{h}^3(\mathscr{E}(-3)) = 0, \quad \mathrm{h}^2(\mathscr{E}(-3)) = 3.$$

Эти равенства вместе с двойственностью Серра — Гротендика

$$\mathrm{Ext}^i(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1)) = \mathrm{H}^{3-i}(\mathscr{E}(-3)), \quad i \geq 0,$$

дают:

$$\mathrm{Hom}(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1)) = \mathrm{Ext}^2(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1)) = 0, \quad \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{O}(-1)) = 3. \tag{69}$$

Точная последовательность (64) вместе с (69) и леммой 5 приводит к равенствам

$$\mathrm{ext}^1(\mathscr{E},E) = \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E}) + 3 - 1 = 22 + 2 = 24. \tag{70}$$

Поскольку тройка (66) по-прежнему верна в настоящем случае, то, как и в (67), получаем

$$\mathrm{ext}^1(E,E) \leq \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},E) + \mathrm{h}^1(E(1)) = \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},E) + 1 = \mathrm{ext}^1(\mathscr{E},\mathscr{E}) + 3 = 25.$$

Так как $\dim \mathscr{M}_{1,1,0} = 24$ по теореме 4, как и в (68), верно неравенство $\dim \mathscr{M}_{1,2,s} \geq \mathrm{ext}^1(E,E) - 1$. Тем самым многообразие $\mathscr{M}_{1,1,0}$ имеет коразмерность ≤ 1 в содержащей его неприводимой компоненте схемы модулей $M_{\mathbb{P}^3}(3;-1,3,-3)$.

(iii), (iv). Эти утверждения непосредственно следуют из утверждения (i) и определений (2), (37) и (40).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ivanov A. N., Tikhomirov A. S.* Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on $\mathbb{P}^3$ // J. Geometry Phys. 2018. V. 129. P. 90–98.
2. *Almeida C., Jardim M., Tikhomirov A. S.* Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on projective space // Adv. Math. 2022. V. 402. P. 1–64.
3. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
4. *Chang M. C.* Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ // Trans. Am. Math. Soc. 1984. V. 284, N 1. P. 57–89.
5. *Huybrechts D., Lehn M.* The geometry of moduli spaces of sheaves. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2010.
6. *Okonek Ch., Schneider M., Spindler H.* Vector bundles on complex projective. Switzerland: Birkhäuser, 1988.
7. *Hartshorne R.* Algebraic geometry. Berlin: Springer-Verl., 1977.

Поступила в редакцию 21 апреля 2024 г.
После доработки 7 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Ланских Ирина Юрьевна
(ORCID 0009-0004-8094-6089), Тихомиров Александр Сергеевич (ORCID 0000-0003-3647-0162)
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048
`iyulanskikh@edu.hse.ru`, `astikhomirov@mail.ru`

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 512.554

О КЛАССИФИКАЦИИ ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ 10–МЕРНЫХ СУПЕРАЛГЕБР ДИАГОНАЛЬНОГО ТИПА

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Простая правоальтернативная сингулярная супералгебра является расширенным дублем. Минимальная размерность расширенного дубля, не являющегося линейной супералгеброй, равна 10. В работе рассматриваются 10-мерные расширенные дубли диагонального типа. Доказано, что всякий 10-мерный расширенный дубль диагонального типа над алгебраически замкнутым полем характеристики не 2, 3 имеет структуру супералгебры, зависящей от двух параметров. Если основное поле является полем комплексных чисел, то доказано, что семейство простых супералгебр при положительных действительных значениях параметров не содержит изоморфных супералгебр.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.109

Ключевые слова: правоальтернативная супералгебра, сингулярная супералгебра, расширенный дубль, переключатель, супералгебра диагонального типа.

Введение

Супералгеброй $B = B_0 \oplus B_1$ называется $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра, в которой $B_0 \neq 0, B_1 \neq 0$ и справедливы включения $B_i \cdot B_j \subseteq B_{i+j (\mathrm{mod}\ 2)}$ для любых $i, j = 0, 1$. Идеал I супералгебры $B = B_0 \oplus B_1$ называется *градуированным*, если $I = (I \cap B_0) \oplus (I \cap B_1)$. Супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ называется *простой*, если $B^2 \neq 0$ и B не имеет собственных градуированных идеалов.

Супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ является *правоальтернативной* (см. [1]), если для однородных элементов $x, y, z \in B_0 \cup B_1$ выполнено тождество

$$(x, y, z) + (-1)^{|y||z|}(x, z, y) = 0, \tag{1}$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z, $|x|$ — четность однородного элемента $x \in B_0 \cup B_1$, т. е. $|x| = i$, если $x \in B_i$ $(i = 0, 1)$.

Простая правоальтернативная супералгебра называется *сингулярной*, если ее четная часть имеет нулевое умножение. Минимальная размерность сингулярной супералгебры равна 5. Первый пример сингулярной супералгебры был указан в [2]; эта алгебра обозначается через $B_{2|3}$. В [3] классифицированы 5-мерные сингулярные супералгебры; в [4] доказано, что не существует 6-мерных сингулярных супералгебр.

Следуя [5], напомним понятия алгебраически порожденной и линейно порожденной сингулярных супералгебр.

Определение. Пусть $SW(B) = \{q \in B_1 \mid qB = 0\}$ — пространство нечетных левых аннуляторов, элементы из $SW(B)$ называются *переключателями* (switch). Размерность пространства $SW(B)$ называется *индексом* супералгебры B и обозначается через $\operatorname{ind}(B)$.

Определение. Переключатель p называется *невырожденным*, если $ap = 0$ влечет $a = 0$ для любого $a \in B_0$.

Определение. Сингулярная супералгебра B называется *алгебраически порожденной*, если она порождается множеством $B_0 \cup SW(B)$.

Частным случаем алгебраически порожденных супералгебр являются линейно порожденные супералгебры.

Определение. Сингулярная супералгебра $B = B_0 \oplus B_1$ над полем Φ называется *линейно порожденной* (или *линейной над четной частью*), если $B_1 = \Phi p \oplus B_0 p$ для некоторого переключателя p.

В [5] были классифицированы линейно порожденные супералгебры над алгебраически замкнутым полем, а также описаны их группы автоморфизмов и супералгебры дифференцирований. Размерность линейно порожденной супералгебры сравнима с 1 по модулю 4.

Определение. Сингулярная супералгебра B называется *супералгеброй с невырожденным переключателем*, если она порождается четной частью B_0 и невырожденным переключателем p.

В [6] было введено понятие расширенного дубля $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ (см. разд. 1.3) и доказано, что всякая конечномерная сингулярная супералгебра с невырожденным переключателем является расширенным дублем.

Наконец, из работ [7, 8] вытекает, что всякая конечномерная сингулярная супералгебра является расширенным дублем. Расширенный дубль индекса 1 является линейно порожденной супералгеброй. Кроме того, в [7] перечислены размерности расширенных дублей. Минимальная размерность расширенного дубля индекса ≥ 2 равна 10.

В данной работе изучаются расширенные дубли $B = A \oplus M$ размерности 10. Супералгебра B содержит невырожденный переключатель p такой, что $D = R_p^2$. Спектр $\Lambda_0(D)$ оператора D на четной части A имеет либо 2, либо 4 значения. Случай $|\Lambda_0(D)| = 4$ сводится к случаю $|\Lambda_0(D)| = 2$ (см. § 5).

Итак, допустим, что $|\Lambda_0(D)| = 2$. Без ограничения общности можно считать, что $\Lambda_0(D) = \{\pm 1\}$.

Пусть p — невырожденный переключатель в B. Тогда всякий нечетный элемент x определяет линейный оператор ψ_x, действующий на четной части A по правилу:

$$a^{\psi_x} = a', \text{ если } ax = a'p.$$

Определение. Пусть сингулярная супералгебра B размерности 10 имеет невырожденный переключатель p такой, что $\Lambda_0\big(R_p^2\big) = \{\pm 1\}$. Будем говорить, что B имеет *диагональный* тип, если в ней найдется ненулевой вырожденный переключатель x такой, что оператор ψ_x имеет диагональную форму (в некотором базисе); в противном случае будем говорить, что супералгебра B имеет *жорданов* тип.

В данной работе рассматриваются 10-мерные расширенные дубли диагонального типа. Работа состоит из введения и пяти параграфов. В § 1 приведены необходимые известные результаты.

В § 2 доказан ряд вспомогательных общих результатов о 10-мерных расширенных дублях. В частности, обсуждается взаимосвязь между жордановыми формами операторов D и ψ_x, действующими на четной части. На самом деле действия операторов D и ψ_x на четной части A полностью определены их действиями на весовом пространстве A_1 оператора D, отвечающем собственному значению 1. Кроме того, оказалось, что не существует супералгебр, в которых на A_1 оператор D является жордановой клеткой, а вырожденный оператор ψ_x диагонален. Значит, в супералгебре диагонального типа все ненулевые весовые векторы собственные.

В § 3 вводится понятие канонического базиса и доказывается, что всякий 10-мерный расширенный дубль диагонального типа обладает каноническим базисом.

В § 4 доказано, что 10-мерный расширенный дубль диагонального типа изоморфен супералгебре вида $BD(\mu, \nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$. Доказано также, что если основное поле является полем комплексных чисел, то семейство алгебр вида $BD(\mu, \nu)$ содержит бесконечно много попарно неизоморфных алгебр.

В § 5 доказано, что если в расширенном 10-мерном дубле $B = B(\dots, D, \dots)$ спектр $\Lambda_0(D)$ оператора D на четной части A имеет 4 значения, то в нем можно выбрать невырожденный переключатель q так, что $\Lambda_0\big(R_q^2\big) = \{\pm 1\}$, причем все ненулевые весовые векторы оператора R_q^2 являются собственными и супералгебра B имеет диагональный тип.

§ 1. Известные результаты

1.1. Обозначения и известные факты. Всюду в работе используются следующие обозначения:

Φ — алгебраически замкнутое поле характеристики, отличной от 2 и 3;

$\Phi^\times$ — множество ненулевых скаляров поля Φ;

$B = A \oplus M$ — супералгебра над полем Φ с четной частью A и нечетной частью M; предполагается, что B является расширенным дублем с невырожденным переключателем p.

Как обычно, если $r, s \in B$, то $[r, s] = rs - sr$ — коммутатор элементов r, s; $r \circ s = rs + sr$ — их йорданово произведение.

Образ элемента a при отображении φ обозначается через $a\varphi$ или a^φ, т. е. используется правая запись для обозначения образов элементов.

Через R_a и L_a обозначаются операторы правого и левого умножений на элемент a:

$$xR_a = xa, \quad xL_a = ax.$$

Подпространство, порожденное множеством X, обозначается через $\langle X \rangle$.

Если не оговорено противное, то латинские буквы, возможно с индексами, обозначают однородные элементы супералгебры B:

$$a, b, c, e \in A, \quad x, y, z \in M, \quad q, r, s \in A \cup M.$$

Супер-тождество (1) равносильно следующим двум соотношениям:

$$(ra)s + (rs)a = r(a \circ s), \tag{2}$$

$$(qx)y - (qy)x = q[x, y]. \tag{3}$$

Считая, что супералгебра $B = A \oplus M$ является алгебраически порожденной, положим

$$P_0 = SW(B), \quad P_\nu = \{pL_{a_1}L_{a_2}\dots L_{a_\nu} \mid p \in P_0,\ a_i \in A,\ \nu \geq 1\},$$

$$X = \sum_{m\geq 0} \langle P_{2m} \rangle; \quad X' = AX = \sum_{m\geq 0} \langle P_{2m+1} \rangle.$$

Известно [5], что

$$M = X + X', \quad X'X = A \tag{4}$$

и для любого $a \in A$ выполнены равенства

$$X' \circ A = a(aX) = A^2 = XB = X'^2 = 0. \tag{5}$$

Лемма 1.1. *Если $a, b \in A$, $x, y, z \in X$, то*

(а) *элементы $(ax)y$ и $(ax \cdot y)(bz)$ симметричны как по нечетным переменным x, y, z, так и по четным переменным a, b;*

(б) *элемент $a(bx)$ кососимметричен по четным переменным a, b.*

Эта лемма доказана в [5] (см. леммы 4.2 и 4.4).

Лемма 1.2. *Пусть $a \in A$, $x \in X$, $x' \in X'$. Тогда выполнены следующие условия «невырожденности» произведения:*

(а) *если $aX' = 0$, то $a = 0$;*

(б) *если $aX = 0$, то $a = 0$;*

(в) *если $x'X = 0$, то $x' = 0$;*

(г) *если $Ax = 0$, то $x = 0$.*

Эта лемма вытекает из [6, лемма 2.1].

Лемма 1.3. *Если $p \in M$ — невырожденный переключатель, то оператор $D = R_p^2$ невырожденный на A. Кроме того, справедливы равенства*

$$X' = Ap, \quad X = A(Ap).$$

Эта лемма вытекает из [6, лемма 2.4].

1.2. Весовые подпространства дифференцирований. Пусть C — произвольная алгебра над полем Φ, D — ее дифференцирование и 1_C — тождественное отображение множества C на себя. Обозначим через $\Lambda(D)$ спектр оператора D, т. е. набор его собственных значений. Для каждого $\alpha \in \Lambda(D)$ обозначим, как обычно, через

$$C_\alpha = \{c \in C \mid (\exists n = n(c) \in \mathbb{N}) \mid c(D - \alpha \cdot 1_C)^n = 0\}$$

весовое подпространство оператора D, отвечающее его собственному значению α. Поскольку $\Lambda(D) \subseteq \Phi$, оператор D может быть приведен к жордановой нормальной форме, т. е. справедливы следующие утверждения (см. [9, 10]):

(а) $C_\alpha \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Lambda(D)$;

(б) в пространстве $C_\alpha \neq 0$ можно выбрать базис $E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup \dots$ (набор $E^{(i)} = \{e_1^{(i)}, \dots, e_{k_i}^{(i)}\}$ называется *базисным блоком длины k_i*) так, что подпространства $\langle E^{(i)} \rangle$ инвариантны относительно D и матрица оператора D относительно базисного блока $E^{(i)}$ является жордановой клеткой;

(в) C является прямой суммой весовых подпространств C_α;

(г) $C_\alpha C_\beta \subseteq C_{\alpha+\beta}$, если $\alpha + \beta \in \Lambda(D)$; $C_\alpha C_\beta = 0$, если $\alpha + \beta \notin \Lambda(D)$.

Свойства (а)–(г) будут использоваться далее без дополнительных ссылок.

Заметим, что оператор $R_x R_y$, где $x, y \in X$, является четным дифференцированием супералгебры $B = A \oplus M$ (см. [6, п. 2.3]).

Лемма 1.4. *Пусть p — невырожденный переключатель. Тогда спектр $\Lambda_0(D)$ оператора $D = R_p^2$ на четной части состоит из ненулевых попарно различных чисел $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$; спектр $\Lambda_1(D)$ оператора D на нечетной части состоит из чисел $0, \pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_m$.*

Эта лемма о спектре вытекает из [6, лемма 2.3].

1.3. Расширенный дубль. Понятие расширенного дубля введено в [6]. Пусть A и X — конечномерные векторные пространства, причем

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ — базис } X, \quad p = \sum_{i=1}^{n} x_i;$$

$D : A \to A$ — невырожденный линейный оператор;

$\Psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ — набор попарно перестановочных линейных операторов $\psi_i : A \to A$ таких, что $\psi_1 + \ldots + \psi_n = 1_A$;

$\sigma : A \otimes A \to \mathrm{End}_\Phi(X)$ — линейное отображение такое, что

$$(a \otimes b)^\sigma = -(b \otimes a)^\sigma, \quad (a^{\psi_i D} \otimes b)^\sigma = (b^{\psi_i D} \otimes a)^\sigma, \quad x_i^{(a\otimes b)^\sigma} = p^{(a \otimes b^{\psi_i})^\sigma},$$

где a^φ — образ элемента a при отображении φ. Допустим, что пространство X не содержит собственных $(A \otimes A)^\sigma$-инвариантных подпространств.

Пусть $[A]$ — линейная копия пространства A. Введем градуировку на пространстве B:

$$B = B_0 \oplus B_1, \text{ где } B_0 = A, \ B_1 = X \oplus [A].$$

Определим произведение однородных элементов из $B_0 \cup B_1$:

(а) $a \cdot x_i = [a^{\psi_i}], \quad [a] \cdot x_i = a^{\psi_i D}$,

(б) $a \cdot [b] = -[b] \cdot a = p^{(a\otimes b)^\sigma}$,

(в) остальные произведения базисных элементов нулевые.

Построенная супералгебра называется *расширенным дублем* (алгебры A с нулевым умножением) и обозначается через $B(A, X, D, \sigma, \Psi)$.

Заметим, что $X' := AX = [A]$, $AX' \subseteq X$ и выполнены равенства (5). Кроме того, известно, что

$$ap = [a], \quad D = R_p^2, \quad p^{(a\otimes b)^\sigma} = -pL_aL_b.$$

Обозначим через ∇ подалгебру в $\mathrm{End}_\Phi(X)$, порожденную множеством операторов $\{L_aL_b \mid a, b \in A\}$ и тождественным отображением 1_A. Заметим, что алгебра ∇ порождается множеством $(A\otimes A)^\sigma \cup \{1_A\}$. Известно, что расширенный дубль $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ является сингулярной супералгеброй с невырожденным переключателем тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$.

Заметим, что 10-мерный расширенный дубль не является линейно порожденной супералгеброй; более того, его индекс равен 2.

§ 2. Некоторые результаты без ограничений на жорданову форму операторов D и ψ

В данной работе рассматриваются только сингулярные супералгебры с невырожденным переключателем p; $D = R_p^2$; кроме того, если не оговорено противное, предполагается, что

$$\Lambda_0(D) = \{\pm 1\}, \text{ т. е. } A = A_1 \oplus A_{-1},$$

где A_1, A_{-1} — весовые подпространства в A оператора D.

Определение. Если $x \in X, a \in A$, то положим $a^{\psi_x} = a'$, если $ax = a'p$.

В силу невырожденности переключателя p отображение ψ_x определено корректно.

Определение. Элемент $0 \neq x \in X$ называется *вырожденным*, если оператор ψ_x вырожденный на A_1.

2.1. Предварительные леммы.

Лемма 2.1. *Справедливо следующее условие «инвариантности»:*

$$a^{\psi}(bp) = a(b^{\psi}p)$$

для $\psi = \psi_x$ *и любых* $a, b \in A$.

Доказательство. В силу леммы 1.1(б) имеем

$$a^{\psi}(bp) = -b(a^{\psi}p) = -b(ax) = a(bx) = a(b^{\psi}p).$$

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Если* $a_{-1} \cdot A_1 p = 0$, *то* $a_{-1} = 0$. *Аналогично если* $a_1 \cdot A_{-1}p = 0$, *то* $a_1 = 0$.

Доказательство. Если v — ненулевой весовой вектор из множества $a_{-1} \cdot A_{-1}p$, то его собственное значение относительно оператора D равно -2. Поскольку $-2 \notin \Lambda_1(D)$, то $a_{-1} \cdot A_{-1}p = 0$. Тогда

$$0 = a_{-1} \cdot Ap = a_{-1}X'$$

и $a_{-1} = 0$ в силу леммы 1.2(а). Лемма доказана.

2.2. Вырожденность оператора ψ на A_1.

Лемма 2.3. *Если* $0 \neq x \in X$, *то* $\psi_x \neq 0$ *на каждой компоненте* A_1 *и* A_{-1}.

Доказательство. Допустим, что $A_1 x = 0$. Тогда

$$A_{\varepsilon} \cdot A_{\varepsilon'} x = 0, \quad \varepsilon, \varepsilon' = \pm 1,$$

откуда следует, что подпространство Φx инвариантно относительно алгебры ∇, что противоречит определению расширенного дубля. Значит, $\psi_x \neq 0$ на компоненте A_1. Аналогично проверяется, что $\psi_x \neq 0$ на A_{-1}. Лемма доказана.

Лемма 2.4. *Пусть* $B = B(A, X, D, \sigma, \Psi)$ — *расширенный дубль с невырожденным переключателем* p *произвольной размерности и* $\mathrm{ind}(B) \geq 2$. *Тогда существует* $0 \neq x \in X$ *такой, что отображение* ψ_x *вырожденное на* A_1, *т. е.* $(\exists 0 \neq a_1 \in A_1)\ a_1 x = 0$.

Доказательство. Пусть $q \in X$, $q \notin \Phi p$. Заметим, что $A_1 X \subseteq A_1 p$, и рассмотрим отображение $R_{\lambda p - q} : A_1 \to A_1 p$, где $\lambda \in \Phi$.

Пусть $(v_1, \ldots, v_k)$ — базис A_1; тогда $(v_1 p, \ldots, v_k p)$ — базис $A_1 p$ и

$$v_i q = \sum_j \theta_{ij} v_j p,$$

т. е. $\Theta = (\theta_{ij})$ — матрица линейного отображения $R_q : A_1 \to A_1 p$ относительно пары базисов $(v_1, \ldots, v_k)$ и $(v_1 p, \ldots, v_k p)$. Матрица отображения $R_{\lambda p - q}$ является характеристической матрицей $\lambda \cdot E - \Theta$ для матрицы Θ. Поскольку поле Φ алгебраически замкнуто, можно подобрать элемент $\lambda \in \Phi$ так, что $|\lambda \cdot E - \Theta| = 0$. Значит, отображение $R_{\lambda p - q}$ вырожденное. Лемма доказана.

Всюду далее предполагается, что $\dim(A) = 4$. В [6, теорема 3] доказано, что ни одна из компонент A_1 и A_{-1} не может быть одномерна, значит,

$$\dim A_1 = \dim A_{-1} = 2.$$

Если линейное отображение $0 \neq \psi := \psi_x$ вырожденно на A_1, то положим $x_1 = x$ и $x_2 = p - x$. Тогда x_1, x_2 линейно независимы, поскольку они действуют поразному на подходящий элемент $0 \neq a_2 \in A_1$:

$$a_2 x_1 = 0, \quad a_2 x_2 = a_2 p \neq 0.$$

Далее, оператор ψ на A_1 либо диагонален, либо является жордановой клеткой. В этой работе будет рассмотрен только первый из этих случаев.

Пусть $a_1^{\psi} = \lambda a_1$, $a_2^{\psi} = 0$, причем $\lambda \neq 0$ в силу леммы 2.3. Значит, справедливы равенства

$$a_1 x_1 = \lambda a_1 p, \quad a_2 x_1 = 0, \quad a_1 x_2 = (1 - \lambda) a_1 p, \quad a_2 x_2 = a_2 p. \tag{6}$$

2.3. Одно замечание об операторе ψ. Докажем, что понятие супералгебры диагонального типа определено корректно.

Лемма 2.5. *Не существует вырожденных элементов $0 \neq x, y \in X$ таких, что на A_1 оператор ψ_x диагонален, а ψ_y является жордановой клеткой.*

Доказательство. Допустим, что для некоторых ненулевых $x, y \in X$ существуют ненулевые $a_1, a_2, c_1, c_2 \in A_1$ и $\lambda \in \Phi^{\times}$ такие, что

$$a_1 x = \lambda a_1 p, \quad a_2 x = 0, \qquad c_1 y = c_2 p, \quad c_2 y = 0. \tag{7}$$

Вектор $z = \lambda^{-1} x$ удовлетворяет равенствам

$$a_1 z = a_1 p, \quad a_2 z = 0. \tag{8}$$

Поскольку 1 является собственным значением оператора ψ_z, элементы y, z непропорциональны. Значит, $X = \langle y, z \rangle$. В силу леммы 1.2(б) элементы a_2, c_2 линейно независимы (иначе $a_2 X = 0$), значит, они линейно порождают A_1. Отсюда $A_1 y \cdot z = 0$, поскольку в силу (7) и (8)

$$a_2 y \cdot z = a_2 z \cdot y = 0, \quad c_2 y \cdot z = 0.$$

Кроме того, из (7) следует $A_1 y \cdot y = 0$. Стало быть, $A_1 y \cdot X = 0$ и $A_1 y = 0$ в силу леммы 1.2(в). Равенство $A_1 y = 0$ противоречит соотношению $c_1 y = c_2 p$ из (7). Полученное противоречие завершает доказательство. Лемма доказана.

2.4. О жордановых формах оператора D на A_1 и A_{-1}. Заметим, что компоненты A_1 и A_{-1} в определенном смысле равноправны. Пусть p — невырожденный переключатель, $i = \sqrt{-1} \in \Phi$. Тогда $p' = ip$ также невырожденный переключатель. Если $D = R_p^2$, то $D' = R_{p'}^2 = -D$ и компоненты $A_1(D)$, $A_{-1}(D)$ для D совпадают с компонентами $A_{-1}(D')$, $A_1(D')$ для D'. Кроме того, если D диагонален на A_1, то D' диагонален на A_{-1}; если D является жордановой клеткой на $A_1(D)$, то D' также жорданова клетка на $A_{-1}(D')$. В самом деле, если

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2,$$

то для элементов $g_1 = e_1$, $g_2 = -e_2$ верно

$$g_1^{D'} = -g_1 + g_2, \quad g_2^{D'} = -g_2.$$

Лемма 2.6. *Если оператор D диагонален на одном из весовых пространств A_1, A_{-1}, то он диагонален и на другом пространстве.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2 — жорданов базисный блок оператора D в пространстве A_1:

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2.$$

Допустим, что оператор D диагонален на A_{-1}; тогда для любого $a_{-1} \in A_{-1}$ верно $a_{-1}^D = -a_{-1}$. В силу леммы 1.1 имеем

$$\begin{aligned} e_1(a_{-1}p) + e_2(a_{-1}p) = e_1^D(a_{-1}p) = (e_1p \cdot p)(a_{-1}p) \\ = (a_{-1}p \cdot p)(e_1p) = (a_{-1}D)(e_1p) = -a_{-1}(e_1p) = e_1(a_{-1}p). \end{aligned}$$

Значит, $(\exists 0 \neq a_1 \in A_1)$ $a_1(a_{-1}p) = 0$, т. е. $a_1(A_{-1}p) = 0$. Отсюда в силу леммы 1.3 получаем $a_1 = 0$; противоречие. Лемма доказана.

2.5. Жордановы формы операторов D и ψ.

Лемма 2.7. *Если оператор D на A_1 является жордановой клеткой, то оператор $\psi := \psi_x$ на A_1 не может быть диагональным.*

Доказательство. Допустим, что для подходящих базисов (e_1, e_2), (a_1, a_2) и скаляра $\lambda \in \Phi^\times$ (см. лемму 2.3) справедливы равенства

$$e_1^D = e_1 + e_2, \quad e_2^D = e_2, \qquad a_1^\psi = \lambda a_1, \quad a_2^\psi = 0.$$

1^0. Докажем, что $e_2^\psi = 0$. Пусть $e_2^\psi = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$. Поскольку ψ и D перестановочны, то

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = e_2^\psi = (e_2^D)^\psi = (e_2^\psi)^D = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)^D = \alpha_1 e_1 + \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_2,$$

откуда $\alpha_1 e_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$ и $e_2^\psi = \alpha_2 e_2$. Проверим, что $\alpha_2 = 0$.

Пусть, от противного, $\alpha_2 \neq 0$. Тогда α_2 является ненулевым собственным значением оператора ψ, значит, $\alpha_2 = \lambda$, $e_2^\psi = \lambda e_2$ и векторы e_2 и a_1 пропорциональны. Поскольку $\mathrm{Im}(\psi) = \langle a_1 \rangle = \langle e_2 \rangle$, то $e_1^\psi = \mu e_2$ для некоторого $\mu \in \Phi$. Итак,

$$e_1^\psi = \mu e_2, \quad e_2^\psi = \lambda e_2.$$

Учитывая перестановочность операторов ψ и D, имеем

$$\mu e_2 = \mu(e_2^D) = (\mu e_2)^D = (e_1^\psi)^D = (e_1^D)^\psi = (e_1 + e_2)^\psi = (\lambda + \mu)e_2,$$

значит, $\lambda = 0$; противоречие.

Тем самым доказано, что $e_2^\psi = 0$.

2^0. Поскольку дефект оператора ψ равен 1, то $\mathrm{Ker}(\psi) = \langle a_2 \rangle = \langle e_2 \rangle$, т. е. векторы a_2 и e_2 пропорциональны. Разложим e_1 по базису (a_1, e_2):

$$e_1 = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 e_2.$$

Так как векторы $e_1 - \gamma_2 e_2$ и a_1 пропорциональны, то

$$(e_1 - \gamma_2 e_2)^\psi = \lambda(e_1 - \gamma_2 e_2),$$

значит, $e_1^\psi = \lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2$. Наконец,

$$e_1^{\psi D} = (\lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2)^D = \lambda(e_1 + e_2) - \lambda\gamma_2 e_2, \quad e_1^{D\psi} = (e_1 + e_2)^\psi = e_1^\psi = \lambda e_1 - \lambda\gamma_2 e_2.$$

Отсюда вновь получаем $\lambda = 0$; противоречие. Лемма доказана.

Таким образом, *если B — супералгебра диагонального типа, то оператор D на компоненте A_1 совпадает с тождественным отображением, а на компоненте A_{-1} оператор D действует как $-1_{A_{-1}}$.*

§ 3. Общие результаты о структуре супералгебр с диагональным оператором ψ

3.1. Действие оператора ψ на A_{-1}.

Лемма 3.1. *Если оператор $\psi := \psi_x$ на A_1 диагонален, т. е.*

$$a_1^\psi = \lambda a_1, \quad a_2^\psi = 0 \text{ и } \lambda \neq 0,$$

то ψ на A_{-1} также диагонален. Более того, для подходящих $b_1, b_2 \in A_{-1}$

$$b_1^\psi = \lambda b_1, \;\; b_2^\psi = 0.$$

Кроме того, справедливы равенства

$$a_2 \cdot b_1 p = a_1 \cdot b_2 p = 0. \tag{9}$$

Доказательство. Докажем сначала, что оператор ψ на A_{-1} не может быть жордановой клеткой. Пусть, от противного, для векторов $b_1, b_2 \in A_{-1}$ и скаляра $\mu \in \Phi$

$$b_1^\psi = \mu b_1 + b_2, \quad b_2^\psi = \mu b_2.$$

В силу леммы 2.1 последовательно получаем

$$0 = a_2^\psi \cdot b_2 p = a_2(b_2^\psi \cdot p) = a_2 \cdot (\mu b_2)p = \mu a_2 \cdot b_2 p, \tag{10}$$

$$0 = a_2^\psi \cdot b_1 p = a_2(b_1^\psi \cdot p) = a_2 \cdot (\mu b_1 + b_2)p = \mu a_2 \cdot b_1 p + a_2 \cdot b_2 p, \tag{11}$$

$$\lambda a_1 \cdot b_2 p = a_1^\psi \cdot b_2 p = a_1 \cdot b_2^\psi p = \mu a_1 \cdot b_2 p. \tag{12}$$

Если $\mu \neq 0$, то $a_2 \cdot b_2 p = 0$ в силу (10) и $a_2 \cdot b_1 p = 0$ в силу (11), отсюда вытекает, что $a_2 \cdot A_{-1} p = 0$. Тогда $a_2 = 0$ в силу леммы 2.2; противоречие.

Тем самым доказано, что $\mu = 0$, т. е.

$$b_1^\psi = b_2, \quad b_2^\psi = 0.$$

Кроме того, из (12) и условия $\lambda \neq 0$ следует $a_1 \cdot b_2 p = 0$, а из (11) вытекает $a_2 \cdot b_2 p = 0$, т. е. $b_2 \cdot A_1 p = 0$, что невозможно по лемме 2.2.

Стало быть, ψ диагонален и на пространстве A_{-1}:

$$b_1^\psi = \mu_1 b_1, \quad b_2^\psi = \mu_2 b_2.$$

Заметим, что хотя бы один из скаляров μ_1, μ_2 должен быть ненулевым по лемме 2.2. Докажем, что оба они не могут быть ненулевыми. В самом деле, если они оба отличны от нуля, то

$$0 = a_2^\psi \cdot b_1 p = a_2 \cdot b_1^\psi p = \mu_1 a_2 \cdot b_1 p,$$

т. е. $a_2 \cdot b_1 p = 0$. Аналогично $a_2 \cdot b_2 p = 0$. Значит, $a_2 \cdot A_{-1} p = 0$. Тогда $a_2 = 0$ в силу леммы 2.2, что невозможно. Таким образом, можно считать, что

$$b_1^\psi = \mu b_1, \quad b_2^\psi = 0, \quad \mu \neq 0.$$

Попутно доказана справедливость равенств (9).

Докажем в заключение, что $\lambda = \mu$. Во-первых,

$$\lambda a_1 \cdot b_1 p = a_1^\psi \cdot b_1 p = a_1 \cdot b_1^\psi p = \mu a_1 \cdot b_1 p,$$

значит, $(\lambda - \mu) a_1 \cdot b_1 p = 0$. Докажем, что $a_1 \cdot b_1 p \neq 0$.

Допустим, что $a_1 \cdot b_1 p = 0$. Поскольку

$$\lambda a_1 \cdot b_2 p = a_1^\psi \cdot b_2 p = a_1 \cdot b_2^\psi p = 0,$$

то $a_1 \cdot A_{-1} p = 0$ и $a_1 = 0$ по лемме 2.2; противоречие. Лемма доказана.

3.2. Выбор канонического базиса. В силу равенств (6) справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2. *В супералгебре B справедливы равенства*

$$a_1x_1 = \lambda a_1p, \quad a_2x_1 = 0, \quad a_1x_2 = (1-\lambda)a_1p, \quad a_2x_2 = a_2p,$$

$$b_1x_1 = \lambda b_1p, \quad b_2x_1 = 0, \quad b_1x_2 = (1-\lambda)b_1p, \quad b_2x_2 = b_2p.$$

Определение. Базис супералгебры

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : x_1, x_2 \ (p = x_1 + x_2),$$

$$M_1 : x_1' = a_1p, \ x_2' = a_2p, \quad M_{-1} : y_1' = b_1p, \ y_2' = b_2p$$

назовем *каноническим*, если умножение базисных элементов задано следующей таблицей при $i = 1, 2$:

1) $a_ix_i = x_i', \quad b_ix_i = y_i',$
2) $x_i'x_i = a_i, \quad y_i'x_i = -b_i,$
3) $a_iy_i' = -b_ix_i',$
4) $(\forall a \in A_1 \cup A_{-1})(\forall m \in M_1 \cup M_{-1}) \quad a \circ m = 0;$

если произведение базисных элементов не указано в таблице, то, как обычно, оно считается нулевым; в частности, произведения базисных элементов с разными индексами равны 0.

Лемма 3.3. *В супералгебре B диагонального типа может быть выбран канонический базис.*

Доказательство. Пусть λ — параметр из леммы 3.2. Введем новый базис в X, считая $\lambda_0 = (1-\lambda)\lambda^{-1}$:

$$z_1 = \lambda^{-1}x_1, \quad z_2 = x_2 - \lambda_0x_1.$$

Заметим, что

$$x_1 = \lambda z_1, \quad x_2 = \lambda_0x_1 + z_2 = \lambda_0\lambda z_1 + z_2 = (1-\lambda)z_1 + z_2.$$

Кроме того, $\lambda_0\lambda = 1-\lambda$, $\lambda^{-1} - \lambda_0 = 1$. Проверим, что базис

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : z_1, z_2,$$

$$M_1 : x_1', x_2', \quad M_{-1} : y_1', y_2'$$

канонический. Рассуждения представим в виде последовательности пунктов.

1^0. Покажем, что $z_1 + z_2 = p$. Имеем

$$z_1 + z_2 = \lambda^{-1}x_1 + x_2 - \lambda_0x_1 = (\lambda^{-1} - \lambda_0)x_1 + x_2 = x_1 + x_2 = p.$$

2^0. Покажем, что произведения базисных элементов с разными индексами равно 0.

В самом деле,

$$a_2z_1 = 0, \quad b_2z_1 = 0,$$

$$a_1z_2 = a_1(x_2 - \lambda_0x_1) = (1-\lambda)a_1p - \lambda_0\lambda a_1p = ((1-\lambda) - \lambda_0\lambda)a_1p = 0,$$

$$b_1z_2 = b_1(x_2 - \lambda_0x_1) = (1-\lambda)b_1p - \lambda_0b_1x_1 = ((1-\lambda) - \lambda_0\lambda)b_1p = 0,$$

$$x_1'z_2 = a_1p \cdot z_2 = a_1z_2 \cdot p = 0, \quad x_2'z_1 = a_2p \cdot z_1 = 0,$$

$$y_1'z_2 = b_1p \cdot z_2 = 0, \quad y_2'z_1 = b_2p \cdot z_1 = 0.$$

3^0. Справедливы необходимые представления элементов x_1', x_2', y_1', y_2':

$$a_1z_1 = \lambda^{-1}a_1x_1 = a_1p = x_1', \quad a_2z_2 = a_2x_2 = a_2p = x_2',$$

$$b_1z_1 = \lambda^{-1}b_1x_1 = b_1p = y_1', \quad b_2z_2 = b_2x_2 = b_2p = y_2'.$$

4^0. Выполнены необходимые равенства для элементов $x_i'z_i$, $y_i'z_i$:

$$x_1'z_1 = a_1p \cdot \lambda^{-1}x_1 = \lambda^{-1}a_1x_1 \cdot p = a_1D = a_1,$$
$$x_2'z_2 = a_2p \cdot (x_2 - \lambda_0x_1) = a_2x_2 \cdot p = a_2D = a_2,$$
$$y_1'z_1 = b_1p \cdot \lambda^{-1}x_1 = \lambda^{-1}b_1x_1 \cdot p = b_1D = -b_1,$$
$$y_2'z_2 = b_2p \cdot (x_2 - \lambda_0x_1) = b_2x_2 \cdot p = b_2D = -b_2.$$

5^0. Заметим, что равенства из п. 4 в определении канонического базиса выполнены в силу (5). Проверим справедливость равенств $a_1y_1' = x_1'b_1$ и $a_2y_2' = x_2'b_2$, используя лемму 1.1(б):

$$a_1y_1' = a_1 \cdot b_1p, \quad x_1'b_1 = -b_1 \cdot a_1p = a_1 \cdot b_1p,$$
$$a_2y_2' = a_2 \cdot b_2p, \quad x_2'b_2 = -b_2 \cdot a_2p = a_2 \cdot b_2p.$$

Лемма доказана.

Можно проверить, что элементы $a_1 \cdot b_1p$ и $a_2 \cdot b_2p$ образуют базис X, однако он мало пригоден для дальнейшего, поскольку неясно, как действует алгебра ∇ на эти элементы.

Лемма 3.4. *В супералгебре B можно выбрать канонический базис*

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : z_1, z_2 \ (p = z_1 + z_2),$$
$$M_1 : x_1' = a_1p,\ x_2' = a_2p, \quad M_{-1} : y_1' = b_1p,\ y_2' = b_2p$$

так, что будут выполнены соотношения

$$a_1 \cdot b_1z_1 = \mu z_1 + z_2, \quad a_2 \cdot b_2z_2 = (1 + \mu\nu)z_1 + (1 + \nu)z_2. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть выбран базис супералгебры B, для которого справедливы равенства из леммы 3.2.

Положим $u = a_1(b_1x_1)$. Покажем, что $u \notin \Phi x_1$. Если $u \in \Phi x_1$, то Φx_1 является собственным ∇-инвариантным подпространством в X, что невозможно по определению расширенного дубля. Тогда для некоторых скаляров α, β верно представление $\alpha x_1 + \beta u = p$, причем $\alpha, \beta \neq 0$ в силу вырожденности x_1 и невырожденности p. Тогда $(\alpha^{-1}\beta a_1)(b_1(\alpha x_1)) = \beta u$. Заменим элемент x_1 пропорциональным элементом $\alpha x_1 \neq 0$. Заметим, что если элементы a_i, b_i заменить ненулевыми пропорциональными элементами, то для новых элементов вновь будут выполнены равенства из леммы 3.2. Тем самым можно считать, что справедливо равенство

$$a_1 \cdot b_1x_1 = x_2.$$

Аналогично $a_2 \cdot b_2x_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$, причем $\gamma \in \Phi^{\times}$, $\delta \in \Phi$, откуда

$$(\gamma^{-1}a_2) \cdot b_2x_2 = x_1 + (\gamma^{-1}\delta)x_2,$$

значит, можно считать, что

$$a_2 \cdot b_2x_2 = x_1 + \omega x_2.$$

Тогда в обозначениях леммы 3.3 справедливы равенства

$$a_1y_1' = a_1 \cdot b_1x_1 = x_2 = (1 - \lambda)z_1 + z_2,$$
$$a_2y_2' = a_2 \cdot b_2x_2 = x_1 + \omega x_2 = \lambda z_1 + \omega((1 - \lambda)z_1 + z_2) = (\lambda + \omega(1 - \lambda))z_1 + \omega z_2.$$

Полагая $\mu = 1 - \lambda$, имеем

$$a_1 \cdot b_1z_1 = \mu z_1 + z_2, \quad a_2 \cdot b_2z = (1 - \mu + \omega\mu)z_1 + \omega z_2.$$

Замена $\omega = \nu + 1$ приводит к соотношениям (13). Лемма доказана.

§ 4. Структура и изоморфизмы супералгебр диагонального типа

4.1. Структура супералгебр. Лемма 3.4 является основанием для следующего определения.

Определение. Если $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$, то обозначим через $BD(\mu,\nu)$ супералгебру с каноническим базисом:

$$A_1 : a_1, a_2, \quad A_{-1} : b_1, b_2, \quad X : x_1, x_2 \ (p = x_1 + x_2),$$
$$M_1 : x_1' = a_1 p, \ x_2' = a_2 p, \quad M_{-1} : y_1' = b_1 p, \ y_2' = b_2 p,$$

в которой выполнены равенства (13) из леммы 3.4.

Лемма 4.1. *Супералгебра вида $BD(\mu,\nu)$ правоальтернативна.*

Доказательство. Заметим, что супералгебра $BD(\mu,\nu)$ удовлетворяет равенствам (5). Значит, в силу [6, лемма 4.1] достаточно проверить, что для любых базисных элементов $x, y, z \in X$, $x', y', z' \in X'$ выполнены равенства

$$z'[R_x, R_y] = 0, \quad z[L_{x'}, L_{y'}] = 0.$$

Проверим только второе равенство. Из свойств произведений элементов канонического базиса имеем

$$x_1[L_{x_1'}, L_{y_1'}] = y_1'(x_1'x_1) - x_1'(y_1'x_1) = y_1'a_1 + x_1'b_1 = 0,$$
$$x_2[L_{x_2'}, L_{y_2'}] = y_2'(x_2'x_2) - x_2'(y_2'x_2) = y_2'a_2 + x_2'b_2 = 0,$$

если $\{i, j, k\} = \{1, 2\}$, то

$$x_i[L_{x_j'}, L_{x_k'}] = 0, \quad x_i[L_{y_j'}, L_{y_k'}] = 0, \quad x_i[L_{x_j'}, L_{y_k'}] = 0.$$

Лемма доказана.

Рассмотрим действие операторов

$$\xi_{11} = -L(a_1)L(b_1), \ \ \xi_{22} = -L(a_2)L(b_2)$$

на базис x_1, x_2:

$$\begin{aligned} &x_1\xi_{11} = \mu x_1 + x_2, && x_1\xi_{22} = 0, \\ &x_2\xi_{11} = 0, && x_2\xi_{22} = (1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2. \end{aligned}$$

Лемма 4.2. *Пусть E_{ij}, $i, j = 1, 2$, — матричные единицы алгебры 2×2-матриц $M_2(\Phi)$. Тогда матрицы $R = \mu E_{11} + E_{12}$ и $S = \eta E_{21} + \zeta E_{22}$ порождают алгебру $M_2(\Phi)$ при всех μ, η, ζ таких, что $\eta \neq 0$ и $\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \neq 0$.*

Доказательство. Обозначим через C подалгебру $M_2(\Phi)$, порожденную элементами R, S. Имеем $RS = (\mu E_{11} + E_{12})(\eta E_{21} + \zeta E_{22}) = \eta E_{11} + \zeta E_{12} \in C$. Поскольку $R, RS \in C$ и $\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} \neq 0$, то $E_{11}, E_{12} \in C$. Далее, $SE_{11} = (\eta E_{21} + \zeta E_{22})E_{11} = \eta E_{21} \in C$ и поскольку $\eta \neq 0$, то $E_{21} \in C$. Наконец, $E_{22} = E_{21}R - \mu E_{21} \in C$. Значит, $C = M_2(\Phi)$.

Заметим, что если $\eta = 0$, то матрицы R и S являются верхнетреугольными, значит, не порождают $M_2(\Phi)$. Лемма доказана.

Полагая $\eta = 1 + \mu\nu$, $\zeta = 1 + \nu$, получаем

$$\begin{vmatrix} \mu & 1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1+\mu\nu & 1+\nu \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mu - 1 \neq 0.$$

Из леммы 4.2 вытекает, что X — неприводимый модуль над алгеброй ∇.

Лемма 4.3. *Супералгебра $B = BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ является простой, значит, сингулярной.*

Доказательство. В силу [6, лемма 4.3] достаточно проверить равенство $\mathrm{Ann}_r(B) = 0$. Если $a + b \in \mathrm{Ann}_r(B)$, где $a \in A_1$, $b \in A_{-1}$, то $a, b \in \mathrm{Ann}_r(B)$. Допустим, что $a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Тогда

$$0 = -(b_1 p)a = a(b_1 p) = \alpha_1 a_1(b_1 p) + \alpha_2 a_2(b_1 p)$$
$$= \alpha_1 a_1(b_1 p) = \alpha_1 a_1(b_1 x_1) = \alpha_1(\mu x_1 + x_2),$$

откуда $\alpha_1 = 0$. Можно считать, что $a = a_2$ и в силу (5)

$$0 = -(b_2 x_2)a = -(b_2 x_2)a_2 = a_2(b_2 x_2) = (1 + \mu\nu)x_1 + (1 + \nu)x_2,$$

значит, $\nu = -1$, $\mu = 1$; противоречие.

Стало быть, супералгебра $BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ не имеет ненулевых правых четных аннуляторов. Аналогично проверяется отсутствие в ней и ненулевых нечетных правых аннуляторов. Лемма доказана.

Тем самым доказана

Теорема 1. *Сингулярная* 10*-мерная супералгебра диагонального типа изоморфна супералгебре $BD(\mu,\nu)$ при $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$.*

Ограничения $\mu \neq 1$, $\mu\nu \neq -1$ в теореме существенны, поскольку при $\mu = 1$ подпространство Φp является ∇-инвариантным; аналогично при $\mu\nu = -1$ подпространство Φx_2 является ∇-инвариантным.

Замечание. Заметим, что супералгебра $BD(0,-1)$ совпадает с супералгеброй $B_{4|6}$, введенной в [6]:

$$a_i x_i = x_i', \quad b_i x_i = y_i', \quad a_i y_i' = -y_i' a_i = -b_i x_i' = x_i' b_i = x_{i^{(12)}}, \quad x_i B = 0,$$

$$b_i y_i' = y_i' b_i = a_i x_i' = x_i' a_i = 0, \quad x_i' x_i = a_i, \quad y_i' x_i = -b_i,$$

где $i = 1, 2$, $(1,2)$ — транспозиция и, как обычно, считается, что произведения базисных элементов, которые не указаны в таблице, равны нулю.

4.2. Изоморфизм супералгебр диагонального типа.

Лемма 4.4. *В супералгебре $BD(\mu,\nu)$ вырожденными элементами из X являются только элементы вида $\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in \Phi^\times$.*

Доказательство. В самом деле, если элемент $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, вырожденный на A_1, то для некоторого $0 \neq \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \in A_1$ верно

$$0 = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \alpha_1\lambda_1 x_1' + \alpha_2\lambda_2 x_2'.$$

Поскольку элементы x_1', x_2' линейно независимы, то

$$\alpha_1\lambda_1 = \alpha_2\lambda_2 = 0.$$

Так как $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $a = 0$; противоречие. Лемма доказана.

Нам потребуется еще одна лемма, в которой U_4 обозначает мультипликативную группу корней 4-й степени из 1 в поле Φ.

Лемма 4.5. *Пусть* $(1+\nu)(1+\nu') \neq 0$. *Тогда изоморфизм простых супералгебр* $BD(\mu,\nu)$ *и* $BD(\mu',\nu')$ *влечет выполнение соотношений*

$$\mu' \in \mu U_4, \quad \frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} \in \frac{1+\mu\nu}{1+\nu} U_4 \tag{1}$$

или

$$\frac{\mu'(1+\mu\nu)}{1+\nu} \in U_4, \quad \frac{\mu(1+\mu'\nu')}{1+\nu'} \in U_4. \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что супералгебры $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ изоморфны; тогда в алгебре $BD(\mu,\nu)$ существуют элементы

$$[a_i], [b_i] \in A, \quad [x_i] \in X, \quad [x_i'], [y_i'] \in Ap \quad (i = 1, 2)$$

такие, что они образуют канонический базис в $BD(\mu',\nu')$ и справедливы следующие равенства:

$$[a_1] \cdot [b_1][x_1] = \mu'[x_1] + [x_2], \quad [a_2] \cdot [b_2][x_2] = (1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2].$$

В силу леммы 4.4 возможны два случая:

I. $[x_1] = \lambda_1 x_1, \quad [x_2] = \lambda_2 x_2$;

II. $[x_1] = \lambda_2 x_2, \quad [x_2] = \lambda_1 x_1$ для ненулевых скаляров λ_1, λ_2.

Рассмотрим каждый из них.

I. Пусть $[x_1] = \lambda_1 x_1$, $[x_2] = \lambda_2 x_2$. Поскольку

$$[a_2][x_1] = [b_2][x_1] = [a_1][x_2] = [b_1][x_2] = 0,$$

то

$$[a_i] = \alpha_i a_i + \beta_i b_i, \quad [b_i] = \gamma_i a_i + \delta_i b_i, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку векторы $[a_i]$, $[b_i]$ линейно независимы, матрицы $\begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, невырожденны; пусть $\Delta_i = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{vmatrix} \neq 0$.

Учитывая равенство $a(bx) = -b(ax)$ для любых $a, b \in A$, $x \in X$, имеем

$$[a_1] \cdot [b_1][x_1] = \lambda_1 \Delta_1 (a_1 \cdot b_1 x_1) = \lambda_1 \Delta_1 (\mu x_1 + x_2), \quad \mu'[x_1] + [x_2] = \mu' \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2,$$

значит,

$$\mu' = \mu \Delta_1, \quad \lambda_2 = \lambda_1 \Delta_1. \tag{14}$$

Аналогично

$$[a_2] \cdot [b_2][x_2] = \lambda_2 \Delta_2 a_2 \cdot b_2 x_2 = \lambda_2 \Delta_2 ((1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2),$$

$$(1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2] = (1+\mu'\nu')\lambda_1 x_1 + (1+\nu')\lambda_2 x_2,$$

значит,

$$\lambda_2 \Delta_2 (1+\mu\nu) = (1+\mu'\nu')\lambda_1, \quad \Delta_2(1+\nu) = 1+\nu'.$$

Учитывая (14), получаем

$$\Delta_1 \Delta_2 (1+\mu\nu) = 1+\mu'\nu', \quad \Delta_2(1+\nu) = 1+\nu'. \tag{15}$$

Используя равенства $x_i' x_i = a_i$, $y_i' x_i = -b_i$, имеем

$$[a_i][x_i] \cdot [x_i] = \lambda_i^2 (\alpha_i a_i + \beta_i b_i) x_i \cdot x_i = \lambda_i^2 (\alpha_i a_i - \beta_i b_i),$$

$$[a_i] = \alpha_i a_i + \beta_i b_i,$$
$$[b_i][x_i] \cdot [x_i] = \lambda_i^2(\gamma_i a_i + \delta_i b_i)x_i \cdot x_i = \lambda_i^2(\gamma_i a_i - \delta_i b_i),$$
$$[b_i] = \gamma_i a_i + \delta_i b_i.$$

Значит,

$$\lambda_i^2 = \pm 1, \quad \alpha_i\beta_i = \gamma_i\delta_i = 0. \tag{16}$$

Итак, в случае I изоморфизм супералгебр $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ влечет выполнение соотношений

$$\mu' \in \mu U_4, \quad \frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} \in \frac{1+\mu\nu}{1+\nu}U_4. \tag{17}$$

II. Пусть $[x_1] = \lambda_2 x_2$, $[x_2] = \lambda_1 x_1$. Рассуждая аналогично предыдущему, проверим справедливость равенств

$$\lambda_1 = \lambda_2\Delta_2(1+\mu\nu), \quad \mu' = \Delta_2(1+\nu), \tag{18}$$

$$\Delta_1\mu = 1+\nu', \quad \Delta_1 = 1+\mu'\nu', \tag{19}$$

где $\lambda_i \in U_4$. Заметим сначала, что

$$[a_2] = \alpha_1 a_1 + \beta_1 b_1, \quad [a_1] = \alpha_2 a_2 + \beta_2 b_2, \quad [b_2] = \gamma_1 a_1 + \delta_1 b_1, \quad [b_1] = \gamma_2 a_2 + \delta_2 b_2.$$

Поскольку

$$[a_1] \cdot [b_1][x_1] = \lambda_2\Delta_2(a_2 \cdot b_2 x_2) = \lambda_2\Delta_2((1+\mu\nu)x_1 + (1+\nu)x_2),$$
$$\mu'[x_1] + [x_2] = \mu'\lambda_2 x_2 + \lambda_1 x_1,$$

то

$$\lambda_2\Delta_2(1+\mu\nu) = \lambda_1, \quad \Delta_2(1+\nu) = \mu'.$$

Аналогично

$$[a_2] \cdot [b_2][x_2] = \lambda_1\Delta_1 a_1 \cdot b_1 x = \lambda_1\Delta_1(\mu x_1 + x_2),$$
$$(1+\mu'\nu')[x_1] + (1+\nu')[x_2] = (1+\mu'\nu')\lambda_2 x_2 + (1+\nu')\lambda_1 x_1,$$

значит,

$$\Delta_1\mu = 1+\nu', \quad \Delta_1 = 1+\mu'\nu'.$$

По предположению $\nu \neq -1$, $\nu' \neq -1$; тогда из (18), (19) вытекает

$$\frac{\mu'(1+\mu\nu)}{1+\nu} \in U_4, \quad \frac{\mu(1+\mu'\nu')}{1+\nu'} \in U_4. \tag{20}$$

Лемма доказана.

Теперь можно доказать, что семейство простых супералгебр $BD(\mu,\nu)$ над полем комплексных чисел 2-параметрическое.

Теорема 2. *Пусть $\Phi = \mathbb{C}$ — поле комплексных чисел; μ,ν,μ',ν' — действительные положительные числа, причем $\mu \neq 1$, $\mu' \neq 1$. Если супералгебры $BD(\mu,\nu)$ и $BD(\mu',\nu')$ изоморфны, то $(\mu,\nu) = (\mu',\nu')$.*

Доказательство. Пусть эти супералгебры изоморфны. Если выполнен случай I из леммы 4.5, то $\mu' = \mu$ и $\frac{1+\mu'\nu'}{1+\nu'} = \frac{1+\mu\nu}{1+\nu}$, значит,

$$(1+\mu\nu')(1+\nu) = (1+\mu\nu)(1+\nu'),$$

откуда $(\mu-1)(\nu'-\nu) = 0$ и $\nu' = \nu$.

Допустим, что выполнен случай II из леммы 4.5. Тогда справедливы равенства

$$\mu'(1+\mu\nu) = 1+\nu, \quad \mu(1+\mu'\nu') = 1+\nu'. \tag{21}$$

Первое равенство не может быть выполнено, если одновременно $\mu, \mu' > 1$ или $0 < \mu, \mu' < 1$. Кроме того, не может быть $\mu\mu' = 1$, поскольку в этом случае получаем $\mu = 1$.

Допустим, что $\mu > 1$, $0 < \mu' < 1$. Если $\mu\mu' > 1$, то

$$\mu(1+\mu'\nu') = \mu + \mu\mu'\nu' > 1+\nu'.$$

Если же $\mu\mu' < 1$, то

$$\mu'(1+\mu\nu) = \mu' + \mu'\mu\nu < 1+\nu.$$

В каждом из вариантов получаем противоречие с равенствами (21). Лемма доказана.

Замечание. Покажем, что если супералгебра $B_{4|6} = BD(0,-1)$ изоморфна супералгебре $BD(\mu',\nu')$, то $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. Пусть $\mu = 0$, $\nu = -1$ и супералгебры $BD(\mu,\nu)$, $BD(\mu',\nu')$ изоморфны. В случае I из соотношений (14) и (15) получаем $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. В случае II из равенств (18) и (19) получаем $\mu' = 0$, $\nu' = -1$. Заметим, что выполнение равенств (14), (15), (18) и (19) не связано с ограничением $(1+\nu)(1+\nu') \neq 0$, которое предполагалось выполненным в лемме 4.5.

§ 5. Расширенные 10-мерные дубли с максимальным спектром $\Lambda_0(D)$

Как и прежде, $\dim(B) = 10$, $D = R_p^2$, где p — невырожденный переключатель. Предположим, что спектр $\Lambda_0(D)$ имеет ровно 4 значения. Можно считать, что одно их них равно 1. Пусть $\mu \neq \pm 1$ — фиксированное собственное значение оператора D. Тогда в силу леммы 1.4 имеем $\Lambda_0(D) = \{\pm 1, \pm\mu\}$. Покажем, что в супералгебре B можно выбрать невырожденный переключатель q такой, что спектр $\Lambda_0(R_q^2)$ состоит из двух значений ± 1, причем все ненулевые весовые векторы оператора R_q^2 собственные, а сама супералгебра B имеет диагональный тип.

Дальнейшие рассмотрения представим в виде ряда пунктов.

1^0. Пусть, как и ранее, ∇ — подалгебра, порожденная операторами L_aL_b, где $a, b \in A$. Из п. 1.2 следует, что для $a_\kappa \in A_\kappa$, $a_\nu \in A_\nu$, $\kappa, \nu \in \Lambda_0(D)$ верно

$$XL_{a_\kappa}L_{a_\nu} = 0, \text{ если } \kappa + \nu \neq 0.$$

Пусть $A_1 = \langle a_1\rangle$, $A_{-1} = \langle a_{-1}\rangle$, $A_\mu = \langle a_\mu\rangle$, $A_{-\mu} = \langle a_{-\mu}\rangle$. Поскольку $XL_aL_b \subseteq X$, алгебра ∇ порождается двумя операторами

$$\xi_1 = -L_{a_1}L_{a_{-1}}, \quad \xi_\mu = -L_{a_\mu}L_{a_{-\mu}}.$$

Заметим, что $[A]$ является прямой суммой четырех 1-мерных пространств:

$$[A] = [A]_1 \oplus [A]_{-1} \oplus [A]_\mu \oplus [A]_{-\mu}, \text{ где } [A]_\lambda = \langle a_\lambda p\rangle, \ \lambda \in \Lambda_0(D).$$

2^0. Кроме того, в силу леммы 1.3 $X = \langle x, y\rangle$, где $x = p\xi_1$, $y = p\xi_\mu$ и $p = \alpha_x x + \alpha_y y$, где $\alpha_x, \alpha_y \in \Phi^\times$. Изменяя базисы в A_1 и A_μ, можно считать, что

$$p = x + y. \tag{22}$$

Для любого $t \in X$ найдется скаляр $\gamma \in \Phi$:

$$a_\lambda t = \gamma a_\lambda p,$$

поскольку $\dim[A]_\lambda = 1$ и векторы $a_\lambda t, a_\lambda p$ пропорциональны. Значит, для $\lambda \in \Lambda_0(D)$ имеем

$$a_\lambda x = \gamma_\lambda a_\lambda p, \quad a_\lambda y = \delta_\lambda a_\lambda p. \tag{23}$$

Отсюда для $\lambda \in \Lambda_0(D)$ верно

$$(a_\lambda x)p = \gamma_\lambda (a_\lambda p)p = \gamma_\lambda a_\lambda D = \lambda \gamma_\lambda a_\lambda, \quad (a_\lambda y)p = \delta_\lambda (a_\lambda p)p = \delta_\lambda a_\lambda D = \lambda \delta_\lambda a_\lambda,$$

значит,

$$(a_\lambda x)p = \lambda \gamma_\lambda a_\lambda, \quad (a_\lambda y)p = \lambda \delta_\lambda a_\lambda. \tag{24}$$

Далее, ввиду леммы 1.1

$$\lambda\gamma_\lambda a_\lambda(a_{-\lambda}p) = (a_\lambda xp)(a_{-\lambda}p) = (a_{-\lambda}xp)(a_\lambda p) = -\lambda\gamma_{-\lambda}a_{-\lambda}(a_\lambda p) = \lambda\gamma_{-\lambda}a_\lambda(a_{-\lambda}p).$$

Тем самым получаем $\gamma_\lambda = \gamma_{-\lambda}$ и аналогично $\delta_\lambda = \delta_{-\lambda}$, т. е.

$$\gamma_\lambda = \gamma_{-\lambda}, \quad \delta_\lambda = \delta_{-\lambda}. \tag{25}$$

Учитывая равенства (23)–(25), имеем

$$x\xi_1 = a_1(a_{-1}x) = \gamma_1 a_1(a_{-1}p) = \gamma_1 x, \quad y\xi_1 = a_1(a_{-1}y) = \gamma_1 a_1(a_{-1}p) = \delta_1 x.$$

Аналогично

$$x\xi_2 = a_\mu(a_{-\mu}x) = \gamma_\mu a_\mu(a_{-\mu}p) = \gamma_\mu y, \quad y\xi_2 = a_\mu(a_{-\mu}y) = \delta_\mu a_\mu(a_{-\mu}p) = \delta_\mu y.$$

3^0. Так как $p = x + y$ в силу (22), то

$$\gamma_1 + \delta_1 = 1, \quad \gamma_\mu + \delta_\mu = 1. \tag{26}$$

Пусть $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ и $\nu \in \{\pm\mu\}$. В силу равенств (23)

$$a_\varepsilon x = \gamma_1 a_\varepsilon p, \quad a_\nu x = \gamma_\mu a_\nu p, \tag{27}$$

$$a_\varepsilon y = \delta_1 a_\varepsilon p, \quad a_\nu y = \delta_\mu a_\nu p. \tag{28}$$

4^0. Полагая $z = \delta_1 x - \gamma_1 y$, $t = \delta_\mu x - \gamma_\mu y$ и $\Delta = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 \\ \gamma_\mu & \delta_\mu \end{vmatrix}$, покажем, что справедливы следующие четыре равенства:

$$a_\varepsilon z = 0, \quad a_\nu z = -\Delta a_\nu p, \quad a_\varepsilon t = -\Delta a_\varepsilon p, \quad a_\nu t = 0.$$

Первое и третье равенства следуют из определения элементов z, t и равенств (27) и (28).

Заметим, что $\Delta \neq 0$, иначе $Az = 0$, тогда $z = 0$ в силу леммы 1.2(г). Значит, $\delta_1 = 0 = \gamma_1$, что противоречит равенству (26).

Используя равенства (27) и (28), проверим справедливость второго и четвертого соотношений:

$$a_\nu z = a_\nu(\delta_1 x - \gamma_1 y) = \delta_1 a_\nu x - \gamma_1 a_\nu y = \delta_1\gamma_\mu a_\nu p - \gamma_1\delta_\mu a_\nu p = -\Delta a_\nu p,$$

$$a_\nu t = a_\nu(\delta_\mu x - \gamma_\mu y) = \delta_\mu a_\nu x - \gamma_\mu a_\nu y = \delta_\mu\gamma_\mu a_\nu p - \gamma_\mu\delta_\mu a_\nu p = 0.$$

5^0. Итак, переключатели z и t вырожденны, а операторы ψ_z и ψ_t диагональны. Далее, переключатели z и t непропорциональны, так как $\Delta \neq 0$, значит, они образуют базис в пространстве X.

Далее, $AR_zR_t = 0$, $a_\varepsilon R_z^2 = 0$, $a_\nu R_t^2 = 0$ и

$$a_\nu R_z^2 = -\Delta a_\nu R_p R_z = -\Delta a_\nu R_z R_p = \Delta^2 a_\nu R_p^2 = \nu \Delta^2 a_\nu,$$

$$a_\varepsilon R_t^2 = -\Delta a_\varepsilon R_p R_z = -\Delta a_\varepsilon R_z R_p = \Delta^2 a_\varepsilon R_p^2 = \varepsilon \Delta^2 a_\varepsilon.$$

6^0. Покажем, что переключатель вида $q = \beta_1 z + \beta_2 t$ невырожденный, если $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^\times$. В самом деле, если $a_\varepsilon \neq 0$ и $a_\nu \neq 0$, то

$$a_\varepsilon q = -\beta_2 \Delta a_\varepsilon p \neq 0, \quad a_\nu q = -\beta_1 \Delta a_\nu p \neq 0.$$

7^0. Наконец, покажем, что если $\beta_1 = (\sqrt{\mu} \cdot \Delta)^{-1}$, $\beta_2 = \Delta^{-1}$, то оператор R_q^2 совпадает с тождественным отображением на пространстве $\langle a_1, a_\mu \rangle$. Имеем

$$a_1 R_q^2 = \beta_1^2 a_1 R_z^2 + \beta_2^2 a_1 R_t^2 = \beta_2^2 a_1 R_t^2 = \beta_2^2 \Delta^2 a_1 = a_1,$$

$$a_\mu R_q^2 = \beta_1^2 a_\mu R_z^2 + \beta_2^2 a_\mu R_t^2 = \beta_1^2 a_\mu R_t^2 = \beta_1^2 \mu \Delta^2 a_\mu = a_\mu.$$

Тем самым доказано, что супералгебра имеет диагональный тип.

Благодарность. Автор признателен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ряд замечаний, способствующих ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зельманов Е. И. , Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 4. С. 676–693.
2. *Silva J. P., Murakami L. S. I., Shestakov I. P.* On right alternative syperalgebras // Commun. Algebra. 2016. V. 44, N 1. P. 240–252.
3. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Простые 5-мерные правоальтернативные супералгебры с тривиальной четной частью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 6. С. 1078–1089.
4. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Сингулярные 6-мерные супералгебры // Сиб. электрон. мат. изв. http://semr.math.nsc.ru. 2018. Т. 15. С. 92–105.
5. *Pchelintsev S. V., Shashkov O. V.* Linearly generated singular superalgebras // J. Algebra. 2020. V. 546, N . P. 580–603.
6. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Алгебраически порожденные супералгебры // Изв. вузов. Математика. 2021. Т. 65, № 6. С. 67–83.
7. *Пчелинцев С. В., Шашков О. В.* Строение сингулярных супералгебр с 2-мерной четной частью и новые примеры сингулярных супералгебр // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 6. С. 742–765.
8. *Pchelintsev S. V., Shashkov O. V.* A finite-dimensional singular superalgebra is algebraically generated // J. Algebra. 2024. V. 645, N 1. P. 86–93.
9. *Мальцев А. И.* Основы линейной алгебры. М.: Лань, 2009.
10. *Jacobson N.* Lie algebras. New York; London: Interscience, 1962. (Intersci. Tracts Pure Appl. Math.; V. 10).

Поступила в редакцию 7 июля 2024 г.
После доработки 5 ноября 2024 г.
Принята к публикации 25 декабря 2024 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович (ORCID 0000-0001-7857-9532)
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр-т, 49/2, Москва 125167
pchelinzev@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2025. Том 66, № 1

УДК 517.958:533.7

К ГРУППОВОЙ КЛАССИФИКАЦИИ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ МЕТОДОМ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОДАЛГЕБР

С. В. Хабиров

Аннотация. Групповая классификация — основная задача группового анализа дифференциальных уравнений с произвольным элементом. Для уравнений идеальной газовой динамики со стационарным уравнением состояния задача решена методом перебора упрощений определяющих соотношений с помощью преобразований эквивалентности. Для релаксирующих уравнений состояния, зависящих от времени, перебор огромен и приходится использовать оптимальную систему подалгебр подалгебры, расширяющей ядро допускаемых алгебр. Комбинация обоих методов приводит к решению задачи групповой классификации релаксирующей газовой динамики.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.110

Ключевые слова: газовая динамика, релаксирующее уравнение состояния, преобразования эквивалентности, определяющие соотношения, групповая классификация, оптимальная система подалгебр.

Введение

Групповой анализ дифференциальных уравнений газовой динамики со стационарным уравнением состояния (произвольный элемент) развит в наибольшей мере [1, 2]. Проведена групповая классификация по уравнениям состояния [3]. Найдены преобразования эквивалентности, не изменяющие вид системы уравнений газовой динамики, но меняющие лишь функцию, задающую уравнение состояния. Найдена группа преобразований, оставляющих инвариантной систему уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). С точностью до преобразований эквивалентности перечислены классы уравнений состояния, для которых допускаемая системой группа будет шире ядра (групповая классификация). В процессе вычисления алгебры Ли допускаемой группы [4] возникает линейное определяющее соотношение, связывающее координаты операторов допускаемой группы и значения функции, задающей уравнение состояния и ее производных. Если функция произвольна, то получается ядро. Если функция удовлетворяет дифференциальному уравнению вида определяющего соотношения, то допускаемая алгебра может быть шире ядра. Классификацию дифференциальных уравнений и их решений проводят с точностью до преобразований эквивалентности. Перебор возможностей составляет метод групповой классификации упрощений определяющего соотношения.

Задачу групповой классификации можно решить другим методом, предложенным Ю. А. Чиркуновым [5]. Алгебра Ли ядра допускаемых групп является идеалом для всех расширений. Дополнение алгебры ядра любого расширения является подалгеброй расширения. Эти подалгебры содержатся в алгебре преобразований эквивалентности. Для групповой классификации достаточно перечислить все подалгебры преобразований эквивалентности без ядра с точностью до внутренних автоморфизмов (оптимальная система). Это метод групповой классификации с помощью оптимальной системы подалгебр.

Известен и прямой метод групповой классификации, когда разыскиваются преобразования, изменяющие произвольный элемент, а не только алгебра Ли этих преобразований. Это возможно для дифференциальных уравнений с двумя независимыми переменными, порядок которых небольшой. В этом случае дополнительно находят дискретные преобразования эквивалентности. В работе [6] дается общая теория групповой классификации прямого и алгебраических методов с применением к нелинейным волновым уравнениям с двумя независимыми переменными. Приведены ссылки, где решены задачи групповой классификации.

Обобщение классической газовой динамики дает уравнение состояния, зависящее от времени в силу реологии [7] или в результате энергетического усреднения физико-химических процессов в элементарном объеме многофазной среды [8]. Уравнения газовой динамики задают движение многофазной среды в целом с измеренным изменением внутренней энергии в результате физико-химических процессов в среде под внутренним и (или) внешним воздействием. Задача групповой классификации релаксирующей газовой динамики приводит к бесконечной группе преобразований эквивалентности и сводится к изучению совместности двух дифференциальных уравнений для функции, задающей уравнение состояния, одно из которых нелинейно (определяющие соотношения). Групповая классификация по преобразованиям эквивалентности выполнена в работе [9]. Возникает множество возможностей упрощения переопределенной системы уравнений для уравнения состояния. Нелинейное уравнение определяющих соотношений упрощается в четырех взаимно исключающихся случаях в зависимости от значений коэффициентов. Групповая классификация одной такой возможности рассмотрена в [10] методом работы [4]. Другая возможность рассмотрена в настоящей работе с помощью комбинаций метода перебора упрощений уравнений для функции, задающей уравнение состояния, и метода оптимальной системы подалгебр алгебры расширения ядра. Остается решить задачу еще в двух случаях.

§ 1 Уравнения газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния

Дифференциальные уравнения газообразных сред являются законами сохранения массы, импульса и энергии двигающегося объема:

$$V_t + (\vec{u}\cdot\nabla)V = V\nabla\cdot\vec{u}, \tag{1.1}$$

$$\vec{u}_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + V\nabla p = 0, \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_t + (\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + Vp\nabla\cdot\vec{u} = 0,$$

где V — удельный объем, $\vec{u}$ — скорость частицы, ε — удельная внутренняя энергия, p — давление, $\nabla = \partial_{\vec{x}}$ — градиент. Уравнение состояния среды меняется со временем:

$$\varepsilon = e(t, V, S). \tag{1.3}$$

В элементарном объеме (частица) выполняется термодинамическое тождество

$$T\,dS = d\varepsilon + p\,dV + \mu\,dt,$$

где S — энтропия, $T = e_S > 0$ — температура, $\mu = -e_t$ — мощность выделенной или поглощенной энергии, $p = -e_V$, d — дифференциал. Дифференцируя (1.3) вдоль мировой линии частицы $D = \partial_t + \vec{u} \cdot \nabla$, получим уравнение для энтропии

$$e_S DS + e_t = 0. \tag{1.4}$$

Аналогично получим уравнение для каждого из термодинамических параметров

$$Dp + V e_{VV} \nabla \cdot \vec{u} = e_S^{-1} e_{VS} e_t - e_{tV},$$

$$DT - V e_{VS} \nabla \cdot \vec{u} = e_{tS} - e_S^{-1} e_t e_{SS},$$

$$D\mu + V e_{tV} \nabla \cdot \vec{u} = e_{tS} e_t e_S^{-1} - e_{tt}.$$

Групповую классификацию будем проводить для замкнутой системы (1.1), (1.2), (1.4), где $\nabla p = -e_{VV} \nabla V - e_{VS} \nabla S$. Произвольный элемент этой системы задан уравнением состояния (1.3) с условиями $e_t \neq 0$, $e_S \neq 0$, $e_{VV} \neq 0$,

$$e_{x^j} = 0, \quad e_{u^k} = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

где x^j, u^k — декартовы координаты векторов $\vec{x}$, $\vec{u}$.

Преобразования эквивалентности разыскиваются по правилам работы [4]. Уравнения (1.1)–(1.5) и уравнения на функцию e, возникающие в процессе вычисления, должны быть инвариантными. Для произвольного уравнения состояния (1.3) алгебра Ли преобразований эквивалентности такова [9]:

$$\{X_i\} = \partial_{\vec{x}}, \quad \{X_{3+i}\} = t\partial_{\vec{x}} + \partial_{\vec{u}}, \quad \{X_{6+i}\} = \vec{x} \times \partial_{\vec{x}} + \vec{u} \times \partial_{\vec{u}}, \quad i = 1, 2, 3;$$

$$X_{10} = \partial_t \Rightarrow \Pi_1 : \widetilde{t} = t + a, \ \widetilde{e}(\widetilde{t}, V, S) = e(t, V, S);$$

$$X_{11} = t\partial_t + \vec{x} \cdot \partial_{\vec{x}} \Rightarrow \Pi_2 : \widetilde{t} = bt, \quad \widetilde{\vec{x}} = b\vec{x}, \quad \widetilde{e}(\widetilde{t}, V, S) = e(t, V, S);$$

$$X_{12} = V\partial_V \Rightarrow \Pi_3 : \widetilde{V} = d_1 V, \quad \widetilde{e}(t, \widetilde{V}, S) = e(t, V, S);$$

$$X_{13} = t\partial_t - \vec{u} \cdot \partial_{\vec{u}} - 2e\partial_e \Rightarrow \Pi_4 : \widetilde{t} = ct, \ \widetilde{\vec{u}} = c^{-1}\vec{u},$$
$$\widetilde{e} = c^{-2} e, \ \ \widetilde{e}(\widetilde{t}, V, S) = c^{-2} e(t, V, S);$$

$$X_{14} = V\partial_e \Rightarrow \Pi_5 : \widetilde{e} = Vb_1 + e; \quad X_{15} = \partial_e \Rightarrow \Pi_6 : \widetilde{e} = e + c_1;$$

$$\langle \eta \rangle = \eta(t, S)\partial_S \Rightarrow \Pi : \widetilde{S} = h(t, S), \quad \widetilde{e}(t, V, \widetilde{S}) = e(t, V, S).$$

Здесь a, $b \neq 0$, $c \neq 0$, d_1, b_1, c_1 — произвольные постоянные, $\eta(t, S)$, $h(t, S)$ — произвольные функции.

Операторы X_i, $i = 1 \div 9$, образуют 9-мерную алгебру Ли L_9, которой соответствует допускаемая системой (1.1)–(1.3) группа преобразований с произвольным уравнением состояния (ядро допускаемых групп). Для специальных классов уравнений состояния преобразования эквивалентности меняются [9], так же как и допускаемая группа преобразований.

§ 2 Определяющие соотношения групповой классификации

Координаты оператора алгебры Ли, допускаемой системой (1.1), (1.2), (1.4):

$$X = \xi^t \partial_t + \vec{\xi} \cdot \partial_{\vec{x}} + \vec{\eta} \cdot \partial_{\vec{u}} + \eta^V \partial_V + \eta^S \partial_S,$$

зависят от переменных t, $\vec{x}$, $\vec{u}$, V, S. Продолжая оператор на производные $\widetilde{X}$ [4], действуем оператором на каждое уравнение системы в силу этих уравнений. Получим условия инвариантности, которые содержат некоторые производные в качестве свободных параметров. Приравнивая к нулю коэффициенты при свободных параметрах (расщепление), получим переопределенную систему уравнений для координат оператора X. Интегрирование приводит к представлению для координат оператора [10]:

$$\begin{gathered} \xi^t = Nt^2 + Bt + B_0, \quad \vec{\xi} = t(N\vec{x} + \vec{A}) + N_0\vec{x} + \vec{A}_0 + \vec{\Omega} \times \vec{x}, \\ \vec{\eta} = N\vec{x} + \vec{A} - \vec{u}(Nt + B - N_0) + \vec{\Omega} \times \vec{u}, \\ \eta^V = V(3Nt + E), \quad \eta^S = \eta(t, S), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где N, B, B_0, $\vec{A}$, N_0, $\vec{A}_0$, $\vec{\Omega}$, E — произвольные постоянные, $\eta(t,S)$ — произвольная функция, и к двум определяющим соотношениям

$$\gamma_S e_t = e_S(\gamma_t + \beta' V + N(2e + 3Ve_V)), \tag{2.2}$$

$$e_t(Nt^2 + Bt + B_0) + Ve_V(3Nt + E) + e_S\eta(t,S) = 2e(N_0 - B - Nt) - V\beta(t) - \gamma(t,S), \tag{2.3}$$

где $\gamma(t,S)$, $\beta(t)$ — произвольные функции, возникающие при интегрировании переопределенной системы.

Если функция $e(t,V,S)$ произвольная, то из (2.2), (2.3) следует, что равны нулю β, γ и все постоянные, входящие в уравнения. Тогда представление (2.1) определяет допускаемую алгебру L_9. Система (1.1), (1.2), (1.4) может допускать более широкую алгебру, если функция удовлетворяет уравнениям типа (2.2) и (2.3) с некоторыми коэффициентами $\widetilde{\gamma}(t,S)$, $\widetilde{\eta}(t,S)$ $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{N}$, $\widetilde{N}_0$, $\widetilde{B}$, $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{E}$. Это следует из условий инвариантности. Коэффициенты можно изменить преобразованиями эквивалентности. В зависимости от коэффициентов уравнения типа (2.2) рассмотрим все возможные взаимно исключающие случаи для функции e.

1^0. $\widetilde{\gamma}_S = 0$, $\widetilde{N} \neq 0$. Уравнение типа (2.2) принимает специальный вид

$$3Ve_V + 2e = -\widetilde{\beta}'(t)V - \widetilde{\gamma}'(t).$$

Групповая классификация этого случая проведена в работе [10].

2^0. $\widetilde{\gamma}_S \neq 0$, $\widetilde{N} = 0$. Преобразование эквивалентности П приводит уравнение типа (2.2) к виду

$$e_t = e_S\widetilde{\beta}'(t)V \Rightarrow e = \widetilde{e}(V, \widetilde{S}),\ \widetilde{S} = S + V\widetilde{\beta}(t), \tag{2.4}$$

величина $\widetilde{\beta}(t)$ определена с точностью до постоянного слагаемого. Определяющее соотношение (2.2) в силу (2.4)

$$\gamma_S\widetilde{\beta}'V = \gamma_t + \beta' V + N(2e + 3Ve_V) \tag{2.5}$$

становится тождеством при $N=0$, $\gamma=\Gamma S+\Gamma_1$, $\beta=\Gamma\widetilde{\beta}+B_1$, Γ, Γ_1, B_1 — постоянные. В случае $N\neq 0$ функция e удовлетворяет еще одному уравнению вида

$$3Ve_V+2e=V\alpha(t,S)+\alpha_0(t,S). \tag{2.6}$$

3^0. $\widetilde{\gamma}_S\neq 0$, $\widetilde{N}\neq 0$. Уравнения типа (2.2), (2.3) преобразованиями эквивалентности приводятся к переопределенной системе вида

$$e_t=e_S(\widetilde{\beta}'V+2e+3Ve_V), \tag{2.7}$$

$$e_t(t^2+k)+Ve_V(3t+n)+e_S\widetilde{\eta}(t,S)=2e(m-t)-V\widetilde{\beta}(t)-S, \tag{2.8}$$

где $\widetilde{\beta}(t)$, $\widetilde{\eta}(t,S)$ — произвольные функции, k, n, m — произвольные постоянные.

4^0. $\widetilde{\gamma}_S=0$, $\widetilde{N}=0\Rightarrow\widetilde{\gamma}=\Gamma$, $\widetilde{\beta}=B_1$ — постоянные. Определяющее соотношение (2.2) выполняется тождественно: $N=0$, $\gamma=\Gamma$, $\beta=B_1$. Остается определяющее соотношение (2.3)

$$(Bt+B_0)e_t+EVe_V+\eta(t,S)e_S=2e(N_0-B)-VB_1-\Gamma. \tag{2.9}$$

§ 3 Случай $\widetilde{\gamma_s}\neq 0$, $\widetilde{N}=0$, $N=0$, $\gamma=\Gamma S+\Gamma_1$, $\beta=\Gamma\widetilde{\beta}+B_1$

Уравнение состояния (2.4) подставляем в определяющее соотношение (2.3) с независимыми переменными V, $\widetilde{S}$ и t:

$$2\widetilde{e}(N_0-B)=EV(\widetilde{e_V}+\widetilde{\beta}\widetilde{e}_{\widetilde{S}})+\widetilde{e}_{\widetilde{S}}(\eta(t,\widetilde{S}-V\widetilde{\beta})+V\widetilde{\beta}'(Bt+B_0))+VB_1+\Gamma\widetilde{S}+\Gamma_1.$$

Дифференцируем по t и переходим к прежним независимым переменным t,V,S:

$$EV\widetilde{\beta}'+\eta_t-\eta_SV\beta'+VB(t\widetilde{\beta}')'+VB_0\widetilde{\beta}''=0.$$

Расщепление по V приводит к равенству с постоянными коэффициентами

$$\eta=CS+C_0,\quad (Bt+B_0)\widetilde{\beta}'+(E-C)\widetilde{\beta}=K. \tag{3.1}$$

Определяющее соотношение в силу (3.1) принимает вид

$$EV\widetilde{e}_V+(C\widetilde{S}+C_0+KV)\widetilde{e}_{\widetilde{S}}=2(N_0-B)\widetilde{e}-B_1V-\Gamma\widetilde{S}-\Gamma_1. \tag{3.2}$$

Координаты допускаемого оператора (2.1)

$$\xi^t=Bt+B_0,\quad \vec{\xi}=N_0\vec{x}+t\vec{A}+\vec{A}_0+\vec{\Omega}\times\vec{x},$$

$$\vec{\eta}=(N_0-B)\vec{u}+\vec{A}+\vec{\Omega}\times\vec{u},\quad \eta^V=EV,\quad \eta^S=CS+C_0$$

образуют алгебру Ли. Постоянным $\vec{A}_0$, $\vec{A}$, $\vec{\Omega}$ соответствует идеал L_9, который является ядром допускаемых операторов для любого уравнения состояния. Другим постоянным соответствуют операторы, образующие подалгебру:

$$B_0\to X_{10}=\partial_t,\quad B\to X_{13}=t\partial_t-\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}},\quad E\to X_{12}=V\partial_V,\quad C\to X_{14}=S\partial_S,$$

$$C_0\to X_{15}=\partial_S,\quad N_0\to\widetilde{X}_{11}=\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}}+\vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}}.$$

Оператор $X_{11}=\widetilde{X}_{11}+X_{13}$ допускается уравнениями газовой динамики с уравнением состояния, не зависящим от времени.

(0) Если функция $\hat{\beta}(t)$ общего вида, то в (3.1) все коэффициенты обнуляются: $B = B_0 = 0$, $E = C$, $K = 0$. Более простой вид принимает оператор подалгебры $Y_0 = N_0\widetilde{X}_{11} + E(X_{12} + X_{14}) + C_0X_{15}$ и уравнение (3.2):

$$EVe_V + (E\widetilde{S} + C_0)\hat{e}_{\hat{S}} = 2N_0\widetilde{e} - B_1V - \Gamma\widetilde{S} - \Gamma_1. \tag{3.3}$$

Здесь постоянные B_1, Γ, Γ_1 не участвуют в определении допускаемой алгебры.

Пусть функции $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{e}$ удовлетворяют уравнениям типа (3.1), (3.2) с постоянными коэффициентами $\widetilde{B}$, $\widetilde{B}_0$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}_0$,$\widetilde{K}$, $\widetilde{N}_0$, $\widetilde{B}_1$, $\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma}_1$. Тогда преобразованиями эквивалентности общее решение уравнения типа (3.1) приводится к следующим простейшим типам.

(1) $\widetilde{B} \neq 0$, $\widetilde{E} - \widetilde{C} \neq 0 \Rightarrow \widetilde{\beta} = M|t|^k$, $k \neq 0, 1$. Подстановка в (3.1) дает $B_0 = K = 0$, $C = E + kB$ и оператор подалгебры $Y_1 = Y_0 + B(X_{13} + kX_{14})$.

(2) $\widetilde{B} \neq 0, \widetilde{E} = \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{\beta} = M\ln|t|$. Подстановка в (3.1) дает $B_0 = 0$, $E = C$, $K = MB$, $Y_2 = Y_0 + BX_{13}$.

(3) $\widetilde{B} = 0$, $\widetilde{B}_0 \neq 0$, $\widetilde{E} \neq \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{\beta} = e^{kt}$. Подстановка в (3.1) дает $K = B = 0$, $C = E + kB_0$, $Y_3 = B_0(X_{10} + kX_{14}) + Y_0$.

(4) $\widetilde{B} = 0, \widetilde{B}_0 \neq 0, \widetilde{E} = \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{\beta} = Mt$. Подстановка в (3.1) дает $C = E + B$, $K = MB_0$, $Y_4 = Y_0 + B_0X_{10} + B(X_{13} + X_{14})$.

Допускаемые подалгебры могут иметь размерность 3, 4 и 5. Остается рассмотреть определяющее соотношение (3.2).

Если $e = \widetilde{S}$, то (3.2) не дает связей на постоянные B_0, N_0, E, B, C, C_0, определяются только B_1, Γ, Γ_1. Допускаемые подалгебры получаются в зависимости от соотношения (3.1), т. е. в случаях (0)–(4). Они имеют размерности 3, 4 и 5. Далее такое уравнение состояния исключается из рассмотрения ($\widetilde{e}_{VV} \neq 0$).

Будем строить оптимальные системы подалгебр для каждого из случаев (0)–(4). Подобным подалгебрам соответствуют эквивалентные уравнения состояния. Остается определить уравнения состояния, для которых допускается подалгебра из оптимальной системы.

Оптимальная система строится с точностью до внутренних автоморфизмов, т. е. перечисляет классы подобных подалгебр.

Внутренние автоморфизмы вычисляются по правилу [4]

$$\overline{X}_a = [Y, \overline{X}], \quad \overline{X}|_{a=0} = X = \sum_{i=1}^{k} x_iX_i,$$

где X — произвольный оператор алгебры в базисе X_i, $\overline{X}$ — преобразованный оператор, a — параметр автоморфизма, Y — базисный оператор алгебры.

В базисе каждого из случаев (1)–(4) есть операторы случая (0), которые образуют идеал J_0. Подалгебры идеала J_0 можно не учитывать в оптимальных системах случаев (1)–(4).

(0) Обозначим $\widetilde{X}_{12} = X_{12} + X_{14}$. Есть только один ненулевой коммутатор $[X_{15}, \widetilde{X}_{12}] = X_{15}$. Оператор $\widetilde{X}_{11}$ образует центр. Имеем два автоморфизма $A_1 : \overline{x}_{15} = bx_{15}$; $A_2 : \overline{x}_{15} = x_{15} + ax_{12}$. Номер подалгебры в оптимальной системе обозначим через $k.i$, где k — размерность подалгебры, i — порядковый номер в данной размерности:

1.1) $\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}$,

1.2) $X_{15} + \delta\widetilde{X}_{11}$,

1.3) $\widetilde{X}_{11}$,

2.1) $\{X_{15}, \widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}\}$,
2.2) $\{\widetilde{X}_{12}, \widetilde{X}_{11}\}$,
2.3) $\{X_{15}, \widetilde{X}_{11}\}$.
Здесь и далее α — произвольная постоянная, δ равно 0 или 1.

Для подалгебры 1.1 общий оператор имеет следующий вид с произвольной постоянной λ:

$$Y_0 = \lambda(\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}) \Rightarrow N_0 = \lambda\alpha, \quad E = \lambda, \quad C_0 = 0.$$

Равенство (3.3) с $B_1 = \lambda b_1$, $\Gamma = \lambda\gamma_1$, $\Gamma_1 = \lambda\gamma_0$ принимает вид

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\alpha\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Произвольное решение этого уравнения задает уравнение состояния, с которым уравнение газовой динамики допускают подалгебру 1.1.

Подалгебра 1.2 определяет $N_0 = \lambda\delta$, $E = 0$, $C_0 = \lambda$; (3.3) $\Rightarrow \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0$.

Если в базисе подалгебры есть оператор $\widetilde{X}_{11}$, то уравнение состояния подобно следующему: $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$. Такие подалгебры можно не рассматривать.

Подалгебра 2.1 имеет общий оператор (λ, μ — произвольные постоянные)

$$Y_0 = \lambda(\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}) + \mu X_{15} \Rightarrow N_0 = \alpha\lambda, \quad E = \lambda, \quad C_0 = \mu.$$

Подстановка в (3.3), расщепление по λ и μ приводит к переопределенной системе уравнений ($B_1 = \beta_1\lambda + \beta_2\mu$, $\Gamma = \gamma_1\lambda + \gamma_2\mu$, $\Gamma_1 = \gamma_{01}\lambda + \gamma_{02}\mu$):

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\alpha\widetilde{e} - \beta_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S}.$$

Из первого уравнения следуют равенства $(\gamma_2, \beta_2)(\alpha - 1) = 0$, $Vg' = 2\alpha g - b_1 V - \gamma_{01}$. Используя преобразования эквивалентности, получим эквивалентные уравнения состояния $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G(\ln V$ при $\alpha = 0$, $V\ln V$ при $\alpha = \frac{1}{2}$, $V^{2\alpha}$ при $\alpha \neq 0, \frac{1}{2}, 1)$. Если $\alpha = 1$, то $\widetilde{e} \sim GV^2 + G_0 V\widetilde{S} + \delta(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S})$. Здесь и далее G_0, G — постоянные.

1. Обозначим $\widetilde{X}_{13} = X_{13} + kX_{14}$, $Y_1 = N_0\widetilde{X}_{11} + B\widetilde{X}_{13} + E\widetilde{X}_{12} + C_0 X_{15}$. Ненулевые коммутаторы алгебры таковы: $[X_{15}, \widetilde{X}_{12}] = X_{15}$, $[X_{15}, \widetilde{X}_{13}] = kX_{15}$. Получим два автоморфизма $A_1 : \overline{x}_{15} = bx_{15}$, $A_2 : \overline{x}_{15} = x_{15} + (x_{12} + kx_{13})a$.

Оптимальная система состоит из следующих подалгебр (α, β, γ — постоянные, подалгебры из J_0 и с базисным оператором $\widetilde{X}_{11}$ исключены):
1.1) $\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
1.2) $X_{15} + \widetilde{X}_{13} - k\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
2.1) $\{\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}, \ \widetilde{X}_{13} + \beta\widetilde{X}_{11}\}$,
2.2) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{15}\}$,
2.3) $\{\widetilde{X}_{13} - k\widetilde{X}_{12} + \gamma\widetilde{X}_{11}, X_{15} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, \ \alpha^2 + \beta^2 = \delta\}$,
3.1) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{11}, \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{15}\}$.
Соотношение (3.2) имеет вид

$$EV\widetilde{e}_V + ((E + kB)\widetilde{S} + C_0)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(N_0 - B)\widetilde{e} - B_1 V - \Gamma\widetilde{S} - \Gamma_1. \tag{3.4}$$

Подалгебра 1.1 определяет постоянные $B = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = 0$, $B_1 = \lambda b_1$, $\Gamma = \lambda\gamma_1$, $\Gamma_1 = \lambda\gamma_0$ через произвольную величину λ.

Подстановка в (3.4) и расщепление по λ дает

$$\alpha V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}}(\alpha+k) = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.2 определяет $C_0=\lambda$, $B=\lambda$, $N_0=\lambda\beta$, $E=-k\lambda$. Соотношение (3.4) становится уравнением для функции $\widetilde{e}$:

$$-kV\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_S = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 2.1 задается оператором вида

$$Y_1 = \lambda(\widetilde{X}_{13} + \beta\widetilde{X}_{11}) + \mu(\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}).$$

Определяются постоянные $C_0=0$, $B=\lambda$, $N_0=\lambda\beta+\mu\alpha$, $E=\mu$.

Соотношение (3.4) расщепляем по λ и μ ($B_1=b_1\lambda+b_2\mu$, $\Gamma=\gamma_1\lambda+\gamma_2\mu$, $\Gamma_1=\gamma_{01}\lambda+\gamma_{02}\mu$):

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_S = 2\alpha\widetilde{e} - b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02},$$

$$k\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}.$$

Если $\beta\neq 1$, то $b_1\sim 0$, $\gamma_{01}\sim 0$,

$$\widetilde{e} \sim g(V)|\widetilde{S}|^{2k^{-1}(\beta-1)} - k^{-1}\gamma_1\widetilde{S}\begin{cases} \frac{k}{k+2-2\beta}, \\ \ln|\widetilde{S}|, \qquad \beta = 1+k/2. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует $b_2=\gamma_{02}=0$; $Vg' = 2k^{-1}(\alpha k-\beta+1)g$, $\gamma_1(1-2\alpha)=\gamma_2(k+2-2\beta)$ при $\beta\neq 1+k/2$ и $\gamma_1(2\alpha-1)=0$, $Vg'=(2\alpha-1)g+\gamma_1/k-\gamma_2$ при $\beta=1+k/2$.

Уравнение состояния принимает вид

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G(V^{\alpha k-\beta+1}|\widetilde{S}|^{\beta-1})^{2/k} \quad \text{при} \quad \beta\neq 1, 1+k/2,$$

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G\widetilde{S}V^{2\alpha-1} + G_0\widetilde{S}\ln|\widetilde{S}|, \quad \beta=1+k/2,\ \alpha\neq 1/2,$$

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0\widetilde{S}\ln|\widetilde{S}| + G\widetilde{S}\ln V \quad \text{при} \quad \alpha=1/2,\ \beta=1+k/2.$$

Если $\beta=1$, то

$$\widetilde{e} = -k^{-1}\gamma_1\widetilde{S} - k^{-1}(b_1V+\gamma_{01})\ln|\widetilde{S}| + g(V)$$

и из первого уравнения следует $\alpha\gamma_{01}=0$, $b_1(2\alpha-1)=0$, $k\gamma_2=\gamma_1(1-2\alpha)$, $Vg' = 2\alpha g + (k^{-1}b_1-b_2)V + k^{-1}\gamma_{01} - \gamma_{02}$.

Если $\alpha=0$, то $b_1=0$, $b_2\sim 0$, $\widetilde{e}\sim\delta\widetilde{S}+G_0\ln|\widetilde{S}|+G\ln|V|$.

Если $\alpha\neq 0, 1/2$, то $b_1=0$, $\widetilde{e}\sim\delta\widetilde{S}+GV^{2\alpha}$.

Если $\alpha=1/2$, то $\gamma_{01}=0$, $\gamma_{02}\sim 0$, $\widetilde{e}\sim\delta\widetilde{S}+G_0V\ln|\widetilde{S}|+GV\ln|V|$.

Подалгебра 2.2 определяет $C_0=\mu$, $B=\lambda$, $N_0=\lambda\beta$, $E=\lambda\alpha$. Из (3.4) следуют уравнения

$$\alpha V\widetilde{e}_V + (\alpha+k)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Система совместна при условии

$$\gamma_2(\alpha+k-\beta+1)=0, \quad b_2(2\alpha+k-2\beta+2)=0, \quad \gamma_1=\gamma_{02}(\alpha+k-2\beta+2).$$

Общее решение имеет вид

$$\widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S}^2 - (b_2V + \gamma_{02})\widetilde{S}, \quad \alpha V g' = 2(\beta-1)g - \gamma_{01} - b_1V.$$

Подалгебра 2.3 определяет $B = \lambda$, $N_0 = \lambda\gamma + \mu\beta$, $E = -k\lambda + \mu\alpha$, $C_0 = \mu$. Соотношение (3.4) расщепляется по λ и μ на два уравнения

$$-kV\widetilde{e}_V = 2(\gamma-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\alpha V\widetilde{e}_V + (\alpha\widetilde{S}+1)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Если $\gamma \neq 1-k/2$, то $\gamma_{01} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + g(\widetilde{S})V^{2k^{-1}(1-\gamma)}$. Из второго уравнения следует $b_2 = 0$, $\gamma_1 = 2(\gamma-1)\gamma_{02}$, $2\gamma_2(\gamma-1) = \gamma_1(2\beta-\alpha)$, $g'(\alpha\widetilde{S}+1) = 2(\beta - \alpha k^{-1}(1-\gamma))g$. Уравнение состояния принимает вид

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV^{2k^{-1}(1-\gamma)}\begin{cases} e^{2\beta\widetilde{S}}, & \alpha = 0, \\ |\alpha\widetilde{S}+1|^{2\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma-1}{k}\right)}, & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Если $\gamma = 1-k/2$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV\ln V + Vg(\widetilde{S})$, и из второго уравнения следует $G(2\beta-\alpha) = 0$, $\gamma_{02} = -\delta$, $\gamma_2 = (2\beta-\alpha)\delta$, $g'(\alpha\widetilde{S}+1) = g(2\beta-\alpha) - \beta_2 - \alpha G$. Новое уравнение состояния получается при $2\beta = \alpha$:

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV\ln V + G_0V\begin{cases} \widetilde{S}, & \alpha = 0, \\ \ln|\alpha\widetilde{S}+1|, & \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Если $\gamma = 1$, то $\widetilde{e} \sim k^{-1}((\gamma_1\widetilde{S}+\gamma_{01})\ln V + g(\widetilde{S}))$, $b_1 \sim 0$ и из второго уравнения следует $\gamma_1(2\beta-\alpha) = 0$, $\gamma_1 = 2\beta\gamma_{01}$, $b_2 = 0$, $(\alpha\widetilde{S}+1)g' = 2\beta g - (\gamma_2 + \alpha k^{-1}\gamma_1)\widetilde{S} - \gamma_{02} - \alpha k^{-1}\gamma_{01}$.

При $\beta = 0$ отсюда получим

$$\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0\ln|\alpha\widetilde{S}+1| + G\ln V, \text{ если } \alpha \neq 0;$$

$$\widetilde{e} \sim (\widetilde{S}^2 \text{ или } \widetilde{S}) + G\ln V, \text{ если } \alpha = 0 \text{ и } \gamma_2 \neq 0 \text{ или } \gamma_2 = 0.$$

Если $\beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 2\beta$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G|\alpha\widetilde{S}+1|^{\frac{2\beta}{\alpha}}$.

Если $\alpha = 2\beta \neq 0$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + (\alpha\widetilde{S}+1)(G_0\ln|\alpha\widetilde{S}+1| + G\ln V)$.

Если $\beta \neq 0$, $\alpha = 0$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0(2\beta\widetilde{S}+1)\ln V + Ge^{2\beta\widetilde{S}}$.

Подалгебра 3.1 определяет $B = \lambda$, $N_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$, $E = \mu$, $C_0 = \nu$ через три произвольных параметра λ, μ и ν. Соотношение (3.4) расщепляется по λ, μ, ν на три равенства

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3V - \gamma_3\widetilde{S} - \gamma_{03} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_3\widetilde{S}^2 - (b_3V + \gamma_{03})\widetilde{S},$$

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - \beta_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02},$$

$$k\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01} \Rightarrow (\alpha-1-k)\gamma_3 = 0, \ (2\alpha-2-k)b_3 = 0,$$

$$b_1 \sim 0, \quad \gamma_{01} \sim 0, \quad (\alpha-1)g = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_{03}(k+2-2\alpha).$$

Если $\alpha = 1$, то $\gamma_3 = b_3 = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V)$, $Vg' = 2\beta g - b_2V - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G\ln V$ при $\beta = 0$; $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV\ln V$ при $\beta = 1/2$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV^{2\beta}(\beta \neq 1/2)$.

Если $\alpha \neq 1$, то $g \sim 0$ и либо $\gamma_3 \neq 0$, $b_3 = 0$, $\alpha = k+1$, $\beta = 1$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}^2$, либо $\gamma_3 = 0$, $b_3 \neq 0$, $\alpha = 1+k/2$, $\beta = 1$, $e \sim (V+V_0)\widetilde{S}$.

2. Четырехмерная алгебра является прямой суммой идеала $\{\widetilde{X}_{12}, X_{15}\}$ и абелева центра $\{X_{13}, \widetilde{X}_{11}\}$. Единственный ненулевой коммутатор $[X_{15}, \widetilde{X}_{12}] = X_{15}$ порождает автоморфизмы $A_1 : \overline{x}_{15} = bx_{15}$, $A_2 : \overline{x}^{15} = x^{15} + x^{12}a$.

Оптимальная система подалгебр, содержащих оператор X_{13} и не содержащих $\widetilde{X}_{11}$ в базисе, такова:

1.1) $\widetilde{X}_{12} + \alpha X_{13} + \beta \widetilde{X}_{11}$, 1.2) $X_{15} + X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}$, 1.3) $X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}$,

2.1) $\{\widetilde{X}_{12} + \alpha X_{13} + \beta \widetilde{X}_{11}, X_{15}\}$, 2.2) $\{\widetilde{X}_{12} + \beta \widetilde{X}_{11}, X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}\}$,

2.3) $\{X_{15} + \delta \widetilde{X}_{11}, X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}\}$;

3.1) $\{\widetilde{X}_{12} + \beta \widetilde{X}_{11}, X_{15}, X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}\}$.

Соотношение (3.2) принимает вид

$$EV\widetilde{e}_V + (E\widetilde{S} + C_0 + MBV)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(N_0 - B)\widetilde{e} - B_1 V - \Gamma \widetilde{S} - \Gamma_1. \tag{3.5}$$

Подалгебра 1.1 определяет постоянные $B = \lambda\alpha$, $\alpha \neq 0$, $N_0 = \lambda\beta$, $E = \lambda$, $C_0 = 0$ через произвольную величину λ.

Соотношение (3.5) является уравнением для $\widetilde{e}$:

$$V\widetilde{e}_V + (\widetilde{S} + M\alpha)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta - \alpha)\widetilde{e} - \beta_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.2 определяет постоянные $B = \lambda$, $N_0 = \alpha\lambda$, $E = 0$, $C_0 = \lambda$, с которыми (3.5) задает уравнение

$$(MV + 1)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 S - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.3 определяет постоянные $B = \lambda$, $N_0 = \alpha\lambda$, $E = C_0 = 0$, с которыми (3.5) становится уравнением

$$M\alpha V\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 2.1 задает произвольный оператор в виде

$$Y_2 = \lambda(\widetilde{X}_{12} + \alpha X_{13} + \beta \widetilde{X}_{11}) + \mu X_{15} \Rightarrow B = \lambda\alpha, N_0 = \lambda\beta, E = \lambda, C_0 = \mu, \alpha \neq 0.$$

Соотношение (3.5) расщепляем по λ и μ:

$$V\widetilde{e}_V + (\widetilde{S} + M\alpha V)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta - \alpha)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S}.$$

Из первого уравнения следует

$$(\beta - \alpha - 1)\gamma_2 = 0, \quad M\alpha\gamma_2 = 2(\beta - \alpha - 1)b_2, \quad \gamma_1 = \gamma_{02}(1 - 2\beta + 2\alpha),$$

$$Vg' = 2(\beta - \alpha)g - \gamma_{01} - b_1 V + M\alpha V(b_2 V + \gamma_{02}).$$

Отсюда $\gamma_2 = 0$, $(\beta - \alpha - 1)b_2 = 0$.

Если $\beta = \alpha$, то $b_2 = 0$, $M\alpha\gamma_{02} - b_1 \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G \ln V$.

Если $\beta = \alpha + 1/2$, то $b_2 = 0$, $\gamma_{01} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV \ln V$.

Если $\beta = \alpha + 1$, то $\widetilde{e} \sim (V_0 - V)\widetilde{S} + GV^2 + M\alpha V^2 \ln V$ при $b_2 \neq 0$.

Если $\beta \neq \alpha$, $\beta \neq \alpha + 1/2$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV^{2(\beta - \alpha)}$.

Подалгебра 2.2 определяет постоянные $B = \mu$, $N_0 = \lambda\beta + \mu\alpha$, $E = \lambda$, $C_0 = 0$. Соотношение (3.5) расщепляется на два:

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 S - \gamma_{01}, \quad MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2 \overline{S} - \gamma_{02}.$$

При $\alpha \neq 1$ интегрируя второе уравнение и подставляя в первое, получим

$$\widetilde{e} \sim \delta \widetilde{S} + GV^{2\beta} e^{2\frac{\alpha-1}{MV}\widetilde{S}}.$$

При $\alpha = 1$ аналогичные действия дают

$$\widetilde{e} = -\frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{MV}\widetilde{S}^2 - \frac{b_2 V + \gamma_{02}}{MV}\widetilde{S} + g(V),$$

$$(2\beta-1)\gamma_2 = 0, \quad \beta\gamma_{02} = 0, \quad M\gamma_1 + (2\beta-1)\gamma_2 = 0, \quad Vg' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Если $\beta = 0$, то

$$\gamma_2 = 0, \quad b_1 \sim 0, \quad \widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0 V^{-1}\widetilde{S} + G\ln V.$$

Если $\beta \neq 0$, то

$$\gamma_{02} = 0, \quad \gamma_{01} \sim 0, \quad \widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV^{2\beta}$$

при $\beta \neq 1/2$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV\ln V$ при $\beta = 1/2$.

Подалгебра 2.3 определяет постоянные $B = \mu$, $N_0 = \lambda\delta + \mu\alpha$, $E = 0$, $C_0 = \lambda$.

Соотношение (3.5) расщепляется на два:

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha-1)\widetilde{e} - b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}, \quad \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}.$$

При $\delta = 1$ имеем $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + g(V)e^{2\widetilde{S}}$. Из первого уравнения следует $g \sim 0$. При $\delta = 0$ получим $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$ при $\alpha \neq 1$ и $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V)$ при $\alpha = 1$.

Подалгебра 3.1 определяет постоянные $B = \nu$, $N_0 = \lambda\beta + \nu\alpha$, $E = \lambda$, $C_0 = \mu$ через произвольные величины λ, μ, ν. Соотношение (3.5) расщепляется на три равенства

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}, \quad MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha-1)\widetilde{e} - b_3V - \gamma_3\widetilde{S} - \gamma_{03},$$

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_S = 2\beta\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}.$$

Из первого уравнения получим

$$\widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S}^2 - (b_2V + \gamma_{02})\widetilde{S} + g(V).$$

Подстановка в последующие уравнения и расщепление по $\widetilde{S}$ дает

$$\gamma_2 = 0, \quad (\alpha-1)b_2 = 0, \quad \gamma_3 = 2(1-\alpha)\gamma_{02}, \quad (\beta-1)b_2 = 0,$$

$$\gamma_1 = (1-2\beta)\gamma_{02}, \quad 2(\alpha-1)g = (b_3 - M\gamma_{02})V - Mb_2V^2 + \gamma_{03}, \quad Vg' = 2\beta g - b_1V - \gamma_{01}.$$

Если $\alpha \neq 1$, то $b_2 = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$. Если $\alpha = 1$, то $b_2 = 0$, $b_3 = M\gamma_{02}$, $\gamma_{03} = 0$.

Решение дифференциального уравнения таково:

$$g = GV^{2\beta} - b_1V\begin{cases} \frac{1}{1-2\beta}, & \beta \neq \frac{1}{2},\ 0, \\ \ln V, & \beta = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

а при $\beta = 0$ имеем $g \sim G\ln V$. Уравнение состояния записывается в виде

$$\widetilde{e} = \widetilde{S} + G\begin{cases} V^{2\beta}, & \beta \neq 0,\ \frac{1}{2}, \\ V\ln V, & \beta = \frac{1}{2}, \\ \ln V, & \beta = 0. \end{cases}$$

3. Обозначим $\widetilde{X}_{10} = X_{10} + kX_{14}$. Четырехмерная алгебра Ли является полупрямой суммой абелевой подалгебры $\{\widetilde{X}_{10}, \widetilde{X}_{12}\}$ и идеала $X_{15} \oplus \widetilde{X}_{11}$, где $\widetilde{X}_{11}$ — центр. Есть два ненулевых коммутатора

$$[X_{15}, \widetilde{X}_{10}] = kX_{15}, \quad [X_{15}, \widetilde{X}_{12}] = X_{15},$$

которые порождают автоморфизмы

$$A_1 : \overline{x}^{15} = bx^{15}; \quad A_2 : \overline{x}^{15} = x^{15} + (x^{12} + kx^{10})a.$$

Приведем оптимальную систему подалгебр, содержащих оператор $\widetilde{X}_{10}$ и не содержащих $\widetilde{X}_{11}$ в базисе:

1.1) $\widetilde{X}_{10} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}$, 1.2) $\widetilde{X}_{10} - k\widetilde{X}_{12} + X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
2.1) $\{\widetilde{X}_{10} + \beta\widetilde{X}_{11}, \widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11}\}$, 2.2) $\{\widetilde{X}_{10} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{15}\}$,
2.3) $\{\widetilde{X}_{10} - k\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{15} + \delta\widetilde{X}_{11}\}$,
3.1) $\{\widetilde{X}_{10} + \alpha\widetilde{X}_{11}, \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{15}\}$.

Соотношение (3.2) принимает вид

$$EV\widetilde{e}_V + ((E + kB_0)\widetilde{S} + C_0)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2N_0\widetilde{e} - B_1V - \Gamma\widetilde{S} - \Gamma_1. \tag{3.6}$$

Подалгебра 1.1 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = 0$. Соотношение (3.6) дает уравнение для уравнения состояния

$$\alpha V\widetilde{e}_V + (\alpha + k)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - \beta_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.2 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta$, $E = -k\lambda$, $C_0 = \lambda$ и уравнение состояния

$$-kV\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - \beta_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Для подалгебры 2.1 произвольный оператор

$$Y_3 = B_0\widetilde{X}_{10} + N_0\widetilde{X}_{11} + E\widetilde{X}_{12} + C_0X_{15} = \lambda(\widetilde{X}_{10} + \beta\widetilde{X}_{11}) + \mu(\widetilde{X}_{12} + \alpha\widetilde{X}_{11})$$

определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta + \mu\alpha$, $E = \mu$, $C_0 = 0$. Соотношение (3.6) расщепляется:

$$Ve_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\alpha\widetilde{e} - b_2V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02},$$

$$k\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01} \Rightarrow$$

$$\widetilde{e} = g(V)|\widetilde{S}|^{\frac{2\beta}{k}} + (b_1V + \gamma_{01})\left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2\beta},\ \beta \neq 0, \\ -\frac{1}{k}\ln|\widetilde{S}|,\ \beta = 0 \end{array}\right\} - \gamma_1\widetilde{S}\left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{k-2\beta}, & k \neq 2\beta, \\ \frac{1}{k}\ln|\widetilde{S}|, & k = 2\beta \neq 0. \end{array}\right.$$

Если $\beta \neq 0$, $k \neq 2\beta$, то $b_1 \sim 0$, $\gamma_{01} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim g(V)|\widetilde{S}|^{\frac{2\beta}{k}} + \delta\widetilde{S}$. Из первого уравнения следует $\gamma_{02} = 0$, $b_2 = 0$, $\gamma_2 = \delta(2\alpha - 1)$,

$$Vg' = 2g\left(\alpha - \frac{\beta}{k}\right) \Rightarrow \widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV^{2(\alpha - \frac{\beta}{k})}|\widetilde{S}|^{\frac{2\beta}{k}}.$$

Если $\beta \neq 0$, $k = 2\beta \neq 0$, то $b_1 \sim 0$, $\gamma_{01} \sim 0$, $\widetilde{e} = g(V)\widetilde{S} - \frac{\gamma_1}{k}\widetilde{S}\ln\widetilde{S}$. Из первого уравнения следует $\gamma_1(2\alpha - 1) = 0$, $b_2 = 0$, $\gamma_{02} = 0$, $Vg' = (2\alpha - 1)g + \frac{\gamma_1}{k} - \gamma_2$ и уравнение состояния принимает вид

$$\widetilde{e} = G\widetilde{S}\left\{\begin{array}{ll} V^{2\alpha-1} + \delta, & 2\alpha \neq 1, \\ \ln V + \delta\ln|\widetilde{S}|, & 2\alpha = 1. \end{array}\right.$$

Если $\beta = 0$, то

$$\widetilde{e} = g(V) + k^{-1}(b_1 V + \gamma_{01}) \ln|\widetilde{S}| - k^{-1}\gamma_1 \widetilde{S}$$

и из первого уравнения следует $\alpha\gamma_{01} = 0$, $b_1(2\alpha - 1) = 0$, $\gamma_2 = k^{-1}(1 - 2\alpha)\gamma_1$, $Vg' = 2\alpha g + k^{-1}(b_1 V + \gamma_{01}) - \gamma_{02} - b_2 V$.

При $\alpha \neq 0$ будет $\gamma_{01} = 0$, $\gamma_{02} \sim 0$, $g \sim G\begin{cases} V^{2\alpha}4, \ 2\alpha \neq 1, \\ V \ln V, \ 2\alpha = 1 \end{cases}$ и $\widetilde{e} = GV^{2\alpha} + \widetilde{S}$, если $2\alpha \neq 1$; $\widetilde{e} = GV \ln V + G_0 V \ln|\widetilde{S}| + \delta\widetilde{S}$, если $2\alpha = 1$.

При $\alpha = 0$ имеем $b_1 = 0$, $\widetilde{e} \sim G \ln V + G_0 \ln|\widetilde{S}| + \delta\widetilde{S}$.

Подалгебра 2.2 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = \mu$. Соотношение (3.6) расщепляется:

$$\alpha V \widetilde{e_V} + (\alpha + k)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S} + g(V).$$

Из первого уравнения следуют соотношения

$$\gamma_2(\beta - \alpha - k) = 0, \quad b_2(2\beta - 2\alpha - k) = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_{02}(\alpha - 2\beta + k),$$

$$\alpha V g' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Подалгебра 2.3 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta + \mu\delta$, $E = -\lambda k$, $C_0 = \mu$. Соотношение (3.6) расщепляется:

$$-kV\widetilde{e}_V = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

При $\delta = 0$ получаем соотношение, как для подалгебры 2.2 при $\alpha = -k$. При $\delta = 1$ имеем $b_2 \sim 0$, $\gamma_{02} \sim 0$, $\widetilde{e} = ge^{2\widetilde{S}} + \frac{1}{2}\gamma_2\big(\widetilde{S} + \frac{1}{2}\big)$. Из первого уравнения следует $b_1 = 0$, $\gamma_1 = \beta\gamma_2$, $\gamma_{01} = \frac{1}{2}\beta\gamma_2$, $g = GV^{-\frac{2\beta}{k}}$.

Подалгебра 3.1 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$, $E = \mu$, $C_0 = \nu$. Соотношение (3.6) расщепляется:

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3 V - \gamma_3 \widetilde{S} - \gamma_{03} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_3 \widetilde{S}^2 - (b_3 V + \gamma_{03})\widetilde{S},$$

$$k\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\alpha\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Последние два равенства в силу первого дают соотношения

$$\gamma_3(\alpha - k) = 0, \quad b_3(k - 2\alpha) = 0, \quad \gamma_1 = (k - 2\alpha)\gamma_{03}, \quad \gamma_3(\beta - 1) = 0, \quad b_3(\beta - 1) = 0,$$

$$\gamma_2 = \gamma_{03}(1 - 2\beta), \quad 2\alpha g = b_1 V + \gamma_{01}, \quad Vg' = 2\beta g - b_2 V - \gamma_{02}.$$

Если $\alpha \neq 0$, то $g \sim 0$, $b_2 = \gamma_{02} = 0$. При $\beta \neq 1$ следует $\gamma_3 = b_3 = 0$ и уравнение состояния $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$ рассмотрено ранее.

При $\beta = 1$ должно выполняться: либо $\alpha = k \Rightarrow b_3 = 0$, $\gamma_{03} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}^2$, либо $\alpha = \frac{1}{2}k \Rightarrow \gamma_3 = 0$, $\widetilde{e} \sim (V + V_0)\widetilde{S}$.

Если $\alpha = 0$, то $\gamma_3 = b_3 = 0$, $b_1 = \gamma_{01} = 0$, $\widetilde{e} = \widetilde{S} + g(V)$.

Уравнение для функции g имеет решение $g = GV^{2\beta}$ при $\beta \neq 0, \frac{1}{2}$; $g = G \ln V$ при $\beta = 0$; $g = GV \ln V$ при $\beta = \frac{1}{2}$.

4. Обозначим $\widetilde{X}_{13} = X_{13} + X_{14}$. Алгебру Ли размерности 5 разложим в полупрямую сумму подалгебры $\{X_{10}, \widetilde{X}_{13}\}$ и идеала J_0 или абелевой подалгебры $\{\widetilde{X}_{12}, \widetilde{X}_{13}\}$ и идеала $\{X_{10}, X_{15}, \widetilde{X}_{11}\}$. Имеем три ненулевых коммутатора

$[X_{15}, \widetilde{X}_{12}] = X_{15}$, $[X_{10}, X_{13}] = X_{10}, [X_{15}, \widetilde{X}_{13}] = X_{15}$. Внутренние автоморфизмы порождаются суперпозицией четырех:

$$A_1 : \overline{x}^{15} = bx^{15}, \quad A_2 : \overline{x}^{15} = x^{15} + (x^{12} + x^{13})a,$$

$$A_3 : \overline{x}^{15} = b_1 x^{15},\ \overline{x}^{10} = b_1 x^{10}, \quad A_4 : \overline{x}^{10} = x^{10} + x^{13} a_1.$$

Оптимальная система неподобных подалгебр, содержащих операторы X_{10} или $\widetilde{X}_{13}$ и не имеющих $\widetilde{X}_{11}$ в качестве базисного оператора, такова:

1.1) $\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
1.2) $\widetilde{X}_{13} - \widetilde{X}_{12} + X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
1.3) $\widetilde{X}_{12} + X_{10} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
1.4) $X_{10} + \delta X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$,
2.1) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{11},\ \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}\}$,
2.2) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15}\}$,
2.3) $\{\widetilde{X}_{13} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15} + X_{10}\}$,
2.4) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11}, X_{10}\}$,
2.5) $\{\widetilde{X}_{13} - \widetilde{X}_{12} + X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{10}\}$,
2.6) $\{\widetilde{X}_{12} + X_{10} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15}\}$
2.7) $\{\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{10} + \delta\widetilde{X}_{11}\}$,
2.8) $\{X_{10} + \delta\widetilde{X}_{11},\ X_{15} + \delta_1\widetilde{X}_{11}\}$,
3.1) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{11},\ \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15}\}$,
3.2) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{11},\ \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{10}\}$,
3.3) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15},\ X_{10}\}$,
3.4) $\{\widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15},\ X_{10} + \delta\widetilde{X}_{11}\}$,
4.1) $\{\widetilde{X}_{13} + \alpha\widetilde{X}_{11},\ \widetilde{X}_{12} + \beta\widetilde{X}_{11},\ X_{15},\ X_{10}\}$.

Соотношение (3.2) принимает вид

$$EV\widetilde{e}_V + ((E+B)\widetilde{S} + MB_0 V + C_0)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(N_0 - B)\widetilde{e} - B_1 V - \Gamma\widetilde{S} - \Gamma_1. \tag{3.7}$$

Подалгебра 1.1 определяет постоянные $B_0 = 0$, $B = \lambda$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = 0$, $N_0 = \lambda\beta$. Соотношение (3.7) дает уравнение

$$\alpha V\widetilde{e}_V + (\alpha+1)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.2 определяет постоянные $B_0 = 0$, $B = \lambda$, $E = -\lambda$, $C_0 = \lambda$, $N_0 = \beta\lambda$. Соотношение (3.7) принимает вид

$$-V\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.3 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $B = 0$, $E = \lambda$, $C_0 = 0$, $N_0 = \beta\lambda$. Из (3.7) следует

$$V\widetilde{e}_V + (\widetilde{S} + MV)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 1.4 определяет $B_0 = \lambda$, $B = 0$, $E = 0$, $C_0 = \delta\lambda$, $N_0 = \lambda\beta$. Из (3.7) следует

$$(MV + \delta)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0.$$

Подалгебра 2.1 определяет $B_0 = 0$, $B = \lambda$, $E = \mu$, $C_0 = 0$, $N_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02},$$

$$\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}$$

Если $\alpha \neq 1$, то $\gamma_{01} \sim 0$, $b_1 \sim 0$, $\widetilde{e} = g(V)|\widetilde{S}|^{2(\alpha-1)} - \gamma_1 \widetilde{S} \begin{cases} \frac{1}{3-2\alpha}, \alpha \neq \frac{3}{2}, \\ \ln|\widetilde{S}|, \alpha = \frac{3}{2}. \end{cases}$

Из первого уравнения при $\alpha \neq \frac{3}{2}$ будет $b_2 = \gamma_{02} = 0$, $\gamma_2 = \gamma_1 \frac{1-2\beta}{3-2\alpha}$, $Vg' = 2g(\beta-\alpha+1)$, $\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + GV^{2(\beta-\alpha+1)}|\widetilde{S}|^{2(\alpha-1)}$, при $\alpha = \frac{3}{2}$ имеем $b_2 = \gamma_{02} = 0$, $\gamma_1(2\beta-1) = 0$, $Vg' = g(2\beta-1) + \gamma_1 - \gamma_2$,

$$\widetilde{e} = -\gamma_1 \widetilde{S} \ln|\widetilde{S}| + G\widetilde{S} \begin{cases} V^{2\beta-1}, \ \beta \neq \frac{1}{2}, \\ \ln V, \ \beta = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Если $\alpha = 1$, то

$$\widetilde{e} = \gamma_1 \widetilde{S} - (b_1 V + \gamma_{01}) \ln|\widetilde{S}| + g(V).$$

Из первого уравнения получим

$$\beta\gamma_{01} = 0, \quad b_1(2\beta-1) = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_1(1-2\beta), \quad Vg' = 2\beta g + (b_1 - b_2)V + \gamma_{01} - \gamma_{02}.$$

При $\beta \neq 0$, $\beta \neq \frac{1}{2}$ будет $b_1 = \gamma_{01} = 0$, $\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + GV^{2\beta}$.

При $\beta \neq 0$, $\beta = \frac{1}{2}$ имеем $\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + G_0 V \ln|\widetilde{S}| + G \ln V$.

При $\beta = 0$ имеем $\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + G_0 \ln|\widetilde{S}| + G \ln V$.

Подалгебра 2.2 определяет постоянные $B_0 = 0$, $B = \lambda$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \lambda\beta$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$\alpha V \widetilde{e}_V + (\alpha+1)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S} + g(V).$$

Из первого уравнения следуют уравнения совместности

$$(\beta-\alpha-2)\gamma_2 = 0, \quad (2\alpha-2\beta+3)b_2 = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_{02}(\alpha-2\beta+3),$$

$$\alpha V g' = 2(\beta-1)g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Подалгебра 2.3 определяет постоянные $B_0 = \mu$, $B = \lambda$, $E = 0$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \beta\lambda$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$\widetilde{S}\widetilde{e}_S = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad (MV+1)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Условия совместности принимают вид

$$(\beta-2)\gamma_2 = 0, \quad (2\beta-3)(b_2 - M\gamma_{02}) = 0, \quad 2(\beta-1)g = b_1 V + \gamma_{01}.$$

Если $\beta \neq 1, 2, \frac{3}{2}$, то $g \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$. Если $\beta = 1$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V)$. Если $\beta = 2$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G\widetilde{S}^2(MV+1)^{-1}$. Если $\beta = 3/2$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G\widetilde{S}(MV+1)^{-1}$.

Подалгебра 2.4 определяет постоянные $B_0 = \mu$, $B = \lambda$, $E = \alpha\lambda$, $C_0 = 0$, $N_0 = \beta\lambda$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$\alpha V \widetilde{e}_V + (\alpha+1)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = -M^{-1}V^{-1}\widetilde{S}\left(\frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S} + b_2 V + \gamma_{02}\right) + g(V).$$

Условия совместности таковы:

$$(\alpha-2\beta+4)\gamma_2 = 0, \quad \gamma_{02}(2\beta-3) = 0, \quad M\gamma_1 = b_2(\alpha-2\beta+3),$$

$$\alpha V g' = 2(\beta - 1)g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Подалгебра 2.5 определяет постоянные $B_0 = \mu$, $B = \lambda$, $E = -\lambda$, $C_0 = \lambda$, $N_0 = \lambda\beta$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$-V\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow$$

$$\widetilde{e} = -M^{-1}V^{-1}\widetilde{S}(\frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S} + b_2 V + \gamma_{02}) + g(V).$$

Уравнения совместны при условии

$$\gamma_1 M = -2(\beta - 1)b_2, \quad (2\beta - 3)\gamma_2 = 0,$$

$$\gamma_2 = (2\beta - 3)\gamma_{02} \Rightarrow \gamma_2 = 0, \quad (2\beta - 3)\gamma_{02} = 0,$$

$$V g' = -2(\beta - 1)g + b_1 V - M^{-1}\gamma_{02}V^{-1} + \gamma_{01} - M^{-1}b_2.$$

Если $\beta = 1$, то $\gamma_{02} = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G \ln V$.

Если $\beta \neq 1$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, то $\gamma_{02} = 0$, $b_2 \neq 0$, $b_1 \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$.

Если $\beta = \frac{1}{2}$, то $\gamma_{02} = 0$, $b_2 \neq 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV \ln V$.

Если $\beta = \frac{3}{2}$, то $b_1 \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV^{-1}(\widetilde{S} + \ln V)$.

Подалгебра 2.6 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $B = 0$, $E = \lambda$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \lambda\beta$. Расщепление (3.7) дает

$$V\widetilde{e}_V + (\widetilde{S} + MV)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01},$$

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S} - \frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S}^2.$$

Из первого уравнения следует:

$$\gamma_1 = \gamma_{02}(1 - 2\beta), \quad \gamma_2(\beta - 1) = 0,$$

$$M\gamma_2 = 2(\beta - 1)b_2 \Rightarrow \gamma_2 = 0, \quad (\beta - 1)b_2 = 0,$$

$$V g' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01} - MV(b_2 V + \gamma_{02}).$$

Если $\beta = 0$, то $b_2 = 0$, $\gamma_{02} \neq 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G \ln V$.

Если $\beta \neq 0, \frac{1}{2}, 1$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV^{2\beta}$.

Если $\beta = \frac{1}{2}$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV \ln V$.

Если $\beta = 1$, то $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0(-V\widetilde{S} + MV^2 \ln V) + GV^2$.

Подалгебра 2.7 определяет постоянные $B_0 = \mu$, $B = 0$, $E = \lambda$, $C_0 = 0$, $N_0 = \lambda\beta + \mu\delta$. Из (3.7) следует, что

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow$$

$$\widetilde{e} \sim g(V)e^{\frac{2\widetilde{S}}{MV}} + \frac{1}{2}\gamma_2 MV\widetilde{S} + \frac{1}{2}M\left(b_2 + \frac{1}{2}M\gamma_2\right)V^2, \quad \delta = 1.$$

Из первого уравнения получим $b_1 = \gamma_{11} = \gamma_1 = 0$, $(\beta - 1)\gamma_2 = 0$, $(\beta - 1)\big(b_2 + \frac{1}{2}M\gamma_2\big) = 0$, $Vg' = 2\beta g \Rightarrow \widetilde{e} \sim GV^{2\beta}e^{\frac{2\widetilde{S}}{MV}}$ при $\beta \neq 1$; $\widetilde{e} = GV^2 e^{\frac{2\widetilde{S}}{MV}} + G_0 V^2 + \delta V\widetilde{S}$ при $\beta = 1$.

При $\delta = 0$ будет $\widetilde{e} = -\big(\frac{b_2}{M} + \frac{\gamma_{02}}{MV}\big)\widetilde{S} - \frac{1}{2}\frac{\gamma_2}{MV}\widetilde{S^2} + g(V)$. Из первого уравнения следует

$$\gamma_2(2\beta - 1) = 0, \quad \gamma_{01}(2\beta - 1) = 0, \quad M\gamma_1 = b_2(1 - 2\beta), \quad Vg' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Если $\beta = 0$, то $\gamma_2 = \gamma_{01} = 0$, $b_1 \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G \ln V$.

Если $\beta \neq 0$, то $\gamma_{01} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + GV^{2\beta}$ при $\beta \neq \frac{1}{2}$, $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + G_0 V^{-1}(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S}) + GV \ln V$ при $\beta = \frac{1}{2}$ в зависимости от того, будет $\gamma_2 \neq 0$ или $\gamma_2 = 0$.

Подалгебра 2.8 определяет постоянные $B_0 = \lambda$, $B = 0$, $E = 0$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \lambda\delta + \mu\delta_1$.

Из (3.7) следует

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta_1\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

При $\delta_1 = 1$ будет $\widetilde{e} = e^{2\widetilde{S}}g(V) + \gamma_2\widetilde{S}$. Из первого уравнения $(MV + \delta)g = 0 \Rightarrow \widetilde{e} \sim \widetilde{S}$.

При $\delta_1 = 0$ имеем $\widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S} + g(V)$. Из первого уравнения $\delta\gamma_2 = 0$, $M\gamma_2 = 2\delta b_2$, $\gamma_1 = -2\delta\gamma_{02} \Rightarrow \gamma_2 = 0$, $\delta b_2 = 0$, $2\delta g(V) = (b_1 - M\gamma_{02})V - Mb_2V^2 + \gamma_{01} \Rightarrow b_2 = 0$.

Если $\delta = 1$, то $g \sim 0$ и $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$.

Если $\delta = 0$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V)$ и подалгебра 2.8 вложена в подалгебру 3.3 с таким же уравнением состояния.

Подалгебра 3.1 определяет постоянные $B_0 = 0$, $B = \lambda$, $E = \mu$, $C_0 = \nu$, $N_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3 V - \gamma_3\widetilde{S} - \gamma_{03} \Rightarrow \widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_3\widetilde{S}^2 - (b_3 V + \gamma_{03})\widetilde{S} + g(V),$$

$$\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad V\widetilde{e}_{\widetilde{V}} + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Система совместна при выполнении условий

$$\gamma_3(\alpha - 2) = 0, \quad b_3(3 - 2\alpha) = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_{03}(3 - 2\alpha), \quad 2(\alpha - 1)g = b_1 V + \gamma_{01};$$

$$\gamma_3(\beta - 1) = 0, \quad b_3(\beta - 1) = 0, \quad \gamma_2 = \gamma_{13}(1 - 2\beta), \quad Vg' = 2\beta g - b_2 V - \gamma_{02}.$$

Если $\alpha = 1$, то $b_1 = \gamma_{11} = 0$, $\gamma_3 = b_3 = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G\begin{cases} \ln V, & \beta = 0, \\ V\ln V, & \beta = 1/2, \\ V^{2\beta}, & \beta \neq 0, 1/2. \end{cases}$

Если $\alpha \neq 1$, то $g \sim 0$, $b_2 = \gamma_{02} = 0$, $\beta = 1$, $\alpha = 2$ или $\frac{3}{2}$ (иначе $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$).

При $\alpha = 2$ будет $b_3 = 0$, $\gamma_{03} \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}^2$.

Если $\alpha = \frac{3}{2}$, то $\gamma_3 = 0$, $\widetilde{e} \sim (V + V_0)\widetilde{S}$.

Подалгебра 3.2 определяет постоянные $B_0 = \nu$, $B = \lambda$, $E = \mu$, $C_0 = 0$, $N_0 = \alpha\lambda + \beta\mu$. Соотношение (3.7) расщепляется:

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3 V - \gamma_3\widetilde{S} - \gamma_{03} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\frac{\gamma_3}{MV}\widetilde{S}^2 - \frac{b_3 V + \gamma_{03}}{MV}\widetilde{S},$$

$$V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2\widetilde{S} - \gamma_{02}, \quad \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_{01}.$$

Система совместна при условиях

$$\gamma_3(\alpha - 2) = 0, \quad \gamma_{03}(2\alpha - 3) = 0, \quad M\gamma_1 = b_3(3 - 2\alpha), \quad \gamma_3(2\beta - 1) = 0,$$

$$\gamma_{03}\beta = 0, \quad M\gamma_2 = b_3(1 - 2\beta), \quad 2(\alpha - 1)g(V) = b_1 V + \gamma_{01}, \quad Vg' = 2\beta g - b_2 V - \gamma_{02}.$$

Если $\alpha \neq 1$, то $g \sim 0$, $b_2 = \gamma_{02} = 0$, $\gamma_3^2 + \gamma_{03}^2 \neq 0$ (иначе $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$).

При $\gamma_3 \neq 0$ будет $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma_{03} = 0$, $\widetilde{e} \sim \delta\widetilde{S} + GV^{-1}\widetilde{S}^2$.

При $\gamma_3 = 0$ имеем $\gamma_{03} \neq 0$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = 0$, $\widetilde{e} \sim (\delta + GV^{-1})\widetilde{S}$.

Если $\alpha = 1$, то $b_1 = \gamma_{01} = 0$, $\gamma_3 = \gamma_{03} = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G\begin{cases} \ln V, & \beta = 0, \\ V \ln V, & \beta = \frac{1}{2}, \\ V^{2\beta}, & \beta \neq 0, \frac{1}{2}. \end{cases}$

Подалгебра 3.3 определяет постоянные $B_0 = \nu$, $B = \lambda$, $E = \lambda\alpha$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \lambda\beta$.

Из (3.7) следуют равенства

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3 V - \gamma_3 \widetilde{S} - \gamma_{03}, \quad \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V),$$

$$\alpha V \widetilde{e}_V + (\alpha + 1)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01} \Rightarrow \alpha V g' = 2(\beta - 1) g - b_1 V - \gamma_{01}.$$

Если $\alpha = 0$, $\beta = 1$, то $b_1 = \gamma_{01} = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V)$.

Если $\alpha = 0$, $\beta \neq 1$, то $g \sim 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$.

Если $\alpha \neq 0$, то $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G\begin{cases} \ln V, & \beta = 1, \\ V \ln V, & \alpha = 2(\beta - 1), \\ V^{2\frac{\beta - 1}{\alpha}}, & \alpha \neq 2(\beta - 1). \end{cases}$

Подалгебра 3.4 определяет постоянные $B_0 = \nu$, $B = 0$, $E = \lambda$, $C_0 = \mu$, $N_0 = \lambda\beta + \nu\delta$. Из (3.7) следуют равенства

$$\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02} \Rightarrow \widetilde{e} = g(V) - \frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S},$$

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\delta\widetilde{e} - b_3 V - \gamma_3 \widetilde{S} - \gamma_{03}, \quad V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}.$$

Система совместна при выполнении условий

$$\gamma_2 = 0, \quad \delta b_2 = 0, \quad \gamma_3 + 2\delta\gamma_{02} = 0, \quad b_2(\beta - 1) = 0,$$

$$\gamma_1 = \gamma_{02}(1 - 2\beta), \quad 2\delta g = b_3 V + \gamma_{03} - MV(b_2 V + \gamma_{02}),$$

$$Vg' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01} \Rightarrow b_2 = 0, \quad \widetilde{e} \sim \widetilde{S} + g(V).$$

Если $\delta = 1$, то $g \sim 0$, $b_1 = \gamma_{01} = 0$, $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$.

Если $\delta = 0$, то $b_3 = M\gamma_{02} \neq 0$, $\gamma_{03} = 0 = \gamma_3$, $g \sim G\begin{cases} \ln V, & \beta = 0, \\ V \ln V, & \beta = \frac{1}{2}, \\ V^{2\beta}, & \beta \neq 0, \ \frac{1}{2}. \end{cases}$

Подалгебра 4.1 определяет постоянные $B_0 = \sigma$, $B = \lambda$, $E = \mu$, $C_0 = \nu$, $N_0 = \lambda\alpha + \mu\beta$. Соотношение (3.7) задает 4 уравнения

$$MV\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_4 V - \gamma_4 \widetilde{S} - \gamma_{04}, \quad \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = -b_3 V - \gamma_3 \widetilde{S} - \gamma_{03},$$

$$\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_{01}, \quad V\widetilde{e}_V + \widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_2 V - \gamma_2 \widetilde{S} - \gamma_{02}.$$

Из совместности следует: $\alpha = 1$ (иначе $\widetilde{e} \sim \widetilde{S}$), $\widetilde{e} \sim \widetilde{S} + G\begin{cases} \ln V, \ \beta = 0, \\ V \ln V, \ \beta = \frac{1}{2}, \\ V^{2\beta}, \ \beta \neq 0, \ \frac{1}{2}. \end{cases}$

Уравнения состояния такие же, как для подалгебр 2.5 ($\beta = 1$, $\frac{1}{2}$), 3.4, 3.3 ($\alpha \neq 0$), 3.2 ($\alpha = 1$), 3.1 ($\alpha = 1$), 2.7 ($\delta = 0; \beta = 0$ или $\beta \neq \frac{1}{2}$), 2.6 ($\beta = 0$, $\frac{1}{2}$ или $\beta \neq 0$, $\frac{1}{2}, 1$), которые являются подалгебрами алгебры 4.1. Подалгебра 2.3 ($\beta = 1$) вложена в подалгебру 3.3 ($\alpha = 0$, $\beta = 1$) с одним и тем же уравнением состояния.

Теорема. *Групповая классификация уравнений газовой динамики* (1.1), (1.2), (1.4) *с релаксирующими уравнениями состояния* (2.4) *и тождественно выполненном определяющим соотношением* (2.5) *задается табл.* 1 *подалгебр, расширяющих ядро* L_9.

Замечание 1. В табл. 1 представлена подалгебра наибольшей размерности для одного и того же уравнения состояния.

Замечание 2. В табл. 1 постоянные α, β, γ определяют подалгебру и являются инвариантами автоморфизмов; G, G_0, V_0, γ_{0i}, b_i — произвольные постоянные; постоянные δ, δ_1 равны 0 или 1.

§ 4. Случай $\widetilde{\gamma}_S \neq 0$, $\widetilde{N} = 0$, $N \neq 0$

Уравнение (2.6) имеет общее решение

$$e = V^{-\frac{2}{3}} e_1(t,S) + \frac{1}{5} V\alpha(t,S) + \frac{1}{2}\alpha_0(t,S).$$

Подстановка в (2.5) и расщепление по V приводит к эквивалентному уравнению состояния

$$e \sim S + \widetilde{\beta}'(t)V + E_0 V^{-\frac{2}{3}}, \tag{4.1}$$

$E_0 \neq 0$ — постоянная, функция $\widetilde{\beta}(t)$ определена с точностью до постоянного слагаемого и $\widetilde{\beta}'' \neq 0$. Уравнение (2.4) тождественно выполнено.

Из определяющего соотношения (2.2) следует

$$\gamma = S(\Gamma - 2Nt) + \Gamma_1, \quad \beta = \widetilde{\beta}'(\Gamma - 2Nt) - 3N\widetilde{\beta} + B_1,$$

где Γ, Γ_1, B_1 — постоянные.

Из (2.3) следуют равенства $E = 3(B - N_0)$, $\eta = S(2N_0 - 2B - \Gamma) - \Gamma_1$, $\widetilde{\beta}''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\beta}'(3Nt + 5B - 5N_0 + \Gamma) - 3N\widetilde{\beta} + B_1 = 0$. Дифференцирование по t приводит к уравнению

$$\widetilde{\beta}'''(Nt^2 + Bt + B_0) + \widetilde{\beta}''(5Nt + 6B - 5N_0 + \Gamma) = 0,$$

которое при $N \neq 0$ эквивалентно следующему:

$$\widetilde{\beta}'''(t^2 + k) + \widetilde{\beta}''(5t + n) = 0 \Rightarrow \widetilde{\beta}'' = G\frac{e^{-nI}}{|t^2 + k|^{5/2}}, \quad I = \int \frac{dt}{t^2 + k}.$$

Для такой функции $\widetilde{\beta}''$ постоянные должны удовлетворять соотношениям

$$\Gamma = Nn - B + 5N_0, \quad B_0 = kN - \frac{1}{5}nB, \quad B(n^2 + 25k) = 0.$$

Если $n^2 + 25k \neq 0$, то $B = 0$, $B_0 = kN$, $\Gamma = Nn + 5N_0$, $E = -3N_0$, $\eta = S(-Nn - 3N_0) - \Gamma_1$ и свободным постоянным N, N_0, Γ_1 (согласно формулам (2.1)) соответствуют допускаемые уравнениями газовой динамики операторы, дополнительные к ядру L_9,

$$(t^2 + k)\partial_t + t\vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + (\vec{x} - t\vec{u})\cdot\partial_{\vec{u}} + 3tV\partial_V - nS\partial_S,\ \vec{x}\cdot\partial_{\vec{x}} + \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} - 3V\partial_V - 3S\partial_S,\ \partial_S.$$

Если $n^2 = -25k$, то $\widetilde{\beta}'' = G\big(t - \frac{1}{5}n\big)^{-5}$ и добавляется оператор

$$\left(t - \frac{1}{5}n\right)\partial_t - \vec{u}\cdot\partial_{\vec{u}} + 3V\partial_V - S\partial_S.$$

Таблица 1. Подалгебры, расширяющие ядро L_9

Допускаемые операторы	Уравнение состояния $e=\widetilde{e}(V,\widetilde{S})$, $\widetilde{S}=S+V\widetilde{\beta}(t)$
	$\widetilde{\beta}(t)$
1.1. $X_{12}+X_{14}+\alpha\widetilde{X}_{11}$	$V\widetilde{e}_V+\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}}=2\alpha\widetilde{e}-b_1V-\gamma_1\widetilde{S}+\gamma_0$
1.2. $X_{15}+\delta\widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e}_{\widetilde{S}}=3\delta\widetilde{e}-b_1V-\gamma_1\widetilde{S}-\gamma_0$
2.1. X_{15}, $X_{12}+X_{14}+\alpha\widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e}=GV^2+C_0V\widetilde{S}+\delta(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S})$, $\alpha=1$ $\widetilde{e}=\widetilde{S}+G\begin{cases}\ln V,\ \alpha=0,\\ V\ln V,\ \alpha=\frac{1}{2},\\ V^{2\alpha},\ \alpha\neq 0,\frac{1}{2},1\end{cases}$
	$\widetilde{\beta}(t)=M\lvert t\rvert^k$
1.1. $X_{13}+(\alpha+k)X_{14}+$ $\alpha X_{12}+\beta\widetilde{X}_{11}$	$\alpha V\widetilde{e}_V+(\alpha+k)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}}=$ $2(\beta-1)\widetilde{e}-b_1V-\gamma_1\widetilde{S}-\gamma_0$
1.2. $X_{15}+X_{13}-kX_{12}+\beta\widetilde{X}_{11}$	$-kV\widetilde{e}_V+\widetilde{e}_{\widetilde{S}}=2(\beta-1)\widetilde{e}-b_1V-\gamma_1\widetilde{S}-\gamma_0$,
2.1. $X_{13}+kX_{14}+\beta\widetilde{X}_{11}$, $X_{12}+X_{14}+\alpha\widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+G(\lvert\widetilde{S}\rvert^{\beta-1}V^{\alpha k-\beta+1})^{2/k}$, $\beta\neq 1,1+k/2$; $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+(G_0\ln\lvert\widetilde{S}\rvert+G\ln V)\times$ $\begin{cases}1,\ \beta=1,\ \alpha=0,\\ V,\ \beta=1,\ \alpha=\frac{1}{2},\\ \widetilde{S},\ \beta=1+\frac{k}{2},\ \alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$
2.2. $X_{13}+\alpha X_{12}+(\alpha+k)X_{14}+$ $\beta\widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e}=g(V)+\begin{cases}\widetilde{S}^2 \text{ или } \widetilde{S},\ \beta=\alpha+k+1,\\ (V+V_0)\widetilde{S},\ \beta=\alpha+k/2+1,\end{cases}$ $\alpha Vg'=2(\beta-1)g-b_1V-\gamma_{01}$
2.3. $X_{13}-kX_{15}+\gamma\widetilde{X}_{11}$, $X_{15}+\alpha(X_{12}+X_{14})+\beta\widetilde{X}_{11}$	$\gamma\neq 1-k/2\Rightarrow$ $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+GV^{2\frac{1-\gamma}{k}}\begin{cases}e^{2\beta\widetilde{S}},\ \alpha=0,\\ \lvert\alpha\widetilde{S}+1\rvert^{2(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma-1}{k})},\ \alpha\neq 0,\end{cases}$ $k=2(1-\gamma)$, $\alpha=2\beta\Rightarrow$ $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+GV\ln V+G_0V\begin{cases}\ln\lvert\alpha\widetilde{S}+1\rvert,\alpha\neq 0,\\ \widetilde{S},\alpha=0,\end{cases}$ $\gamma=1\Rightarrow$ $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+(G_0\ln\lvert\alpha\widetilde{S}+1\rvert+G\ln V)\times$ $\begin{cases}1,\ \beta=0,\ \alpha\neq 0,\\ \alpha\widetilde{S}+1,\ \frac{\alpha}{2}=\beta,\end{cases}$ $\widetilde{e}=(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S})+G\ln V$, $\beta=\alpha=0$ $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+G_0(2\beta\widetilde{S}+1)\ln V+Ge^{2\beta\widetilde{S}}$, $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ $\widetilde{e}=\delta\widetilde{S}+G\lvert\alpha\widetilde{S}+1\rvert^{\frac{2\beta}{\alpha}}$, $\beta\neq 0$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq 2\beta$.
3.1. $X_{13}+kX_{14}+\alpha\widetilde{X}_{11}$, $X_{12}+X_{14}+\beta\widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\beta=1\Rightarrow\widetilde{e}=\widetilde{S}\begin{cases}\widetilde{S},\ \alpha=k+1,\\ V+V_0,\ \alpha=1+k/2,\end{cases}$ $\alpha=1\Rightarrow\widetilde{e}=\widetilde{S}+G\begin{cases}\ln V,\ \beta=0\\ V\ln V,\ \beta=1/2\\ V^{2\beta},\ \beta\neq 0,1/2\end{cases}$

Таблица 1 (продолжение).

$\widetilde{\beta} = M \ln \lvert t \rvert$	
1.1. $X_{12} + X_{14} + \alpha X_{13} + \beta \widetilde{X}_{11}$	$V e_V + (\widetilde{S} + M\alpha)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} =$ $2(\beta - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0$
1.2. $X_{15} + X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}$	$(MV + 1)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 S - \gamma_0$
1.3. $X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}$	$M\alpha V \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\alpha - 1)\widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0$
2.1. $X_{12} + X_{14} + \alpha X_{13} + \beta \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = (V_0 - V)\widetilde{S} + V^2(G + M\alpha \ln V)$, $\beta = \alpha + 1$
2.2. $X_{12} + X_{14} + \beta \widetilde{X}_{11}$, $X_{13} + \alpha \widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e} = \delta \widetilde{S} + G V^{2\beta} e^{2\frac{\alpha-1}{MV}\widetilde{S}}, \alpha \neq 1$ $\widetilde{e} = \delta \widetilde{S} + G_0 V^{-1} \widetilde{S} + G \ln V,\ \alpha = 1,\ \beta = 0$
2.3. $X_{13} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = \widetilde{S} + g(V)$
3.1. $X_{12} + X_{14} + \beta \widetilde{X}_{11}$, $X_{13} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = \widetilde{S} + G \begin{cases} \ln V,\ \beta = 0, \\ V \ln V,\ \beta = 1/2, \\ V^{2\beta},\ \beta \neq 0, 1/2 \end{cases}$
$\beta = e^{kt}$	
1.1. $X_{10} + (\alpha + k)X_{14} +$ $X_{12} + \beta \widetilde{X}_{11}$	$\alpha V \widetilde{e}_V + (\alpha + k)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} =$ $2\beta \widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0$
1.2. $X_{10} - kX_{12} + X_{15} + \beta \widetilde{X}_{11}$	$-kV\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta \widetilde{e} - b_1 V - \gamma_1 \widetilde{S} - \gamma_0$
2.1. $X_{10} + kX_{14} + \beta \widetilde{X}_{11}$, $X_{12} + X_{14} + \alpha \widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e} = \delta \widetilde{S} + G V^{2(\alpha - \frac{\beta}{k})} \lvert \widetilde{S} \rvert^{\frac{2\beta}{k}},\ \beta \neq 0, k/2$ $\beta = k/2 \Rightarrow \widetilde{e} = G\widetilde{S} \begin{cases} \delta + V^{2\alpha - 1},\ \alpha \neq 1/2, \\ \delta \ln \lvert \widetilde{S} \rvert + \ln V,\ \alpha = 1/2, \end{cases}$ $\beta = 0 \Rightarrow e = \delta \widetilde{S} +$ $(G_0 \ln \lvert \widetilde{S} \rvert + G \ln V) \begin{cases} V,\ \alpha = 1/2, \\ 1,\ \alpha = 0, \end{cases}$
2.2. $X_{10} + \alpha X_{12} +$ $(\alpha + k)X_{14} + \beta \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = -\frac{1}{2}\gamma_2 \widetilde{S}^2 - (b_2 V + \gamma_{02})\widetilde{S} + g(V)$, $\alpha V g' = 2\beta g - b_1 V - \gamma_{01}$, $\gamma_2(\beta - \alpha - k) = 0,\ b_2(\beta - \alpha - k/2) = 0$
2.3. $X_{10} - kX_{12} + \beta \widetilde{X}_{11}$, $X_{15} + \widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e} = \delta \widetilde{S} + G V^{-2k/\beta} e^{2\widetilde{S}}$
3.1. $X_{12} + X_{14} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}, $X_{10} + kX_{14} + \alpha \widetilde{X}_{11}$,	$\widetilde{e} = \widetilde{S} \begin{cases} \widetilde{S},\ \alpha = k, \\ V + V_0, \alpha = k/2, \end{cases}$ $\alpha = 0 \Rightarrow \widetilde{e} = \widetilde{S} + G \begin{cases} \ln V,\ \beta = 0 \\ V \ln V, \beta = 1/2 \\ V^{2\beta},\ \beta \neq 0, 1/2 \end{cases}$

Уравнения газовой динамики (1.1), (1.2), (1.4) с уравнением состояния (4.1) принимают вид

$$DV = V\nabla \cdot \vec{u}, \quad D\vec{u} = \frac{10}{9} E_0 V^{-\frac{5}{3}} \nabla V, \quad DS = -\widetilde{\beta}'' V.$$

Последнее уравнение отщепляется от системы, поэтому допускаемая алгебра остатка может расшириться. Вычисления показывают, что добавляется только оператор ∂_t.

Таблица 1 (окончание).

$\widetilde{\beta} = Mt$	
1.1. $X_{13} + \alpha X_{12} + (\alpha+1)X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$	$\alpha V\widetilde{e}_V + (\alpha+1)\widetilde{S}\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0 - V\widetilde{e}_V + \widetilde{e}_{\widetilde{S}} =$ $2(\beta-1)\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0$
1.2. $X_{13} - X_{12} + X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$	$V\widetilde{e}_V + (\widetilde{S} + MV)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0$
1.3. $X_{12} + X_{14} + X_{10} + \beta\widetilde{X}_{11}$	$(MV + \delta)\widetilde{e}_{\widetilde{S}} = 2\beta\widetilde{e} - b_1V - \gamma_1\widetilde{S} - \gamma_0$
1.4. $X_{10} + \delta X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$	$\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + GV^{2(\beta-\alpha+1)}\lvert\widetilde{S}\rvert^{2(\alpha-1)}$, $\alpha \neq 1, 3/2$
2.1. $X_{13} + X_{14} + \alpha\widetilde{X}_{11}$, $X_{12} + X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$	$\alpha = 3/2 \Rightarrow \widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + \ln\lvert\widetilde{S}\rvert + G\widetilde{S}\begin{cases} V^{2\beta-1}, & \beta \neq 1/2, \\ \ln V, & \beta = 1/2, \end{cases}$ $\alpha = 1 \Rightarrow \widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + G\ln V + G_0\ln\lvert\widetilde{S}\rvert\begin{cases} V, & \beta = 1/2, \\ 1, & \beta = 0 \end{cases}$
2.2. $X_{13} - \alpha X_{12} + (\alpha+1)X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = -\widetilde{S}\big(\frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S} + b_2V + \gamma_{02}\big) + g(V)$, $\alpha Vg' = 2(\beta-1)g - b_1V - \gamma_{01}$, $(\beta-\alpha-2)\gamma_2 = 0$, $(\beta-\alpha-3/2)b_2 = 0$
2.3. $X_{13} + X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$, $X_{15} + X_{10}$	$\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + G\widetilde{S}(MV+1)^{-1}\begin{cases} \widetilde{S}, & \beta = 2, \\ 1, & \beta = 3/2 \end{cases}$
2.4. $X_{13} + \alpha X_{12} + (\alpha+1)X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$, X_{10}	$\widetilde{e} = g(V) - M^{-1}V^{-1}\widetilde{S}\big(\frac{1}{2}\gamma_2\widetilde{S} + b_2V + \gamma_{02}\big)$, $\alpha Vg' = 2(\beta-1)g - b_1V - \gamma_{01}$, $(\alpha-2\beta+4)\gamma_2 = 0$, $(2\beta-3)\gamma_{02} = 0$
2.5. $X_{13} - X_{12} + X_{15} + \beta\widetilde{X}_{11}$, X_{10}	$\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + GV^{-1}(\widetilde{S} + \ln V)$, $\beta = 3/2$
2.6. $X_{12} + X_{14} + X_{10} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + G_0V(-\widetilde{S} + MV\ln V) + GV^2$
2.7 $X_{12} + X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$, $X_{10} + \delta\widetilde{X}_{11}$	$\delta = 1 \Rightarrow \widetilde{e} = GV^{2\beta}e^{\frac{2\widetilde{S}}{MV}} + V\begin{cases} \delta_1\widetilde{S} + G_0V, & \beta = 1, \\ 0, & \beta \neq 1 \end{cases}$ $\delta = 0 \Rightarrow \widetilde{e} = \delta_1\widetilde{S} + GV\ln V + G_0V^{-1}(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S})$, $\beta = \frac{1}{2}$
3.1. $X_{13} + X_{14} + \alpha\widetilde{X}_{11}$, $X_{12} + X_{14} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}	$\widetilde{e} = \widetilde{S}\begin{cases} \widetilde{S}, & \alpha = 2, \\ V + V_0, & \alpha = 3/2 \end{cases}$
3.2. $X_{13} + X_{14} + 2X_{11}$, $X_{12} + X_{14} + \frac{1}{2}\widetilde{X}_{11}$, X_{10}	$\widetilde{e} = \delta\widetilde{S} + GV^{-1}(\widetilde{S}^2$ или $\widetilde{S})$
3.3 $X_{13} + X_{14} + \widetilde{X}_{11}$, X_{15}, X_{10}	$\widetilde{e} = \widetilde{S} + g(V)$
4.1. $X_{13} + X_{14} + \widetilde{X}_{11}$, $X_{12} + X_{14} + \beta\widetilde{X}_{11}$, X_{15}, X_{10}	$\widetilde{e} = \widetilde{S} + G\begin{cases} \ln V, & \beta = 0, \\ V\ln V, & \beta = 1/2, \\ V^{2\beta}, & \beta \neq 0, 1/2. \end{cases}$

Заключение

Выполнена групповая классификация уравнений газовой динамики с релаксирующим уравнением состояния в случае п. 2^0 из § 2. Остается решить задачу для случаев 3^0 и 4^0 с уравнениями состояния, удовлетворяющими уравнениям типов (2.7), (2.8) и (2.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Овсянников Л. В.* Программа подмодели. Газовая динамика // Прикл. математика и механика. 1994. Т. 58, № 4. С. 30–55.

2. *Овсянников Л. В.* Некоторые итоги выполнения программы «Подмодели» для уравнений газовой динамики // Прикл. математика и механика. 1999. Т. 63, № 3. С. 362–372.

3. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния АН СССР, 1962.

4. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

5. *Чиркунов Ю. А., Хабиров С. В.* Элементы симметрийного анализа дифференциальных уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: НГТУ, 2012.

6. *Vaneeva O. O., Bihlo A., Popovych R. O.* Equivalence groupoid and group classification of a class of nonlinear wave and ellitic equations. arXiv:2002.08939v1 [math-ph] 20 Feb 2020. 38 p.

7. *Малкин А. Я., Исаев А. И.* Реология: концепции, методы, приложения. С.-Пб.: Изд-во Профессия, 2010.

8. *Vladimirov V. A.* Modelling system for relaxing media. Symmetry, restrictions and attractive features of invariant solutions // Proceeings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. Kiev. 2000. V. 30, N 1. P. 231–238.

9. *Хабиров С. В.* Групповая классификация идеальных газодинамических релаксирующих сред по преобразованиям эквивалентности // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 936–954.

10. *Хабиров С. В.* К групповой классификации идеальных газодинамических релаксирующих сред // Труды ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29, № 2. С. 260–270.

Поступила в редакцию 18 сентября 2023 г.
После доработки 10 октября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Хабиров Салават Валеевич
Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН,
пр. Октября, 71, Уфа 450054
habirov@anrb.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 27.12.2024. Уч.-изд. л. 10,6. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.01.2025. Объем файла 1.3 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.