ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65 6 2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 65, № 6 (388) **Ноябрь—декабрь, 2024**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Адрес редакции:
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 512.55

ПРЕДСТАВИМОСТЬ МАТРИЦ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ В ВИДЕ СУММЫ ДВУХ ПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ

А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин

Аннотация. Исследуется проблема нахождения условий, при которых из представимости каждого элемента a из поля F в виде $a = f + g$, где $f^{q_1} = f$, $g^{q_2} = g$ и $q_1, q_2 > 1$ — фиксированные натуральные числа, следует аналогичная представимость каждой квадратной матрицы над полем F. Предложен общий подход к решению этой проблемы. В качестве приложения полученных результатов описаны поля и коммутативные кольца с обратимой двойкой, над которыми каждая квадратная матрица является суммой q_1-потентной матрицы и q_2-потентной матрицы для некоторых малых значений q_1 и q_2.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.601

Ключевые слова: потентные элементы, конечное поле, матрицы над коммутативными кольцами.

Введение

В работе [1] исследованы кольца, у которых каждый элемент представим в виде суммы двух идемпотентов. Также в этой работе было показано, что если R — ненулевое кольцо и $n > 1$ — натуральное число, то в кольце $M_n(R)$ существует матрица, не представимая в виде суммы двух идемпотентных матриц. В последнее время результаты работы [1] были расширены в ряде статей. В [2] доказано, что над полем F каждая квадратная матрица представима в виде суммы трех идемпотентных матриц в точности тогда, когда поле F изоморфно либо $\mathbb{F}_2$, либо $\mathbb{F}_3$. Также в этой статье описаны редуцированные коммутативные кольца, над которыми каждая квадратная матрица представима в виде суммы трех идемпотентных матриц. Кольца, у которых каждый элемент представим в виде суммы двух коммутирующих трипотентов, описаны в [3]. Описание колец, у которых каждый элемент представим в виде суммы двух трипотентов и нильпотента, коммутирующих между собой, получено в статье [4]. Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы двух трипотентных матриц и нильпотентной матрицы, изучены в [5]. В работах [6–10] исследованы кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы идемпотентной (трипотентной) матрицы и нильпотентной матрицы. В частности, в [6] доказано, что для любого $n \geq 1$ каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_2)$ является суммой идемпотента и нильпотента. В [11, 12] изучались кольца, матрицы над которыми являются суммой q-потентной матрицы и нильпотентной матрицы. В работе [11], в частности,

Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 23-21-10086).

было показано, что если $q > 1$ — натуральное число, то каждая квадратная матрица над полем F представима в виде суммы q-потентной матрицы и нильпотентной матрицы в точности тогда, когда F — конечное поле и $q - 1$ делится на $|F| - 1$. В [13] показано, что если F — поле, не изоморфное полю $\mathbb{F}_3$, и $q > 1$ — нечетное натуральное число, то каждая квадратная матрица над F представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q-потентной матрицы в точности тогда, когда над полем F каждая квадратная матрица представима в виде суммы нильпотентной матрицы и q-потентной матрицы. В [14] доказано, что каждая матрица на полем F представима в виде суммы двух трипотентных матриц в точности тогда, когда поле F изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$. Также в этой статье доказано, что если R — коммутативное кольцо, у которого $2 \in U(R)$, то каждая матрица над R представима в виде суммы двух трипотентных матриц в точности тогда, когда в R выполнено тождество $x^5 = x$. В [15] исследовались поля, матрицы над которыми представимы в виде суммы трипотента и q-потента.

Пусть $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и R — кольцо. Будем говорить, что элемент $f \in R$ *допускает* (q_1, q_2)*-разложение*, если $f = \alpha + \beta$, где $\alpha^{q_1} = \alpha$ и $\beta^{q_2} = \beta$. При этом само разложение $f = \alpha + \beta$ будем называть (q_1, q_2)-разложением.

В настоящей работе исследуется следующая проблема: выяснить, при каких условиях на поле P и натуральные числа $q_1, q_2 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ из (q_1, q_2)-разложимости каждого элемента P следует (q_1, q_2)-разложимость любой матрицы из $M_n(P)$ для всякого натурального числа n.

Известны примеры, когда из (q_1, q_2)-разложимости каждого элемента поля P не следует (q_1, q_2)-разложимость каждой квадратной матрицы над полем P. Согласно [14, пример 10] в $M_3(\mathbb{F}_3)$ существует матрица, которая не представима в виде суммы идемпотента и трипотента, в то время как в поле $\mathbb{F}_3$ каждый элемент есть сумма идемпотента и трипотента. Также согласно [13, пример 16] существуют квадратные матрицы над полем $\mathbb{F}_{2^k}$, которые не представимы в виде суммы идемпотентой матрицы и 2^k-потентной матрицы. Компьютерные эксперименты и полученные ранее результаты показывают, что если каждый элемент поля F допускает (q_1, q_2)-разложение, но для некоторого $n \in \mathbb{N}$ существует матрица в кольце $M_n(F)$, которая не допускает (q_1, q_2)-разложения, то этот случай сводится к одному из выше рассмотренных. Результаты экспериментов приводят нас к следующим двух гипотезам.

Гипотеза 1. *Пусть F — конечное поле нечетной характеристики, $|F| > 3$ и $q_1, q_2 > 1$. Если все элементы поля F допускают (q_1, q_2)-разложение, то и для любого $n \in \mathbb{N}$ все матрицы из $M_n(F)$ допускают (q_1, q_2)-разложение.*

Будем называть элемент r кольца R *нетривиальным q-потентом*, если r является q-потентом в R и r отличен от 0 и 1.

Гипотеза 2. *Пусть F — конечное поле характеристики 2, $q_1, q_2 > 2$ и в поле F существуют как нетривиальные q_1-потенты, так и нетривиальные q_2-потенты. Если все элементы поля F допускают (q_1, q_2)-разложение, то и для любого $n \in \mathbb{N}$ все матрицы из $M_n(F)$ допускают (q_1, q_2)-разложение.*

Данные гипотезы в настоящей работе не доказаны. Однако удалось свести проблему их доказательства к проверке выполнения некоторого свойства в исходном поле. Для полей малых порядков такую проверку легко осуществить на компьютере. Также в частном случае показано выполнение заключения гипотезы 1.

Настоящая работа состоит из трех параграфов. В § 1 изложены предварительные результаты, ряд из которых имеют самостоятельный интерес и связаны с представимостью матриц над конкретными конечными полями в виде суммы потентных матриц. В § 2 доказывается, что заключение гипотез 1 и 2 выполняется для всех полей F таких, что $|F| \leq 7$. Доказан ряд утверждений, иллюстрирующих гипотезы 1 и 2 для малых значений q_1 и q_2. В частности, описаны поля и коммутативные кольца с обратимой двойкой, над которыми каждая квадратная матрица является суммой двух 4-потентных матриц. В заключительной части статьи на основе результатов, полученных в § 1, формулируется гипотеза о конечных полях, каждый элемент которых допускает (q_1, q_2)-разложение, и показывается, что из верности этой гипотезы следует выполнимость гипотез 1 и 2 для всех полей F таких, что $|F| > 7$.

Тезисы ряда результатов настоящей работы без их доказательств опубликованы в кратком сообщении [16].

Радикал Джекобсона кольца R обозначается через $J(R)$. Множество всех нильпотентных элементов из кольца R обозначается через $\mathrm{Nil}(R)$. В работе используются стандартные понятия и обозначения теории колец (см., например, [17]).

§ 1. Предварительные результаты

В настоящем параграфе приведены утверждения, связанные с представлением матриц над полями в виде суммы двух потентных матриц. Эти утверждения используются при получении основных результатов статьи, и некоторые из них представляют самостоятельный интерес.

Пусть $A_1, \dots, A_k$ — квадратные матрицы (не обязательно одного размера) над полем F. Через $\mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$ будем обозначать блочно-диагональную матрицу с блоками $A_1, \dots, A_k$. Для каждого унитарного многочлена

$$p = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \in F[x]$$

степени $n \geq 1$ через $C(p) \in M_n(F)$ будем обозначать соответствующую присоединенную (или, иначе, сопровождающую) матрицу

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Для удобства приведем лемму, на которую будем регулярно ссылаться.

Лемма 3 [14, лемма 2]. *Пусть кольцо R коммутативно, $r, s \in R[x]$, $A \in M_n(R)$, $B \in M_{n,p}(R)$, $C \in M_p(R)$. Если $r(A) = 0$ и $s(C) = 0$, то $rs(M) = 0$, где*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}.$$

Для сокращения рассуждений в следующих утверждениях сформулируем некоторый полезный факт. Пусть $f_1, \dots, f_s \in F$ — набор попарно различных q-потентов поля F. Пусть также матрица $A \in M_n(F)$ аннулируется произведением $(x - f_1) \cdots (x - f_s)$. Тогда матрица A является q-потентом. В самом деле, это следует из того, что $(x - f_1) \cdots (x - f_s)$ является делителем $x^q - x$.

Следующая лемма подтверждает гипотезу 1 в частном случае.

Лемма 4. *Пусть F — конечное поле нечетной характеристики и числа $q_1, q_2 > 1$ нечетные. Если каждый элемент поля F допускает (q_1, q_2)-разложение, то для любого $n \in \mathbb{N}$ каждая матрица из $M_n(F)$ допускает (q_1, q_2)-разложение.*

Доказательство. Достаточно доказать наличие (q_1, q_2)-разложения для фробениусовых клеток. Пусть $C(p) \in M_n(F)$, где $p(x) = x^n - \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ и $n \geq 2$. Пусть также $a_{n-1} = \alpha + \beta$ является (q_1, q_2)-разложением в поле F. Выделим несколько случаев.

Случай 1: $\alpha \neq 1$ и $\beta \neq -1, 0$. Положим $G = \mathrm{diag}(0, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k+1$, и $G = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, \dots, A_{k-1}$ являются идемпотентами, а значит, и q_1-потентами. Матрица A_k аннулируется $(x-\alpha)(x-1)$. Так как 1 и α — различные q_1-потенты, матрица A_k является q_1-потентом. Следовательно, G является q_1-потентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - G = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & \beta \end{array}\right),$$

где $B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_k)$, если $n = 2k+1$, и $B = \mathrm{diag}(-1, B_1, \dots, B_{k-1})$, если $n = 2k$. Здесь

$$B_1 = \ldots = B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как каждая матрица B_i аннулируется $x(x+1)$, то B аннулируется $x(x+1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - G$ аннулируется $x(x+1)(x-\beta)$. Так как число q_2 нечетное, то $0, -1, \beta$ являются попарно различными q_2-потентами, а значит, матрица $C(p) - G$ тоже является q_2-потентом.

Случай 2: $\alpha \neq -1, 0$ и $\beta \neq 1$. Положим $\alpha' = \beta$ и $\beta' = \alpha$. Тогда конструкция случая 1 позволяет построить (q_2, q_1)-разложение матрицы $C(p)$ на основе (q_2, q_1)-разложения $a_{n-1} = \alpha' + \beta'$.

С учетом случаев 1 и 2 остается 5 пар (α, β) которые необходимо разобрать:

$$(0,0),\ (1,1),\ (0,-1),\ (-1,0),\ (-1,-1).$$

Во всех указанных случаях $a_{n-1} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$. Согласно [14, предложение 3] матрица $C(p)$ представима в виде суммы двух трипотентов. Тем более матрица $C(p)$ представима в виде суммы q_1-потента и q_2-потента. $\square$

Приведем ряд технических утверждений, которые позволяют раскладывать элементы кольца $M_n(F)$ в сумму q_1-потента и q_2-потента. Пусть F — конечное поле, $q \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{P}_q(F) = \{x \in F \mid x^q = x\}$ — множество всех q-потентов поля F. Положим $q' = 1 + \text{НОД}(q-1, |F|-1)$. Очевидно, что множества $\mathscr{P}_q(F)$ и $\mathscr{P}_{q'}(F)$ совпадают. Поэтому достаточно рассматривать только такие q, что $q - 1 \mid |F| - 1$. Так как группа обратимых элементов конечного поля является циклической, то в этом случае $|\mathscr{P}_q(F)| = q$.

Предложение 5. *Пусть F — конечное поле и $p \in F[x]$ — унитарный многочлен степени $n \in \{2,3\}$. Пусть также $q_1-1, q_2-1 \mid |F|-1$. Предположим, что существуют различные ненулевые q_2-потенты $\beta_1, \beta_2 \in F$ и ненулевой q_1-потент $\gamma \in F$ такие, что $(\beta_1+\beta_2)+\gamma = \mathrm{tr}(p)$. Тогда матрица $C(p) \in M_n(F)$ допускает (q_1,q_2)-разложение.*

Доказательство. 1. Пусть $n=2$. Тогда $C(p) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & \mathrm{tr}(p) \end{pmatrix}$. Положим

$$A = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1\cdot(\gamma+\beta_1) \\ 1 & \gamma+\beta_1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \beta_1 & a+\beta_1\cdot(\gamma+\beta_1) \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матрицы A являются различные q_1-потенты 0 и γ. Собственными значениями матрицы B являются различные q_2-потенты β_1 и β_2. Поэтому $C(p) = A+B$ является искомым (q_1,q_2)-разложением.

2. Пусть $n=3$. Тогда

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & f_0 \\ 1 & 0 & f_1 \\ 0 & 1 & \mathrm{tr}(p) \end{pmatrix}.$$

Положим

$$A = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\beta_1 & -\beta_1\cdot(\gamma+\beta_1) \\ 0 & 1 & \gamma+\beta_1 \end{array}\right), \quad B = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & f_0 \\ 1 & \beta_1 & a+\beta_1\cdot(\gamma+\beta_1) \\ \hline 0 & 0 & \beta_2 \end{array}\right).$$

Собственными значениями матрицы A являются q_1-потенты 0 (кратности 2) и γ. Матрица A является q_1-потентом как блочно-диагональная матрица. Собственными значениями матрицы B являются различные q_2-потенты 0, β_1 и β_2. Поэтому $C(p) = A+B$ является искомым (q_1,q_2)-разложением. $\square$

Предложение 6. *Пусть F — конечное поле и $p \in F[x]$ — унитарный многочлен степени $n \geq 4$. Пусть также $q_1-1, q_2-1 \mid |F|-1$. Предположим, что выполняются следующие условия:*

(1) существуют различные q_1-потенты $\alpha_1, \alpha_2 \in F$ такие, что $-(\alpha_1+\alpha_2)$ является ненулевым q_2-потентом;

(2) существуют различные ненулевые q_2-потенты $\beta_1, \beta_2 \in F$ и ненулевой q_1-потент $\gamma \in F$ такие, что

- *$\beta_1, \beta_2 \neq -(\alpha_1+\alpha_2)$;*
- *$(\beta_1+\beta_2)+\gamma = \mathrm{tr}(p)$.*

Тогда матрица $C(p) \in M_n(F)$ допускает (q_1,q_2)-разложение.

Доказательство. Положим $K = \mathrm{diag}(0, A_1, \ldots, A_k)$, если $n = 2k+1$ нечетно, и $K = \mathrm{diag}(A_1, \ldots, A_k)$, если $n = 2k$ четно. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1\cdot(\gamma+\beta_1) \\ 1 & \gamma+\beta_1 \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матриц $A_1, \ldots, A_{k-1}$ являются различные q_1-потенты α_1 и α_2. Собственными значениями матрицы A_k являются различные q_1-потенты 0 и γ. Следовательно, матрицы $A_1, \ldots, A_k$ являются q_1-потентами и K является q_1-потентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - K = \begin{pmatrix} B_{n-3} & \alpha_1\alpha_2 E_{1\,n-3} & H_1 \\ 0 & D & H_2 \\ 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

где $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \beta_1 \end{pmatrix}$ и B_{n-3} — матрица размера $(n-3)\times(n-3)$. При этом

(1) если $n = 2k+3$ нечетно, то

$$B_{n-3} = \sum_{i=1}^{k-1}(E_{2i,\,2i-1} - (\alpha_1+\alpha_2)E_{2i,\,2i} + \alpha_1\alpha_2 E_{2i,\,2i+1}) \\ + (E_{2k,\,2k-1} - (\alpha_1+\alpha_2)E_{2k,\,2k});$$

если $n = 2k+4$ четно, то $B_1 = (-\alpha_1-\alpha_2)$ и при $k > 0$

$$B_{n-3} = (-(\alpha_1+\alpha_2)E_{11} + \alpha_1\alpha_2 E_{12}) \\ + \sum_{i=1}^{k-1}(E_{2i+1,\,2i} - (\alpha_1+\alpha_2)E_{2i+1,\,2i+1} + \alpha_1\alpha_2 E_{2i+1,\,2i+2}) \\ + (E_{2k+1,\,2k} - (\alpha_1+\alpha_2)E_{2k+1,\,2k+1}).$$

К примеру,

$$B_5 = \begin{pmatrix} -\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_1-\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $C(p)-K$ является q_2-потентом. Непосредственная проверка показывает, что $B_{n-3}^2 = -(\alpha_1+\alpha_2)B_{n-3}$, $D^2 = \beta_1 D$ и

$$\begin{pmatrix} B_{n-3} & \alpha_1\alpha_2 E_{1\,n-3} \\ 0 & D \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} (-\alpha_1-\alpha_2)^{t-1}B_{n-3} & (-\alpha_1-\alpha_2)^{t-1}\alpha_1\alpha_2 E_{1\,n-3} \\ 0 & \beta_1^{t-1}D \end{pmatrix}$$

для всех натуральных $t \geq 1$. Поэтому матрица $G = \begin{pmatrix} B_{n-3} & \alpha_1\alpha_2 E_{1\,n-3} \\ 0 & D \end{pmatrix}$ является q_2-потентом. Так как матрицы B_{n-3} и D аннулируются многочленами $x^2+(\alpha_1+\alpha_2)x$ и $x^2-\beta_1 x$ соответственно, по лемме 3 матрица G аннулируется $x^2(x-\beta_1)(x+(\alpha_1+\alpha_2))$. Но как q_2-потент матрица G аннулируется многочленом $x^{q_2}-x$, который над F не имеет кратных корней. Следовательно, матрица G аннулируется НОД многочленов $x^{q_2}-x$ и $x^2(x-\beta_1)(x+(\alpha_1+\alpha_2))$, который равен $x(x-\beta_1)(x+(\alpha_1+\alpha_2))$.

Применяя лемму 3 к матрице $C(p)-K$, получаем, что матрица $C(p)-K$ аннулируется $x(x-\beta_1)(x-\beta_2)(x+(\alpha_1+\alpha_2))$, а значит, является q_2-потентом. □

В рамках данной работы покажем, что заключения гипотез 1 и 2 выполняются для полей малого порядка. Особую роль в этом играют поля из не более чем семи элементов. Для них, в частности, необходимо решить вопрос представимости всех элементов полей (и матриц над ними) в виде суммы q_1-потента и q_2-потента. Выбор константы 7 обусловлен гипотезой 23.

Предложение 7. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_7)$ представима в виде суммы трипотента и 4-потента.*

Доказательство. Достаточно показать, что для всякого унитарного многочлена $p(x) \in \mathbb{F}_7[x]$ степени n матрица $C(p)$ допускает разложение в сумму трипотента и 4-потента. Так как 4-потентами в $\mathbb{F}_7$ являются $0, 1, 2, 4$, то для

$n = 1$ утверждение очевидно. Далее везде будем считать, что $n > 1$. Выделим несколько случаев.

Случай 1: $\mathrm{tr}(p) \in \{1, 2\}$. Матрица $C(p)$ есть сумма идемпотента и трипотента по [14, предложение 3].

Случай 2: $\mathrm{tr}(p) \in \{3, 5\}$. Имеют место следующие разложения в сумму трипотента и 4-потента: $3 = 1 + 2$, $5 = 1 + 4$. Положим $G = \mathrm{diag}(1, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k + 1$, и $G = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \mathrm{tr}(p) - 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, \dots, A_{k-1}$ являются идемпотентами, а значит, и 4-потентами. Матрица A_k является 4-потентом, так как таковым является $\mathrm{tr}(p) - 1$. Следовательно, G является 4-потентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - G = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right),$$

где $B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_k)$, если $n = 2k + 1$, и $B = \mathrm{diag}(0, B_1, \dots, B_{k-1})$, если $n = 2k$. Здесь $B_1 = \ldots = B_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Так как каждая матрица B_i аннулируется $x(x + 1)$, то B аннулируется $x(x + 1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - G$ аннулируется $x(x + 1)(x - 1)$, а значит, является трипотентом.

Случай 3: $\mathrm{tr}(p) = 0$. Положим $G = \mathrm{diag}(0, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k + 1$, и $G = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, \dots, A_k$ являются трипотентами. Следовательно, G является трипотентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - G = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right),$$

где $B = \mathrm{diag}(B_1, \dots, B_{k-1}, T)$, если $n = 2k + 1$, и $B = \mathrm{diag}(1, B_1, \dots, B_{k-2}, T)$, если $n = 2k > 2$, и $B = (4)$ при $n = 2$. Здесь

$$B_1 = \ldots = B_{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Так как каждая матрица B_i аннулируется $x(x - 1)$, а матрица T аннулируется $x(x - 4)$, то B аннулируется $x(x - 1)(x - 4)$. По лемме 3 матрица $C(p) - G$ аннулируется $x(x - 1)(x - 2)(x - 4)$, а значит, является 4-потентом.

Случай 4: $\mathrm{tr}(p) = 6$. Положим $G = \mathrm{diag}(0, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k + 1$, и $G = \mathrm{diag}(A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, \dots, A_k$ являются трипотентами. Тогда G является трипотентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - G = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & 4 \end{array}\right),$$

где $B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$, если $n = 2k+1$, и $B = \operatorname{diag}(1, B_1, \dots, B_{k-1})$, если $n = 2k$. Здесь $B_1 = \ldots = B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Так как каждая матрица B_i аннулируется $x(x-1)$, то B аннулируется $x(x-1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - G$ аннулируется $x(x-1)(x-4)$, а значит, является 4-потентом.

Случай 5: $\operatorname{tr}(p) = 4$. Положим $G = \operatorname{diag}(0, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k+1$, и $G = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_k = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A_1, \dots, A_k$ являются трипотентами. Следовательно, G является трипотентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - G = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & 4 \end{array}\right),$$

где $B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$, если $n = 2k+1$, и $B = \operatorname{diag}(1, B_1, \dots, B_{k-1})$, если $n = 2k$. Здесь $B_1 = \ldots = B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица B аннулируется $x(x-1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - G$ аннулируется $x(x-1)(x-4)$, а значит, является 4-потентом. $\square$

Следующая лемма показывает, что если поле F содержит «все» q_1-потенты, то наличие (q_1, q_2)-разложения для всех элементов $M_n(F)$ влечет наличие (q_1, q_2)-разложения для всех элементов F.

Лемма 8. *Пусть R — целостное кольцо и числа $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ больше 1. Если для некоторого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(R)$ допускает (q_1, q_2)-разложение, то R является конечным полем. Более того, если $q_1 - 1 \mid |R| - 1$, то каждый элемент R допускает (q_1, q_2)-разложение.*

Доказательство. Пусть для некоторого $n \in \mathbb{N}$ в кольце $M_n(R)$ всякий элемент допускает (q_1, q_2)-разложение. Фиксируем $a \in R$. Существуют такие матрицы $A, B \in M_n(R)$, что $aI_n = A + B$, $A^{q_1} = A$, $B^{q_2} = B$. Через F обозначим поле частных кольца R, а через $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. Для некоторой обратимой матрицы $C \in M_n(\overline{F})$ матрица CAC^{-1} является верхнетреугольной, у которой на диагонали стоят корни многочлена $x^{q_1} - x \in \overline{F}[x]$. Из равенства $aI_n = CAC^{-1} + CBC^{-1}$ следует, что матрица CBC^{-1} тоже верхнетреугольная и элемент a допускает (q_1, q_2)-разложение в поле $\overline{F}$. Так как количество q_1-потентов и q_2-потентов в поле $\overline{F}$ конечно, то $|R| < \infty$. Следовательно, $R = F$ — конечное поле. Если же $q_1 - 1 \mid |R| - 1$, то все корни многочлена $x^{q_1} - x \in \overline{F}[x]$ лежат в F и согласно изложенному выше элемент a допускает (q_1, q_2)-разложение в поле F. $\square$

Мы хотим показать, что $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_7$ — это в точности все те поля, над которыми матрицы представимы в виде суммы идемпотента и 7-потента, а также в виде суммы трипотента и 4-потента и в виде суммы двух 4-потентов. Для этого потребуется доказать ряд технических лемм. Сначала покажем, что искомое утверждение верно для полей. Вопрос представимости элементов кольца матриц над полем в виде суммы трипотента и q-потента рассматривался в статье [15]. Имеет место следующая

Лемма 9 [15, лемма 2.1]. *Пусть q — степень простого числа, n — натуральное число, $1 < n \leq q$ и $(n-1)|(q-1)$. Каждый элемент поля F представим в виде суммы n-потента и трипотента тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух условий:*

(1) $n = q$;

(2) $n = \frac{q+1}{2}$ *и* $q \in \{3, 5, 7, 9\}$.

Лемма 10. *Пусть F — поле. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *каждый элемент поля F представим в виде суммы идемпотента и 7-потента;*

(2) *каждый элемент поля F представим в виде суммы трипотента и 4-потента;*

(3) *каждый элемент поля F представим в виде суммы двух 4-потентов;*

(4) *F изоморфно одному из полей $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$ или $\mathbb{F}_7$.*

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (4) выполняется в силу [18, лемма 4].

Эквивалентность (2) $\Leftrightarrow$ (4) выполняется в силу леммы 9.

(3) $\Rightarrow$ (4) Так как 4-потентов в поле конечно, то F — конечное поле. Тогда множество 4-потентов в поле F совпадает с множеством $1 + \text{НОД}(4-1, |F|-1)$-потентов.

Если $3 \nmid |F| - 1$, то элементы поля F должны представляться в виде суммы двух идемпотентов. Тогда F — простое поле и $|F| \leq 3$.

Если $3 \mid |F| - 1$, то $|F| \leq 10$ (количество различных формальных сумм двух 4-потентов). Этим условиям удовлетворяют только поля $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_7$.

(4) $\Rightarrow$ (3) Все элементы полей $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_4$ являются 4-потентами, а значит, представимы в виде суммы двух 4-потентов. Элементы поля $\mathbb{F}_3$ представимы в виде суммы двух идемпотентов, а тем более и двух 4-потентов. В поле $\mathbb{F}_7$ 4-потентами являются элементы $0, 1, 2, 4$. Нетрудно видеть, что все элементы поля $\mathbb{F}_7$ представимы в виде суммы двух 4-потентов. $\square$

Как отмечено во введении, вопросы представимости матриц над полями $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$ в виде суммы q_1-потента и q_2-потента являются отдельными задачами, не подпадающими под общий случай. Следующие утверждения предназначены для работы с данными полями. Начнем с поля $\mathbb{F}_3$.

Лемма 11. *Пусть характеристика поля F равна 3 и $p \in F[x]$ — унитарный многочлен степени $n \geq 2$ с нулевым следом. Тогда матрица $C(p) \in M_n(F)$ представима в виде суммы идемпотента и 4-потента.*

Доказательство. Разобьем доказательство на три случая в зависимости от значения n. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Случай 1: $n = 2$. Многочлен $p(x)$ имеет вид $x^2 - a$. Тогда

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

есть разложение в сумму идемпотента и 4-потента. Последняя матрица является 4-потентом, так как она является присоединенной к многочлену $x^2+x+1 \in F[x]$ и $x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1)$.

Случай 2: $n = 2k+1$ нечетно. Определим матрицу $A_n \in M_n(F)$ как

$$A_n = \sum_{i=0}^{k-1}(E_{1+2i,\,2+2i} + E_{2+2i,\,2+2i} + E_{3+2i,\,2+2i}).$$

К примеру,

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Непосредственная проверка показывает, что $A_n^2 = A_n$, а значит, матрица A_n является идемпотентом. Имеем $C(p) - A_n = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, где $B = \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_k)$ — матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. Здесь $B_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ для всех $1 \le i \le k$. Тогда матрица B является 4-потентом и аннулируется многочленом $r(x) = x^2+x+1$. По лемме 3 матрица $C(p) - A_n$ аннулируется $x(x^2+x+1)$ и является 4-потентом.

Случай 3: $n = 2k \ge 4$ четно. Определим матрицу $A \in M_n(F)$ как блочно-диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$, где $A_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ для всех $1 \le i \le k$. Так как каждая из матриц A_i является идемпотентом, то A является идемпотентом.

Через $\Gamma_{2k} \in M_{n-1}(F)$ обозначим матрицу вида

$$\Gamma_{2k} = I_{2k-1} + \sum_{i=0}^{k-2}(-E_{1+2i,\,2+2i} + E_{3+2i,\,2+2i}).$$

К примеру,

$$\Gamma_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $C(p) - A = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma_{2k} & T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$. Покажем что матрица $C(p) - A$ является 4-потентом. Согласно определению матрицы Γ_{2k} имеем $(\Gamma_{2k} - I_{n-1})^2 = 0$. Поэтому матрица Γ_{2k} аннулируется многочленом $(x-1)^2$. По лемме 3 матрица $C(p) - A$ аннулируется многочленом $(x-1)^3$, который равен $x^3 - 1$ в $\mathbb{F}_3$. Следовательно, матрица $C(p) - A$ является 4-потентом. $\square$

Лемма 12. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

(1) *каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_3)$ представима в виде суммы идемпотента и 7-потента;*

(2) *каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_3)$ представима в виде суммы трипотента и 4-потента;*

(3) *каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_3)$ представима в виде суммы двух 4-потентов.*

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n \geq 2$. Рассмотрим кольцо $M_n(\mathbb{F}_3)$. Достаточно показать, что для всякого унитарного многочлена $p(x) \in \mathbb{F}_3[x]$ степени $2 \leq m \leq n$ матрица $C(p)$ допускает указанные в условии разложения. Если $\operatorname{tr}(p) \in \{1, 2\}$, то согласно [14, предложение 3] матрица $C(p)$ представима в виде суммы идемпотента и трипотента. Если $\operatorname{tr}(p) = 0$, то в силу леммы 11 матрица $C(p)$ представима в виде суммы идемпотента и 4-потента. Таким образом пп. (1), (2) уже доказаны и осталось показать, что если $\operatorname{tr}(p) \in \{1, 2\}$, то матрица $C(p)$ представима в виде суммы двух 4-потентов.

Случай 1: $n = 2$. Для любого $\alpha \in \mathbb{F}_3$ имеют место разложения

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \alpha - 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Случай 2: $n = 2k \geq 4$ четно. Определим матрицу $A \in M_n(F)$ как блочно-диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$, где $A_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ для всех $1 \leq i \leq k-1$ и $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для $\operatorname{tr}(p) = 1$ и $A_k = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ для $\operatorname{tr}(p) = 2$. Тогда матрица A является 4-потентом как блочно-диагональная матрица и $C(p) - A = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma_{2k} & T \\ \hline 0 & \lambda \end{array}\right)$, где $\lambda \in \{0, 1\}$ и матрица Γ_{2k} определена в лемме 11. По лемме 3 $C(p) - A$ аннулируется $(x - \lambda)(x - 1)^2$, а значит, является 4-потентом.

Случай 3: $n = 2k + 1$ нечетно и $\operatorname{tr}(p) = 1$. Определим матрицу A_n, как в случае 2 доказательства леммы 11. Тогда матрица $C(p) - A_n = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$ аннулируется $(x - 1)(x^2 + x + 1)$ по лемме 3, а значит, является 4-потентом.

Случай 4: $n = 3$ и $\operatorname{tr}(p) = 2$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3$ имеют место разложения

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & \beta \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Случай 5: $n = 2k + 1 \geq 5$ нечетно и $\operatorname{tr}(p) = 2$. Определим матрицу $A \in M_n(F)$ как блочно-диагональную матрицу $A = \operatorname{diag}(0, A_1, A_2, \dots, A_k)$, где $A_i = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ для всех $1 \leq i \leq k - 1$ и $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда A является идемпотентом и $C(p) - A = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{\Gamma}_{2k}(-1) & T \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$, где для $\lambda \in \mathbb{F}_3$

$$\widetilde{\Gamma}_{2k}(\lambda) = E_{21} + \sum_{i=1}^{k-1} (E_{2i,\,2i} + \lambda E_{2i,\,2i+1} + E_{2i+1,\,2i+1} + E_{2i+2,\,2i+1}).$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{\Gamma}_{2k}(\lambda)^2 = \widetilde{\Gamma}_{2k}(2\lambda)$. Таким образом, матрица $\widetilde{\Gamma}_{2k}(-1)$ является 4-потентом, а значит, аннулируется $x(x - 1)^3$. С другой стороны,

$$\widetilde{\Gamma}_{2k}(-1)^2 - \widetilde{\Gamma}_{2k}(-1) = \sum_{i=1}^{k-1} 2E_{2i,\,2i+1}$$

и поэтому $(\widetilde{\Gamma}_{2k}(-1)^2 - \widetilde{\Gamma}_{2k}(-1))^2 = 0$. Отсюда матрица $\widetilde{\Gamma}_{2k}(-1)$ аннулируется $x^2(x-1)^2$. Следовательно, $\widetilde{\Gamma}_{2k}(-1)$ аннулируется $x(x-1)^2$. По лемме 3 матрица $C(p) - A$ аннулируется $x(x-1)^3$, а значит, является 4-потентом. $\square$

Замечание 13. В доказательстве леммы 12 существенно использовался тот факт, что для унитарного многочлена p с нулевым следом матрица $C(p)$ представима в виде суммы идемпотента и 4-потента. Если бы это условие выполнялось и для случая других следов, то лемма 12 была бы простым следствием данного факта. Однако уже в кольце $M_2(\mathbb{F}_3)$ есть матрица, не имеющая такого представления.

В самом деле, положим $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{F}_3)$. Допустим, что матрица A представима в виде суммы идемпотента и 4-потента. Так как A и $A - I_2$ не являются 4-потентами, соответствующий идемпотент нетривиален. Нетрудно видеть, что все нетривиальные идемпотенты в $M_2(\mathbb{F}_3)$ имеют вид $e = \begin{pmatrix} a & x \\ y & 1-a \end{pmatrix}$, где $a(1-a) = xy$. Выделим несколько случаев.

1) $a = 0$. Тогда $e = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, где $xy = 0$. Нетрудно видеть, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-y & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1-x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

при возведении в квадрат являются скалярными вне зависимости от $x, y \in \mathbb{F}_3$. Поэтому при возведении в четвертую степень они также будут скалярными, а значит, отличными от самих себя.

2) $a = 1$. Тогда $e = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix}$, где $xy = 0$. Нетрудно видеть, что характеристические многочлены матриц

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-x \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1-y & 1 \end{pmatrix}$$

равны $\lambda^2 + (1+x)$ и $\lambda^2 + (1+y)$ соответственно. Поэтому при возведении в четвертую степень матрицы будут скалярными, а значит, отличными от самих себя.

3) $a = 2$. Тогда $e = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 2 \end{pmatrix}$, где $xy = 1$. Нетрудно видеть, что характеристический многочлен матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1-x \\ 1-y & 2 \end{pmatrix}$$

равен $\lambda^2 + (1+x+y-xy)$. Поэтому при возведении в четвертую степень матрица будет скалярной, а значит, отличной от самой себя.

Таким образом, матрица A не может быть представлена в виде суммы идемпотента и 4-потента.

Перейдем к рассмотрению матриц над полем $\mathbb{F}_2$.

Предложение 14. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_2)$ представима в виде суммы двух 4-потентов.*

Доказательство. Достаточно показать, что для всякого унитарного многочлена $p(x) \in \mathbb{F}_2[x]$ степени n матрица $C(p)$ допускает разложение в сумму двух 4-потентов. Разобьем доказательство на пять случаев в зависимости от значения n. Для $n = 1$ утверждение очевидно.

Случай 1: $n = 2$. Если $\mathrm{tr}(p) = 0$, то

$$C(p) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

есть сумма идемпотента и 4-потента. Если $\mathrm{tr}(p) = 1$, то нетрудно видеть, что сама матрица $C(p)$ уже является 4-потентом.

Случай 2: $n = 2k+1$ нечетно. Определим матрицу $A_n \in M_n(\mathbb{F}_2)$, как в лемме 11:

$$A_n = \sum_{i=0}^{k-1} (E_{1+2i,\,2+2i} + E_{2+2i,\,2+2i} + E_{3+2i,\,2+2i}).$$

Непосредственная проверка показывает, что $A_n^2 = A_n$, а значит, матрица A_n является идемпотентом. Имеем $C(p) - A_n = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & \mathrm{tr}(p) \end{array}\right)$, где $B = \mathrm{diag}(B_1, \ldots, B_k)$ — матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. Здесь $B_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ для всех $1 \le i \le k$. Матрица B является 4-потентом и аннулируется многочленом $r(x) = x^2+x+1$. По лемме 3 матрица $C(p)-A_n$ аннулируется $(x-\mathrm{tr}(p))(x^2+x+1)$ и является 4-потентом.

Случай 3: $n = 2k \ge 4$ четно и $\mathrm{tr}(p) = 0$. Определим матрицу $A_n \in M_n(\mathbb{F}_2)$ формулой

$$A_n = E_{11} + E_{21} + \sum_{i=0}^{k-1} (E_{2+2i,\,3+2i} + E_{3+2i,\,3+2i} + E_{4+2i,\,3+2i}).$$

Непосредственная проверка показывает, что $A_n^2 = A_n$, а значит, матрица A_n является идемпотентом. Имеем $C(p) - A_n = \left(\begin{array}{c|c} B & X \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, где $B = \mathrm{diag}(1, B_1, \ldots, B_{k-1})$ — матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. Здесь $B_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ для всех $1 \le i \le k$. Матрица B является 4-потентом и аннулируется многочленом $r(x) = (x-1)(x^2+x+1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - A_n$ аннулируется $x(x-1)(x^2+x+1)$ и является 4-потентом.

Случай 4: $n = 4$ и $\mathrm{tr}(p) = 1$. Положим $B = C(p) - C(x^4 - x)$. Матрица $C(x^4-x)$ является 4-потентом. В матрице B все столбцы, кроме последнего, нулевые. При этом на позиции $(4,4)$ в матрице B стоит единица. Следовательно, матрица B является идемпотентом.

Случай 5: $n = 2k \ge 6$ четно и $\mathrm{tr}(p) = 1$. Определим матрицу $\widetilde{A}_{n-4} \in M_{n-4}(\mathbb{F}_2)$ формулой

$$\widetilde{A}_{n-4} = E_{n-4,\,n-4} + E_{n-3,\,n-4} + \sum_{i=0}^{k-3} (E_{1+2i,\,2+2i} + E_{2+2i,\,2+2i} + E_{3+2i,\,2+2i}).$$

Непосредственная проверка показывает, что $\widetilde{A}_{n-4}^2 = \widetilde{A}_{n-4}$, а значит, матрица $\widetilde{A}_{n-4}$ является идемпотентом. Тогда матрица

$$A = \begin{pmatrix} \widetilde{A}_{n-4} & 0 \\ 0 & C(x^4-x) \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{F}_2)$$

будет 4-потентом. Имеем $C(p)-A=\left(\begin{array}{c|c} B & X \\ 0 & 1 \end{array}\right)$, где

$$B=\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_{k-3},\overline{B},0,0)$$

— матрица размера $(n-1)\times(n-1)$. Здесь

$$B_1=\ldots=B_{k-3}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \overline{B}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По лемме 3 матрица $\overline{B}^T$ аннулируется $r(x)=x(x^2+x+1)$. Тогда и матрица $\overline{B}$ аннулируется $r(x)$. Нетрудно видеть, что матрица B также аннулируется $r(x)$ как блочно диагональная матрица. По лемме 3 матрица $C(p)-A$ аннулируется $r(x)\cdot(x-1)=x^4-x$, а значит, является 4-потентом. □

Хотя в поле $\mathbb{F}_9$ более семи элементов, необходимо отдельно рассмотреть вопрос представимости матриц над полем $\mathbb{F}_9$ в виде суммы трипотента и 5-потента.

Лемма 15. *Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_9)$ представима в виде суммы трипотента и 5-потента.*

Доказательство. Будем ассоциировать элементы поля $\mathbb{F}_9$ с $\mathbb{F}_3[x]/(x^2+x+2)$. Тогда примитивным элементом поля будет образ x, который обозначим через ξ. Достаточно показать, что для любого натурального числа $n>1$ и унитарного многочлена $p\in\mathbb{F}_9[x]$ матрица $C(p)$ есть сумма трипотента и 5-потента.

Если $\operatorname{tr}(p)\in\{0,1,2\}$, то по [14, предложение 3] матрица $C(p)$ есть сумма двух трипотентов. Пусть $\operatorname{tr}(p)\notin\{0,1,2\}$. Покажем, что выполняются условия предложений 5 и 6 для $q_1=3$ и $q_2=5$. Очевидно, что трипотентами в поле $\mathbb{F}_9$ являются $0,\pm1$, а 5-потентами $0,1,2,\xi^2,\xi^6$. В качестве ненулевых 5-потентов, удовлетворяющих условию п. 1 предложения 6, которые представимы в виде $-(\alpha_1+\alpha_2)$, можно взять 1 и 2:

$$1=-(0+2),\quad 2=-(0+1).$$

Тогда для каждого разложения $\operatorname{tr}(p)$ ниже можно подобрать подходящий ненулевой 5-потент, удовлетворяющий условию п. 2 предложения 6:

$$\begin{array}{ll} \xi=2+(2+\xi^6) & \xi^5=1+(1+\xi^2) \\ \xi^2=2+(1+\xi^2) & \xi^6=1+(2+\xi^6) \\ \xi^3=2+(2+\xi^2) & \xi^7=1+(1+\xi^6). \end{array}$$

Таким образом, согласно предложению 6 матрица $C(p)$ является суммой трипотента и 5-потента. □

2. Основные результаты

Теорема 16. *Заключение гипотез 1 и 2 выполняется для всех полей F таких, что $|F|\le 7$.*

Доказательство. Пусть F — поле, каждый элемент которого допускает (q_1,q_2)-разложение. Предположим, что для поля F выполнено либо условие гипотезы 1, либо условие гипотезы 2. Ясно, что без ограничения общности можно считать, что $q_1-1,q_2-1\mid |F|-1$.

Случай 1: F — поле характеристики 2, т. е. одно из полей $\mathbb{F}_2$ или $\mathbb{F}_4$. Тогда под условия гипотезы 2 подходит только случай поля $\mathbb{F}_4$ и $q_1 = q_2 = 4$.

В качестве поля $\mathbb{F}_4$ будем рассматривать поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^2+x+1)$. Тогда примитивным элементом поля будет образ x, который обозначим через ξ. Очевидно, что все элементы поля $\mathbb{F}_4$ являются 4-потентами. Достаточно показать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и унитарного многочлена $p \in \mathbb{F}_4[x]$ матрица $C(p)$ представима в виде суммы двух 4-потентов. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $n > 1$.

Воспользуемся предложениями 5 и 6 для $q_1 = q_2 = 4$. Для начала отметим, что в поле $\mathbb{F}_4$ существуют три различных ненулевых q_2-потента, которые представимы в виде $-(\alpha_1 + \alpha_2)$: $1 = -(0+1)$, $\xi = -(0+\xi)$, $\xi^2 = -(0+\xi^2)$.

Поэтому достаточно указать список разложений вида $\operatorname{tr}(p) = \gamma + (\beta_1 + \beta_2)$,

$$\begin{array}{ll} 0 = \xi + (\xi^2+1) & \xi = 1 + (\xi+1) \\ 1 = \xi + (\xi+1) & \xi^2 = \xi + (\xi+\xi^2). \end{array}$$

В силу предложений 5 и 6 каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_4)$ представима в виде суммы двух 4-потентов.

Случай 2: F — поле нечетной характеристики и $|F| > 3$, т. е. одно из полей $\mathbb{F}_5$ или $\mathbb{F}_7$. Далее будем считать, что $q_1 \le q_2$.

Если $q_1 = 2$, то $q_2 = |F|$ в силу [18, лемма 4]. Согласно [13, теорема 14] все элементы кольца $M_n(F)$ представимы в виде суммы идемпотента и $|F|$-потента.

Если $q_1 = 3$, то либо $q_2 = |F|$, а тогда все элементы кольца $M_n(F)$ представимы даже в виде суммы идемпотента и $|F|$-потента, либо $q_2 = (|F|+1)/2$ (см. лемму 9). Все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_5)$ представимы в виде суммы двух трипотентов по [14, теорема 1]. Все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_7)$ представимы в виде суммы трипотента и 4-потента по предложению 7.

Если $q_1 = 4$, то $|F| = 7$. Так как делителями 6 являются $1, 2, 3, 6$, то либо $q_2 = 4$, либо $q_2 = 7$. Достаточно рассмотреть случай $q_2 = 4$.

Покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и унитарного многочлена $p \in \mathbb{F}_7[x]$ матрица $C(p)$ представима в виде суммы двух 4-потентов. При $n = 1$ утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $n > 1$. Для начала отметим, что в поле $\mathbb{F}_7$ существуют три различных ненулевых q_2-потента, которые представимы в виде $-(\alpha_1+\alpha_2)$: $1 = -(4+2)$, $2 = -(4+1)$, $4 = -(2+1)$.

Поэтому достаточно указать список разложений вида $\operatorname{tr}(p) = \gamma + (\beta_1 + \beta_2)$,

$$\begin{array}{ll} 0 = 4 + (2+1) & 3 = 4 + (4+2) \\ 1 = 2 + (4+2) & 4 = 1 + (2+1) \\ 2 = 4 + (4+1) & 5 = 2 + (2+1) \\ & 6 = 1 + (4+1). \end{array}$$

В силу предложений 5 и 6 каждая матрица из $M_n(\mathbb{F}_7)$ представима в виде суммы двух 4-потентов.

Наконец, если $q_1 > 4$, то условие $q_1 - 1 \mid |F| - 1$ влечет $q_1 = q_2 = |F|$. Согласно [13, теорема 14] все элементы кольца $M_n(F)$ представимы в виде суммы идемпотента и $|F|$-потента. $\square$

Пусть кольцо R целостное и натуральное число $q > 1$ нечетно. В статье [15] показано, что каждый элемент кольца $M_n(R)$ представим в виде суммы идемпотента (соответственно трипотента) и q-потента тогда и только тогда, когда R — конечное поле и каждый элемент R представим в виде суммы идемпотента (соответственно трипотента) и q-потента (см. [15, теорема 1.1]). Существенную роль в доказательстве играет тот факт, что множество идемпотентов (соответственно трипотентов) в поле частных $Q(R)$ совпадает с множеством идемпотентов (соответственно трипотентов) в алгебраическом замыкании $Q(R)$. Если вместо трипотентов взять q_1-потент, где $q_1 > 3$, то эта импликация уже не верна.

Пример 17. Непосредственный перебор на компьютере показывает, что каждый элемент кольца $M_2(\mathbb{F}_7)$ представим в виде суммы двух 9-потентов. Однако не все элементы поля $\mathbb{F}_7$ представимы в виде суммы двух 9-потентов. В самом деле, в силу того, что $1 + \text{НОД}(9-1, 7-1) = 3$, каждый 9-потент в поле $\mathbb{F}_7$ является трипотентом, т. е. элементом множества $\{0, 1, 6\}$. Легко видеть, что $3 \in \mathbb{F}_7$ нельзя представить в виде суммы двух трипотентов.

Сформулируем и докажем искомый результат про поля $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_7$.

Теорема 18.
Пусть R — целостное кольцо. Следующие условия эквивалентны:

(1) *для некоторого* (*каждого*) $n \in \mathbb{N}$ *всякая матрица из* $M_n(R)$ *представима в виде суммы идемпотента и* 7*-потента;*

(2) *для некоторого* (*каждого*) $n \in \mathbb{N}$ *всякая матрица из* $M_n(R)$ *представима в виде суммы трипотента и* 4*-потента;*

(3) *для некоторого* (*каждого*) $n \in \mathbb{N}$ *всякая матрица из* $M_n(R)$ *представима в виде суммы двух* 4*-потентов;*

(4) R *изоморфно одному из полей* $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$ *или* $\mathbb{F}_7$.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (4) и (2) $\Rightarrow$ (4) следуют из леммы 8.

(3) $\Rightarrow$ (4) В силу леммы 8 кольцо R является конечным полем. Если $3 \mid |R| - 1$, то по лемме 8 каждый элемент поля R представим в виде суммы двух 4-потентов и импликация выполняется в силу леммы 10. Предположим, что $3 \nmid |R| - 1$. Тогда 4-потентами в поле R являются только идемпотенты 0 и 1. Через F обозначим алгебраическое замыкание поля R. Из доказательства леммы 8 следует, что все элементы R представимы в виде суммы двух 4-потентов из F.

Если характеристика поля R равна 3, то из равенства $x^3 - 1 = (x-1)^3$ следует, что в F нет нетривиальных 4-потентов. Следовательно, каждый элемент поля R есть сумма двух идемпотентов. Тогда $|R| \leq 3$, а значит, $R \cong \mathbb{F}_3$.

Если характеристика R отлична от 3, то 4-потентами в F являются $0, 1, \alpha, \beta$, где α и β — различные корни $x^2 + x + 1$, $\alpha, \beta \in F \backslash R$. С помощью сумм двух 4-потентов можно получить не более 10 различных элементов, а значит, $|R| \leq 10$. При этом элементы $0 + \alpha$, $1 + \alpha$, $0 + \beta$, $1 + \beta$ не могут лежать в R. Более того, если $\mathrm{char}(R) \neq 2$, элементы $2\alpha = \alpha + \alpha$, $2\beta = \beta + \beta$ также не принадлежат R. Следовательно, $|R| \leq 4$.

(4) $\Rightarrow$ (1) Согласно [13, теорема 14] все элементы колец $M_n(\mathbb{F}_2)$, $M_n(\mathbb{F}_4)$ и $M_n(\mathbb{F}_7)$ представимы в виде суммы идемпотента и 7-потента. Для матриц над полем $\mathbb{F}_3$ утверждение доказано в лемме 12.

(4) $\Rightarrow$ (2) Доказательство импликации проведем отдельно для каждого из полей.

1. Поле $\mathbb{F}_2$. Согласно [13, теорема 14] все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_2)$ представимы в виде суммы идемпотента и трипотента. В частности, все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_2)$ представимы в виде суммы 4-потента и трипотента.

2. Поле $\mathbb{F}_3$. Следует из леммы 12.

3. Поле $\mathbb{F}_4$. Достаточно показать, что для любого натурального числа n и унитарного многочлена $p \in \mathbb{F}_4[x]$ матрица $C(p)$ есть сумма трипотента и 4-потента. Если $\mathrm{tr}(p) \neq 1$, то согласно [13, леммы 1, 2] матрица $C(p)$ есть сумма

идемпотента и 4-потента. Если $\mathrm{tr}(p) = 1$, то согласно [13, лемма 3] матрица $C(p)$ есть сумма трипотента и идемпотента.

4. Поле $\mathbb{F}_7$. Следует из предложения 7.

(4) $\Rightarrow$ (3) Для поля $\mathbb{F}_2$ импликация следует из предложения 14, для поля $\mathbb{F}_3$ — из леммы 12, а для полей $\mathbb{F}_4$ и $\mathbb{F}_7$ — из теоремы 16. $\square$

Теорема 19. *Если R — коммутативное кольцо и $2 \in U(R)$, то следующие условия равносильны:*

(1) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ в кольце $M_n(R)$ всякая матрица представима в виде суммы двух 4-потентов;*

(2) *в кольце R выполнено тождество $x^7 = x$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть n такое натуральное число, что каждая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы двух 4-потентов. Согласно теореме 18 для каждого простого идеала I фактор-кольцо R/I является полем, в котором выполнено тождество $x^7 = x$. Следовательно, $J(R) = \mathrm{Nil}(R)$. Тогда согласно теореме 18 достаточно показать, что $\mathrm{Nil}(R) = 0$. Предположим, что кольцо R содержит ненулевой нильпотентный элемент. Тогда R содержит такой ненулевой элемент α, что $\alpha^2 = 0$. Согласно условию пункта для некоторого $A \in M_n(R)$ имеют место равенства $A^4 = A$, $\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^4$. Тогда

$$\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^4 = A^4 - 4\alpha A^3, \quad \alpha I_n = 2A - 4\alpha A^3.$$

Так как $2 \in U(R)$ и $\alpha^2 = 0$, то $\alpha A = 0$. Тогда $2A = \alpha I_n$ и поскольку $A^4 = A$, то $A = 0$. Тогда $\alpha^4 = \alpha$ и, следовательно, $\alpha = 0$, что противоречит выбору элемента α.

(2) $\Rightarrow$ (1) Пусть n — произвольное натуральное число и $A \in M_n(R)$. Рассмотрим подкольцо S кольца R, порожденное компонентами матрицы A. Ясно, что S — конечное кольцо и, следовательно, имеет место изоморфизм $S \cong P_1 \times \ldots \times P_m$, где P_i — конечное поле, в котором выполнено тождество $x^7 = x$ для каждого $1 \leq i \leq m$. Тогда P_i изоморфно одному из полей: $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_7$. Таким образом, импликация следует из теоремы 18. $\square$

Приведем несколько похожих результатов.

Теорема 20. *Пусть R — целостное кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы идемпотента и 9-потента;*

(2) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы трипотента и 5-потента;*

(3) *R изоморфно одному из полей $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_5$ или $\mathbb{F}_9$.*

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (3) и (2) $\Rightarrow$ (3) следуют из лемм 8, 9, и [18, лемма 4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Следует из [13, теорема 14].

(3) $\Rightarrow$ (2) По [14, теорема 1] все элементы колец $M_2(\mathbb{F}_2)$, $M_2(\mathbb{F}_3)$ и $M_2(\mathbb{F}_5)$ представимы в виде суммы двух трипотентов. Для поля $\mathbb{F}_9$ утверждение доказано в лемме 15. $\square$

Теорема 21. *Если R — коммутативное кольцо и $2 \in U(R)$, то следующие условия равносильны:*

(1) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы идемпотента и 9-потента;*

(2) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы трипотента и 5-потента;*

(3) *в кольце R выполнено тождество $x^9 = x$.*

Доказательство. Импликации (3) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (2) доказываются аналогично импликации (2) $\Rightarrow$ (1) из доказательства теоремы 19.

(2) $\Rightarrow$ (3) Согласно теореме 20 достаточно показать, что $\mathrm{Nil}(R) = 0$. Предположим, что кольцо R содержит такой ненулевой элемент α, что $\alpha^2 = 0$. Согласно условию пункта для некоторого $A \in M_n(R)$ имеют место равенства $A^3 = A$, $\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^5$. Тогда

$$\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^5 = -A^5 + 5\alpha A^4 = -A + 5\alpha A^2, \quad \alpha I_n = 5\alpha A^2.$$

Тогда $4A\alpha = 0$ и, следовательно, $A\alpha = 0$. Таким образом, $\alpha I_n = 5\alpha A^2 = 0$, что противоречит выбору элемента α.

(1) $\Rightarrow$ (3) Согласно теореме 20 достаточно показать, что $\mathrm{Nil}(R) = 0$. Предположим, что кольцо R содержит такой ненулевой элемент α, что $\alpha^2 = 0$. Согласно условию пункта для некоторого $A \in M_n(R)$ выполнены равенства $A^2 = A$, $\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^9$. Имеем

$$\alpha I_n - A = (\alpha I_n - A)^9 = -A + 9\alpha A, \quad \alpha I_n = 9\alpha A.$$

Тогда $8A\alpha = 0$ и, следовательно, $A\alpha = 0$. Таким образом, $\alpha I_n = 9\alpha A = 0$, что противоречит выбору элемента α. $\square$

Теорема 22. *Пусть R — целостное кольцо. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы трипотента и 7-потента;*

(2) *для некоторого (каждого) $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из $M_n(R)$ представима в виде суммы 4-потента и 5-потента;*

(3) *R изоморфно одному из полей $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$, $\mathbb{F}_4$, $\mathbb{F}_5$ или $\mathbb{F}_7$.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) следует из лемм 8 и 9.

(2) $\Rightarrow$ (3) В силу леммы 8 кольцо R является конечным полем. Если $3 \mid |R| - 1$ или $4 \mid |R| - 1$, то по лемме 8 каждый элемент поля R представим в виде суммы 4-потента и 5-потента.

Предположим, что $3, 4 \nmid |R| - 1$. Тогда 4-потентами в поле R являются только идемпотенты 0 и 1, а 5-потентами только трипотенты. Через F обозначим алгебраическое замыкание поля R. Из доказательства леммы 8 следует, что все элементы R представимы в виде суммы 4-потента и 5-потента из F.

Если характеристика поля R равна 3, то из равенства $x^3 - 1 = (x - 1)^3$ следует, что в F нет нетривиальных 4-потентов. Следовательно, каждый элемент поля R есть сумма идемпотента и 5-потента в F. Тогда $|R| \leq 10$, а значит, $R \cong \mathbb{F}_3$ или $R \cong \mathbb{F}_9$. Поле $\mathbb{F}_9$ не подходит, так как $4 \mid 9 - 1$.

Если характеристика поля R равна 2, то из равенства $x^4 - 1 = (x - 1)^4$ следует, что в F нет нетривиальных 5-потентов. Следовательно, каждый элемент поля R есть сумма идемпотента и 4-потента в F. Так как $0 + 1 = 1 + 0$, то $|R| \leq 8 - 1$.

Если характеристика R отлична от 2 и 3, то

• 4-потентами в F являются $0, 1, \alpha, \beta$, где α и β — корни $x^2 + x + 1$, $\alpha, \beta \in F \backslash R$;

• 5-потентами в F являются $0, 1, -1, \gamma, \delta$, где γ и δ — корни x^2+1, $\gamma, \delta \in F \backslash R$.

Подсчитаем, сколько элементов из R можно получить с помощью суммы из 4-потента и 5-потента. Элементы $0+\alpha$, $\pm 1+\alpha$, $0+\beta$, $\pm 1+\beta$ не могут лежать в R. Также не могут лежать в R и элементы $0+\gamma$, $1+\gamma$, $0+\delta$, $1+\delta$. Из сумм элементов $\{0, 1\}$ и $\{0, 1, -1\}$ можно получить только 4 различных элемента. Поэтому $|R| \leq 4 + 2 \cdot 2 = 8$. А так как характеристика R отлична от 2, то $|R| \neq 8$.

(3) $\Rightarrow$ (1) В силу теоремы 18 (п. 1) необходимо рассмотреть только поле $\mathbb{F}_5$. Все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_5)$ представимы в виде суммы двух трипотентов по [14, теорема 1].

(3) $\Rightarrow$ (2) В силу теоремы 18 (п. 2) необходимо рассмотреть только поле $\mathbb{F}_5$. Все элементы кольца $M_n(\mathbb{F}_5)$ представимы в виде суммы идемпотента и 5-потента по [14, теорема 1]. $\square$

3. Заключение

Допустим, что все элементы поля F допускают (q_1, q_2)-разложение. Предложения 5 и 6 позволяют доказать наличие (q_1, q_2)-разложений в кольце $M_n(F)$, но требуют выполнения достаточно специфических условий. Однако компьютерные эксперименты показывают, что при $|F| > 7$ требуемые условия обязаны соблюдаться. А именно имеет место следующая

Гипотеза 23. *Пусть F — конечное поле, $|F| > 7$, $q_1, q_2 \geq 4$ и $q_1 - 1, q_2 - 1$ делят $|F| - 1$. Пусть также каждый элемент поля допускает (q_1, q_2)-разложение. Тогда для одной из пар (q_1, q_2) или (q_2, q_1), обозначенной далее как (p, q), выполняются условия:*

(1) *в поле существуют по крайней мере три различных ненулевых q-потента, которые представимы в виде $-(\alpha_1 + \alpha_2)$, где α_1, α_2 — различные p-потенты;*

(2) *для любого ненулевого элемента $f \in F$ найдутся различные ненулевые q-потенты $\beta_1, \beta_2 \in F$ и ненулевой p-потент $\gamma \in F$ такие, что $(\beta_1 + \beta_2) + \gamma = f$.*

Для полей с $7 < |F| \leq 20000$ и всевозможных разложений в данных полях выполнение гипотезы 23 было проверено на компьютере. В данной формулировке говорится о выполнении хотя бы одного из двух условий. Однако те же самые компьютерные эксперименты показывают, что если в гипотезе 23 положить $5 \leq q_1 \leq q_2$, то в качестве пары (p, q) почти всегда можно взять (q_2, q_1). А именно, среди рассмотренных полей имеется только один контрпример: в поле $\mathbb{F}_{4096}$ каждый элемент допускает $(8, 1366)$-разложение, однако если в качестве пары (p, q) взять $(1366, 8)$, то нарушится п. 2 гипотезы. При этом для $(p, q) = (8, 1366)$ заключение гипотезы выполняется.

Отметим, что условие $f \neq 0$ в п. 2 гипотезы 23 существенно: элемент 0 может не иметь указанного в гипотезе разложения. Хотя, к примеру, п. 1 и говорит о том, что имеет место равенство $0 = (\alpha_1 + \alpha_2) + \gamma$ для q_2-потента $\gamma = -(\alpha_1 + \alpha_2)$, но говорить о применимости предложений 5 и 6 нельзя — один из элементов α_i может равняться нулю. Поэтому необходимо отдельно выделить случай $\mathrm{tr}(p) = 0$. Для этого докажем следующую техническую лемму.

Лемма 24. *Пусть F — конечное поле и $0 = e_1 + f_1$ и $0 = e_2 + f_2$ — два различных (q_1, q_2)-разложения в F, причем $e_1, e_2 \neq 0$. Тогда матрица $C(p) \in M_n(F)$ допускает (q_1, q_2)-разложение для любого унитарного многочлена $p \in F[x]$ степени $n \geq 2$ с нулевым следом.*

Доказательство. Пусть $p \in F[x]$ — унитарный многочлен степени $n \geq 2$ с нулевым следом. Положим $K = (e_1, A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k+1$ нечетно, и $K = (A_1, \dots, A_k)$, если $n = 2k$ четно. Здесь

$$A_1 = \ldots = A_{k-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e_1 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e_2 \end{pmatrix}.$$

Собственными значениями матриц $A_1, \dots, A_{k-1}$ являются различные q_1-потенты 0 и e_1. Собственными значениями матрицы A_k являются различные q_1-потенты 0 и e_2. Следовательно, матрицы $A_1, \dots, A_k$ являются q_1-потентами. Тогда K является q_1-потентом как блочно-диагональная матрица. Непосредственная проверка показывает, что

$$C(p) - K = \left(\begin{array}{c|c} B & H \\ \hline 0 & f_2 \end{array}\right),$$

где $B = (B_1, \dots, B_k)$, если $n = 2k+1$ нечетно, и $B = (0, B_1, \dots, B_{k-1})$, если $n = 2k$ четно. Здесь $B_1 = \ldots = B_k = \begin{pmatrix} f_1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица B является q_2-потентом и аннулируется многочленом $r(x) = x(x - f_1)$. По лемме 3 матрица $C(p) - K$ аннулируется $x(x-f_1)(x-f_2)$, а значит, является q_2-потентом. □

Одной из центральных теорем данной статьи является следующий результат, который сводит проверку выполнимости гипотез 1 и 2 к исследованию свойств элементов полей.

Теорема 25. *Если гипотеза* 23 *верна, то заключение гипотез* 1 *и* 2 *выполняется для всех полей F таких, что* $|F| > 7$.

Доказательство. Предположим что гипотеза 23 верна. Пусть F — конечное поле, $|F| > 7$ и каждый элемент поля допускает (q_1, q_2)-разложение. Можно считать, что $q_1 - 1, q_2 - 1 \mid |F| - 1$ и $q_1 \leq q_2$. Разобьем доказательство на случаи в зависимости от значения q_1.

Случай 1. Пусть $q_1 = 2$. Тогда в поле четной характеристики нет нетривиальных q_1-потентов. Поэтому необходимо рассмотреть только случай нечетной характеристики. В силу [18, лемма 4] $q_2 = |F|$. Согласно [13, теорема 14] для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(F)$ представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q-потентной матрицы.

Случай 2. Пусть $q_1 = 3$. Так как $3 - 1 \nmid |F| - 1$, если характеристика поля F четна, то снова необходимо рассмотреть только случай нечетной характеристики. Если $|F| > 9$, то $q_2 = |F|$ в силу леммы 9. Тогда согласно [13, теорема 14] для каждого $n \in \mathbb{N}$ всякая матрица из кольца $M_n(F)$ представима в виде суммы идемпотентной матрицы и q_2-потентной матрицы. Для оставшегося случая $F = \mathbb{F}_9$ заключение следует из того, что по лемме 15 всякая матрица из кольца $M_n(F)$ представима в виде суммы трипотента и 5-потента.

Случай 3. Пусть $q_1 \geq 4$. Достаточно показать, что (q_1, q_2)-разложение допускает матрица $C(p) \in M_n(F)$ для любого унитарного многочлена $p \in F[x]$ степени $n \geq 2$. Если $\mathrm{tr}(p) \neq 0$, то гипотеза 23 и предложения 5 и 6 гарантируют существование искомого разложения.

Пусть теперь $\mathrm{tr}(p) = 0$. Достаточно ограничиться случаем, когда одновременно не выполняются оба условия:

• не существует различных ненулевых q_2-потентов $\beta_1, \beta_2 \in F$ и ненулевого q_1-потента $\gamma \in F$ таких, что $(\beta_1 + \beta_2) + \gamma = 0$;

• не существует различных ненулевых q_1-потентов $\beta_1, \beta_2 \in F$ и ненулевого q_2-потента $\gamma \in F$ таких, что $(\beta_1 + \beta_2) + \gamma = 0$.

Пусть (q_1', q_2') — та из пар (q_1, q_2) или (q_2, q_2), для которой существует по крайней мере три различных ненулевых q_2'-потента, которые представимы в виде $-(\alpha_1 + \alpha_2)$, где α_1, α_2 — различные q_1'-потенты. Пусть также γ — один из таких ненулевых q_2'-потентов: $\gamma = -(\alpha_1 + \alpha_2)$. Тогда $(\alpha_1 + \alpha_2) + \gamma = 0$. В силу предположения один из элементов α_1, α_2 должен равняться нулю. Тогда имеет место (q_2', q_1') разложение вида $0 = \gamma + \alpha$. Так как различных элементов γ не менее трех, то выполнены условия леммы 24 и матрица $C(p) \in M_n(F)$ допускает (q_1, q_2)-разложение для любого унитарного многочлена $p \in F[x]$ степени $n \geq 2$ с нулевым следом. $\square$

Даже если гипотезы 1 и 2 верны, то пример 17 показывает, что ситуация достаточно односторонняя. Мы можем поднимать разложения с полей на кольца матриц, но не можем спускать их обратно. Поэтому такие результаты, как [14, теорема 1] и теорема 18 в лучшем случае редки. Однако если несколько ослабить условие, то ситуация может измениться. Вместо того, чтобы рассматривать наличие (q_1, q_2)-разложения для всех матриц фиксированного, но произвольного размера, можно ограничиться наличием (q_1, q_2)-разложения для всех матриц произвольного размера. В связи с этим возникает следующий

Открытый вопрос. *Пусть F — конечное поле, $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ и $q_1, q_2 > 2$. Предположим, что для любого натурального $n > 1$ все матрицы в кольце $M_n(F)$ допускают (q_1, q_2)-разложение. Верно ли что в этом случае все элементы поля F тоже допускают (q_1, q_2)-разложение?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hirano H., Tominaga P.* Rings in which every element is the sum of two idempotents // Bull. Aust. Math. Soc. 1988. V. 37, N 2. P. 161–164.

2. *Tang G., Zhou Y., Su H.* Matrices over a commutative ring as sums of three idempotents or three involutions // Linear Multilinear Algebra. 2019. V. 67, N 2. P. 267–277.

3. *Ying Z., Koşan T., Zhou Y.* Rings in which every element is a sum of two tripotents // Canad. Math. Bull. 2016. V. 59, N 3. P. 661–672.

4. *Zhou Y.* Rings in which elements are sum of nilpotents, idempotents and tripotents // J. Algebra Appl. 2018. V. 17, N 1. 1850009.

5. *Abdolyousefi M. Sh., Chen H.* Matrices over Zhou nil-clean rings // Commun. Algebra. 2018. V. 46, N 4. P. 1527–1533.

6. *Breaz S., Călugăreanu G., Danchev P., Micu T.* Nil-clean matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 439, N 10. P. 3115–3119.

7. *Šter J.* On expressing matrices over Z_2 as the sum of an idempotent and a nilpotent // Linear Algebra Appl. 2018. V. 544. P. 339–349.

8. *Kocsan M. T., Lee T.-K., Zhou Y.* When is every matrix over a division ring a sum of an idempotent and a nilpotent? // Linear Algebra Appl. 2014. V. 450. P. 7–12.

9. *Koşan M. T., Wang Z., Zhou Y.* Nil-clean and strongly nil-clean rings // J. Pure Appl. Algebra. 2016. V. 220, N 2. P. 633–646.

10. *Abdolyousefi M. Sh., Chen H.* Sums of tripotent and nilpotent matrices // Bull. Korean Math. Soc. 2018. V. 55, N 3. P. 913–920.

11. *Абызов А. Н., Мухаметгалиев М. И.* О некоторых матричных аналогах малой теоремы Ферма // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 2. С. 163–168.

12. *Breaz S.* Matrices over finite fields as sums of periodic and nilpotent elements // Linear Algebra Appl. 2018. V. 555. P. 92–97.

13. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы идемпотентной матрицы и q-потентной матрицы // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 3–18.
14. *Abyzov A. N., Tapkin D. T.* When is every matrix over a ring the sum of two tripotents? // Linear Algebra Appl. 2021. V. 630. P. 316–325.
15. *Abyzov A. N., Cohen S. D., Danchev P. V., Tapkin D. T.* Rings and finite fields whose elements are sums or differences of tripotents and potents // Turk. J. Math. 2024. V. 48, N 5. P. 817–839.
16. *Абызов А. Н., Тапкин Д. Т.* Кольца, матрицы над которыми представимы в виде суммы двух потентных матриц // Изв. вузов. Математика. 2023. № 12. С. 90–94.
17. *Lam T. Y.* A first course in noncommutative rings. New York: Springer-Verl., 2001.
18. *Abyzov A. N., Tapkin D. T.* On rings with $x^n - x$ nilpotent // J. Algebra Appl. 2022. V. 21, N 6. 2250111.

Поступила в редакцию 13 июля 2024 г.
После доработки 20 сентября 2024г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Абызов Адель Наилевич (ORCID 0000-0002-9809-2091),
Тапкин Даниль Тагирзянович (ORCID 0000-0003-0828-4397)
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420000
`Adel.Abyzov@kpfu.ru`, `danil.tapkin@yandex.ru`

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.929.4

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. Ю. Александров

Аннотация. Исследуется устойчивость систем Персидского с распределенным запаздыванием. Предполагается, что функции секторного типа, входящие в правые части этих систем, существенно нелинейны. Предлагается оригинальная конструкция функционала Ляпунова — Красовского, с использованием которой находятся новые условия асимптотической устойчивости нулевого решения. Разработанный подход применяется для анализа устойчивости системы Лурье непрямого управления, а также механической системы с существенно нелинейными позиционными силами. Кроме того, на основе развития метода усреднения определяются условия, гарантирующие сохранение устойчивости при воздействии на рассматриваемые системы нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.602

Ключевые слова: нелинейные системы, распределенное запаздывание, функционалы Ляпунова — Красовского, асимптотическая устойчивость, метод усреднения, декомпозиция.

§ 1. Введение

Важной проблемой современной теории управления является исследование устойчивости нелинейных систем с запаздыванием [1–5]. Актуальность этой проблемы обусловлена широкими приложениями таких систем. Они применяются при моделировании систем автоматического управления, в задачах популяционной динамики, в экономике, химии, а также в ряде других областей [2–4]. В последние годы нелинейные системы с запаздыванием активно используются в качестве математических моделей мультиагентных и киберфизических систем [2, 4].

Основным инструментом анализа устойчивости нелинейных систем является прямой метод Ляпунова. Его применение к системам с запаздыванием базируется на нахождении или функций Ляпунова — Разумихина, или функционалов Ляпунова — Красовского, обладающих специальными свойствами [1, 2]. Однако следует заметить, что разработка общих конструктивных подходов к построению указанных функций и функционалов до сих пор остается важной нерешенной задачей не только для нелинейных, но даже и для линейных систем с запаздыванием [1]. Вследствие этого известные результаты по устойчивости нелинейных систем с запаздыванием, в основном, получены для специальных

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00091, https://rscf.ru/project/24-21-00091/.

классов систем (квазилинейных, однородных, позитивных, для некоторых канонических форм систем автоматического регулирования и т. д.) [3, 4, 6–8].

К одному из таких важных и интересных классов относятся системы Персидского [9]. Правые части этих систем представляют собой линейные комбинации функций секторного типа. Системы Персидского широко используются в качестве математических моделей управляемых систем, цифровых фильтров, нейронных сетей [9, 10]. Они также применяются при моделировании динамики общественного мнения [7]. К системам Персидского приводятся обобщенные вольтерровские модели, описывающие взаимодействие видов в биологических сообществах [9].

Впервые условия устойчивости систем Персидского без запаздывания были установлены Е. А. Барбашиным на основе построения функций Ляпунова в виде линейных комбинаций интегралов от нелинейностей [11]. В [12] для анализа устойчивости позитивных систем Персидского без запаздывания использовались линейные функции Ляпунова. В ряде последующих работ были предложены различные специальные конструкции функций Ляпунова для указанного класса систем, в том числе и при наличии переключений в правых частях изучаемых уравнений (см. [9, 10, 13–15] и цитируемую там библиографию). Некоторые подходы к построению функционалов Ляпунова — Красовского для позитивных систем Персидского с переключениями и постоянными запаздываниями разработаны в статьях [15–17]. С их помощью были найдены условия, гарантирующие асимптотическую устойчивость при любых значениях запаздываний и любых допустимых законах переключения. В [7] рассмотрены обобщенные системы Персидского с постоянными запаздываниями, для которых с использованием прямого метода Ляпунова получены условия устойчивости от входа к состоянию, сформулированные в терминах линейных матричных неравенств. В работах [18, 19] строились функционалы Ляпунова — Красовского для позитивных систем Персидского с переключениями и распределенным запаздыванием.

В данной статье рассматривается система Персидского с распределенным запаздыванием. Предполагается, что указанная система, вообще говоря, не является позитивной, а функции секторного типа, входящие в ее правые части, существенно нелинейны. Предлагается оригинальная конструкция функционала Ляпунова — Красовского, с использованием которой находятся новые условия асимптотической устойчивости нулевого решения. Разработанный подход применяется для анализа устойчивости системы Лурье непрямого управления, а также механической системы с существенно нелинейными позиционными силами. Кроме того, на основе развития метода усреднения определяются условия, гарантирующие сохранение устойчивости при воздействии на рассматриваемые системы нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему Персидского с распределенным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Pf(x(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} Q(s-t)f(x(s))\,ds. \tag{1}$$

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $\tau > 0$ — постоянная, P — постоянная матрица, матрица $Q(\xi)$ непрерывна при $\xi \in [-\tau, 0]$, векторная функция $f(x) = (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))^\top$

непрерывна при $\|x\| < \Delta$ ($0 < \Delta \leq +\infty$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора) и удовлетворяет условиям секторного типа $x_i f_i(x_i) > 0$ при $x_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Заметим, что системы с распределенным запаздыванием широко используются в качестве математических моделей динамики популяций, управляемых систем с ПИД-регуляторами, деформируемых твердых тел с памятью, а также в задачах управления транспортными потоками [2, 4, 20, 21].

Каждое решение $x(t) = x(t, t_0, \psi)$ системы (1) при $t \geq t_0$ определяется начальными условиями: начальным моментом времени $t_0 \geq 0$ и начальной функцией $\psi(\xi)$, принадлежащей банахову пространству $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ непрерывных вектор-функций $\psi(\xi) : [-\tau, 0] \mapsto \mathbb{R}^n$ с равномерной нормой $\|\psi\|_\tau = \max\limits_{\xi \in [-\tau, 0]} \|\psi(\xi)\|$. Через x_t обозначим отрезок решения: $x_t : \xi \mapsto x(t + \xi)$ при $\xi \in [-\tau, 0]$.

Из свойств функции $f(x)$ следует, что система (1) имеет нулевое решение. Определим условия асимптотической устойчивости этого решения. Заметим, что такие условия достаточно хорошо изучены в случае, когда система (1) линейна, т. е. $f(x) = x$ [2, 22]. Анализ устойчивости нелинейной системы (1) проводился в работах [18, 19] при дополнительном предположении о том, что указанная система позитивна. В настоящей статье исследован случай, когда условие позитивности, вообще говоря, не выполнено, а компоненты вектора $f(x)$ представляют собой существенно нелинейные функции степенного вида.

Предположение 1. *Пусть $f_i(x_i) = x_i^{\alpha_i}$, где α_i — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $\alpha_i > 1$, $i = 1, \ldots, n$.*

Покажем, что для системы с нелинейностями такого типа условия асимптотической устойчивости нулевого решения можно получить в достаточно простой и конструктивной форме, причем в ряде случаев они представляют собой менее жесткие ограничения по сравнению с известными условиями асимптотической устойчивости соответствующей линейной системы (см. [2]). Для этого будет предложен специальный подход к нахождению функционалов Ляпунова — Красовского для изучаемых систем. Указанный подход также будет применяться для анализа устойчивости системы Лурье непрямого управления и механической системы с существенно нелинейными позиционными силами. Кроме того, исследуем воздействие на рассматриваемые системы нестационарных возмущений с нулевыми средними значениями и на основе развития метода усреднения определим условия, при выполнении которых возмущения не нарушают устойчивости решений.

§ 3. Достаточные условия асимптотической устойчивости

В статье [8] рассматривались нелинейные однородные системы с распределенным запаздыванием. Для анализа их устойчивости строились функционалы Ляпунова — Красовского полного типа [1] специального вида. В данном параграфе разработанный в [8] подход распространяется на системы Персидского.

Предположение 2. *Пусть матрица $M = P + \int\limits_{-\tau}^{0} Q(\xi) d\xi$ диагонально устойчива [9], т. е. существует диагональная положительно определенная матрица Λ, при которой матрица $\Lambda M + M^\top \Lambda$ отрицательно определена.*

Теорема 1. *Если справедливы предположения 1 и 2, то нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Выбираем функционал Ляпунова — Красовского в виде

$$V(x_t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+f^\top(x(t))\Lambda\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{-\tau}^{s-t}Q(\xi)d\xi f(x(s))\,ds$$
$$+\int\limits_{t-\tau}^{t}(\gamma+\beta(s-t+\tau))\|f(x(s))\|^2\,ds. \quad (2)$$

Здесь Λ — диагональная матрица, обладающая свойствами, указанными в предположении 2, λ_i — ее диагональные элементы, γ и β — положительные параметры. Получим

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}-c_1\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^{\alpha_i}+\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\le V(x_t)$$
$$\le\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+c_1\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\sum_{i=1}^{n}|x_i(t)|^{\alpha_i}+(\gamma+\beta\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds,$$

где $c_1=\text{const}>0$.

Дифференцируя функционал (2) в силу системы (1), имеем

$$\dot V(x_t)=\frac{1}{2}f^\top(x(t))(\Lambda M+M^\top\Lambda)f(x(t))+(\gamma+\beta\tau)\|f(x(t))\|^2$$
$$-\gamma\|f(x(t-\tau))\|^2-\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds$$
$$+\left(Pf(x(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}Q(s-t)f(x(s))\,ds\right)^\top\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\Lambda\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{-\tau}^{s-t}Q(\xi)d\xi f(x(s))\,ds$$
$$\le(\gamma+\beta\tau-c_2)\|f(x(t))\|^2-\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds$$
$$+c_3\left(\|f(x(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\right)\left\|\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\right\|\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds,$$

где c_2,c_3 — положительные постоянные.

Выберем параметры γ и β так, чтобы выполнялось условие $\gamma+\beta\tau<c_2/2$. Используя неравенства Юнга и Гёльдера [2], нетрудно проверить, что существует число $\delta>0$ такое, что если $\|x_t\|_\tau<\delta$, то

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+\frac{1}{2}\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\le V(x_t)$$
$$\le 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+2(\gamma+\beta\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds,$$

$$\dot V(x_t) \le -\frac{1}{4}c_2\|f(x(t))\|^2 - \frac{1}{2}\beta \int\limits_{t-\tau}^{t} \|f(x(s))\|^2\,ds.$$

Значит (см. [2, с. 53]), нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что предположение 2 имеет более простой и конструктивный вид по сравнению с известными условиями асимптотической устойчивости линейных систем с распределенным запаздыванием (см. [2, 22, 23]). Его удобнее использовать для построения стабилизирующих управлений. Кроме того, в ряде случаев оно приводит к существенно менее жестким ограничениям на параметры системы, чем условия из указанной работы.

Пример 1. В [23] система (1) рассматривалась при следующих предположениях: $n = 2$, $f(x) = x$, Q — постоянная матрица,

$$P = \begin{pmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

С использованием линейных матричных неравенств было доказано, что если $\tau \in [0.2001, 1.6339]$, то нулевое решение данной системы асимптотически устойчиво.

Пусть теперь для функции $f(x)$ выполнено предположение 1. Применяя теорему 1, получаем, что тогда асимптотическая устойчивость гарантируется при всех $\tau > 0.2$.

Далее рассмотрим возмущенную систему

$$\dot x(t) = Pf(x(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} Q(s-t)f(x(s))\,ds + R(t,x_t), \tag{3}$$

где функционал $R(t,x_t)$ непрерывен при $t \ge 0$, $\|x_t\|_\tau < \Delta$, причем в указанной области справедлива оценка

$$\|R(t,x_t)\| \le \widetilde{c}\left(\|f(x(t))\| + \int\limits_{-\tau}^{0} \|f(x(s))\|\,ds\right)^{\nu},$$

$\widetilde{c}, \nu$ — положительные постоянные.

Используя функционал (2), нетрудно проверить, что если выполнены предположения 1, 2 и $\nu > 1$ (т. е. порядок возмущений выше порядка функций, входящих в правые части системы (1)), то нулевое решение системы (3) асимптотически устойчиво.

Рассмотрим теперь случай, когда возмущенная система имеет вид

$$\dot x(t) = (P+B_1(t))f(x(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} Q(s-t)f(x(s))\,ds + \int\limits_{t-\tau}^{t} B_2(s)D(s-t)f(x(s))\,ds. \tag{4}$$

Здесь матрицы $B_1(t), B_2(t)$ непрерывны и ограничены при $t \ge -\tau$, матрица $D(\xi)$ непрерывна при $\xi \in [-\tau, 0]$, а остальные обозначения — те же, что и для системы (1). Следовательно, порядки возмущений в (4) совпадают с порядками соответствующих функций в правых частях невозмущенных уравнений.

Покажем, что такие возмущения не нарушают асимптотической устойчивости нулевого решения при условии, что матрицы $B_1(t), B_2(t)$ имеют нулевые средние значения, причем в этом случае на нормы матриц $B_1(t)$, $B_2(t)$, $D(\xi)$ никаких дополнительных ограничений накладывать не требуется.

Предположение 3. *Пусть*

$$\frac{1}{T}\int\limits_t^{t+T} B_k(s)\,ds \to 0 \quad \textit{при } T\to\infty,\ k=1,2,$$

равномерно относительно $t\ge 0$.

Теорема 2. *Если выполнены предположения* 1–3, *то нулевое решение системы* (4) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Продифференцируем функционал Ляпунова — Красовского (2) в силу системы (4). Имеем

$$\dot V(x_t)=W(x_t)+f^\top(x(t))\Lambda\left(B_1(t)f(x(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}B_2(s)D(s-t)f(x(s))\,ds\right)$$
$$+\left(B_1(t)f(x(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}B_2(s)D(s-t)f(x(s))\,ds\right)^\top\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\Lambda\int\limits_{t-\tau}^{t}\int\limits_{-\tau}^{s-t}Q(\xi)d\xi f(x(s))\,ds,$$

где $W(x_t)$ — производная этого функционала в силу невозмущенной системы (1).

Как и при доказательстве теоремы 1, получаем, что положительные числа γ,β,δ можно выбрать так, чтобы при $\|x_t\|_\tau<\delta$ была справедлива оценка

$$\dot V(x_t)\le-\widetilde c_1\|f(x(t))\|^2-\frac12\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds$$
$$+f^\top(x(t))\Lambda\left(B_1(t)f(x(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}B_2(s)D(s-t)f(x(s))\,ds\right),$$

где $\widetilde c_1=\mathrm{const}>0$.

Далее, используя подход, предложенный в [8], строим новый функционал по формуле $\widetilde V(t,x_t)=V(x_t)+\widehat V(t,x_t)$. Здесь

$$\widehat V(t,x_t)=f^\top(x(t))\Lambda\int\limits_{t-\tau}^{t}B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{s-t}D(\xi)d\xi f(x(s))\,ds$$
$$-f^\top(x(t))\Lambda\int\limits_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B_1(s)\,dsf(x(t))-f^\top(x(t))\Lambda\int\limits_0^t e^{\varepsilon(s-t)}B_2(s)\,ds\int\limits_{-\tau}^{0}D(\xi)\,d\xi f(x(t)),$$

а ε — положительный параметр. Тогда при $\|x_t\|_\tau<\delta$ имеем

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}-\widetilde c_2\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\sum_{i=1}^n|x_i(t)|^{\alpha_i}-\frac{1}{\varepsilon}\widetilde c_3\|f(x(t))\|^2$$
$$+\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\le\widetilde V(t,x_t)\le\sum_{i=1}^n\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+\widetilde c_2\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\sum_{i=1}^n|x_i(t)|^{\alpha_i}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\widetilde{c}_3\|f(x(t))\|^2+(\gamma+\beta\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds,$$

$$\dot{\widetilde{V}}(t,x_t)\le-\widetilde{c}_1\|f(x(t))\|^2-\frac{1}{2}\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds+\left(\frac{\partial\widehat{V}(t,x_t)}{\partial x}\right)^{\top}\dot{x}(t)$$
$$+\varepsilon f^{\top}(x(t))\Lambda\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}\left(B_1(s)+B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D(\xi)d\xi\right)ds f(x(t))$$
$$\le-\widetilde{c}_1\|f(x(t))\|^2-\frac{1}{2}\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds$$
$$+\varepsilon\widetilde{c}_4\left\|\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}\left(B_1(s)+B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D(\xi)d\xi\right)ds\right\|\|f(x(t))\|^2$$
$$+\widetilde{c}_5\left\|\frac{\partial f(x(t))}{\partial x}\right\|\left(\|f(x(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\right)\left(\frac{1}{\varepsilon}\|f(x(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|\,ds\right),$$

где $\widetilde{c}_4,\widetilde{c}_5$ — положительные постоянные.

Известно (см. [24]), что если выполнено предположение 3, то

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}\left(B_1(s)+B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D(\xi)d\xi\right)ds\right\|\to 0$$

при $\varepsilon\to 0$ равномерно относительно $t\ge 0$. Поэтому можно выбрать и зафиксировать значение ε так, чтобы при всех $t\ge 0$ имело место неравенство

$$\varepsilon\widetilde{c}_4\left\|\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}\left(B_1(s)+B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D(\xi)d\xi\right)ds\right\|\le\frac{1}{2}\widetilde{c}_1.$$

Тогда найдется $\widetilde{\delta}>0$ такое, что

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\right)\le\widetilde{V}(t,x_t)$$
$$\le 2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{x_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+(\gamma+\beta\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\right),$$
$$\dot{\widetilde{V}}(t,x_t)\le-\frac{1}{4}\left(\widetilde{c}_1\|f(x(t))\|^2+\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|f(x(s))\|^2\,ds\right)$$

при $\|x_t\|_\tau<\widetilde{\delta}$. Теорема доказана.

Замечание 2. В отличие от известных результатов об устойчивости линейных нестационарных систем на основе усреднения (см. [24]), в теореме 2 не требуется, чтобы возмущения представляли собой быстро изменяющиеся функции времени.

§ 4. Анализ устойчивости системы Лурье непрямого управления

Рассмотрим систему

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= A\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} H(s-t)\varphi(y(s))\,ds + Gz(t),\\
\dot{z}(t) &= C\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} L(s-t)\varphi(y(s))\,ds + Nz(t),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $y(t) \in \mathbb{R}^k$, $z(t) \in \mathbb{R}^m$, τ — положительная постоянная, векторная функция $\varphi(y) = (\varphi_1(y_1), \ldots, \varphi_k(y_k))^\top$ непрерывна при $\|y\| < \Delta$ $(0 < \Delta \leq +\infty)$ и удовлетворяет условиям секторного типа $y_i\varphi_i(y_i) > 0$ при $y_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, k$, матрицы $H(\xi)$ и $L(\xi)$ размеров $k \times k$ и $m \times k$ соответственно непрерывны при $\xi \in [-\tau, 0]$, A, G, C, N — постоянные матрицы соответствующих размеров. Предполагаем, что начальные функции для решений системы (5) выбираются из пространства $C([-\tau, 0], \mathbb{R}^{k+m})$.

Данная система принадлежит хорошо известному классу систем Лурье непрямого управления (см. [10, 25]). В то же время она представляет собой частный случай системы (1) (здесь $n = k + m$, $x = (y^\top, z^\top)^\top$, $f(x) = (\varphi^\top(y), z^\top)^\top$). Однако для нее не выполнено предположение 1. Поэтому к системе (5) нельзя применить результаты предыдущего раздела.

Для анализа устойчивости системы (5) воспользуемся подходами, разработанными в [26, 27]. Заметим, что в [26] исследовалась сложная система без запаздывания, описывающая взаимодействие линейной и нелинейной однородной подсистем, а в [27] изучалась система Лурье непрямого управления с постоянным запаздыванием. Покажем, что указанные подходы можно распространить и на системы вида (5) с распределенным запаздыванием.

Строим вспомогательные подсистемы

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= \Omega\varphi(y(t)),\\
\dot{z}(t) &= Nz(t),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где

$$
\Omega = A + \int\limits_{-\tau}^{0} H(\xi)d\xi - GN^{-1}\left(C + \int\limits_{-\tau}^{0} L(\xi)d\xi\right).
$$

Предположение 4. *Матрица Ω диагонально устойчива.*

Предположение 5. *Подсистема* (6) *асимптотически устойчива.*

Предположение 6. *Пусть $\varphi_i(y_i) = y_i^{\alpha_i}$, где $\alpha_i > 1$ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, $i = 1, \ldots, k$.*

Теорема 3. *Если справедливы предположения* 4–6, *то нулевое решение системы* (5) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. В соответствии с предположением 4 находим постоянную диагональную положительно определенную матрицу Λ, при которой матрица $\Lambda\Omega + \Omega^\top\Lambda$ отрицательно определена.

Из асимптотической устойчивости подсистемы (6) следует, что постоянную симметричную положительно определенную матрицу Ξ можно выбрать так, чтобы матрица $\Xi N + N^\top \Xi$ была отрицательно определена.

Функционал Ляпунова — Красовского для системы (5) строим по формуле

$$V(y_t, z(t)) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{y_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1} + \mu z^\top(t)\Xi z(t) - \varphi^\top(y(t))\Lambda G N^{-1} z(t)$$
$$+ \varphi^\top(y(t))\Lambda \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{s-t} H(\xi) d\xi \varphi(y(s))\, ds - \varphi^\top(y(t))\Lambda G N^{-1} \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{s-t} L(\xi)\, d\xi \varphi(y(s))\, ds$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} (\gamma + \beta(s-t+\tau)) \|\varphi(y(s))\|^2\, ds. \quad (7)$$

Здесь γ, β, μ — положительные параметры, λ_i — диагональные элементы матрицы Λ. Получим

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{y_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1} + \mu c_1 \|z(t)\|^2 - c_2 \|\varphi(y(t))\| \|z(t)\| - c_3 \|\varphi(y(t))\| \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|\, ds$$
$$+ \gamma \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|^2\, ds \le V(y_t, z(t)) \le \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{y_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1} + \mu c_4 \|z(t)\|^2$$
$$+ c_2 \|\varphi(y(t))\| \|z(t)\| + c_3 \|\varphi(y(t))\| \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|\, ds + (\gamma + \beta\tau) \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|^2\, ds,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — положительные постоянные.

Дифференцируя функционал (7) в силу системы (5), имеем

$$\dot V(y_t, z(t)) = \frac{1}{2} \varphi^\top(y(t))(\Lambda\Omega + \Omega^\top \Lambda)\varphi(y(t)) + \mu z^\top(t)(\Xi N + N^\top \Xi) z(t)$$
$$- \gamma \|\varphi(y(t-\tau))\|^2 - \beta \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|^2\, ds + (\gamma + \beta\tau)\|\varphi(y(t))\|^2$$
$$+ 2\mu z^\top(t)\Xi \left(C\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} L(s-t)\varphi(y(s))\, ds \right)$$
$$- \left(A\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} H(s-t)\varphi(y(s))\, ds + Gz(t) \right)^\top \frac{\partial \varphi(y(t))}{\partial y} \Lambda \Bigg(G N^{-1} z(t)$$
$$+ \int\limits_{t-\tau}^{t} \int\limits_{-\tau}^{s-t} (G N^{-1} L(\xi) - H(\xi)) d\xi \varphi(y(s))\, ds \Bigg)$$
$$\le -(c_5 - \gamma - \beta\tau)\|\varphi(y(t))\|^2 - \mu c_6 \|z(t)\|^2 - \beta \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|^2\, ds$$

$$
+\mu c_7\|z(t)\|\left(\|\varphi(y(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds\right)+c_8\left(\|\varphi(y(t))\|\right.
$$

$$
\left.+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds+\|z(t)\|\right)\left\|\frac{\partial\varphi(y(t))}{\partial y}\right\|\left(\|z(t)\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds\right),
$$

где $c_j>0$, $j=5,6,7,8$.

Выберем параметры γ и β так, чтобы выполнялось условие $\gamma+\beta\tau<c_5/4$. Далее находим $\mu>0$, при котором справедлива оценка

$$
\mu c_7\|z(t)\|\left(\|\varphi(y(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds\right)
\le\frac{1}{4}\left(c_5\|\varphi(y(t))\|^2+\mu c_6\|z(t)\|^2+\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|^2\,ds\right).
$$

Снова применяя неравенства Юнга и Гёльдера, нетрудно проверить, что существует число $\delta>0$ такое, что если $\|y_t\|_\tau<\delta$, $\|z(t)\|<\delta$, то

$$
\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{y_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+\mu c_1\|z(t)\|^2+\gamma\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|^2\,ds\right)\le V(y_t,z(t))
$$

$$
\le 2\left(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\frac{y_i^{\alpha_i+1}(t)}{\alpha_i+1}+\mu c_4\|z(t)\|^2+(\gamma+\beta\tau)\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|^2\,ds\right),
$$

$$
\dot V(y_t,z(t))\le-\frac{1}{4}\left(c_5\|\varphi(y(t))\|^2+\mu c_6\|z(t)\|^2+\beta\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|^2\,ds\right).
$$

Значит (см. [2, с. 53]), нулевое решение системы (5) асимптотически устойчиво. Теорема доказана.

Замечание 3. В случае, когда $k=1$ и $\tau=0$, предположения 4 и 5 сводятся к стандартным допущениям, принятым при анализе абсолютной устойчивости систем Лурье непрямого управления без запаздывания (см. [25]). Однако при $\varphi(y)=y$ выполнения только этих ограничений недостаточно для асимптотической устойчивости соответствующей линейной системы.

Пример 2. Пусть $k=m=1$, $\tau=0$, $A=2$, $G=-5$, $C=1$, $N=-2$, $\varphi(y)=y^\alpha$, $\alpha\ge 1$ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем.

При $\alpha=1$ получаем линейную систему

$$
\begin{aligned}
\dot y(t)&=2y(t)-5z(t),\\
\dot z(t)&=y(t)-2z(t),
\end{aligned}
$$

матрица которой имеет чисто мнимые собственные числа. Следовательно, эта система не является асимптотически устойчивой.

Однако в данном случае выполнены предположения 4 и 5. Поэтому теорема 3 гарантирует, что при $\alpha>1$ нулевое решение соответствующей нелинейной системы будет асимптотически устойчиво.

Далее наряду с системой (5) рассмотрим возмущенную систему

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= A\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} H(s-t)\varphi(y(s))\,ds + Gz(t) + R_1(t, y_t, z(t)),\\
\dot{z}(t) &= C\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} L(s-t)\varphi(y(s))\,ds + Nz(t) + R_2(t, y_t, z(t)),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где функционалы $R_l(t, y_t, z)$ непрерывны при $t \geq 0$, $\|y_t\|_\tau < \Delta$, $\|z\| < \Delta$, причем в указанной области справедливы оценки

$$
\|R_l(t, y_t, z)\| \leq \widetilde{\rho}_l \left(\|\varphi(y(t))\| + \int\limits_{-\tau}^{0} \|\varphi(y(s))\|\,ds + \|z\| \right)^{\nu}, \quad l = 1, 2,
$$

ρ_1, ρ_2, ν — положительные постоянные.

Используя функционал (7), нетрудно проверить, что если выполнены предположения 4–6 и $\nu > 1$, то нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво.

Исследуем теперь случай, когда возмущенная система имеет вид

$$
\begin{aligned}
\dot{y}(t) &= (A + B_1(t))\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (H(s-t) + B_2(s)D_1(s-t))\varphi(y(s))\,ds + Gz(t),\\
\dot{z}(t) &= (C + B_3(t))\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} (L(s-t) + B_4(s)D_2(s-t))\varphi(y(s))\,ds + Nz(t).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Здесь матрицы $B_k(t)$ непрерывны и ограничены при $t \geq -\tau$, $k = 1, 2, 3, 4$, матрицы $D_1(\xi)$ и $D_2(\xi)$ непрерывны при $\xi \in [-\tau, 0]$.

Предположение 7. *Пусть*

$$
\frac{1}{T} \int\limits_{t}^{t+T} B_k(s)\,ds \to 0 \quad \text{при} \;\; T \to \infty, \;\; k = 1, 2, 3, 4,
$$

равномерно относительно $t \geq 0$.

Таким образом, снова рассматриваем нестационарные возмущения с нулевыми средними значениями.

Теорема 4. *Если выполнены предположения* 4–7, *то нулевое решение системы* (9) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Дифференцируя функционал Ляпунова — Красовского (7) в силу системы (9), имеем

$$
\dot{V}(y_t, z(t)) \leq W(y_t, z(t)) + \mu\widetilde{c}_1\|z(t)\| \left(\|\varphi(y(t))\| + \int\limits_{t-\tau}^{t} \|\varphi(y(s))\|\,ds \right)
$$

$$
+ \varphi^{\top}(y(t))\Lambda \left(B_1(t)\varphi(y(t)) + \int\limits_{t-\tau}^{t} B_2(s)D_1(s-t)\varphi(y(s))\,ds \right)
$$

$$-\varphi^\top(y(t))\Lambda G N^{-1}\left(B_3(t)\varphi(y(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}B_4(s)D_2(s-t)\varphi(y(s))\,ds\right)$$

$$+\widetilde{c}_2\left(\|\varphi(y(t))\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds+\|z(t)\|\right)\left\|\frac{\partial\varphi(y(t))}{\partial y}\right\|\left(\|z(t)\|+\int\limits_{t-\tau}^{t}\|\varphi(y(s))\|\,ds\right),$$

где $\widetilde{c}_1,\widetilde{c}_2$ — положительные постоянные, а $W(y_t,z(t))$ — производная этого функционала в силу невозмущенной системы (5).

Учитывая выражение для полученной оценки, далее строим модифицированный функционал по формуле

$$\widetilde{V}(t,y_t,z(t))=V(y_t,z(t))-\varphi^\top(y(t))\Lambda\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}(B_1(s)-GN^{-1}B_3(s))\,ds\varphi(y(t))$$

$$+\varphi^\top(y(t))\Lambda\int\limits_{t-\tau}^{t}\left(B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{s-t}D_1(\xi)\,d\xi-GN^{-1}B_4(s)\int\limits_{-\tau}^{s-t}D_2(\xi)d\xi\right)\varphi(y(s))\,ds$$

$$-\varphi^\top(y(t))\Lambda\int\limits_{0}^{t}e^{\varepsilon(s-t)}\left(B_2(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D_1(\xi)\,d\xi-GN^{-1}B_4(s)\int\limits_{-\tau}^{0}D_2(\xi)\,d\xi\right)\,ds\varphi(y(t)).$$

Здесь ε — положительный параметр.

С использованием функционала $\widetilde{V}(t,y_t,z(t))$ дальнейшее доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2.

§ 5. Исследование устойчивости механической системы с нелинейными позиционными силами

Пусть движение механической системы моделируется уравнениями

$$\ddot{q}(t)+F\dot{q}(t)+K\varphi(q(t))+\int\limits_{t-\tau}^{t}J(s-t)\varphi(q(s))\,ds=0, \tag{10}$$

где $q(t)$ и $\dot{q}(t)$ — n-мерные векторы обобщенных координат и скоростей соответственно, F,K — постоянные матрицы, векторная функция

$$\varphi(q)=(\varphi_1(q_1),\dots,\varphi_n(q_n))^\top$$

непрерывна при $\|q\|<\Delta$ $(0<\Delta\le+\infty)$ и удовлетворяет условиям секторного типа $q_i\varphi_i(q_i)>0$ при $q_i\ne0$, $i=1,\dots,n$, матрица $J(\xi)$ непрерывна при $\xi\in[-\tau,0]$, τ — положительная постоянная. Значит, на изучаемую систему действуют линейные скоростные силы и нелинейные позиционные силы, причем слагаемое $\int\limits_{t-\tau}^{t}J(s-t)\varphi(q(s))\,ds$ может представлять собой интегральную часть ПИД-регулятора [20, 21].

Будем считать, что начальные функции $\psi(\xi)$ для решений системы (10) выбираются из пространства $C^1([-\tau,0],\mathbb{R}^n)$ непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\psi(\xi):[-\tau,0]\mapsto\mathbb{R}^n$ с равномерной нормой

$$\|\psi\|_\tau=\max_{\xi\in[-\tau,0]}(\|\psi(\xi)\|+\|\dot{\psi}(\xi)\|).$$

Система (10) имеет положение равновесия

$$q = \dot{q} = 0. \tag{11}$$

Для получения условий асимптотической устойчивости этого положения равновесия положим $p(t) = \dot{q}(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} &\dot{q}(t) = p(t), \\ &\dot{p}(t) = -Fp(t) - K\varphi(q(t)) - \int\limits_{t-\tau}^{t} J(s-t)\varphi(q(s))\, ds. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим с системе вида (5).

В соответствии с результатами предыдущего раздела вводим следующие предположения.

Предположение 8. *Матрица*

$$\Theta = -F^{-1}\left(K + \int\limits_{-\tau}^{0} J(\xi)\, d\xi\right)$$

диагонально устойчива.

Предположение 9. *Подсистема* $\dot{p}(t) = -Fp(t)$ *асимптотически устойчива.*

Предположение 10. *Пусть* $\varphi_i(q_i) = q_i^{\alpha_i}$, *где* $\alpha_i > 1$ — *рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями,* $i = 1, \ldots, n$.

Получаем, что справедлива следующая

Теорема 5. *Если выполнены предположения* 8–10, *то положение равновесия* (11) *системы* (10) *асимптотически устойчиво.*

Замечание 4. Предположения 8 и 9 представляют собой аналог известных условий асимптотической устойчивости линейных механических систем без запаздывания, устанавливаемых на основе декомпозиции изучаемой системы на прецессионную и нутационную подсистемы [28]. Однако в [28] для обоснования такого подхода требовалось наличие в системе большого параметра в качестве множителя при скоростных силах. Теорема 5 утверждает, что в случае существенно нелинейных позиционных сил асимптотическую устойчивость положения равновесия можно гарантировать и без использования большого параметра.

Замечание 5. С помощью результатов предыдущего раздела для системы (10) нетрудно сформулировать условия, при выполнении которых возмущения не нарушают асимптотическую устойчивость положения равновесия.

Пример 3. Пусть задана управляемая механическая система

$$\ddot{q}(t) + \omega\dot{q}(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\dot{q}(t) - \varphi(q(t)) = U, \tag{12}$$

где $q(t) \in \mathbb{R}^2$, ω — положительный параметр, $\varphi(q) = \left(q_1^{\alpha_1}, q_2^{\alpha_2}\right)^\top$, $\alpha_1 \geq 1$ и $\alpha_2 \geq 1$ — рациональные числа с нечетными числителями и знаменателями, U — вектор управляющих сил.

Если $U \equiv 0$, то согласно четвертой теореме Томсона — Тэта — Четаева положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (12) неустойчиво [29]. Чтобы стабилизировать это положение равновесия, определим управление по формуле

$$U = -J \int_{t-1}^{t} \varphi(q(s))\, ds,$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим замкнутую систему вида (10), для которой

$$F = \begin{pmatrix} \omega & 1 \\ -1 & \omega \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Theta = -\frac{1}{\omega^2+1} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выполнены предположения 8 и 9. Значит, если $\alpha_1 > 1$, $\alpha_2 > 1$, то положение равновесия асимптотически устойчиво при любом $\omega > 0$.

В то же время соответствующая линейная система

$$\ddot{q}(t) + F\dot{q}(t) + (K + J)q(t) = 0$$

неустойчива при достаточно малых значениях ω.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kharitonov V.* Time-delay systems. Lyapunov functionals and matrices. Boston: Birkhäuser, 2013.
2. *Fridman E.* Introduction to time-delay systems: Analysis and control. Basel: Birkhäuser, 2014.
3. *Андреев А. С., Седова Н. О.* Метод функций Ляпунова — Разумихина в задаче об устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2019. № 7. С. 3–60.
4. *Karafyllis I., Malisoff M., Mazenc F., Pepe P.* Recent results on nonlinear delay control systems. Heidelberg; New York; Dordrecht; London: Springer Intern. Publishing, 2016.
5. *Малыгина В. В., Чудинов К. М.* О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 360–378.
6. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И., Скворцова М. А.* Оценки решений дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 1063–1079.
7. *Mei W., Efimov D., Ushirobira R., Fridman E.* On delay-dependent conditions of ISS for generalized Persidskii systems // IEEE Trans. Automat. Control. 2023. V. 68. P. 4225–4232.
8. *Aleksandrov A., Efimov D., Fridman E.* Stability of homogeneous systems with distributed delay and time-varying perturbations // Automatica. 2023 V. 153. 111058.
9. *Kazkurewicz E., Bhaya A.* Matrix diagonal stability in systems and computation. Boston: Birkhäuser, 1999.
10. *Liao X., Yu P.* Absolute stability of nonlinear control systems. New York; Heidelberg: Springer Sci. & Business Media, 2008.
11. *Barbashin E. A.* The construction of Liapunov functions for non-linear systems // IFAC Proceedings Volumes. 1960. V. 1, N 1. P. 953–957.
12. *Персидский С. К.* К вопросу об абсолютной устойчивости // Автоматика и телемеханика. 1969. № 12. С. 5–11.
13. *Александров А. Ю., Платонов А. В.* Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2008. № 7. С. 3–18.
14. *Platonov A.* Stability conditions and estimation of the region of attraction for a class of nonlinear switched systems // Intern. J. Dynamics Control. 2022. V. 10. P. 1442–1450.
15. *Sun Y., Wang L.* On stability of a class of switched nonlinear systems // Automatica. 2013. V. 49. P. 305–307.

16. *Aleksandrov A., Mason O.* Absolute stability and Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear systems with time-delay // J. Franklin Institute. 2014. V. 351. P. 4381–4394.
17. *Aleksandrov A.* On the existence of diagonal Lyapunov–Krasovskii functionals for a class of nonlinear positive time-delay systems // Automatica. 2024. V. 160. P. 111449.
18. *Shen J., Chen S.* Stability and L_∞-gain analysis for a class of nonlinear positive systems with mixed delays // Intern. J. Robust Nonlinear Control. 2017. V. 27. P. 39–49.
19. *Александров А. Ю.* Построение функционалов Ляпунова — Красовского для некоторых классов позитивных систем с запаздыванием // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 957–969.
20. *Formal'sky A.* On a modification of the PID controller // Dynam. Control. 1997. V. 7, N 3. P. 269–277.
21. *Zhao C., Guo L.* Towards a theoretical foundation of PID control for uncertain nonlinear systems // Automatica. 2022. V. 142. 110360.
22. *Feng Q., Nguang S., Perruquetti W.* Dissipative stabilization of linear systems with time-varying general distributed delays // Automatica. 2020. V. 122. 109227.
23. *Chen W.-H., Zheng W. X.* Delay-dependent robust stabilization for uncertain neutral systems with distributed delays // Automatica. 2007. V. 43, N 1. P. 95–104.
24. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Физматгиз, 1963.
25. *Lefschetz S.* Stability of nonlinear control systems. New York: Acad. Press, 1965.
26. *Косов А. А., Козлов М. В.* Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениями // Автоматика и телемеханика. 2019. № 3. С. 45–54.
27. *Aleksandrov A., Andriyanova N.* Stability analysis of Lur'e indirect control systems with time delay and multiple nonlinearities // Intern. J. Dynam. Control. 2023. V. 11. P. 3074–3083.
28. *Зубов В. И.* Аналитическая динамика гироскопических систем. Л.: Судпромгиз, 1970.
29. *Меркин Д. Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 10 мая 2024 г.
После доработки 18 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Александров Александр Юрьевич (ORCID 0000-0001-7186-7996)
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская набережная, 7-9, Санкт-Петербург 199034
a.u.aleksandrov@spbu.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 514.1

ВЛОЖЕННЫЙ МНОГОГРАННИК, ДОПУСКАЮЩИЙ ИЗГИБАНИЕ, ПРИ КОТОРОМ ВСЕ ЕГО ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ ИЗМЕНЯЮТСЯ

В. А. Александров, Е. П. Волокитин

Аннотация. Построен гомеоморфный сфере изгибаемый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве, не имеющий самопересечений и такой, что при некотором его изгибании изменяются все двугранные углы. Построенный многогранник имеет 26 вершин, 72 ребра и 48 граней. Для изучения его свойств использованы как традиционные геометрические построения и рассуждения, так и символьные вычисления в системе Mathematica.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.603

Ключевые слова: евклидово трехмерное пространство, изгибаемый многогранник, двугранный угол, малая диагональ многогранника, алгоритм обнаружения пересечения треугольника и отрезка.

§ 1. Введение

В этой статье *многогранником* в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ мы называем компактную многогранную поверхность с краем или без края, у которой все грани являются треугольниками и которая a priori может иметь самопересечения любого типа.

Многогранник P называется *изгибаемым*, если его пространственную форму можно изменить непрерывным образом (т. е. без скачков) только за счет изменения его двугранных углов, т. е. если P можно включить в непрерывное семейство многогранников $\{P_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ так, что $P = P_\alpha$ и для любого $t \in (\alpha, \beta)$ многогранники P_α и P_t комбинаторно эквивалентны, причем их соответствующие грани конгруэнтны, но при этом сами многогранники P_α и P_t не конгруэнтны. Такое семейство $\{P_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ мы называем *изгибанием* многогранника P, а t называем *параметром изгибания*.

Исторически первые примеры изгибаемых многогранников без края в $\mathbb{R}^3$ были построены Бриканом в 1897 г. в [1]. Все они имеют самопересечения и комбинаторно эквивалентны правильному октаэдру (поэтому их и называют изгибаемыми октаэдрами). Более того, в [1] дана классификация всех изгибаемых октаэдров в $\mathbb{R}^3$. В настоящее время изгибаемые октаэдры принято называть октаэдрами Брикара. Подробнее о них можно прочитать, например, в [1–5].

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (В. А. Александров был поддержан в рамках проекта FWNF–2022–0006, Е. П. Волокитин — в рамках проекта FWNF–2022–0005).

Расцвет теории изгибаемых многогранников начался после того, как в 1977 г. Коннелли в [6] построил изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$, который гомеоморфен сфере и не имеет самопересечений. По мере развития теории изгибаемых многогранников оказалось, что они имеют много замечательных свойств; например, для всякого ориентируемого изгибаемого многогранника без края в $\mathbb{R}^3$ в процессе изгибания сохраняются его интегральная средняя кривизна [7], объем [8–11] и каждый инвариант Дена [12].

Вместе с тем в теории изгибаемых многогранников остается много интересных открытых вопросов. К их числу относится следующая проблема, поставленная И. Х. Сабитовым.

Проблема 1. *Существует ли изгибаемый многогранник в $\mathbb{R}^3$ без края и без самопересечений, у которого в ходе изгибания изменяются все двугранные углы?*

Ее формулировку можно найти, например, в [13, с. 182] и [11, проблема 1.3].

Отсутствие самопересечений принципиально важно в проблеме 1. В самом деле, легко понять (см. лемму 1 ниже), что каждый двугранный угол любого октаэдра Брикара изменяется в процессе изгибания. Но все октаэдры Брикара имеют самопересечения.

Теорема 1 дает положительный ответ на проблему 1 и является основным результатом настоящей статьи.

Теорема 1. *В трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует многогранник $\mathscr{P}$, обладающий следующими свойствами:*

(i) *$\mathscr{P}$ имеет только треугольные грани, не имеет самопересечений и гомеоморфен сфере $\mathbb{S}^2$,*

(ii) *существует изгибание многогранника $\mathscr{P}$, при котором ни один из его двугранных углов не остается постоянным.*

Когда подготовка настоящей статьи подходила к концу, А. А. Гайфуллин прислал нам дипломную работу О. А. Заславского [14], защищенную под его руководством в 2019 г. на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Оказалось, что построенный нами многогранник $\mathscr{P}$ из формулировки теоремы 1 уже был построен в [14], причем построен именно для ответа на проблему 1. Оказалось также, что О. А. Заславский аргументирует отсутствие самопересечений у многогранника $\mathscr{P}$ иначе, чем мы, и вообще никак не обосновывает тот факт, что все двугранные углы изменяются. В рецензируемых изданиях результаты дипломной работы О. А. Заславского до сих пор не опубликованы. Поэтому мы решили все-таки опубликовать свое доказательство теоремы 1.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы уточняем терминологию и напоминаем нужные нам сведения о построении и свойствах октаэдра Брикара типа 1. В § 3 напоминаем нужные сведения о построении и свойствах многогранника Штеффена. В § 4 модифицируется многогранник Штеффена так, чтобы его можно было использовать для построения многогранника $\mathscr{P}$ из теоремы 1. В § 5 предложен алгоритм, позволяющий достоверно ответить на вопрос о том, имеет ли данный многогранник самопересечения. Применив его компьютерную реализацию к модифицированному многограннику Штеффена, мы убеждаемся, что он не имеет самопересечений. В § 6 явно строится пример многогранника $\mathscr{P}$ из теоремы 1 и с использованием алгоритма из § 5 и системы *Mathematica* [15] установлено, что он не имеет самопересечений. В § 7 построено специальное 1-параметрическое изгибание многогранника $\mathscr{P}$, при котором ни один из его двугранных углов не остается постоянным; при этом опять использованы аналитические компьютерные вычисления в системе *Mathematica*. Наконец, в § 8 на основе материала предыдущих параграфов дано доказательство теоремы 1 и сформулированы открытые проблемы, связанные с проблемой 1.

§ 2. Уточнение терминологии и построение октаэдра Брикара типа 1

Поскольку в статье будут появляться многогранники с самопересечениями, имеет смысл уточнить терминологию.

Пусть M — абстрактное двумерное многообразие, склеенное из конечного числа евклидовых треугольников Δ_k, $k = 1, \dots, n$. Не исключается, что M имеет непустой край. Пусть отображение $f : M \to \mathbb{R}^3$ непрерывно и таково, что его ограничение на каждый треугольник Δ_k является линейным изометричным вложением. Тогда мы называем $f(M)$ *многогранником* или *многогранной поверхностью* в $\mathbb{R}^3$. Если $\delta \subset M$ совпадает с одним из Δ_k либо с его стороной или вершиной, то мы называем $f(\delta)$ *гранью*, *ребром* или соответственно *вершиной* многогранника $f(M)$. Если отображение $f : M \to \mathbb{R}^3$ инъективно, то мы говорим, что многогранник $f(M)$ *не имеет самопересечений*. *Диагональю* многогранника называется отрезок прямой, соединяющий две его вершины, но не являющийся ребром. Диагональ называется *малой*, если ее концы принадлежат смежным граням.

Точку $x \in f(M)$ мы называем *точкой самопересечения* многогранника $f(M)$, если ее полный прообраз $f^{-1}(x) \subset M$ состоит более чем из одной точки.

Октаэдром мы называем любой многогранник $f(M)$ (выпуклый или невыпуклый, имеющий самопересечения или не имеющий), для которого абстрактное многообразие M комбинаторно эквивалентно правильному выпуклому октаэдру, изображенному на рис. 1. Если явно не оговорено противное, то для вершин произвольного октаэдра мы используем те же обозначения, что на рис. 1.

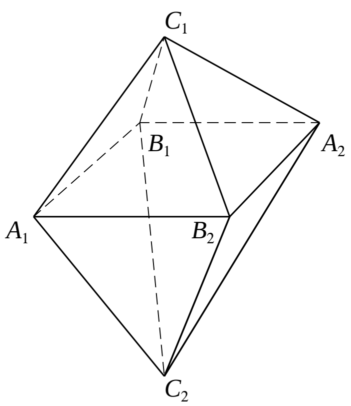

Рис. 1. Обозначения вершин правильного октаэдра.

Для наших целей будет достаточно напомнить построение только октаэдра Брикара типа 1. По поводу построения октаэдров Брикара типа 2 и 3 мы отсылаем читателя к статьям [1–5] и указанной там литературе.

Рассмотрим гомеоморфный диску многогранник $\mathscr{D}$ в $\mathbb{R}^3$, состоящий из четырех треугольников $A_1B_1C_2$, $B_1A_2C_2$, $A_2B_2C_2$, и $B_2A_1C_2$. Его краем является замкнутая пространственная ломаная $A_1B_1A_2B_2$, от которой мы требуем равенства длин противоположных сторон, т. е. требуем выполнения равенств $|A_1B_1| = |A_2B_2|$ и $|B_1A_2| = |B_2A_1|$ (см. левую часть рис. 2).

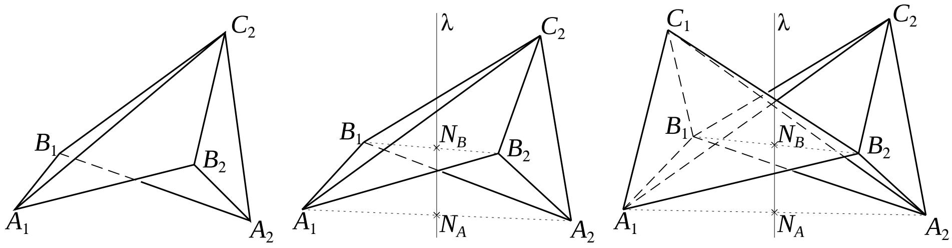

Рис. 2. Многогранник $\mathscr{D}$ и октаэдр Брикара типа 1 $\mathscr{B}$.

Обозначим через N_A середину отрезка A_1A_2 и через N_B — середину отрезка B_1B_2 (см. центральную часть рис. 2). Если $N_A \neq N_B$, то обозначим через λ прямую, проходящую через N_A и N_B (см. центральную часть рис. 2). Если же $N_A = N_B$, то обозначим через λ прямую, проходящую через точку $N_A = N_B$ перпендикулярно плоскости, содержащей отрезки A_1A_2 и B_1B_2.

Прежде всего заметим, что четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$ переходит в себя при повороте всего пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг прямой λ на 180°. Это очевидно, если $N_A = N_B$. Если же $N_A \neq N_B$, то из равенства треугольников $A_1B_1B_2$ и $A_2B_1B_2$ следует $|A_1N_B| = |A_2N_B|$ (см. центральную часть рис. 2). Следовательно, треугольник $A_1A_2N_B$ является равнобедренным. А значит, его медиана N_AN_B является также и его высотой, т. е. прямая $\lambda = N_AN_B$ перпендикулярна прямой A_1A_2. Следовательно, при повороте всего пространства вокруг прямой λ на 180° точки A_1 и A_2 меняются местами. Аналогично, отправляясь от треугольников $A_1A_2B_1$ и $A_1A_2B_2$, заключаем, что прямая $\lambda = N_AN_B$ перпендикулярна прямой B_1B_2, а значит, точки B_1 и B_2 тоже меняются местами при повороте вокруг прямой λ на 180°. Тем самым мы доказали, что при таком повороте четырехугольник $A_1B_1A_2B_2$ переходит в себя.

Теперь склеим многогранник $\mathscr{D}$ и его образ под действием поворота всего пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг прямой λ на 180° вдоль сторон четырехугольника $A_1B_1A_2B_2$ (см. правую часть рис. 2). Получившийся многогранник является октаэдром Брикара типа 1. Мы обозначаем его через $\mathscr{B}$. Образ точки C_2 под действием поворота всего пространства $\mathbb{R}^3$ вокруг прямой λ на 180° обозначаем через C_1.

Непосредственно из приведенных выше построений следует, что $\mathscr{B}$ комбинаторно эквивалентен октаэдру, имеет самопересечения и допускает однопараметрическое изгибание (напомним, что по определению при изгибании не сохраняется евклидово расстояние как минимум между некоторыми двумя вершинами многогранника).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится одно хорошо известное свойство октаэдров Брикара (всех типов, не только типа 1). Мы формулируем и доказываем его в виде леммы 1.

Лемма 1. *Пусть октаэдр Брикара расположен в $\mathbb{R}^3$ так, что ни один из его двугранных углов не равен 0 или π. Тогда в процессе изгибания величина каждого его двугранного угла не остается постоянной.*

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Допустим, один из двугранных углов остается постоянным. Без ограничения общности можем считать, что это угол при ребре A_1B_1 (напомним, что используются те же обозначения вершин, что и на рис. 1). Тогда длина диагонали C_1C_2 постоянна. Следовательно, у тетраэдров $A_1B_1C_1C_2$ и $A_1B_2C_1C_2$ длины всех ребер остаются постоянными. А значит, остаются постоянными и все двугранные углы этих тетраэдров. Поэтому двугранный угол при ребре A_1B_2 октаэдра Брикара постоянен (ведь он равен двугранному углу при ребре A_1B_2 тетраэдра $A_1B_2C_1C_2$).

Теперь заметим, что точки A_1, C_1, C_2 не лежат на одной прямой (иначе двугранный угол при ребре A_1B_1 октаэдра Брикара был бы равен 0 или π, что противоречит условиям леммы 1). Следовательно, тетраэдры $A_1B_1C_1C_2$ и $A_1B_2C_1C_2$ прилегают друг к другу по невырожденной грани $A_1C_1C_2$. А значит, двугранные углы при ребрах A_1C_1 и A_1C_2 октаэдра Брикара являются либо суммой, либо разностью двугранных углов при тех же ребрах в тетраэдрах $A_1B_1C_1C_2$ и $A_1B_2C_1C_2$ и поэтому тоже постоянны в процессе изгибания.

Тем самым доказано, что если двугранный угол при ребре A_1B_1 октаэдра Брикара постоянен в процессе изгибания, то двугранные углы при его ребрах A_1B_2, A_1C_1 и A_1C_2 тоже постоянны. Другими словами, мы доказали, что если в условиях леммы 1 вершине инцидентно хоть одно ребро, двугранный угол при котором остается постоянным, то постоянными будут двугранные углы при всех ребрах, инцидентных данной вершине. Отсюда немедленно следует, что остаются постоянными двугранные углы вообще при всех ребрах октаэдра Брикара, а значит, остаются постоянными и длины всех его диагоналей. Последнее, однако, противоречит нашему определению изгибания. Полученное противоречие доказывает лемму 1. □

§ 3. Многогранник Штеффена $\mathscr{S}$

Как известно, изгибаемый многогранник Штеффена, обозначим его через $\mathscr{S}$, получается склеиванием некоторого тетраэдра, обозначим его через $\mathscr{T}$, и двух копий одного и того же октаэдра Брикара типа 1, обозначим его через $\mathscr{B}$. Склеивание осуществляется по конгруэнтным граням. В § 3 мы напоминаем эту общеизвестную конструкцию. С ней можно ознакомиться также, например, по [3] и указанной там литературе.

Пусть тетраэдр $\mathscr{T} = T_1T_2T_3T_4$ (см. левую часть рис. 3) имеет следующие длины ребер: $|T_1T_4| = 17$, $|T_1T_2| = |T_1T_3| = |T_2T_4| = |T_3T_4| = 12$ и $|T_2T_3| = 11$. Тетраэдр $\mathscr{T}$ не будет изменять свою пространственную форму в процессе изгибания $\mathscr{S}$. Поэтому всюду в § 3–7 считаем, что точки T_j $(j = 1, \dots, 4)$ занимают фиксированное положение в пространстве.

Пусть $\mathscr{B} = A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ является октаэдром Брикара типа 1 (см. правую верхнюю часть рис. 3), ребра которого имеют следующие длины: $|A_1C_1| = |B_1C_2| = |A_2C_2| = |B_2C_1| = 12$, $|A_2C_1| = |B_1C_1| = |A_1C_2| = |B_2C_2| = 10$, $|A_1B_1| = |A_2B_2| = 5$ и $|A_1B_2| = |A_2B_1| = 11$.

Передвинем $\mathscr{B}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ посредством сохраняющего ориентацию движения так, чтобы совместились следующие пары точек: T_1 и C_1, T_2 и B_2, а также T_3 и A_1. При этом мы не обращаем внимания на то, пересекаются или нет многогранные поверхности $\mathscr{T}$ и $\mathscr{B}$ в процессе совмещения указанных вершин где-то еще, помимо точек граней $T_1T_2T_3$ и $A_1B_2C_1$. В таком случае мы говорим, что склеили $\mathscr{T}$ и $\mathscr{B}$ по граням $T_1T_2T_3$ и $A_1B_2C_1$. Поскольку мы хотим, чтобы результат склеивания двух многогранников снова был многогранником, здесь

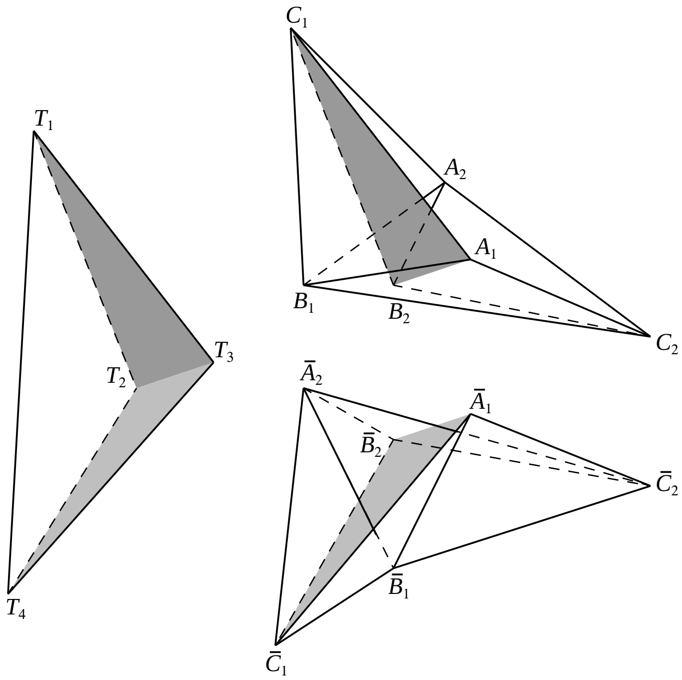

Рис. 3. Склеивание многогранника Штеффена $\mathscr{S}$. Этап приклеивания двух октаэдров Брикара $\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ к тетраэдру $\mathscr{T}$. Одинаково закрашенные треугольники склеиваются друг с другом (и не являются гранями $\mathscr{S}$).

и далее мы подразумеваем, что обе грани, по которым произведена склейка, удаляются. Результат склеивания многогранников $\mathscr{T}$ и $\mathscr{B}$ обозначаем через $\mathscr{T} \sqcup \mathscr{B}$.

Теперь рассмотрим еще один экземпляр $\overline{\mathscr{B}} = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{C}_1\overline{C}_2$ октаэдра Брикара типа 1, полученный из $\mathscr{B}$ посредством сохраняющего ориентацию движения пространства $\mathbb{R}^3$. Тем самым каждое ребро $\overline{\mathscr{B}}$ имеет ту же длину, что и соответствующее ему ребро $\mathscr{B}$. Например, $|\overline{A}_1\overline{C}_1| = |A_1C_1| = 12$.

Склеим $\mathscr{T} \sqcup \mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ по граням $T_2T_3T_4$ и $\overline{B}_2\overline{A}_1\overline{C}_1$, т. е. передвинем $\overline{\mathscr{B}}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ посредством сохраняющего ориентацию движения так, чтобы совместились следующие пары точек: T_2 и $\overline{B}_2$, T_3 и $\overline{A}_1$, а также T_4 и $\overline{C}_1$ (см. правую нижнюю часть рис. 3). Полученный в результате такого склеивания многогранник обозначаем через $\mathscr{E}$. Он комбинаторно эквивалентен триангулированному диску. Его краем является ломаная с вершинами A_1, C_2, $B_2 = \overline{B}_2$, $\overline{C}_2$ и $\overline{A}_1 = A_1$.

Поскольку октаэдры Брикара $\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ являются изгибаемыми, то положение вершин C_2 и $\overline{C}_2$ многогранника $\mathscr{E}$ не определяется однозначно указанным выше склеиванием многогранников $\mathscr{T}$ и $\mathscr{B}$ и последующим склеиванием многогранников $\mathscr{T} \sqcup \mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$. В самом деле, поскольку B_2C_2 и A_1C_2 являются ребрами октаэдра Брикара $\mathscr{B}$, то C_2 лежит на окружности γ, являющейся пересечением сферы с центром в точке $T_2 = B_2$ радиуса $|B_2C_2| = 10$ и сферы с центром в точке $T_3 = A_1$ радиуса $|A_1C_2| = 10$. Вместе с тем, из-за того, что C_2 соединена также с A_2 и B_1 ребрами октаэдра Брикара $\mathscr{B}$, она не может занимать произвольное положение на γ. Например, C_2 не может совпадать с точкой пересечения окружности γ с внутренностью треугольника $A_1B_2C_1$ (т. е. случай, когда треугольники $A_1B_2C_1$ и $A_1B_2C_2$ лежат в одной плоскости, да к тому же с одной стороны от прямой A_1B_2, невозможен). В самом деле, допустив противное и применяя формулу Кэли — Менгера, мы можем вычислить квадрат объема тетраэдра $A_1B_1C_1C_2$ через длины его сторон при указанном выборе точки C_2. Эти вычисления дают отрицательное число. Значит, не существует тетраэдра $A_1B_1C_1C_2$ с такими длинами ребер. Поэтому C_2 может лежать лишь на некоторой дуге σ окружности γ, причем $\sigma \neq \gamma$. Этого качественного описания возможных положений вершины C_2 достаточно для наших целей, поскольку для многогранника Штеффена $\mathscr{S}$ излагаемые нами построения давно известны (см, например, [3] и указанную там литературу), а для многогранников $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$, которые будут построены в § 4 и § 6, мы найдем координаты всех их вершин в радикалах (см. табл. 1, 2) и тем самым обоснуем их существование.

Аргументы, аналогичные приведенным в предыдущем абзаце, могут быть применены также и к вершине $\overline{C}_2$. Из этого следует, что $\overline{C}_2$ тоже может лежать на некоторой дуге $\overline{\sigma}$ той же самой окружности γ. Значит, выбрав какое-то положение вершины $C_2 \in \mathscr{B}$ на дуге $\sigma \cap \overline{\sigma} \subset \gamma$, можно (не изменяя положения тетраэдра $\mathscr{T}$ в пространстве) так изогнуть октаэдр Брикара $\overline{\mathscr{B}}$, чтобы точка $\overline{C}_2$ совпала с C_2. В таком положении и склеим многогранник $\mathscr{E}$ сам с собой по граням $A_1B_2C_2$ и $\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{C}_2$. Получившийся в результате многогранник обозначим через $\mathscr{F}$. Для большей ясности обратим внимание читателя на следующее обстоятельство, возникающее при выполнении последнего склеивания: поскольку мы хотим, чтобы $\mathscr{F}$ был многогранником, то удаляем не только внутренние точки склеиваемых граней $A_1B_2C_2$ и $\overline{A}_1\overline{B}_2\overline{C}_2$ (это уже было сказано выше), но и внутренние точки отрезка $A_1B_2 = \overline{A}_1\overline{B}_2$ (который тем самым уже не будет ребром многогранника $\mathscr{F}$).

Непосредственно из построения многогранника $\mathscr{F}$ следует, что он комбинаторно эквивалентен некоторой триангуляции сферы и может быть включен в непрерывное семейство $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ комбинаторно эквивалентных многогранников с конгруэнтными соответствующими гранями, причем $\mathscr{F}_\alpha = \mathscr{F}$. Разным значениям параметра t соответствуют многогранники этого семейства, отвечающие разным положениям точки $\overline{C}_2 = C_2$ на γ. Поэтому многогранники этого семейства, отвечающие разным значениям t, не конгруэнтны друг другу. Тем самым семейство $\{\mathscr{F}_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ является изгибанием многогранника $\mathscr{F}$. Выделим в этом семействе один многогранник следующим образом.

Обозначим через X середину отрезка T_1T_4, через Y — середину отрезка T_2T_3, а через Z — точку пересечения луча $\overrightarrow{XY}$ с окружностью γ. Если точка $\overline{C}_2 = C_2$ совпадает с точкой Z, то называем соответствующий многогранник $\mathscr{F}_t$ *многогранником Штеффена* и в дальнейшем обозначаем его через $\mathscr{S}$. Мы считаем общеизвестным тот факт, что $\mathscr{S}$ не имеет самопересечений. Отметим однако, что развитая нами в § 5 технология проверки отсутствия самопересечений у произвольного многогранника позволяет строго доказать, что $\mathscr{S}$, равно как и любой достаточно близкий к нему многогранник $\mathscr{F}_t$, действительно не имеет самопересечений.

Каждой вершине многогранника $\mathscr{S}$ (временно обозначим ее через V) мы следующим образом присваиваем постоянное обозначение, которое и будем всегда использовать в § 5–7:

• если до осуществления склеиваний вершина V принадлежала только одному из многогранников $\mathscr{T}$, $\mathscr{B}$ или $\overline{\mathscr{B}}$, то оставляем за ней то обозначение, которое она имела на этом многограннике;

• если V получилась в результате склеивания какой-либо вершины W тетраэдра $\mathscr{T}$ с какой-то вершиной октаэдра $\mathscr{B}$ и/или $\overline{\mathscr{B}}$, то присваиваем вершине $V \in \mathscr{S}$ то обозначение, которое имела вершина W в тетраэдре $\mathscr{T}$;

• если V получилась в результате склеивания какой-либо вершины W октаэдра Брикара $\mathscr{B}$ с какой-то вершиной октаэдра $\overline{\mathscr{B}}$, то присваиваем вершине $V \in \mathscr{S}$ то обозначение, которое имела вершина W в октаэдре Брикара $\mathscr{B}$.

Например, в процессе построения многогранника $\mathscr{S}$ мы склеивали сначала вершины $T_3 \in \mathscr{T}$ и $A_1 \in \mathscr{B}$, а затем получившуюся точку склеили с вершиной $\overline{A}_1 \in \overline{\mathscr{B}}$. В соответствии со сказанным получившуюся вершину многогранника $\mathscr{S}$ обозначаем через T_3. Еще один пример: на последнем этапе построения многогранника $\mathscr{S}$ мы склеивали вершины $C_2 \in \mathscr{B}$ и $\overline{C}_2 \in \overline{\mathscr{B}}$. Значит, получившуюся вершину многогранника $\mathscr{S}$ обозначаем через C_2.

Завершая объяснения по поводу построения многогранника Штеффена $\mathscr{S}$, заметим, что непосредственно из изложенного выше построения следует, что $\mathscr{S}$ будет изгибаемым независимо от того, чему равна длина ребра T_1T_4 того тетраэдра $\mathscr{T} = T_1T_2T_3T_4$, с которого мы начали построения в § 3 (т. е. при условии, что остальные ребра тетраэдра $\mathscr{T}$ и октаэдров Брикара $\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ имеют те же длины ребер, что и всюду в § 3). Другими словами, длина ребра T_1T_4 влияет на наличие самопересечений у $\mathscr{S}$, но не влияет на то, что $\mathscr{S}$ является изгибаемым.

§ 4. Построение модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$

По построению ребро T_1T_4 многогранника Штеффена $\mathscr{S}$ имеет длину 17. Прямые вычисления показывают, что внутренний двугранный угол при этом ребре равен $\arccos(45/287) \approx 80°59'$. Изменим длину ребра T_1T_4 так, чтобы она стала равна $\sqrt{334} \approx 18.28$. Длины остальных ребер многогранника $\mathscr{S}$ и наименования его вершин при этом не меняем. Полученный многогранник называем *модифицированным многогранником Штеффена* и обозначаем через $\mathscr{M}$. В силу сказанного в последнем абзаце § 3 $\mathscr{M}$ является изгибаемым многогранником. Прямое вычисление показывает, что двугранный угол многогранника $\mathscr{M}$ при ребре T_1T_4 равен 90°. Непосредственно из построения многогранника $\mathscr{M}$ ясно, что он комбинаторно эквивалентен сфере и имеет только треугольные грани. На рис. 4 приведена его развертка. Читатель может отсканировать ее, распечатать в большем масштабе на плотной бумаге и склеить модель многогранника $\mathscr{M}$. Это упростит понимание наших дальнейших построений. Особо подчеркнем, что по построению вершина $C_2 \in \mathscr{M}$ совпадает в $\mathbb{R}^3$ с точкой Z, построенной в § 3.

С многогранником $\mathscr{M}$ мы связываем следующую декартову систему координат в $\mathbb{R}^3$. Ее начало располагаем в точке X, уже определенной в § 3 как средняя точка отрезка T_1T_4. Ось x выбираем так, чтобы она проходила через точку T_3 и при этом T_3 имела положительную x-координату. Ось y выбираем так, чтобы она проходила через точку T_2 и T_2 имела положительную y-координату. Наконец, ось z выбираем так, чтобы она проходила через точку T_1 и T_1 имела положительную z-координату. Этой и только этой системой координат мы пользуемся в § 4–7.

Вершина A_2 соединена ребрами многогранника $\mathscr{M}$ с тремя его вершинами T_1, T_2 и C_2, координаты которых во введенной нами системе координат нам известны непосредственно из построения многогранника $\mathscr{M}$ и системы коорди-

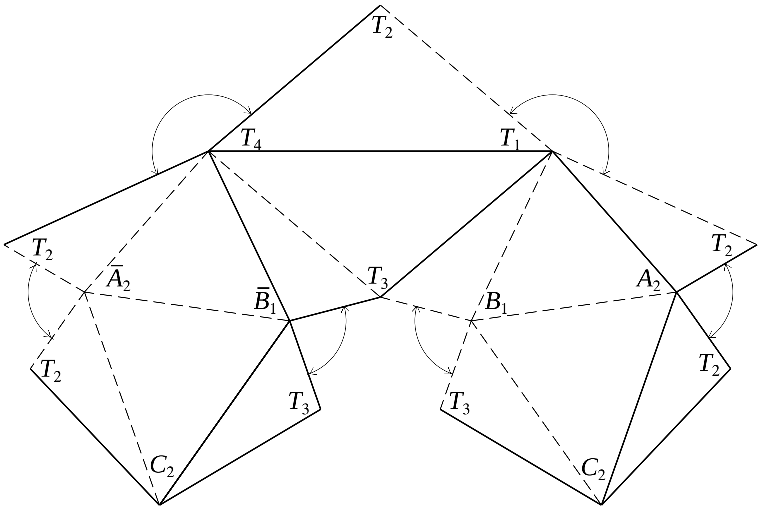

Рис. 4. Развертка модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$. Ее нужно сгибать так, чтобы внутренний двугранный угол многогранника $\mathscr{M}$ был меньше 180° при ребрах, нарисованных сплошными линиями, и был больше 180° при ребрах, нарисованных пунктирными линиями. Склеить нужно попарно ребра с одноименными концами, т. е. нужно склеить попарно ребра, соединенные между собой дугами окружностей, а также два ребра T_2C_2 и два ребра T_3C_2.

нат. Они приведены в табл. 1. С помощью *Mathematica* мы решаем символьно систему

$$\begin{cases} |A_2T_1|^2 &= 10^2, \\ |A_2T_2|^2 &= 5^2, \\ |A_2C_2|^2 &= 12^2 \end{cases} \tag{1}$$

трех алгебраических уравнений второй степени относительно координат точки A_2 и получаем два выраженных в радикалах решения. Очевидно, что две точки в $\mathbb{R}^3$, соответствующие этим решениям, симметричны друг другу относительно плоскости, проходящей через вершины T_1, T_2 и C_2. Рассматривая модель многогранника $\mathscr{M}$, приходим к выводу, что вершина A_2 соответствует решению, z-координата которого является наибольшей (поскольку только в этом случае внутренний двугранный угол многогранника $\mathscr{M}$ при ребре A_2T_2 меньше 180°; последнее ограничение согласуется с разверткой, изображенной на рис. 4). Найденные таким образом значения в радикалах координат вершины A_2 заносим в табл. 1. Указанные там же приближенные значения координат вершины A_2 в наших рассуждениях не используются и приведены исключительно для того, чтобы читателю было проще представить себе пространственную форму многогранника $\mathscr{M}$. Например, тот факт, что численное значение x-координаты точки A_2 отрицательно, наводит на мысль, что A_2 (а значит, и многогранник $\mathscr{M}$) не содержится в той четверти пространства, в которой лежат точки с положительными x- и y-координатами.

Аналогично находим значения в радикалах координат вершины B_1. Для этого используем тот факт, что B_1 соединена ребрами многогранника $\mathscr{M}$ с тремя его вершинами T_1, T_3 и C_2. Но на этот раз из двух решений соответствующей системы трех алгебраических уравнений второй степени, аналогичной системе (1), выбираем то, у которого z-координата наименьшая. Найденные таким об-

Таблица 1. Значения в радикалах и приближенные значения координат вершин многогранника $\mathscr{M}$. Все десятичные знаки в приближенных значениях верные, т. е. написаны без учета правил округления. Для сокращения записи значений в радикалах использованы обозначения: $\rho = 167(1712315512948039256 + 297671463726717927\sqrt{31})$, $\omega_1 = 237(670333576 - 497644539\sqrt{31})$, $\omega_2 = 3(26431711823 - 892912093\sqrt{31})$, $\omega_3 = 2798420941 - 176443707\sqrt{31}$.

	x-координата	y-координата	z-координата
T_1	0	0	$\frac{\sqrt{167}}{\sqrt{2}} \approx 9.13$
T_2	0	$\frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7.77$	0
T_3	$\frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7.77$	0	0
T_4	0	0	$-\frac{\sqrt{167}}{\sqrt{2}} \approx -9.13$
C_2	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	0
A_2	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 4.72$
B_1	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -0.46$
$\overline{A}_2$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 0.46$
$\overline{B}_1$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -4.72$

разом значения в радикалах координат вершины B_1 заносим в табл. 1.

Правильность описанного выше способа распознавания координат точки A_2 среди решений системы (1) и координат точки B_1 среди решений аналогичной системы проверяем вычислением длины отрезка A_2B_1 через координаты его концов, приведенных в табл. 1. Символьные вычисления, проделанные с помощью *Mathematica*, показали, что длина отрезка A_2B_1 действительно равна 11.

Координаты вершин $\overline{A}_2$ и $\overline{B}_1$ можно найти тем же способом, каким мы нашли координаты вершин A_2 и B_1. Однако следующая лемма позволяет избежать этих вычислений.

Лемма 2. *Модифицированный многогранник $\mathscr{M}$ переходит в себя под действием поворота всего пространства $\mathbb{R}^3$ на 180° вокруг прямой XY, проходящей через точки X и Y, построенные в § 3, т. е. под действием поворота всего пространства, заданного матрицей*

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Используя табл. 1, непосредственно убеждаемся, что $L(T_1) = T_4$, $L(T_2) = T_3$, $L(T_3) = T_2$, $L(T_4) = T_1$ и $L(C_2) = C_2$. Поэтому расстояния от точки $L(A_2)$ до вершин T_3, T_4 и C_2 такие же, как расстояния от точки $\overline{B}_1$ до указанных вершин. В самом деле, $|L(A_2)T_3| = |L(A_2)L(T_2)| = |A_2T_2| = |A_2B_2| = 5$ и $|\overline{B}_1T_3| = |\overline{B}_1\overline{A}_1| = 5$; $|L(A_2)T_4| = |L(A_2)L(T_1)| = |A_2T_1| = |A_2C_1| = 10$ и $|\overline{B}_1T_4| = |\overline{B}_1\overline{C}_1| = 10$; $|L(A_2)C_2| = |L(A_2)L(C_2)| = |A_2C_2| = 12$ и $|\overline{B}_1C_2| = 12$. Кроме того, обе точки $L(A_2)$ и $\overline{B}_1$ лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через вершины T_3, T_4, и C_2. В самом деле, согласно рис. 4, внутренний двугранный угол многогранника $\mathscr{M}$ при каждом из ребер

$\overline{B}_1T_3 = \overline{B}_1\overline{A}_1$ и $A_2T_2 = A_2B_2$ (а значит, и при ребре $L(A_2)L(T_2) = L(A_2)L(B_2)$) меньше $180°$. Следовательно, $L(A_2) = \overline{B}_1$.

Рассуждая аналогичным образом, можно доказать, что расстояния от точки $L(B_1)$ до вершин $T_2 = L(T_3)$, $T_4 = L(T_1)$, $C_2 = L(C_2)$ такие же, как расстояния от точки $\overline{A}_2$ до указанных вершин. Кроме того, по аналогии со сказанным выше можно доказать, что обе точки $L(B_1)$ и $\overline{A}_2$ лежат по одну сторону от плоскости, проходящей через вершины T_2, T_4, и C_2. Следовательно, $L(B_1) = \overline{A}_2$.

Тем самым множество вершин многогранника $\mathscr{M}$ (а также множества его ребер и граней) переходит в себя под действием отображения L, а это и означает, что $\mathscr{M}$ переходит в себя под действием L. $\square$

Используя равенства $\overline{B}_1 = L(A_2)$ и $\overline{A}_2 = L(B_1)$, установленные при доказательстве леммы 2, без дополнительных вычислений находим координаты точек $\overline{A}_2$ и $\overline{B}_1$ и тем самым завершаем заполнение табл. 1.

Таким образом, многогранник $\mathscr{M}$ имеет 9 вершин, 21 ребро и 14 граней и обладает симметрией, описанной в лемме 2. Изучение изгибаемых и нежестких каркасов (а значит, и многогранников), обладающих симметрией, само по себе является интересной и нетривиальной задачей (см., например, [16] и указанную там литературу). Но мы достигнем своих целей наиболее прямым и элементарным путем, без использования общих результатов о влиянии симметрии на изгибаемость каркасов.

§ 5. Имеют ли самопересечения многогранники $\mathscr{M}$ и $\mathscr{S}$?

Для решения проблемы 1 мы должны уметь отвечать на вопрос, имеет ли данный многогранник самопересечения. Чтобы упростить и унифицировать наши рассуждения, в § 5 мы описали алгоритм, который позволяет гарантированно убедиться в отсутствии самопересечений у многогранников $\mathscr{S}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ (последний будет построен в § 6) и, конечно, не только у них.

Задача нахождения пересечений и самопересечений многогранных поверхностей возникает в самых разных задачах математики и прикладной математики, компьютерной графике и видеоиграх. Существует множество вариантов этой задачи и десятки алгоритмов, предназначенных для их решения (см., например, [17–21] и указанную там литературу). Однако существующие алгоритмы нам не подходят по следующим причинам:

- мы хотим решить задачу о самопересечениях, не выполняя арифметических операций над числами, заданными в формате с плавающей точкой, т. е. мы разрешаем себе использовать только символьные вычисления (которые de facto выполняем в *Mathematica*);
- мы хотим, чтобы алгоритм был логически максимально прозрачным, и поэтому не разбираем «исключительные случаи», но о появлении каждого такого случая алгоритм должен нас известить (т. е. нам не интересны ни полная автоматизация вычислений, ни оптимизация их трудоемкости и быстродействия).

Поэтому мы вынуждены разработать свой алгоритм, к описанию которого и переходим.

Напомним, что согласно § 2 многогранником мы называем образ $f(M)$ абстрактного двумерного многообразия M, склеенного из конечного числа евклидовых треугольников Δ_k, $k = 1, \dots, n$, под действием непрерывного отображения $f : M \to \mathbb{R}^3$, ограничение которого на каждый треугольник Δ_k является линейным изометричным вложением. При этом точка $\mathbf{x} \in f(M)$ является точкой самопересечения многогранника $f(M)$, если ее полный прообраз $f^{-1}(\mathbf{x}) \subset M$ состоит более чем из одной точки.

Наш алгоритм основывается на следующих соображениях.

Пусть $\mathbf{x} \in f(M)$ является точкой самопересечения многогранника $f(M)$ и $u, v \in M$ — две различные точки из $f^{-1}(\mathbf{x})$. Обозначим через Δ_{k_i}, $i = 1, 2$, два различных евклидовых треугольника, из которых склеено M, таких, что $u \in \Delta_{k_1}$ и $v \in \Delta_{k_2}$. Напомним, что в § 2 мы условились называть треугольники $f(\Delta_{k_1})$ и $f(\Delta_{k_2})$ гранями многогранника $f(M)$. Рис. 5 поясняет, почему при любом взаимном расположении граней $f(\Delta_{k_1})$ и $f(\Delta_{k_2})$ по крайней мере на одной из них найдется точка пересечения $\widetilde{\mathbf{x}}$ грани и ребра многогранника $f(M)$. Тем самым задача о наличии самопересечений у многогранника $f(M)$ сводится к задаче о том, пересекаются ли замкнутый треугольник и замкнутый отрезок в $\mathbb{R}^3$.

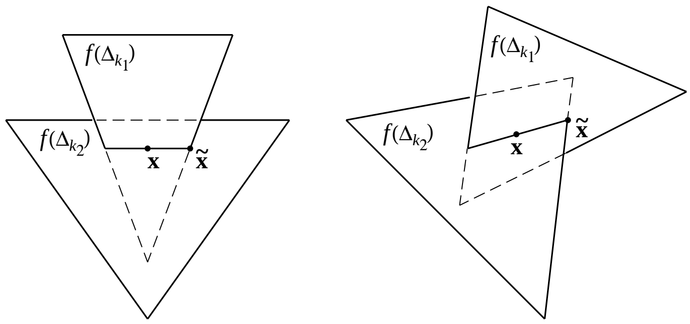

Рис. 5. Точка самопересечения $\mathbf{x}$ многогранника $f(M)$ и содержащие ее грани $f(\Delta_{k_i}) \subset f(M)$, $i = 1, 2$. Точка $\widetilde{\mathbf{x}}$ является точкой пересечения грани и ребра $f(M)$.

Для решения этой задачи используем понятие ориентированного объема тетраэдра. Как известно, если $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, x_{k,3})$, $k = 0, 1, 2, 3$, — радиус-векторы вершин тетраэдра в $\mathbb{R}^3$, то ориентированный объем $\operatorname{Vol}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ этого тетраэдра может быть вычислен по одной из следующих формул:

$$\operatorname{Vol}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_{0,1} & x_{0,2} & x_{0,3} \\ 1 & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ 1 & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ 1 & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_{1,1}-x_{0,1} & x_{1,2}-x_{0,2} & x_{1,3}-x_{0,3} \\ x_{2,1}-x_{0,1} & x_{2,2}-x_{0,2} & x_{2,3}-x_{0,3} \\ x_{3,1}-x_{0,1} & x_{3,2}-x_{0,2} & x_{3,3}-x_{0,3} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Напомним, что ориентированный объем тетраэдра равен его «обычному» объему, если тройка векторов $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0$ является правой; равен числу, противоположному «обычному» объему, если тройка векторов $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0$ является левой, и равен нулю, если векторы $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_0$ лежат в одной плоскости.

Итак, пусть замкнутый треугольник $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ задан координатами своих вершин $\mathbf{y}_k = (y_{k,1}, y_{k,2}, y_{k,3})$, $k = 1, 2, 3$, и замкнутый отрезок $I \subset \mathbb{R}^3$ задан координатами своих вершин $\mathbf{z}_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, z_{j,3})$, $j = 1, 2$. Если оба определителя

$$6 \operatorname{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_1), \quad 6 \operatorname{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_2) \tag{3}$$

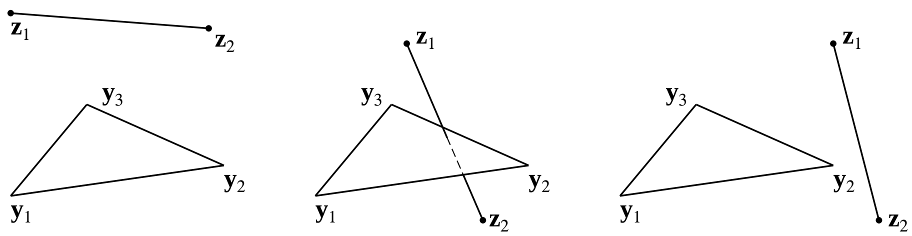

Рис. 6. Различные случаи взаимного расположения треугольника Δ с вершинами $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ и отрезка I с концами $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$.

отличны от нуля и имеют один знак, то точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ лежат по одну сторону от плоскости треугольника Δ (см. левую часть рис. 6). Следовательно, в этом случае отрезок I не пересекает плоскости треугольника Δ, а значит, $I \cap \Delta = \varnothing$. Если же оба определителя (3) отличны от нуля и имеют разные знаки, то точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ лежат по разные стороны от плоскости треугольника Δ (см. центральную и правую части рис. 6). В этом случае, чтобы разобраться в том, пересекаются ли I и Δ, нам потребуется вычислить еще три определителя

$$6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2), \quad 6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3), \quad 6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1). \tag{4}$$

Если все определители (4) отличны от нуля и имеют один знак, то $I \cap \Delta \neq \varnothing$. Эта ситуация схематически изображена в центральной части рис. 6. Чтобы понять, почему при этом $I \cap \Delta \neq \varnothing$, для каждой точки $\mathbf{x}$, лежащей на границе треугольника Δ, обозначим через $\pi(\mathbf{x})$ полуплоскость, ограниченную прямой, содержащей отрезок I, и проходящую через точку $\mathbf{x}$. Из того, что все три определителя в (4) имеют один знак, следует, что, когда точка $\mathbf{x}$ обходит границу треугольника Δ один раз, двигаясь все время в одном и том же направлении, полуплоскость $\pi(\mathbf{x})$ вращается тоже всегда в одну и ту же сторону и совершает полный оборот вокруг прямой, содержащей отрезок I. Значит, граница треугольника Δ зацеплена с прямой, содержащей отрезок I. Принимая во внимание, что концы отрезка I лежат по разные стороны относительно плоскости, содержащей треугольник Δ, заключаем, что $I \cap \Delta \neq \varnothing$.

Аналогично, если все три определителя в (4) отличны от нуля, но не все они имеют одинаковый знак, то после того, как точка $\mathbf{x}$ обойдет границу треугольника Δ один раз, двигаясь все время в одну и ту же сторону, полуплоскость $\pi(\mathbf{x})$ вернется в исходное положение, но не совершит полного оборота вокруг прямой, содержащей отрезок I. Значит, граница треугольника Δ не зацеплена с прямой, содержащей отрезок I. Следовательно, в этом случае $I \cap \Delta = \varnothing$.

Этот алгоритм не работает в «исключительных» случаях, когда хоть какой-то из определителей в (3) и (4) зануляется. В принципе его можно усовершенствовать, вводя в рассмотрение новые функции, в чем-то аналогичные определителям в (3) и (4), использование которых позволит до конца разобраться в каждом из «исключительных» случаев. Но мы ожидаем, что для интересующих нас многогранников $\mathscr{M}$, $\mathscr{S}$ и $\mathscr{P}$ «исключительных» случаев не будет вообще или будет совсем мало, так что каждый из них мы сможем изучить отдельно. Поэтому чтобы избежать усложнения алгоритма, встретившись с «исключительным» случаем, наш алгоритм лишь фиксирует, что вопрос о наличии пересечений треугольника Δ и отрезка I требует дополнительного изучения.

Более конкретно наш алгоритм может быть сформулирован так.

Шаг 1. [Подготовительная работа по составлению списков вершин, ребер и граней.]

Произвольным образом нумеруем вершины абстрактного многообразия M. Обозначаем r-ю вершину M через v_r. Списком ребер M называем совокупность S всех неупорядоченных пар $s = (v_p, v_q)$ вершин M таких, что v_p и v_q соединены ребром в M. Списком граней M называем совокупность T всех неупорядоченных троек $t = (v_i, v_j, v_k)$ вершин M таких, что v_i, v_j и v_k являются вершинами некоторой грани M. Фиксируем некоторый линейный порядок $<$ на декартовом произведении $T \times S$ множеств T и S. Составляем список вершин $\mathbf{x}_r = f(v_r) \in \mathbb{R}^3$ многогранника $f(M)$, в котором для каждого вектора $\mathbf{x}_r$ указываем его координаты в $\mathbb{R}^3$. Наконец, создаем пустой вспомогательный файл.

Шаг 2. [Этим шагом начинается перебор всех пар $(t,s) \in T \times S$ и выяснение того, пусто ли пересечение $f(t) \cap f(s)$. При первом выполнении шага 2 полагаем (t,s) равным наименьшему элементу упорядоченного множества $(T \times S, <)$. При повторном выполнении шага 2 выбор (t,s) происходит на шаге 5. Для того чтобы приблизить обозначения к тем, которые ранее использовались в § 5, считаем, что грань $t \subset M$ имеет вершины u_1, u_2, u_3, а ребро $s \subset M$ имеет вершины w_1, w_2. При этом обозначаем грань $f(t) \subset f(M)$ через Δ, ее вершины обозначаем через $\mathbf{y}_k = f(u_k) \in \mathbb{R}^3$, $k = 1,2,3$, а в координатах записываем эти вершины в виде $\mathbf{y}_k = (y_{k,1}, y_{k,2}, y_{k,3}) \in \mathbb{R}^3$. Аналогично обозначаем ребро $f(s) \subset f(M)$ через I, его концы обозначаем через $\mathbf{z}_j = f(w_j) \in \mathbb{R}^3$, $j = 1,2$, а в координатах записываем эти концы в виде $\mathbf{z}_j = (z_{j,1}, z_{j,2}, z_{j,3}) \in \mathbb{R}^3$.]

Используя только что введенные обозначения, мы можем описать шаг 2 следующим образом:

- если t и s не инцидентны друг другу, т. е. если $u_k \neq w_j$ при всех $k = 1,2,3$ и всех $j = 1,2$, то переходим к шагу 3;
- если t и s имеют ровно одну общую точку, т. е. если равенство $u_k = w_j$ имеет место лишь для одной пары индексов k, j, то переходим к шагу 4;
- если t и s имеют более одной общей точки (т. е. если для любого $j = 1,2$ найдется $k = 1,2,3$, для которого выполняется равенство $u_k = w_j$, или, что то же самое, если s является стороной t), то непосредственно из определения ясно, что пара (s,t) не порождает самопересечений $f(M)$, и переходим к шагу 5.

Шаг 3. [Случай, когда t и s не инцидентны друг другу.]

Вычисляем два определителя $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_1)$ и $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_2)$ (см. формулы (2), (3)). Затем поступаем так:

- если хоть один из этих двух определителей равен нулю, то записываем сообщение «вопрос о наличии пересечений грани $f(t)$ и ребра $f(s)$ требует дополнительного изучения» во вспомогательный файл и переходим к шагу 5;
- если оба определителя отличны от нуля и имеют одинаковый знак, то заключаем, что $f(t) \cap f(s) = \varnothing$, ничего не записываем во вспомогательный файл и переходим к шагу 5;
- если оба определителя отличны от нуля и имеют разные знаки, то вычисляем еще три определителя $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2)$, $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3)$, $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_1)$ (см. формулы (2), (4)) и поступаем так:

◇ если хоть один из этих трех определителей равен нулю, то записываем во вспомогательный файл сообщение «вопрос о наличии пересечений грани $f(t)$ и ребра $f(s)$ требует дополнительного изучения» и переходим к шагу 5;

◇ если все три определителя отличны от нуля и имеют один знак, то заключаем, что $f(t) \cap f(s) \neq \varnothing$, записываем во вспомогательный файл сообщение «грань $f(t)$ и ребро $f(s)$ пересекаются» и переходим к шагу 5;

◇ если все три определителя отличны от нуля, но не все имеют одинаковый знак, то заключаем, что $f(t) \cap f(s) = \varnothing$, ничего не записываем во вспомогательный файл и переходим к шагу 5.

Шаг 4. [Случай, когда t и s имеют ровно одну общую точку.]

Вычисляем два определителя $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_1)$ и $6\,\mathrm{Vol}(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{z}_2)$ (см. формулы (2), (3)). При этом мы заранее знаем, что как минимум один из них равен нулю. Далее поступаем так:

- если один из этих определителей не равен нулю, то отрезок $f(s)$ не лежит в плоскости треугольника $f(t)$; отсюда заключаем, что пара (s,t) не порождает самопересечений $f(M)$; ничего не записываем во вспомогательный файл и переходим к шагу 5;
- если оба эти определителя равны нулю, то отрезок $f(s)$ лежит в плоскости треугольника $f(t)$; записываем во вспомогательный файл сообщение «вопрос о наличии пересечений грани $f(t)$ и ребра $f(s)$ требует дополнительного изучения» и переходим к шагу 5.

Шаг 5. [Переход к следующей паре (t,s) или завершение работы алгоритма.]

Поступаем так:

- если пара (t,s) не является наибольшим элементом линейно упорядоченного множества $(T \times S, <)$, то заменяем (t,s) на непосредственно следующий за ним больший элемент множества $(T \times S, <)$ и переходим к шагу 2;
- если пара (t,s) является наибольшим элементом множества $(T \times S, <)$, то выводим вспомогательный файл и на этом заканчиваем работу алгоритма.

Основным результатом § 5 является следующая

Лемма 3. *Модифицированный многогранник Штеффена $\mathscr{M}$ комбинаторно эквивалентен некоторому разбиению сферы, имеет только треугольные грани, не имеет самопересечений и является изгибаемым.*

Доказательство. Непосредственно из построения многогранника $\mathscr{M}$ следует, что он комбинаторно эквивалентен триангуляции сферы, изображенной на рис. 4.

Тот факт, что $\mathscr{M}$ является изгибаемым многогранником, был пояснен в последнем абзаце § 3 и в первом абзаце § 4.

Отсутствие самопересечений у многогранника $\mathscr{M}$ проверяем с помощью описанного выше алгоритма, реализованного в *Mathematica* с использованием исключительно символьных вычислений. Табл. 1 представляет собой список вершин многогранника $\mathscr{M}$. Она же содержит выражения всех координат вершин в радикалах. Списки ребер и граней многогранника $\mathscr{M}$ легко составить по рис. 4. Время вычислений составило около 0.01 с. При этом не было выявлено ни самопересечений многогранника $\mathscr{M}$, и ни одного «исключительного» случая, требующего дополнительного изучения. На этом основании мы считаем лемму 3 доказанной. $\square$

Хотя это и не требуется для решения проблемы 1, но мы проверили, что многогранник Штеффена $\mathscr{S}$ не имеет самопересечений. Для этого мы применили к $\mathscr{S}$ рассуждения и вычисления, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 3. Наш алгоритм не обнаружил ни самопересечений многогранника $\mathscr{S}$, ни «исключительных» случаев, требующих дополнительного изучения.

§ 6. Построение многогранника $\mathscr{P}$

Пусть $\mathscr{M}$ — модифицированный многогранник Штеффена, построенный в § 4. Обозначим через $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ поворот вокруг оси z на 90° такой, что $K(T_3) = T_2$. В построенной в § 4 системе координат, связанной с многогранником $\mathscr{M}$, повороту K соответствует матрица

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Рассмотрим образы многогранника $\mathscr{M}$ под действием отображений K, $K^2 = K \circ K$ и $K^3 = K \circ K^2$ и склеим их по совместившимся граням. Получившийся многогранник обозначаем через $\mathscr{P}$. Он имеет 26 вершин, 72 ребра и 48 граней.

Неформально говоря, основная идея построения многогранника $\mathscr{P}$ состоит в том, чтобы «окружить» ребро T_1T_4 модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$ изометричными копиями многогранника $\mathscr{M}$ так, чтобы T_1T_4 уже не было ребром многогранника $\mathscr{P}$. Проекция многогранника $\mathscr{P}$ на плоскость переменных x, y схематически изображена на рис. 7.

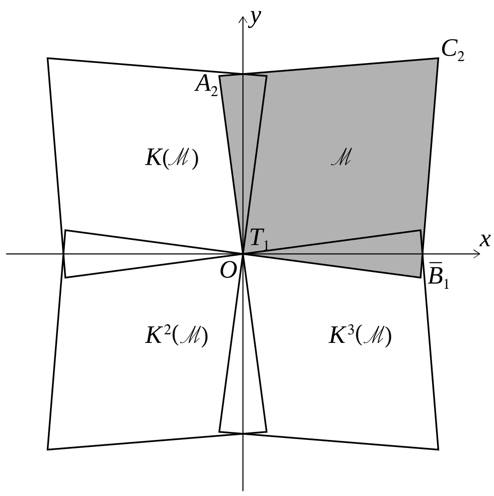

Рис. 7. Схематическое изображение проекции многогранника $\mathscr{P}$ на плоскость переменных x, y. При этом отрезок T_1T_4 проектируется в начало координат O. Проекция модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$ закрашена; проекции некоторых вершин многогранника $\mathscr{M}$ обозначены теми же буквами, что и сами вершины. Проекции многогранников $K(\mathscr{M})$, $K^2(\mathscr{M})$ и $K^3(\mathscr{M})$ оставлены незакрашенными.

Вершины многогранника $K(\mathscr{M})$ обозначаем теми же буквами, что и соответствующие вершины многогранника $\mathscr{M}$, но снабжаем их штрихом. При этом используем то же соглашение, что и в § 3, а именно: если некоторая вершина многогранника $K(\mathscr{M})$ совместилась с какой-то вершиной многогранника $\mathscr{M}$ так, что они должны быть склеены и должны рассматриваться как одна вершина многогранника $\mathscr{P}$, то для этой вершины всегда используем то обозначение, которое она имела в многограннике $\mathscr{M}$. Например, вершина $T_1' = K(T_1)$ совпадает с T_1 и в многограннике $\mathscr{P}$ обозначается через T_1; вершина $T_4' = K(T_4)$ совпадает с T_4 и обозначается через T_4; наконец, вершина $T_3' = K(T_3)$ совпадает с T_2 и обозначается через T_2. Используя эти обозначения, мы можем сказать, что многогранники $\mathscr{M}$ и $K(\mathscr{M})$ склеиваются по совместившимся граням $T_1T_2T_4$ и $T_1'T_3'T_4'$, которые после склеивания «исчезают» и не являются гранями многогранника $\mathscr{P}$.

Аналогично вершины многогранников $K^2(\mathscr{M})$ и $K^3(\mathscr{M})$ обозначаем теми же буквами, что и соответствующие вершины многогранника $\mathscr{M}$, но снабжаем их двумя и соответственно тремя штрихами. При этом если какая-то вершина многогранника $\mathscr{P}$ появляется в наших построениях несколько раз, то фиксируем за ней то наименование, которое содержит минимальное количество штрихов. Например, в этих обозначениях многогранники $K^3(\mathscr{M})$ и $\mathscr{M}$ склеиваются по совместившимся граням $T_1'''T_2'''T_4'''$ и $T_1T_3T_4$, а вершина T_2''' многогранника $K^3(\mathscr{M})$ получает в многограннике $\mathscr{P}$ обозначение T_3.

Используя эти обозначения и табл. 1, можно легко указывать координаты любой вершины многогранника $\mathscr{P}$. Например,

$$\begin{aligned}A_2''' = K^3(A_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} A_2\\ &= \left(\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962}, -\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998}, \frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}}\right)\\ &\approx (8.89, 1.19, 4.72),\end{aligned}$$

где выражения ω_1, ω_2, ω_3 и ρ определены в подписи под табл. 1.

Список всех вершин многогранника $\mathscr{P}$ вместе со всеми их координатами в радикалах приведен в табл. 2.

Формулировке леммы 4 предпошлем определение понятия k-параметрического изгибаемого многогранника, снабдив его необходимыми пояснениями. В § 1 мы условились называть многогранник P изгибаемым, если P можно включить в непрерывное семейство многогранников $\{P_t\}_{t\in[\alpha,\beta)}$ так, что $P = P_\alpha$ и для любого $t \in (\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}$ многогранники P_α и P_t комбинаторно эквивалентны, их соответствующие грани конгруэнтны, но сами многогранники P_α и P_t не конгруэнтны. Чтобы подчеркнуть тот факт, что параметр изгибания t является вещественным числом, такие многогранники называют 1-параметрическими изгибаемыми многогранниками (см., например, [13]). Из сказанного в § 2–4 следует, что октаэдр Брикара типа 1 $\mathscr{B}$, многогранник Штеффена $\mathscr{S}$ и модифицированный многогранник Штеффена $\mathscr{M}$ являются 1-параметрическими изгибаемыми многогранниками. Более общей является ситуация, когда параметр $t = (t_1, \dots, t_k)$ принимает значения в некотором открытом множестве Ω пространства $\mathbb{R}^k$. В таком случае говорят, что P является *k-параметрическим изгибаемым многогранником* или что он допускает *k-параметрическое изгибание* (см., например, [23]).

Таблица 2. Значения в радикалах и приближенные значения координат вершин многогранника $\mathscr{P}$. Определения выражений ρ, ω_1, ω_2 и ω_3 даны в подписи к табл. 1. Все знаки в приближенных значениях верные.

	x-координата	y-координата	z-координата
T_1	0	0	$\frac{\sqrt{167}}{\sqrt{2}} \approx 9.13$
T_2	0	$\frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7.77$	0
T_3	$\frac{11}{\sqrt{2}} \approx 7.77$	0	0
T_4	0	0	$-\frac{\sqrt{167}}{\sqrt{2}} \approx -9.13$
C_2	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	0
A_2	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 4.72$
B_1	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -0.46$
$\overline{A}_2$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 0.46$
$\overline{B}_1$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -4.72$
T_2'	$-\frac{11}{\sqrt{2}} \approx -7.77$	0	0
C_2'	$-\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx -9.79$	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	0
A_2'	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -8.89$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 4.72$
B_1'	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -0.05$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -0.46$
$\overline{A}_2'$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -2.79$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 0.46$
$\overline{B}_1'$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 1.19$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -4.72$
T_2''	0	$-\frac{11}{\sqrt{2}} \approx -7.77$	0
C_2''	$-\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx -9.79$	$-\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx -9.79$	0
A_2''	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 1.19$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -8.89$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 4.72$
B_1''	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -2.79$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -0.05$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -0.46$
$\overline{A}_2''$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -0.05$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -2.79$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 0.46$
$\overline{B}_1''$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -8.89$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 1.19$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -4.72$
C_2'''	$\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx 9.79$	$-\frac{11+3\sqrt{31}}{2\sqrt{2}} \approx -9.79$	0
A_2'''	$\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 8.89$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 1.19$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 4.72$
B_1'''	$\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx 0.05$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -2.79$	$\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -0.46$
$\overline{A}_2'''$	$\frac{\omega_2\sqrt{2}-2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx 2.79$	$-\frac{\omega_1\sqrt{2}+2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -0.05$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}-22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx 0.46$
$\overline{B}_1'''$	$\frac{\omega_1\sqrt{2}-2(200-33\sqrt{31})\sqrt{\rho}}{1230304047998} \approx -1.19$	$-\frac{\omega_2\sqrt{2}+2\sqrt{\rho}}{15573468962} \approx -8.89$	$-\frac{167\omega_3\sqrt{2}+22\sqrt{\rho}}{15573468962\sqrt{167}} \approx -4.72$

Необходимые для дальнейшего свойства многогранника $\mathscr{P}$ сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма 4. *Многогранник $\mathscr{P}$ комбинаторно эквивалентен некоторой триангуляции сферы, не имеет самопересечений и допускает* 4*-параметрическое изгибание.*

Доказательство. Непосредственно из построения многогранника $\mathscr{P}$ следует, что он комбинаторно эквивалентен некоторой триангуляции сферы.

Отсутствие самопересечений мы проверили с помощью описанного в § 5 алгоритма, реализованного в *Mathematica* с использованием исключительно символьных вычислений. Использованный для этих вычислений список вершин многогранника $\mathscr{P}$ и координат вершин в радикалах приведен в табл. 2. Списки ребер и граней многогранника $\mathscr{P}$ приведены в табл. 3 и 4 соответственно. Время вычислений составило менее 0.1 с. При этом не было выявлено ни одного самопересечения многогранника $\mathscr{P}$, равно как и ни одного «исключительного» случая, требующего дополнительного изучения.

По построению многогранник $\mathscr{P}$ получен склеиванием четырех копий многогранника $\mathscr{M}$, а именно, склеиванием многогранников $\mathscr{M}$, $K(\mathscr{M})$, $K^2(\mathscr{M})$ и $K^3(\mathscr{M})$. В § 3 мы продемонстрировали, что вершина C_2 многогранника Штеффена $\mathscr{S}$ может занимать произвольное положение на некоторой дуге σ построенной в § 3 окружности γ. Те же аргументы показывают, что вершину C_2 модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$ можно произвольным образом двигать по некоторой дуге σ_* окружности некоторой γ_*, а каждую из вершин $C_2' \in K(\mathscr{M})$, $C_2'' \in K^2(\mathscr{M})$ и $C_2''' \in K^3(\mathscr{M})$ можно двигать по соответствующим дугам $K(\sigma_*)$, $K^2(\sigma_*)$ и $K^3(\sigma_*)$ окружностей $K(\gamma_*)$, $K^2(\gamma_*)$ и $K^3(\gamma_*)$ независимо друг от друга и от движения точки C_2. За каждое из этих движений отвечает один вещественный параметр. Обозначим его через t_j, $j = 1, \dots, 4$. После того, как для данного $t = (t_1, \dots, t_4)$ положения вершин $C_2(t_1)$, $C_2'(t_2)$, $C_2''(t_3)$ и $C_2'''(t_4)$ фиксированы в пространстве, можно однозначно найти положения всех остальных вершин многогранника $\mathscr{P}(t) = \mathscr{P}(t_1, t_2, t_3, t_4)$, который задается такими условиями, выполняющимися для всех t: (a) $\mathscr{P}(t)$ комбинаторно эквивалентен многограннику $\mathscr{P}$; (b) соответствующие ребра многогранников $\mathscr{P}(t)$ и $\mathscr{P}$ имеют одинаковые длины; (c) координаты каждой вершины многогранника $\mathscr{P}(t)$ являются непрерывными функциями параметра $t = (t_1, \dots, t_4)$.

Для этого, как обычно, считаем, что вершины T_j, $j = 1, \dots, 4$, не меняют своего положения в пространстве, т. е. полагаем по определению $T_j(t) = T_j$ для всех $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, где T_j имеет координаты, указанные в табл. 1. Поскольку вершина $C_2(t) = C_2(t_1)$ соединена в $\mathscr{P}(t)$ ребрами с вершинами $T_2(t) \equiv T_2$ и $T_3(t) \equiv T_3$, то она лежит на окружности γ_*, определяемой такими условиями: γ_* расположена в плоскости, перпендикулярной отрезку T_2T_3; центр окружности γ_* совпадает с серединой отрезка T_2T_3; радиус окружности γ_* равен $\sqrt{|A_1C_2|^2 - |A_1B_2|^2/4} = 3\sqrt{31}/2$. Именно перемещение $C_2(t_1)$ по окружности γ_* и задает изгибание многогранника $\mathscr{M}$. В самом деле, положение пяти вершин $C_2(t_1)$, T_j, $j = 1, \dots, 4$, многогранника $\mathscr{M}(t_1)$ однозначно определяет положение остальных четырех его вершин $A_2(t_1)$, $B_1(t_1)$, $\overline{A}_2(t_1)$ и $\overline{B}_1(t_1)$, ведь каждая из этих последних вершин соединена в $\mathscr{M}(t_1)$ тремя ребрами с некоторыми из пяти вершин $C_2(t_1)$, T_j, $j = 1, \dots, 4$. Принимая во внимание, что положение каждой вершины меняется непрерывно и при $t = 0$ оно известно из табл. 1, убеждаемся, что положение вершин $A_2(t_1)$, $B_1(t_1)$, $\overline{A}_2(t_1)$ и $\overline{B}_1(t_1)$ однозначно определено положением вершин $C_2(t_1)$, T_j, $j = 1, \dots, 4$, при всех t, достаточно близких к нулю (а именно до тех пор, пока упомянутые выше три ребра не окажутся в одной плоскости). Именно поэтому мы и говорим, что изгибания $\mathscr{M}(t_1)$ многогранника $\mathscr{M}$ задаются положением вершины $C_2(t_1)$.

Аналогично строим изгибания $K(\mathscr{M}(t_2))$, $K^2(\mathscr{M}(t_3))$ и $K^3(\mathscr{M}(t_4))$ многогранников $K(\mathscr{M})$, $K^2(\mathscr{M})$ и $K^3(\mathscr{M})$. В результате мы видим, что многогранник $\mathscr{P}$ оказался включенным в 4-параметрическое семейство многогранников $\{\mathscr{P}(t)\}_{t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\Omega\subset\mathbb{R}^4}$, т. е. видим, что многогранник $\mathscr{P}$ допускает 4-параметрическое изгибание. $\square$

Пользуясь произволом в определении области Ω изменения параметра $t = (t_1, t_2, t_3, t_4)$, считаем, что 4-параметрическое семейство многогранников $\{\mathscr{P}(t)\}_{t=(t_1,t_2,t_3,t_4)\in\Omega\subset\mathbb{R}^4}$, построенное в доказательстве леммы 4, таково, что $\mathscr{P}(0, 0, 0, 0) = \mathscr{P}$.

Таблица 3. Список всех 72 ребер многогранника $\mathscr{P}$. Зна́ком $\varnothing$ отмечены ячейки, намеренно оставленные пустыми, поскольку соответствующее такой ячейке ребро уже появлялось (в другой строке) в одной из колонок, расположенных левее. В правой колонке указаны номера лемм, из доказательства которых следует, что двугранный угол при каждом ребре из данной строки непостоянен.

$\mathscr{P}\cap\mathscr{M}$	$\mathscr{P}\cap K(\mathscr{M})$	$\mathscr{P}\cap K^2(\mathscr{M})$	$\mathscr{P}\cap K^3(\mathscr{M})$	
T_1T_2	T_1T_2'	T_1T_2''	$\varnothing$	7
T_1T_3	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	7
T_1A_2	T_1A_2'	T_1A_2''	T_1A_2'''	5
T_1B_1	T_1B_1'	T_1B_1''	T_1B_1'''	5
T_2T_4	$T_2'T_4$	$T_2''T_4$	$\varnothing$	7
T_2C_2	$T_2'C_2'$	$T_2''C_2''$	T_3C_2'''	6
T_2A_2	$T_2'A_2'$	$T_2''A_2''$	T_3A_2'''	5
$T_2\overline{A}_2$	$T_2'\overline{A}_2'$	$T_2''\overline{A}_2''$	$T_3\overline{A}_2'''$	5
T_3T_4	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	7
T_3C_2	T_2C_2'	$T_2'C_2''$	$T_2''C_2'''$	6
T_3B_1	T_2B_1'	$T_2'B_1''$	$T_2''B_1'''$	5
$T_3\overline{B}_1$	$T_2\overline{B}_1'$	$T_2'\overline{B}_1''$	$T_2''\overline{B}_1'''$	5
$T_4\overline{A}_2$	$T_4\overline{A}_2'$	$T_4\overline{A}_2''$	$T_4\overline{A}_2'''$	5
$T_4\overline{B}_1$	$T_4\overline{B}_1'$	$T_4\overline{B}_1''$	$T_4\overline{B}_1'''$	5
C_2A_2	$C_2'A_2'$	$C_2''A_2''$	$C_2'''A_2'''$	5
C_2B_1	$C_2'B_1'$	$C_2''B_1''$	$C_2'''B_1'''$	5
$C_2\overline{A}_2$	$C_2'\overline{A}_2'$	$C_2''\overline{A}_2''$	$C_2'''\overline{A}_2'''$	5
$C_2\overline{B}_1$	$C_2'\overline{B}_1'$	$C_2''\overline{B}_1''$	$C_2'''\overline{B}_1'''$	5
A_2B_1	$A_2'B_1'$	$A_2''B_1''$	$A_2'''B_1'''$	5
$\overline{A}_2\overline{B}_1$	$\overline{A}_2'\overline{B}_1'$	$\overline{A}_2''\overline{B}_1''$	$\overline{A}_2'''\overline{B}_1'''$	5

Таблица 4. Список всех 48 граней многогранника $\mathscr{P}$.

$\mathscr{P}\cap\mathscr{M}$	$\mathscr{P}\cap K(\mathscr{M})$	$\mathscr{P}\cap K^2(\mathscr{M})$	$\mathscr{P}\cap K^3(\mathscr{M})$
$T_1T_2A_2$	$T_1T_2'A_2'$	$T_1T_2''A_2''$	$T_1T_3A_2'''$
$T_1T_3B_1$	$T_1T_2B_1'$	$T_1T_2'B_1''$	$T_1T_2''B_1'''$
$T_1A_2B_1$	$T_1A_2'B_1'$	$T_1A_2''B_1''$	$T_1A_2'''B_1'''$
$T_2T_4\overline{A}_2$	$T_2'T_4\overline{A}_2'$	$T_2''T_4\overline{A}_2''$	$T_3T_4\overline{A}_2'''$
$T_2C_2A_2$	$T_2'C_2'A_2'$	$T_2''C_2''A_2''$	$T_3C_2'''A_2'''$
$T_2C_2\overline{A}_2$	$T_2'C_2'\overline{A}_2'$	$T_2''C_2''\overline{A}_2''$	$T_3C_2'''\overline{A}_2'''$
$T_3T_4\overline{B}_1$	$T_2T_4\overline{B}_1'$	$T_2'T_4\overline{B}_1''$	$T_2''T_4\overline{B}_1'''$
$T_3C_2B_1$	$T_2C_2'B_1'$	$T_2'C_2''B_1''$	$T_2''C_2'''B_1'''$
$T_3C_2\overline{B}_1$	$T_2C_2'\overline{B}_1'$	$T_2'C_2''\overline{B}_1''$	$T_2''C_2'''\overline{B}_1'''$
$T_4\overline{A}_2\overline{B}_1$	$T_4\overline{A}_2'\overline{B}_1'$	$T_4\overline{A}_2''\overline{B}_1''$	$T_4\overline{A}_2'''\overline{B}_1'''$
$C_2A_2B_1$	$C_2'A_2'B_1'$	$C_2''A_2''B_1''$	$C_2'''A_2'''B_1'''$
$C_2\overline{A}_2\overline{B}_1$	$C_2'\overline{A}_2'\overline{B}_1'$	$C_2''\overline{A}_2''\overline{B}_1''$	$C_2'''\overline{A}_2'''\overline{B}_1'''$

Напомним, что лемма 3 из § 5 и лемма 4 из § 6 утверждают, что многогранники $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ не имеют самопересечений. Сейчас мы обращаем внимание читателя на то, что без каких-либо дополнительных вычислений можно утверждать, что для всех t, достаточно близких к нулю, многогранники $\mathscr{M}(t)$ и $\mathscr{P}(t)$ тоже не имеют самопересечений. Это следует из того, что все определители (3), (4), которые мы вычисляли по ходу доказательств лемм 3 и 4, были отличны от нуля. Значит, они отличны от нуля и для всех t, достаточно близких к нулю. Фиксировав любое из таких t и повторяя доказательства лемм 3 и 4 применительно к многогранникам $\mathscr{M}(t)$ и $\mathscr{P}(t)$, приходим к выводу, что каждый из них не имеет самопересечений.

§ 7. 1-параметрическое изгибание $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_\tau$ многогранника $\mathscr{P}$

Определим 1-параметрическое семейство $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}}$ равенством $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau) = \mathscr{P}(\tau,\tau,\tau,\tau)$.

Очевидно, $\widetilde{\mathscr{P}}(0) = \mathscr{P}$ и для всех τ многогранник $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ инвариантен относительно поворота $K:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ вокруг оси z на 90° (напомним, что этому повороту соответствует матрица (5)). Кроме того, без ограничения общности можно считать, что при $\tau=0$ точка $C_2(\tau)$ имеет скорость $(0,0,1)$. Вершины многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ мы обозначаем по аналогии с соответствующими вершинами многогранника $\mathscr{P}$. Например, вершины $C_2(\tau)$ и $A_2'''(\tau)$ многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ соответствуют вершинам $C_2=C_2(0)$ и $A_2'''=A_2'''(0)$ многогранника $\mathscr{P}$.

Основной результат § 7 состоит в том, что построенное таким образом семейство $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}}$ является 1-параметрическим изгибанием многогранника $\mathscr{P}$, для которого ни один двугранный угол многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$, не остается постоянным ни на каком подынтервале интервала $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ изменения параметра τ, если только (α,β) достаточно мал. Чтобы убедиться в этом, нам придется различать следующие случаи в зависимости от того, как устроен двугранный угол многогранника $\mathscr{P}$, соответствующий двугранному углу многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$:

- в ребре двугранного угла сходятся две грани какого-то одного из октаэдров Брикара, использованного при построении многогранников $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ (этому случаю соответствует лемма 5);
- в ребре двугранного угла сходятся грани двух разных октаэдров Брикара, использованных при построении многогранников $\mathscr{M}$ и $\mathscr{P}$ (этому случаю соответствуют леммы 6 и 7).

Лемма 5. *Двугранный угол при ребре $A_2(\tau)T_1(\tau)\equiv A_2(\tau)T_1$ многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянен как функция от τ ни на каком подынтервале интервала $(\alpha,\beta)\subset\mathbb{R}$ изменения параметра τ.*

Доказательство. В многограннике $\mathscr{P}$ ребро A_2T_1 инцидентно граням $A_2B_1T_1$ и $A_2B_2T_1$. Обе эти грани принадлежат октаэдру Брикара $\mathscr{B}$, который участвовал в построении модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$, который, в свою очередь, был использован для построения многогранника $\mathscr{P}$ (см. § 2–4, 6). Изгибание $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)}$ многогранника $\mathscr{P}$ очевидным образом порождает изгибание $\{\mathscr{B}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)}$ октаэдра Брикара $\mathscr{B}$ (ведь все вершины октаэдра $\mathscr{B}(\tau)$ лежат на многограннике $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ и движутся в соответствии с его изгибанием, длина каждого ребра октаэдра $\mathscr{B}(\tau)$ не зависит от τ, а длина диагонали $C_2(\tau)T_1$ октаэдра $\mathscr{B}(\tau)$ заведомо не постоянна как функция от τ ни на каком открытом интервале). Согласно лемме 1 в процессе изгибания октаэдра Брикара $\mathscr{B}$ величина каждого его двугранного угла не остается постоянной. Значит, ни на каком открытом интервале из области определения параметра τ не постоянна и величина двугранного угла при ребре $A_2(\tau)T_1$, рассматриваемом хоть как двугранный угол октаэдра Брикара $\mathscr{B}(\tau)$, хоть как двугранный угол многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$. $\square$

Отметим, что в лемме 5 ребро $A_2(\tau)T_1$ можно заменить любым ребром многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$, которое инцидентно двум граням любого из октаэдров Брикара, участвующего в построении многогранника $\mathscr{P}$ (т. е. октаэдров Брикара $\mathscr{B}$ и $\overline{\mathscr{B}}$ в обозначениях § 3, а также их образов при поворотах K, K^2 и K^3).

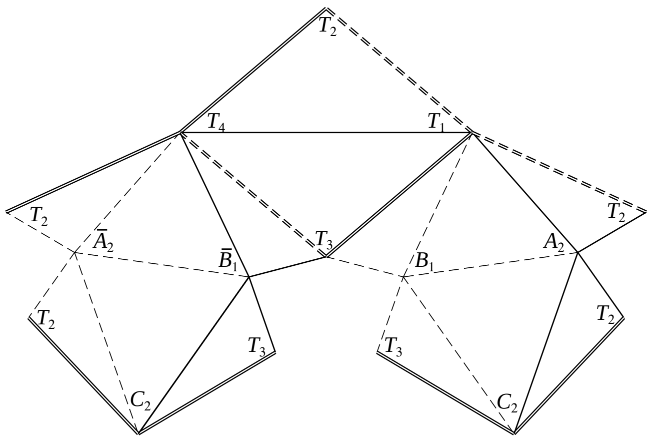

Рис. 8. Развертка модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$. По сравнению с рис. 4 некоторые ребра изображены двойными линиями (сплошными или пунктирными). Это в точности те ребра, к которым не применимы рассуждения леммы 5. Непостоянство двугранных углов при них следует из лемм 6 и 7. К ребрам, изображенным одинарными линиями (сплошными или пунктирными), применимы рассуждения леммы 5.

Всего таких ребер 7 на каждой из частей многогранника $\mathscr{P}$, соответствующих одному октаэдру Брикара. На рис. 8 они изображены одинарными линиями (сплошными или пунктирными). А значит, на всем многограннике $\mathscr{P}$ таких ребер 56. Каждая строка табл. 3, целиком состоящая из таких ребер, заканчивается цифрой 5. Так мы отмечаем тот факт, что непостоянство двугранных углов при ребрах из этой строки следует из доказательства леммы 5. Аналогично цифрами 6 и 7 в последней колонке мы отмечаем те строки таблицы 3, для которых непостоянство двугранных углов при ребрах из этих строк следует из доказательств лемм 6 и 7 соответственно. На рис. 8 они изображены двойными линиями (сплошными или пунктирными).

Итак, про 56 ребер мы уже знаем, что двугранные углы при них не остаются постоянными в процессе 1-параметрического изгибания многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$. Изучению оставшихся 16 двугранных углов посвящены леммы 6 и 7. Но прежде чем сформулировать и доказать их, нам надо проделать подготовительную работу.

Пусть даны точки $\mathbf{p}_j(\tau)$, $j = 1, 2, 3, 4$, которые изменяют свое положение в пространстве таким образом, что расстояние между любыми двумя из них, кроме, быть может, $\mathbf{p}_3(\tau)$ и $\mathbf{p}_4(\tau)$, не зависит от $\tau \in \mathbb{R}$. Тогда, как известно (см., например, [22, разд. 3.2]), их скорости $\mathbf{v}_j(\tau)$ удовлетворяют соотношениям

$$(\mathbf{p}_j(\tau) - \mathbf{p}_k(\tau)) \cdot (\mathbf{v}_j(\tau) - \mathbf{v}_k(\tau)) = 0, \quad j, k = 1, 2, 3, 4;\ \{j, k\} \neq \{3, 4\}, \tag{6}$$

где $\cdot$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^3$. При этом легко понять, что если справедливо неравенство

$$(\mathbf{p}_3(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_3(0) - \mathbf{v}_4(0)) \neq 0, \tag{7}$$

то производная величины двугранного угла между треугольниками $\mathbf{p}_1(\tau)$, $\mathbf{p}_2(\tau)$, $\mathbf{p}_3(\tau)$ и $\mathbf{p}_1(\tau)$, $\mathbf{p}_2(\tau)$, $\mathbf{p}_4(\tau)$, вычисленная при $\tau = 0$, не равна нулю. Следовательно, найдется достаточно малый интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$, содержащий число 0 и такой, что величина указанного двугранного угла не постоянна как функция от τ ни в каком открытом подынтервале интервала (α, β). На этом и основано доказательство следующей леммы.

Лемма 6. *Двугранные углы при ребрах $C_2(\tau)T_2(\tau) \equiv C_2(\tau)T_2$ и $C_2(\tau)T_3(\tau) \equiv C_2(\tau)T_3$ многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянны как функции от τ ни в каком подынтервале интервала $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ изменения параметра τ, если только (α, β) достаточно мал и содержит* 0.

Доказательство. Положим по определению $\mathbf{p}_1(\tau) = C_2(\tau)$, $\mathbf{p}_2(\tau) \equiv T_2$, $\mathbf{p}_3(\tau) = A_2(\tau)$, $\mathbf{p}_4(\tau) = \overline{A}_2(\tau)$, $\mathbf{p}_5(\tau) \equiv T_1$, $\mathbf{p}_6(\tau) \equiv T_4$, а скорости этих точек обозначим через $\mathbf{v}_j(\tau)$, $j = 1, \dots, 6$. Для доказательства утверждения леммы 6 достаточно доказать неравенство (7) при $\tau = 0$. Мы делаем это с помощью символьных вычислений в *Mathematica*.

Координаты точек $\mathbf{p}_1(0) = C_2$, $\mathbf{p}_2(0) = T_2$, $\mathbf{p}_3(0) = A_2$, $\mathbf{p}_4(0) = \overline{A}_2$, $\mathbf{p}_5(0) = T_1$ и $\mathbf{p}_6(0) = T_4$ в радикалах берем из табл. 1. При этом векторы скорости $\mathbf{v}_1(0) = (0, 0, 1)$ и $\mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_5(0) = \mathbf{v}_6(0) = (0, 0, 0)$ нам известны по построению.

Компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_3(0)$ должны удовлетворять следующей системе линейных алгебраических уравнений, каждое из которых аналогично уравнению (6):

$$\begin{cases} (\mathbf{p}_1(0) - \mathbf{p}_3(0)) \cdot (\mathbf{v}_1(0) - \mathbf{v}_3(0)) = 0, \\ (\mathbf{p}_2(0) - \mathbf{p}_3(0)) \cdot (\mathbf{v}_2(0) - \mathbf{v}_3(0)) = 0, \\ (\mathbf{p}_5(0) - \mathbf{p}_3(0)) \cdot (\mathbf{v}_5(0) - \mathbf{v}_3(0)) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решая (8) с помощью *Mathematica*, находим значения компонент вектора $\mathbf{v}_3(0)$ в радикалах. Однако они оказались слишком длинными, чтобы мы могли привести их здесь. Поэтому приводим только их приближенные численные значения: $\mathbf{v}_3(0) \approx (-0.4602, -0.1074, -0.0914)$, где все знаки после запятой верные (т. е. мы не применяли правил округления).

Аналогично компоненты вектора скорости $\mathbf{v}_4(0)$ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{p}_1(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_1(0) - \mathbf{v}_4(0)) = 0, \\ (\mathbf{p}_2(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_2(0) - \mathbf{v}_4(0)) = 0, \\ (\mathbf{p}_6(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_6(0) - \mathbf{v}_4(0)) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Решая (9) с помощью *Mathematica*, находим значения координат вектора $\mathbf{v}_4(0)$ в радикалах. Выражение опять оказалось слишком длинным, чтобы мы могли привести его здесь. Поэтому ограничимся указанием только приближенных численных значений: $\mathbf{v}_4(0) \approx (-0.0470, -0.0004, 0.0004)$.

Наконец, с помощью *Mathematica* вычисляем выражение

$$(\mathbf{p}_3(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_3(0) - \mathbf{v}_4(0)). \tag{10}$$

Результат, записанный в радикалах, является слишком длинным, чтобы его можно было привести здесь; но опять же с помощью *Mathematica* убеждаемся, что он отличен от нуля в соответствующем расширении поля рациональных чисел. Численное значение выражения (10) равно -0.5253; это дает дополнительную уверенность в адекватности наших символьных вычислений. Тем самым утверждение леммы 6 о непостоянстве двугранного угла при ребре $C_2(\tau)T_2$ многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ доказано.

Утверждение леммы 6 о непостоянстве двугранного угла при ребре $C_2(\tau)T_3$ многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ может быть доказано так же, как только что доказали аналогичное утверждение для угла при ребре $C_2(\tau)T_2$. Но мы предпочитаем избежать этих дополнительных вычислений, заметив, что при повороте L, определенном в формулировке леммы 2, многогранник $\mathscr{P}$ переходит в себя. Чтобы изложить это рассуждение более подробно, введем обозначения $\mathbf{q}_1(\tau) = C_2(\tau)$, $\mathbf{q}_2(\tau) \equiv T_3$, $\mathbf{q}_3(\tau) = \overline{B}_1(\tau)$, $\mathbf{q}_4(\tau) = B_1(\tau)$, $\mathbf{q}_5(\tau) \equiv T_4$, $\mathbf{q}_6(\tau) \equiv T_1$. Скорость точки $\mathbf{q}_j(\tau)$, $j = 1, \dots, 6$, обозначим через $\mathbf{w}_j(\tau)$. Из леммы 2 следует, что $L(\mathbf{q}_j(0)) = \mathbf{p}_j(0)$ для всех $j = 1, \dots, 6$. Этот факт мы уже отразили в табл. 1. Поскольку мы изначально знаем, что $\mathbf{w}_1(0) = (0, 0, 1)$ и $\mathbf{w}_2(0) = \mathbf{w}_5(0) = \mathbf{w}_6(0) = (0, 0, 0)$, то, написав по аналогии с (8) и (9) уравнения для нахождения $\mathbf{w}_3(0)$ и $\mathbf{w}_4(0)$, приходим к соотношениям $L(\mathbf{w}_j(0)) = -\mathbf{v}_j(0)$, $j = 1, \dots, 6$. Значит, $(\mathbf{q}_3(0) - \mathbf{q}_4(0)) \cdot (\mathbf{w}_3(0) - \mathbf{w}_4(0)) = -(\mathbf{p}_3(0) - \mathbf{p}_4(0)) \cdot (\mathbf{v}_3(0) - \mathbf{v}_4(0)) \neq 0$. Как мы уже знаем, из этого неравенства следует, что двугранный угол при ребре $C_2(\tau)T_3$ непостоянен. $\square$

Отметим, что в лемме 6 ребра C_2T_2 и C_2T_3 можно заменить их образами под действием поворотов K, K^2 и K^3. Значит, лемма 6 гарантирует, что восемь двугранных углов многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не являются постоянными ни на каком подынтервале интервала (α, β) при условии, что последний интервал достаточно мал и содержит 0. Этот факт отражен в правой колонке табл. 3.

Лемма 7. *Двугранные углы при ребрах T_1T_3 и T_2T_4 многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянны как функции от τ ни в каком подынтервале интервала $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ изменения параметра τ, если только (α, β) достаточно мал и содержит* 0.

Доказательство. Лемма 7 может быть доказана аналогично лемме 6. Оставляем это доказательство читателю. $\square$

Отметим, что в лемме 7 ребра T_1T_3 и T_2T_4 можно заменить их образами под действием поворотов K, K^2 и K^3. Значит, лемма 7 гарантирует, что восемь двугранных углов многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянны как функции параметра τ.

Тем самым из лемм 5, 6 и 7, следует, что все 72 двугранных угла многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянны как функции от τ.

§ 8. Доказательство теоремы 1 и заключительные замечания

Все составляющие доказательства теоремы 1 уже появлялись в предыдущих параграфах. Нам осталось собрать их вместе.

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}$ — многогранник, построенный в § 6. Согласно лемме 4 $\mathscr{P}$ не имеет самопересечений, гомеоморфен сфере, имеет только треугольные грани и является изгибаемым. Значит, для него выполнено утверждение (i) теоремы 1.

В § 7 построено 1-параметрическое изгибание $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)}$ многогранника $\mathscr{P}$. Уменьшая, если нужно, интервал (α,β) и пользуясь леммами 5, 6 и 7, заключаем, что ни один из двугранных углов многогранника $\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)$ не постоянен как функция от τ ни в каком подынтервале интервала (α,β). Значит, для 1-параметрического изгибания $\{\widetilde{\mathscr{P}}(\tau)\}_{\tau\in(\alpha,\beta)}$ многогранника $\mathscr{P}$ выполнено утверждение (ii) теоремы 1. $\square$

Сформулируем две открытые проблемы, тесно связанные с проблемой 1.

Следующая проблема представляет собой усиленный вариант проблемы 1.

Проблема 2. *Существует ли замкнутый* 1*-параметрический изгибаемый многогранник в* $\mathbb{R}^3$*, не имеющий самопересечений и такой, что при его изгибании изменяются все двугранные углы?*

Очевидно, что утверждение «малая диагональ AB многогранника $\mathscr{R}$ не изменяется в процессе изгибания» эквивалентно утверждению «двугранный угол при общем ребре тех двух граней многогранника $\mathscr{R}$, которые содержат A и B, не изменяется в процессе изгибания». Поэтому следующая проблема 3 является обобщением проблемы 1.

Проблема 3. *Существует ли замкнутый изгибаемый многогранник в* $\mathbb{R}^3$*, не имеющий самопересечений и такой, что при его изгибании изменяются длины всех его диагоналей?*

Примеры показывают нетривиальность проблемы 3. В самом деле, у изгибаемых октаэдров Брикара есть самопересечения и нет диагоналей, длины которых не меняются в процессе изгибания (см. лемму 1). А у изгибаемого многогранника Штеффена $\mathscr{S}$, модифицированного многогранника Штеффена $\mathscr{M}$ и изгибаемого многогранника $\mathscr{P}$, построенного в § 6, нет самопересечений, но есть диагонали, длины которых не меняются в процессе изгибания (а именно, T_2T_3 для многогранников $\mathscr{S}$ и $\mathscr{M}$ и, например, T_1T_4 и T_2T_3 для многогранника $\mathscr{P}$).

Отметим, что проблему 3 можно рассматривать как частный случай проблемы о том, длины каких диагоналей изгибаемого многогранника нужно зафиксировать, чтобы он перестал быть изгибаемым. Различные аспекты последней проблемы изучались, например, в [23–25].

Отметим также, что аналоги проблем 1–3 можно ставить не только в $\mathbb{R}^3$, но и в любом пространстве постоянной кривизны размерности ≥ 3, а также в пространствах с индефинитной метрикой.

В завершение уточним, что все символьные вычисления, проделанные при подготовке этой статьи, выполнены с помощью компьютерной системы *Mathematica* 12.1 [15], лицензия 3322–8225.

Благодарности. Авторы благодарят А. А. Гайфуллина, Н. П. Долбилина и И. Х. Сабитова за интерес к этой работе, а также критику и полезные рекомендации по улучшению текста первоначальной версии этой статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bricard R.* Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // J. de Math. Sér. 5. 1897. V. 3. P. 113–148.

2. *Lebesgue H.* Octaèdres articulés de Bricard // Enseign. Math. Sér. 2. 1967. V. 13. P. 175–185.
3. *Alexandrov V.* The Dehn invariants of the Bricard octahedra // J. Geom. 2010. V. 99. P. 1–13.
4. *Gallet M., Grasegger G., Legerský J., Schicho J.* Combinatorics of Bricard's octahedra // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2021. V. 359, N 1. P. 7–38.
5. *Михалев С. Н.* Метрическое описание изгибаемых октаэдров // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 7. С. 60–90.
6. *Connelly R.* A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra // Publ. Math. Inst. Hautes Étud. Sci. 1977. V. 47. P. 333–338.
7. *Alexander R.* Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I // Trans. Am. Math. Soc. 1985. V. 288, N 2. P. 661–678.
8. *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция его метрики // Фундам. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.
9. *Connelly R., Sabitov I., Walz A.* The Bellows conjecture // Beitr. Algebra Geom. 1997. V. 38, N 1. P. 1–10.
10. *Sabitov I. Kh.* The volume as a metric invariant of polyhedra // Discrete Comput. Geom. 1998. V. 20, N 4. P. 405–425.
11. *Gaifullin A. A.* Flexible polyhedra and their volumes // V. Mehrmann (ed.) et al. European congress of mathematics. Proceedings of the 7th ECM, Berlin, Germany, July 18–22, 2016. Zürich: European Mathematical Society, 2018. P. 63–83.
12. *Гайфуллин А. А., Игнащенко Л. С.* Инвариант Дена и равносоставленность изгибаемых многогранников // Тр. МИАН. 2018. Т. 302. С. 143–160.
13. *Штогрин М. И.* Об изгибаемых полиэдральных поверхностях // Тр. МИАН. 2015. Т. 288. С. 171–183.
14. *Заславский О. А.* Диагонали изгибаемых многогранников: дипломная работа. М.: МГУ, 2019.
15. *Wolfram S.* The Mathematica book. Version 4. 4th ed.. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1999.
16. *Clinch K., Nixon A., Schulze B., Whiteley W.* Pairing symmetries for Euclidean and spherical frameworks // Discrete Comput. Geom. 2020. V. 64, N 2. P. 483–518.
17. *Gilbert E. G., Johnson D. W., Keerthi S. S.* A fast procedure for computing the distance between complex objects in three-dimensional space // IEEE J. Robotics and Automation. 1988. V. 4, N 2. P. 193–203.
18. *Glaeser G., Stachel H.* Open geometry: OpenGL + advanced geometry.. Berlin: Springer, 1999.
19. *Ericson Ch.* Real-time collision detection. San Francisco: Morgan Kaufmann Publ., 2005.
20. *Jiménez J. J., Segura R. J., Feito F. R.* A robust segment/triangle intersection algorithm for interference tests. Efficiency study // Comput. Geom. 2010. V. 43, N 5. P. 474–492.
21. *Mount D. M.* Geometric intersection // C. D. Toth (ed.) et al. Handbook of discrete and computational geometry. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press, 2017. P. 1113–1134.
22. *Connelly R., Guest S. D.* Frameworks, tensegrities, and symmetry. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2022.
23. *Максимов И. Г., Сабитов И. Х.* О понятии комбинаторной p-параметричности многогранников // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.
24. *Sabitov I. Kh.* On polyhedra with calculable diagonals // Rend. Circ. Mat. Palermo (2). Suppl. 2002. V. 70. P. 289–294.
25. *Сабитов И. Х.* Алгебраические методы решения многогранников // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 3. С. 3–66.

Поступила в редакцию 19 июня 2024 г.
После доработки 16 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Александров Виктор Алексеевич (ORCID 0000-0002-6622-8214)
Волокитин Евгений Павлович (ORCID 0000-0002-2646-7800)
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
alex@math.nsc.ru, volok@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 512.542

О ФОРМАЦИЯХ КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП СО СВОЙСТВОМ $\mathscr{P}_2$

С. В. Балычев, А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы конечных групп. Говорят, что класс $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathscr{P}_2$ *для* $\mathfrak{X}$, если всякая $\mathfrak{X}$-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$ таких, что для любых $1 \leq i < j \leq n$ группа A_iA_j принадлежит $\mathfrak{F}$. В работе описаны все Z-насыщенные s_F-замкнутые формации и формации Фишера разрешимых групп, обладающие свойством $\mathscr{P}_2$. В частности, множество всех таких формаций совпадает с множеством наследственных формаций Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп. Описаны наследственные насыщенные формации $\mathfrak{X}$, у которых любая насыщенная подформация обладает свойством $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{X}$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.604

Ключевые слова: конечная группа, произведение групп, формация со свойством $\mathscr{P}_2$, формация Шеметкова, формация Фишера, Z-насыщенная формация.

Введение и основные результаты

В дальнейшем рассматриваются только конечные группы. Напомним, что группа G является произведением своих попарно перестановочных подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$, если $G = A_1A_2 \cdots A_n$ и $A_iA_j = A_jA_i$ для любых пар чисел $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Исследования групп с такой факторизацией восходят к классическим работам Ф. Холла, С. А. Чунихина, Хупперта, Виландта, Кегеля, М. И. Каргаполова, Л. А. Шеметкова, Бейдлемана, Хайнекена, Л. С. Казарина. Некоторые результаты в этом направлении, полученные до 2010 г., отражены в монографии [1].

Новый этап в исследовании групп с данной факторизацией начался с выходом работы [2] Б. Амберга, Л.С. Казарина и Б. Хефлинга. Они предложили следующее

Определение 1. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — классы групп и k — натуральное число. Говорят, что класс $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathscr{P}_k$ *для* $\mathfrak{X}$*-групп*, если $\mathfrak{X}$-группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ в том случае, когда G может быть записана в виде произведения n подгрупп $A_1, A_2, \dots, A_n$ таких, что для каждого выбора индексов $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n$ группа $A_{i_1} \cdots A_{i_k}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если $\mathfrak{X}$ совпадает с классом всех групп, то в дальнейшем будем просто говорить, что *класс* $\mathfrak{F}$ *имеет свойство* $\mathscr{P}_k$.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (грант № 20211750 «Конвергенция–2025»).

В [2] были полностью описаны все разрешимые наследственные классы и насыщенные классы групп, имеющие свойство $\mathscr{P}_1$ для разрешимых групп, а также приведены серии формаций со свойством $\mathscr{P}_1$. Возникает естественная задача классификации (перечисления) всех формаций $\mathfrak{F}$, имеющих свойство $\mathscr{P}_2$ (задача Амберга — Казарина — Хефлинга $\mathscr{P}_2$). Отметим, что всякая формация со свойством $\mathscr{P}_1$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$. Пример формации всех нильпотентных групп показывает, что обратное утверждение неверно.

Формации со свойством $\mathscr{P}_2$ тесно связаны с формациями со свойством Кегеля. Напомним [3] (см. также [4, с. 283, 284]), что формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство Кегеля, если $\mathfrak{F}$ содержит всякую группу $G = AB = BC = CA$, у которой $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{F}$ и $C \in \mathfrak{F}$. Известно, что формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп (Кегель [5]) и $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп (Л. С. Казарин [6]) обладают свойством Кегеля. Исследованию формаций со свойством Кегеля посвящены работы [3, 5–10].

Ввиду [2, лемма 2.2] имеет место следующее включение:

$$\{\text{формации со свойством Кегеля }\} \subseteq \{\text{формации со свойством } \mathscr{P}_2\}.$$

В [11] было получено конструктивное описание всех разрешимых наследственных насыщенных формаций со свойством $\mathscr{P}_2$.

В настоящей работе мы рассматриваем разрешимые формации со свойством $\mathscr{P}_2$, которые необязательно являются наследственными или насыщенными. Напомним [12, IX, предложение 3.5(c)], что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *s_F-замкнутым*, если из $G \in \mathfrak{F}$ и $H^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq G$ следует, что $H \in \mathfrak{F}$. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — s_F-замкнутая формация разрешимых групп такая, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством Кегеля;*

(2) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$;*

(3) *$\mathfrak{F}$ — наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$;*

(4) *$\mathfrak{F}$ имеет полное наследственное локальное задание f такое, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.*

Замечание 1. Существуют примеры ненаследственных насыщенных формаций Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп, которые не обладают свойством $\mathscr{P}_2$ (см. пример 1).

В 1999 г. А. Ф. Васильев поместил в Коуровскую тетрадь [13] под номером 14.28 вопрос: «Пусть $\mathfrak{F}$ — разрешимая формация Фиттинга групп со свойством Кегеля. Является ли $\mathfrak{F}$ насыщенной формацией?» Этот вопрос до сих пор открыт. Частичный ответ был получен в работе [9]. Аналогичный вопрос можно сформулировать для разрешимых формаций Фиттинга со свойством $\mathscr{P}_2$.

Класс Фиттинга называется *классом Фишера* [12, IX, определение 3.3(a)], если он s_F-замкнут. Формация $\mathfrak{F}$, одновременно являющаяся классом Фишера, называется *формацией Фишера*. Изучение и применение формаций Фишера как важного самостоятельного объекта исследований инициировано работой [14].

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация Фишера разрешимых групп. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством Кегеля;*

(2) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$;*

(3) *$\mathfrak{F}$ — наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$;*

(4) *$\mathfrak{F}$ имеет полное наследственное локальное задание f такое, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.*

Замечание 2. Существуют ненасыщенные (и, следовательно, ненаследственные по теореме Брайса — Косси [12, XI, теорема 1.1]) формации Фишера разрешимых групп (см. пример 2).

Напомним [15, разд. 12.7], что главный фактор H/K группы G называется $\mathfrak{F}$-*центральным*, если $(H/K) \rtimes (G/C_G(H/K)) \in \mathfrak{F}$. Согласно [10, 16] формация $\mathfrak{F}$ называется Z-*насыщенной*, если она содержит всякую группу, все главные факторы которой $\mathfrak{F}$-центральны. Изучению таких формаций и их приложений посвящены, например, работы [10, 16–19]. Отметим, что в работе [19] Л. А. Шеметков поставил задачу изучения Z-насыщенных формаций. В рамках этой задачи в данной статье мы будем изучать Z-насыщенные формации разрешимых групп, обладающие свойством $\mathscr{P}_2$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная s_F-замкнутая формация разрешимых групп. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством Кегеля;*

(2) *$\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$;*

(3) *$\mathfrak{F}$ — наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$;*

(4) *$\mathfrak{F}$ имеет полное наследственное локальное задание f такое, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$, если $p \in \pi(\mathfrak{F})$, и $f(p) = \varnothing$, если $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{F})$.*

Замечание 3. Согласно полученным результатам список разрешимых формаций, обладающих свойством $\mathscr{P}_2$, достаточно короток. Многие известные разрешимые формации не обладают свойством $\mathscr{P}_2$. Например, такими являются формации всех сверхразрешимых групп, всех групп с нильпотентным коммутантом и др. Ввиду [16, теорема 6] формация всех разрешимых групп, ранги главных факторов которых не превосходят 2, является ненасыщенной наследственной Z-насыщенной формацией разрешимых групп. В частности, она s_F-замкнута. По следствию 2 она не обладает свойством $\mathscr{P}_2$.

Представляет интерес изучение формаций $\mathfrak{F}$, имеющих свойство $\mathscr{P}_2$ для групп формации $\mathfrak{X}$.

Лемма 1. *Если формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для групп формации $\mathfrak{Y}$ и формация $\mathfrak{Y}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для групп формации $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для групп формации $\mathfrak{X}$.*

Отметим, что формация $\mathfrak{F}$ всегда имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{F}$. Естественно изучать формации $\mathfrak{F}$, не обладающие свойством $\mathscr{P}_2$ ни для какой своей наследственной насыщенной надформации.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — наследственная формация разрешимых групп, у которой любая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа является нециклической и $\mathfrak{N}\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{N}\mathfrak{H}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$.*

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть n — натуральное число, $n > 1$ и $\mathfrak{N}^n \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{N}^n$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}^n$.*

(2) *Пусть $\mathfrak{N}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{X}$. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.*

Интерес представляют также формации $\mathfrak{F}$, в которых всякая наследственная насыщенная подформация обладает свойством $\mathscr{P}_2$.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{X}$ — наследственная насыщенная формация. Тогда и только тогда любая наследственная насыщенная подформация формации $\mathfrak{X}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ для $\mathfrak{X}$, когда $\mathfrak{X}$ состоит из групп, имеющих нильпотентный коммутант.*

1. Предварительные результаты

В работе используются стандартные обозначения и определения. Необходимые сведения из теории групп и теории формаций можно найти в монографии [12]. Через $|G|$ обозначается порядок G; $\pi(G)$ — множество всех различных простых делителей $|G|$; $\pi(\mathfrak{X}) = \bigcup\limits_{G\in\mathfrak{X}} \pi(G)$, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп. Через $\mathbb{P}$ обозначается множество всех простых чисел, π — подмножество из $\mathbb{P}$, $\pi' = \mathbb{P}\setminus\pi$. Z_n — циклическая группа порядка n, $E(n|p)$ — группа, имеющая единственную минимальную нормальную самоцентрализуемую p-подгруппу, факторгруппа по которой изоморфна Z_n, где $(n,p) = 1$ (эта группа существует и единственна с точностью до изоморфизма по [12, B, теорема 12.4]). $\mathfrak{X}^S$ — класс групп, все подгруппы которых принадлежат классу групп $\mathfrak{X}$.

Формация — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если $G \in \mathfrak{F}$ всякий раз, когда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

Наименьшая нормальная подгруппа N группы G, для которой $G/N \in \mathfrak{F}$, называется $\mathfrak{F}$-*корадикалом* G и обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$. Для формаций $\mathfrak{F},\mathfrak{H} \neq \varnothing$ через $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ обозначается класс групп $(G \mid G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F})$, являющийся формацией.

Класс групп называется (нормально) *наследственным*, если всякая (нормальная) подгруппа $\mathfrak{F}$-группы принадлежит $\mathfrak{F}$.

Класс Фиттинга — это нормально наследственный класс групп, замкнутый относительно взятия произведений нормальных подгрупп. Если класс групп является классом Фиттинга и формацией, то он называется *формацией Фиттинга.*

Напомним, что группа $G \notin \mathfrak{F}$ называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. Минимальная ненильпотентная группа называется *группой Шмидта.* Данные группы бипримарны и имеют нормальную силовскую подгруппу. (p,q)-*Группой Шмидта* называется $\{p,q\}$-группа Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой.

Согласно [3] (см. также [20, с. 123]) формация $\mathfrak{F}$ называется *формацией Шеметкова* в классе групп $\mathfrak{X}$, если каждая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа из $\mathfrak{X}$ является или группой Шмидта, или циклической группой простого порядка. Нам потребуются следующие два результата, дающие конструктивное описание разрешимых наследственных формаций Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп.

Теорема 4 [21]. *Всякая разрешимая наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ является насыщенной.*

Теорема 5 [22; 20, теорема 3.5.6]. *Если $\mathfrak{F}$ — разрешимая локальная наследственная формация, то $\mathfrak{F}$ является формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}$ имеет локальное задание f такое, что $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$ для каждого $p \in \pi(\mathfrak{F})$.*

2. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1 опирается на следующие леммы.

Лемма 2. *Если (p,q)-группа Шмидта и группа порядка p принадлежат формации $\mathfrak{F}$, то и всякая группа $G = PQ$, где P — элементарная абелева нормальная p-группа и Q — группа порядка q, принадлежит формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая (p,q)-группу Шмидта, то (p,q)-группа Шмидта с единичной подгруппой Фраттини и группа порядка q принадлежат $\mathfrak{F}$. Следовательно, и циклическая группа порядка pq принадлежит $\mathfrak{F}$. Напомним, что все (p,q)-группы Шмидта с единичной подгруппой Фраттини изоморфны.

Пусть группа $G = PQ$, где P — элементарная абелева нормальная p-группа и Q — группа порядка q. Тогда P — прямое произведение минимальных нормальных подгрупп $P_1, \dots, P_n$ группы G по [12, A, теорема 11.6]. Пусть $N_i = \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} P_j$. Тогда G/N_i имеет силовскую q-подгруппу простого порядка, а силовская p-подгруппа G/N_i является минимальной нормальной подгруппой и элементарная абелева. Следовательно, G/N_i является или (p,q)-группой Шмидта с единичной подгруппой Фраттини, или циклической группой порядка pq. Итак, $G/N_i \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \simeq G/1 = G/\bigcap\limits_{i=1}^{n} N_i \in \mathfrak{F}$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — s_F-замкнутая формация такая, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ обладает $\mathscr{P}_2$, то $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа.

Вначале предположим, что G нильпотентна. Из $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ получаем, что G является группой простого порядка p, где $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.

Пусть G ненильпотентна и $M/\Phi(G)$ — дополнение $\mathrm{F}(G/\Phi(G)) = \mathrm{F}(G)/\Phi(G)$ в $G/\Phi(G)$. Вначале допустим, что $M/\Phi(G)$ не является циклической примарной группой. Тогда и M не является циклической примарной группой. Поэтому в M имеется по крайней мере две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2. Значит, $M = H_1H_2$. Рассмотрим подгруппы $\mathrm{F}(G), H_1, H_2$. Из того, что все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, нетрудно видеть, что $\mathrm{F}(G), H_1, H_2$ являются попарно перестановочными $\mathfrak{F}$-подгруппами и $G = \mathrm{F}(G)H_1H_2$. Ввиду того, что $\mathrm{F}(G)\cap H_i = \Phi(G)$, подгруппы $\mathrm{F}(G)H_1, \mathrm{F}(G)H_2, H_1H_2$ собственные. Следовательно, они принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, получаем $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G.

Итак, $G/\mathrm{F}(G)$ — циклическая примарная группа. Можем считать, что $G/\mathrm{F}(G)$ — q-группа. Предположим, что $r, p \in \pi(\mathrm{F}(G)) \setminus \{q\}$. Тогда силовские p-подгруппа P и r-подгруппа R нормальны в G. В частности, для каждой из этих подгрупп найдется добавление в G, являющееся собственной подгруппой. Ввиду того, что G — минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа, $G/P, G/R \in \mathfrak{F}$. Итак, $G/(P\cap R) \simeq G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Стало быть, G — бипримарная группа. Пусть $\pi(G) = \{p, q\}$. Значит, в G имеется нормальная силовская p-подгруппа.

Предположим, что G не является группой Шмидта. Так как G ненильпотентна и имеет нормальную силовскую p-подгруппу, в G есть собственная (p,q)-подгруппа Шмидта. Из того, что G — минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа, следует, что эта группа Шмидта принадлежит $\mathfrak{F}$.

Докажем, что всякая группа $H = PQ$, где P — нормальная силовская p-подгруппа H, а Q — q-группа простого порядка, принадлежит $\mathfrak{F}$. Предположим противное. Пусть группа H — контрпример наименьшего порядка. Ввиду леммы 2 P не является элементарной абелевой группой. Значит, P содержит минимальную нормальную подгруппу N группы H. По предположению $H/N \in \mathfrak{F}$. Пусть $B = P/N$, $C = QN/N \simeq Q$, $T = N \wr (H/N)$ и A — база регулярного сплетения T. Тогда $T = ABC$ — произведение попарно перестановочных подгрупп A, B, C. Заметим, что $AB \in \mathfrak{F}$ как p-группа, $BC \simeq H/N \in \mathfrak{F}$, $AC \in \mathfrak{F}$ по лемме 2. Так как $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, видим, что $T \in \mathfrak{F}$. Согласно [12, A, теорема 18.9] H изоморфна подгруппе H_1 группы T. Из того, что бипримарные группы T и H_1 имеют нормальные силовские p-подгруппы, следует, что $H_1^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq T$. Ввиду s_F-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ будет $H \simeq H_1 \in \mathfrak{F}$; противоречие.

Если силовская Q подгруппа группы G является группой простого порядка, то $G \in \mathfrak{F}$ по доказанному выше; противоречие с тем, что $G \notin \mathfrak{F}$. Пусть Q_1 — максимальная подгруппа группы Q и P — силовская подгруппа группы G. Тогда $PQ_1 \trianglelefteq G$ и $G/(PQ_1) \simeq Z_q$. Пусть $T = (PQ_1) \wr Z_q$, A и B — силовские p- и q-подгруппы базы T соответственно. Тогда $T = ABZ_q$ — произведение попарно перестановочных подгрупп A, B, Z_q. Заметим, что $BZ_q \in \mathfrak{F}$ как q-группа, $AB \in \mathfrak{F}$ как прямое произведение $\mathfrak{F}$-групп, изоморфных PQ_1, $AZ_q \in \mathfrak{F}$ по доказанному выше. Так как $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, видим, что $T \in \mathfrak{F}$. Согласно [12, A, теорема 18.9] G изоморфна подгруппе G_1 группы T. Из того, что бипримарные группы T и G_1 имеют нормальные силовские p-подгруппы, следует, что $G_1^{\mathfrak{N}} \trianglelefteq\trianglelefteq T$. Ввиду s_F-замкнутости формации $\mathfrak{F}$ будет $G \simeq G_1 \in \mathfrak{F}$; заключительное противоречие.

Итак, G является группой Шмидта. Значит, $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$. $\square$

Лемма 4. *Разрешимая s_F-замкнутая формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ является наследственной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — s_F-замкнутая формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп. Предположим, что $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{F}^S$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп, то и $\mathfrak{F}^S$ — наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп. Тогда $\mathfrak{F}^S$ является насыщенной формацией Фиттинга и по теореме 5 имеет полное наследственное локальное задание f такое, что $f(p) = \mathfrak{S}_{\pi(f(p))}$.

Рассмотрим группу G минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{F}^S$. Так как $\mathfrak{F}^S$ — насыщенная формация, $\Phi(G) = 1$ и G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Заметим, что N — p-группа для некоторого простого p, $C_G(N) = N$ и $G = NM$, где M — максимальная подгруппа группы G. Так как $\mathfrak{F}^S$ — формация Фиттинга, в G имеется единственная собственная максимальная нормальная подгруппа H. Заметим, что G/H — группа простого порядка q.

Если G — группа Шмидта, то все собственные ее подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}^S$. Значит, и $G \in \mathfrak{F}^S$; противоречие. Пусть S — подгруппа порядка q. Предположим, что $NS = G$. Тогда G — $\mathfrak{F}$-группа Шмидта; противоречие. Из s_F-замкнутости $\mathfrak{F}$ следует, что $NS \in \mathfrak{F}$. Из $|NS| < |G|$ вытекает, что $NS \in \mathfrak{F}^S$. Так как $C_G(N) = N$, то $q \in \pi(f(p))$.

Из $\mathrm{O}_{p'}(G) = 1$ следует, что $\mathrm{O}_{p'}(H) = 1$ и $\mathrm{O}_{p',p}(H) = N$. Тогда

$$H/N \simeq (H \cap NM)/N = (H \cap M)N/N \simeq H \cap M \in f(p).$$

Следовательно, $\pi(M) \subseteq \{q\} \cup \pi(H \cap M) \subseteq \pi(f(p))$. Значит, $G/C_G(N) \simeq M \in \mathfrak{S}_{\pi(f(p))} \cap \mathfrak{F}^S$, откуда заключаем, что $G \in \mathfrak{F}^S$; противоречие. $\square$

Доказательство теоремы 1. (1) $\Rightarrow$ (2). Предположим, что $\mathfrak{F}$ обладает свойством Кегеля. Докажем, что $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$. Для этого достаточно доказать, что группа $G = ABC$ принадлежит $\mathfrak{F}$, при условии, что $AB, AC, BC \in \mathfrak{F}$. Заметим, что $G = (AB)(AC) = (AB)(BC) = (AC)(BC)$. Так как $\mathfrak{F}$ обладает свойством Кегеля, $G \in \mathfrak{F}$, что и требовалось доказать.

(2) $\Rightarrow$ (3). В силу леммы 3 $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$. Согласно условию $\mathfrak{F}$ s_F-замкнута. Значит, $\mathfrak{F}$ наследственна по лемме 4.

Импликации (3) $\Rightarrow$ (4) и (4) $\Rightarrow$ (1) хорошо известны (см., например, [10]).

Доказательство следствия 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная s_F-замкнутая формация разрешимых групп, обладающая свойством $\mathscr{P}_2$. Тогда $Z_p \in \mathfrak{F}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ в силу s_F-замкнутости $\mathfrak{F}$. Стало быть, $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})} \subseteq \mathfrak{F}$ в силу Z-насыщенности $\mathfrak{F}$. Значит, следствие 2 напрямую вытекает из теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NH} \neq \varnothing$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NH}$. Отметим, что $\mathfrak{NH}$ является насыщенной формацией по [12, IV, теорема 3.3 и пример 3.4(b)]. В силу выбора G в ней имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $\Phi(G) = 1$, кроме того, $G = N \rtimes M$, где M — максимальная подгруппа в G и $\mathrm{F}(G) = N$. Из того, что $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, следует, что G является минимальной не $\mathfrak{NH}$-группой. Отсюда следует, что G не принадлежит $\mathfrak{NH}$, а значит, $G/\mathrm{F}(G) = G/N \simeq M$ не принадлежит $\mathfrak{H}$. Если M — циклическая группа, то в ней найдется циклическая подгруппа R, являющаяся минимальной не $\mathfrak{H}$-группой, и получаем противоречие с условием теоремы. Пусть M не является циклической подгруппой G. В M найдутся по крайней мере две несопряженные максимальные подгруппы R_1 и R_2. По теореме Оре имеем $M = R_1R_2$. Тогда $G = N \rtimes (R_1R_2)$ — произведение попарно перестановочных подгрупп N, R_1, R_2. Заметим, что $M = R_1R_2$, $T_1 = N \rtimes R_1$ и $T_2 = N \rtimes R_2$ являются собственными подгруппами в G и принадлежат формации $\mathfrak{NH}$. Так как $G \in \mathfrak{X}$ и $\mathfrak{NH}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$ в $\mathfrak{X}$, получаем, что $G \in \mathfrak{NH}$; противоречие. Теорема доказана.

Доказательство следствия 3. Установим справедливость утверждения (1). Пусть $n > 1$. Тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}^{n-1}$ содержит все циклические группы. Значит, любая минимальная не $\mathfrak{H}$-группа является нециклической. По теореме 2 получаем $\mathfrak{X} = \mathfrak{NH} = \mathfrak{N}^n$. Утверждение (1) доказано.

Так как любая минимальная не $\mathfrak{A}$-группа (группа Миллера — Морено) является нециклической, утверждение (2) вытекает из теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что любая наследственная насыщенная подформация $\mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{X}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$ в $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NA} \neq \varnothing$ и G — группа минимального порядка из $\mathfrak{X} \setminus \mathfrak{NA}$. Из того, что $\mathfrak{X}$ — наследственная формация, получаем, что G является минимальной не $\mathfrak{NA}$-группой. Поскольку $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{NA}$ — насыщенные формации, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу $N = G^{\mathfrak{NA}}$ и $\Phi(G) = 1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть N — абелева p-группа, где p — некоторое простое число. Из $\Phi(G) = 1$ следует, что найдется максимальная подгруппа M группы G такая, что $G = N \rtimes M$. Отсюда и из абелевости N следует, что $N \cap M \lhd G$. Так как N — единственная минимальная нормальная подгруппа G, то $N \cap M = 1$, а значит, $\mathrm{Core}_G(M) = 1$. Следовательно, G — примитивная группа. Согласно [4, теорема 1.1.7(3)] $N = C_G(N) = \mathrm{F}(G)$. Так как $G \notin \mathfrak{NA}$, то $G/N \simeq M$ не принадлежит $\mathfrak{A}$. В M найдутся по крайней мере две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2. По теореме Оре $M = H_1H_2$. Тогда $G = NH_1H_2$.

Рассмотрим подгруппы $R_1 = NH_1$, $R_2 = NH_2$ и $R_3 = H_1H_2 = M$. Нетрудно видеть, что R_i является максимальной подгруппой в G и принадлежит $\mathfrak{NA}$ для $i = 1, 2, 3$. Учитывая, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{NA}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$ в $\mathfrak{X}$, получаем, что $G \in \mathfrak{NA}$. Получили противоречие с выбором группы G. Следовательно, можно считать, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{NA}$.

Случай 2. Пусть N — неабелева группа. Тогда N представима в виде прямого произведения изоморфных простых неабелевых групп. Так как G является минимальной не $\mathfrak{NA}$-группой, то $G = N$ — простая неабелева группа. В G найдется подгруппа F, которая является группой Миллера — Морено. Известно (см. [23, II, § 7]), что F — разрешимая группа и число ее простых делителей не превосходит 2. Ввиду простоты группы G согласно теореме Бернсайда найдется простое число $p \in \pi(G)$, которое не делит порядок F. Так как $\mathfrak{X}$ — насыщенная формация, можно рассмотреть каноническое локальное задание X формации $\mathfrak{X}$, которое существует и единственно по [12, IV, теорема 3.7]. Из $G \in \mathfrak{X}$ следует, что $G \in X(p)$. Рассмотрим регулярное сплетение $E = Z_p \wr G$ группы Z_p простого порядка p с группой G. Тогда $E = S \rtimes G$, где S — база сплетения E. Отметим, что $\mathrm{F}^*(E) = \mathrm{F}(E) = S$. Из $X(p) = \mathfrak{N}_p X(p) \subseteq \mathfrak{X}$ следует, что $E \in \mathfrak{X}$. Из наследственности формации $\mathfrak{X}$ получаем, что $K = S \rtimes F \in \mathfrak{X}$. Отметим, что K — разрешимая группа и F — p'-группа. Из [12, A, лемма 18.8(a, b)] получаем, что $\mathrm{F}(K) = S$, откуда следует, что группа K не принадлежит $\mathfrak{NA}$. Выше было доказано, что $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{NA}$. Поэтому $K \in \mathfrak{NA}$. Получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{NA}$.

Пусть теперь $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{NA}$. Установим, что любая насыщенная наследственная подформация $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{X}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ в $\mathfrak{X}$. Предположим, что утверждение неверно, и пусть группа G — минимальный контрпример. Тогда согласно [2, утверждение 2.3] группа G обладает следующими свойствами.

(1) $G = A_1A_2A_3$, где A_1, A_2, A_3 — попарно перестановочные подгруппы группы G, причем $\widehat{A}_1 = A_2A_3$, $\widehat{A}_2 = A_1A_3$, $\widehat{A}_3 = A_1A_2$ — собственные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G.

(2) G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $N = G^{\mathfrak{F}}$, причем N — элементарная абелева p-группа для некоторого простого p и $O_{p'}(G) = 1$. Кроме того, $N = C_G(G) = \mathrm{F}(G)$.

(3) $R_1 = N\widehat{A}_1$, $R_2 = N\widehat{A}_2$ — собственные $\mathfrak{F}$-подгруппы.

Из насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $\Phi(G) = 1$ и $G = N \rtimes M$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G такая, что $M \cap N = 1$. Заметим, что из нильпотентности коммутанта G' следует, что группа G разрешима и M — абелева подгруппа.

Ввиду [12, A, лемма 13.6(b)] M — p'-группа. Согласно тождеству Дедекинда $R_i = R_i \cap NM = N(R_i \cap M)$, $i = 1, 2$. По условию $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Пусть F — каноническое локальное задание $\mathfrak{F}$. Тогда из $R_i = N(R_i \cap M) \in \mathfrak{F}$ и $O_{p',p}(R_i) = N$ следует, что $R_i \cap M \in F(p)$, для $i = 1, 2$. Из $G = R_1R_2$ следует, что $(R_1 \cap M)(R_2 \cap M) = M$. Из абелевости M и $R_i \cap M \in F(p)$, $i = 1, 2$, получаем $M \in F(p)$. Отсюда, из $G/N \in \mathfrak{F}$ и $G/O_{p',p}(G) = G/N \simeq M \in F(p)$ получаем, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие с выбором G. Теорема доказана.

3. Заключительные замечания, примеры и открытые вопросы

При изучении формации $\mathfrak{F}$ с условием $\mathscr{P}_2$ важное место занимает изучение ее подформации $\mathfrak{F}^S$.

Проблема 1. *Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ в классе $\mathfrak{X}$. Будет ли формация $\mathfrak{F}^S$ иметь свойство $\mathscr{P}_2$ в $\mathfrak{X}$? Верно ли обратное утверждение?*

Для исследования этой проблемы нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация такая, что $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга. Если $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, то $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга, то $\mathfrak{H}$ — наследственная насыщенная формация [12, XI, теорема 1.8].

Пусть G — разрешимая минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа. Вначале предположим, что G нильпотентна. Если G не является группой простого порядка, то $Z_p \in \mathfrak{H}$ для любого $p \in \pi(G)$. В силу насыщенности $\mathfrak{H}$ всякая нильпотентная $\pi(G)$-группа принадлежит $\mathfrak{H}$. В частности, $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, G является группой простого порядка.

Пусть G ненильпотентна и $M/\Phi(G)$ — дополнение $\mathrm{F}(G/\Phi(G)) = \mathrm{F}(G)/\Phi(G)$ в G. Вначале допустим, что $M/\Phi(G)$ не является циклической примарной группой. Тогда и M не является циклической примарной группой. Поэтому в M имеются по крайней мере две несопряженные максимальные подгруппы H_1 и H_2. Значит, $M = H_1H_2$. Рассмотрим подгруппы $\mathrm{F}(G), H_1, H_2$. Из того, что все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$, нетрудно видеть, что $\mathrm{F}(G), H_1, H_2$ являются попарно перестановочными $\mathfrak{F}$-подгруппами и $G = NH_1H_2$. Ввиду того, что $\mathrm{F}(G) \cap H_i = \Phi(G)$, подгруппы $\mathrm{F}(G)H_1, \mathrm{F}(G)H_2, H_1H_2$ собственные. Следовательно, они принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, получаем $G \in \mathfrak{F}$. Противоречие с выбором группы G.

Итак, $G/\mathrm{F}(G)$ — циклическая примарная группа. Следовательно, G метанильпотентна. Если $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $G/\Phi(G) \in \mathfrak{H}$. Стало быть, $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $G/\Phi(G)$ — минимальная не-$\mathfrak{F}$-группа. Из $\Phi(G/\Phi(G)) = 1$ и замкнутости $\mathfrak{F}$ относительно взятия подпрямых произведений получаем, что в $G/\Phi(G)$ имеется единственная минимальная нормальная подгруппа. Стало быть, $\mathrm{F}(G)$ — силовская p-подгруппа, а $G/\mathrm{F}(G)$ — q-группа для некоторых различных простых p и q.

Если G не является группой Шмидта, то она содержит подгруппу Шмидта H с нормальной силовской p-подгруппой. Заметим, что $E(q|p)$ является гомоморфным образом H, т. е. $E(q|p) \in \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{H}$. Но тогда $\mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H}$ по [12, XI, теорема 2.5 и предложение 2.4]. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$; противоречие. Итак, G является группой Шмидта.

Значит, $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в $\mathfrak{S}$. □

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — Z-насыщенная формация, обладающая свойством $\mathscr{P}_2$. Тогда $\mathfrak{F}$ содержит всякую разрешимую $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$-группу $G = AB$, где A и B — нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы группы G. В частности, если $\mathfrak{F}$ нормально наследственна, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга.*

Доказательство. Пусть группа $G = AB$ — контрпример наименьшего порядка. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — формации, видим, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и $G/N \in \mathfrak{F}$. Из $G/N \not\simeq 1$ следует, что $A \neq 1$, $B \neq 1$ и $N \leq A \cap B$.

Если $A \leq C_G(N)$, то $G = BC_G(N)$ и $N \rtimes (G/C_G(N)) \simeq N \rtimes (B/C_B(N)) \in \mathfrak{F}$ по теореме Барнса — Кегеля [12, IV, предложение 1.5]. Из Z-насыщенности формации $\mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, $A \not\leq C_G(N)$. Аналогично доказывается, что $B \not\leq C_G(N)$.

Так как G разрешима, $N \leq \mathrm{F}(G) \leq C_G(N)$. Поэтому $G/C_G(N) \in \mathfrak{F}$. Заметим, что

$$G/C_G(N) = (AC_G(N)/C_G(N))(BC_G(N)/C_G(N)),$$

$$AC_G(N)/C_G(N) \simeq A/C_A(N) \not\simeq 1 \text{ и } BC_G(N)/C_G(N) \simeq B/C_B(N) \not\simeq 1.$$

Рассмотрим подгруппы $N, AC_G(N)/C_G(N)$ и $BC_G(N)/C_G(N)$ группы $T = N \rtimes (G/C_G(N))$. Заметим, что эти подгруппы попарно перестановочны и

$$T = N(AC_G(N)/C_G(N))(BC_G(N)/C_G(N)).$$

Нетрудно видеть, что

$$(AC_G(N)/C_G(N))(BC_G(N)/C_G(N)) = G/C_G(N) \in \mathfrak{F}.$$

Отметим, что

$$N(AC_G(N)/C_G(N)) = N \rtimes (AC_G(N)/C_G(N)) \simeq N \rtimes A/C_A(N) \in \mathfrak{F}$$

по теореме Барнса — Кегеля [12, IV, предложение 1.5]. Аналогично доказывается, что $N(BC_G(N)/C_G(N)) \in \mathfrak{F}$. Ввиду того, что $\mathfrak{F}$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$, имеем $T = N \rtimes (G/C_G(N)) \in \mathfrak{F}$. В силу Z-насыщенности $\mathfrak{F}$ будет $G \in \mathfrak{F}$; заключительное противоречие.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация. Докажем, что $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга. Очевидно, что $\mathfrak{H}$ — нормально наследственная формация. Пусть $G = AB$, где A, B — нормальные $\mathfrak{H}$-подгруппы G. Тогда G метанильпотентна. Ввиду нормальной наследственности и Z-насыщенности $\mathfrak{F}$ в этом случае $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$ по доказанному выше. Итак, $G \in \mathfrak{H}$. □

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная Z-насыщенная формация или формация Фиттинга разрешимых групп. Если $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$, то $\mathfrak{F}^S$ также имеет свойство $\mathscr{P}_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная формация разрешимых групп и имеет свойство $\mathscr{P}_2$. Если $\mathfrak{F}$ Z-насыщенна, то по лемме 6 $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ является формацией Фиттинга. Если же $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, то $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2$ также является формацией Фиттинга. Из леммы 5 следует, что $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{F}^S$ — наследственная формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ разрешимых групп и $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F}^S)} \subseteq \mathfrak{F}^S$. Следовательно, $\mathfrak{F}^S$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ по теореме 1. □

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — нормально наследственная насыщенная формация разрешимых групп. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$, когда ее $\mathfrak{F}^S$ также имеет свойство $\mathscr{P}_2$.*

Доказательство. Пусть нормально наследственная насыщенная формация разрешимых групп $\mathfrak{F}$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$. Из насыщенности $\mathfrak{F}$ вытекает ее Z-насыщенность. Тогда $\mathfrak{F}^S$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$ по предложению 1.

Предположим теперь, что $\mathfrak{F}^S$ имеет свойство $\mathscr{P}_2$. Согласно [24, теорема 4.1] $\mathfrak{F}^S$ является наследственной *насыщенной* формацией со свойством $\mathscr{P}_2$. Из теоремы 1 следует, что $\mathfrak{F}^S$ является формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^S$ ввиду [25, лемма 11]. □

Пример 1. Покажем, что ответ на второй вопрос проблемы 1 в общем случае отрицательный. Существуют формации $\mathfrak{F}$, не обладающие свойством $\mathscr{P}_2$, такие, что $\mathfrak{F}^S$ обладает свойством $\mathscr{P}_2$. Более того, приведенная ниже формация $\mathfrak{F}$ будет насыщенной формацией Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$ такой, что $\mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}^2$ — формация Фиттинга. Поэтому условия s_F-замкнутости в теореме 1 и нормальной наследственности в предложении 2 существенны. Кроме того, утверждение, обратное утверждению леммы 5, неверно.

Пусть $\mathfrak{H}$ — класс разрешимых групп, подгруппы Картера которых являются $5'$-группами. Тогда $\mathfrak{H}$ — формация по [12, IV, предложение 1.2]. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_5\mathfrak{H}$. Заметим, что $\mathfrak{S}_{5'} \subseteq \mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'} \subseteq \mathfrak{F}$. Отметим, что класс всех 5-замкнутых разрешимых групп $\mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'}$ — наследственная насыщенная формация. Поэтому $\mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'} \subseteq \mathfrak{F}^S$. Хорошо известно, что минимальные не 5-замкнутые разрешимые группы — это в точности группы Шмидта с нормальной силовской $5'$-подгруппой. Поэтому $\mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$.

Предположим, что $\mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'} \subset \mathfrak{F}^S$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathfrak{F}^S \setminus \mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'}$. Так как оба указанных класса групп являются наследственными формациями, то G — минимальная не 5-замкнутая разрешимая группа, $\mathrm{O}_5(G) = 1$ и $\Phi(G) = 1$, т. е. $G \simeq E(5|q)$. Из $\mathrm{O}_5(G) = 1$ и $G \in \mathfrak{F}^S \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Но подгруппы Картера группы G изоморфны Z_5; противоречие. Итак, $\mathfrak{F}^S = \mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'}$, в частности, обладает свойством $\mathscr{P}_2$ по теореме 1. Тогда $\mathfrak{F}$ — формация Шеметкова в классе $\mathfrak{S}$.

Предположим, что $G \in \mathfrak{F}\cap\mathfrak{N}^2$. Пусть $O = \mathrm{O}_{5'}(\mathrm{F}(G))$ и $\overline{O} = O\,\mathrm{O}_5(G)/\,\mathrm{O}_5(G) \simeq O$. По условию все подгруппы Картера $\overline{G} = G/\,\mathrm{O}_5(G)$ — $5'$-группы. Но тогда и все подгруппы Картера $\overline{G}/\overline{O}$ — $5'$-группы. Заметим, что $\mathrm{F}(G) \leq O\,\mathrm{O}_5(G)$. Поэтому $\overline{G}/\overline{O}$ нильпотентна и, следовательно, $5'$-группа. Но тогда и $\overline{G}$ — $5'$-группа. Стало быть, $G \in \mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'} \cap \mathfrak{N}^2$. Итак, $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}^2 = \mathfrak{N}_5\mathfrak{S}_{5'} \cap \mathfrak{N}^2$ — формация Фиттинга.

Докажем, что $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Ввиду [12, IV, теорема 3.3 и пример 3.4(b)] для этого достаточно показать, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{H}$, $O_1 = \mathrm{O}_{5'}(\mathrm{F}(G))$, $O_2 = \mathrm{O}_5(\mathrm{F}(G))$. Из того, что $G/\,\mathrm{F}(G) \in \mathfrak{H}$, следует, что $G/O_1 \in \mathfrak{N}_5\mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Заметим, что G/O_2 имеет нормальную $5'$-подгруппу, подгруппы Картера факторгруппы по которой являются $5'$-группами. Следовательно, и подгруппы Картера G/O_2 являются $5'$-группами ввиду [12, IV, предложение 3.7]. Итак, $G/O_2 \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \simeq G/1 = G/(O_1 \cap O_2) \in \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}\mathfrak{H}$ — насыщенная формация.

Напомним, что симметрическая группа $S_3 = A_3 Z_2$ имеет точный неприводим $\mathbb{F}_5 S_3$-модуль V размерности 2 такой, что V является также точным неприводимым $\mathbb{F}_5 A_3$-модулем (фактор модуль перестановочного модуля P по диагональному подмодулю), где A_3 — знакопеременная группа степени 3. Заметим, что P как $\mathbb{F}_5 Z_2$-модуль имеет два подмодуля, на которых Z_2 действует тождественно, значит, в V найдется $\mathbb{F}_5 Z_2$-подмодуль V_1, на котором Z_2 действует тождественно. Пусть $E = V \rtimes S_3$. По [12, B, теорема 10.3] существует точный неприводимый $\mathbb{F}_3 E$-модуль W. Пусть $G = W \rtimes E$. Тогда $G = H_1 H_2 H_3$, где $H_1 = WA_3$, $H_2 = Z_2$, $H_3 = VA_3$. Заметим, что $H_1 H_2 = WS_3$ — $5'$-группа, т. е. принадлежит $\mathfrak{F}$; $H_2 H_3 = VS_3$ — 5-замкнутая группа, т. е. принадлежит $\mathfrak{F}$. Рассмотрим $H_1 H_3 = W(VA_3)$. Так как $VA_3 \simeq E(3|5)$, всякая подгруппа Картера группы VA_3, изоморфная A_3, — $5'$-группа. Тогда подгруппы Картера группы $H_1 H_3$ лежат в WA_3, т. е. являются $5'$-группами. Значит, $H_1 H_3$ принадлежит $\mathfrak{F}$.

Предположим, что $G \in \mathfrak{F}$. Из $\mathrm{O}_5(G) = 1$ следует, что $G = WVA_3Z_2 \in \mathfrak{H}$. Заметим, что Z_2 является подгруппой Картера $S_3 = A_3 Z_2$. Тогда одна из подгрупп Картера $E = VS_3$ должна содержать Z_2 и лежать в VZ_2. Напомним, что найдется $V_1 \leq V$ с $C_{Z_2}(V_1) = Z_2$, т. е. V_1 содержится в подгруппе Картера E. Следовательно, найдется подгруппа Картера группы E, как и подгруппа Картера группы $G = WE$, не являющаяся $5'$-группой; противоречие. Итак, $G \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ не обладает свойством $\mathscr{P}_2$.

Пример 2. Из [26, с. 182] следует, что существует ненаследственная ненасыщенная формация Фиттинга $\{2,3\}$-групп $\mathfrak{H}$ (класс $\{2,3\}$-групп, абсолютный арифметический 3-ранг которых является $3'$-числом). Тогда $\mathfrak{K} = \mathfrak{H}\mathfrak{N}$ является классом Фишера по [12, IX, пример 3.7(2)] и формацией, т. е. формацией Фишера.

В [26, с. 182] построена $\{2,3\}$-группа $W \notin \mathfrak{H}$ такая, что $W/\Phi(W) \in \mathfrak{H}$. Пусть $Q = W \wr Z_5$. Заметим, что $Q_{\mathfrak{H}}$ совпадает с $\mathfrak{H}$-радикалом базы Q, последний, в свою очередь, совпадает с прямым произведением групп, изоморфных $W_{\mathfrak{H}}$. Тогда $Q/Q_{\mathfrak{H}} \simeq (W/W_{\mathfrak{H}}) \wr Z_5$. Из $W/W_{\mathfrak{H}} \not\simeq 1$ вытекает, что $(W/W_{\mathfrak{H}}) \wr Z_5 \notin \mathfrak{N}$. Значит, $Q \notin \mathfrak{K}$. Заметим, что $\Phi(Q)$ совпадает с подгруппой Фраттини базы Q, а последняя, в свою очередь, совпадает с прямым произведением групп, изоморфных $\Phi(W)$. Тогда $\overline{Q} = Q/\Phi(Q) \simeq (W/\Phi(W)) \wr Z_5$. Так как $W/\Phi(W) \in \mathfrak{H}$, то $\overline{Q}/\overline{Q}_{\mathfrak{H}} \simeq Z_5 \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $\overline{Q} \in \mathfrak{K}$. Значит, формация $\mathfrak{K}$ ненасыщенна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R., Asaad M.* Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010. (De Gruyter Expos. Math.; V. 53).
2. *Амберг Б., Казарин Л. С., Хефлинг Б.* Конечные группы с кратными факторизациями // Фундам. и прикл. математика. 1998. Т. 4, № 4. С. 1251–1263.
3. *Васильев А. Ф.* К проблеме перечисления локальных формаций с заданным свойством // Вопросы алгебры. 1987. № 3. С. 3–11.
4. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* Classes of finite groups. Dordrecht: Springer-Verl., 2006. (Math. Appl.; V. 584).
5. *Kegel O. H.* Zur Struktur mehrfach faktorisierter endlicher Gruppen // Math. Z. 1965. V. 87. P. 42–48.
6. *Казарин Л. С.* Факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами // Укр. мат. журн. 1991. Т. 43, № 7–8. С. 947–950.
7. *Васильев А. Ф.* О перечислении локальных формаций с условием Кегеля // Вопросы алгебры. 1993. № 7. С. 86–93.
8. *Ballester-Bolinches A., Martinez-Pastor A., Pedraza-Aguilera M. C.* Finite trifactorized groups and formations // J. Algebra. 2000. V. 226, N 2. P. 990–1000.
9. *Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M.* On formations with the Kegel property // J. Group Theory. 2005. V. 8, N 5. P. 605–611.
10. *Васильев А. Ф., Мурашко В. И., Фурс А. К.* Конечные группы с тремя несопряженными максимальными формационными подгруппами // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 3. С. 354–364.
11. *Балычев С. В., Вегера А. С.* Разрешимые насыщенные формации со свойством $\mathscr{P}_2$ для конечных групп // Проблемы физики, математики, техники. 2020. № 1. С. 74–80.
12. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. (De Gruyter Expos. Math.; V. 4).
13. *Khukhro E. I., Mazurov V. D.* (eds.) The Kourovka notebook: unsolved problems in group theory, 20th edn. Novosibirsk: Russian Academy of Sciences, Siberian Branch, 2022.
14. *Воробьев С. Н.* О формациях Фишера конечных групп // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук. 2012. № 2. С. 43–48.
15. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.
16. *Мурашко В. И.* К вопросам Шеметкова, Баллестер-Болиншеса и Перес-Рамос теории конечных групп // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 6. С. 839–849.
17. *Ballester-Bolinches A., Perez-Ramos M. D.* On a question of L. A. Shemetkov // Commun. Algebra. 1999. V. 27, N 11. P. 5615–5618.
18. *Murashka V. I., Vasil′ev A. F.* On the σ-nilpotent hypercenter of finite groups // J. Group Theory. 2022. V. 25, N 6. P. 1083–1098.

19. *Shemetkov L. A.* Frattini extensions of finite groups and formations // Commun. Algebra. 1997. V. 25, N 3. P. 955–964.
20. Guo W. The theory of classes of groups. Translated from the 1997 Chinese original. Beijing; New York; Dordrecht; Boston; London: Science Press / Kluwer Acad. Publ., 2000. (Math. Appl.; V. 505).
21. *Скиба А. Н.* Об одном классе локальных формаций конечных групп // Докл. АН БССР. 1990. Т. 34, № 11. С. 982–985.
22. *Семенчук В. Н., Васильев А. Ф.* Характеризация локальных формаций $\mathfrak{F}$ по заданным свойствам минимальных не $\mathfrak{F}$-групп // Исследование нормального и подгруппового строения конечных групп: труды Гомельского семинара. Минск: Наука и техника, 1984. С. 175–181.
23. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967. (Grundlehren Math. Wissensch.; V. 134).
24. *Carter R., Fischer B., Hawkes T.* Extreme classes of a finite soluble groups // J. Algebra. 1968. V. 9, N 3. P. 285–315.
25. *Васильев А. Ф., Каморников С. Ф., Семенчук В. Н.* О решетках подгрупп конечных групп // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические системы. Киев: Ин-т математики АН Украины, 1993. С. 27–54.
26. *Hawkes T. O.* On Fitting formations // Math. Z. 1970. V. 117. P. 177–182.

Поступила в редакцию 26 марта 2024 г.
После доработки 16 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Балычев Сергей Владимирович (ORCID 0009-0008-0595-3819)
Васильев Александр Фёдорович (ORCID 0000-0002-0874-3357),
Мурашко Вячеслав Игоревич (ORCID 0000-0002-0769-2519),
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,
факультет математики и технологий программирования,
кафедра алгебры и геометрии,
ул. Советская, 104, Гомель 246019, Республика Беларусь
sergej.balychev@gmail.com, formation56@mail.ru, mvimath@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 514.82+512.81+517.977

ЭКСТРЕМАЛИ ИНДУЦИРОВАННОЙ СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРЫ НА ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ

В. Н. Берестовский

Аннотация. Изучается Вселенная Гёделя как группа Ли с индуцированной левоинвариантной сублоренцевой структурой, определяемой некоторым собственным порождающим алгебру Ли подпространством. Методами геометрической теории оптимального управления найдены времениподобные и изотропные экстремали в терминах элементарных функций. Установлено, что эти экстремали не замкнуты, но, как правило, не являются полными, с отличными от вещественной прямой открытыми интервалами как максимальными связными областями определения.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.605

Ключевые слова: алгебра Ли, времениподобная экстремаль, Вселенная Гёделя, группа Ли, изотропная экстремаль, индуцированная левоинвариантная сублоренцева структура, ортонормированный базис.

§ 1. Введение

Курт Гёдель в статье [1] 1949 г. вводит в пространстве $\mathbb{R}^4$ лоренцеву метрику (1) сигнатуры $(+,-,-,-)$. Вселенная (пространство-время) Гёделя S является решением уравнений Эйнштейна общей теории относительности.

Статья [1] была перепечатана в статье [2].

В работе [3] найдены времениподобные и изотропные геодезические Вселенной Гёделя, рассматриваемой как группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Установлено, что эти геодезические незамкнутые и полные.

В настоящей статье исследована Вселенная Гёделя S как группа Ли G с индуцированной левоинвариантной сублоренцевой структурой σ, определяемой ограничением лоренцева метрического тензора (1) на некоторое векторное подпространство $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{g}$ алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ группы Ли G, порождающее $\mathfrak{g}$ скобками Ли $[\cdot,\cdot]$. Выбор $\mathfrak{p}$ подсказан формулой (2) из [1]. Найдены все времениподобные и изотропные экстремали в (G,σ) с началом в единице группы Ли G.

Все экстремали нормальные, поэтому в статье дано лишь их определение.

Группа Ли G — односвязная 4-мерная группа Ли $(\mathbb{R},+)\times G_2\times(\mathbb{R},+)$, где G_2 — группа сохраняющих ориентацию аффинных преобразований прямой $(\mathbb{R},+)$.

В отличие от лоренцевой метрики возникает больше различных случаев и за редкими исключениями экстремали не полны. Автору не известно, верно ли это для всех порождающих $\mathfrak{g}$ подпространств $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{g}$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006

В статьях [4, 5] доказано, что каждое отличное от алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G и порождающее $\mathfrak{g}$ подпространство трехмерно и переводится некоторым автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в упомянутое подпространство $\mathfrak{p}$. Напомним, что каждый автоморфизм алгебры Ли односвязной группы Ли индуцируется автоморфизмом группы Ли. В предложении 2 из последнего раздела дана алгебраическая характеризация подпространства $\mathfrak{p}$.

§ 2. Группа Ли и левоинвариантная сублоренцева структура

Гёдель вводит в [1] свое пространство-время S как $\mathbb{R}^4$ с линейным элементом

$$ds^2 = a^2\left(dx_0^2 + 2e^{x_1}dx_0dx_2 + \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 - dx_1^2 - dx_3^2\right), \quad a > 0. \tag{1}$$

Гёдель замечает в [1], что эту квадратичную форму можно записать в виде

$$ds^2 = a^2\left[(dx_0 + e^{x_1}dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 - dx_3^2\right], \tag{2}$$

который делает очевидным, что ее сигнатура всюду равна $(+,-,-,-)$.

Нас интересуют в основном экстремали. Поэтому будем считать, что $a = 1$.

Из замечания Гёделя в [1] следует, что на (S, ds^2) действует просто транзитивно 4-мерная группа Ли G изометрий.

Нетрудно увидеть, что указанное действие группы Ли G дается формулами

$$x_0 = x_0' + a, \quad x_1 = x_1' + b, \quad x_2 = x_2'e^{-b} + c, \quad x_3 = x_3' + d \tag{3}$$

с произвольными $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Отсюда видно, что группа Ли G является простейшей некоммутативной 4-мерной группой Ли вида

$$G \cong (\mathbb{R}, +) \times G_2 \times (\mathbb{R}, +), \tag{4}$$

где G_2 — единственная с точностью до изоморфизма, необходимо диффеоморфная $\mathbb{R}^2$, 2-мерная некоммутативная группа Ли. Группа Ли G_2 изоморфна группе $A^+(\mathbb{R})$ сохраняющих ориентацию аффинных преобразований прямой $(\mathbb{R}, +)$.

В нашем случае при отождествлении четверки (x_2', x_1', x_0', x_3') с вектором-столбцом $(x_2', x_1', x_0', x_3', 1)^T$, где ^{T} — знак транспонирования, действие группы G на $\mathbb{R}^4$ по формуле (3) имеет вид $(x_2, x_1, x_0, x_3, 1)^T = A(x_2', x_1', x_0', x_3', 1)^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-b} & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

При этом формула

$$\begin{pmatrix} e^{-x_1} & 0 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}(0, 0, 0, 0, 1)^T = (x_2, x_1, x_0, x_3, 1)^T \tag{6}$$

устанавливает биекцию группы G на $\mathbb{R}^4$ и единице группы G соответствует нуль-вектор $(0, 0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$. На основании этого, (4) и (1) (S, ds^2) можно отождествить с группой Ли G, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Вследствие сказанного и (1) в единице группы G компоненты линейного элемента ds^2 относительно базиса

$$\left(e_0 = \frac{\partial}{\partial_{x_0}}, e_1 = \frac{\partial}{\partial_{x_1}}, e_2 = \frac{\partial}{\partial_{x_2}}, e_3 = \frac{\partial}{\partial_{x_3}}\right),$$

связанного с координатами (x_0, x_1, x_2, x_3), равны

$$g_{00} = 1, g_{02} = g_{20} = 1, g_{22} = \frac{1}{2}, g_{11} = -1, g_{33} = -1, g_{ij} = g_{ji} = 0, i \neq j, j \neq 2. \quad (7)$$

Ввиду (6) в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G

$$e_0 = E_{35}, \quad e_1 = E_{25} - E_{11}, \quad e_2 = E_{15}, \quad e_3 = E_{45}, \quad (8)$$

где E_{ij} — матрица с нулевыми элементами, кроме единицы в i-й строке и j-м столбце. Как следствие в алгебре Ли $\mathfrak{g}$

$$[e_1, e_2] = e_1e_2 - e_2e_1 = -e_2, \quad [e_i, e_j] = [e_j, e_i] = 0, \quad i \neq j, \ j \neq 2. \quad (9)$$

Согласно (2), (7), (9) тесно связанные с (2) векторы

$$f_0 = \sqrt{\frac{2}{7}}(e_0 + e_2), \quad f_1 = e_1, \quad f_2 = e_3, \quad f_3 = \sqrt{2}e_2 \quad (10)$$

образуют ортонормированный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно ds^2, причем

$$[f_0, f_1] = -[f_1, f_0] = \frac{1}{\sqrt{7}}f_3, \quad [f_1, f_3] = -[f_3, f_1] = -f_3 \quad (11)$$

— единственные ненулевые скобки Ли векторов базиса (10). Из (11) следует, что линейная оболочка $\mathfrak{p}$ векторов f_0, f_1, f_2 порождает алгебру Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$, причем вследствие предложения 16 в [5] любое трехмерное порождающее алгебру Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ подпространство $\widetilde{\mathfrak{p}}$ имеет вид $\widetilde{\mathfrak{p}} = \delta(\mathfrak{p})$, где δ — некоторый автоморфизм алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$. Кроме того, в выбранном ортонормированном базисе (10) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ все ненулевые структурные константы имеют вид

$$C_{01}^3 = -C_{10}^3 = \frac{1}{\sqrt{7}}, \quad C_{13}^3 = -C_{31}^3 = -1. \quad (12)$$

Ограничение квадратичной формы (2) на $\mathfrak{p}$ имеет сигнатуру $(+,-,-)$ и определяет изучаемую нами левоинвариантную сублоренцеву структуру σ на G.

§ 3. Дифференциальные уравнения экстремалей

Предположим, что G — *произвольная группа Ли.* Левоинвариантная (суб)лоренцева структура Σ на G задается левоинвариантной лоренцевой метрикой $(\cdot,\cdot)$, ортонормированным относительно нее базисом $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ сигнатуры $(+,-,\dots,-)$ в алгебре Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ группы Ли G и порождающим $\mathfrak{g}$ скобками $[\cdot,\cdot]$ подпространством $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ с базисом $(f_0, f_1, \dots, f_r)$, $0 < r \leq n$.

Если $\psi \in \mathfrak{g}^*$ — ковектор с компонентами $\psi_0, \dots, \psi_n$ относительно дуального к $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ базиса, $u = \sum_{i=0}^{r} u_i f_i \in \mathfrak{p}$ — вектор, то $\psi(u) := \sum_{i=0}^{r} \psi_i u_i$.

В теоремах 2 и 3 из [6] установлено по аналогии с (суб)римановым случаем, что нормальная времениподобная (соответственно изотропная) (суб)лоренцева экстремаль $\gamma = \gamma(t)$, $t \in (a, b) \subset \mathbb{R}$, $a < 0 < b$, на группе Ли G (с началом в ее единице) есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\gamma'(t) = dl_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \psi_0(t) f_0 - \sum_{i=1}^{r} \psi_i(t) f_i, \quad \psi_0(t) > 0, \tag{13}$$

$$\psi'_j(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(C^k_{0j} \psi_0 \psi_k - \sum_{i=1}^{r} C^k_{ij} \psi_i \psi_k \right), \quad j = 0, \dots, n, \tag{14}$$

где C^k_{ij} — структурные константы в базисе $(f_0, \dots, f_n)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $dl_{\gamma(t)}$ — дифференциал левого сдвига $l_{\gamma(t)}$ на $\gamma(t) \in G$. Это значит, что существует гладкая функция $\psi(t) \in \mathfrak{g}^*$, $t \in (a, b)$, удовлетворяющая системе ОДУ (14) и неравенству в (13) такая, что выполнено первое равенство в (13) и

$$M(t) := \psi(t)(u(t)) = \min_{u \in U} \psi(t)(u) \equiv 1, \quad U := \{u \in \mathfrak{p} \mid (u, u) \geq 1,\ u_0 > 0\},$$

соответственно

$$M(t) := \psi(t)(u(t)) = \min_{u \in W} \psi(t)(u) \equiv 0, \quad W := \{u \in \mathfrak{p} \mid (u, u) = 0,\ u_0 = 1\}.$$

При этом $(u(0), u(0)) = 1$ (соответственно $(u(0), u(0)) = 0$), если экстремаль γ времениподобна (соответственно изотропна).

Замечание 1. Если G — матричная группа Ли, то $dl_{\gamma(t)} = l_{\gamma(t)}$.

Если $r = n$, то каждая экстремаль нормальна.

Замечание 2. Известно, что всякая нормальная экстремаль левоинвариантной субримановой метрики на группе Ли — геодезическая, т. е. локально кратчайшая. Автору не известно, верно ли, что всякая нормальная экстремаль левоинвариантной сублоренцевой структуры на группе Ли — геодезическая, т. е. локально длиннейшая.

Вследствие (6), (8), (10), (13) и замечания 1 первое уравнение в (13), т. е. $\gamma'(t) = l_{\gamma(t)}(u(t))$, имеет вид

$$\begin{aligned} &- e^{-x_1} x'_1 E_{11} + x'_2 E_{15} + x'_1 E_{25} = x'_0 E_{35} + x'_3 E_{45} \\ &= (e^{-x_1} E_{11} + E_{22} + E_{33} + E_{44})(\sqrt{2/7} u_0(t)(E_{35} + E_{15}) + u_1(t)(E_{25} - E_{11}) + u_2(t) E_{45}) \\ &\qquad = e^{-x_1} \left(\sqrt{\frac{2}{7}} u_0(t) E_{15} - u_1(t) E_{11} \right) + u_1(t) E_{25} + \sqrt{\frac{2}{7}} \psi_0(t) E_{35} + u_2(t) E_{45}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем систему ОДУ

$$x'_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}} u_0(t), \quad x'_1(t) = u_1(t), \quad x'_2(t) = \sqrt{\frac{2}{7}} e^{-x_1(t)} u_0(t), \quad x'_3(t) = u_2(t). \tag{15}$$

У нас $r = 2$, $n = 3$; $i, j, k = 0, 1, 2, 3$. С учетом (12) уравнения (14) имеют вид

$$\psi'_j(t) = C^3_{0j} \psi_0(t) \psi_3(t) - \sum_{i=1}^{2} C^3_{ij} \psi_i(t) \psi_3(t), \quad j = 0, \dots, 3.$$

В общем (не обязательно нормальном) случае для рассматриваемой сублоренцевой структуры вместо (14) должна получаться система ОДУ

$$\psi'_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{7}} u_1(t) \psi_3(t),\ \psi'_1(t) = \frac{1}{\sqrt{7}} u_0(t) \psi_3(t),\ \psi'_2(t) = 0,\ \psi'_3(t) = -u_1(t) \psi_3(t). \tag{16}$$

Если $\psi(t)$ — решение системы (16) и $\psi_0(t) = \psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0$, то $\psi_3(t) \equiv 0$. Поэтому каждая экстремаль нашей сублоренцевой структуры нормальна.

Поэтому систему ОДУ (16) можно записать в виде

$$\psi_0'(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}\psi_1(t)\psi_3(t),\ \psi_1'(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}\psi_0(t)\psi_3(t),\ \psi_2'(t) = 0,\ \psi_3'(t) = \psi_1(t)\psi_3(t), \tag{17}$$

а систему ОДУ (15) можно записать в виде

$$x_0'(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\psi_0(t), \quad x_1'(t) = -\psi_1(t), \quad x_2'(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}e^{-x_1(t)}\psi_0(t), \quad x_3'(t) = -\psi_2(t), \tag{18}$$

причем $x_i(0) = 0$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Обозначим $\varphi_i = \psi_i(0)$, $i = 0, \dots, 3$. Ясно, что тогда $\psi_2(t) \equiv \varphi_2$.

Следующее замечание вытекает из (17) и условия $(u(0), u(0)) = 1$ (соответственно $(u(0), u(0)) = 0$) для времениподобной (соответственно изотропной) экстремали.

Замечание 3. Если $\gamma(t)$ — времениподобная экстремаль, то

$$\psi_0^2(t) - \psi_1^2(t) - \varphi_2^2 \equiv \varphi_0^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 1 \Rightarrow \psi_0^2(t) - \psi_1^2(t) \equiv 1 + \varphi_2^2.$$

Если $\gamma(t)$ — изотропная экстремаль, то

$$\psi_0^2(t) - \psi_1^2(t) - \varphi_2^2 \equiv \varphi_0^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 = 0 \Rightarrow \psi_0^2(t) - \psi_1^2(t) \equiv \varphi_2^2.$$

В силу (17) $\psi_3(t) = \varphi_3 - \sqrt{7}\varphi_0 + \sqrt{7}\psi_0(t)$. Следовательно, первые два уравнения в (17) можно переписать в виде

$$\psi_0'(t) = (C + \psi_0(t))\psi_1(t), \quad \psi_1'(t) = (C + \psi_0(t))\psi_0(t), \quad C = \frac{\varphi_3}{\sqrt{7}} - \varphi_0. \tag{19}$$

§ 4. Времениподобные и изотропные экстремали

Начнем с простейшего случая.

0. Пусть $\varphi_3 = 0$. Из (17) следует, что тогда

$$\psi_3(t) \equiv 0, \quad \psi_0(t) \equiv \varphi_0, \quad \psi_1(t) \equiv \varphi_1, \quad \psi_2(t) \equiv \varphi_2. \tag{20}$$

Вследствие (20), (13) и замечания 3

$$\gamma(t) = \exp(tu(0)) = \exp(t(\varphi_0 f_0 - \varphi_1 f_1 - \varphi_2 f_2)), \tag{21}$$

где для времениподобной и изотропной экстремали соответственно

$$\varphi_0^2 - \varphi_1^2 = 1 + \varphi_2^2, \quad \varphi_0^2 - \varphi_1^2 = \varphi_2^2. \tag{22}$$

Далее ищем изотропные экстремали; для них выражения чуть проще, а формулы для времениподобных экстремалей получаются небольшим изменением формул для изотропных экстремалей.

I. Пусть $\varphi_3 \neq 0$ и $\varphi_2 = 0$. В силу замечания 3 $\psi_1(t) = \pm\psi_0(t)$ для изотропной экстремали.

Предположим, что $\varphi_1 = \varphi_0 \neq 0$, т. е. $\psi_1(t) = \psi_0(t)$. Из (19) следует, что

$$\psi_0'(t) = (C + \psi_0(t))\psi_0(t). \tag{23}$$

Если $C = 0$, то, используя (17), последовательно получаем

$$\psi_1(t) = \psi_0(t) = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0 t}, \quad \psi_3(t) = \frac{\varphi_3}{1 - \varphi_0 t}.$$

Отсюда и из (18), (13) следует, что

$$x_0(t) = -\sqrt{\frac{2}{7}} \ln|1 - \varphi_0 t|, \quad x_1(t) = \ln|1 - \varphi_0 t|, \quad x_2(t) = \frac{\sqrt{2/7}}{|1 - \varphi_0 t|} - \frac{2}{7}, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

Если $C \neq 0$, то на основании (23)

$$\frac{1}{C} \ln\left|\frac{\psi_0(t)}{C + \psi_0(t)}\right| = t + \frac{1}{C} \ln\left|\frac{\varphi_0}{C + \varphi_0}\right|.$$

Отсюда и из последнего уравнения (17) получаем, что

$$\psi_1(t) = \psi_0(t) = \frac{C\varphi_0 e^{Ct}}{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{Ct}}, \quad \psi_3(t) = \frac{C\varphi_3}{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{Ct}}.$$

Тогда из (18), (13) следует, что

$$x_0(t) = -\sqrt{\frac{2}{7}} \ln\left|\frac{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{Ct}}{C}\right|, \quad x_1(t) = \ln\left|\frac{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{Ct}}{C}\right|,$$

$$x_2(t) = \frac{\sqrt{2/7}|C|}{|C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{Ct}|} - \frac{2}{7}, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

Предположим теперь, что $\varphi_1 = -\varphi_0$, т. е. $\psi_1(t) = -\psi_0(t)$. Из (19) следует, что

$$\psi_0'(t) = -(C + \psi_0(t))\psi_0(t).$$

Если $C = 0$, то отсюда и из последнего уравнения (17) вытекает, что

$$\psi_0(t) = \frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t}, \quad \psi_1(t) = -\frac{\varphi_0}{1 + \varphi_0 t}, \quad \psi_3(t) = \frac{\varphi_3}{1 + \varphi_0 t}.$$

Отсюда и из (18), (13) следует, что

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}} \ln|1 + \varphi_0 t|, \quad x_1(t) = \ln|1 + \varphi_0 t|, \quad x_2(t) = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{2/7}}{|1 + \varphi_0 t|}, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

Если $C \neq 0$, то

$$\psi_0(t) = \frac{C\varphi_0 e^{-Ct}}{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}}, \ \psi_1(t) = -\frac{C\varphi_0 e^{-Ct}}{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}}, \ \psi_3(t) = \frac{C\varphi_3}{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}}.$$

Тогда из (18), (13) следует, что

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}} \ln\left|\frac{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}}{C}\right|, \quad x_1(t) = \ln\left|\frac{C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}}{C}\right|,$$

$$x_2(t) = \frac{2}{7} - \frac{\sqrt{2/7}|C|}{|C + \varphi_0 - \varphi_0 e^{-Ct}|}, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

II. Пусть $\varphi_2 \neq 0$ и $\varphi_3 \neq 0$. В силу замечания 3 для некоторой дифференцируемой функции $\theta(t)$

$$(\psi_0(t), \psi_1(t)) = |\varphi_2|(\cosh(\theta(t)), \sinh(\theta(t))). \tag{24}$$

Из (19) следует, что

$$\theta'(t) = C + |\varphi_2| \cosh(\theta(t)). \tag{25}$$

Разделяя переменные, находим

$$t - t_0 = \int \frac{d\theta}{C + |\varphi_2| \cosh\theta}. \tag{26}$$

Теорема 1. 1. *Если* $|\varphi_2| > |C|$, *то изотропная экстремаль имеет вид*

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(-Ct + \left[\ln\left(\frac{(1+\alpha)+(1-\alpha)\cos\tau + 2\sqrt{2}\sin\tau}{(1-\alpha)+(1+\alpha)\cos\tau}\right)\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0}\right), \quad (27)$$

$$x_1(t) = [\ln((1-\alpha)+(1+\alpha)\cos\tau)]^{2\sigma}_{-\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0}, \quad x_3(t) = -\varphi_2 t, \quad (28)$$

$$x_2(t) = D\left[\frac{\sin\tau}{(1-\alpha)+(1+\alpha)\cos\tau}\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0}, \quad (29)$$

$$D = \frac{|\varphi_2|\sqrt{2/7}}{\sqrt{\varphi_2^2-C^2}}\big[(1-\alpha)+(1+\alpha)\cos(\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0)\big], \quad (30)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\varphi_2^2-C^2}}{2}(t-t_0), \quad \alpha = \frac{|\varphi_2|+C}{|\varphi_2|-C}. \quad (31)$$

При этом $\alpha > 0$ *и* σ *принимает значения в интервале* $\big(-\arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\big)$, *содержащем* $-\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0/2$.

2. *Если* $0 < |\varphi_2| < C$, *то изотропная экстремаль имеет вид*

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(-Ct + \left[\ln\left(\frac{(1+\alpha)\cosh\tau + (1-\alpha) + 2\sqrt{2}\sinh\tau}{(1-\alpha)\cosh\tau+(1+\alpha)}\right)\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}\right), \quad (32)$$

$$x_1(t) = [\ln((1-\alpha)\cosh\tau+(1+\alpha)]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}, \quad x_3(t) = -\varphi_2 t, \quad (33)$$

$$x_2(t) = D\left[\frac{\sinh\tau}{(1-\alpha)\cosh\tau+(1+\alpha)}\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}, \quad (34)$$

$$D = \frac{|\varphi_2|\sqrt{2/7}}{\sqrt{C^2-\varphi_2^2}}\big[(1-\alpha)\cosh\big(\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0\big)+(1+\alpha)\big], \quad (35)$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{C^2-\varphi_2^2}}{2}(t-t_0), \quad \alpha = \frac{C+|\varphi_2|}{C-|\varphi_2|}. \quad (36)$$

При этом $\alpha > 1$ *и* σ *принимает значения в интервале* $\big(-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}, \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}\big)$, *содержащем* $-\sqrt{\varphi_2^2-C^2}t_0/2$.

3. *Если* $0 < |\varphi_2| < -C$, *то изотропная экстремаль имеет вид*

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(-Ct + \left[\ln\left(\frac{(1+\alpha)\cosh\tau - (1-\alpha) - 2\sqrt{2}\sinh\tau}{(1-\alpha)\cosh\tau-(1+\alpha)}\right)\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}\right), \quad (37)$$

$$x_1(t) = [\ln((1-\alpha)\cosh\tau-(1+\alpha)]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}, \quad x_3(t) = -\varphi_2 t, \quad (38)$$

$$x_2(t) = D\left[\frac{-\sinh\tau}{(1-\alpha)\cosh\tau-(1+\alpha)}\right]^{2\sigma}_{-\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0}, \quad (39)$$

$$D = \frac{|\varphi_2|\sqrt{2/7}}{\sqrt{C^2-\varphi_2^2}}\big[(1-\alpha)\cosh\big(\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0\big)-(1+\alpha)\big], \quad (40)$$

где σ и α заданы формулами (36). *При этом $0 < \alpha < 1$ и σ принимает значения в одном из двух интервалов* $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}, +\infty\right)$, *содержащем* $-\sqrt{\varphi_2^2 - C^2}t_0/2$.

Доказательство. Применим к (26) формулы 6, 7, 9 из [7, с. 80, 81].

1. Пусть $|\varphi_2| > |C|$. Тогда

$$t - t_0 = \frac{2}{\sqrt{\varphi_2^2 - C^2}} \arctan \frac{(|\varphi_2| - C)\tanh(\theta/2)}{\sqrt{\varphi_2^2 - C^2}} = \frac{2}{\sqrt{\varphi_2^2 - C^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{|\varphi_2| - C}{|\varphi_2| + C}}\tanh(\theta/2)\right).$$

Отсюда последовательно получаем $\tanh(\theta/2) = \sqrt{\alpha}\tan\sigma$ согласно (31),

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{1 + \alpha\tan^2\sigma}{1 - \alpha\tan^2\sigma}, \quad \sinh(\theta(t)) = \frac{2\sqrt{\alpha}\tan\sigma}{1 - \alpha\tan^2\sigma}, \quad \alpha\tan^2\sigma < 1. \tag{41}$$

Далее нам будет удобно иметь последние два равенства в виде

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{\cos^2\sigma + \alpha\sin^2\sigma}{\cos^2\sigma - \alpha\sin^2\sigma} = \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma}, \tag{42}$$

$$\sinh(\theta(t)) = \frac{\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{\cos^2\sigma - \alpha\sin^2\sigma} = \frac{2\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma}. \tag{43}$$

Вследствие (18), (24), (42), (43) и равенства $\psi_2(t) \equiv \varphi_2$ имеем систему ОДУ

$$x_0'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma}, \quad x_1'(t) = \frac{-2|\varphi_2|\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma},$$

$$x_2'(t) = |\varphi_2|e^{-x_1(t)}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma}, \quad x_3'(t) = -\varphi_2.$$

Применяя неопределенные интегралы 5.12.3 и 5.12.5 из [7], после вычислений с точностью до постоянной и с учетом (41), (42), (43) получаем

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \sqrt{\frac{2}{7}}\left[-C(t-t_0) + \ln\left(\frac{1 + \sqrt{\alpha}\tan\sigma}{1 - \sqrt{\alpha}\tan\sigma}\right)\right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{7}}\left[-C(t-t_0) + \ln\left(\frac{1 + \alpha\tan^2\sigma + 2\sqrt{\alpha}\tan\sigma}{1 - \alpha\tan^2\sigma}\right)\right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{7}}\left[-C(t-t_0) + \ln\left(\frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\sigma + 2\sqrt{\alpha}\sin 2\sigma}{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma}\right)\right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем (27). Нетрудно вычислить (28). Применяя (30), имеем

$$x_2'(t) = D\sqrt{\varphi_2^2 - C^2}\frac{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos 2\sigma}{[(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos 2\sigma]^2}.$$

Вследствие 5.12.1 из [7] получаем вычислениями (29).

Осталось заметить, что $\alpha > 0$ и неравенство в (41) равносильно условию $-\arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}} < \sigma < \arctan\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$.

2. Пусть $0 < |\varphi_2| < C$. Тогда

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{C^2 - \varphi_2^2}} \ln\left|\frac{(C - |\varphi_2|)\tanh(\theta/2) + \sqrt{C^2 - \varphi_2^2}}{(C - |\varphi_2|)\tanh(\theta/2) - \sqrt{C^2 - \varphi_2^2}}\right|.$$

Это равенство можно записать в виде

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tanh(\theta/2)+\sqrt{\alpha}}{\tanh(\theta/2)-\sqrt{\alpha}}\right|$$

согласно (36). Следовательно,

$$e^{2\sigma} = \frac{\sqrt{\alpha}+\tanh(\theta/2)}{\sqrt{\alpha}-\tanh(\theta/2)}, \quad \tanh(\theta/2) = \sqrt{\alpha}\frac{e^{2\sigma}-1}{e^{2\sigma}+1} = \sqrt{\alpha}\tanh\sigma \in (-1,1).$$

Выражая по известным формулам $\cosh\theta$, $\sinh\theta$ через $\tanh(\theta/2)$ и используя последние равенства, получаем

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{1+\alpha\tanh^2\sigma}{1-\alpha\tanh^2\sigma} = \frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)}, \tag{44}$$

$$\sinh(\theta(t)) = \frac{2\sqrt{\alpha}\tanh\sigma}{1-\alpha\tanh^2\sigma} = \frac{2\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)}. \tag{45}$$

Вследствие (18), (24), (44), (45) и тождества $\psi_2(t)\equiv\varphi_2$ имеем систему ОДУ

$$x_0'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)}, \quad x_1'(t) = \frac{-2|\varphi_2|\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)},$$

$$x_2'(t) = |\varphi_2|e^{-x_1(t)}\sqrt{\frac{2}{7}}\cdot\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)}, \quad x_3'(t) = -\varphi_2.$$

Применяя неопределенные интегралы 4.11.3 и 4.11.7 из [7], получаем после вычислений с точностью до постоянной и с учетом (44), (45)

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{|\varphi_2|\sqrt{2/7}}{\sqrt{C^2-\varphi_2^2(1-\alpha)}}\left(2(1+\alpha)\sigma - 2\sqrt{\alpha}\ln\left|\frac{\sqrt{\alpha}\tanh\sigma+1}{\sqrt{\alpha}\tanh\sigma-1}\right|\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{7}}\left(-C(t-t_0) + \ln\left(\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma + (1-\alpha) + 2\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к (32). Легко вычислить (33). Имеем

$$x_2'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}}\left[(1-\alpha)\cosh\left(\sqrt{C^2-\varphi_2^2}t_0\right) + (1+\alpha)\right]\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma + (1-\alpha)}{[(1-\alpha)\cosh 2\sigma + (1+\alpha)]^2}.$$

Применяя 4.11.1 из [7], получаем (34).

Осталось заметить, что $\alpha > 1$ и неравенства $-1 < \sqrt{\alpha}\tanh\sigma < 1$ равносильны неравенствам

$$-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1} < \sigma < \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{\alpha}+1}{\sqrt{\alpha}-1}.$$

3. Пусть $0 < |\varphi_2| < -C$. Тогда

$$t - t_0 = \frac{1}{\sqrt{C^2-\varphi_2^2}}\ln\left|\frac{(|\varphi_2|-C)\tanh(\theta/2) - \sqrt{C^2-\varphi_2^2}}{(|\varphi_2|-C)\tanh(\theta/2) + \sqrt{C^2-\varphi_2^2}}\right|.$$

Это равенство можно записать в виде

$$\sigma = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tanh(\theta/2)-\sqrt{\alpha}}{\tanh(\theta/2)+\sqrt{\alpha}}\right|$$

согласно (36). Следовательно,

$$e^{2\sigma} = \frac{\tanh(\theta/2) - \sqrt{\alpha}}{\tanh(\theta/2) + \sqrt{\alpha}}, \quad \tanh(\theta/2) = \sqrt{\alpha}\frac{1+e^{2\sigma}}{1-e^{2\sigma}} = -\frac{\sqrt{\alpha}}{\tanh\sigma} \in (-1,1).$$

Выражая по известным формулам $\cosh\theta$, $\sinh\theta$ через $\tanh(\theta/2)$ и используя последние равенства, получаем

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{\tanh^2\sigma + \alpha}{\tanh^2\sigma - \alpha} = \frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma - (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)}, \tag{46}$$

$$\sinh(\theta(t)) = \frac{-2\sqrt{\alpha}\tanh\sigma}{\tanh^2\sigma - \alpha} = \frac{-2\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)}. \tag{47}$$

Вследствие (18), (24), (46), (47) и равенства $\psi_2(t) \equiv \varphi_2$ имеем систему ОДУ

$$x_0'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma - (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)}, \quad x_1'(t) = \frac{2|\varphi_2|\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)},$$

$$x_2'(t) = |\varphi_2|e^{-x_1(t)}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma - (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)}, \quad x_3'(t) = -\varphi_2.$$

Применяя неопределенные интегралы 4.11.3 и 4.11.7 из [7], после вычислений с точностью до постоянной и с учетом (46), (47), получаем

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{|\varphi_2|\sqrt{2/7}}{\sqrt{C^2 - \varphi_2^2(1-\alpha)}}\left(2(1+\alpha)\sigma + 2\sqrt{\alpha}\ln\left|\frac{\tanh\sigma - \sqrt{\alpha}}{\tanh\sigma + \sqrt{\alpha}}\right|\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{7}}\left(-C(t-t_0) + \ln\left(\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma - (1-\alpha) - 2\sqrt{\alpha}\sinh 2\sigma}{(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)}\right)\right). \end{aligned}$$

Отсюда приходим к (37). Легко вычислить (38). Имеем

$$x_2'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}}\left[(1-\alpha)\cosh\left(\sqrt{C^2 - \varphi_2^2}t_0\right) - (1+\alpha)\right]\frac{(1+\alpha)\cosh 2\sigma - (1-\alpha)}{[(1-\alpha)\cosh 2\sigma - (1+\alpha)]^2}.$$

Применяя 4.11.1 из [7], получаем из вычислений (39), (40).

Поскольку $-1 < -\frac{\alpha}{\tanh\sigma} < 1$ и $0 < \alpha < 1$, то $\tanh\sigma > \sqrt{\alpha}$ или $\tanh\sigma < -\sqrt{\alpha}$. Осталось заметить, что первое (соответственно второе) неравенство равносильно неравенству

$$\sigma > \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}} \quad (\text{соответственно } \sigma < -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{\alpha}}{1-\sqrt{\alpha}}). \quad \square$$

Теорема 2. 1. *Если $C = -|\varphi_2| \neq 0$, то изотропная экстремаль имеет вид*

$$x_0(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\left[\tau + \ln\left(\frac{\tau - 1}{\tau + 1}\right)\right]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}, \quad \sigma = |\varphi_2|(t - t_0); \tag{48}$$

$$x_1(t) = [\ln(\tau^2 - 1)]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}, \quad x_3(t) = -\varphi_2 t, \tag{49}$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}\left(1 - \varphi_2^2(t_0)\right)\left[\frac{\tau}{\tau^2 - 1}\right]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}. \tag{50}$$

При этом σ принимает значения в одном из двух интервалов $(1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$, содержащем $-|\varphi_2|t_0$.

2. *Если $C = |\varphi_2| \neq 0$, то изотропная экстремаль имеет вид*

$$x_0(t) = -\sqrt{\frac{2}{7}}\left[\tau + \ln\left(\frac{1-\tau}{1+\tau}\right)\right]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}, \quad \sigma = |\varphi_2|(t - t_0), \tag{51}$$

$$x_1(t) = [\ln(1-\tau^2)]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}, \quad x_3(t) = -\varphi_2 t, \tag{52}$$

$$x_2(t) = \sqrt{\frac{2}{7}}(1 - \varphi_2^2(t_0))\left[\frac{\tau}{1-\tau^2}\right]_{-|\varphi_2|t_0}^{\sigma}. \tag{53}$$

При этом σ принимает значения в интервале $(-1, 1)$, содержащем $-|\varphi_2|t_0$.

Доказательство. 1. Пусть $C = -|\varphi_2|$. Применим неопределенный интеграл 24 из [7, с. 82] к (26):

$$\sigma = -\frac{1}{\tanh(\theta(t)/2)}, \quad \sigma = |\varphi_2|(t - t_0),$$

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1}, \quad \sinh(\theta(t)) = \frac{-2\sigma}{\sigma^2-1}, \quad \sigma^2 > 1. \tag{54}$$

Вследствие (18), (24), (54) и тождества $\psi_2(t) \equiv \varphi_2$ имеем систему ОДУ

$$x_0'(t) = |\varphi_2|\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1}, \quad x_1'(t) = \frac{2|\varphi_2|\sigma}{\sigma^2-1},$$

$$x_2'(t) = |\varphi_2|e^{-x_1(t)}\sqrt{\frac{2}{7}} \cdot \frac{\sigma^2+1}{\sigma^2-1}, \quad x_3'(t) = -\varphi_2.$$

Применяя неопределенный интеграл 2.1.13 из [7], находим (48)–(50).

2. Пусть $C = |\varphi_2|$. Применим неопределенный интеграл 22 из [7, с. 82] к (26):

$$\sigma = \tanh(\theta(t)/2), \quad \sigma = |\varphi_2|(t - t_0),$$

$$\cosh(\theta(t)) = \frac{1+\sigma^2}{1-\sigma^2}, \quad \sinh(\theta(t)) = \frac{2\sigma}{1-\sigma^2}, \quad \sigma^2 < 1. \tag{55}$$

Первые выражения в (54) и (55) отличаются знаком, в то время как вторые совпадают. Поэтому, учитывая (48), (49), (50), получаем (51), (52), (53). $\square$

Следствие 1. *Все изотропные сублоренцевы экстремали в подгруппе $G_3 = (\mathbb{R}, +) \times G_2 \subset G$ с началом в единице найдены в п. 0 при $\varphi_2 = 0$ и I.*

Следствие 2. *Все изотропные экстремали не замкнуты.*

Доказательство. Ясно, что это верно для экстремалей в п. I и в теореме 2. Так как функции $\cosh\tau$, $\sinh\tau$ непериодические, а $\sinh\tau$ строго возрастает, это верно в случаях 2, 3 теоремы 1. Это верно и в случае 1 теоремы 1, поскольку σ изменяется в указанном там ограниченном интервале длины, меньшей 2π. Однопараметрическая подгруппа (21) не замкнута, так как экспоненциальное отображение группы Ли G — диффеоморфизм ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на G. Последнее утверждение следует из того, что G изоморфна прямому произведению двумерной векторной группы на группу Ли G_2, изоморфную группе вещественных верхних треугольных (2×2)-матриц, матрицы алгебры Ли которой имеют нулевую вторую строку; для них просто вычислить экспоненты. $\square$

III. Пусть $\varphi_3 \neq 0$. В случае времениподобной экстремали, $\psi_0^2 - \psi_1^2 = 1 + \varphi_2^2$,

$$(\psi_0(t), \psi_1(t)) = \sqrt{1+\varphi_2^2}(\cosh(\theta(t)), \sinh(\theta(t))), \tag{56}$$

$$\theta'(t) = \left(C + \sqrt{1+\varphi_2^2}\cosh(\theta(t))\right). \tag{57}$$

Дальнейшие рассмотрения времениподобных экстремалей совершенно аналогичны п. II с заменой $|\varphi_2|$ на $\sqrt{1+\varphi_2^2}$. Поэтому справедлива

Теорема 3. *Все времениподобные экстремали рассматриваемой сублоренцевой структуры с началом в единице группы G, кроме 1-параметрической подгруппы* (21), *получаются заменами $|\varphi_2|$ на* 1 (*в случае, если рассматривается времениподобная экстремаль с $\varphi_2 = 0$*) *или на $\sqrt{1+\varphi_2^2}$ в теоремах* 1 *и* 2; *они не замкнуты.*

Замечание 4. Возможность единообразного доказательства теорем 1, 2 и 3 основана на равенствах (24), (56) и дифференциальных уравнениях (25), (57).

§ 5. Индуцированные сублоренцевы структуры Вселенной Гёделя

В этом параграфе обсуждаются все другие возможные индуцированные сублоренцевы структуры Вселенной Гёделя *с применением группы Ли G*. Каждая такая структура должна определяться некоторым порождающим алгебру Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ группы Ли G подпространством $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{g}$. Во введении и в конце § 2 было сказано, что подпространство $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ с последним условием трехмерно и имеет вид $\mathfrak{q} = \delta(\mathfrak{p})$, где δ — некоторый автоморфизм алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$.

Из предложения 1 ниже вытекает, что каждое подпространство $\mathfrak{q}$ такого вида задает левоинвариантную сублоренцеву структуру на G, и для каждой такой структуры можно применить указанный в § 3 метод поиска времениподобных и изотропных экстремалей.

Предложение 1. *Пространство вида $\mathfrak{q} = \delta(\mathfrak{p})$ имеет следующие свойства.*

1. *Вектор f_0 из* (10) *содержится в $\mathfrak{q}$.*

2. *Лоренцева метрика* (2) *индуцирует на $\mathfrak{q}$ псевдоскалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ сигнатуры $(+,-,-)$.*

3. *В $\mathfrak{q}$ существует ортонормированный относительно $(\cdot,\cdot)$ базис.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_2 \oplus \mathfrak{z}$ и $\delta(\mathfrak{g}_2) = \mathfrak{g}_2$, $\delta(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}$ для каждого автоморфизма δ алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$. При этом $\delta(e_2) = \alpha e_2$, $\delta(e_1) = e_1 + \beta e_2$, где $\alpha \neq 0$, β — произвольные вещественные числа, а ограничение δ на $\mathfrak{z}$ — произвольное невырожденное линейное преобразование.

Отсюда и из вида базиса (f_0, f_1, f_2) пространства $\mathfrak{p}$ в (10) следует, что $\mathfrak{q}$ включает линейно независимые векторы вида $\widetilde{e}_0 + e_2$, $e_1 + \beta e_2$, $\widetilde{e}_3$, где $\widetilde{e}_0, \widetilde{e}_3$ — произвольные линейно независимые векторы из $\mathfrak{z}$. Поэтому верно утверждение 1.

Из (2) следует, что $(f_0, e_1 + \beta e_2) = 0$ и $(e_1 + \beta e_2, e_1 + \beta e_2) < 0$. Так как $f_0 \in \mathfrak{q}$ и $(f_0, f_0) = 1$, из (2) нетрудно вывести утверждение 3 для базиса $\mathfrak{q}$, включающего f_0, $(e_1 + \beta e_2)/\sqrt{-(e_1 + \beta e_2, e_1 + \beta e_2)}$, и затем утверждение 2. $\square$

Замечание 5. Каждый автоморфизм δ алгебры Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ индуцируется некоторым единственным автоморфизмом Δ группы Ли G. Из доказательства предложения 1 следует, что Δ в общем случае не является изометрией Вселенной Гёделя. Поэтому индуцированные сублоренцевы структуры могут быть не изометричными, а системы из времениподобных и изотропных экстремалей обладать разными свойствами.

Сравнение ортонормированных базисов общих трехмерных порождающих алгебру Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ подпространств $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$, получаемых в доказательстве предложения 1, и ортонормированного базиса для $\mathfrak{p}$, составленного из первых трех векторов в (10), влечет следующую характеризацию подпространства $\mathfrak{p}$.

Предложение 2. *Подпространство $\mathfrak{p}$ характеризуется как порождающее скобками $[\cdot,\cdot]$ алгебру Ли $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$ подпространство $\mathfrak{q}\neq\mathfrak{g}$, допускающее ортонормированный базис, включающий вектор из минимальной некоммутативной подалгебры, ортогональный идеалу $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, и вектор из центра алгебры Ли $(\mathfrak{g},[\cdot,\cdot])$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gödel K.* An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 32, N 7. P. 1409–1417.
2. *Gödel K.* An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // General Relativity and Gravitation. 2000. V. 21, N 3. P. 447–450.
3. *Берестовский В. Н.* Времениподобные и изотропные геодезические Вселенной Гёделя как группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 795–807.
4. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 481–501.
5. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.
6. *Berestovskii V. N., Zubareva I. A.* Sub-Lorentzian geodesics on $GL^+(2,\mathbb{C})$ with the generating space of hermitian matrices in the Lie algebra $\mathfrak{gl}^+(2,\mathbb{C})$ // https://arXiv.org/abs/2310.08905. Pure and Applied Functional Analysis. Accepted.
7. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 16 мая 2024 г.
После доработки 10 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.518+517.54

ОПЕРАТОРЫ КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Исследуются измеримые отображения римановых многообразий, индуцирующие по правилу замены переменной ограниченные операторы пространств Соболева. Получены эквивалентное описание таких отображений и некоторые дополнительные свойства.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.606

Ключевые слова: риманово многообразие, ACL-отображение, отображение с конечным искажением, внешняя операторная функция искажения, оператор композиции и его описание, $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина.

§ 1. Введение

Изучение операторов композиции в пространствах Соболева восходит к классической работе С. Л. Соболева [1] (см. работу [2], в которой приведена подробная история и библиография по этому вопросу). Новый импульс для развития этой проблематики возник при решении задачи Ю. Г. Решетняка об описании всех изоморфизмов φ^* однородных пространств Соболева L^1_n, порожденных квазиконформными отображениями φ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, сформулированной в 1968 г. на первом Донецком коллоквиуме по теории квазиконформных отображений. В [3] показано, что таковыми являются структурные изоморфизмы пространств L^1_n и только они. Предложенный в [3] подход к задаче Решетняка естественно рассматривать в контексте предшествующих этому результатов (см., например, [4]): в теоремах Банаха, Стоуна, Эйленберга, Аренса и Келли, Хьюита, Гельфанда и Колмогорова получены условия на различные структуры пространства непрерывных функций $C(S)$, изоморфизм которых определяет топологическое пространство S с точностью до гомеоморфизма. Отметим здесь результат Стоуна, согласно которому $C(S)$ как структурно упорядоченная группа определяет S. С другой стороны, Накаи [5] и Льюис [6] установили, что изоморфность алгебр Ройдена равносильна квазиконформной эквивалентности областей определения. Выделяя теперь в однородном пространстве Соболева L^1_n две структуры: векторной решетки и полунормированного пространства, мы получаем ситуацию, в алгебраическом смысле близкую к работе Стоуна, а в метрическом — к работе Накаи. Такой взгляд на задачу является наиболее естественным, так как все еще дает возможность восстановить отображение, несмотря на минимум «материала»

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

для его нахождения, доказать его непрерывность и установить его метрические свойства.

В рамках найденного в [3] подхода к проблеме Решетняка возникла следующая задача: какие метрические и аналитические свойства имеет измеримое отображение φ, индуцирующее изоморфизм φ^* по правилу $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, $f \in L^1_n$. Варьируя функциональное пространство, мы каждый раз приходим к новой задаче: пространства Соболева W^1_p, $p > n$, рассмотрены в работе [7], однородные пространства Бесова $b^l_p(\mathbb{R}^n)$, $n > 1$, $lp = n$, — в [8] при $p = n + 1$ и в [9] при $p > n + 1$, пространства Соболева W^1_p, $n - 1 < p < n$, — в [10], пространства риссовых и бесселевых потенциалов — в [11], трехиндексные шкалы пространств Никольского — Бесова и Лизоркина — Трибеля (и их анизотропные аналоги) — в [12], пространства Соболева L^1_p на собственных областях многомерных евклидовых областей, $1 \leq p < \infty$, $p \neq n$, — в [13] (новое сравнительно с [10] доказательство), пространства Соболева L^1_p на областях групп Карно, $1 \leq p < \infty$, — в [14–16]. В [17] к задаче замены переменной в пространствах Соболева применена теория мультипликаторов. Свойства ограниченного оператора композиции на пространствах Бесова кроме работы [9] изучались также в [18] и в [19]. Квазиконформная эквивалентность классов Лизоркина — Трибеля исследована в [20].

Связь изоморфного ограниченного оператора композиции классов Соболева на римановых пространствах с геометрией риманова пространства установлена в [21–23].

Вывод работ [3, 8–16, 21–23] состоит в том, что изоморфность оператора φ^* влечет в зависимости от соотношения между показателями гладкости, суммируемости и размерностью пространства свойство отображения быть квазиконформным или квазиизометрическим в метрике области определения, адекватной геометрии функционального пространства.

Исследуемая в этой работе задача состоит в том, чтобы найти необходимые и достаточные условия на измеримое отображение φ, при выполнении которых φ индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор φ^* пространств Соболева с первыми обобщенными производными на областях полных римановых многообразий.

Настоящую работу можно рассматривать как естественное развитие результатов и методов работ [2, 12, 13, 24–27], успешно примененных в [14–16] для решения задачи об операторе композиции на группах Карно.

Основной результат работы сформулирован в теореме 1, в которой при некоторых ограничениях на геометрию риманова многообразия в образе получены эквивалентные функциональные свойства отображений римановых многообразий, индуцирующих по правилу замены переменной ограниченные операторы композиции классов Соболева с первыми обобщенными производными. Кроме того, доказано, что исследуемый класс отображений обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и другими свойствами.

§ 2. Классы функций и отображений Соболева на римановом многообразии

Далее фиксируем связное полное риманово многообразие $\mathbb{M} = (\mathbb{M}, g)$, т. е. гладкое многообразие $\mathbb{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ которого выбрано скалярное произведение g_x, гладко меняющееся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно гладкой кривой $\gamma : [a, b] \to \mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int\limits_a^b |\dot{\gamma}(t)|\, dt$ (здесь $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ — длина касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)}\mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x, y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых с концевыми точками x и y.

Символом $B(x, r) = \{y \in \mathbb{M} \mid d(x, y) < r\}$ будем обозначать открытый шар в римановой метрике с центром в точке $x \in \mathbb{M}$ и радиусом $r \in (0, \infty)$, а символом $B^E(x, r)$ — евклидов шар в $\mathbb{R}^n$.

Мера на многообразии $\mathbb{M}$ определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта в $\mathbb{M}$. Диффеоморфизм $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как изометрию между (U, g) и $(\varphi(U), \overline{g})$, если определить риманов тензор $\overline{g}$ на $\varphi(U)$ следующим образом: $\overline{g}_x(X, Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x\mathbb{R}^n$. Меру множества $E \subset U$ в том случае, когда образ $\varphi(E)$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^n$, определим по формуле

$$\omega(E) = \int\limits_{\varphi(E)} \sqrt{\det \overline{g}}\, dx.$$

Можно доказать, что определенная таким образом мера не зависит от выбора системы координат и совпадает с n-мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^n(E)$ множества E как подмножества метрического пространства $(\mathbb{M}, g)$ (см., например, [28]).

Мера $\omega(E)$ произвольного множества $E \subset \mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i), \quad \text{где } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

множества E_i дизъюнктны, измеримы и каждое содержится в одной карте. Можно показать, что и в этом случае справедливо равенство $\mathscr{H}^n(E) = \omega(E)$.

Далее будем исследовать свойства измеримых отображений $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$, где $(\mathscr{M}, \mathfrak{g})$ — еще одно риманово многообразие с римановым тензором $\mathfrak{g}$, относительно которого определяются риманова метрика $\mathfrak{d}$ на $\mathscr{M}$; риманова метрика $\mathfrak{d}$ определяет, в свою очередь, меру ν на $\mathscr{M}$.

Пусть D — область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 1. **1)** Пространство функций $L_p(D)$, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$, состоит из измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f \mid L_p(D)\| = \left(\int\limits_D |f(x)|^p\, d\omega\right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь ω — определенная выше мера на римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$.

2) Если измеримая функция $u : D \to \mathbb{R}$ суммируема на каждой компактной части области D, то она называется *локально суммируемой в степени* s (в этом случае пишем $u \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ или $u \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$).

3) Измеримое отображение $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$, где $\mathscr{M}$ — еще одно риманово пространство, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$, $1 \le s \le \infty$, тогда и только тогда, когда функция $[f]_y : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, определенная по правилу $[f]_y(x) = \mathfrak{d}(f(x), y)$, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ для любой точки $y \in \mathscr{M}$.

Определение 2. Для функций $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ класса C^1 можно определить дифференциал $df : T_x\mathbb{M} \to \mathbb{R}$ в точке $x \in \mathbb{M}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал над конечномерным пространством $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x, существует единственный вектор $\nabla f \in T_x\mathbb{M}$, называемый *градиентом*, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_x\mathbb{M}$.

В координатах градиент ∇f можно найти следующим образом:

$$\nabla f = g^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

где g^{-1} — обратная матрица к g, а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные.

Обобщенным градиентом локально-суммируемой функции $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ называется локально-суммируемое сечение $h : \mathbb{M} \to \mathbb{TM}$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int\limits_{\mathbb{M}} h\eta\, d\omega = -\int\limits_{\mathbb{M}} f\nabla\eta\, d\omega$$

для любой гладкой финитной функции $\eta : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. (Здесь $\nabla\eta$ — градиент функции η на $\mathbb{M}$.)

Однородное пространство Соболева $L^1_p(D)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(D)$. Полунорма в $L^1_p(D)$ определяется как величина

$$\left\|f \mid L^1_p(D)\right\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\| = \left(\int\limits_D |\nabla f(x)|^p\, d\omega\right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь $\nabla f(x)$ — обобщенный градиент функции f в точке $x \in D$, а $|\nabla f(x)|$ — длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x).

Пространство Соболева $W^1_p(D)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\left\|f \mid W^1_p(D)\right\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla f \mid L_p(D)\|.$$

Будем говорить, что f *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$, если $f \in W^1_p(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset D$ такой, что $V \Subset D$ (т. е. V ограничена и $\overline{V} \subset D$).

В [29] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{X}, r)$ — полное метрическое пространство, r — метрика на $\mathbb{X}$, а D — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

Определение 3. Будем говорить, что измеримое отображение $\varphi : D \to \mathbb{X}$ *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathbb{X})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{X}$ функция $[f]_z : x \in D \mapsto r(\varphi(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$.

(B) Семейство градиентов $(\nabla[f]_z)_{z\in\mathbb{X}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, т. е. существует функция $g \in L_{p,\mathrm{loc}}(D)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla[f]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in D$.

Если $\mathbb{X} = \mathscr{M}$ — еще одно риманово многообразие с расстоянием $\mathfrak{d}$, то получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс символом $W^1_{p,\mathrm{loc}}(D; \mathscr{M})$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [30–32]).

Определение 4 [30, 32]. Говорят, что измеримое отображение f *принадлежит* $\mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$, если выполняются три условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \to [f]_z(x) = \mathfrak{d}(f(x), z)$ принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathscr{M}$;
2) отображение $f : \mathbb{M} \to \mathscr{M}$ абсолютно непрерывно на линиях в следующем смысле: для любой координатной карты $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{M}$ функция[1)]
$$(\overline{x}_i, x_i) \in \mathrm{Pr}_i(\varphi(U)) \times \{x_i \in \mathbb{R} : \overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i \in \varphi(U)\} \mapsto g_i(\overline{x}_i, x_i) = f \circ \varphi^{-1}(\overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i) \in \mathscr{M}$$
абсолютно непрерывна относительно переменной x_i для всех i и почти всех $\overline{x}_i \in \mathrm{Pr}_i(\varphi(U))$ (здесь $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, — стандартный базис $\mathbb{R}^n$);
3) производная
$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{dg_i}{dx_i}(\overline{x}_i, x_i) = \lim_{t\to+0} \frac{g_i(\overline{x}, x_i + t)}{t},$$
существующая почти всюду в U, принадлежит $L_{s,\mathrm{loc}}(U)$ для всех i.

Предложение 1 [30, предложение 3.1]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $f \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$;

(2) $f \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$;

(3) $f \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$ *и существует функция* $g \in L_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ *такая, что для любой липшицевой функции* $\psi : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ *функция* $\varphi := \psi \circ f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *принадлежит* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ *и* $|\nabla\varphi(x)| \leq \mathrm{Lip}(\psi)\, g(x)$ *п. вс. в* $\mathbb{M}$.

(4) *для любого изометрического вложения* $i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^k$ *все координатные функции композиции* $i \circ f$ *принадлежат* $W^1_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$.

Доказательство. Импликации следуют порядку (1) ⇒ (2) ⇒ (3) ⇒ (4) ⇒ (2). Заметим, что импликация (3) ⇒ (1) очевидна, так как функция расстояния 1-липшицева.

Далее, (1) ⇒ (2) и (2) ⇒ (3) доказаны в [33, предложение 3] (заметим, что (1) ⇒ (3) другим способом доказано также в [29, теорема 5.1]).

Доказательство (4) ⇒ (2) приведено в [34, предложение 1.2] для специального случая $\mathscr{M} = \mathbb{R}^n$. Его обобщение на случай подмногообразий $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^k$ основано на формуле
$$g_i(x, \tau + t) - g_i(x, \tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau+t} \frac{d}{ds}(f \circ \varphi^{-1}(x + s\mathbf{e}_i))\, ds,$$
которая верна для всех абсолютно непрерывных кривых в $\mathbb{R}^k$. Общий случай следует из возможности вложить изометрично всякое риманово многообразие в некоторое евклидово пространство.

[1)]Здесь $\mathrm{Pr}_i(A)$ — проекция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ на $(n-1)$-мерную плоскость $\Pi_i = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, ортогональную $\mathbf{e}_i$, т. е. $\mathrm{Pr}_i(x) = (x - x_i\mathbf{e}_i)$ для точки $x \in \mathbb{R}^n$. Если $\mathrm{Pr}_i(x) = \overline{x}_i$, то точку $x \in \mathbb{R}^n$ можно записывать в виде $x = (\overline{x}_i, x_i)$. Тогда $x = \overline{x}_i + x_i\mathbf{e}_i$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Рассмотрим любое изометрическое вложение $i : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^k$ и некоторую координатную функцию z_j в $\mathbb{R}^k$. Ограничение $z_j|_{\mathscr{M}}$ — это липшицева функция на $\mathscr{M}$. Следовательно, композиция $z_j \circ f$ принадлежит $W^{1,s}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$. $\square$

В следующем предложении формулируется свойство локальной липшицевости соболевского отображения.

Предложение 2. *Пусть $\varphi \in \mathrm{ACL}_{s,\mathrm{loc}}(\mathbb{M}, \mathscr{M})$. Тогда существует представление $\mathbb{M} = E_\varphi \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств таких, что $\omega(E_\varphi) = 0$, A_i измеримо для всех i, а ограничение $\varphi|_{A_i}$ липшицево.*

Доказательство. Применение сформулированных выше свойств отображений классов Соболева позволяет свести доказательство этого предложения к известной аппроксимационной теореме Уитни (см., например, [35–37]).

Предложение 1 позволяет по-другому определить дифференциал. Матрица, столбцы которой — это векторы

$$\frac{d}{dt} g_i(x + t\mathbf{e}_i)|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}\mathscr{M}, \quad i = 1, \dots, n,$$

определяет линейный оператор $D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathscr{M}$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathscr{M}$ для почти всех x и называется (*формальным*) *дифференциалом* отображения φ в точке x. Пусть $|D\varphi|(x)$ — норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim \mathscr{M}$ определитель матрицы $D\varphi(x)$ называется *якобианом* отображения φ в точке x.

В качестве следствия предложения 2 получаем следующий вариант формулы замены переменной в интеграле Лебега. Напомним, что символ χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{M}$. Ниже $d\nu$ — стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathscr{M}$. Символом $\omega(E)$ $(\nu(F))$ обозначаем далее меру $\omega(E) = \int\limits_E \chi_E \, d\omega$ $\big(\nu(F) = \int\limits_F \chi_F \, d\nu\big)$ измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$ $(F \subset \mathscr{M})$

Предложение 3 [35, 37]. *Пусть $\mathbb{M}, \mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть $U \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, $\varphi : U \to \mathscr{M}$ — любое* ACL*-отображение.*

Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ нулевой ω-меры такое, что отображение $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathscr{M}$ удовлетворяет $\mathscr{N}$-условию Лузина.

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

1) *функции $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ и $\mathscr{M} \ni y \mapsto \sum\limits_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ измеримы;*

2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x)|\det D\varphi(x)| \, d\omega(x) = \int\limits_{\mathscr{M}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x) \, d\nu(y); \tag{2}$$

3) *если дополнительно функция $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ интегрируема, то и подынтегральная функция в правой части равенства (2) также интегрируема и верна формула (2).*

§ 3. ACL-отображения и операторы композиции

Отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, называется *отображением с конечным искажением*, если $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$. Класс ACL-отображений $\varphi : \Omega \to \mathscr{M}$ с конечным искажением обозначается символом $FD(\Omega; \mathscr{M})$.

Для ACL-отображения $\varphi \in FD(\Omega; \mathscr{M})$ зададим *функцию искажения*[2)], определенную на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathscr{M}$:

$$A \ni y \mapsto H_{\varphi,q}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det D\varphi(x) \neq 0\} = \varnothing, \\ \Big(\sum\limits_{\substack{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi, \\ \det D\varphi(x) \neq 0}} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|} \Big)^{\frac{1}{q}}, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3}$$

Пространство $\mathrm{Lip}(W)$ состоит из липшицевых в римановой метрике функций $u : W \to \mathbb{R}$, а пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ — из заданных на W функций, липшицевых в римановой метрике на каждом компакте $K \Subset W$.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с вопросом описания ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

В следующем утверждении установим двухсторонние оценки для нормы оператора композиции φ^*.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{4}$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$;
2) *φ имеет конечное искажение;*
3) $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *здесь и далее* $\sigma = \infty$ *при* $q = p$.

При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|$: для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{q,p} \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \le \|\varphi^*\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|, \quad 1 \le q \le p < \infty. \tag{5}$$

Напомним, что отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$ имеет *конечное искажение*, если $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{\det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана. Далее предполагаем множество Z дизъюнктным с множеством Σ_φ из предложения 3: $Z \cup \Sigma_\varphi = \varnothing$.

3.1. Доказательство необходимости содержится в нескольких разделах.

Предложение 4. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Если измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{6}$$

[2)] Функция (3) определена в [38] для операторов композиции в евклидовых пространствах.

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u\circ\varphi$, то $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathscr{M})$.

Доказательство. Пусть открытое множество $W \Subset \mathscr{M}$ компактно вложено в $\mathscr{M}$. Для проверки свойства $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathscr{M})$ достаточно установить, что для любого изометрического вложения $i:\mathscr{M}\to\mathbb{R}^k$ все координатные функции композиции $i\circ f$ принадлежат $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{M},\mathbb{R})$ (см. предложение 1, утверждение 4). Действительно, если z_j — любая координатная функция в $\mathbb{R}^k$, то функция $i^*(z_j) = z_j\circ i$ гладкая на $\overline{W}$ и, следовательно, принадлежит классу $L^1_p(W)\cap\mathrm{Lip}(W)$. В силу (4) композиция $f^*(i^*(z_j)) = (i\circ f)(z_j)$ принадлежит классу $L^1_q(\Omega)$, $j=1,\dots,k$. В силу предложения 1 $\varphi\in\mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathscr{M})$.

Замечание 1. Эту часть доказательства можно обобщить для произвольного измеримого отображения $\varphi:\Omega\to W$, индуцирующего ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L^1_p(W)\cap\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)\to L^1_q(\Omega)$, $1\le q\le p<\infty$, без предположения о компактном вложении $W\Subset\mathscr{M}$ (см. подходящие аргументы в [27, предложение 8]).

Фиксируем произвольное открытое множество $V\subset W$. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ пространство функций $u:W\to\mathbb{R}$, липшицевых в метрике риманова многообразия $\mathscr{M}$, носители которых содержатся в V. Понятно, что $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)\subset\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W)$.

Обозначим через $\|\varphi^*_V\|$ норму сужения оператора композиции φ^* на подпространство $L^1_p(W)\cap\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$. При $q<p$ определим функцию множества Φ, сопоставляя открытому множеству $V\subset W$ число

$$\Phi(V) = \|\varphi^*_V\|^\sigma = \sup_{u\in L^1_p(W)\cap\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V),\, u\ne0}\left(\frac{\|\varphi^*u\mid L^1_q(\Omega)\|}{\|u\mid L^1_p(V)\|}\right)^\sigma,\quad\text{где}\quad \frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}. \tag{6}$$

Лемма 1. *Функция множества Φ, определенная на открытых множествах $V\subset W$ формулой (6), монотонная*[3] *и счетно-аддитивная*[4].

Простое доказательство леммы 1 на группах Карно, полученное в [26, лемма 3.1] (ср. с первоначальным доказательством в [24, лемма 1]), почти дословно переносится на рассматриваемую ситуацию.

Предложение 5 [39, следствие 5]. *Пусть $D\Subset\mathscr{M}$ — открытое компактно вложенное множество, а монотонная и счетно-аддитивная функция множества Φ определена на системе $\mathscr{O}(D)$ всех открытых подмножеств в D, содержащей, в частности, все шары $B(y,r)$ такие, что $\overline{B}(y,r)\subset D$. Тогда*

(a) *в почти каждой точке $x\in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{B_\delta\ni x,\,\delta\to0}\frac{\Phi(B_\delta)}{\nu(B_\delta)} = \Phi'(y),$$

где предел берется по римановым шарам $B_\delta\Subset D$ радиуса $\delta>0$ таким, что $B_\delta\ni x$;

[3] Т. е. $\Phi(V_1)\le\Phi(V_2)$ для любых открытых множеств $V_1\subset V_2\subset W$.

[4] Т. е. для любого счетного дизъюнктного набора открытых множеств $V_i\subset W$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^\infty\Phi(V_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^\infty V_i\right).$$

(b) *для любого открытого множества $U \in \mathscr{O}(D)$ справедливо неравенство*

$$\int\limits_U \Phi'(x)\,d\nu(x) \leq \Phi(U).$$

Сформулируем применяемое ниже свойство евклидовых шаров $\mathbb{R}^n$ (см. [36, 40], где доказаны свойства 1, 2 предложения 6, и [41], где доказано свойство 3 предложения 6).

Предложение 6 [36, 40, 41]. *Для любого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ с непустой границей существует не более чем счетное семейство $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ евклидовых шаров такое, что*

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i^E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} 2B_i^E = V$, *где* $2B_i^E = B^E(z_i, 2r_i)$;

2) *семейства $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ и $2\mathscr{F} = \{2B_i^E\}$ образуют конечнократное покрытие множества V;*

3) *семейство $\{2B_i^E\}$ может быть разбито на конечное число β_n (зависящее только от размерности n) подсемейств таких, что внутри каждого из них шары не пересекаются.*

Следствие 1. *Если покрытие $\{B^E(y_j, 2r_j)\}$ открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$ выбрано в соответствии с предложением 6, то*

$$\sum_j \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) \leq \beta_n \Phi(V),$$

где постоянная β_n зависит только от топологической размерности n.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_i$ — подсемейства семейства $\{B^E(y_j, 2r_j)\}$, состоящие из взаимно не пересекающихся шаров и такие, что

$$\bigcup_{i=1}^{\beta_N} \mathscr{B}_i = \{B^E(y_j, 2r_j)\}.$$

Тогда, очевидно, имеем

$$\sum_j \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) = \sum_{i=1}^{\beta_N} \sum_{B^E(y_j,2r_j)\in\mathscr{B}_i} \Phi(B^E(y_j, 2r_j)) \leq \sum_{i=1}^{\beta_N} \Phi(V) = \beta_N \Phi(V).$$

3.2. В этом пункте докажем несколько вспомогательных свойств и соотношений, применяемых в дальнейших доказательствах.

Лемма 2. *Пусть $\mathbb{M} \ni x \mapsto u(x) = d(x_0, x)$, где $x_0 \in \mathbb{M}$ — фиксированная точка. Тогда*

$$|\nabla u(x)| = 1 \quad \omega\text{-почти всюду в } \mathbb{M}.$$

Доказательство. Разобьем доказательство на три этапа.

1. Имеем $|u(x) - u(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y)$. Таким образом, u — липшицева функция. Отсюда

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{d(x, y)} \leq 1 \quad \text{для всех } x \neq y. \tag{7}$$

2. Для произвольной точки $x \in \mathbb{M}$ найдется кратчайшая γ, соединяющая x и x_0. Пусть y — точка на кривой γ. Тогда $|u(x)-u(y)| = d(x,y)$ и, следовательно,

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{d(x,y)} = 1 \quad \text{для } y \in \gamma. \tag{8}$$

Из неравенств (7) и (8) выводим

$$\varlimsup_{y \to x \in \mathbb{M}} \frac{|u(y)-u(x)|}{d(x,y)} = 1. \tag{9}$$

3. Так как u — липшицева функция, по теореме Радемахера u дифференцируема почти всюду [35]. Пусть $x \in \mathbb{M}$ — точка дифференцируемости функции u, а $X_1, X_2, \dots, X_n$ — локальный базис касательного расслоения в окрестности точки x, ортонормированный в точке x. Переходя к нормальным координатам (см., например, [42, гл. 4, § 3, предложение 3.4]) в точке x, имеем

$$\lim_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{u(y)-u(0)-\nabla u(0)\cdot y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 0, \tag{10}$$

где

$$\nabla u(0)\cdot y = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial y_i}(0) y_i, \quad y \in T_x\mathbb{M}.$$

Как обычно, точки в касательном пространстве и римановом многообразии отождествляются посредством нормальных координат (см. [28]).

Из (9) и (10) можно вывести, что

$$\varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \frac{|\nabla u(0)\cdot y|}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} = 1.$$

Отсюда получаем

$$1 = \varlimsup_{\|y\|_{T_x\mathbb{M}} \to 0} \left| \nabla u(0) \cdot \frac{y}{\|y\|_{T_x\mathbb{M}}} \right| = \sup_{y \in T_x\mathbb{M},\, \|y\|_{T_x\mathbb{M}}=1} |\nabla u(0)\cdot y|.$$

Следовательно, $|\nabla u(x)| = 1$ ω-почти всюду в $\mathbb{M}$.

Замечание 2. Приведем свойства нормальной системы координат [42–44], применяемые в этой работе. Для каждой точки $x \in \mathbb{M}$ найдутся число r_0 и диффеоморфизм $\eta : B(x, r_0) \to T_x\mathbb{M}$ такие, что

1) $\eta(B(x,r)) = B_{T_x}(0,r)$ для любого $r \in (0, r_0)$, где $B_{T_x}(0,r)$ — шар в касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ с центром в точке 0 радиуса r (евклидова структура в касательном пространстве $T_x\mathbb{M}$ определяется тензором g_x);

2) образ любого прямолинейного отрезка $[0,\xi]$, $\xi \in B_{T_x}(0,r)$, при отображении η^{-1} будет кратчайшей геодезической в $\mathbb{M}$ с концевыми точками x и $\eta^{-1}(\xi)$;

3) дифференциал $D\eta : T_x\mathbb{M} \to T_x\mathbb{M}$ в точке x — тождественное отображение;

4) диффеоморфизм $\eta : B(x,r) \to B_{T_x}(0,r)$ квазиизометричен, причем коэффициент квазиизометричности стремится к 1 при $r \to 0$.

Пусть $Z = \{y \in \Omega \mid \det D\varphi(y) = 0\}$ — множество нулей якобиана отображения $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$. Дополнение $\Omega \setminus Z$ с точностью до множества Σ_φ нулевой меры можно представить в виде объединения не более чем счетной дизъюнктной совокупности измеримых множеств T_i (т. е. $\Omega \setminus Z = \Sigma_\varphi \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$), на каждом из которых отображение $\varphi : T_i \to \mathscr{M}$ липшицево относительно римановых метрик (см. предложение 2). Известно [35], что липшицево отображение $\varphi : T_i \to \mathscr{M}$ дифференцируемо в ω-почти всех точках плотности 1 множества T_i, $i \in \mathbb{N}$. Если $x \in T_i$ — точка дифференцируемости, то имеем дифференциал

$$D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \to T_{\varphi(x)}\mathscr{M} \tag{11}$$

касательных пространств. Перейдем к нормальным координатам (U, ζ) (см. [42, гл. 4, § 3, предложение 3.4]) в точке x. Тогда U содержит точку x и $\zeta(x) = 0$, $\zeta(y) = z$ для $y \in U$, а для дифференциала (11) в этой системе координат имеем асимптотическое разложение (см. замечание 2)

$$d(\varphi(z) - \varphi(0) - D\varphi(0)\langle z\rangle) = o(d(z)) \quad \text{при } z \to 0,\ z \in \zeta(U \cap T_i). \tag{12}$$

Свойство 1. *Пусть φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и имеет конечное искажение, $z \in \mathscr{M}$ — фиксированная точка.*

1. *Если $y \ni \mathscr{M} \mapsto f(y)$ — функция класса $\mathrm{Lip}(\mathscr{M}; \mathbb{R})$, а $\Omega \ni x \mapsto (f \circ \varphi)(x)$ — композиция отображения φ с функцией f, то для ω–п. вс. $x \in \Omega$ имеет место равенство*[5)]

$$\nabla(f \circ \varphi)(x) = \begin{cases} [\nabla f](\varphi(x))[D\varphi(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{13}$$

Из (13), в частности, получаем $|\nabla(f \circ \varphi)(x)| \le \mathrm{Lip}\, f \cdot |D\varphi(x)|$ для ω-п. вс. $x \in \Omega$.

2. *Для функции $y \ni \mathbb{G} \mapsto u_z(y) = d(y, z)$, $z \in \mathscr{M}$ — фиксированная точка, композиция $\Omega \ni x \mapsto (u_z \circ \varphi)(x) = d(\varphi(x), z)$ отображения φ с функцией u_z дифференцируема для ω–п. вс. $x \in \Omega$ и имеет место равенство*

$$\nabla(u_z \circ \varphi)(x) = \begin{cases} [\nabla u_z](\varphi(x))[D\varphi(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{14}$$

Из (14) и леммы 2, в частности, получаем

$$|\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| \le |D\varphi(x)| \quad \text{для } \omega\text{-п. вс. } x \in \Omega.$$

Доказательство. 1. Известно, что совокупность $S \subset \mathscr{M}$ точек римановой недифференцируемости липшицевой функции f имеет нулевую меру. Пусть мера прообраза $\varphi^{-1}(S)$ положительна. По формуле замены переменной $\det D\varphi(x) = 0$ для п. вс. $x \in \varphi^{-1}(S)$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль (т. е. $\omega(\varphi^{-1}(S) \setminus Z) = 0$) выводим $\varphi^{-1}(S) \subset Z$. В силу конечности искажения имеем также $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на Z.

Если $x \in T_i \cap Z$ — точка дифференцируемости отображения φ, то $D\varphi(x) = 0$. Из (12) имеем

$$\begin{aligned} |(f \circ \varphi)(y) - (f \circ \varphi)(x)| &\le \mathrm{Lip}\, f \cdot d(\varphi(y), \varphi(x)) \\ &= \mathrm{Lip}\, f \cdot d(D\varphi(x)\langle y - x\rangle) + o(d(y - x)) = o(d(y - x)) \quad \text{при } T_i \ni y \to x. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство в (13) доказано.

Для доказательства первого равенства в (13) рассмотрим точку $x \in T_i \setminus \varphi^{-1}(S)$ плотности 1, в которой отображение φ дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут почти все точки T_i). Так как функция $\mathscr{M} \ni y \mapsto f(y)$

[5)] Мы употребляем обозначение A^{tr} для матрицы, транспонированной к квадратной матрице A.

дифференцируема во всех точках $y \notin S$, то функция $T_i \ni x \mapsto (f \circ \varphi)(x)$ дифференцируема как композиция дифференцируемых отображений [35].

Таким образом, (13) доказано. Неравенство $|\nabla(f \circ \varphi)(x)| \le \operatorname{Lip} f \cdot |D\varphi(x)|$ для ω–п. вс. $x \in \Omega$ получаем из (13).

2. Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что отображение $y \ni \mathscr{M} \mapsto f(y) = u_z(y) = d(y, z)$ — это функция класса $\operatorname{Lip}(\mathscr{M})$ и $\operatorname{Lip} f = 1$ по лемме 2.

Следствие 2. *Пусть* φ *принадлежит классу* $\operatorname{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$,

$$S = \{z_1, z_2, \dots, z_l, \dots\}$$

— счетное всюду плотное множество в $\mathscr{M}$. *Для* ω*-п. вс.* $x \in \Omega$ *справедливо равенство*

$$|D\varphi(x)| = \sup_{z \in S} |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| = \lim_{l \to \infty} \max\{|\nabla(u_{z_i} \circ \varphi)(x)| : i = 1, \dots, l\}.$$

Доказательство. Пусть в точке $x \in \Omega$ отображение φ дифференцируемо.

Если $D\varphi(x) = 0$, то в силу второй строки в равенстве (14) имеем $\nabla(u_z \circ \varphi)(x) = 0$ для любой точки $z \in \mathscr{M}$. (В доказательстве этого свойства условие конечности искажения не используется.) В этом случае следствие 2 доказано!

Если же $D\varphi(x) \ne 0$ в точке $x \in \Omega$, то в нормальной системе координат в точке x имеем неравенство (см. замечание 2)

$$\frac{|d(\varphi(x \exp tw), z) - d(\varphi(x), z)|}{t} \le \frac{d(\varphi(x \exp tw), \varphi(x))}{t},$$

где $w \in T_x\mathbb{M}$, $|w| = 1$, $t > 0$ — вещественный параметр, а $z \in \mathscr{M}$ — произвольная точка. Заметим, что в силу свойств нормальной системы координат в приведенном неравенство будет равенство, если $z = x \exp \tau w$ при $0 < t < \tau$.

В точке $x \in T_i$ плотности 1, в которой отображение φ дифференцируемо, для некоторого вектора $w_0 \in T_x\mathbb{M}$, $|w_0| = 1$, имеем $|D_h\varphi(x)\langle w_0\rangle| = |D_h\varphi(x)|$. Для выбранной точки $z = x \exp \tau w_0$ при $0 < t < \tau$ получаем

$$|\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| = \lim_{t \to 0} \frac{|d(\varphi(x \exp tw_0), z) - d(\varphi(x), z)|}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{d(\varphi(x \exp tw_0), \varphi(x))}{t} = |D\varphi(x)\langle w_0\rangle| = |D\varphi(x)|.$$

Пусть $\{z_{l_k}\}$ — произвольная подпоследовательность последовательности $S = \{z_l\}$, сходящаяся к точке z. Для точки $z_{l_k} = x \exp \tau_k w_k \in T_i$, $|w_k| = 1$, близкой к выбранной ранее точке $z = x \exp \tau w_0$, имеем $w_k \to w_0$ и $\tau_k \to \tau$ при $z_{l_k} \to z$, когда $k \to \infty$, и следующую цепочку соотношений:

$$|\nabla(u_{z_{l_k}} \circ \varphi)(x)| = \lim_{t \to 0} \frac{|d(\varphi(x \exp tw_{l_k}), z_{l_k}) - d(\varphi(x), z_{l_k})|}{t}$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{d(\varphi(x \exp tw_{l_k}), \varphi(x))}{t} = |D\varphi(x)\langle w_{l_k}\rangle| \le |D\varphi(x)|.$$

Сравнивая правые части двух последних соотношений, выводим

$$\lim_{k \to \infty} |\nabla(u_{z_{l_k}} \circ \varphi)(x)| = |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)|, \quad \sup_{z \in S} |\nabla(u_z \circ \varphi)(x)| = |D\varphi(x)|.$$

Приведенное доказательство получено в предположении дифференцируемости отображения φ в точке $x \in T_i$ плотности 1. Таковыми будут ω-почти все точки $x \in \Omega$.

3.3. Доказательство следующего утверждения основано на модификации рассуждений из [26, лемма 3.4].

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть измеримое отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega, W)$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \Subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \leq p < \infty.$$

Тогда отображение φ имеет конечное искажение.

Доказательство. Шаг 1. Фиксируем точку $y_0 \in W$ и шар $B(y_0, r)$ такие, что $B(y_0, 2r) \subset W$. Рассмотрим функцию $\theta(y) = \min\big(1, (2r)^{-1} u_{y_0,2r}(y)\big)$, где $u_{y_0,r}(y) = \max(r - \mathfrak{d}(y_0, y), 0) = (r - \mathfrak{d}(y_0, y))^+$ — липшицева функция с постоянной Липшица $\mathrm{Lip}\, u_{y_0,2r} = 1$ (см. лемму 2).

Используя ограниченность оператора композиции и (6), для липшицевой функции $f : W \to \mathbb{R}$, $|f(y) - f(z)| \leq L\mathfrak{d}(z, y)$ для всех $y, z \in W$, выводим

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) \Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla((f(y) - f(y_0))\theta(y))|^p \, d\nu(y) \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla f|^p(y)\theta^p(y)\, d\nu(y) \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$+ \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \Bigg(\int\limits_{B(y_0,2r)} |\nabla\theta|^p(y)|f(y) - f(y_0)|^p \, d\nu(y) \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{p}} \big(L + L2r(2r)^{-1}\big)$$
$$= c\,\Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} \cdot \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{p}},$$

поскольку $|\nabla f| \leq L$, $\theta(y) \leq 1$, $|\nabla\theta|(y) \leq (2r)^{-1}$, $|f(y) - f(y_0)| \leq L\mathfrak{d}(y, y_0) \leq L2r$ для $y \in B(y_0, 2r)$. Здесь постоянная $c = 2\,\mathrm{Lip}\, f$, где $\mathrm{Lip}\, f$ из определения липшицевости функции f.

В случае $p = q$ следует положить

$$\Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi^*\|.$$

Окончательно приходим к оценке

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_0,r))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x) u(x)\, d\omega(x) \leq c^q \Phi(B(y_0, 2r))^{\frac{q}{\sigma}} \nu(B(y_0, 2r))^{\frac{q}{p}}. \tag{15}$$

Шаг 2. Из оценки (15) можно получить следующее

Свойство 2. *Пусть непостоянное отображение $\varphi : \Omega \to W$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ — связное открытое множество в $\mathbb{M}$, а $W \Subset \mathscr{M}$ — компактно вложенная область, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p \leq n.$$

Для любой липшицевой функции $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0 \quad \text{для } \omega\text{-п. вс. } x \in Z. \tag{16}$$

Доказательство. Покроем область W счетным набором карт $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$. Достаточно доказать соотношение $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ для ω-п. вс. $x \in Z \cap \varphi^{-1}(V_j)$, где $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ — некоторая система координат на $\mathscr{M}$ из выбранного счетного набора: $V_j \subset W$.

Действительно, поскольку $\nu(\varphi(Z)) = \nu(\eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)) = 0$, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно подобрать открытое множество $U \supset \eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$ такое, что $U \subset \eta_j(V_j)$, и покрытие множества $\eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$, состоящее из счетного набора евклидовых шаров $\{B_l^E = B^E(y_l, r_l) \subset U\}$ такого, что шары $B^E(y_l, 2r_l)$ с удвоенными радиусами содержатся в U, образуют конечнократное покрытие $U \supset \eta_j(\varphi(Z) \cap V_j)$ и

$$\sum_{l=1}^{\infty} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big) < M\varepsilon,$$

где M — кратность покрытия. Кроме того, в соответствии с предложением 6 и следствием 1 покрытие $\big\{B_l^E = B^E(y_l, r_l)\big\}$ можно выбрать таким, чтобы

$$\sum_{j=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_j, 2r_j))\big) \le \beta_n \Phi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \eta_j^{-1}(B^E(y_j, 2r_j))\right).$$

Из неравенства (15) при $q < p$ имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{Z \cap \varphi^{-1}(V_j)} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) &\le \sum_{l=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y_l, r_l))} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) \\ &\le C^q \sum_{l=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)^{\frac{q}{\sigma}} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)^{\frac{q}{p}} \\ &\le C^q \left(\sum_{l=1}^{\infty} \Phi\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)\right)^{\frac{q}{\sigma}} \left(\sum_{l=1}^{\infty} \nu\big(\eta_j^{-1}(B^E(y_l, 2r_l))\big)\right)^{\frac{q}{p}} \\ &\le C^q \beta_n^{\frac{q}{\sigma}} M^{\frac{q}{p}} \Phi(W)^{\frac{q}{\sigma}} \varepsilon^{\frac{q}{p}},\end{aligned}$$

где $C = 2 \sup\limits_{B^E(y_l, 2r_l) \subset U} \operatorname{Lip}_{y_l, 2r_l} f$, а

$$\operatorname{Lip}_{y_l, 2r_l} f = \sup_{y, z \in B(y_0, 2r_l)} \left\{\frac{|f(y) - f(z)|}{d(y, z)}\right\}.$$

Если $q = p$, то

$$\int\limits_{Z \cap \varphi^{-1}(V_j)} |\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)\, d\omega(x) \le C^q M \|\varphi^*\|^q \varepsilon.$$

Так как ε — произвольное положительное число, выводим $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ в ω-п. вс. точках $x \in Z \cap \varphi^{-1}(V_j)$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Ввиду $\bigcup\limits_j V_j = W$ имеем $|\nabla(f \circ \varphi)|(x) = 0$ на Z ω-п. вс. Свойство 2 доказано.

Шаг 3. Покажем, как из неравенства (16) можно вывести конечность искажения отображения φ.

Применим для этого следствие 2, в котором φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; W)$, S – счетное всюду плотное множество в W. Для любого $z_i \in S$ в п. вс. точках множества Z нулей якобиана по свойству 2 для функции $f = u_{z_i}$ имеем

$$|\nabla(u_{z_i} \circ \varphi)(x)| = 0.$$

Так как S – счетное множество, то для п. вс. $x \in Z$ приведенное равенство справедливо для всех $z_i \in S$ одновременно.

По следствию 2 выводим, что соотношение

$$|D\varphi(x)| = \lim_{l\to\infty} \max\{|\nabla(u_{z_i} \circ \varphi)(x)| : i = 1, \dots , l\} = 0$$

справедливо для ω–п. вс. $x \in Z$. Из сказанного выше имеем

$$D\varphi(x) = 0 \quad \text{для } \omega\text{-п. вс. } x \in Z.$$

Лемма 3 доказана: конечность искажения отображения φ установлена.

Следствие 3. *Пусть φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; W)$, $W \Subset \mathscr{M}$, имеет конечное искажение и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty.$$

Тогда

$$|D\varphi(x)| \in L_q(\Omega).$$

Доказательство. Из оценки (15) выводим

$$\frac{1}{\nu(B(y_0, r))} \int\limits_{B(y_0,r)} \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{|\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\right) d\nu(y)$$
$$\le \left(2 \sup_{y,z\in B(y_0,2r)} \left\{\frac{|f(y) - f(z)|}{d(y, z)}\right\}\right)^q \left(\frac{\Phi(B(y_0, 2r))}{\nu(B(y_0, 2r))}\right)^{\frac{q}{\sigma}} \left(\frac{\nu(B(y_0, 2r))}{\nu(B(y_0, r))}\right)^{\frac{q}{p}}. \quad (17)$$

Дифференцируя по теореме Лебега (переходя к пределу при $r \to 0$), из (17) получаем

$$\left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{|\nabla(f \circ \varphi)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\right)^{\frac{\sigma}{q}}$$
$$\le \left(2 \varlimsup_{r\to0} \sup_{y,z\in B(y_0,2r)} \left\{\frac{|f(y) - f(z)|}{d(y, z)}\right\}\right)^{\sigma} \mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}} \Phi'(y_0) \quad (18)$$

для ν-п. вс. $y_0 \in \varphi(\Omega\setminus(Z \cup \Sigma))$, где

$$\mathscr{D} = \sup_{y_0\in W} \varlimsup_{r\to0} \frac{\nu(B(y_0, 2r))}{\nu(B(y_0, r))} < \infty. \quad (19)$$

Ограниченность величины (19) можно получить из компактности замыкания $\overline{W}$.

Рассмотрим нормальную систему координат в точке y_0 и положим $f = y_j$ в (17) и (18). Из неравенства

$$|D\varphi(x)|^q \le n^{q-1} \sum_{j=1}^{n} |\nabla\varphi_j(x)|^q$$

и (18) получаем соотношения

$$\bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|D\varphi(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\bigg)^{\frac{\sigma}{q}}\le\bigg(n^{q-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|\nabla\varphi_j(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\bigg)^{\frac{\sigma}{q}}$$
$$\le n^{\sigma-1}\sum_{j=1}^{n}\bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y_0)\setminus\Sigma}\frac{|\nabla\varphi_j(x)|^q}{|\det D\varphi(x)|}\bigg)^{\frac{\sigma}{q}}$$
$$\le n^{\sigma-1}n\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\max_j\bigg(2\varlimsup_{r\to0}\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\bigg\{\frac{|y_j(y)-y_j(z)|}{d(y,z)}\bigg\}\bigg)^{\sigma}\Phi'(y)$$
$$\le(2n)^{\sigma}\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\Phi'(y),\quad(20)$$

где оценка

$$\varlimsup_{r\to0}\sup_{y,z\in B(y_0,2r)}\bigg\{\frac{|y_j(y)-y_j(z)|}{d(y,z)}\bigg\}\le1$$

может быть выведена из (15) с учетом нормальности в точке y_0 системы координат $\eta:V\to\mathbb{R}^n$ на $\mathscr{M}$. Применяя полученные соотношения и неравенство Гёльдера, выводим

$$\int\limits_{\Omega}|D\varphi(x)|^q\,d\omega(x)=\int\limits_{\Omega\setminus Z}\frac{|D\varphi(x)|^q|\det D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|}\,d\omega(x)$$
$$=\int\limits_{W}\bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma}\frac{|D\varphi(x)|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|}\bigg)\,d\nu(y)\le(2n)^q\mathscr{D}\Phi(W)^{\frac{q}{\sigma}}\nu(W)^{\frac{\sigma-q}{\sigma}}.$$

Интегрируемость $|D\varphi(x)|\in L_q(\Omega)$ доказана. Следствие 3 доказано.

Замечание 3. Наиболее простой вид величина (19) имеет в евклидовых пространствах: в этом случае $\mathscr{D}=2^n$. На группах Карно $\mathscr{D}=2^{\nu}$, где ν — размерность по Хаусдорфу (или однородная размерность) группы.

Замечание 4. Для глобальной ограниченности величины (19) достаточно, чтобы кривизна Риччи была в определенном смысле ограниченной снизу: $\mathrm{Rc}\ge-K\mathfrak{g}$ для некоторого $K>0$. Тогда величина (19) ограничена сверху (см. детали в [43]). Последнее следует из оценки Бишопа – Громова о сравнении объемов (см., например, [44, теорема 1.1])

$$\nu(B(x,R))\le e^{\sqrt{(n-1)K}R}\left(\frac{R}{r}\right)^n\nu(B(x,r))\quad\text{для любых }x\in\mathscr{M}\text{ и }0<r<R.$$

3.4. Интегрируя крайние части неравенств (20) по $y\in V\subset W$, получаем левую часть неравенства (5):

$$\|H_{\varphi,q}\mid L_\sigma(V)\|^\sigma\le(2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\int\limits_V\Phi'(y)\,d\nu(y)\le(2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\Phi(W)=(2n)^\sigma\mathscr{D}^{\frac{\sigma}{q}}\|\varphi^*\|^\sigma$$

с постоянной $\alpha_{q,p}=\big(2n\mathscr{D}^{\frac{1}{q}}\big)^{-1}$.

3.5. Докажем достаточность в теореме 1 и правую часть неравенств (5).

Пусть отображение $\varphi:\Omega\to W$ принадлежит классу ACL, имеет конечное искажение и $H_{\varphi,q}\in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\sigma=\infty$ при $q=p$).

Покажем, что для любой функции $u \in L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ выполняется неравенство

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \cdot \left\|u \mid L^1_p(W)\right\|, \quad q < p.$$

Композиция $u \circ \varphi$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega)$, а по свойству 1 и формуле (2) для композиции $\varphi^* = u \circ \varphi$ выводим

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \le \Bigg(\int\limits_{\Omega \setminus Z} (|\nabla u|(\varphi(x))|D\varphi|(x))^q \, d\omega(x) \Bigg)^{1/q}$$
$$\le \Bigg(\int\limits_W |\nabla u|^q(y) \Bigg(\sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus (\Sigma_\varphi \cup Z)} \frac{|D\varphi|^q(x)}{|\det D\varphi(x)|} \Bigg) \, d\nu(y) \Bigg)^{1/q}.$$

Применяя неравенство Гёльдера при $q < p$ к правому интегралу предыдущего неравенства, приходим к оценке

$$\left\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\right\| \le \Bigg(\int\limits_W H^\sigma_{\varphi,q}(y) \, d\nu(y) \Bigg)^{1/\sigma} \Bigg(\int\limits_W |\nabla u|^p(y) \, d\nu(y) \Bigg)^{1/p}. \tag{21}$$

Правая часть соотношений (5) доказана. При $q = p$ доказательство упрощается.

Таким образом, теорема 1 доказана. $\square$

3.6. Замечания 1, 3 и 4 позволяют сформулировать естественное обобщение теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей и, кроме того, кривизна Риччи многообразия $\mathscr{M}$ ограничена снизу: $\mathrm{Rc} \ge -K\mathfrak{g}$ для некоторого $K > 0$.*

Измеримое отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области $\Omega \subset \mathbb{M}$, со значениями в открытом множестве $W \subset \mathscr{M}$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

1) $\varphi \in \mathrm{ACL}_{q,\mathrm{loc}}(\Omega; \mathscr{M})$*;*

2) φ *имеет конечное искажение;*

3) $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *здесь и далее $\sigma = \infty$ при $q = p$.*

При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|$: для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство (5).

Доказательство. По поводу утверждения 1 см. предложение 4. Утверждение 2 фактически доказано на шаге 3 доказательства теоремы 1 в п. 3.3. В доказательстве левой части неравенства (5) надо показать глобальную ограниченность величины $\mathscr{D}$ из (19) (см. замечание 4). Из оценки, приведенной в замечании 4 непосредственно выводим неравенство

$$\nu(B(x; 2r)) \le 2^n \exp(\sqrt{(n-1)K}2r)\nu(B(x; r)),$$

см. [44].

§ 4. $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения φ: $|\varphi^{-1}(E)| = 0$, если $|E| = 0$, $E \subset W$

Сформулируем в евклидовом пространстве неравенство типа Пуанкаре, доказанное в [45].

Лемма 4 [45]. *Пусть F — измеримое подмножество евклидова шара $B^E = B^E(0,r)$ положительной меры. Для всех $u \in W^1_q(B^E)$, $1 \le q < n$, $u|_F = 0$, выполняется неравенство*

$$\bigg(\int\limits_{B^E} |u(x)|^{q^*}\,dx\bigg)^{\frac{1}{q^*}} \le \frac{Cr^{\frac{n}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}}\bigg(\int\limits_{B^E} |\nabla^E u(x)|^q\,dx\bigg)^{\frac{1}{q}}, \tag{22}$$

где ∇^E — евклидов градиент, $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$, а C — некоторая постоянная, не зависящая от функции u.

Предложение 7. *Пусть непостоянное отображение $\varphi : \Omega \to W$, где $\Omega \subset \mathbb{M}$ — связное открытое множество в $\mathbb{M}$, а $W \Subset \mathscr{M}$ — компактно вложенная область, принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega; \mathscr{M})$ и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p \le n.$$

Тогда $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ при $|E| = 0$, $E \subset W$.

Доказательство. Поскольку область W имеет конечную ν-меру, можно считать, что $p = n$. Действительно, если отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega)$, $1 \le q \le p < n$, то в силу неравенства Гёльдера для всех $p' \in (p; \infty)$ и $u \in L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ имеем

$$\big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le \|\varphi^*\| \cdot \big\|u \mid L^1_p(W)\big\| \le \nu(W)^{1-\frac{p}{p'}} \|\varphi^*\| \big\|u \mid L^1_{p'}(W)\big\|.$$

Последнее означает, что φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}}(W) \to L^1_q(\Omega)$.

Случай $1 \le q < p = n$.

Шаг 1. Так как $\overline{W}$ — компактное множество в $\mathscr{M}$, существует конечное число $\eta_j : V_j \to \mathbb{R}^n$ координатных окрестностей на $\mathscr{M}$, покрывающих множество W. Кроме того, можно считать, что $\eta_j(V_j) = B^E(0, 2\tau_j) \subset \mathbb{R}^n$.

На многообразии $\mathbb{M}$ существует счетный набор $\zeta_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ *ограниченных* координатных окрестностей, покрывающих Ω: $\Omega = \sum\limits_i U_i$. Можно считать, что $\zeta_i(U_i) = B^E(0, 2\rho_i) \subset \mathbb{R}^n$, $i \in \mathbb{N}$.

Фиксируем в W произвольное множество E нулевой меры. Так как отображение φ имеет конечное искажение (см. лемму 3), то $\varphi^{-1}(E) \ne \Omega$ (в противном случае $\det D\varphi = 0$ в Ω и, следовательно, $D\varphi = 0$ п. вс. в Ω, откуда получаем, что φ — постоянное отображение). Поэтому найдется координатная окрестность $U_{i_0} = \zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0})) \subset \Omega$ такая, что

$$\omega(U_{i_0} \setminus \varphi^{-1}(E)) = \omega\big(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0})\big) \setminus \varphi^{-1}(E)) > 0.$$

Отсюда выводим, что для некоторого j_0 верно неравенство

$$\omega(U_{i_0} \setminus \varphi^{-1}(E \cap V_{j_0})) = \omega\big(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0, \rho_{i_0}))\big) \setminus \varphi^{-1}(E \cap V_{j_0})) > 0.$$

Первая задача этого шага — доказать, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0}))=0$.

Поскольку отображение φ измеримо, по теореме Лузина найдется компакт $T\subset U_{i_0}\setminus\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0})$ положительной меры такой, что $\varphi: T\to W$ непрерывно. Тогда образ $\varphi(T)\subset W$ компактен и $\varphi(T)\cap(E\cap V_{j_0})=\varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $A\supset E\cap V_{j_0}$, $\varphi(T)\cap A=\varnothing$, $A\subset V_{j_0}$. Пусть $\{B^E(y_k,\tau_k)\}$ — набор шаров, выбранный согласно предложению 6, такой, что наборы $\{B^E(y_k,\tau_k)\}$ и $\{B^E(y_k,2\tau_k)\}$ образуют покрытия множества $\eta_{j_0}(A)$ и кратность M покрытия $\{B^E(y_k,2\tau_k)\}$ конечна ($B^E(y_k,2\tau_k)\subset\eta_{j_0}(A)$ для всех $k\in\mathbb{N}$).

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ функцию $\theta_k(z)=\min(1,(2\tau_k)^{-1}\max(0,2\tau_k-d(z,y_k)))$.

Подставляя в (21) вместо V (u) открытое множество $\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))$ (функцию $\theta_k(z)$), получаем (см. лемму 2)

$$\begin{aligned}\big\|\varphi^*\theta_k\mid L^1_q(U_{i_0})\big\|&\le\big\|\varphi^*\theta_k\mid L^1_q(\Omega)\big\|\\&\le(2\tau_k)^{-1}\nu\big(\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))\big)^{\frac1n}\Bigg(\int\limits_{\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))}H^\sigma_{\varphi,q}(z)\,d\nu(z)\Bigg)^{1/\sigma}\\&\le C_1\Bigg(\int\limits_{\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,2\tau_k))}H^\sigma_{\varphi,q}(z)\,d\nu(z)\Bigg)^{1/\sigma}\end{aligned}\tag{23}$$

в силу неравенства $\tau^{-1}\nu\big(\eta_{j_0}^{-1}(B^E(y_k,\tau))\big)^{\frac1n}\le C_1<\infty$, верного для всех шаров $B^E(y,\tau)\subset\eta_{j_0}(A)$ (постоянная C_1 зависит от $\mathfrak{g}$).

Для функции θ_k, ассоциированной с шаром $B(y_k,2\tau_k)$, имеем $\varphi^*\theta_k=1$ на множестве $\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))$ и $\varphi^*\eta_k=0$ вне прообраза $\varphi^{-1}(B(y_k,2\tau_k))$, в частности, $\varphi^*\theta_k=0$ на множестве T. Полагая $Q=\zeta_{i_0}(U_{i_0})=B^E(0,2\rho_{i_0})\subset\mathbb{R}^n$, запишем неравенство Пуанкаре (22) для функции $\big(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\big)^*\theta_k$:

$$\Bigg(\int\limits_Q\big|\big(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\big)^*\theta_k\big|^{q^*}dy\Bigg)^{\frac{1}{q^*}}\le\frac{C\rho_{i_0}^{\frac nq}}{|\zeta_{i_0}(T)|^{\frac1q}}\Bigg(\int\limits_Q\big|\nabla^E\big(\big(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\big)^*\theta_k\big)\big|^q\,dy\Bigg)^{1/q},\tag{24}$$

где $q^*=qn/(n-q)$, $2\rho_{i_0}$ — радиус шара Q, а C — постоянная из (22).

Для применения неравенства (24) в оценках (23) отметим следующее. Риманов тензор $\overline{g}$ на $Q=\zeta_{i_0}(U_{i_0})=B^E(0,2\rho_{i_0})$ — это перенос тензора g с окрестности U_{i_0} посредством отображения ζ_{i_0} (см. определение в начале § 2). Если $\overline{d}$ — риманова метрика на Q, определенная тензором $\overline{g}$, то метрические пространства (U_{i_0},d) и $(Q,\overline{d})$ изометричны. Более того, для любого измеримого множества $E\subset U_{i_0}$ имеем равенство $\omega(E)=\overline{\omega}(\zeta_{i_0}(E))$. Из последнего выводим равенство

$$\int\limits_E u(\zeta_{i_0}(x))\,d\omega(x)=\int\limits_{\zeta_{i_0}(E)}u(y)\,d\overline{\omega}(y)$$

для любой интегрируемой на Q функции u: $u\in L_1(Q)$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\Bigg(\int\limits_{U_{i_0}}|\varphi^*\theta_k|^{q^*}(x)\,d\omega(x)\Bigg)^{\frac{1}{q^*}}&=\Bigg(\int\limits_Q\big|\big(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\big)^*\theta_k\big|^{q^*}(y)\,d\overline{\omega}(y)\Bigg)^{\frac{1}{q^*}}\\&\le\Bigg(T\int\limits_Q\big|\big(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\big)^*\theta_k\big|^{q^*}(y)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{q^*}}\end{aligned}\tag{25}$$

в силу соотношения $T^{-1}|A| \le \overline{\omega}(A) \le T|A|$ для любого измеримого множества $A \subset Q$ (здесь $|A|$ — мера Лебега множества A, а T — постоянная, зависящая лишь от Q).

Далее применяем (24), чтобы оценить сверху правую часть (25). Для окончательного вывода остается оценить правую часть (24) через $\left\|\varphi^*\theta_k \mid L_q^1(U_{i_0})\right\|$. С учетом $\nabla = \overline{g}^{-1}\nabla^E$ оцениваем интеграл I в правой части (24):

$$I \le \Bigg(\int\limits_Q \left|\nabla^E\left(\left(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\right)^*\theta_k\right)\right|^q dy\Bigg)^{\frac{1}{q}} \le \Bigg(T\cdot\sup_{y\in Q}|\overline{g}(y)|\int\limits_Q \left|\nabla\left(\left(\varphi\circ\zeta_{i_0}^{-1}\right)^*\theta_k\right)\right|^q d\overline{\omega}(y)\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$
$$\le \Bigg(T\cdot\sup_{y\in Q}|\overline{g}(y)|\int\limits_{U_{i_0}} |\nabla(\varphi^*\theta_k)|^q\, d\omega(y)\Bigg)^{\frac{1}{q}}. \quad (26)$$

С учетом равенства $\sigma = q^*$ из оценок (23), (25) и (26) получаем

$$\omega(\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))\cap U_{i_0}) \le \int\limits_{U_{i_0}} |\varphi^*\theta_k|^{q^*}(x)\, d\omega(x) \le C_2 \int\limits_{B(y_k,2\tau_k)} H^\sigma_{\varphi,q}(z)\, dz,$$

где C_2 — постоянная, не зависящая от функции θ_k.

Применяя последнее соотношение и следствие 1, выводим неравенства

$$\omega(\varphi^{-1}(E)\cap Q) \le \sum_{i=1}^\infty \omega(\varphi^{-1}(B(y_k,\tau_k))\cap Q)$$
$$\le C_3\sum_{k=1}^\infty \int\limits_{B(y_k,2\tau_k)} H^\sigma_{\varphi,q}(z)\, dz \le C_3\beta_n\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(A)\|^\sigma. \quad (27)$$

В силу свойств интеграла Лебега функция множества $U \mapsto \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(U)\|^\sigma$ абсолютно непрерывна. Следовательно, правая часть (27) может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе открытого множества $A \supset E\cap V_{j_0}$.

Таким образом, доказано, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_0})) = 0$.

Если $\omega\big(\zeta_{i_0}^{-1}(B^E(0,\rho_{i_0}))\setminus\varphi^{-1}(E\cap V_{j_1})\big) > 0$ для какого-нибудь другого индекса j_1, то с учетом наблюдения, что выбор j_1 не имеет никакого преимущества перед выбором j_0, приходим к выводу, что $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E\cap V_{j_1})) = 0$. Аналогичный вывод справедлив для любого j. Следовательно, $\omega(U_{i_0}\cap\varphi^{-1}(E)) = 0$. Окончательно выводим, что отображение $\varphi : U_{i_0} \to W$ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

Шаг 2. Покажем, что отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина на любой другой координатной окрестности U_{i_1} из выбранных на первом шаге: $\zeta_{i_1}(U_{i_1}) = B^E(0,2\rho_{i_1}) \subset \mathbb{R}^n$, $i_1 \ne i_0$. Положим $x_{i_0} = \zeta_{i_0}^{-1}(0)$ и $x_{i_1} = \zeta_{i_1}^{-1}(0)$.

Пусть $\gamma : [0,L] \to \Omega$ — спрямляемая в римановой метрике кривая с концевыми точками $\gamma(0) = x_{i_0}$, $\gamma(L) = x_{i_1}$ и параметризованная длиной дуги (построение кривой с указанными свойствами можно найти в [22, лемма 3]). Пусть

$$\Delta = \operatorname{dist}(\gamma,\partial\Omega) = \inf_{t\in[0,L]}\operatorname{dist}(\gamma(t),\partial\Omega).$$

В каждой точке $\gamma(s)$ кривой γ рассмотрим координатную окрестность $\zeta_s : U_s \to \mathbb{R}^n$, $U_s \subset \Omega$. Можно считать, что $\zeta_s(U_s) = B^E(0,2\rho_s) \subset \mathbb{R}^n$, $s \in (0,L)$. Совокупность окрестностей U_s, $s \in (0,L)$, вместе с U_{i_0} и U_{i_1} образует открытое покрытие компактного множества $\gamma([0,L])$, из которого можно выбрать конечное подпокрытие $\{U_{s_j}\}$, $0<s_0<s_1<\ldots<s_j<\ldots<s_m<L$, включая в него U_{i_0} и U_{i_1}.

Очевидно, окрестность U_{i_0} имеет непустое пересечение W_1 с некоторой окрестностью из числа выбранных: пусть это будет окрестность $U_{s_{j_1}}$, содержащая точку $\gamma(t_1)$, где $t_1=\inf\{s\in(0,l):\gamma(s)\notin U_{i_0}\}$: $W_1=U_{i_0}\cap U_{s_{j_1}}$. Следовательно, окрестность $U_{s_{j_1}}$ можно взять в качестве окрестности U_{i_0} на первом шаге рассуждения. В результате придем к выводу, что

$$\omega(\varphi^{-1}(E)\cap U_{s_{j_1}})=0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, получим $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi:U_{i_1}\to W$.

Шаг 3. Поскольку выбор координатной окрестности U_{i_1} произволен, доказано $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина отображения $\varphi:\Omega\to W$.

Случай $1<q=p=n$. Фиксируем компактно вложенное связное открытое множество $E\subset\Omega$. Поскольку отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L^1_n(W)\cap\operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)\to L^1_n(\Omega)$, в силу неравенства Гёльдера для всех $q'\in[1;n)$ и $u\in L^1_n(W)\cap\operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$ имеем

$$\begin{aligned}\big\|\varphi^*u\mid L^1_{q'}(E)\big\|&\le\omega(E)^{1-\frac{q'}{n}}\big\|\varphi^*u\mid L^1_n(E)\big\|\\&\le\omega(E)^{1-\frac{q'}{n}}\big\|\varphi^*u\mid L^1_n(\Omega)\le\omega(E)^{1-\frac{q'}{n}}\big\|\varphi^*\big\|\big\|u\mid L^1_n(W)\big\|.\end{aligned}$$

Последнее означает, что φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*: L^1_n(W)\cap\operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)\to L^1_{q'}(E)$, где $\varphi^*(f)=f\circ\varphi|_E$. Полагаем $q'=1$. Далее доказательство с очевидными изменениями следует рассуждениям случая $1\le q<p=n$. В результате получаем $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi:E\to W$. Поскольку существует счетное семейство компактно вложенных открытых множества $E_j\Subset\mathbb{M}$, покрывающих $\mathbb{M}$, теорема доказана и в этом случае.

§ 5. Вариант теоремы 1 для гомеоморфизмов

Определение 5. Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathscr{M}$ — римановы многообразия одинаковых размерностей $n\ge2$, $\Omega\subset\mathbb{M}$ — открытое множество, $W\Subset\mathscr{M}$ — компактно вложенная область. Пусть $1\le q\le p<\infty$. Определим класс $\mathscr{Q}_{q,p}(\Omega,W)$ гомеоморфизмов $\varphi:\Omega\to W$ открытых областей Ω и W таких, что

1) $\varphi\in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

2) отображение φ имеет конечное искажение: $D\varphi(x)=0$ п. вс. на множестве $Z=\{x\in\Omega\mid\det D\varphi(x)=0\}$;

3) операторная функция искажения

$$D\ni x\mapsto K_{q,p}(x,\varphi)=\begin{cases}\frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac1p}}, & \text{если } \det D\varphi(x)\ne0,\\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x)=0,\end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, где $\frac1\sigma=\frac1q-\frac1p$, если $1\le q<p<\infty$, и $\sigma=\infty$, если $q=p$.

Теорема 3. *Пусть задан гомеоморфизм $\varphi:\Omega\to W$ областей $\Omega\subset\mathbb{M}$ и $W\Subset\mathscr{M}$. Гомеоморфизм $\varphi:\Omega\to W$ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*: L^1_p(W)\cap\operatorname{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)\to L^1_q(\Omega),\quad 1\le q\le p<\infty,$$

тогда и только тогда, когда $\varphi \in \mathscr{Q}_{q,p}(\Omega, W)$.

Кроме того, верны соотношения

$$\alpha_{q,p}\|K_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V))\| \le \|\varphi^*_V\| \le \|K_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(V))\|$$

для любого открытого множества $V \subset W$.

Если дополнительно кривизна Риччи многообразия $\mathscr{M}$ *ограничена снизу:* $\mathrm{Rc} \ge -K\mathfrak{g}$ *для некоторого* $K > 0$, *то утверждение теоремы верно для любого открытого множества* $W \subset \mathscr{M}$.

Доказательство. Сформулированное утверждение — это почти очевидное следствие теорем 1 и 2. Для полной ясности достаточно проверить, что

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} K^\sigma_{q,p}(x,\varphi)\,d\omega(x) = \int\limits_{\varphi^{-1}(V)\setminus Z} \left(\frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}\right)^{\frac{1}{\sigma}} d\omega(y) = \int\limits_V H^\sigma_{\varphi,q}(y)\,d\nu(y).$$

§ 6. Распространение оператора композиции теорем 1–3 на все пространство Соболева

Здесь докажем, как из перечисленных в теореме 1 свойств отображения φ можно получить продолжение по непрерывности оператора $\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\mathbb{M})$, $1 \le q \le p < \infty$, совпадающее в определенном смысле с оператором композиции.

Предложение 8. *Пусть* $\mathbb{M}$ *и* $\mathscr{M}$ *— римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть измеримое отображение* $\varphi : \Omega \to W$, *определенное в области* $\Omega \subset \mathbb{M}$, *со значениями в открытом множестве* $W \Subset \mathscr{M}$ *индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{28}$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ *и не является постоянным в области* Ω. *Тогда для произвольной функции* $f \in L^1_p(W)$ *распространение оператора* φ^* *в топологии* $L^1_p(\Omega)$ *совпадает с композицией*

$$\Omega \ni x \to \varphi^*(f)(x) = f \circ \varphi(x) = \begin{cases} \text{п. вс. в } \Omega, \text{ если } f \in L^1_p(W),\ p \in [1,n], \\ \text{всюду в } D, \text{ если } f \in L^1_p(W) \cap C(W),\ p > n. \end{cases}$$

Замечание 5. При $p > n$ функция $f \in L^1_p(W)$ может быть переопределена на множестве меры нуль таким образом, что она станет непрерывной. Поэтому обозначение $f \in L^1_p(W) \cap C(W)$ никаких существенных ограничений на функцию не накладывает, а говорит лишь о том, что в композиции $f \circ \varphi$ при $p > n$ следует рассматривать непрерывный представитель функции $f \in L^1_p(W)$.

Доказательство. Во всех случаях $1 \le q \le p < \infty$ имеем (28). Остается доказать, что распространение оператора по непрерывности совпадает с оператором суперпозиции. Если $f \in L^1_p(W)$ — произвольная функция, то рассмотрим последовательность функций $f_k \in L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$, сходящуюся к f не только в $L^1_p(W)$, но и п. вс. при $p \le n$ и поточечно при $p > n$ в области W. Тогда последовательность композиций $f_k \circ \varphi$ сходится в $L^1_q(\Omega)$ (так как фундаментальная последовательность переходит в фундаментальную). Кроме того, $f_k \circ \varphi$ сходится поточечно к $f \circ \varphi$ в Ω при $p > n$ и почти всюду при $p \le n$, так как в этом случае отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина (см. выше предложение 7).

Дальнейшие рассуждения основаны на аргументах работы [2, доказательство теоремы 5]. Остается сделать вывод о том, что $f\circ\varphi$ — локально суммируемая в области Ω функция. Тогда $f_k\circ\varphi$ будет сходиться к $f\circ\varphi\in L^1_p(\Omega)$.

Существует шар $B\Subset\Omega$ такой, что $|B\setminus Z|>0$, где Z — множество нулей якобиана. Если это не так, то в силу конечности искажения имеем $D\varphi(x)=0$ для п. вс. $x\in B$, откуда вытекает, что $\varphi=\mathrm{const}$ на любом шаре B. Последнее невозможно, так как Ω — связное множество, φ — непостоянное отображение.

Суммируемость композиции $f\circ\varphi$ очевидна на B, если функция f ограничена в области Ω. Произвольный случай сводится к ограниченной снизу функции f такой, что $f\circ\varphi(x)=0$ на некотором множестве $F\subset B\setminus Z$ положительной меры. Действительно, множество $\{z\in\varphi(B\setminus Z)\mid f(z)-k_0\le 0\}$ будет иметь положительную меру при некотором $k_0\in\mathbb{N}$; тогда вместо f можно рассмотреть функцию $\max(f(z)-k_0,0)\in L^1_p(W)$.

Фиксируем функцию $f\in L^1_p(W)$, для которой множество $F=\{x\in B\setminus Z\mid f\circ\varphi(x)=0\}$ имеет положительную меру. Тогда последовательность функций $u_m=g_m\circ\varphi\in L^1_q(B)$, где $g_m=\min(f,m)$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$ при $m\to\infty$. Подставим функцию u_m в следующее неравенство Пуанкаре: пусть F — измеримое подмножество шара $B=B(0,r)$ положительной меры (можно считать, что $B=B(0,r)$ — евклидов шар, лежащий в некоторой координатной окрестности в Ω); для всех $v\in L^1_q(B), 1\le q<\infty, v|_F=0$, выполняется неравенство

$$\Bigl(\int\limits_B |v|^q\,dx\Bigr)^{1/q}\le\frac{Cr}{(r^{-n}|F|)^{1/q}}\Bigl(\int\limits_B|\nabla v|^q\,dx\Bigr)^{1/q}$$

(здесь C — некоторая постоянная, не зависящая от функции v). В результате получим

$$\int\limits_B|u_m|^q\,dx\le\frac{C^qr^q}{r^{-n}|F|}\int\limits_B|\nabla u_m|^q\,dx\le\frac{C^qr^q}{r^{-n}|F|}\int\limits_B|\nabla u|^q\,dx.$$

Так как последовательность функций $u_k=g_k\circ\varphi$, монотонно возрастая, сходится на B к функции $u=f\circ\varphi$ п. вс., по теореме Беппо Леви функция $u=f\circ\varphi$ принадлежит $L_q(B)$. Поскольку шар $B\subset\Omega$ произволен, композиция $f\circ\varphi$ локально суммируема в области D.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соболев С. Л.* О некоторых группах преобразований n-мерного пространства // Докл. АН СССР. 1941. Т. 32, № 6. С. 380–382.
2. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
3. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Структурные изоморфизмы пространств W^1_n и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
5. *Nakai M.* Algebraic criterion on quasiconformal equivalence of Riemann surfaces // Nagoya Math. J. 1960. V. 16. P. 157–184.
6. *Lewis L. G.* Quasiconformal mappings and Royden algebras in space // Trans. Am. Math. Soc. 1971. V. 158, N 2. P. 481–492.

7. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Функциональные характеристики квазиизометрических отображений // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 768–773.

8. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Новый функциональный инвариант для квазиконформных отображений // Некоторые вопросы современной теории функций: Материалы конф. Новосибирск: Ин-т математики СО АН, 1976. С. 18–20.

9. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.

10. *Гольдштейн В. М., Романов А. С.* Об отображениях, сохраняющих пространства Соболева // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 3. С. 55–61.

11. *Романов А. С.* О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса // Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН, 1985. С. 117–133.

12. *Водопьянов С. К.* L_p-теория потенциала и квазиконформные отображения на однородных группах // Современные проблемы геометрии и анализа. Новосибирск: Наука, 1989. С. 45–89.

13. *Vodopyanov S. K.* Composition operators on Sobolev spaces // Complex analysis and dynamical systems II: A conference in honor of Professor Lawrence Zalcman's sixtieth birthday, June 9–12, 2003, Nahariya, Israel. Ann Arbor: Am. Math. Soc., 2005. P. 327–342. (Contemp. Math.; V. 382).

14. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиизометрические отображения // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1001–1039.

15. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и метрические свойства отображений // Докл. АН. 2015. Т. 464, № 2. С. 131–135.

16. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 989–1029.

17. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986.

18. *Bourdaud G., Sickel W.* Changes of variable in Besov spaces // Math. Nachr. 1999. V. 198. P. 19–39.

19. *Koch H., Koskela P., Saksman E., Soto T.* Bounded compositions on scaling invariant Besov spaces // J. Funct. Anal. 2014. V. 266, N 5. P. 2765–2788.

20. *Koskela P., Yang D., Zhou Y.* Pointwise characterizations of Besov and Triebel–Lizorkin spaces and quasiconformal mappings // Adv. Math. 2011. V. 226, N 4. P. 3579–3621.

21. *Водопьянов С. К.* О допустимых заменах переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 6. С. 609–613.

22. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.

23. *Водопьянов С. К.* Изоморфизмы соболевских пространств на римановых многообразиях и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 996–1034.

24. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

25. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 58–109.

26. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.

27. *Водопьянов С. К.* Функционально-геометрические свойства пределов ACL-отображений с интегрируемым искажением // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 605–621.

28. *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

29. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.

30. *Troyanov M., Vodop'yanov S.* Liouville type theorems for mappings with bounded (co-)distortion // Ann. l'Inst. Fourier. 2002. V. 52, N 6. P. 1753–1784.

31. *Vodop′yanov S. K.* $\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.

32. *Vodopyanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemporary Mathematics. Ann Arbor: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–302.
33. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.
34. *Rickman S.* Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993 (Results in Mathematics and Related Area; V. 26).
35. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin: Springer-Verl., 1960.
36. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
37. *Hajłasz P.* Change of variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
38. *Водопьянов С. К.* Операторы подстановки пространств Соболева // Современные проблемы теории функций и их приложений / Тез. докл. конференции, г. Саратов, 2002 г. Саратов: Саратовск. гос. ун-т, 2002. С. 42–43.
39. *Vodop'yanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. Ch. I (Ch. II) // Sib. Adv. Math. 2004 (2005). V. 14 (15), N 4 (1). P. 78–125 (91–125).
40. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
41. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* Одна задача комбинаторной геометрии // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1171–1173.
42. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1987.
43. *Cheeger J., Gromov M., Taylor M.* Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1982. V. 17. P. 15–53.
44. *Эбей Э.* Нелинейный анализ на многообразиях. Пространства и неравенства Соболева. Новосибирск: Изд-во «Тамара Рожковская», 2008.
45. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

Поступила в редакцию 4 августа 2024 г.
После доработки 4 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.518.85

ОЦЕНКИ p–НОРМ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ И БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю. С. Волков

Аннотация. Изучается задача оценки p-норм $(1 \leq p \leq \infty)$ решений неоднородных разностных уравнений. Разностные уравнения рассмотрены как дважды бесконечные (бесконечные в обе стороны) системы линейных уравнений. Установлены оценки для случая матрицы Лорана с диагональным преобладанием. На основе этого результата и идеи разложения матрицы в произведение матриц, связанных с разложением характеристического многочлена, предложены оценки для случая произвольной невырожденной ленточной матрицы Лорана.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.607

Ключевые слова: разностное уравнение, бесконечная система линейных уравнений, дважды бесконечная матрица, матрица Лорана, диагональное преобладание.

Введение

В 1965 г. Ю. Н. Субботин решил очень интересную и сложную задачу по нахождению некоторых констант экстремальной функциональной интерполяции [1]. Важную часть исследования составил разработанный им метод решения и оценки решения разностных уравнений

$$\sum_{l=0}^{2n} b_l Z_{m+l} = C_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1}$$

где $b_0, b_1, \dots, b_{2n}$ — вещественные числа, $\{C_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — заданная последовательность, $\{Z_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — искомая последовательность. С уравнением (1) связывается характеристический многочлен

$$P_{2n}(x) = \sum_{l=0}^{2n} b_l x^l.$$

Ю. Н. Субботиным исследован случай, когда характеристический многочлен не имеет корней на окружности $|x| = 1$, выполнено условие

$$P_{2n}(x) = x^{2n} P_{2n}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0015).

и все корни x_p, $p = 1, \dots, 2n$, многочлена $P_{2n}(x)$ простые. Для ограниченной последовательности $\{C_m\}$ им установлена оценка решения (1) в виде

$$\sup_m |Z_m| \le \frac{(-1)^n}{P_{2n}(-1)} \sup_m |C_m|. \tag{2}$$

Далее Ю. Н. Субботин обобщил [2] задачу из [1] нахождения констант экстремальной функциональной интерполяции, предполагая, что $\{C_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in l_p$ и $\{Z_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in l_p$ $(1 \le p \le \infty)$, здесь, как обычно, принадлежность последовательности $C = \{C_m\}$ классу l_p означает, что $\|C\|_p < \infty$, где

$$\|C\|_p = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\limits_{m\in\mathbb{Z}} |C_m|, & p = \infty. \end{cases}$$

В работе [1] им рассмотрен только случай $p = \infty$, а в [2] оценка (2) решения $Z = \{Z_m\}$ обобщена на случай произвольных p-норм

$$\|Z\|_p \le \frac{\|C\|_p}{|P_{2n}(-1)|}, \tag{3}$$

причем показано, что неравенство (3) неулучшаемое на классе последовательностей.

В дальнейшем Ю. Н. Субботиным рассматривался [3] более общий вид разностных уравнений вида (1), а именно

$$\sum_{l=0}^{n} b_l Z_{m+l} = C_m, \quad m = 0, \pm1, \pm2, \dots, \tag{4}$$

теперь от соответствующего характеристического многочлена

$$P_n(x) = \sum_{l=0}^{n} b_l x^l$$

требовалось лишь, чтобы все корни были отрицательны, различны и отличались от -1. Оценка решения (3) осталась справедливой.

Недавно в работе [4] для случая $p = \infty$ ограничения на простоту корней характеристического многочлена $P_n(x)$ удалось снять. Насколько автору известно, в литературе отсутствуют другие оценки решений разностных уравнений вида (4) или более общего вида

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} b_l Z_{l+m} = C_m, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

которому соответствует функция *символ*

$$P(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l x^l,$$

являющаяся характеристическим многочленом, если конечное число коэффициентов b_l отлично от нуля, а в общем случае это ряд Лорана. В настоящей работе основные результаты работы [4] распространяются на случай произвольных p-норм, $1 \le p \le \infty$. Разностное уравнение (5) переписывается в виде бесконечной системы линейных уравнений и также используется идея работы [5] о разложении исходной матрицы в произведение простейших. Эта же идея использовалась для получения оценок решений конечных циркулянтных матриц в [6, 7].

§ 1. Системы уравнений с матрицами Лорана

Последовательно полагая $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, разностное уравнение (5) можно переписать в форме системы линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{B}Z = C \tag{6}$$

с дважды бесконечной матрицей коэффициентов $\boldsymbol{B} = (b_{l-m})_{l,m=-\infty}^{+\infty}$, называемой *матрицей Лорана* (также иногда называемой дважды бесконечной теплицевой матрицей). Элементами b_{l-m} матрицы $\boldsymbol{B}$ являются коэффициенты в (5). Если разностное уравнение (5) имеет вид (4), конечное число слагаемых в сумме, то матрица $\boldsymbol{B}$ ленточная, имеет конечное число $n+1$ ненулевых диагоналей, образованных коэффициентами b_l, $l = 0, \dots, n$. В дальнейшем будем ссылаться на (5) или (6) и как на разностное уравнение, и как на дважды бесконечную (возможно, ленточную) систему линейных уравнений.

С системой уравнений (6) так же, как и с разностным уравнением (5), ассоциируется символ $P(x)$.

Изучение бесконечных систем линейных уравнений имеет уже длинную историю. Обзор результатов, полученных в этой области до середины XX столетия, можно найти в работе Бернкоффа [8] (см. также гл. 1 в книге [9] и имеющиеся там ссылки). Такие системы уравнений интересны сами по себе, а также встречаются во многих приложениях, таких как теория массового обслуживания, компьютерная алгебра, обработка сигналов, задачи оптимального управления и др. (см. [10] и приведенную там библиографию).

Возникают вопросы существования и единственности решения системы (6) из класса l_p, если последовательность C принадлежит классу l_p, а также вопросы нахождения этого решения или получения его эффективных оценок в p-норме, $1 \le p \le \infty$.

Теплиц [11] нашел спектр матриц Лорана и доказал, что если $P(x)$ имеет корень на единичной окружности $|x| = 1$ комплексной плоскости, то матрица $\boldsymbol{B}$ необратима. Крейн [12] установил, что если символ $P(x)$ не имеет корней на окружности $|x| = 1$, $\sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} |b_l| < \infty$, то система уравнений (6) имеет следующее решение:

$$Z_m = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta_{l-m} C_l, \quad m \in \mathbb{Z},$$

где $\{\beta_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ — коэффициенты в разложении Лорана функции $1/P(x)$ на открытом кольце, содержащем единичную окружность и не имеющем нулей $P(x)$, т. е.

$$\frac{1}{P(x)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \beta_l x^l,$$

при этом справедлива оценка

$$\|Z\|_p \le \sum_{l=-\infty}^{\infty} |\beta_l| \, \|C\|_p,$$

которая точна на классе последовательностей $C \in l_p$, если коэффициенты β_l, $l \in \mathbb{Z}$, имеют одинаковый знак или их знаки строго чередуются (см. [3]). В частности, существование обратной матрицы $\boldsymbol{B}^{-1} = (\beta_{l-m})_{l,m=-\infty}^{+\infty}$ эквивалентно отсутствию нулей символа $P(x)$ на единичной окружности комплексной плоскости.

Операторная (индуцированная) p-норма произвольной матрицы (линейного оператора) $\boldsymbol{B}$ определяется стандартным образом:

$$\|\boldsymbol{B}\|_p := \sup_{Z\neq 0} \frac{\|\boldsymbol{B}Z\|_p}{\|Z\|_p},$$

здесь супремум берется по всем ненулевым последовательностям Z.

Даже в случае конечных матриц для p-норм явные выражения через элементы матрицы известны только для $p = 1$ и $p = \infty$, для рассматриваемых матриц Лорана справедливо

$$\|\boldsymbol{B}\|_1 = \|\boldsymbol{B}\|_\infty = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |b_l|.$$

При $p = 2$ норма матрицы равна величине наибольшего сингулярного числа матрицы. Напомним, что *сингулярными числами* произвольной матрицы $\boldsymbol{B}$ называются квадратные корни из собственных чисел матрицы $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$, где $\boldsymbol{B}^*$ — сопряженная матрица (для вещественной матрицы — транспонированная). Как известно, собственные числа симметрической матрицы $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$ всегда неотрицательны. Приведенное свойство 2-нормы объясняет специальное название этой нормы — *спектральная.*

Для остальных p-норм ($p \neq 1, \infty$) в общем случае нет выражения через элементы матрицы, для симметрической матрицы спектральная норма является наименьшей из всех p-норм:

$$\|\boldsymbol{B}\|_2 \le \|\boldsymbol{B}\|_p$$

для всех $1 \le p \le \infty$.

Отметим, что из свойства единственности аналитической функции комплексной переменной следует, что последовательность $\{\beta_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ состоит из вещественных членов. Более того, ясно, что если все коэффициенты β_l, $l \in \mathbb{Z}$, положительны, то их сумма является некоторой нормой обратной матрицы.

Лемма 1. *Если все элементы обратной матрицы $\boldsymbol{B}^{-1}$ системы линейных уравнений* (6) *одного знака, то*

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|P(1)|}.$$

Для случая бесконечной нормы лемма 1 приведена в [4].

Заметим, что классическая теорема Лорана и другие известные методы позволяют выписать явные формулы для коэффициентов разложения Лорана, но зачастую эти формулы не применимы для приложений. Некоторые методы итеративного построения решений для бесконечных систем линейных уравнений можно найти в [10].

§ 2. Матрицы Лорана с диагональным преобладанием

Говорят, что матрица Лорана $\boldsymbol{B} = (b_{l-m})_{l,m=-\infty}^{+\infty}$ имеет *диагональное преобладание*, если для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ выполняется неравенство

$$|b_k| - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} |b_l| = r > 0. \tag{7}$$

В случае конечных матриц известен простой метод оценки решения системы уравнений с матрицей, имеющей диагональное преобладание. Такой метод был предложен в [13] для получения оценки погрешности интерполяции кубическими сплайнами. Позднее появилось большое количество работ, улучшающих и уточняющих оценку работы [13] для различных частных случаев. Но в общем случае исходная оценка неулучшаема (см., например, [14, 15]). Оказывается, такая оценка справедлива и в рассматриваемом случае.

Теорема 1. *Если матрица Лорана $\boldsymbol{B}$ имеет диагональное преобладание, то система линейных уравнений* (6) *имеет единственное решение Z и при $1 \le p \le \infty$ справедлива оценка*

$$\|Z\|_p \le \frac{\|C\|_p}{r}. \tag{8}$$

Доказательство. Предположим, что у матрицы Лорана $\boldsymbol{B}$ доминирующей является диагональ с элементами b_k, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть Y — произвольная последовательность $Y = \{Y_m\}_{m\in\mathbb{Z}} \in l_p$. Имеем

$$\|\boldsymbol{B}Y\|_p = \Big\|\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}} b_l Y_{l+m}\Big\}\Big\|_p \ge \Big|\|\{b_k Y_{m+k}\}\|_p - \Big\|\Big\{\sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} b_l Y_{l+m}\Big\}\Big\|_p\Big|$$
$$\ge \Big||b_k|\,\|\{Y_{m+k}\}\|_p - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} \|\{b_l Y_{l+m}\}\|_p\Big|.$$

Заметим, что в правой части последнего неравенства стоят нормы векторов $\{b_l Y_{m+l}\}$, которые совпадают с нормами векторов $\{b_l Y_m\}_{m\in\mathbb{Z}}$. Тогда все выражение в правой части неравенства будет равно

$$\Big||b_k|\,\|Y\|_p - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} |b_l|\,\|Y\|_p\Big| = \Big(|b_k| - \sum_{l\in\mathbb{Z}\setminus\{k\}} |b_l|\Big)\|Y\|_p = r\|Y\|_p.$$

Таким образом,

$$\|\boldsymbol{B}Y\|_p \ge r\|Y\|_p.$$

Это означает, что существует обратная матрица $\boldsymbol{B}^{-1}$ и имеет место оценка

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \le \frac{1}{r}.$$

Следовательно, для решения Z системы (6) получаем

$$\|Z\|_p = \|\boldsymbol{B}^{-1}C\|_p \le \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p\|C\|_p \le \frac{1}{r}\|C\|_p.$$

Теорема доказана. □

Следствие 1. *Если матрица Лорана $\boldsymbol{B}$ имеет диагональное преобладание, то*

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \le \frac{1}{r}. \tag{9}$$

Заметим, что теорема 1 справедлива и для случая, когда среди чисел b_l, $l \in \mathbb{Z}$, есть комплексные.

Пример 1. Пусть матрица Лорана $\boldsymbol{B}$ трехдиагональная и $b_0 = 1$, $b_1 = 4$, $b_2 = 1$. Это хорошо известная матрица задачи кардинальной интерполяции кубическими сплайнами. Диагональ, соответствующая $b_1 = 4$, является доминирующей, условия теоремы 1 выполнены, следовательно, имеем оценку решения

$$\|Z\|_p \le \frac{1}{2}\|C\|_p.$$

Следствие 2. *Пусть $\boldsymbol{B}$ — двухдиагональная невырожденная матрица ($n = 1$), т. е. $|b_0| \neq |b_1|$, тогда $r = ||b_0| - |b_1||$. Если числа b_0 и b_1 вещественны и одного знака, то значение диагонального преобладания равно $r = |b_0 - b_1| = |P_1(-1)|$. Если числа b_0 и b_1 противоположного знака, то $r = |b_0 + b_1| = |P_1(1)|$.*

Таким образом, следствие 2 показывает, что любая двухдиагональная матрица Лорана с неравными по модулю значениями на диагоналях является матрицей с диагональным преобладанием, для нее выполнено условие (7). Конечно, в общем случае это неверно.

Пример 2 [4]. Пусть $P_1(x) = x - a$, $a > 0$. Соответствующая матрица Лорана $\boldsymbol{B}$ имеет только две ненулевых диагонали с элементами $-a$ и 1. Если $a > 1$, то

$$\frac{1}{P_1(x)} = \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^m,$$

следовательно, все элементы матрицы $\boldsymbol{B}^{-1}$ неположительны, поэтому

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{a-1} = \frac{1}{-P_1(1)}.$$

В случае $0 < a < 1$ получаем

$$\frac{1}{P_1(x)} = \frac{1}{x-a} = \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^m,$$

и тогда все элементы матрицы $\boldsymbol{B}^{-1}$ неотрицательны, поэтому

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{1-a} = \frac{1}{P_1(1)}.$$

В следующем параграфе будем считать, что разностное уравнение имеет вид (4), тогда матрица Лорана $\boldsymbol{B}$ будет ленточной, ассоциированный с ней символ $P(x)$ будет многочленом $P_n(x)$ степени n.

§ 3. Ленточные матрицы Лорана

Далее покажем, что можно получить оценку решения системы (6) для произвольной невырожденной ленточной матрицы Лорана даже при отсутствии диагонального преобладания. В основе исследования лежит идея о разложении матрицы $\boldsymbol{B}$ в произведение простейших матриц, связанных с факторизацией характеристического многочлена $P_n(x)$ (см. [5]).

Набор коэффициентов $b_0, b_1, \dots, b_n$ однозначно определяет и матрицу Лорана $\boldsymbol{B}$, и многочлен $P_n(x)$. Более того, множество матриц Лорана и множество многочленов $P_n(x)$ изоморфны относительно умножения.

Лемма 2 [4]. *Предположим, что многочлен $P_n(x)$, соответствующий матрице $\boldsymbol{B}$, разложен в произведение многочленов*

$$P_{n-k}(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{n-k}x^{n-k}$$

и

$$P_k(x) = d_0 + d_1 x + \ldots + d_k x^k,$$

ассоциированных с матрицами Лорана $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ соответственно. Тогда $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1$.

Теорема 2. *Если все корни характеристического многочлена $P_n(x)$ матрицы Лорана $\boldsymbol{B}$ положительны и не равны 1, то для решения системы* (6) *справедлива оценка*

$$\|Z\|_p \le \frac{\|C\|_p}{|P_n(1)|}. \tag{10}$$

Для нормы обратной матрицы имеем

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \le \frac{1}{|P_n(1)|},$$

причем

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|P_n(1)|}. \tag{11}$$

Теорема 3. *Если все корни характеристического многочлена $P_n(x)$ матрицы Лорана $\boldsymbol{B}$ отрицательны и не равны -1, то для решения системы* (6) *справедлива оценка*

$$\|Z\|_p \le \frac{\|C\|_p}{|P_n(-1)|}. \tag{12}$$

Для нормы обратной матрицы имеем

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \le \frac{1}{|P_n(-1)|},$$

причем

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|P_n(-1)|}. \tag{13}$$

Доказательство. Справедливость неравенств (10) и (12) следует из следствия 2 и леммы 1, следовательно, будут справедливы и оценки для p-норм обратной матрицы рассматриваемой системы уравнений.

Если все корни $P_n(x)$ положительны, то в разложении характеристического многочлена на линейные множители каждому множителю соответствует двухдиагональная матрица с диагоналями разных знаков. Кроме того, каждая элементарная матрица в разложении будет иметь диагональное преобладание в силу того, что на одной из диагоналей элементы равны 1, а на другой равны соответствующему корню многочлена, отличному от 1. Это означает, что все элементы обратной матрицы одного знака (если корень меньше 1, то положительны и при больше 1 наоборот). Следовательно, обратная матрица $\boldsymbol{B}^{-1}$, получаемая как произведение матриц с элементами одного знака, также будет содержать элементы только одного знака. Таким образом, $\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_1 = \|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty$. Равенство

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_\infty = \frac{1}{|P_n(1)|}$$

для этого случая установлено в [4], что означает справедливость (11).

Если корни $P_n(x)$ отрицательны, то умножение матрицы $\boldsymbol{B}$ слева и справа на диагональную матрицу

$$\boldsymbol{D} := \operatorname{diag}\{\dots, -1, +1, \dots, (-1)^m, \dots\}$$

сводит ситуацию к случаю, когда все корни положительны, в характеристическом многочлене переменная x заменится на $-x$. Тогда будут доказаны равенства (13).

Теоремы 2 и 3 доказаны. $\square$

Следствие 3. *Если характеристический многочлен представлен в виде произведения $P_n(x) = P_{n-k}(x)P_k(x)$, причем все корни многочлена $P_{n-k}(x)$ положительны, а многочлена $P_k(x)$ отрицательны, и $P_n(\pm 1) \neq 0$, то для решения системы* (6) *справедлива оценка*

$$\|Z\|_p \leq \frac{\|C\|_p}{|P_{n-k}(1)P_k(-1)|}.$$

Мы показали, как получить оценки решения системы уравнений (6) с ленточной матрицей Лорана, если корни характеристического многочлена $P_n(x)$ произвольные вещественные. Но в общем случае корни могут быть комплексными.

Пусть при $n = 2$ характеристический многочлен имеет вид

$$P_2(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

с комплексными корнями, не лежащими на окружности $|x| = 1$ комплексной плоскости, т. е. $x_1 = \overline{x}_2 \in \mathbb{C}$. Как отмечалось ранее, следствие 2 останется верным и для комплексных коэффициентов, следовательно,

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \leq \frac{1}{(|x_1| - 1)^2}.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Предположим, что все корни характеристического многочлена $P_n(x) = b_n(x - x_1)\dots(x - x_n)$, соответствующего матрице Лорана $\boldsymbol{B}$, комплексные и не лежат на окружности $|x| = 1$ комплексной плоскости. Тогда*

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \leq \frac{1}{|b_n(|x_1| - 1)\dots(|x_n| - 1)|}. \tag{14}$$

Следствие 4. *Предположим, что характеристический многочлен $P_n(x)$, соответствующий матрице Лорана $\boldsymbol{B}$, не имеет корней на окружности $|x| = 1$ комплексной плоскости и представлен в виде*

$$P_n(x) = (x - x_1)\dots(x - x_m)P_{n-m-k}(x)P_k(x),$$

причем все корни многочлена $P_{n-m-k}(x)$ положительны, а многочлена $P_k(x)$ — отрицательны. Тогда

$$\|\boldsymbol{B}^{-1}\|_p \leq \frac{1}{|(|x_1| - 1)\dots(|x_m| - 1)P_{n-m-k}(1)P_k(-1)|}. \tag{15}$$

Пример 3. Пусть $a_0 = 4$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $n = 2$. Многочлен $P_2(x)$ не имеет вещественных корней. Применение теоремы 4 приводит к оценке $\|Z\|_p \leq \|C\|_p$, но матрица $\boldsymbol{B}$ имеет диагональное преобладание с $r = 2$. Тогда теорема 1 дает более точную оценку $\|Z\|_p \leq \|C\|_p/2$.

Оценка (12) решения системы уравнений (6) или разностного уравнения (4) была ранее установлена Ю. Н. Субботиным [3], однако его результат был получен только для случая простых корней характеристического многочлена $P_n(x)$. Он также показал, что эта оценка достижимая. Тем не менее его результата оказалось достаточно для решения поставленной проблемы нахождения констант экстремальной функциональной интерполяции. На самом деле эти константы им были выражены через нормы некоторых многочленов, явно была выражена константа только для $p = \infty$ через константы Фавара. Позднее Шёнбергом [16] были повторены результаты Ю. Н. Субботина для $p = 2, \infty$, причем в обоих случаях константы были выражены явно через константы Фавара. Нами было показано [17, 18], что искомые константы экстремальной функциональной интерполяции можно также явно выразить через константы Фавара или числа Эйлера для многих других значений p.

Оценка (12) даже в более узком виде [3] была многократно использована в задачах теории приближения, в частности, в [19] для получения точной константы. Обзор по задаче экстремальной функциональной интерполяции можно найти в [20].

§ 4. Матрицы Лорана в задачах кардинальной интерполяции

Концепция диагонального преобладания получила широкое распространение в задачах с матрицами конечной размерности, в том числе и для получения эффективных оценок решений систем уравнений. Для бесконечных матриц таких исследований довольно мало. Здесь можно упомянуть монографию [21] и приведенные в ней ссылки. Однако в [21] классы бесконечных матриц отличаются от рассмотренных в этой статье. Оценка ∞-нормы обратной дважды бесконечной общей вполне неотрицательной матрицы установлена в [22]. Отметим, что трехдиагональные матрицы с диагональным преобладанием (доминирует центральная диагональ) и неотрицательными элементами являются вполне неотрицательными.

В задаче интерполяции сплайнами с равномерными узлами на всей вещественной прямой (так называемая кардинальная интерполяция) возникают ленточные матрицы Лорана. Эта задача довольно подробно изучена (см. [23, 24] и имеющиеся там ссылки). Однако оценок p-норм обратных матриц возникающих здесь систем уравнений не получено. Ясно, что если рассмотреть задачу периодической интерполяции, то у матрицы Лорана и соответствующего циркулянта будет один и тот же характеристический многочлен, ассоциированный с этими матрицами. В работе [25] показано, что спектральная и бесконечная нормы обратных матриц к циркулянтным матрицам, возникающим при интерполяции сплайном нечетной степени $2k+1$, оцениваются величиной $1/|P_{2k}(-1)|$, где $P_{2k}(x)$ — соответствующий характеристический многочлен. Тогда эта же оценка будет справедлива и для p-нормы матрицы Лорана, $1 \leq p \leq \infty$. Это же можно сказать и по оценкам работ [26, 27].

В работе [28] рассмотрена задача интерполяции кубическим сплайном на вещественной прямой для произвольной сетки, получены точные оценки погрешности приближения. История задачи изучения точных оценок погрешности интерполяции, сходимости процессов интерполяции и связанных аспектов приведена в обзоре [29].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Субботин Ю. Н.* О связи между конечными разностями и соответствующими производными // Тр. МИАН СССР. 1965. Т. 78. С. 24–42.
2. *Субботин Ю. Н.* Функциональная интерполяция в среднем с наименьшей n-й производной // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 88. С. 30–60.
3. *Субботин Ю. Н.* Экстремальные задачи функциональной интерполяции и интерполяционные в среднем сплайны // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 118–173.

4. *Volkov Yu. S., Novikov S. I.* Estimates for solutions of bi-infinite systems of linear equations // Eur. J. Math. 2022. V. 8, N 2. P. 722–731.

5. *Волков Ю. С.* О неотрицательном решении системы уравнений с симметрической циркулянтной матрицей // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 2. С. 170–180.

6. *Volkov Yu. S., Novikov S. I.* Estimates for solutions of systems of linear equations with circulant matrices // J. Phys.: Conf. Ser. 2021. V. 2099. 012019.

7. *Volkov Yu. S., Bogdanov V. V.* Estimates for the p-norms of solutions and inverse matrices of systems of linear equations with a circulant matrix // Comput. Mathematics Math. Phys. 2024. V. 64, N 8. P. 1680–1688.

8. *Bernkoff M.* A history of infinite matrices // Arch. History Exact Sci. 1968. V. 4, N 4. P. 308–358.

9. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: Физматгиз, 1962.

10. *Bini D. A., Gemignani L., Meini B.* Computations with infinite Toeplitz matrices and polynomials // Linear Algebra Appl. 2002. V. 343–344, N 1. P. 21–61.

11. *Toeplitz O.* Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlichvielen Veränderlichen // Gött. Nachr. 1907. P. 110–115.

12. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. 1958. Т. 13, № 5. С. 3–120.

13. *Ahlberg J. H., Nilson E. N.* Convergence properties of the spline fit // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1963. V. 11, N 1. P. 95–104.

14. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

15. *Волков Ю. С., Мирошниченко В. Л.* Оценки норм матриц, обратных к матрицам монотонного вида и вполне неотрицательным матрицам // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 6. С. 1248–1254.

16. *Schoenberg I. J.* Cardinal interpolation and spline functions // J. Approx. Theory. 1969. V. 2, N 2. P. 167–206.

17. *Волков Ю. С.* Об одной задаче экстремальной функциональной интерполяции и константах Фавара // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 34–37.

18. *Volkov Yu. S.* Efficient computation of Favard constants and their connection to Euler polynomials and numbers // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. V. 17. P. 1921–1942.

19. *Шевалдин В. Т.* Об одной задаче экстремальной интерполяции // Мат. заметки. 1981. Т. 29, № 4. С. 603–622.

20. *Субботин Ю. Н., Новиков С. И., Шевалдин В. Т.* Экстремальная функциональная интерполяция и сплайны // Тр. ИММ УрО РАН. 2018. Т. 24, № 3. С. 200–225.

21. *Shivakumar P. N., Sivakumar K. C., Zhang Y.* Infinite matrices and their recent applications. Cham: Springer, 2016.

22. *de Boor C.* On the (bi)infinite case of Shadrin's theorem concerning the L_∞-boundedness of the L_2-spline projector // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. V. 17, N 3. P. 24–29.

23. *Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н.* Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976.

24. *Schoenberg I. J.* Cardinal spline interpolation. Philadelphia: SIAM, 1973.

25. *Kershaw D.* A bound on the inverse of a band matrix which occurs in interpolation by periodic odd order splines // J. Inst. Math. Appl. 1977. V. 20, N 2. P. 227–228.

26. *Hoskins W. D., Meek D. S.* The infinity norm of a certain type of symmetric circulant matrix // Math. Comput. 1977. V. 31, N 139. P. 733–737.

27. *Dubeau F., Savoie J.* On circulant matrices for certain periodic spline and histospline projections // Bull. Australian Math. Soc. 1987. V. 36, N 1. P. 49–59.

28. *Волков Ю. С., Новиков С. И.* Оценки решений бесконечных систем линейных уравнений и задача интерполяции кубическими сплайнами на прямой // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 677–690.

29. *Волков Ю. С., Субботин Ю. Н.* 50 лет задаче Шёнберга о сходимости сплайн интерполяции // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 52–67.

Поступила в редакцию 18 июня 2024 г.
После доработки 18 июня 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Волков Юрий Степанович (ORCID 0000-0002-7298-8578)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
volkov@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.982.22

ИНВАРИАНТНЫЕ БАНАХОВЫ ПРЕДЕЛЫ И СИНГУЛЯРНЫЕ СЛЕДЫ

Р. Е. Зволинский,
Е. М. Семенов, А. С. Усачев

Аннотация. Изучается геометрия подмножеств множества банаховых пределов и банаховы пределы, инвариантные относительно оператора Чезаро. Полученные результаты применяются в теории сингулярных следов.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.608

Ключевые слова: банаховы пределы, функциональная характеристика, инвариантные банаховы пределы, сингулярные следы.

1. Введение

Вопрос о существовании сингулярных функционалов был поставлен Лебегом следующим образом: существует ли положительный аддитивный нормализованный инвариантный относительно сдвига функционал (на пространстве измеримых функций), не обладающий свойством нормальности. Шаг в этом направлении был сделан Мазуром в 1929 г. Он анонсировал существование положительных линейных нормализованных инвариантных относительно сдвига сингулярных функционалов на пространстве ограниченных последовательностей [1]. Доказательство впоследствии было опубликовано в книге Банаха [2, гл. II, § 2]. С использованием теоремы о продолжении линейного функционала Банах также дал положительный ответ на вопрос Лебега. Мы дадим определение сингулярных функционалов, построенных Банахом. Их стали называть банаховыми пределами.

Через ℓ_∞ обозначается пространство ограниченных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$ с обычной полуупорядоченностью и нормой

$$\|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|,$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

Линейный функционал B на ℓ_∞ называется *банаховым пределом*, если

1) $B \geq 0$, т. е. $Bx \geq 0$ для всех $x \geq 0$,

2) $B\mathbb{1} = 1$, где $\mathbb{1} = (1, 1, \dots)$,

3) $Bx = BTx$ для всех $x \in \ell_\infty$, где T — оператор сдвига влево, т. е. $T(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$.

Работа Зволинского Р. Е. и Семенова Е. М. поддержана Российским научным фондом, грант № 24-21-00220. Работа Усачева А. С. поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

Множество банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}$. Из определения вытекает, что $\mathfrak{B}$ есть замкнутое (в слабой* топологии) выпуклое множество на единичной сфере пространства ℓ_∞^*,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \le Bx \le \limsup_{n\to\infty} x_n$$

для любых $x \in \ell_\infty$, $B \in \mathfrak{B}$ и, в частности,

$$Bx = \lim_{k\to\infty} x_k$$

для любой сходящейся последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$. Лоренц [3] доказал, что для любых заданных $x \in \ell_\infty$, $a \in \mathbb{R}$ равенство $Bx = a$ справедливо для всех $B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k = a$$

равномерно по $m \in \mathbb{N}$. В этом случае говорят, что последовательность x почти сходится к a, множество всех почти сходящихся последовательностей обозначается через ac. Пространство всех последовательностей, почти сходящихся к нулю, обозначается через ac_0. Очевидно, ac_0 — замкнутое подпространство пространства ℓ_∞. Сачестон [4] уточнил теорему Лоренца, показав, что для заданного $x \in \ell_\infty$

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}\} = [q(x), p(x)],$$

где

$$q(x) = \lim_{n\to\infty} \inf_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k, \quad p(x) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} x_k.$$

Вскоре после публикации книги [2] Эгнью и Морс ввели понятие инвариантных банаховых пределов [5]. Банахов предел называется *инвариантным относительно ограниченного оператора* $G : \ell_\infty \to \ell_\infty$, если $B \circ G = B$. Множество G-инвариантных банаховых пределов обозначается через $\mathfrak{B}(G)$. Можно показать, что множество $\mathfrak{B}(G)$ является выпуклым замкнутым подмножеством в $\mathfrak{B}$. Если оператор G удовлетворяет следующим условиям:

(i) $G \ge 0$ и $G\mathbb{1} = \mathbb{1}$,

(ii) $Gc_0 \subset c_0$,

(iii) $\limsup\limits_{j\to\infty} (A(I-T)x)_j \ge 0$ для всех $x \in \ell_\infty$, $A \in R(G) = \operatorname{conv}\{G^k,\ k \in \mathbb{N}\}$,

то существует G-инвариантный банахов предел [6]. Операторы Чезаро

$$(Cx)_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \quad n \in \mathbb{N},$$

и растяжения

$$(\sigma_n x) = (\underbrace{x_1, x_1, \dots, x_1}_{n}, \underbrace{x_2, x_2, \dots, x_2}_{n}, \dots), \quad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяют условиям (i)–(iii). Следовательно, множества $\mathfrak{B}(C)$ и $\mathfrak{B}(\sigma_n)$ непустые для любого $n \in \mathbb{N}$. Эти примеры говорят о естественности понятия инвариантных банаховых пределов.

Банаховы пределы нашли свое применение в таких областях математики, как теория операторов и теория меры, эргодическая теория, дифференциальные уравнения и пр. Отдельного упоминания заслуживает применение в теории сингулярных следов. Начиная с работы [7], банаховы пределы использовались для построения следов Диксмье. В работе [8] было установлено, что решетка банаховых пределов и решетка положительных нормализованных следов на пространстве «слабо ядерных» операторов изометричны и порядково изоморфны. В этом биективном соответствии инвариантные банаховы пределы идентифицируются с подклассами следов Диксмье. Так банаховы пределы, инвариантные относительно оператора Чезаро, соответствуют максимально инвариантным следам Диксмье. Более подробно о банаховых пределах см. [9, 10].

Эта работа посвящена дальнейшему исследованию геометрии множества банаховых пределов и его подмножеств. Полученные результаты применяются к исследованию сингулярных следов.

2. Основные результаты

Ради простоты обозначений будем отождествлять множество $e \subset \mathbb{N}$ и последовательность $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, где

$$x_k = \begin{cases} 1, & k \in e, \\ 0, & k \notin e. \end{cases}$$

Обозначим через Γ множество неубывающих на $[0,1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$ и $f(1) = 1$. Каждый $B \in \mathfrak{B}$ порождает функцию

$$\gamma(B, t) = B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+t})\right).$$

Эта функциональная характеристика введена в работе [11]. Другая функциональная характеристика — аналог функции распределения — введена в работе Е. А. Алехно [12]. Очевидно, $\gamma(B, \cdot) \in \Gamma$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. Справедливо и обратное: для любой $f \in \Gamma$ существует такой $B \in \mathfrak{B}$, что $\gamma(B,t) = f(t)$ для всех $t \in [0,1]$ [11, предложение 2]. Множество таких банаховых пределов обозначим через $\mathfrak{B}(f)$.

Теорема 1. *Диаметр и радиус $\mathfrak{B}(f)$ равен 2 для любой $f \in \Gamma$.*

Доказательство. Пусть $B \in \mathfrak{B}(f)$, т. е.

$$B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+t})\right) = f(t) \tag{1}$$

для всех $t \in [0,1]$. Хорошо известно, что множество точек разрыва любой монотонной функции конечно или счетно. Обозначим через Q объединение множества рациональных чисел из $[0,1]$ и множества точек разрыва функции f. Множество Q счетно, и континуальная система равенств (1) эквивалентна счетной системе равенств

$$B\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} [2^n, 2^{n+t_k})\right) = f(t_k), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2}$$

где $Q = \{t_1, t_2, \dots\}$. В [13, теорема 23] доказано, что диаметр и радиус любого подмножества из $\mathfrak{B}$, определяемого счетной системой равенств вида (2), равны 2. $\square$

В работе [13] показано, что предположение о счетности условий в системе (2) существенно, т. е. [13, теорема 23] не может быть распространена на континуальные системы вида (2).

Из теоремы 1 вытекает, что $\mathfrak{B}$ есть объединение континуального семейства непересекающихся выпуклых множеств, диаметр и радиус которых равен 2.

Пусть $k, n_k \in \mathbb{N}$. Через W обозначается множество последовательностей

$$x_i = \begin{cases} 1, & n_{2k-1} \leq i < n_{2k}, \\ 0, & n_{2k} \leq i < n_{2k+1}, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N},$$

таких, что

$$\lim_{j\to\infty} j^{-1}(n_{k+j} - n_k) = \infty$$

равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Это определение было введено в [13]. Оно тесно связано с понятием стабилизатора пространства ac_0 [14, 15]. И множество W, и его дополнение плотны в множестве всех последовательностей, состоящих из нулей и единиц, его мера Лебега равна нулю. Эти и другие свойства множества W доказаны в работе [16]. Заметим, для любого $j \in \mathbb{N}$ существует такое $i \leq j$, что $n_{i+1} - n_i \geq h_i$. Действительно,

$$\max_{1\leq i\leq j}(n_{i+1} - n_i) \geq \frac{jh_i}{j} = h_i.$$

В качестве простого примера элемента множества W приведем следующую последовательность:

$$y_i = \begin{cases} 1, & 2^{2k-1} \leq i < 2^{2k}, \\ 0, & 2^{2k} \leq i < 2^{2k+1}, \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}.$$

Обозначим через W_0 множество таких последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, что $0 \leq x_k \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и для любого $0 < \varepsilon \leq 1$ существуют такие $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, что $a \leq \varepsilon b$, $c \leq \varepsilon d$, $x_k \leq \varepsilon$ для $k \in [a, b]$, $x_k \geq 1 - \varepsilon$ для $k \in [c, d]$. Отметим, что последовательность y, определенная выше, не принадлежит множеству W_0.

Лемма 2. *Оператор Чезаро C отображает W_0 в себя.*

Доказательство. Очевидно, $0 \leq (Cx)_k \leq 1$ для всех $k \in \mathbb{N}$, $x \in W_0$. Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$, $x \in W_0$. Тогда найдутся такие $a_1, b_1 \in \mathbb{N}$, что

$$a_1 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} b_1 \leq \varepsilon^2 b_1, \quad x_k \leq \frac{\varepsilon^2}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$, $a_1 \leq k \leq b_1$. Если

$$\frac{2a_1}{\varepsilon} \leq j \leq \frac{4a_1}{\varepsilon^2},$$

то

$$(Cx)_j = \frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j} x_k \leq \frac{a_1}{j} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{j - a_1}{j} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Обозначим

$$a = \left[\frac{2a_1}{\varepsilon}\right], \quad b = \left[\frac{4a_1}{\varepsilon^2}\right].$$

Полученное неравенство означает, что $0 \leq (Cx)_j \leq \varepsilon$ для всех $a \leq j \leq b$ и $a \leq \varepsilon b$. Аналогичным образом можно доказать существование таких $c, d \in \mathbb{N}$, что $(Cx)_j \geq 1 - \varepsilon$ для всех $c \leq j \leq d$ и $c \leq \varepsilon d$. Отсюда $Cx \in W_0$. $\square$

Следствие 3. *Для любого $m \in \mathbb{N}$ оператор C^m отображает W_0 в себя.*

Теорема 4. *Для любого $x \in W_0$*

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}(C)\} = [0,1]. \tag{3}$$

Доказательство. В [11, предложение 24] доказано, что для любого $x \in \ell_\infty$

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}(C)\} = [\lim_{m\to\infty} \liminf_{j\to\infty} (C^m x)_j, \lim_{m\to\infty} \limsup_{j\to\infty} (C^m x)_j].$$

Как видно из доказательства леммы 2, для любых $m \in \mathbb{N}$, $x \in W_0$ существует такое $y_m = C^m x$, что

$$\lim_{m\to\infty} q(y_m) = 0, \quad \lim_{m\to\infty} p(y_m) = 1.$$

Это означает, что 0 и 1 принадлежат множеству $\{Bx : B \in \mathfrak{B}(C)\}$. В силу выпуклости множества $\{Bx : B \in \mathfrak{B}(C)\}$ отсюда следует (3). $\square$

Всякая монотонно возрастающая последовательность целых чисел $n(k)$ порождает последовательность $x_{n(k)}$ по формуле

$$x_{n(k)} = \begin{cases} 1, & n_{2i-1} \le k < n_{2i}, \\ 0, & n_{2i} \le k < n_{2i+1}. \end{cases} \tag{4}$$

Простое достаточное условие принадлежности последовательности вида (4) множеству W состоит в следующем:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = \infty.$$

В [11, следствие 21] в других обозначениях доказано, что

$$\{Bx_{n(k)} : B \in \mathfrak{B}(C)\} = \frac{1}{2},$$

если $n(k) = [\alpha^k]$, $\alpha > 1$. Так как последовательность (4) принадлежит W, этот пример показывает, что в формулировке теоремы 4 множество W_0 не может быть заменено на W.

Множество $\mathfrak{B}$ банаховых пределов можно представить как прямую сумму подмножеств $\mathfrak{B}_d$ и $\mathfrak{B}_c$, которые называются *дискретной* и *непрерывной частями* соответственно (см. [17, 18]).

Так как

$$\mathfrak{B}(C) \subsetneq \bigcap_{n=2}^{\infty} \mathfrak{B}(\sigma_n)$$

и $\mathfrak{B}(C) \subsetneq \mathfrak{B}_c$ [19, 20], из теоремы 4 вытекает

Следствие 5. *Для любых $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, $x \in W_0$*

$$\{Bx : B \in \mathfrak{B}(\sigma_n)\} = \{Bx : B \in \mathfrak{B}_c\} = [0,1].$$

Лемма 6. *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. *Положим* $n(k) = r^k$, $k \in \mathbb{N}$ *и* $m(k) = n(k)(1 + d_k)$ *для некоторой последовательности* $d_k \to 0$ *при* $k \to \infty$. *Если* $x = x_{n(k)}$ *и* $y = y_{m(k)}$ *имеют вид* (4), *то* $x - y \in ac_0$.

Доказательство. Для любого достаточно большого $k \in \mathbb{N}$ множество $|x - y|_k$ есть объединение двух отрезков в $\mathbb{N}$, длина каждого из которых не превосходит

$$\max(|m_{2k-1} - r^{2k-1}|, |m_{2k} - r^{2k}|).$$

Поэтому

$$0 \leq p(|x - y|) = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} |x - y|_k$$
$$\leq 2 \limsup_{k\to\infty} \frac{|m_k - r^k|}{m_k - |d_k|} \leq 2 \limsup_{k\to\infty} \frac{r^k(1 + |d_k|) - r^k}{r^k(1 - |d_k|) - |d_k|}$$
$$= 2 \limsup_{k\to\infty} \frac{r^k|d_k|}{r^k(1 - |d_k|) - |d_k|} \leq 2 \limsup_{k\to\infty} \frac{|d_k|}{1 - 2|d_k|} = 0.$$

Этим установлено, что $x - y \in ac_0$. $\square$

Теорема 7. *В обозначениях леммы* 6 $By = \frac{1}{2}$ *для любого* $B \in \mathfrak{B}(C)$.

Доказательство. В силу леммы 6 $Bx = By$ для любого $B \in \mathfrak{B}$. По [11, теорема 22] $Bx = \frac{1}{2}$ для любого $B \in \mathfrak{B}(C)$. Отсюда $Bx = By = \frac{1}{2}$. $\square$

Эта теорема говорит об устойчивости Bx при малых возмущениях последовательности.

3. Сингулярные следы

В этом разделе применим полученные результаты к описанию геометрии и структуры множества положительных следов на широком классе главных идеалов.

Обозначим через $B(H)$ алгебру всех ограниченных линейных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве H. Для компактного оператора $A \in B(H)$ определим последовательность $\{\mu(n, A)\}_{n\geq 0}$ сингулярных чисел как последовательность собственных значений оператора $|A| := \sqrt{A^*A}$, упорядоченных по убыванию с учетом кратности. Подробную информацию о сингулярных числах (s-числах) можно найти, например, в [21, гл. II]).

Для убывающей функции $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ такой, что

$$\sup_{t>0} \frac{g(t)}{g(2t)} \leq \text{const}, \tag{5}$$

рассмотрим следующие главные идеалы:

$$\mathcal{L}_g := \left\{ A \in B(H) : A \text{ компактен, } \|A\|_{\mathcal{L}_g} := \sup_{n\geq 0} \frac{\mu(n, A)}{g(n)} < \infty \right\}.$$

Условие (5) гарантирует, что $\mathcal{L}_g$ является квазинормированным пространством.

Линейный функционал τ на $\mathcal{L}_g$ называется

— *следом*, если он унитарно инвариантен, т. е. $\tau(A) = \tau(UAU^*)$ для любого $A \in \mathcal{L}_g$ и унитарного $U \in B(H)$;

— *положительным*, если $\tau(A) \geq 0$ для любого положительного $A \in \mathcal{L}_g$;

— *нормализованным*, если $\tau(A) = 1$ для любого $A \in \mathscr{L}_g$ такого, что $\mu(n, A) = g(n)$.

Хорошо известно, что множество банаховых пределов является подрешеткой относительно операций sup и inf в решетке ℓ_∞^* [19] (см. также [22, разд. 1M]). Также множество положительных нормализованных следов на пространстве $\mathscr{L}_g$ является подрешеткой в $\mathscr{L}_g^*$ [23, утверждение 2.5] (см. также [8, разд. 3] и [24, разд. 4.1]).

Следующий результат демонстрирует тесную связь между следами на пространстве $\mathscr{L}_g$ и банаховыми пределами [23, предложения 3.6 и 3.7]. Пусть убывающая функция $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ удовлетворяет условию (5) и

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{g(2t)} = 2.$$

Положим

$$k_g := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n g(2^n)} \int\limits_{2^n}^{2^{n+1}} g(s)\, ds$$

(предел существует, конечен и отличен от нуля в силу [23, лемма 2.20]).

Теорема 8. *Формула*

$$\tau(A) = \frac{1}{k_g} \cdot B\left(\frac{1}{2^n g(2^n)} \sum_{i=2^n-1}^{2^{n+1}-2} \mu(i, A)\right), \quad 0 \le A \in \mathscr{L}_g$$

определяет изометрический изоморфизм между решеткой банаховых пределов и решеткой положительных нормализованных следов на пространстве $\mathscr{L}_g$. Обратное отображение задается формулой

$$B(x) = \tau(\mathrm{diag}(x_0 g(2^0), \underbrace{x_1 g(2^1), x_1 g(2^1)}_{2\ \text{раза}}, \dots, \underbrace{x_n g(2^n), \dots, x_n g(2^n)}_{2^n\ \text{раз}}, \dots)),$$

где diag *— диагональный оператор в некотором фиксированном базисе в H.*

Следствие 9. *Пусть убывающая функция $g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ удовлетворяет условию* (5) *и*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{g(2t)} = 2.$$

Множество положительных нормализованных следов на пространстве $\mathscr{L}_g$

(i) *есть объединение континуального семейства непересекающихся выпуклых множеств, диаметр и радиус которых равен 2;*

(ii) *содержит континуальное семейство непересекающихся выпуклых множеств, мощность которых равна $2^{\mathfrak{c}}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума.*

Доказательство. Из теоремы 8 следует, что решетка банаховых пределов и решетка положительных нормализованных следов на пространстве $\mathscr{L}_g$ изометричны и порядково изоморфны.

(i) Утверждение следует из теоремы 1.

(ii) Для абсолютно непрерывной функции $f \in \Gamma$ такой, что ее производная удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. существуют константы $K > 0$, $\beta > 0$ и неравенство

$$|f'(x) - f'(y)| \le K|x - y|^\beta$$

верно для всех $0 \leq x, y \leq 1$, мощность множества $\mathfrak{B}(f)$ равна $2^{\mathfrak{c}}$ [18, следствие 4.5]. Так как этим свойством обладают степенные функции $t \mapsto t^{\alpha}$, $0 \leq t \leq 1$, для любого $0 < \alpha < 1$, и множество таких функций континуально, следствие доказано. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят анонимных рецензентов за ценные замечания и доброжелательную критику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mazur S.* O metodach sumowalnosci // Ann. Soc. Polon. Math. (Suppl.) 1929. P. 102–107.
2. *Banach S.* Théorie des opérations linéaires. Sceaux: Éditions Jacques Gabay, 1993. (Reprint of the 1932 original).
3. *Lorentz G. G.* A contribution to the theory of divergent sequences // Acta Math. 1948. V. 80, N 1. P. 167–190.
4. *Sucheston L.* Banach limits // Am. Math. Monthly. 1967. V. 74, N 3. P. 308–311.
5. *Agnew R. P., Morse A. P.* Extensions of linear functionals, with applications to limits, integrals, measures, and densities // Ann. Math. 1938. V. 39, N 1. P. 20–30.
6. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Invariant Banach limits and applications // J. Funct. Anal. 2010. V. 259, N 6. P. 1517–1541.
7. *Dodds P. G., de Pagter B., Semenov E. M., Sukochev F. A.* Symmetric functionals and singular traces // Positivity. 1998. V. 2, N 1. P. 47–75.
8. *Semenov E. M., Sukochev F. A., Usachev A. S., Zanin D. V.* Banach limits and traces on $\mathscr{L}_{1,\infty}$ // Adv. Math. 2015. V. 285. P. 568–628.
9. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Геометрия банаховых пределов и их приложения // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75, № 4. С. 153–194.
10. *Зволинский Р. Е., Семенов Е. М.* Подпространство почти сходящихся последовательностей // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 758–763.
11. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Основные классы инвариантных банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. мат. 2019. Т. 83, № 1. С. 140–167.
12. *Alekhno E.* On Banach–Mazur limits // Indag. Math. 2015. V. 26. P. 581–614.
13. *Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Геометрические свойства множества банаховых пределов // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 177–204.
14. *Luxemburg W. A. J.* Nonstandard hulls, generalized limits and almost convergence // Analysis and geometry. Mannheim: Bibliographisches Inst., 1992. P. 19–45.
15. *Alekhno E.* Superposition operator on the space of sequences almost converging to zero // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10. P. 619–645.
16. *Авдеев Н. Н., Семенов Е. М., Усачев А. С.* Банаховы пределы: экстремальные свойства, инвариантность и теорема Фубини // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 4. С. 32–48.
17. *Алехно Е. А., Семенов Е. М., Сукочев Ф. А., Усачев А. С.* Порядковые и геометрические свойства множества банаховых пределов // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–35.
18. *Avdeev N., Semenov E., Usachev A., Zvolinskii R.* Decomposition of the set of Banach limits into discrete and continuous subsets // Ann. Funct. Anal. 2024. V. 15. 81.
19. *Semenov E. M., Sukochev F. A.* Extreme points of the set of Banach limits // Positivity. 2013. V. 17, N 1. P. 163–170.
20. *Semenov E., Sukochev F., Usachev A., Zanin D.* Dilation invariant Banach limits // Indag. Math. 2020. V. 31, N 5. P. 885–892.
21. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
22. *Fremlin D. H.* Well-distributed sequences and Banach density, version of 28.3.11, 40 p. https://www1.essex.ac.uk/maths/people/Fremlin/n02j23.pdf
23. *Levitina G., Usachev A.* Symmetric functionals on simply generated symmetric spaces. https://doi.org/10.48550/arXiv.2404.13870.
24. *Lord S., Sukochev F., Zanin D.* Singular traces. Volume 1: Theory. De Gruyter, 2021. (Stud.

Math.; V. 46/1).

Поступила в редакцию 7 июля 2024 г.
После доработки 19 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Зволинский Роман Евгеньевич (ORCID 0000-0002-0240-8697)
Воронежский государственный университет
roman.zvolinskiy@gmail.com

Семенов Евгений Михайлович
Воронежский государственный университет
nadezhka_ssm@geophys.vsu.ru

Усачев Александр Сергеевич (ORCID 0000-0002-6645-676X)
Центральный южный университет, Чанша, Китай
dr.alex.usachev@gmail.com

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.5

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ ПОЛИНОМОВ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ В СМЫСЛЕ СОБОЛЕВА И АССОЦИИРОВАННОЙ С УЛЬТРАСФЕРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ ЯКОБИ

М. Г. Магомед-Касумов

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия на показатель α, при которых имеет место равномерная на $[-1,1]$ сходимость рядов Фурье по соболевской системе полиномов, ассоциированной с ультрасферическими полиномами Якоби, к функциям из пространства Соболева $W^r_{L^1_{\rho(\alpha)}}$, где $\rho(\alpha)$ — ультрасферический вес.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.609

Ключевые слова: скалярное произведение типа Соболева, полиномы Якоби, ряд Фурье, равномерная сходимость, пространство Соболева, ультрасферический вес.

1. Введение

Пусть $W^r_{L^p_\rho} = W^r_{L^p_\rho}[a,b]$ — пространство Соболева, состоящее из $r-1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций f таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна и $f^{(r)} \in L^p_\rho[a,b]$, где $L^p_\rho = L^p_\rho[a,b]$ — весовое пространство Лебега с нормой

$$\|f\|_{L^p_\rho} = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p=2$ в пространстве $W^r_{L^p_\rho}$ можно ввести скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(a)g^{(k)}(a) + \int\limits_a^b f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

Норму в пространстве $W^r_{L^p_\rho}$ определим следующим образом:

$$\|f\|_{W^r_{L^p_\rho}} = \left[\sum_{k=0}^{r-1} |f^{(k)}(a)|^p + \int\limits_a^b |f^{(r)}(t)|^p \rho(t)\,dt\right]^{1/p}. \tag{2}$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00143, https://rscf.ru/project/24-21-00143/ .

Через $\mathscr{P}^{\alpha,\beta} = \{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}\}_{n=0}^{\infty}$ обозначим систему полиномов Якоби, ортонормированных на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(\alpha,\beta;x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Определим новую систему функций $\mathscr{P}_r^{\alpha,\beta}$, $r \geq 1$, с помощью равенств

$$P_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(x+1)^k}{k!}, \quad k = 0,1,\dots,r-1, \tag{3}$$

$$P_{r,k}^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(r-1)!}\int_{-1}^{x}(x-t)^{r-1}\widehat{P}_{k-r}^{\alpha,\beta}(t)\,dt, \quad k = r, r+1, \dots. \tag{4}$$

Система функций $\mathscr{P}_r^{\alpha,\beta}$ ортонормирована относительно (1) при $\rho(x) = \rho(\alpha,\beta;x)$ [1, с. 231]. Будем называть $\mathscr{P}_r^{\alpha,\beta}$ *системой полиномов, ортогональной в смысле Соболева и ассоциированной с полиномами Якоби* $\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}$.

Ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_{\rho(\alpha,\beta)}}[-1,1]$ по системе $\mathscr{P}_r^{\alpha,\beta}$ и частичная сумма этого ряда имеют следующий вид [1, с. 227]:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} c_{r,k}^{\alpha,\beta}(f)P_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \tag{5}$$

$$S_{r,n}^{\alpha,\beta}(f,x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(-1)\frac{(x+1)^k}{k!} + \sum_{k=r}^{n} c_{r,k}^{\alpha,\beta}(f)P_{r,k}^{\alpha,\beta}(x), \quad n \geq r, \tag{6}$$

где

$$c_{r,k}^{\alpha,\beta}(f) = \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t)\widehat{P}_{k-r}^{\alpha,\beta}(t)\rho(\alpha,\beta;t)\,dt.$$

Отметим, что частичная сумма (6) при $n \geq r$ совпадает r-кратно с исходной функцией $f(x)$ в точке $x = -1$ [1, с. 228]:

$$\big(S_{r,n}^{\alpha,\beta}\big)^{(\nu)}(f,-1) = f^{(\nu)}(-1), \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \tag{7}$$

В литературе встречаются и другие виды скалярных произведений типа Соболева, которые обычно делятся на три группы: непрерывные, дискретные и дискретно-непрерывные [2, 3]. Сходимость рядов Фурье по полиномам, ортогональным относительно непрерывных скалярных произведений типа Соболева, исследовалась в работах [4–8]. В [4, 5] рассматривается скалярное произведение

$$\langle f,g\rangle = \sum_{k=0}^{m}\int_{-1}^{1} f^{(k)}(x)g^{(k)}(x)(1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+k}\,dx,$$

а в [6] изучается случай

$$\langle f,g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,d\mu_1(x) + \lambda\int_{\mathbb{R}} f'(x)g'(x)\,d\mu_2(x), \quad \lambda > 0,$$

где меры μ_1 и μ_2 образуют так называемую когерентную пару. В [7] выведены необходимые условия сходимости по норме соответствующего пространства Соболева рядов Фурье для системы полиномов, ортогональных относительно

$$\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac12}\,dx + \lambda\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac12}\,dx,\ \lambda > 0,\ \alpha > -\frac12.$$

Ряды Фурье по системам полиномов, ортогональных относительно дискретных скалярных произведений, изучались в работах [9–14]. В [9, 10] рассмотрена поточечная и равномерная сходимости рядов Фурье в случае, когда скалярное произведение имеет вид

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\rho(x)w(x)\,d\mu(x) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{i=0}^{N_k} M_{k,i} f^{(i)}(a_k) g^{(i)}(a_k),$$

где $\rho(x)$ — вес Якоби. В [11–14] исследован частный случай приведенного выше скалярного произведения ($K = 2$, $N_1 = N_2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_2 = 1$) и изучена сходимость рядов Фурье и их линейных средних по соответствующим ортогональным полиномам.

Рассматриваемое в данной статье скалярное произведение (1) относится к группе дискретно-непрерывных. Системы функций, ортогональные относительно (1) и ассоциированные с классическими ортогональными системами, рассмотрены в работах И. И. Шарапудинова и его учеников (см. [1, 15–18] и приведенную там литературу). В работе [3] рассмотрен более общий вариант скалярного произведения (1):

$$\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(\omega_k) g^{(k)}(\omega_k) + \int_{-1}^{1} f^{(r)}(t) g^{(r)}(t)\rho(\alpha,\beta;t)\,dt,$$

где $\rho(\alpha,\beta;t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, $\omega_k \in \mathbb{R}$. В указанной работе получены условия, гарантирующие сходимость в норме пространства Соболева соответствующих рядов Фурье.

Остановимся более подробно на результатах, полученных для рядов Фурье (5).

В [1, 15] была доказана общая теорема о равномерной сходимости рядов Фурье по системе функций Φ_r, ортонормированных относительно (1) и ассоциированных с системой полиномов, ортогональной и полной в некотором весовом пространстве Лебега L^2_μ. Согласно этой теореме если функция $\frac{1}{\mu(x)}$ суммируема, то ряды Фурье по системе Φ_r равномерно сходятся к функциям из пространства $W^r_{L^2_\mu}$. Отсюда сразу вытекает, что $W^r_{L^2_\rho(\alpha,\beta)} \subset U^{\alpha,\beta}_r$, $-1 < \alpha, \beta < 1$, где через $U^{\alpha,\beta}_r$ обозначено множество функций, определенных на отрезке $[-1, 1]$, таких, что

$$\max_{x\in[-1,1]} \left|S^{\alpha,\beta}_{r,n}(f, x) - f(x)\right| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В частных случаях $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ [1] и $-1 < \alpha \le \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ [19, с. 10, следствие 1] были получены результаты о равномерной сходимости рядов Фурье по системе $\mathscr{P}^{\alpha,\beta}_r$ для функций из пространств $W^r_{L^p_\rho(\alpha,\beta)}$ при $p > 1$.

Теорема А. *Пусть $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}, \quad \left|\frac{B+1}{p} - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{4}.$$

Тогда $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1, 1] \subset U_r^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$, $r \ge 1$.

Теорема B. *Пусть* $-1 < \alpha \le \frac{1}{2}$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}, \quad \left|\frac{B+1}{p} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4}.$$

Тогда $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1] \subset U_r^{\alpha,0}$, $r \ge 1$.

В работе [20] теоремы A и B обобщены на случай произвольных α, $\beta > -1$.

Теорема C. *Пусть* $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$ *таковы, что*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}, \tag{8}$$

$$\left|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}, \tag{9}$$

$$\frac{A+1}{p} < 1, \quad \frac{B+1}{p} < 1. \tag{10}$$

Тогда $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1] \subset U_r^{\alpha,\beta}$, $r \ge 1$.

В той же работе были получены необходимые и достаточные условия сходимости частичных сумм рядов Фурье $S^{\alpha,\beta}_{r,n}(f)$ по норме пространства Соболева $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1]$.

Теорема D. *Пусть* $\alpha, \beta > -1$, $A, B \in \mathbb{R}$, $p > 1$. *Для каждой функции* $f \in W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1]$, $r \ge 1$, *ряд Фурье по системе* $\mathscr{P}_r^{\alpha,\beta}$ *сходится к* $f(x)$ *по норме пространства* $W^r_{L^p_{\rho(A,B)}}[-1,1]$ *тогда и только тогда, когда*

$$\left|\frac{A+1}{p} - \frac{\alpha+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\alpha+1}{2}\right\}, \tag{11}$$

$$\left|\frac{B+1}{p} - \frac{\beta+1}{2}\right| < \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{\beta+1}{2}\right\}. \tag{12}$$

В приведенных выше теоремах не рассматривается случай $p = 1$. Первый результат, восполняющий пробел в этом направлении, получен в работе [1], в которой было показано, что $W^r_{L^1_{\rho(\alpha,\beta)}}[-1,1] \subset U_r^{\alpha,\beta}$, $r \ge 1$, при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. В [20] этот результат распространен на $-1 < \alpha, \beta \le 0$.

Теорема E. *Если* $-1 < \alpha, \beta \le 0$, *то* $W^r_{L^1_{\rho(\alpha,\beta)}} \subset U_r^{\alpha,\beta}$, $r \ge 1$.

Оставался открытым вопрос об окончательности условий на показатели α, β в теореме E. В данной работе этот вопрос исследован в случае $\alpha = \beta$ и при $r = 1$ получены необходимые и достаточные условия, при которых $W^1_{L^1_{\rho(\alpha,\alpha)}} \subset U_1^{\alpha,\alpha}$.

Теорема. *Пусть* $\alpha = \beta > -1$. *Включение* $W^r_{L^1_{\rho(\alpha,\beta)}} \subset U_r^{\alpha,\beta}$, $r \ge 1$, *имеет место тогда и только тогда, когда* $\alpha \le \frac{3}{2}$.

2. Предварительные сведения

Для отношения гамма-функций имеет место асимптотическая формула [21, с. 62, (4)]:

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} = n^{\alpha-\beta}\left[1+\frac{1}{2n}(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)+O(n^{-2})\right]. \tag{13}$$

Обозначение $x_n \asymp y_n$ будем использовать для последовательностей одного порядка, т. е. таких, что существуют константы c_1, c_2, при которых $c_1x_n \le y_n \le c_2x_n$.

Символами $c(\gamma,\dots)$, $c_i(\gamma,\dots)$ будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от параметров в скобках и различные в разных местах.

2.1. Полиномы Якоби. Через $P_n^{\alpha,\beta}(x)$ будем обозначать полиномы Якоби, ортогональные на $[-1,1]$ с весом $\rho(\alpha,\beta;x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ и нормированные условием

$$P_n^{\alpha,\beta}(1)=\binom{n+\alpha}{n}=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}.$$

Для ультрасферических полиномов Якоби $P_n^{\alpha,\alpha}(x)$ будем использовать символ $P_n^\alpha(x)$.

Приведем некоторые свойства этих полиномов, которые потребуются в дальнейшем:

- связь с ортонормированными полиномами [22, с. 80, (4.3.4)]:

$$\begin{gathered}\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)=\big(h_n^{\alpha,\beta}\big)^{-\frac12}P_n^{\alpha,\beta}(x),\\ h_n^{\alpha,\beta}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},\end{gathered} \tag{14}$$

  где $\alpha,\beta>-1$. В силу (13) $h_n^{\alpha,\beta}\asymp n^{-1}$;
- свойство симметрии [22, с. 71, (4.1.3)]:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=(-1)^nP_n^{\beta,\alpha}(-x); \tag{15}$$

- равенство, которое можно получить из [22, теорема 7.32.2], обозначив $x=\cos\theta$ и заметив, что $1-x=2\sin^2\frac{\theta}{2}\sim\theta^2$:

$$P_n^{\alpha,\beta}(x)=\begin{cases}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}O(n^{-\frac12}), & 0\le x\le 1-\frac{d}{n^2},\\ O(n^\alpha), & 1-\frac{d}{n^2}\le x\le 1,\end{cases}\quad \alpha\in\mathbb{R}; \tag{16}$$

  Отсюда с учетом (15) вытекает равномерная оценка:

$$\big|P_n^{\alpha,\beta}(x)\big|<c(\alpha,\beta,a)n^{\max\{\alpha,-\frac12\}},\quad -1<a\le x\le 1. \tag{17}$$

- оценка для интеграла [22, с. 75, (4.21.7)]:

$$\left|\int_a^b \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\,dx\right|\le c(\alpha,\beta)n^{-1/2}\max_{x\in\{a,b\}}\big|P_{n+1}^{\alpha-1,\beta-1}(x)\big|. \tag{18}$$

  Отсюда в силу (17) и с учетом (15) получаем

$$\left|\int_a^b \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(x)\,dx\right|\le\begin{cases}c(\alpha,\beta,b)n^{\max\{\beta-\frac32,-1\}}, & -1\le a\le b<1,\\ c(\alpha,\beta,a)n^{\max\{\alpha-\frac32,-1\}}, & -1<a\le b\le 1.\end{cases} \tag{19}$$

Из (18) и первой строки в (16) вытекает, что при $\alpha > 0$, $a_0 > -1$

$$\left|\int\limits_a^b \widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\,dt\right| \le c(\alpha,\beta,a_0,d)n^{-1}\begin{cases}(1-b)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha \ge \frac{1}{2},\\ (1-a)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha \le \frac{1}{2},\end{cases} \tag{20}$$

$$a_0 \le a \le b \le 1 - \frac{d}{n^2}.$$

2.2. Пространство Соболева. Рассмотрим некоторые свойства пространства Соболева $W^r_{L^1_{\rho(\alpha)}}$, $\rho(\alpha;x) = (1-x^2)^\alpha$.

Лемма 1. *Пространство Соболева* $W^r_{L^1_{\rho(\alpha)}}$ *полное при* $-1 < \alpha \le 0$.

Лемма 2. *Множество полиномов всюду плотно в* $W^1_{L^1_{\rho(\alpha)}}$, $\alpha > -1$.

Доказательство этих лемм можно найти в [20].

Далее наряду с показателем α будем рассматривать также величину $\widetilde{\alpha} = \min\{0,\alpha\}$.

Лемма 3. *Пространства* $W^1_{L^1_{\rho(\alpha)}}$ *и* $W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}$ *совпадают как множества.*

Доказательство. Так как $\widetilde{\alpha} \le \alpha$, включение $W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \subset W^1_{L^1_{\rho(\alpha)}}$ очевидно. Обратное включение вытекает из того, что для $f \in W^1_{L^1_{\rho(\alpha)}}$ в силу абсолютной непрерывности f имеет место $f' \in L^1_{\rho(\alpha)} \cap L^1$ и, следовательно, $f' \in L^1_{\rho(\tilde\alpha)}$. $\square$

2.3. Ряды Фурье — Соболева. Поскольку $P^\alpha_{r,k}(x)$ — полином степени k, то $S^\alpha_{r,n}(f,x) = S^{\alpha,\alpha}_{r,n}(f,x)$ будет полиномом степени n. Кроме того, $S^\alpha_{r,m}(f,x)$, $m \ge n$, оставляет на месте полиномы степени n:

$$S^\alpha_{r,m}(p_n,x) = p_n(x), \quad m \ge n, \tag{21}$$

где $p_n(x)$ — полином степени n [20, разд. 2].

Отметим связь между частичными суммами при различных r:

$$S^\alpha_{r,m}(f,x) = f(-1) + \int\limits_{-1}^x S^\alpha_{r-1,m-1}(f',t)\,dt, \quad r \ge 1. \tag{22}$$

Далее, из (6) можно получить следующее интегральное представление для частичных сумм $S^\alpha_{r,n}(f,x)$ при $r = 1$:

$$S^\alpha_{1,1+n}(f,x) = f(-1) + \int\limits_{-1}^1 f'(t)\rho(\alpha;t)K^\alpha_{1,1+n}(x,t)\,dt, \tag{23}$$

где

$$K^\alpha_{1,1+n}(x,t) = \sum_{k=1}^{n+1}\widehat{P}^\alpha_{k-1}(t)P^\alpha_{1,k}(x).$$

С помощью формулы (4) для ядра $K^\alpha_{1,1+n}(x,t)$ можно получить соотношение

$$K^\alpha_{1,1+n}(x,t) = \sum_{k=1}^{n+1}\widehat{P}^\alpha_{k-1}(t)\int\limits_{-1}^x \widehat{P}^\alpha_{k-1}(u)\,du = \int\limits_{-1}^x K^\alpha_n(t,u)\,du, \tag{24}$$

где

$$K_n^\alpha(t,u) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{P}_k^\alpha(t)\widehat{P}_k^\alpha(u).$$

Ниже через $C = C[-1,1]$ будем обозначать пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций с обычной нормой $\|f\|_C = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$.

Лемма 4. *Пусть $\alpha \geq 0$ и $\|f\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} = 1$. Тогда найдется функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям $g(-1) = 0$, $\|g\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} \leq 1$, для которой будет выполнено неравенство*

$$\left\|S_{1,n}^\alpha(f)\right\|_C \leq \left\|S_{1,n}^\alpha(g)\right\|_C, \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы $\widetilde{\alpha} = 0$. Рассмотрим два случая.

1°. Если $\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} = 0$, то f, являясь абсолютно непрерывной функцией, будет константой, по модулю равной 1. Поэтому ввиду (21) $\left\|S_{1,n}^{\alpha,\beta}(f)\right\|_C = 1$. В качестве $g(x)$ можно взять функцию

$$g(x) = \frac{1+x}{2}. \tag{25}$$

Тогда

$$\|g\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\,dx = 1.$$

В то же время в силу (21) $S_{1,n}^\alpha(g,x) = g(x)$, $n \geq 1$, поэтому

$$\left\|S_{1,n}^\alpha(g)\right\|_C = \|g\|_C = g(1) = 1, \quad n \geq 1.$$

2°. Пусть теперь $\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \neq 0$. Можно считать, что $\left\|S_{1,n}^\alpha(f)\right\|_C > 1$, так как в противном случае в качестве $g(x)$ можно взять функцию (25). Обозначим через $x_{\max}$ точку из отрезка $[-1,1]$, в которой $\left|S_{1,n}^\alpha(f,x_{\max})\right| = \left\|S_{1,n}^\alpha(f)\right\|_C$. Поскольку

$$\|f\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} = |f(-1)| + \|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} = 1, \tag{26}$$

с помощью формулы (22) выводим:

$$|f(-1)| + \|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} = 1 < \left\|S_{1,n}^\alpha(f)\right\|_C = \left| f(-1) + \int_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^\alpha(f',t)\,dt \right| \\ \leq |f(-1)| + \left| \int_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^\alpha(f',t)\,dt \right|.$$

Отсюда получаем важное неравенство

$$\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} < \left| \int_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^\alpha(f',t)\,dt \right|. \tag{27}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-1)}{\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} s, \quad s = \operatorname{sgn} \int\limits_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^{\alpha,\beta}(f', t)\, dt.$$

Ясно, что $g(-1) = 0$ и $\|g\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} = 1$. Покажем сначала, что

$$S_{1,n}^{\alpha}(g, x_{\max}) > 1. \tag{28}$$

Для этого воспользуемся формулой (22) и линейностью оператора $S_n^\alpha(f)$:

$$S_{1,n}^{\alpha}(g, x_{\max}) = \int\limits_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^{\alpha}(g', t)\, dt = \frac{1}{\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} \left| \int\limits_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^{\alpha}(f', t)\, dt \right|. \tag{29}$$

Эти равенства вместе с (27) дают (28).

Используя (29), получаем

$$\left|S_{1,n}^{\alpha}(f, x_{\max})\right| \le |f(-1)| + \left| \int\limits_{-1}^{x_{\max}} S_{n-1}^{\alpha}(f', t)\, dt \right| = |f(-1)| + \|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} S_{1,n}^{\alpha}(g, x_{\max}).$$

Последнее выражение в силу (28) и (26) будет меньше, чем $S_{1,n}^{\alpha}(g, x_{\max})$. □

Лемма 5. *Справедлива оценка*

$$\left\|S_{1,n}^{\alpha}\right\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \to C} \le 1 + \max_{x,t \in [-1,1]} \left|\rho(\alpha - \widetilde\alpha; t) K_{1,1+n}^{\alpha}(x, t)\right|. \tag{30}$$

Более того, если $\alpha \ge 0$, то имеет место равенство

$$\left\|S_{1,n}^{\alpha}\right\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \to C} = \max_{x,t \in [-1,1]} \left|\rho(\alpha - \widetilde\alpha; t) K_{1,1+n}^{\alpha}(x, t)\right|, \quad n \ge 1. \tag{31}$$

Доказательство. Оценка (30) сразу вытекает из (23). Докажем равенство (31).

Если в определении нормы оператора $S_{1,n}^{\alpha}$ брать супремум только по тем функциям f, у которых $f(-1) = 0$, то в силу леммы 4 этот супремум не уменьшится. Следовательно, с учетом (23) получаем

$$\left\|S_{1,n}^{\alpha}\right\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \to C} = \sup_{\|f\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} \le 1} \left\| \int\limits_{-1}^{1} f'(t) \rho(\alpha; t) K_{1,1+n}^{\alpha}(\cdot, t)\, dt \right\|_C.$$

С другой стороны, если $f(-1) = 0$, то

$$\|f\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}} = \|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}}.$$

Поэтому

$$\left\|S_{1,n}^{\alpha}\right\|_{W^1_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \to C} = \sup_{\|f'\|_{L^1_{\rho(\tilde\alpha)}} \le 1} \left\| \int\limits_{-1}^{1} f'(t) \rho(\widetilde\alpha; t) \rho(\alpha - \widetilde\alpha; t) K_{1,1+n}^{\alpha,\beta}(\cdot, t)\, dt \right\|_C.$$

Справа фактически стоит норма оператора

$$T(g)(x) = \int_{-1}^{1} g(t)\rho(\widetilde{\alpha};t)\rho(\alpha-\widetilde{\alpha};t)K^{\alpha}_{1,1+n}(x,t)\,dt, \tag{32}$$

действующего из $L^1_{\rho(\widetilde{\alpha})}$ в C, которая, как известно, равна

$$\max_{x,t\in[-1,1]}\left|\rho(\alpha-\widetilde{\alpha};t)K^{\alpha}_{1,1+n}(x,t)\right|. \quad \square$$

.

Приведем известное следствие теоремы Банаха — Штейнгауза [23, утверждение 3, с. 98] применительно к линейным ограниченным операторам $S^{\alpha}_{1,n}$.

Утверждение 1. *Для того чтобы последовательность линейных ограниченных операторов $S^{\alpha}_{1,n}$, действующих из банахова пространства $W^1_{L^1_{\rho(\widetilde{\alpha})}}$ в нормированное пространство C, поточечно сходилась к тождественному оператору I, необходимо и достаточно, чтобы*

(a) *последовательность $\left\|S^{\alpha}_{1,n}\right\|_{W^1_{L^1_{\rho(\widetilde{\alpha})}}\to C}$ была ограниченной;*

(b) *$S^{\alpha}_{1,n}(f)\to I(f)$ для любой функции f из некоторого множества, всюду плотного в $W^1_{L^1_{\rho(\widetilde{\alpha})}}$.*

2.4. Свойства ядра $K^{\alpha,\beta}_n(t,u)$. Ядро $K^{\alpha,\beta}_n(t,u)$ определяется равенством

$$K^{\alpha,\beta}_n(t,u) = \sum_{k=0}^{n}\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(t)\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(u).$$

Известны следующие представления для этого ядра.

1. Формула Кристоффеля — Дарбу [22, с. 83, (4.5.2)]:

$$K^{\alpha,\beta}_n(t,u) = \lambda^{\alpha,\beta}_n\frac{\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+1}(t)\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(u)-\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+1}(u)\widehat{P}^{\alpha,\beta}_n(t)}{t-u}, \quad \lambda^{\alpha,\beta}_n\asymp 1; \tag{33}$$

2. Формула из [24, лемма 1]:

$$K^{\alpha,\beta}_n(t,u) = K^{\alpha,\beta}_n(u,t) = (1-t^2)K^{\alpha+1,\beta+1}_{n-1}(u,t)$$
$$\theta^{\alpha,\beta}_n\left[(n+\alpha+\beta+2)P^{\alpha+1,\beta+1}_n(u)P^{\alpha,\beta}_n(t)+(n+1)P^{\alpha+1,\beta+1}_{n-1}(u)P^{\alpha,\beta}_{n+1}(t)\right], \tag{34}$$

где $\theta^{\alpha,\beta}_n = O(1)$, $K^{\alpha+1,\beta+1}_{-1}(u,t)\equiv 0$, $P^{\alpha+1,\beta+1}_{-n}(u)\equiv 0$.

3. Формула из [25, равенство (2.1)]:

$$K^{\alpha,\beta}_n(t,u) = \theta^{\alpha,\beta}_n\frac{\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+1}(t)\widehat{P}^{\alpha+1,\beta}_n(u)(1-u)-\widehat{P}^{\alpha,\beta}_{n+1}(u)\widehat{P}^{\alpha+1,\beta}_n(t)(1-t)}{t-u},\ \theta^{\alpha,\beta}_n = O(1). \tag{35}$$

Отметим также, что из лемм, доказанных в работе А. В. Зорщикова [24, леммы 2, 3], вытекает следующее утверждение.

Лемма 6. *Пусть $-1<\alpha\le\frac{1}{2}$, $t\in[0,1]$. Тогда существует такая постоянная $c(\alpha)$, зависящая только от α, что для любых n и любых $-1\le a\le b\le 1$ выполняется неравенство*

$$\left|\int_a^b\rho(\alpha;u)K^{\alpha}_n(t,u)\,du\right|\le c(\alpha).$$

3. Основная лемма

Исследуем на равномерную ограниченность последовательность

$$J_n(x,t) = J_n^\alpha(x,t) = \rho(\alpha - \widetilde{\alpha}; t) K_{1,1+n}^\alpha(x,t) = (1-t^2)^{\alpha-\widetilde{\alpha}} K_{1,1+n}^\alpha(x,t).$$

Лемма 7. *Пусть $\alpha > -1$. Функциональная последовательность $J_n^\alpha(x,t)$ равномерно ограничена на $[-1,1]^2$ тогда и только тогда, когда $\alpha \le \frac{3}{2}$.*

3.1. Доказательство достаточности. Для $\alpha \le 0$ утверждение леммы доказано в работе [20].

Пусть $\alpha > 0$. Тогда $J_n(x,t) = \rho(\alpha;t) K_{1,1+n}^\alpha(x,t)$. В силу равенства

$$\rho(\alpha;-t) K_{1,1+n}^\alpha(x,-t) = \rho(\alpha;t)\big[K_{1,1+n}^\alpha(1,t) - K_{1,1+n}^\alpha(-x,t)\big]$$

можно ограничиться исследованием случая $t \in [0,1]$. Тогда

$$|J_n(x,t)| \le 2^\alpha (1-t)^\alpha \big|K_{1,1+n}^\alpha(x,t)\big|. \tag{36}$$

Рассмотрим величину

$$J_n(a,b;t) = J_n^\alpha(a,b,t) = (1-t)^\alpha \int\limits_a^b K_n^\alpha(t,u)\,du. \tag{37}$$

Отметим очевидное свойство:

$$J_n(a,b;t) = J_n(a,c;t) + J_n(c,b;t). \tag{38}$$

Из (36) и (24) видно, что

$$|J_n(x,t)| \le 2^\alpha |J_n(-1,x;t)|, \quad t \in [0,1]. \tag{39}$$

Случай $1 - \frac{2}{n^2} \le t \le 1$.

Лемма 8. *При $\alpha > 0$ справедлива оценка*

$$|J_n(-1,x;t)| < c(\alpha), \quad 1 - \frac{2}{n^2} \le t \le 1, \ -1 \le x \le 0.$$

Доказательство. Применим формулу Кристоффеля — Дарбу (33). Учитывая, что $1/(t-u)$ возрастает, с помощью второй теоремы о среднем получим

$$J_n(-1,x;t) = O(1)(1-t)^\alpha \int\limits_\xi^x \big[\widehat{P}_{n+1}^\alpha(t)\widehat{P}_n^\alpha(u) - \widehat{P}_n^\alpha(t)\widehat{P}_{n+1}^\alpha(u)\big]\,du, \quad -1 \le \xi \le x.$$

Последнее выражение по модулю не превышает суммы двух слагаемых, первое из которых имеет вид

$$I_n(t) = O(1)(1-t)^\alpha \big|\widehat{P}_{n+1}^\alpha(t)\big| \left|\int\limits_\xi^x \widehat{P}_n^\alpha(u)\,du\right|.$$

Используя равномерные оценки (17) и (19), получаем

$$I_n(t) \le c(\alpha) n^{-2\alpha} n^{\alpha+1/2} n^{\max\{\alpha-3/2,-1\}} < c(\alpha), \quad \alpha > 0.$$

Второй интеграл оценивается аналогично. □

Лемма 9. *При* $\alpha > 0$ *справедлива оценка*

$$|J_n(0,x;t)| < c(\alpha), \quad 1-\frac{2}{n^2} \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1.$$

Доказательство. Применяя представление для ядра (34), получим

$$J_n(0,x;t) = (1+t)(1-t)^{\alpha+1}\int\limits_0^x K_{n-1}^{\alpha+1}(u,t)\,du$$

$$+(1-t)^\alpha\theta_n^\alpha(n+2\alpha+2)P_n^\alpha(t)\int\limits_0^x P_n^{\alpha+1}(u)\,du+(1-t)^\alpha\theta_n^\alpha(n+1)P_{n+1}^\alpha(t)\int\limits_0^x P_{n-1}^{\alpha+1}(u)\,du$$
$$= I_{1,n}(x,t) + I_{2,n}(x,t) + I_{3,n}(x,t).$$

Пользуясь равномерными оценками (17) и (19), выводим:

$$|I_{1,n}(x,t)| \le cn^{-2\alpha-2}\sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha+3/2}\left|\int\limits_0^x \widehat{P}_k^{\alpha+1}(u)\,du\right|$$
$$\le cn^{-2\alpha-2}\sum_{k=0}^{n-1} k^{\alpha+3/2}k^{\alpha-1/2} < c(\alpha).$$

Для оценки $I_{2,n}(x,t)$ применим (19) с учетом (14):

$$|I_{2,n}(x,t)| \le c(\alpha)n^{-2\alpha}nn^\alpha n^{\alpha-1} < c(\alpha).$$

$I_{3,n}(x,t)$ оценивается аналогично. □

Из лемм 8 и 9 с учетом (39) и (38) получаем

$$|J_n(x,t)| < c(\alpha), \quad \alpha > 0,\ -1 \le x \le 1,\ 1-\frac{2}{n^2} \le t \le 1. \tag{40}$$

Случай $0 \le t \le 1 - \frac{2}{n^2}$. Рассмотрим отдельно следующие случаи:
1) $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$,
2) $x \in \left[-\frac{1}{2}, t - \frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}\right]$,
3) $x \in \left[t - \frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}, t + \frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}\right]$,
4) $x \in \left[t + \frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}, t + \frac{1-t}{2}\right]$,
5) $x \in \left[t + \frac{1-t}{2}, 1 - \frac{1}{n^2}\right]$,
6) $x \in \left[1 - \frac{1}{n^2}, 1\right]$.

Лемма 10. *При* $0 < \alpha \le \frac{3}{2}$ *справедлива оценка*

$$|J_n(-1,x;t)| < c(\alpha), \quad 0 \le t \le 1-\frac{2}{n^2},\ x \in [-1,-1/2].$$

Доказательство. Применим формулу Кристоффеля — Дарбу (33):

$$J_n(-1,x;t) = (1-t)^\alpha\int\limits_{-1}^x K_n^\alpha(t,u)\,du$$

$$= (1-t)^\alpha \int\limits_{-1}^{x} \lambda_n^{\alpha,\alpha} \frac{\widehat{P}_{n+1}^\alpha(t)\widehat{P}_n^\alpha(u) - \widehat{P}_{n+1}^\alpha(u)\widehat{P}_n^\alpha(t)}{t-u}\,du$$

$$= \lambda_n^\alpha (1-t)^\alpha \widehat{P}_{n+1}^\alpha(t) \int\limits_{-1}^{x} \frac{\widehat{P}_n^\alpha(u)}{t-u}\,du - \lambda_n^\alpha (1-t)^\alpha \widehat{P}_n^\alpha(t) \int\limits_{-1}^{x} \frac{\widehat{P}_{n+1}^\alpha(u)}{t-u}\,du = U_n^1 - U_n^2. \tag{41}$$

Следовательно, достаточно показать равномерную ограниченность U_n^1 и U_n^2.

Применяя вторую теорему о среднем, весовую оценку (16) и равномерную оценку (19), для U_n^1 получаем

$$\left|U_n^1\right| \le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \frac{1}{t-x} n^{\max\{\alpha-\frac{3}{2},-1\}}. \tag{42}$$

Так как $(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \le n^{\max\{\frac{1}{2}-\alpha,0\}}$ и $\frac{1}{t-x} \le 2$, из (42) выводим:

$$\left|U_n^1\right| \le c(\alpha) n^{\max\{\frac{1}{2}-\alpha,0\}} n^{\max\{\alpha-\frac{3}{2},-1\}} = c(\alpha) n^{\max\{-1,-\frac{1}{2}-\alpha,\alpha-\frac{3}{2}\}}.$$

Таким образом, $\left|U_n^1\right| < c(\alpha)$ при $0 < \alpha \le \frac{3}{2}$, U_n^2 оценивается аналогично. □

Ниже неоднократно будем пользоваться следующей оценкой для величины $J_n(a,x,t)$, которую можно получить с помощью формулы для ядра (35) и весовой оценки (16):

$$|J_n(a,b;t)| \le c(\alpha)\left((1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left| \int\limits_a^b \frac{\widehat{P}_n^{\alpha+1,\alpha}(u)(1-u)}{t-u}\,du \right| \right.$$
$$\left. + (1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \left| \int\limits_a^b \frac{\widehat{P}_{n+1}^\alpha(u)}{t-u}\,du \right| \right) = c(\alpha)\big(U_n^1(a,b,t) + U_n^2(a,b,t)\big). \tag{43}$$

Заметим, что функция $\varphi(u) = \frac{1-u}{t-u}$ неотрицательна и монотонно возрастает при $u < t$, а функция $\varphi(u) = \frac{1-u}{u-t}$ неотрицательна и монотонно убывает при $u > t$. Применяя вторую теорему о среднем и весовую оценку (20), при $\alpha > 0$ получим

$$U_n^1(a,b,t) \le c(\alpha) n^{-1} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} (1-b)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \begin{cases} \frac{1-b}{t-b}, & -\frac{1}{2} \le a \le b < t < 1-\frac{2}{n^2}, \\ \frac{1-a}{a-t}, & t < a \le b \le 1-\frac{1}{n^2}. \end{cases} \tag{44}$$

Рассуждая аналогичным образом, можно получить оценку и для U_n^2:

$$U_n^2(a,b,t) \le c(\alpha) n^{-1} (1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \tau(\alpha;a,b) \begin{cases} (t-b)^{-1}, & -\frac{1}{2} \le a \le b < t < 1-\frac{2}{n^2}, \\ (a-t)^{-1}, & t < a \le b \le 1-\frac{1}{n^2}. \end{cases} \tag{45}$$

где

$$\tau(\alpha;a,b) = \begin{cases} (1-b)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha \ge \frac{1}{2}, \\ (1-a)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \alpha \le \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Лемма 11. *При $\alpha > 0$ справедлива оценка*

$$\left| J_n\left(-\frac{1}{2}, x; t\right) \right| < c(\alpha), \quad 0 \le t \le 1 - \frac{2}{n^2},\ x \in \left[-\frac{1}{2}, t - \frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n}\right].$$

Доказательство. Рассмотрим два случая: 1) $0 < \alpha \le \frac{1}{2}$, 2) $\alpha > \frac{1}{2}$.

В первом случае, дважды применяя вторую теорему о среднем, выводим:

$$J_n\left(-\frac{1}{2},x;t\right)=(1-t)^\alpha\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{x}\frac{(1-u^2)^\alpha}{(1-u^2)^\alpha}K_n^\alpha(t,u)\,du$$
$$=\frac{(1-t)^\alpha}{(1-x)^\alpha(1+\xi)^\alpha}\int\limits_{\xi}^{\eta}(1-u^2)^\alpha K_n^\alpha(t,u)\,du,\quad -\frac{1}{2}\le\xi\le\eta\le x.$$

Так как $x\le t$, то $\frac{1-t}{1-x}\le 1$. Очевидно также, что $\frac{1}{(1+\xi)^\alpha}<c(\alpha)$. Тогда утверждение леммы для $0<\alpha\le\frac{1}{2}$ вытекает из леммы 6.

Пусть теперь $\alpha>\frac{1}{2}$. Нетрудно убедиться в том, что $\varphi(u;\gamma)=\frac{(1-u)^\gamma}{t-u}$ неотрицательна и не убывает при $\gamma\le 1$, $0\le t\le 1$, $u<t$. В частности, в условиях леммы

$$\varphi(x;\gamma)\le\varphi\biggl(t-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n};\gamma\biggr). \tag{46}$$

В силу (44)

$$U_n^1\left(-\frac{1}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}n^{-1}.$$

Замечая, что

$$\frac{(1-x)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}=\varphi\left(x;\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

и учитывая (46), получаем

$$U_n^1\left(-\frac{1}{2},x,t\right)\le c(\alpha)\frac{(1-t+\frac{\sqrt{1-t}}{n})^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{(1-t)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}}=c(\alpha)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-t}n}\right)^{\frac{3}{4}-\frac{\alpha}{2}}\le c(\alpha). \tag{47}$$

В силу (45)

$$U_n^2\left(-\frac{1}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}n^{-1}.$$

Поскольку

$$\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{t-x}=\varphi\left(x;\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}\right),$$

с учетом (46) имеем

$$U_n^2\left(-\frac{1}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(1-t+\frac{\sqrt{1-t}}{n})^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{1-t}}$$
$$=c(\alpha)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-t}n}\right)^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{2}}<c(\alpha). \tag{48}$$

Утверждение леммы для $\alpha>\frac{1}{2}$ вытекает из (43), (47) и (48). $\square$

Лемма 12. *При $\alpha>0$ справедлива оценка*

$$\left|J_n\biggl(t+\frac{\sqrt{1-t}}{2n},x;t\biggr)\right|<c(\alpha),\quad 0\le t\le 1-\frac{2}{n^2},\ x\in\left[t+\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n},t+\frac{1-t}{2}\right].$$

Доказательство. Из (44) имеем

$$U_n^1\left(t+\frac{\sqrt{1-t}}{2n},x,t\right)\le c(\alpha)\frac{1-t-\frac{\sqrt{1-t}}{2n}}{(1-t)^{\frac34-\frac{\alpha}{2}}}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}.$$

Так как $\alpha>0$ и $x\le t+\frac{1-t}{2}$, отсюда получаем

$$U_n^1\left(t+\frac{\sqrt{1-t}}{2n},x,t\right)\le c(\alpha)\frac{1-t-\frac{\sqrt{1-t}}{2n}}{(1-t)^{\frac34-\frac{\alpha}{2}}}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}$$
$$=c(\alpha)\frac{1-t-\frac{\sqrt{1-t}}{2n}}{1-t}<c(\alpha). \quad (49)$$

Из (45) имеем

$$U_n^2\left(t+\frac{\sqrt{1-t}}{2n},x,t\right)\le c(\alpha)\left(\frac{1-t-\frac{\sqrt{1-t}}{2n}}{1-t}\right)^{\frac14-\frac{\alpha}{2}}<c(\alpha),\quad \alpha\le\frac12, \quad (50)$$

$$U_n^2\left(t+\frac{\sqrt{1-t}}{2n},x,t\right)\le c(\alpha)\left(\frac{1-t}{1-x}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}$$
$$\le c(\alpha)\left(\frac{1-t}{1-t-\frac{1-t}{2}}\right)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}<c(\alpha),\quad \alpha>\frac12. \quad (51)$$

Утверждение леммы вытекает из (43), (49), (50) и (51). $\square$

Лемма 13. *При $0<\alpha\le\frac32$ справедлива оценка*

$$\left|J_n\left(t+\frac{1-t}{2},x;t\right)\right|<c(\alpha),\quad 0\le t\le 1-\frac{2}{n^2},\ x\in\left[t+\frac{1-t}{2},\ 1-\frac{1}{n^2}\right].$$

Доказательство. При $x\le 1-\frac{\sqrt{1-t}}{n}$ из (44) получаем

$$U_n^1\left(t+\frac{1-t}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}n^{-1}(1-x)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}$$
$$\le c(\alpha)\left(\frac{1}{n\sqrt{1-t}}\right)^{\frac34-\frac{\alpha}{2}}<c(\alpha). \quad (52)$$

Если же $1-\frac{\sqrt{1-t}}{n}\le x\le 1-\frac{1}{n^2}$, то с учетом (52) имеем

$$U_n^1\left(t+\frac{1-t}{2},x,t\right)\le U_n^1\left(t+\frac{1-t}{2},1-\frac{\sqrt{1-t}}{n},t\right)+U_n^1\left(1-\frac{\sqrt{1-t}}{n},x,t\right)$$
$$\le c(\alpha)+U_n^1\left(1-\frac{\sqrt{1-t}}{n},x,t\right). \quad (53)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части вновь применим (44) и заметим, что

$$\frac{1-a}{a-t}=\frac{1}{n\sqrt{1-t}-1}\le\frac{2}{n\sqrt{1-t}},\quad a=1-\frac{\sqrt{1-t}}{n},$$

так как $1\le\frac{n\sqrt{1-t}}{2}$ при $t\le 1-\frac{2}{n^2}$. Тогда

$$U_n^1\left(1-\frac{\sqrt{1-t}}{n},x,t\right)\le\left(\frac{1}{n\sqrt{1-t}}\right)^{\frac32-\alpha}<c(\alpha),\quad 1-\frac{\sqrt{1-t}}{n}\le x\le 1-\frac{1}{n^2}.$$

Отсюда, из (52) и (53) получаем

$$U_n^1\left(t+\frac{1-t}{2},x,t\right)\le c(\alpha),\quad x\in\left[t+\frac{1-t}{2},1-\frac{1}{n^2}\right]. \tag{54}$$

Из (45) имеем

$$U_n^2\left(t+\frac{1-t}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{-\frac{1}{2}}n^{-1}=c(\alpha)(n\sqrt{1-t})^{-1}<c(\alpha),\quad \alpha\le\frac{1}{2}, \tag{55}$$

$$U_n^2\left(t+\frac{1-t}{2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}n^{\alpha-\frac{3}{2}}=c(\alpha)(n\sqrt{1-t})^{\alpha-\frac{3}{2}}$$
$$<c(\alpha),\quad \frac{1}{2}<\alpha\le\frac{3}{2}. \tag{56}$$

Утверждение леммы вытекает из (43), (54), (55) и (56). □

Лемма 14. *При* $0<\alpha\le\frac{3}{2}$ *справедлива оценка*

$$\left|J_n\left(1-\frac{1}{n^2},x;t\right)\right|<c(\alpha),\quad 0\le t\le 1-\frac{2}{n^2},\ x\in\left[1-\frac{1}{n^2},1\right].$$

Доказательство. Отметим, что $1\le\frac{n^2(1-t)}{2}$, так как $t\le 1-\frac{2}{n^2}$. Поэтому

$$\frac{1-a}{a-t}=\frac{1}{n^2(1-t)-1}\le\frac{2}{n^2(1-t)}. \tag{57}$$

Оценим U_n^1 из (43), пользуясь второй теоремой о среднем, равномерной оценкой (17) и неравенством (57):

$$U_n^1\left(1-\frac{1}{n^2},x,t\right)\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{5}{4}}n^{-4}n^{\alpha+\frac{3}{2}}=c(\alpha)\left(\frac{1}{n\sqrt{1-t}}\right)^{\frac{5}{2}-\alpha}<c(\alpha). \tag{58}$$

Аналогичным образом поступая с U_n^2 из (43), получаем

$$U_n^2\left(1-\frac{1}{n^2},x,t\right)\le c(\alpha)\frac{(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{(1-t-\frac{1}{n^2})n^2}n^{\alpha+\frac{1}{2}}$$
$$\le c(\alpha)\frac{(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}}{n^2(1-t)-1}n^{\alpha+\frac{1}{2}}\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{3}{4}}n^{\alpha-\frac{3}{2}}<c(\alpha). \tag{59}$$

Утверждение леммы вытекает из (43), (58) и (59). □

Лемма 15. *При* $\alpha>0$ *справедлива оценка*

$$\left|J_n\left(t-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n},x;t\right)\right|<c(\alpha),\quad 0\le t\le 1-\frac{2}{n^2},\ x\in\left[t-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n},t+\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n}\right].$$

Доказательство. Из (37), применяя весовую оценку (16), получаем

$$\left|J_n\left(t-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n},x;t\right)\right|\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{t-\frac{(1-t)^{\frac{1}{2}}}{2n}}^{x}(1-u)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\,du$$

$$\le c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}-\frac14}\left(1-t-\frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}\frac{(1-t)^{\frac12}}{n}n$$
$$=c(\alpha)(1-t)^{\frac{\alpha}{2}+\frac14}\left(1-t-\frac{(1-t)^{\frac12}}{2n}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}=\left(1-\frac{1}{2(1-t)^{\frac12}n}\right)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac14}.$$

Из условий на t следует, что

$$1-\frac{1}{2(1-t)^{\frac12}n}\ge 1-\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Поэтому

$$\left|J_n\left(t-\frac{(1-t)^{\frac12}}{2n},x;t\right)\right|\le c(\alpha).\quad\Box$$

Из лемм, доказанных в этом разделе, и свойств (39), (38) вытекает оценка

$$|J_n(x,t)|<c(\alpha),\quad 0<\alpha\le\frac32,\ -1\le x\le 1,\ 0\le t\le 1-\frac{2}{n^2}.\tag{60}$$

Доказательство достаточности следует из (40) и (60).

3.2. Доказательство необходимости. Из результатов В. М. Бадкова [25, с. 1268, лемма 2] следует существование такой константы $d=d(\alpha)>0$, что при $t_n=1-\frac{d}{n^2}$

$$\widehat{P}_n^\alpha(t)\ge c(\alpha,d)n^{\alpha+1/2},\quad t_n\le t\le 1.\tag{61}$$

В силу формулы Кристоффеля — Дарбу имеем

$$J_n(-t_n,0)=\lambda_n^\alpha\int\limits_{-1}^{-t_n}\frac{\widehat{P}_{n+1}^\alpha(0)\widehat{P}_n^\alpha(u)-\widehat{P}_n^\alpha(0)\widehat{P}_{n+1}^\alpha(u)}{-u}\,du.$$

Для $n=4k$ из [22, (4.1.5)] выводим

$$J_n(-t_n,0)=\lambda_n^\alpha\int\limits_{-1}^{-t_n}\frac{-\widehat{P}_{4k}^\alpha(0)\widehat{P}_{4k+1}^\alpha(u)}{-u}\,du=\lambda_n^\alpha\widehat{P}_{4k}^\alpha(0)\int\limits_{t_n}^{1}\frac{\widehat{P}_{4k+1}^\alpha(u)}{u}\,du.\tag{62}$$

В силу [22, (4.1.5)]

$$\widehat{P}_n^\alpha(0)=(h_n^\alpha)^{-\frac12}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{n}{2}+\alpha+1)}P_{n/2}^{-\frac12,\alpha}(1),\quad n=4k,$$

откуда следует, что

$$\widehat{P}_n^\alpha(0)\asymp 1,\quad n=4k.\tag{63}$$

Из (61) вытекает неравенство

$$\int\limits_{t_n}^{1}\frac{\widehat{P}_{4k+1}^\alpha(u)}{u}\,du\ge\int\limits_{t_n}^{1}\widehat{P}_{4k+1}^\alpha(u)\,du\ge c(\alpha)n^{\alpha-\frac32}.$$

Отсюда, из (63) и (62) получаем

$$J_n(-t_n,0)\ge c(\alpha)n^{\alpha-\frac32},\quad n=4k.$$

4. Доказательство теоремы

Пусть $r = 1$. В силу леммы 3 пространство $W^1_{L^1_{\rho(\alpha)}}$ можно заменить на $W^1_{L^1_{\rho(\tilde{\alpha})}}$. Тогда доказательство вытекает из утверждения 1, лемм 1, 2 (с учетом свойства (21)), 5 и 7. Пусть теперь $r > 1$. Из (22) имеем

$$f(x) - S^{\alpha}_{r,n}(f,x) = \int\limits_{-1}^{x} \big(f'(t) - S^{\alpha}_{r-1,n-1}(f',t)\big)\,dt.$$

Если $f \in W^r_{L^1_{\rho(\alpha)}}$, то $f' \in W^{r-1}_{L^1_{\rho(\alpha)}}$, поэтому для доказательства теоремы в этом случае можно воспользоваться методом математической индукции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И. И.* Системы функций, ортогональные по Соболеву, ассоциированные с ортогональной системой // Изв. РАН. Сер. мат. 2018. Т. 82, № 1. С. 225–258.
2. *Marcellán F., Xu Y.* On Sobolev orthogonal polynomials // Expositiones Mathematicae. 2015. V. 33. P. 308–352.
3. *Diaz-Gonzalez A., Marcellán F., Pijeira-Cabrera H. et al.* Discrete-continuous Jacobi–Sobolev spaces and Fourier series // Bull. Malaysian Math. Sci. Soc. 2021. V. 44. P. 571–598.
4. *Marcellán F., Quintana Y., Urieles A.* On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi–Sobolev expansions // Turkish J. Math. 2013. V. 37, N 6. P. 934–948.
5. *Ciaurri Ó., Mínguez Ceniceros J.* Fourier series of Jacobi–Sobolev polynomials // Integral Transforms and Special Functions. 2019. V. 30. P. 334–346.
6. *Ciaurri Ó., Mínguez Ceniceros J.* Fourier series for coherent pairs of Jacobi measures // Integral Transforms and Special Functions. 2021. V. 32. P. 437–457.
7. *Fejzullahu B. Xh.* Asymptotic properties and Fourier expansions of orthogonal polynomials with a non-discrete Gegenbauer–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2010. V. 162, N 2. P. 397–406.
8. *Fejzullahu B. Xh., Marcellan F., Moreno-Balcazar J. J.* Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials: Asymptotics and a Cohen type inequality // J. Approx. Theory. 2013. V. 170. P. 78–93.
9. *Marcellán F., Osilenker B. P., Rocha I. A.* On Fourier series of a discrete Jacobi–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2002. V. 117, N 1. P. 1–22.
10. *Rocha I. A., Marcellán F., Salto L.* Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2003. V. 121. P. 336–356.
11. *Осиленкер Б. П.* Сходимость и суммируемость рядов Фурье — Соболева // Вестн. МГСУ. 2012. Т. 5. С. 34–39.
12. *Осиленкер Б. П.* О линейных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортогональным в дискретных пространствах Соболева // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 420–435.
13. *Fejzullahu B. Xh., Marcellán F.* On convergence and divergence of Fourier expansions with respect to some Gegenbauer–Sobolev type inner product // Communications in the Analytic Theory of Continued Fractions. 2009. V. 16. P. 1–11.
14. *Ciaurri Ó., Mínguez J.* Fourier series of Gegenbauer–Sobolev polynomials // SIGMA, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. 2018. V. 14. P. 1–11.
15. *Шарапудинов И. И.* Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 4. С. 87–164.
16. *Магомед-Касумов М. Г.* Система функций, ортогональная в смысле Соболева и порожденная системой Уолша // Мат. заметки. 2019. Т. 105, № 4. С. 545–552.
17. *Гаджимирзаев Р. М.* Об аппроксимативных свойствах рядов Фурье по полиномам Якоби $P_n^{\alpha-r,-r}(x)$, ортогональным по Соболеву // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 6. С. 803–818.
18. *Гаджимирзаев Р. М.* Оценки скорости сходимости ряда Фурье по полиномам Лагерра — Соболева // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 4. С. 622–635.
19. *Шарапудинов И. И.* Аппроксимативные свойства рядов Фурье по многочленам, ортогональным по Соболеву с весом Якоби и дискретными массами // Мат. заметки. 2017. Т. 101, № 4. С. 611–629.

20. *Магомед-Касумов М. Г.* Равномерная сходимость рядов Фурье по системе полиномов, ортогональной в смысле Соболева и ассоциированной с полиномами Якоби // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 339–349.

21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Физматгиз, 1965. Т. 1.

22. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

23. *Садовничий В. А.* Теория операторов. М.: Дрофа, 2004.

24. *Зорщиков А. В.* О равномерности сходимости рядов Фурье по многочленам Якоби // Докл. АН СССР. 1967. Т. 176, № 1. С. 35–38.

25. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье — Якоби // Сиб. мат. журн. 1968. Т. 9, № 6. С. 1263–1283.

Поступила в редакцию 13 июля 2024 г.
После доработки 18 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Магомед-Касумов Магомедрасул Грозбекович (ORCID 0000-0002-6624-5612)
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
ул. М. Гаджиева 45, Махачкала 367000;
Владикавказский научный центр РАН,
ул. Ватутина, д. 53, Владикавказ 362025
rasuldev@gmail.com

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.545+517.962.2+519.173

ИНДЕКС КИРХГОФА ДЛЯ ЦИРКУЛЯНТНЫХ ГРАФОВ

А. Д. Медных, И. А. Медных

Аннотация. Представлен подход, позволяющий получать замкнутые аналитические формулы для индекса Кирхгофа циркулянтных графов с четной и нечетной валентностью вершин соответственно и призмообразного графа, основанием которого служит циркулянтный граф. Изучено асимптотическое поведение индекса Кирхгофа. Доказано, что в каждом из перечисленных случаев индекс Кирхгофа представляется в виде суммы кубического многочлена и экспоненциально малого остаточного члена.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.610

Ключевые слова: циркулянтный граф, матрица Лапласа, собственное число, индекс Винера, индекс Кирхгофа.

Введение

Пусть G — связный конечный граф на n вершинах. Обозначим через $D(G)$ диагональную матрицу, составленную из валентностей вершин графа G, через $A(G)$ — матрицу смежности графа G. Матрица $L(G) = D(G) - A(G)$ называется *матрицей Лапласа графа* G. Известно [1], что если граф связен, то все собственные значения $L(G)$, за исключением одного, равного 0, строго положительны, т. е. спектр матрицы Лапласа графа G имеет вид $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

Изначально индекс Кирхгофа графа G был определен Клейном и Рандичем [2] как среднее резистивное расстояние между его вершинами. Точнее, пусть вершины графа G обозначаются через $1, 2, \ldots, n$. Тогда резистивное расстояние между вершинами i и j, обозначаемое через $r_{ij} = r_{ij}(G)$, определяется как эффективное сопротивление между ними, если каждое ребро G наделено единичным сопротивлением. Следуя [2], определим индекс Кирхгофа графа G, полагая

$$Kf(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}.$$

Такое определение было мотивировано известным индексом Винера $W(G)$, подсчитывающим сумму расстояний между парами вершин графа G [3], т. е.

$$W(G) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij},$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0005.

где через d_{ij} обозначается расстояние между вершинами i и j. Клейн и Рандич [2] показали, что $Kf(G) \leq W(G)$, где равенство достигается тогда и только тогда, когда граф G — дерево. Позже в [4, 5] независимо была найдена следующая простая формула, связывающая индекс Кирхгофа со спектром матрицы Лапласа:

$$Kf(G) = n\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\lambda_j}.$$

Индексы Кирхгофа для различных семейств графов были изучены в работах [6–15]. В частности, в [12, 13] установлена связь индекса Кирхгофа с дзета-функцией Ихара — Сельберга и дзета-функцией Бартольди.

Цель настоящей работы — найти явные аналитические формулы для индекса Кирхгофа циркулянтных графов $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ и графа призмы $K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, а также изучить их асимптотическое поведение при n, стремящимся к бесконечности. Указанные формулы будут представлены в виде конечного не зависящего от n числа слагаемых, каждое из которых представляет собой рациональную функцию, вычисленную в корнях некоторого фиксированного полинома.

Данная статья является расширенной версией работы авторов, анонсированной ранее в [16].

1. Основные определения и предварительные сведения

1.1. Общие свойства циркулянтных графов. Рассмотрим конечный связный граф G, допускающий кратные ребра, но не имеющий петель. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно множества вершин и ребер графа G. Матрица $A = A(G) = \{a_{uv}\}_{u,v\in V(G)}$, где a_{uv} — число ребер между u и v, называется *матрицей смежности* графа G. Обозначим через $d(v)$ валентность вершины $v \in V(G)$ и рассмотрим диагональную матрицу $D = D(G)$ с элементами $d_{vv} = d(v)$. Матрица $\Delta(G) = D(G) - A(G)$ называется *матрицей Лапласа* или *лапласианом* графа G.

Пусть $s_1, s_2, \dots, s_k$ — целые числа такие, что $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k \leq \frac{n}{2}$. *Циркулянтным графом* $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ на n вершинах $0, 1, 2, \dots, n-1$ называется простой граф, у которого вершина i, $0 \leq i \leq n-1$, смежна вершинам $i \pm s_1, i \pm s_2, \dots, i \pm s_k \pmod n$. Если $s_k < n/2$, то все вершины графа имеют четную валентность $2k$. В случае, когда n четно и $s_k = n/2$, все вершины графа имеют нечетную валентность $2k-1$.

Два циркулянтных графа $C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ и $C_n(\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \dots, \widetilde{s}_k)$ называются *сопряженными,* если существует взаимно простое с n целое число r такое, что наборы чисел $\{\widetilde{s}_1, \widetilde{s}_2, \dots, \widetilde{s}_k\}$ и $\{rs_1, rs_2, \dots, rs_k\}$ совпадают как подмножества циклической группы $\mathbb{Z}_n$. В данном случае умножение вершин на $r (\bmod n)$ задает изоморфизм графов. В 1967 г. Адам предположил, что два циркулянтных графа изоморфны, если и только если они сопряжены [17]. Целью этой гипотезы была классификация циркулянтных графов с точностью до изоморфизма. Однако оказалось, что гипотеза Адама неверна. В качестве контрпримера можно указать два графа $C_{16}(1, 2, 7)$ и $C_{16}(2, 3, 5)$. Они не сопряжены, но изоморфны [18].

Полное решение проблемы изоморфизма для циркулянтных графов дал Музычук [19]. Евдокимов и Пономаренко [20] показали, что циркулянтные графы распознаются за полиномиальное время в множестве всех графов.

Хорошо известно, что граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ связен тогда и только тогда, когда $\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k, n) = 1$. В общем случае число связных компонент графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ равно $c = \gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k, n)$. При этом вершины $0, 1, \ldots, c-1$ лежат в разных компонентах связности и каждая компонента связности изоморфна графу $C_{n/c}(s_1/c, s_2/c, \ldots, s_k/c)$. Если $c > 1$, то граф G несвязен. В этом случае его индекс Кирхгофа равен бесконечности. В дальнейшем, если не оговорено обратное, все графы предполагаются связными.

Поскольку мы заинтересованы в работе со связными графами, условие $(n, d) = 1$, где $d = \gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, всегда выполнено. В силу указанного выше графы $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ и $C_n(s_1/d, s_2/d, \ldots, s_k/d)$ изоморфны. При этом $\gcd(s_1/d, s_2/d, \ldots, s_k/d) = 1$. Поэтому во всех результатах, полученных ниже, без ограничения общности будем предполагать, что выполнено условие $\gcd(s_1, s_2, \ldots, s_k) = 1$.

Матрица размера $n \times n$ называется *циркулянтной* и обозначается через $\mathrm{circ}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$, если она имеет следующий вид:

$$\mathrm{circ}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Несложно заметить, что матрица смежности и матрица Лапласа циркулянтного графа циркулянтны. Верно и обратное: если матрица Лапласа некоторого графа циркулянтна (при подходящей нумерации вершин), то сам граф также циркулянтен.

Напомним [21], что собственные значения циркулянтной матрицы $C = \mathrm{circ}(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ задаются простыми формулами $\lambda_j = q\big(\varepsilon_n^j\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, где $q(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}$ и ε_n — первообразный корень степени n из единицы. Также рассмотренная циркулянтная матрица представима в виде $C = q(T)$, где $T = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \ldots, 0)$ — матричное представление оператора циклического сдвига $(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}) \to (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_0)$.

Это дает ключ к описанию лапласиана и его спектра для произвольного циркулянтного графа. Начнем с циркулянтных графов четной валентности $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$.

1.2. Спектр графа $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. Предпишем каждому графу $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ *сопровождающий полином* Лорана

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k} (z^{s_i} + z^{-s_i}),$$

и пусть $T = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \ldots, 0)$ — циркулянтная матрица размера $n \times n$. Тогда лапласиан графа G представим в виде $\Delta(G) = L(T)$, а его спектр задается числами $\lambda_j = L\big(\varepsilon_n^j\big)$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Действительно, в этом случае матрица смежности графа G имеет вид

$$A(G) = \sum_{i=1}^{k} (T^{s_i} + T^{-s_i}),$$

а диагональная матрица, образованная валентностями, равна $D(G) = 2kI_n$, где I_n — единичная матрица порядка n. Отсюда

$$\Delta(G) = D(G) - A(G) = 2kI_n - \sum_{i=1}^{k} (T^{s_i} + T^{-s_i}) = L(T).$$

Найдем собственные значения матрицы $\Delta(G)$. Для этого заметим, что собственные значения матрицы T имеют вид ε_n^i, $j = 0, 1, \dots, n-1$, где $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$.

Поскольку все они различны, матрица T сопряжена диагональной матрице $\mathbb{T} = \operatorname{diag}(1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1})$. Для того чтобы найти спектр лапласиана, без ограничения общности можно заменить T на $\mathbb{T}$. Тогда

$$\mathbb{L} = 2kI_n - \sum_{i=1}^{k} (\mathbb{T}^{s_i} + \mathbb{T}^{-s_i})$$

— диагональная матрица. Это значительно упрощает проблему нахождения ее собственных значений. В самом деле, пусть λ — собственное значение $\mathbb{L}$ и $x = (x_1, \dots, x_n)$ — соответствующий ему собственный вектор. Тогда система уравнений

$$\left((2k - \lambda)I_n - \sum_{i=1}^{k} (\mathbb{T}^{s_i} + \mathbb{T}^{-s_i}) \right) x = 0$$

распадается в n линейно независимых уравнений

$$\left((2k - \lambda_j) - \sum_{i=1}^{k} \bigl(\varepsilon_n^{js_i} + \varepsilon_n^{-js_i}\bigr) \right) x_j = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отсюда, полагая $x_j = (0, \dots, \underset{j+1}{1}, \dots, 0)$, получим $\lambda_j = L\bigl(\varepsilon_n^j\bigr)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Поскольку граф G связен, имеем $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_j > 0$ для $j > 0$.

1.3. Спектр графа $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$. Все вершины графа $G = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ имеют нечетную валентность, равную $2k+1$. Поэтому диагональная матрица, образованная их валентностями, равна $D(G) = (2k+1)I_{2n}$, где I_{2n} — единичная матрица порядка $2n$. Матрица смежности графа G имеет вид

$$A(G) = \sum_{i=1}^{k} (T^{s_i} + T^{-s_i}) + T^n,$$

где $T = \operatorname{circ}(0, 1, 0, \dots, 0)$ — циркулянтная $2n \times 2n$-матрица, удовлетворяющая соотношению $T^{2n} = I_{2n}$. Таким образом, лапласиан графа задается формулой

$$\Delta(G) = (2k+1)I_{2n} - \sum_{i=1}^{k} (T^{s_i} + T^{-s_i}) - T^n.$$

Собственные значения циркулянтной матрицы T равны ε_{2n}, $j = 0, 1, \dots, 2n-1$, где $\varepsilon_{2n} = e^{\frac{2\pi i}{2n}}$. Поскольку все они различны, матрица T сопряжена диагональной матрице $\mathbb{T} = \operatorname{diag}\bigl(1, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{2n}^{2n-1}\bigr)$ с диагональными элементами $1, \varepsilon_{2n}, \dots, \varepsilon_{2n}^{2n-1}$. Для нахождения спектра лапласиана, как и раньше, можно предположить, что $T = \mathbb{T}$. Тогда

$$\mathbb{L} = (2k+1)I_{2n} - \sum_{i=1}^{k} (\mathbb{T}^{s_i} + \mathbb{T}^{-s_i}) - \mathbb{T}^n = \operatorname{diag}(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{2n-1})$$

— диагональная матрица с собственными значениями

$$\mu_j = 2k + 1 - \sum_{i=1}^{k} \bigl(\varepsilon_{2n}^{s_i} + \varepsilon_{2n}^{-s_i}\bigr) - \varepsilon_{2n}^{jn}, \quad j = 0, 1, \dots, 2n-1.$$

Перепишем полученные формулы в более удобном виде. Для этого заметим, что в зависимости от четности j величина ε_{2n}^{jn} равна $+1$ или -1. Полагая $\lambda_j = \mu_{2j}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, и $\lambda_{j+n} = \mu_{2j+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, получим следующие формулы для собственных значений оператора $\Delta(G)$:

$$\lambda_j = L\big(\varepsilon_{2n}^{2j}\big) = L\big(\varepsilon_n^j\big), \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$\lambda_{j+n} = L(\varepsilon_{2n}^{2j+1}) + 2, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где, как и в предыдущем случае,

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

1.4. Спектр графа $K_2 \times C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$. В этом пункте будет вычислен спектр для призмообразного графа $\mathrm{Pr}_n = K_2 \times C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$, где K_2 — граф, состоящий из одного ребра и двух вершин. Вершины графа Pr_n образуют множество $\{(k, v_i) \mid k = 1, 2, \ldots, n, \ i = 1, 2\}$, где для фиксированного k вершины (k, v_i) и (k, v_j) соединены ребром, а для каждого $i = 1, 2$ вершины (k, v_i), $k = 1, 2, \ldots n$, образуют циркулянтный граф $C_n(s_1, s_2, \ldots, s_{k_i})$, в котором вершина (k, v_i) соединена ребром с вершиной $(k \pm s_1, v_i), (k \pm s_{i,2}, v_i), \ldots, (k \pm s_{k_i}, v_i) \pmod n$. Для нахождения матрицы смежности $A(\mathrm{Pr}_n)$ воспользуемся тем, что матрица смежности графа $G = C_n(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ уже известна и имеет вид

$$A(G) = \sum_{i=1}^{k}(T^{s_i} + T^{-s_i}),$$

где $T = \mathrm{circ}(0, 1, 0, \ldots, 0)$ — матрица размера $n \times n$. Тогда

$$A(\mathrm{Pr}_n) = \begin{pmatrix} A(G) & I_n \\ I_n & A(G) \end{pmatrix},$$

где I_n — единичная матрица порядка n. При этом все вершины графа имеют валентность $2k+1$ и, следовательно, диагональная матрица, образованная валентностями, равна

$$D(\mathrm{Pr}_n) = (2k+1)\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Поскольку $\Delta(\mathrm{Pr}_n) = D(\mathrm{Pr}_n) - A(\mathrm{Pr}_n)$, имеем

$$\Delta(\mathrm{Pr}_n) = \begin{pmatrix} (2k+1)I_n - A(G) & I_n \\ I_n & (2k+1)I_n - A(G) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} I_n + L(T) & I_n \\ I_n & I_n + L(T) \end{pmatrix},$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k}(z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Для нахождения спектра оператора Лапласа, как и в двух предыдущих случаях, заменим матрицу T сопряженной ей диагональной матрицей $\mathbb{T} = \mathrm{diag}\big(1, \varepsilon_n, \ldots, \varepsilon_n^{n-1}\big)$, где $\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Пусть λ — собственное значение матрицы $\Delta(\mathrm{Pr}_n)$, и пусть (x, y) — соответствующий ему собственный вектор, где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^t$. Тогда имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} I_n + L(\mathbb{T}) - \lambda I_n & -I_n \\ -I_n & I_n + L(\mathbb{T}) - \lambda I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Напомним, что все элементы рассматриваемой блочной матрицы являются диагональными $(n \times n)$-матрицами и $(j+1, j+1)$-й элемент матрицы $\mathbb{T}$ равен ε_n^j. Поэтому уравнение (1) распадается в n уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 + L(\varepsilon_n^j) - \lambda & -1 \\ -1 & 1 + L(\varepsilon_n^j) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{j+1} \\ y_{j+1} \end{pmatrix} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Каждое уравнение дает ровно два собственных значения $\Delta(\mathrm{Pr}_n)$, скажем λ_j и λ_{j+n}, являющихся решением уравнения

$$\det \begin{pmatrix} 1 + L(\varepsilon_n^j) - \lambda & -1 \\ -1 & 1 + L(\varepsilon_n^j) - \lambda \end{pmatrix} = 0.$$

В результате полный набор собственных значений оператора Лапласа графа Pr_n задается списком $\lambda_j = L(\varepsilon_n^j)$ и $\lambda_{j+n} = L(\varepsilon_n^j) + 2$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

2. Индекс Кирхгофа для циркулянтных графов с четной валентностью

Приведем явные формулы для индекса Кирхгофа $Kf(G_n)$ циркулянтных графов $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, $1 \le s_1 < s_2 < \dots < s_k < n/2$. Данные формулы представляются в виде сумм s_k членов, каждый из которых выражается через полиномы Чебышева порядка n, вычисленные в корнях заданного полинома степени s_k. Наряду с введенным выше полиномом Лорана

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k} (z^{s_i} + z^{-s_i})$$

рассмотрим также полином

$$Q(w) = \sum_{j=1}^{k} (2 - 2T_{s_j}(w)),$$

где $T_n(w)$ — полином Чебышева первого рода. Рассмотренные полиномы связаны несложным соотношением $L(z) = Q(w)$, где $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$.

Ниже предполагаем, что полином $Q(w)$ не имеет кратных нулей. Развитая в работе техника позволяет также рассмотреть случай кратных корней полинома $Q(w)$, но технически это приведет к громоздким и неудобным для вычисления формулам.

Теорема 1. *Индекс Кирхгофа циркулянтного графа $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ вычисляется по формуле*

$$Kf(G_n) = \frac{n}{12 \sum_{j=1}^{k} s_j^2} \left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^4}{\sum_{j=1}^{k} s_j^2} \right) + \sum_{p=2}^{s_k} \frac{n^2\, U_{n-1}(w_p)}{(1 - T_n(w_p)) Q'(w_p)},$$

где w_p — отличные от 1 корни полинома

$$Q(w) = \sum_{j=1}^{k} (2 - 2T_{s_j}(w)),$$

а $T_n(w)$ и $U_{n-1}(w)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода соответственно.

Предварительно установим следующие вспомогательные утверждения.

Предложение 1. *Пусть $P(w)$ и $Q(w)$ — полиномы степеней n и m соответственно, имеющие простые корни. Обозначим корни полинома $P(w)$ через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а корни полинома $Q(w)$ — через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Предположим, что $P(w)$ и $Q(w)$ имеют простой корень в точке $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ и все корни полинома $Q(w)$ простые. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{Q(\alpha_j)} = -\operatorname*{Res}_{w=1} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} - \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{Q'(\beta_j)} \frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)}.$$

Для доказательства предложения заметим, что при $j \geq 2$ имеют место равенства

$$\operatorname*{Res}_{w=\alpha_j} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{\nu_j}{Q(\alpha_j)}, \text{ где } \nu_j \text{ — кратность корня } \alpha_j,$$

$$\operatorname*{Res}_{w=\beta_j} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{1}{Q'(\beta_j)} \frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)} \text{ и } \operatorname*{Res}_{w=\infty} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} = 0.$$

Тогда по классической теореме о вычетах имеем

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|w|=r} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)}\, dw = \operatorname*{Res}_{w=1} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} + \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{Q(\alpha_j)} + \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{Q'(\beta_j)} \frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)},$$

где $r > \max\limits_{j,k}\{|\alpha_j|, |\beta_k|\}$. Полученное равенство доказывает предложение.

Вычет в точке $w = 1$ находится с помощью следующей леммы, которая доказывается непосредственным разложением $P(w)$ и $Q(w)$ в степенные ряды.

Лемма 1. *Пусть полиномы $P(w)$ и $Q(w)$ имеют общий корень $w = 1$ кратности 1. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{w=1} \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{1}{2Q'(1)} \left(\frac{P''(1)}{P'(1)} - \frac{Q''(1)}{Q'(1)} \right).$$

Доказательство. Поскольку рациональная функция $f(w) = \frac{1}{Q(w)} \frac{P'(w)}{P(w)}$ имеет полюс порядка 2 в точке $w = 1$, для вычисления требуемого вычета достаточно воспользоваться формулой

$$\operatorname*{Res}_{w=1} f(w) = \lim_{w \to 1} \frac{d}{dw} (f(w)(w-1)^2).$$

Разлагая $f(w)(w-1)^2$ в ряд Тейлора, имеем

$$\operatorname*{Res}_{w=1} f(w) = \frac{1}{2Q'(1)} \left(\frac{P''(1)}{P'(1)} - \frac{Q''(1)}{Q'(1)} \right).$$

Доказательство теоремы 1. Согласно результатам п. 1.2 собственные значения оператора Лапласа графа G_n определяются по формулам

$$\lambda_j = L(e^{\frac{2\pi i j}{n}}),$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{i=1}^{k} (z^{s_i} + z^{-s_i}).$$

Тогда

$$\lambda_j = 2k - 2\sum_{i=1}^{k}\cos\left(\frac{2\pi j s_i}{n}\right)$$
$$= 2k - 2\sum_{i=1}^{k} T_{s_i}\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right) = Q\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right), \quad j = 1, \dots, n,$$

а числа $\cos(\frac{2\pi j}{n})$ являются корнями полинома $P(w) = T_n(w) - 1$. В силу связности граф G_n имеет ровно одно нулевое собственное значение. Отсюда $w = 1$ — единственный простой корень полиномов $P(w)$ и $Q(w)$. Для доказательства теоремы положим $P(w) = T_n(w) - 1$ и

$$Q(w) = \sum_{i=1}^{k}(2 - 2T_{s_i}(w)).$$

Поскольку индекс Кирхгофа

$$Kf(G_n) = n\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{\lambda_j} = n\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n})\big)},$$

для его вычисления используем предложение 1 и лемму 1. Непосредственными вычислениями по лемме 1 получим

$$\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{1}{Q(z)}\frac{P'(z)}{P(z)} = -\frac{1}{12\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k}s_j^4}{\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\right).$$

Учитывая, что $T_n'(w) = n\,U_{n-1}(w)$, по предложению 1 завершим доказательство теоремы.

Для исследования асимптотического поведения индекса Кирхгофа при $n \to \infty$ удобно переписать теорему 1 в следующем виде.

Теорема 2. *Индекс Кирхгофа циркулянтного графа $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ вычисляется по формуле*

$$Kf(G_n) = \frac{n}{12\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k}s_j^4}{\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}}\frac{n^2}{zL'(z)}\frac{z^n+1}{z^n-1},$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}),$$

а суммирование ведется по всем корням $L(z)$, модуль которых больше 1.

Доказательство. Теорема 2 получается из теоремы 1 с помощью замены переменных $w = (z + z^{-1})/2$ и равенств

$$T_n\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}, \quad U_{n-1}\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}.$$

При такой замене

$$\frac{U_{n-1}(w)}{Q'(w)(1 - T_n(w))} = -\frac{1}{zL'(z)}\frac{z^n+1}{z^n-1}.$$

Согласно [22, лемма 2] полином $Q(w)$ имеет ровно один корень, по модулю равный единице, а именно $w = 1$. Поскольку $L(z) = Q((z+z^{-1})/2)$, все отличные от 1 корни w_p полинома $Q(w)$ могут быть представлены в виде $w_p = (z_p+z_p^{-1})/2$, где z_p, $2 \le p \le s_k$, — соответствующие корни полинома $L(z)$, выбранные так, что $|z_p| > 1$. Это дает равенство

$$\sum_{p=2}^{s_k} \frac{n^2\, U_{n-1}(w_p)}{(1-T_n(w_p))Q'(w_p)} = -\sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{n^2}{zL'(z)} \frac{z^n+1}{z^n-1}.$$

По условию, оговоренному в начале раздела, полином $Q(w)$ не имеет кратных корней. В силу равенства

$$L'(z) = \frac{1-z^{-2}}{2} Q'\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)$$

это означает, что кратными корнями $L(z)$ могут быть только точки $z = \pm 1$. В частности, в точках из множества $\{z \in \mathbb{C} : L(z) = 0, |z| > 1\}$ всегда выполнено неравенство $L'(z) \neq 0$.

Теорема доказана.

Для выявления асимптотического поведения последнего члена полученной формулы введем константу $A = \min\{|z| : L(z) = 0, |z| > 1\}$, зависящую только от величин $s_1, s_2, \dots, s_k$. Заметим [22, лемма 2], что полином Лорана $L(z)$, ассоциированный с графом G_n, всегда имеет по крайней один корень, по модулю больший единицы. Следовательно, $A > 1$. В результате при $n \to \infty$ имеем

$$\sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{n^2}{zL'(z)} \frac{z^n+1}{z^n-1} = \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{n^2}{zL'(z)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^n}\right)\right)$$
$$= \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{n^2}{zL'(z)} + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right).$$

Как следствие получим асимптотическую формулу поведения индекса Кирхгофа для циркулянтных графов $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ при n стремящемся к бесконечности.

Следствие 1. *Имеет место асимптотическая формула*

$$Kf(G_n) = \frac{n}{12\sum_{j=1}^k s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^k s_j^4}{\sum_{j=1}^k s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{n^2}{zL'(z)} + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right), \quad n \to \infty,$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k} (z^{s_j} + z^{-s_j}),$$

$A = \min\{|z| : L(z) = 0,\ |z| > 1\}$ *— константа, зависящая только от* $s_1, s_2, \dots, s_k$.

Заметим, что главный член асимптотики представляет собой кубический полином от n со свободным членом, равным нулю.

3. Индекс Кирхгофа для циркулянтных графов с нечетной валентностью

В этом разделе приведены явные аналитические формулы для индекса Кирхгофа $Kf(D_n)$ циркулянтных графов с нечетной валентностью вершин $D_n = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$, $1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n$. Эти формулы содержат суммы, слагаемые которых представляют собой простые аналитические выражения, вычисленные в корнях заданного полинома степени $2s_k$. Как и выше, введем в рассмотрение полиномы

$$Q(w) = \sum_{j=1}^{k}(2 - 2T_{s_j}(w)), \quad L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}).$$

В этом разделе будем считать, что полиномы $Q(w)$ и $Q(w)+2$ не имеют кратных корней. Это гарантирует, что всегда выполнено условие $L'(z) \neq 0$ на множестве $\{z \in \mathbb{C}: L(z)(L(z)+2) = 0, |z| > 1\}$, необходимое для формулировки приведенных ниже основных результатов.

Теорема 3. *Индекс Кирхгофа $Kf(D_n)$ циркулянтного графа с нечетной валентностью вершин*

$$D_n = C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n), \quad 1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k < n,$$

задается формулой

$$\frac{n}{6\sum_{j=1}^{k} s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^4}{\sum_{j=1}^{k} s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{2n^2}{z\,L'(z)}\frac{z^n+1}{z^n-1} - \sum_{\substack{z:L(z)+2=0,\\ |z|>1}} \frac{2n^2}{z\,L'(z)}\frac{z^n-1}{z^n+1},$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}).$$

Доказательство теоремы 3 проводится по той же схеме, что и доказательство аналогичного утверждения для циркулянтных графов с четной валентностью. Теорема 3 так же, как и теорема 2, может быть сформулирована в терминах полиномов Чебышева.

Спектр графа D_n имеет $2n$ собственных значений, указанных в п. 1.3:

$$\lambda_j = L(e^{\frac{2\pi j i}{n}}) = Q\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\lambda_{j+n} = L(e^{\frac{(2j+1)\pi i}{2n}}) + 2 = Q\left(\cos\left(\frac{(2j+1)\pi}{2n}\right)\right) + 2, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

В силу связности граф D_n имеет ровно одно нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Индекс Кирхгофа графа D_n равен

$$Kf(D_n) = 2n\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{1}{\lambda_j} = 2n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{Q\big(\cos\big(\frac{2\pi j}{n}\big)\big)} + 2n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2 + Q\big(\cos\big(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\big)\big)}.$$

Заметим, что числа

$$\lambda_j = Q\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

образуют спектр оператора Лапласа графа $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, рассмотренного в двух предыдущих теоремах. Это означает, что величина

$$Kf(G_n) = n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{Q\bigl(\cos(\frac{2\pi j}{n})\bigr)}$$

уже вычислена и для ее конкретного значения можно воспользоваться формулировкой теоремы 2. В результате имеем

$$Kf(D_n) = 2Kf(G_n) + 2n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2+Q\bigl(\cos(\frac{(2j-1)\pi}{2n})\bigr)}. \tag{2}$$

Осталось посчитать сумму

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2+Q\bigl(\cos(\frac{(2j-1)\pi}{2n})\bigr)}.$$

Для ее нахождения воспользуемся следующей элементарной леммой.

Лемма 2. *Пусть $P(w)$ и $R(w)$ — отличные от константы полиномы степеней n и m соответственно. Обозначим корни полинома $P(w)$ через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а корни полинома $R(w)$ — через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$. Предположим, что $R(w)$ не имеет кратных корней, а полиномы $P(w)$ и $R(w)$ не имеют общих корней. Тогда имеет место равенство*

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R(\alpha_j)} = -\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{R'(\beta_j)}\frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)}.$$

Доказательство следует из замечания, что

$$\operatorname*{Res}_{w=\alpha_j}\frac{1}{R(w)}\frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{\nu_j}{R(\alpha_j)}, \text{ где } \nu_j \text{ — кратность корня } \alpha_j,$$

$$\operatorname*{Res}_{w=\beta_j}\frac{1}{R(w)}\frac{P'(w)}{P(w)} = \frac{1}{R'(\beta_j)}\frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)} \text{ и } \operatorname*{Res}_{w=\infty}\frac{1}{R(w)}\frac{P'(w)}{P(w)} = 0.$$

По теореме о вычетах

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r}\frac{1}{R(w)}\frac{P'(w)}{P(w)}\,dw = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R(\alpha_j)} + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{R'(\beta_j)}\frac{P'(\beta_j)}{P(\beta_j)},$$

где $r > \max\limits_{j,k}\{|\alpha_j|, |\beta_k|\}$.

Для продолжения доказательства воспользуемся леммой 2. Положим

$$P(w) = T_n(w) + 1, \quad R(w) = Q(w) + 2.$$

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ корни полинома $P(z)$, через $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ — корни полинома $R(w)$. Заметим, что поскольку числа $\cos(\frac{2\pi j}{n})$, $j = 1, \dots, n$, образуют полный набор корней полинома $T_n(w) - 1$, то числа $\alpha_j = \cos(\frac{(2j-1)\pi}{2n})$, $j = 1, \dots, n$, дают полный список корней полинома

$$P(w) = \frac{T_{2n}(w) - 1}{T_n(w) - 1} = T_n(w) + 1.$$

Проверим, что $P(w)$ и $R(w)$ не имеют общих корней. Действительно, в силу равенства $T_s(\cos\varphi) = \cos(s\varphi)$ имеем

$$R(\alpha_j) = Q(\alpha_j) + 2 = 2 + \sum_{j=1}^{k}\left(2 - 2T_{s_j}\left(\cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2n}\right)\right)\right)$$
$$= 2 + \sum_{j=1}^{k}\left(2 - 2\cos\left(\frac{(2j-1)s_j\pi}{2n}\right)\right) \geq 2.$$

По сделанному предположению полином $R(w) = Q(w) + 2$ не имеет кратных корней. Таким образом, условия леммы 2 полностью проверены. Заметим, что $P'(w) = n\,U_{n-1}(w)$, $R'(w) = Q'(w)$. В результате получим

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R(\alpha_j)} = -\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{Q'(\beta_j)}\frac{nU_{n-1}(\beta_j)}{T_n(\beta_j)+1}.$$

Сделаем замену переменных $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ и воспользуемся формулой

$$\frac{U_{n-1}(w)}{Q'(w)(T_n(w)+1)} = -\frac{1}{zL'(z)}\frac{z^n-1}{z^n+1}.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R(\alpha_j)} = -\sum_{\substack{z:L(z)+2=0,\\ |z|>1}}\frac{n}{zL'(z)}\frac{z^n-1}{z^n+1}. \tag{3}$$

Перепишем формулу (2) в виде

$$Kf(D_n) = 2Kf(G_n) + 2n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{R(\alpha_j)}. \tag{4}$$

Комбинируя теорему 2 и формулы (3), (4), получим требуемый результат.

Следующее утверждение позволяет вычислить асимптотику индекса Кирхгофа для циркулянтных графов с нечетной валентностью.

Следствие 2. *Справедлива следующая асимптотическая формула для индекса Кирхгофа:*

$$Kf(D_n) = \frac{n}{6\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k}s_j^4}{\sum_{j=1}^{k}s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)(L(z)+2)=0,\\ |z|>1}}\frac{2n^2}{zL'(z)} + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right),\ n\to\infty.$$

Здесь

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}),$$

$A = \min\{|z| : L(z)(L(z)+2) = 0,\ |z| > 1\}$ *— константа, зависящая только от* $s_1, s_2, \ldots, s_k$.

4. Индекс Кирхгофа графа $K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$

В этом разделе рассмотрен призмообразный граф $K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, где K_2 — граф, состоящий из одного ребра и двух вершин. Хорошо известно, что свойства этого графа во многом напоминают свойства циркулянтного графа с нечетной валентностью вершин $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$. Для этого есть вполне объяснимые причины — оба графа двулистно накрываются графом $K_2 \times C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Здесь, как и в предыдущем разделе, считаем, что полиномы $Q(w)$ и $Q(w) + 2$ не имеют кратных корней. В этом случае необходимое для формулировки основного результата условие $L'(z) \neq 0$ при $L(z)(L(z)+2) = 0$ и $|z| > 1$ будет выполнено.

Основной результат раздела составляет следующая

Теорема 4. *Индекс Кирхгофа призмообразного графа*

$$\mathrm{Pr}_n = K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$$

вычисляется по формуле

$$\frac{n}{6\sum_{j=1}^k s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^k s_j^4}{\sum_{j=1}^k s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)=0,\\ |z|>1}} \frac{2n^2}{z\,L'(z)}\frac{z^n+1}{z^n-1} - \sum_{\substack{z:L(z)+2=0,\\ |z|>1}} \frac{2n^2}{z\,L'(z)}\frac{z^n+1}{z^n-1},$$

где

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k}(z^{s_j} + z^{-s_j}).$$

Доказательство теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 3. Спектр графа Pr_n имеет имеет $2n$ собственных значений, задаваемых формулами (см. п. 1.4)

$$\lambda_j = L(e^{\frac{2\pi j i}{n}}) = Q\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$\lambda_{j+n} = L(e^{\frac{2\pi j i}{n}}) + 2 = Q\left(\cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)\right) + 2, \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Граф Pr_n имеет ровно одно нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$. Индекс Кирхгофа графа Pr_n равен

$$Kf(\mathrm{Pr}_n) = 2n\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{1}{\lambda_j} = 2n\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n})\big)} + 2n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n}) + 2\big)}.$$

Как и раньше, числа $\lambda_j = Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n})\big)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, образуют спектр оператора Лапласа графа $G_n = C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$. Следовательно, для нахождения суммы $n\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{Q(\cos(\frac{2\pi j}{n}))}$ можно воспользоваться теоремой 2. В результате имеем

$$Kf(\mathrm{Pr}_n) = 2Kf(G_n) + 2n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n}) + 2\big)}.$$

Для завершения доказательства достаточно посчитать сумму

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{Q\big(\cos(\frac{2\pi j}{n}) + 2\big)}.$$

Воспользуемся леммой 2, где положим $P(w) = T_n(w) - 1$ и $R(w) = Q(w) + 2$. Здесь корнями полинома $P(w)$ служат числа $\alpha_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$, $j = 1, \dots, n$. После замены переменных $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R(\alpha_j)} = -\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{Q'(\beta_j)} \frac{n\,U_{n-1}(\beta_j)}{T_n(\beta_j) - 1} = -\sum_{\substack{z:L(z)+2=0,\\ |z|>1}} \frac{n}{zL'(z)} \frac{z^n + 1}{z^n - 1}. \qquad (5)$$

Перепишем формулу для индекса Кирхгофа в виде

$$Kf(\mathrm{Pr}_n) = 2Kf(G_n) + 2n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R(\alpha_j)}. \qquad (6)$$

Используя формулировку теоремы 2 и формулы (5), (6), завершим доказательство теоремы.

Индексы Кирхгофа графов $C_{2n}(s_1, s_2, \dots, s_k, n)$ и $K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$, данные теоремами 3, 4, отличаются только последним членом. Это позволяет установить, что они имеют одинаковое асимптотическое поведение. Более точно, справедливо

Следствие 3. *Для индекса Кирхгофа графа* $\mathrm{Pr}_n = K_2 \times C_n(s_1, s_2, \dots, s_k)$ *имеет место асимптотическая формула*

$$Kf(\mathrm{Pr}_n) = \frac{n}{6\sum_{j=1}^{k} s_j^2}\left(n^2 - \frac{\sum_{j=1}^{k} s_j^4}{\sum_{j=1}^{k} s_j^2}\right) - \sum_{\substack{z:L(z)(L(z)+2)=0,\\ |z|>1}} \frac{2n^2}{zL'(z)} + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right),\ n \to \infty.$$

Здесь

$$L(z) = 2k - \sum_{j=1}^{k} (z^{s_j} + z^{-s_j}),$$

$A = \min\{|z| : L(z)(L(z) + 2) = 0, |z| > 1\}$ — *константа, зависящая только от* $s_1, s_2, \dots, s_k$.

5. Примеры

1. Циклический граф $C_n = C_n(1)$. Индекс Кирхгофа циклического графа равен

$$Kf(C_n) = \frac{n^3 - n}{12}.$$

2. Граф $C_n(1, 2)$. Для данного семейства графов индекс Кирхгофа находится по формуле

$$Kf(C_n(1, 2)) = \frac{n}{300}(5n^2 - 17) + \frac{n^2 F_{2n}}{25\, F_n^2},$$

где F_n — n-е число Фибонначи. Заметим, что $F_{2n}/F_n^2 = \sqrt{5} + O(1/\phi^{2n})$, где $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ — золотое сечение.

3. Граф $C_n(1, 3)$. Индекс Кирхгофа циркулянтных графов $C_n(1, 3)$ имеет следующее асимптотическое поведение:

$$Kf(C_n(1, 3)) = \frac{n}{600}(5n^2 + 6\sqrt{110 + 50\sqrt{5}}n - 41) + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right), \quad n \to \infty,$$

где $A = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})})} \simeq 1.700015\ldots$.

4. Лестница Мёбиуса $C_{2n}(1,n)$ и граф призмы $\mathrm{Pr}_n = K_2 \times C_n(1)$. (Ср. с результатами работ [11, 23, 15].) Имеют место следующие точные аналитические формулы:

$$Kf(C_{2n}(1,n)) = \frac{n^3-n}{6} + n^2 \frac{\tanh\left(\frac{n}{2}\operatorname{arccoth}2\right)}{\sqrt{3}}$$

и

$$Kf(\mathrm{Pr}_n) = \frac{n^3-n}{6} + n^2 \frac{\coth\left(\frac{n}{2}\operatorname{arccoth}2\right)}{\sqrt{3}}.$$

Обе формулы для индекса Кирхгофа имеют одно и то же асимптотическое поведение

$$Kf(n) = \frac{n}{6}(n^2+2\sqrt{3}n-1) + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right), \quad n \to \infty,$$

где $A = 2+\sqrt{3} \simeq 3.73205$.

5. Графы $C_{2n}(1,2,n)$ и $K_2 \times C_n(1,2)$. Оба графа допускают асимптотическое поведение для индекса Кирхгофа

$$Kf(n) = \frac{n}{1650}(55n^2 + K\,n - 187) + O\left(\frac{n^2}{A^n}\right), \quad n \to \infty,$$

где $K = 2(66\sqrt{5}+25\sqrt{99+44\sqrt{3}}) \simeq 956.996$ и $A = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{33}+\sqrt{2(9-\sqrt{33})}) \simeq 1.824051$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mohar B.* The Laplacian spectrum of graphs // Graph theory, combinatorics, and applications: Alavi Y., Chartrand G., Oellermann O. R., Schwenk A. J. (eds.). New York: Wiley, 1991. V. 2. P. 871–898.

2. *Klein D. J., Randić M.* Resistance distance // J. Math. Chem. 1993. V. 12. P. 81–95.

3. *Wiener H.* Structural determination of paraffin boiling points // J. Am. Chem. Soc. 1947. V. 69, N 1. P. 17–20.

4. *Gutman I., Mohar B.* The quasi-Wiener and the Kirchhoff indices coincide // J. Chem. Inf. Comput. Sci. 1996. V. 36. P. 982–985.

5. *Zhu H. Y., Klein D. J., Lukovits I.* Extensions of the Wiener number // J. Chem. Inf. Model. 1996. V. 36, N 3. P. 420–428.

6. *Lukovits I., Nikolić S., Trinajstić N.* Resistance distance in regular graphs // Int. J. Quantum Chem. 1999. V. 71. P. 217–225.

7. *Palacios J. L.* Closed-form formulas for Kirchhoff index // Int. J. Quantum Chem. 2001. V. 81. P. 135–140.

8. *Xiao W., Gutman I.* Resistance distance and Laplacian spectrum // Theor. Chem. Acc. 2003. V. 110. P. 284–289.

9. *Zhang H., Yang Y.* Resistance distance and Kirchhoff index in circulant graphs // Int. J. Quantum Chem. 2007. V. 107, N 2. P. 330–339.

10. *Luzhen Y.* On the Kirchhoff index of some toroidal lattices // Linear and Multilinear Algebra. 2011. V. 59, N 6. P. 645–650.

11. *Cinkir Z.* Effective resistances and Kirchhoff index of ladder graphs // J. Math. Chem. 2016. V. 54, N 4. P. 955–966.

12. *Somodi M.* On the Ihara zeta function and resistance distance-based indices // Linear Algebra Appl. 2017. V. 513. P. 201–209.

13. *Mitsuhashi H., Morita H., Sato I.* The weighted Kirchhoff index of a graph // Linear Algebra Appl. 2018. V. 547. P. 1–18.

14. *Kagan M., Mata B.* A physics perspective on the resistance distance for graphs // Math. Comput. Sci. 2019. V. 13. P. 105–115.

15. *Baigonakova G. A., Mednykh A. D.* Elementary formulas for Kirchhoff index of Möbius ladder and prism graphs // Sib. Electron. Mat. Rep. 2019. V. 16. P. 1654–1661.
16. *Медных А. Д., Медных И. А.* Индекс Кирхгофа для циркулянтных графов и его асимптотика // Докл. АН. 2020. Т. 494, № 1. С. 43–47.
17. *Adám A.* Research problems 2–10 // J. Combin. Theory. 1967. V. 2. P. 393.
18. *Conder M., Grande R.* On embeddings of circulant graphs // Electron. J. Combinatorics. 2015. V. 22, N 2. #P2.28.
19. *Muzychuk M.* A solution of the isomorphism problem for circulant graphs // Proc. London Math. Soc. (3). 2004. V. 88. P. 1–41.
20. *Evdokimov S., Ponomarenko I.* Recognition and verification of an isomorphism of circulant graphs in polynomial time // St. Petersburg Math. J. 2004. V. 15. P. 813–835.
21. *Davis P. J.* Circulant matrices. Providence, RI: AMS Chelsea Publ., 1994. V. 338.
22. *Mednykh A. D., Mednykh I. A.* The number of spanning trees in circulant graphs, its arithmetic properties and asymptotic // Discrete Math. 2019. V. 342. P. 1772–1781.
23. *Cinkir Z.* Effective resistances and Kirchhoff index of prism graphs. 2017. 9 p. Cornell Univ. arXiv:1704.03429v1 [math.CO].

Поступила в редакцию 28 августа 2024 г.
После доработки 28 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Медных Александр Дмитриевич (ORCID 0000-0003-3084-1225),
Медных Илья Александрович (ORCID 0000-0001-7682-3917)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
smedn@mail.ru, ilyamednykh@mail.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 510.5

ТЬЮРИНГОВЫ СПЕКТРЫ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОРЯДКА

А. С. Морозов

Аннотация. Доказывается, что группа всех $\mathbf{d}$-вычислимых автоморфизмов порядка по типу рациональных чисел имеет тьюрингову степень $\mathbf{d}''$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.611

Ключевые слова: вычислимые автоморфизмы рационального порядка, тьюринговы степени структур, вычислимые автоморфизмы.

Изучается сложность представления некоторых групп автоморфизмов порядка по типу рациональных чисел.

Через $\mathbb{Q}$ будем обозначать упорядоченное множество рациональных чисел. Группа $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}$ всех автоморфизмов структуры $\mathbb{Q}$ к настоящему времени хорошо изучена. В частности, имеются описания ее нормальных подгрупп, отношения сопряженности, получена характеризация элементарно определимых подмножеств в некоторых ее подгруппах, а также установлены и другие свойства (см. [1–3]).

Под *тьюринговым идеалом* понимается любое непустое множество $\mathbf{I}$ тьюринговых степеней, замкнутое вниз (т. е. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \in \mathbf{I} \to \mathbf{x} \in \mathbf{I}$) и замкнутое относительно точных верхних граней (т. е. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{I} \to \sup\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in \mathbf{I}$).

Для произвольной вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ и произвольного тьюрингова идеала $\mathbf{I}$ полагаем

$$\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathfrak{M} = \{\varphi \in \operatorname{Aut}\mathfrak{M} \mid \varphi \text{ вычислим относительно некоторого } \mathbf{d} \in \mathbf{I}\}.$$

Множество $\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathfrak{M}$ образует группу, при этом группа $\operatorname{Aut}\mathfrak{M}$ всех автоморфизмов $\mathfrak{M}$ является частным случаем таких групп. В случае, когда для некоторой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ выполняется равенство $\mathbf{I} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \leq \mathbf{d}\}$, будем обозначать группу $\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathfrak{M}$ также через $\operatorname{Aut}_{\mathbf{d}}\mathfrak{M}$.

В работе [4] изучались общие свойства и различия между группами $\operatorname{Aut}\mathbb{Q}$ и группой $\operatorname{Aut}_{\mathbf{0}}\mathbb{Q}$ всех вычислимых автоморфизмов порядка $\mathbb{Q}$. В этой же работе показано, что тьюрингов идеал $\mathbf{I}$ полностью определяется типом изоморфизма группы $\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathbb{Q}$ и, более того, включение $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{J}$ эквивалентно изоморфной вложимости $\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathbb{Q}$ в $\operatorname{Aut}_{\mathbf{J}}\mathbb{Q}$. В частности, вложимость $\operatorname{Aut}_{\mathbf{s}}\mathbb{Q}$ в $\operatorname{Aut}_{\mathbf{d}}\mathbb{Q}$ эквивалентна $\mathbf{s} \leq \mathbf{d}$. В [5] доказано существование предложения первого порядка, выделяющего с точностью до изоморфизма группу $\operatorname{Aut}_{\mathbf{0}}\mathbb{Q}$ среди всех групп, образованных вычислимыми перестановками на натуральных числах. В работе [3] дана характеризация определимых подмножеств в группах вида $\operatorname{Aut}_{\mathbf{I}}\mathbb{Q}$.

Работа поддержана базовым проектом Минобрнауки РФ No. FWNF 2022–0012.

Для произвольной счетной структуры $\mathfrak{M}$ ее *тьюрингов спектр* определяется как множество всех таких тьюринговых степеней $\mathbf{d}$, что $\mathfrak{M}$ обладает $\mathbf{d}$-вычислимой изоморфной копией. Если среди таких степеней имеется наименьшая степень, то эту степень также называют *тьюринговой степенью* (или просто *степенью*) этой структуры. Вычисление спектров различных структур и изучение их общих свойств является актуальным направлением в теории вычислимых структур; этой проблематике посвящено большое количество работ (см. обзор [6]).

Целью настоящей работы является доказательство того, что группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$ имеет степень $\mathbf{d}''$.

Стоит особо выделить два свойства, которыми обладает семейство групп $G_{\mathbf{d}} = \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$, параметризованное тьюринговыми степенями:

— тьюрингова степень $G_{\mathbf{d}}$ равна $\mathbf{d}''$,

— изоморфная вложимость $G_{\mathbf{s}}$ в $G_{\mathbf{d}}$ эквивалентна $\mathbf{s} \leq \mathbf{d}$.

Эти свойства интересны тем, что ими обладают также и следующие семейства групп вида $G_{\mathbf{d}}$:

- $G_{\mathbf{d}} = \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\omega$ — группа всех $\mathbf{d}$-вычислимых перестановок на множестве всех натуральных чисел ω [7];
- $G_{\mathbf{d}}$ — группа $\mathbf{d}$-вычислимых автоморфизмов решетки $\mathbf{d}$-перечислимых векторных пространств [8];
- $G_{\mathbf{d}}$ — группа $GSL_{\mathbf{d}}$ всех $\mathbf{d}$-вычислимых полулинейных преобразований $\mathbf{d}$-вычислимого векторного пространства [8];
- $G_{\mathbf{d}}$ — группа всех $\mathbf{d}$-вычислимых автоморфизмов счетной безатомной булевой алгебры [8];
- $G_{\mathbf{d}}$ — группа всех автоморфизмов решетки $\mathbf{d}$-вычислимо перечислимых подалгебр счетной безатомной булевой алгебры [8].

Доказательство будет основано на идеях из работы [7], в которой вычисляются тьюринговы степени групп всех $\mathbf{d}$-вычислимых перестановок на ω, а также методах работы с $\mathbf{d}$-вычислимыми автоморфизмами из [4, 5].

Напомним некоторые определения. Пусть $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$. Множество $A \subseteq \mathbb{Q}$ называется *орбиталью* f (см. [1]), если существует $a \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$A = \{y \in \mathbb{Q} \mid \exists m, n \in \mathbb{Z}(f^m(a) \leq y \leq f^n(a))\}.$$

Для произвольной орбитали X выполнено одно и только одно из трех условий: $\forall x \in X(f(x) > x)$, $\forall x \in X(f(x) < x)$, $\forall x \in X(f(x) = x)$. В первом случае говорят, что орбиталь имеет четность $+1$, во втором — четность -1, в третьем — четность 0. Известно также, что любые две орбитали либо не пересекаются, либо совпадают. Поскольку все они выпуклы, множество всех орбиталей линейно упорядочено естественным образом: $X_0 < X_1$, если для всех $x_0 \in X_0$ и $x_1 \in X_1$ справедливо $x_0 < x_1$.

Автоморфизм $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$ называется *бампом,* если он имеет ровно одну орбиталь ненулевой четности. Здесь будем иметь дело только с бампами четности $+1$. Известен критерий сопряженности для $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ (критерий Холланда): произвольные $f_0, f_1 \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ сопряжены в $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ тогда и только тогда, когда существует порядковый изоморфизм из множества орбиталей для f_0 на множество орбиталей для f_1, сохраняющий четность (несколько более общую формулировку можно найти в [1, теорема 2.2.5]). Для групп вида $\mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$ критерий Холланда работает не всегда (см. [4, предложение 2.11]), тем не менее для таких групп справедливы следующие достаточные условия сопряженности.

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbb{Q}$, $f_0, f_1 \in \operatorname{Aut}_{\mathbf{d}} \mathbb{Q}$ *— бампы четности +1 с нетривиальными орбиталями* (a_0, b_0) *и* (a_1, b_1) *соответственно. Тогда* f_0 *и* f_1 *сопряжены в* $\operatorname{Aut}_{\mathbf{d}} \mathbb{Q}$. *При этом сопрягающий автоморфизм можно строить равномерно относительно* $\mathbf{d}$ *по* a_0, a_1, b_0, b_1 *и индексам для вычисления* f_0 *и* f_1 *относительно* $\mathbf{d}$.

Пусть $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень, а также пусть*

- *последовательности рациональных чисел*
$$a_0^{(0)} < b_0^{(0)} < a_0^{(1)} < b_0^{(1)} < a_0^{(2)} < b_0^{(2)} \dots,$$
$$a_1^{(0)} < b_1^{(0)} < a_1^{(1)} < b_1^{(1)} < a_1^{(2)} < b_1^{(2)} \dots$$
вычислимы в $\mathbf{d}$, *причем* $\lim\limits_{n\to\infty} a_0^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} a_1^{(n)} = \infty$;
- $\{h_0^{(i)}\}_{i<\omega}$, $\{h_1^{(i)}\}_{i<\omega}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимые последовательности бампов четности +1, причем для всех* $i < \omega$ *и* $k = 0, 1$ *промежуток* $\left(a_k^{(i)}, b_k^{(i)}\right)$ *является единственной нетривиальной орбиталью бампа* $h_k^{(i)}$;
- $f_0, f_1 \in \operatorname{Aut}_{\mathbf{d}} \mathbb{Q}$ *— бесконечные произведения:*
$$f_0 = \prod_{i<\infty} h_0^{(i)}, \quad f_1 = \prod_{i<\infty} h_1^{(i)}.$$

Тогда f_0 *и* f_1 *сопряжены в* $\operatorname{Aut}_{\mathbf{d}} \mathbb{Q}$. *При этом сопрягающий автоморфизм можно строить равномерно относительно* $\mathbf{d}$ *по индексам для вычисления относительно* $\mathbf{d}$ *для* f_0 *и* f_1, *а также последовательностей* $h_k^{(i)}$, $a_k^{(i)}$, $b_k^{(i)}$, $k = 0, 1$, $i < \omega$.

Доказательство. Сначала кратко напомним доказательство для классического случая, без учета вычислимости. В силу своей алгоритмичности оно даст и $\mathbf{d}$-вычислимый сопрягающий автоморфизм.

Сначала зафиксируем некоторый вычислимый изоморфизм g' из упорядоченного множества $\mathbb{Q} \setminus (a_0, b_0)$ на $\mathbb{Q} \setminus (a_1, b_1)$. Из условий следует, что $g'(a_0) = a_1$ и $g'(b_0) = b_1$.

Продолжим построение сопрягающего автоморфизма g по шагам. Результатом выполнения каждого шага t будут конечное множество $A_t \subseteq \mathbb{Q}$ и конечное отображение $g_t : A \to \mathbb{Q}$ такие, что отображение
$$\widehat{g_t} : f_0^m(x) \mapsto f_1^m(g_t(x)), \quad x \in A_t, \ m \in \mathbb{Z},$$
является изоморфизмом упорядоченных множеств $\{f_0^m(x) \mid x \in A_t, \, m \in \mathbb{Z}\}$ и $\{f_1^m(g_t(x)) \mid x \in A_t, \, m \in \mathbb{Z}\}$. Множества A_t и отображения g_t будут образовывать возрастающие цепочки.

Перейдем к описанию построения.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \varnothing$, $g_0 = \varnothing$.

Шаг $t+1$. Пусть t четно. Выберем $q \in (a_0, b_0)$ с наименьшим номером, не содержащееся в $\operatorname{dom} \widehat{g_t}$. Это можно сделать эффективно относительно $\mathbf{d}$ благодаря тому, что для любого $x \in A_t$ и любого $m \in \mathbb{Z}$ справедливо $f_0^m(x) < f_0^{m+1}(x)$ и $\lim\limits_{m\to\infty} f_0^m(x) = b_0$, а также $\lim\limits_{m\to-\infty} f_0^m(x) = a_0$. Выберем $r \in (a_1, b_1) \setminus \operatorname{range} g_t$ с наименьшим номером так, чтобы для всех $x \in \operatorname{dom} \widehat{g_t}$ выполнялось условие $q < x \leftrightarrow r < g_t(x)$. Расширим g_t до g_{t+1}, положив $g_{t+1}(q) = r$.

При нечетном t осуществляем симметричную процедуру с заменой $\widehat{g_t}$ на $\widehat{g_t}^{-1}$: выбираем $r \in (a_1, b_1) \setminus \operatorname{dom} \widehat{g_t}^{-1}$ с наименьшим номером, для него находим соответствующее q и полагаем $g_{t+1}(q) = r$.

Описание шага $t+1$ закончено.

Положим $g = g' \cup \bigcup_{t<\omega} \widehat{g}_t$.

Из построения видно, что g вычислимо относительно $\mathbf{d}$. Проверку условий $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$ и $gf_0g^{-1} = f_1$ оставляем читателю.

Доказательство второго утверждения проводится с использованием аналогичных идей, и его также оставляем читателю.

Предложение доказано.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{I}$ — *тьюрингов идеал,* $\mathbf{d} \in \mathbf{I}$ *и группа* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$ *имеет* $\mathbf{s}$-*вычислимое представление. Тогда* $\mathbf{d}'' \le \mathbf{s}$.

Доказательство. Зафиксируем некоторое $\mathbf{s}$-вычислимое представление для $\mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$.

Следующая лемма является обобщением леммы из [9].

Лемма 1.1. *Пусть* $a, b \in \mathbb{Q} \cup \{-\infty, \infty\}$ *и* $a < b$. *Тогда существуют* $t_0, t_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$, *тождественные вне* (a, b), *такие, что для любого* $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ *следующие условия эквивалентны:*

(a) f *действует тождественно на интервале* (a, b)*;*

(b) $[f, t_0] = [f, t_1] = 1$.

Доказательство. Определим $u_0, u_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$, полагая $u_0(x) = 2x$, $u_1(x) = x + 1$. Покажем, что для любого $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ справедлива эквивалентность

$$f = 1 \Leftrightarrow [f, u_0] = [f, u_1] = 1.$$

Действительно, из $[f, u_0] = 1$ следует тождество

$$f(2x) = 2f(x). \tag{1}$$

При $x = 0$ отсюда $f(0) = 0$. Из $[f, u_1] = 1$ вытекает тождество $f(x+1) = f(x)+1$. С учетом этого получаем, что для всех $m \in \mathbb{Z}$ справедливо $f(m) = m$. Применяя (1), находим, что для любых $m \in \mathbb{Z}$ и $n \in \omega$ выполняется $f(m/2^n) = m/2^n$. Учитывая, что f — автоморфизм упорядоченного множества $\mathbb{Q}$, для всех $x \in \mathbb{Q}$ имеем $f(x) = x$.

Зафиксируем какое-либо взаимно однозначное вычислимое монотонно возрастающее отображение p из интервала $(a, b) \subseteq \mathbb{Q}$ на $\mathbb{Q}$.

Для $i = 0, 1$ определим

$$t_i(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin (a, b), \\ p^{-1}u_i p(x), & \text{если } x \in (a, b). \end{cases}$$

Очевидно, что $t_0, t_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$. Покажем, что эти отображения обладают требуемыми свойствами.

Пусть $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$ действует тождественно на (a, b). Возьмем произвольное $x \in \mathbb{Q}$. Если $x \notin (a, b)$, то $t_i(x) = x$, для $i = 0, 1$, а также $f(x) \notin (a, b)$, откуда получаем $ft_i(x) = f(x) = t_i f(x)$. Если $x \in (a, b)$, то с учетом того, что $t_i(x) = p^{-1}u_i p(x) \in (a, b)$, имеем

$$ft_i(x) = fp^{-1}u_i p(x) = p^{-1}u_i p(x) = p^{-1}u_i p f(x) = t_i f(x).$$

Тем самым $[f, t_0] = [f, t_1] = 1$.

Предположим теперь, что f коммутирует с t_0 и t_1. Сначала убедимся, что $f((a, b)) \subseteq (a, b)$. Допустим, что найдется $x_0 \in (a, b)$, для которого имеет место

$f(x_0) \notin (a,b)$. В этом случае $ft_1(x_0) = t_1f(x_0) = f(x_0)$, откуда $t_1(x_0) = x_0$, т. е. $p^{-1}u_1p(x_0) = x_0$. Отсюда получим противоречие: $p(x_0)+1 = u_1p(x_0) = p(x_0)$.

Возьмем произвольное $y \in \mathbb{Q}$. В силу только что доказанного имеем $fp^{-1}(y) \in (a,b)$. Далее, для $i = 0,1$

$$fp^{-1}u_i(y) = fp^{-1}u_ipp^{-1}(y) = ft_ip^{-1}(y) = t_ifp^{-1}(y) = p^{-1}u_ipfp^{-1}(y),$$

т. е. $fp^{-1}u_i = p^{-1}u_ipfp^{-1}$. Отсюда, в свою очередь, получаем $pfp^{-1}u_i = u_ipfp^{-1}$, для $i = 0,1$. По ранее доказанному $pfp^{-1} = \mathrm{id}$, откуда следует, что f действует тождественно на (a,b).

Лемма доказана.

Зафиксируем вычислимую биекцию $c : (0,1) \subseteq \mathbb{Q} \overset{\text{на}}{\to} \mathbb{Q}$, сохраняющую естественный порядок. Определим некоторые вспомогательные элементы из $\mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$.

- $\mathbf{z}$: Определяется равенством $z(x) = x+1$. (Заметим, что $z \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$, и сопряжение произвольного $f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$ с помощью этого элемента сохраняет его тьюрингову степень и сдвигает его график на 1).
- $\mathbf{s}_1$: Зафиксируем в качестве s_1 произвольный вычислимый бамп четности $+1$ с носителем $\big(c^{-1}(1/4), c^{-1}(1/2)\big)$.
- $\mathbf{z}_1$: Неформально z_1 получается переносом отображения z на интервал $(0,1)$ путем сопряжения с помощью c с последующим тождественным доопределением его на остальных элементах из $\mathbb{Q}$. Более точно:

$$z_1(x) = \begin{cases} c^{-1}zc(x), & \text{если } x \in (0,1), \\ x & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

- $\mathbf{w}_\omega$: Неформально w_ω является произведением бесконечной последовательности бампов вида $z_1^nw_1z_1^{-n}$. Более точно:

$$w_\omega = \prod_{n\in\omega} z_1^nw_1z_1^{-n}.$$

  Иначе говоря, для любого x полагаем

$$w_\omega(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{i<n} z_1^iw_1z_1^{-i}(x).$$

  Носители этих бампов вида $z_1^nw_1z_1^{-n}$ не соприкасаются друг с другом и расположены последовательно один за другим внутри интервала $(0,1)$. При этом предел правых концов бампов равен 1. Эскиз графика автоморфизма w_ω изображен на рис. 1. Очевидно, что $w_\omega \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$.

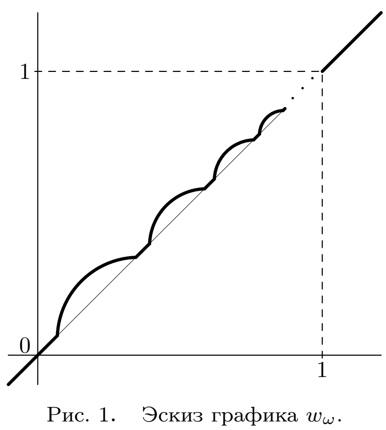

Рис. 1. Эскиз графика w_ω.

Определим еще один автоморфизм $b \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$. Зафиксируем произвольное множество $A \in \mathbf{d}''$, имеющее представление в виде

$$n \in A \Leftrightarrow \exists^{\omega} t R(t,n),$$

где $R(t,n)$ — некоторое отношение, вычислимое в $\mathbf{d}$. Определим

$$b_n = \prod_{t<\omega \wedge R(t,n)} z_1 w_1 z_1^{-t}, \quad b = \prod_{n<\omega} z^n b_n z^{-n}.$$

Нетрудно убедиться, что $b \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q} \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}$.

Определим

$$H = \Big\{ \prod_{m\in D} z^m w_1 z^{-m} \mid D \subseteq \omega \wedge |D| < \omega \Big\},$$

$$B = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q} \mid f \text{ тождественна вне интервала } (0,1)\}$$

Эскизы элементов из H получаются из эскиза для w_ω опусканием всех бампов из w_ω кроме их конечного числа.

Лемма 1.2. *Относительно зафиксированного* **s***-вычислимого представления множество H перечислимо, а множество B вычислимо.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, второе следует из леммы 1.1 и равенства

$$B = \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}(f \restriction (-\infty,0) = \mathrm{id})\} \cap \{f \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{I}}\,\mathbb{Q}(f \restriction (1,\infty) = \mathrm{id})\}.$$

Лемма доказана.

Зафиксируем $t_0, t_1 \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{0}}\,\mathbb{Q}$ такие, что для всех $f \in \mathrm{Aut}\,\mathbb{Q}$ условие $f \restriction (0,1) = \mathrm{id}$ эквивалентно $[f,t_0] = [f,t_1] = 1$, существующие по лемме 1.1.

Заметим, что $n \in A$ эквивалентно тому, что автоморфизм b имеет на интервале $(n, n+1)$ бесконечно много нетривиальных орбиталей, причем они упорядочены относительно друг друга по типу ω, имеют четность $+1$ и не соприкасаются друг с другом. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что автоморфизм $z^{-n} b z^n$ содержит на интервале $(0,1)$ бесконечно много не соприкасающихся друг с другом орбиталей, упорядоченных по типу ω. Заметим также, что концы этих орбиталей можно перечислить относительно $\mathbf{d}$ в порядке возрастания. Это эквивалентно тому, что некоторый автоморфизм, сопряженный с $z^{-n} b z^n$ с помощью автоморфизма из B, на интервале $(0,1)$ совпадает с w_ω. Поэтому имеет место эквивалентность

$$n \in A \Leftrightarrow \exists g \in B\big([z^n b z^{-1} g w_\omega^{-1} g^{-1}, t_0] = [z^n b z^{-1} g w_\omega^{-1} g^{-1}, t_1] = 1\big). \qquad (2)$$

Далее, условие $n \notin A$ эквивалентно тому, что автоморфизм b содержит на интервале $(n, n+1)$ лишь конечное число взаимно несоприкасающихся орбиталей, причем все они имеют четность $+1$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что автоморфизм $z^{-n} b z^n$ содержит на интервале $(0,1)$ также лишь конечное число взаимно несоприкасающихся орбиталей, причем все они имеют четность $+1$. И наконец, это эквивалентно тому, что некоторый автоморфизм, сопряженный с $z^{-n} b z^n$ с помощью автоморфизма из B, на интервале $(0,1)$ совпадает с некоторым элементом из H. Поэтому имеет место эквивалентность

$$n \notin A \Leftrightarrow \exists g \in B \exists h \in H([z^n b z^{-1} g h^{-1} g^{-1}, t_0] = [z^n b z^{-1} g h^{-1} g^{-1}, t_1] = 1). \qquad (3)$$

Учитывая, что множества H и B перечислимы, из (2) и (3) получаем, что A и $\overline{A}$ перечислимы в $\mathbf{s}$, откуда $A \leq_T \mathbf{s}$, т. е. $\mathbf{d}'' \leq \mathbf{s}$. Теорема доказана.

Поскольку элементы группы $\mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$ можно закодировать при помощи их индексов относительно $\mathbf{d}$, образующих $\mathbf{d}''$-вычислимое множество, а проверка равенства элементов, вычисление индексов произведений и индексов обратных элементов по индексам самих элементов также задаются $\mathbf{d}''$-вычислимыми процедурами, группа $\mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$ допускает $\mathbf{d}''$-вычислимое представление. Отсюда получаем

Следствие 1. *Для любой тьюринговой степени* $\mathbf{d}$ *группа* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{d}}\,\mathbb{Q}$ *имеет степень* $\mathbf{d}''$. *Иначе говоря, спектр такой группы равен* $\{\mathbf{e} \mid \mathbf{e} \geq \mathbf{d}''\}$.

Благодарность. Автор благодарит анонимного рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Glass A. M. W.* Ordered permutation groups. Cambridge; London; New York; New Rochelle; Melbourne; Sydney: Camb. Univ. Press, 1981.
2. *Копытов В. М.* Решеточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
3. *Морозов А. С.* Определимые множества в группах автоморфизмов рационального порядка // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 215–239.
4. *Morozov A. S, Truss J. K.* On computable automorphisms of the rational numbers // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66, N 3. P. 1458–1470.
5. *Морозов А. С., Трасс Дж.* О категоричности группы всех вычислимых автоморфизмов рациональных чисел // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 649–662.
6. *Selivanov V. L., Frolov A. N., Kalimullin I. S.* Degree spectra of structures // J. Math. Sci. 2021. V. 256. P. 143–159.
7. *Морозов А. С.* Перестановки и неявная определимость // Алгебра и логика. 1988. Т. 27, № 1. С. 19–36.
8. *Димитров Р. Д., Харизанова В. С., Морозов А. С.* Тьюринговы степени и группы автоморфизмов решеток подструктур // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 1. С. 27–47.
9. *Морозов А. С.* Группа $\mathrm{Aut}_r(\mathbb{Q}, \leq)$ не конструктивизируема // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 4. С. 473–478.

Поступила в редакцию 22 марта 2024 г.
После доработки 29 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Морозов Андрей Сергеевич (ORCID 0000-0001-8647-5629)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 512.57

ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ПРЕЛИЕВЫХ ДУБЛЕЙ ВИТТА

А. П. Пожидаев

Аннотация. Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная алгебра с ненулевым дифференцированием d над алгебраически замкнутым полем F, которая d-проста и сама не является полем. По модулю автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$, которые почти перестановочны с d, описаны автоморфизмы левосимметрических дублей Витта $\mathscr{A}_d$ и $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ над полем F.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.612

Ключевые слова: левосимметрическая алгебра, правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, дубль Витта, автоморфизм.

1. Введение

Алгебра $\mathscr{A}$ называется *левосимметрической* (*прелиевой*), если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathscr{A}$ является левосимметричным, т. е. он симметричен относительно двух первых элементов: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathscr{A}$ (далее символ := означает равенство по определению). Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр, эти алгебры Ли-допустимы, и еще одним из наиболее известных частных случаев этих алгебр являются алгебры Новикова. Антиизоморфный аналог левосимметрических алгебр — это *правосимметрические* алгебры. Лево(право)симметрические алгебры естественно возникают и используются в различных областях математики (см. предыдущие работы автора по данной тематике, например, [1]; отметим ранее не упоминавшееся использование правосимметрических алгебр — в статье [2] И. Л. Кантор использует их под названием «правомодулярные» при изучении универсальных градуированных супералгебр Ли).

В работе [1] были даны различные обобщения конструкции Мицухары и приведены примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данных конструкций, в частности, построены простые дубли Витта $\mathscr{A}_d$ и $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ ассоциативной коммутативной d-простой алгебры $\mathscr{A}$ с ненулевым дифференцированием d. В настоящей работе описаны автоморфизмы данных дублей Витта над произвольным полем F путем сведения их к автоморфизмам исходной алгебры $\mathscr{A}$, которые (почти)перестановочны (с точностью до некоторого обратимого элемента) с дифференцированием d, если характеристика F не равна 2; в случае поля характеристики 2 появляются дополнительные автоморфизмы (везде предполагается, что $\mathscr{A}$ не является полем).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

Пусть d — ненулевое дифференцирование алгебры $\mathscr{A}$. Если I является d-инвариантным идеалом в $\mathscr{A}$, то это обозначается следующим образом: $I \trianglelefteq_d \mathscr{A}$. Напомним, что $\mathscr{A}$ называется *d-простой*, если умножение в $\mathscr{A}$ нетривиально и в $\mathscr{A}$ нет собственных d-инвариантных идеалов; при этом дифференцирование d называется *простым*.

Отметим множество работ, посвященных изучению групп автоморфизмов, перестановочных с простым дифференцированием алгебры $K[x_1, \dots, x_n]$, где K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. В частности, особо исследуется случай дифференцирований Шамсуддина, т. е. дифференцирований вида

$$d = \partial_1 + \sum_{i=2}^{n} (a_i x_i + b_i)\partial_i,$$

где $a_i, b_i \in K[x_1]$ для всех $2 \leq i \leq n$. В [3] доказано, что группа $\mathrm{Aut}_d(K[x_1, \dots, x_n])$ тривиальна, если d — простое дифференцирование Шамсуддина. В работе [4] доказано, что если d — простое дифференцирование $K[x_1, x_2]$, то группа $\mathrm{Aut}_d K[x_1, x_2]$ конечна. В [5] замечено, что если $D = \partial_x + (ay + b)\partial_y$ — дифференцирование Шамсуддина с $a \neq 0$, то $\mathrm{Aut}_d K[x, y]$ изоморфна либо тривиальной группе, либо K^*, либо $K \times K^*$ в зависимости от a. Заметим, что вопросы описания простых дифференцирований и (почти)перестановочных с ними автоморфизмов алгебры многочленов от $n \geq 2$ переменных остаются открытыми как над полями характеристики 0, так и над полями характеристики $p > 0$. Некоторые дальнейшие ссылки по данной тематике могут быть найдены, например, в [3].

Зафиксируем произвольное основное поле F, характеристику поля F будем обозначать символом $\chi(F)$, а мультипликативную группу поля — через F^*. В дальнейшем $\langle \Upsilon \rangle := \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F, где символ F опускаем, если поле ясно из контекста. Если $\mathscr{A}$ — некоторая алгебра (векторное пространство) над F, то через $\mathrm{End}\,\mathscr{A}$ будем обозначать алгебру всех F-линейных операторов на $\mathscr{A}$, через $\mathrm{Der}\,\mathscr{A}$ — алгебру Ли над F дифференцирований алгебры $\mathscr{A}$, а через $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ — группу автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$. Символом $F_p[x_1, \dots, x_n]$ для некоторых $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$ — простое число, обозначаем алгебру усеченных многочленов ($x_i^p = 0$ для любого $i = 1, \dots, n$) над полем F характеристики p с единицей 1, отождествляемой с единицей поля.

2. Автоморфизмы дубля Витта $\mathscr{A}_d$

Прежде всего напомним самый известный пример левосимметрической алгебры, на котором основаны дубли Витта. Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d (линейным над F). Определим на $\mathscr{A}$ новое умножение правилом $x \circ y = xd(y)$. Обозначим полученную алгебру через $\mathscr{A}(d)$. Хорошо известно, что $\mathscr{A}(d)$ является алгеброй Новикова, т. е., в частности, левосимметрической алгеброй. В случае $\chi(F) \neq 2$ хорошо известно, что $\mathscr{A}(d)$ проста тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ является d-простой (см., например, [6]).

Всюду далее мы работаем с конечномерными алгебрами над алгебраически замкнутым полем, поэтому полезно привести следующий хорошо известный результат о структуре вышеупомянутой алгебры $\mathscr{A}$, и для полноты изложения приведем его доказательство. Далее через $\mathscr{N}$ будем обозначать радикал алгебры $\mathscr{A}$ и предполагать, что $\mathscr{A}$ не является полем.

Лемма 2.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F, которая сама не является полем. Тогда $\mathscr{A}$ содержит единицу $1 \in \mathscr{A}$, $\chi(F) = p \neq 0$, $\mathscr{A} \cong F_p[x_1, \dots, x_n]$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{A} \cdot d(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, и $\operatorname{Ker} d = F = \langle 1 \rangle$. В частности, $d(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы.*

Доказательство. Наличие единицы следует из [7]. Очевидно, что $\mathscr{A} \cdot d(\mathscr{A}) \trianglelefteq_d \mathscr{A}$, откуда $\mathscr{A} \cdot d(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$. Если $x \in \operatorname{Ker} d$ и $x \neq 0$, то $\mathscr{A} \cdot x \trianglelefteq_d \mathscr{A}$ и $\mathscr{A} \cdot x = \mathscr{A}$, т. е. x обратим. Из условий на $\mathscr{A}$ и [8] следует, что $\mathscr{A} \cong F_p[x_1, \dots, x_n]$. Если $x = \alpha 1 + a$ и $d(x) = 0$, где $a \in \mathscr{N}$, то $x - \alpha 1 = a \in \operatorname{Ker} d$, так как $1 \in \operatorname{Ker} d$. Значит, $a = 0$. $\square$

Автоморфизм ψ алгебры $\mathscr{A}$ такой, что $\psi d = d\psi$, будем называть *перестановочным* с дифференцированием d. Обозначим через $\operatorname{Aut}_d \mathscr{A}$ подмножество в $\operatorname{Aut} \mathscr{A}$, состоящее из автоморфизмов, перестановочных с d:

$$\operatorname{Aut}_d \mathscr{A} := \{\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A} : \phi d = d\phi\}.$$

Следующая лемма очевидна (или получается из доказательства предложения 3.1).

Лемма 2.2. $\operatorname{Aut}_d \mathscr{A}$ *является подгруппой в* $\operatorname{Aut} \mathscr{A}$.

Пусть $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d и $\overline{\mathscr{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathscr{A}$ (как векторного пространства).

Дубль Витта $\mathscr{A}_d$. Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$, где произведение определено правилами

$$\overline{x} \cdot y = xd(y), \quad x \cdot \overline{y} = 0, \quad x \cdot y = xy + \overline{xy}, \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xd(y)}$$

для всех $x, y \in \mathscr{A}$. Полученная алгебра обозначается через $\mathscr{A}_d$ и называется *дублем Витта* алгебры $\mathscr{A}$. В [1] доказано, что $\mathscr{A}_d$ является левосимметрической алгеброй, которая проста тогда и только тогда, когда d-проста алгебра $\mathscr{A}$.

Легко видеть, что любой автоморфизм $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A}_d$ однозначно определяется четверкой линейных отображений ψ, η, θ, π алгебры $\mathscr{A}$, а именно

$$\phi(a) = \psi(a) + \overline{\eta(a)}, \quad \phi(\overline{a}) = \theta(a) + \overline{\pi(a)}.$$

Обозначим $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$.

Лемма 2.3. *Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) \in \operatorname{End} \mathscr{A}_d$. Тогда $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{A}_d$ в том и только в том случае, если*

$$\psi(ab) + \theta(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\psi(b), \quad \eta(ab) + \pi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\eta(b), \tag{1}$$

$$\psi(a)\theta(b) + \eta(a)d\theta(b) = 0, \quad \psi(a)\theta(b) + \eta(a)d\pi(b) = 0, \tag{2}$$

$$\psi(ad(b)) = \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d\psi(b), \quad \eta(ad(b)) = \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d\eta(b), \tag{3}$$

$$\theta(ad(b)) = \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d\theta(b), \quad \pi(ad(b)) = \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d\pi(b) \tag{4}$$

для всех $a, b \in \mathscr{A}$. Отображение ϕ биективно тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in \mathscr{A}$ существуют единственные $a, b \in \mathscr{A}$ такие, что

$$\psi(a) + \theta(b) = x, \quad \eta(a) + \pi(b) = y.$$

Доказательство. Равенство $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{A}_d$ эквивалентно четырем аналогичным равенствам при $x \in \{a, \overline{a}\}$, $y \in \{b, \overline{b}\}$, $a, b \in \mathscr{A}$. К примеру, при $x = a, y = b$ получаем

$$\begin{aligned}\phi(a \cdot b) = \phi(ab + \overline{ab}) = \psi(ab) + \overline{\eta(ab)} + \theta(ab) + \overline{\pi(ab)} \\ = \phi(a) \cdot \phi(b) = (\psi(a) + \overline{\eta(a)}) \cdot (\psi(b) + \overline{\eta(b)}) \\ = \psi(a)\psi(b) + \overline{\psi(a)\psi(b)} + \eta(a)d\psi(b) + \overline{\eta(a)d\eta(b)}.\end{aligned}$$

Приравнивая между собой элементы из $\mathscr{A}$, а потом из $\overline{\mathscr{A}}$, получаем

$$\psi(ab) + \theta(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\psi(b); \quad \eta(ab) + \pi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\eta(b),$$

т. е. пришли к соотношениям (1). Соотношения (2) получаются при $x = a$, $y = \overline{b}$; (3) — при $x = \overline{a}$, $y = b$; (4) — при $x = \overline{a}$, $y = \overline{b}$.

Сюръективность ϕ эквивалентна тому, что для любых $x, y \in \mathscr{A}$ существуют $a, b \in \mathscr{A}$ такие, что $\phi(a + \overline{b}) = x + \overline{y}$. Последнее эквивалентно $\psi(a) + \theta(b) = x$, $\eta(a) + \pi(b) = y$. Единственность таких $a, b \in \mathscr{A}$ обеспечивает инъективность ϕ. $\square$

Обозначим отображение $\phi = (\psi, 0, 0, \psi)$ через $\psi + \overline{\psi}$.

Теорема 2.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра, которая не является полем, $0 \neq d \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$. Тогда $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A}_d$ в том и только в том случае, если $\phi = \psi + \overline{\psi}$, где $\psi \in \operatorname{Aut}_d \mathscr{A}$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\eta \neq 0$. Обозначим $I := \operatorname{Ker} \eta$ и предположим, что $d(I) \neq 0$. Из (2) следует, что $\psi(I)\theta(\mathscr{A}) = 0$. Тогда из (3) получаем $\eta(\mathscr{A}d(I)) = 0$, т. е. $\mathscr{A}d(I) \subseteq I$ и, в частности, $d(I) \subseteq I$. Последнее означает, что $\mathscr{A}I \trianglelefteq_d \mathscr{A}$, т. е. $\mathscr{A}I$ является ненулевым d-идеалом в $\mathscr{A}$, а потому $\mathscr{A}I = \mathscr{A}$. Так как $\mathscr{A}d(I) \trianglelefteq_d \mathscr{A}$, то $\mathscr{A}d(I) = \mathscr{A}$, но $\mathscr{A}d(I) \subseteq I$, откуда $I = \mathscr{A}$, т. е. $\eta = 0$; противоречие.

Таким образом, если $\eta \neq 0$ и $I = \operatorname{Ker} \eta \neq 0$, то $d(I) = 0$. В данном случае, как и ранее, имеем $\mathscr{A}I = \mathscr{A}$. Из (1) получаем $(\psi - \eta + \theta - \pi)(I\mathscr{A}) = 0$, откуда $\psi - \eta = \pi - \theta$. По лемме 2.3 для любых $x, y \in \mathscr{A}$ существуют $a, b \in \mathscr{A}$ такие, что $(\psi - \eta)(a) + (\theta - \pi)(b) = x - y$, т. е. $(\psi - \eta)(a - b) = x - y$, откуда следует биективность отображения $\psi - \eta$. Из (1) получаем $\eta(\mathscr{A})d(\psi - \eta)(\mathscr{A}) = 0$, и из невырожденности $\psi - \eta$ следует $\eta(\mathscr{A})d(\mathscr{A}) = 0$. Так как $\mathscr{A} \cdot d(\mathscr{A}) \trianglelefteq_d \mathscr{A}$, то $d(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы, значит, $\eta(\mathscr{A}) = 0$; противоречие.

Рассмотрим случай невырожденного преобразования η. В этом случае из (2) следует равенство $d(\theta - \pi) = 0$, и теперь из (4) получаем $\theta = \pi$. Из (1) выводим

$$(\psi - \eta)(ab) = \eta(a)d(\psi - \eta)(b)$$

для любых $a, b \in \mathscr{A}$. Из леммы 2.3 получаем невырожденность $\psi - \eta$, откуда следует существование ненулевого $b \in \mathscr{A}$ такого, что $(\psi - \eta)(b) = 1$. Подставляя данный b в равенство выше, получаем $(\psi - \eta)(\mathscr{A}b) = 0$, откуда $\mathscr{A}b = 0$ и $b = 0$; противоречие.

В итоге пришли к случаю $\eta = 0$. Из (2) следует $\psi(\mathscr{A})\theta(\mathscr{A}) = 0$. Как и ранее, отсюда получаем либо $\psi = 0$, либо $\theta = 0$. Случай $\psi = 0$ противоречив, значит, $\theta = 0$. Равенства (1) и невырожденность ϕ влекут $\psi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A}$, $\pi = \psi$. Из (3) получаем $\psi(ad(b)) = \psi(a)d\psi(b)$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$, откуда $\psi \in \operatorname{Aut}_d \mathscr{A}$ и $\phi = \psi + \overline{\psi}$.

Обратно, если $\phi = \psi + \overline{\psi}$, где $\psi \in \operatorname{Aut}_d \mathscr{A}$, то легко видеть, что $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A}$. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем F, $\mathscr{A} \neq F$. Тогда*

$$\operatorname{Aut} \mathscr{A}_d \cong \operatorname{Aut}_d \mathscr{A}.$$

Доказательство следует из условий и теоремы 2.1: в данном случае $\mathscr{A}$ не может являться полем, так как F не допускает конечных расширений. □

3. Автоморфизмы обобщенного дубля Витта $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$

Пусть, как и ранее, $\mathscr{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d, $\overline{\mathscr{A}}$ — изоморфная копия $\mathscr{A}$ (как векторного пространства).

Дубль Витта $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Рассмотрим прямую сумму $\mathscr{A} \oplus \overline{\mathscr{A}}$, где произведение определено правилами

$$x \cdot y = xy, \quad x \cdot \overline{y} = \overline{xy}, \quad \overline{x} \cdot y = xd(y) + \overline{xy}, \quad \overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xd(y)}$$

для всех $x, y \in \mathscr{A}$. Полученная алгебра обозначается через $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ и называется левосимметрическим *обобщенным дублем Витта.*

В [1] доказано, что $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ является левосимметрической алгеброй, которая проста тогда и только тогда, когда d-проста алгебра $\mathscr{A}$.

Как и в предыдущем разделе, легко видеть, что любой эндоморфизм $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ однозначно определяется четверкой линейных отображений ψ, η, θ, π алгебры $\mathscr{A}$, а именно

$$\phi(a) = \psi(a) + \overline{\eta(a)}, \quad \phi(\overline{a}) = \theta(a) + \overline{\pi(a)}.$$

Как и ранее, обозначим $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$.

Лемма 3.1. *Пусть $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) \in \operatorname{End} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Тогда $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если*

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\psi(b), \quad \eta(ab) = \psi(a)\eta(b) + \eta(a)\psi(b) + \eta(a)d\eta(b), \tag{5}$$

$$\theta(ab) = \psi(a)\theta(b) + \eta(a)d\theta(b), \quad \pi(ab) = \psi(a)\pi(b) + \eta(a)\theta(b) + \eta(a)d\pi(b), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \psi(ad(b)) + \theta(ab) = \theta(a)\psi(b) + \pi(a)d\psi(b), \\ \eta(ad(b)) + \pi(ab) = \theta(a)\eta(b) + \pi(a)\psi(b) + \pi(a)d\eta(b), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\theta(ad(b)) = \theta(a)\theta(b) + \pi(a)d\theta(b), \quad \pi(ad(b)) = \theta(a)\pi(b) + \pi(a)\theta(b) + \pi(a)d\pi(b) \tag{8}$$

для всех $a, b \in \mathscr{A}$, и для любых $x, y \in \mathscr{A}$ существуют единственные $u, v \in \mathscr{A}$ такие, что

$$\psi(u) + \theta(v) = x, \quad \eta(u) + \pi(v) = y.$$

Более того, $\psi(1) = 1, \eta(1) = 0$.

Доказательство повторяет доказательство леммы 2.3. Проверим кратко (5):

$$\phi(a \cdot b) = \phi(ab) = \psi(ab) + \overline{\eta(ab)},$$

$$\begin{aligned} \phi(a) \cdot \phi(b) &= (\psi(a) + \overline{\eta(a)}) \cdot (\psi(b) + \overline{\eta(b)}) \\ &= \psi(a)\psi(b) + \overline{\psi(a)\eta(b)} + \eta(a)d\psi(b) + \overline{\eta(a)\psi(b)} + \overline{\eta(a)d\eta(b)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\psi(ab) = \psi(a)\psi(b) + \eta(a)d\psi(b), \quad \eta(ab) = \psi(a)\eta(b) + \eta(a)\psi(b) + \eta(a)d\eta(b),$$

т. е. пришли к соотношениям (5). Равенства $\psi(1) = 1$ и $\eta(1) = 0$ следуют из того, что 1 является единицей алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. $\square$

Всюду далее d обозначает некоторое фиксированное ненулевое дифференцирование алгебры $\mathscr{A}$, относительно которого $\mathscr{A}$ является дифференциально простой, и предполагается, что $\mathscr{A}$ не является полем. Далее (i') означает ссылку на первое равенство в (i), а (i'') — на второе равенство.

Лемма 3.2. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над полем F. Если $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi) \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$, то ψ и π невырожденны, $\pi(1) := \alpha \in F^*$, а также для некоторого $c \in \mathscr{A}$ выполнены соотношения*

$$\psi d = \alpha d\psi, \quad \pi = \alpha\psi, \quad \eta = cd\psi, \tag{9}$$

$$\eta(ad(b)) = \alpha(\psi(a)d\eta(b) - \eta(b)d\psi(a)), \tag{10}$$

$$\psi(adb) = \psi(a)\psi(db) \tag{11}$$

для всех $a, b \in \mathscr{A}$.

Доказательство. Из условия и леммы 3.1 следует, что ψ невырожденно.

Обозначим $\operatorname{Ker} \pi := P$. Из $(7')$ получаем $\psi(P \cdot d(\mathscr{A})) = 0$ и $P \cdot d(\mathscr{A}) = 0$. Так как $d(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы, то $P = 0$. Теперь из невырожденности π следует существование $x \in \mathscr{A}$ такого, что $\pi(x) = 1$. Из $(6'')$ выводим $\pi(ax) = \psi(a)$, а из $(8'')$ вытекает $d(\pi(1)) = 0$, т. е. $\pi(1) := \alpha \in F^*$. Также из $(6'')$ получаем $\pi(a) = \alpha\psi(a)$.

Из $(5')$ и коммутативности $\mathscr{A}$ получаем, что для любых $a, b \in \mathscr{A}$ выполнено

$$\eta(a)d\psi(b) = \eta(b)d\psi(a). \tag{12}$$

Из невырожденности ψ следует, что $d\psi(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы. Значит, $\eta = cd\psi$ для некоторого $c \in \mathscr{A}$. Из $(6'')$ и $(7'')$ получаем соотношение

$$\eta(ad(b)) = \alpha(\psi(a)d\eta(b) - \eta(a)d\psi(b)),$$

которое совместно с (12) дает (10).

Из $(7')$ выводим $\psi(adb) = \alpha\psi(a)d\psi(b)$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$, откуда при $a = 1$ получаем $\psi(db) = \alpha d\psi(b)$, т. е. справедливо соотношение (11). $\square$

Обозначим через $\mathscr{B} = F_2[x]$ двумерную алгебру усеченных многочленов над полем F характеристики 2, а через ∂ — стандартную частную производную по x: $\partial(x) = 1$. Любое дифференцирование d алгебры $\mathscr{B}$ имеет вид $d = \nu\partial$ для некоторого $\nu \in \mathscr{B}$, и для d-простоты $\mathscr{B}$ необходима и достаточна обратимость ν, что мы и предполагаем далее. Отметим, что по $\mathscr{B}$ и фиксированному $d \in \operatorname{Der} \mathscr{B}$ строится левосимметрическая алгебра $\mathscr{B}(d)$ с новым умножением $a \cdot b = ad(b)$, которая содержит собственный d-инвариантный идеал в случае $d^2 = 0$, т. е. d-простоты $\mathscr{B}$ недостаточно для простоты $\mathscr{B}(d)$. Однако левосимметрическая алгебра $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ проста тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ является d-простой.

Заметим, что если $\mathscr{A}$ является d-простой относительно некоторого $d \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$, то это не влечет существования $\ell \in \mathscr{A}$ такого, что $d(\ell) = 1$ (к примеру, $A = F_3[x]$, $d = (1 + x)\partial$). В случае, когда это так, дифференцирование будем называть *унитальным* и нильпотентный прообраз единицы обозначать через ℓ (несложно заметить, что ℓ единствен).

Зафиксируем $\alpha \in F^*$, $\beta \in F$ и определим эндоморфизм $\psi_{\alpha,\beta} := (\psi, \eta, 0, \pi)$ алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ правилом

$$\psi(1) = 1, \quad \psi(x) = \beta + \alpha^{-1}x, \quad \eta = \alpha^2\beta^2\nu^{-2}d\psi, \quad \pi = \alpha\psi.$$

Лемма 3.3. *Отображение $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi)$ является автоморфизмом алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ тогда и только тогда, когда d унитально и $\phi = \psi_{\alpha,\beta}$ для некоторых $\alpha \in F^*$, $\beta \in F$.*

Доказательство. По леммам 3.1 и 3.2 $\psi(1) = 1$, $\psi(x) = \beta + \gamma x$ для некоторого $\gamma \in F^*$. Из (9′), действуя на x, получаем $\alpha\gamma = 1$. Из (5′), полагая $a = b = x$ и используя лемму 3.2, выводим $0 = \beta^2 + \nu^2\gamma^2 c$, т. е. $\nu^2 c = \alpha^2\beta^2$. Тогда $\eta(x) = \alpha\beta^2\nu^{-1}$ обратим, из (5″) при $a = b = x$ следует $\eta(x)d\eta(x) = 0$, откуда $\eta(x) \in F^*$, т. е. $\nu \in F^*$ и d унитально.

Обратно, если ϕ удовлетворяет вышеуказанным условиям, то непосредственно легко проверяется справедливость (5)–(8), а также биективность ϕ. Тогда $\phi \in \operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ по лемме 3.1. $\square$

Автоморфизм ψ алгебры $\mathscr{A}$ такой, что $\psi d = \alpha d\psi$ для некоторого обратимого $\alpha \in \mathscr{A}$, будем называть *обратимо перестановочным* (*α-перестановочным*) с d (*скалярно перестановочным*, если $\alpha \in F^*$). Обозначим через $\operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$ и $\operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$ подмножества в $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$, состоящие из автоморфизмов, скалярно и обратимо перестановочных с d:

$$\operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A} := \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathscr{A} : \phi d = \alpha d\phi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\phi \in F^*\};$$

$$\operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A} := \{\phi \in \operatorname{Aut}\mathscr{A} : \phi d = \alpha d\phi \text{ для некоторого } \alpha = \alpha_\phi \in \mathscr{A} \setminus \mathscr{N}\}.$$

Предложение 3.1. *$\operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$ и $\operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$ являются подгруппами в $\operatorname{Aut}\mathscr{A}$. При этом $\operatorname{Aut}_d\mathscr{A}$ является нормальной подгруппой в $\operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$.*

Доказательство. Заметим, что тождественное преобразование id лежит в $\operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$, при этом $\alpha_{\mathrm{id}} = 1$. Пусть $\phi, \psi \in \operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$, $\phi d = \alpha d\psi$, $\psi d = \beta d\psi$ для некоторых обратимых $\alpha, \beta \in \mathscr{A}$. Тогда

$$\phi\psi d = \phi(\beta d\psi) = \phi(\beta)\phi(d\psi) = \alpha\phi(\beta)d\phi\psi,$$

т. е. $\alpha_{\phi\psi} = \alpha_\phi \cdot \phi(\alpha_\psi)$ и $\phi\psi \in \operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$. Аналогично получаем, что $\alpha_{\phi^{-1}} = \alpha_\phi^{-1}$ и $\phi^{-1} \in \operatorname{Aut}_d^*\mathscr{A}$. В частности, $\operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A} \leq \operatorname{Aut}\mathscr{A}$.

Возьмем произвольные $\phi \in \operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$, $\psi \in \operatorname{Aut}_d\mathscr{A}$. Пусть $\alpha := \alpha_\phi$. Тогда

$$\phi\psi\phi^{-1}d = \phi\psi\alpha^{-1}d\phi^{-1} = \alpha^{-1}\phi d\psi\phi^{-1} = d\phi\psi\phi^{-1}.$$

Таким образом, $\operatorname{Aut}_d\mathscr{A} \trianglelefteq \operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$. $\square$

Рассмотрим отображение $\phi = (\psi, 0, 0, \alpha_\psi\psi)$. При $\psi \in \operatorname{Aut}_d^q\mathscr{A}$ выполняется равенство $\psi d = \alpha d\psi$ для некоторого $\alpha \in F^*$. Так как дифференцирование d предполагается фиксированным, в этом случае α однозначно определяется по автоморфизму ψ. Будем использовать обозначение ϕ_ψ для автоморфизма $\phi = (\psi, 0, 0, \alpha_\psi\psi)$. Всюду далее предполагаем основное поле F алгебраически замкнутым.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра, $\mathscr{A} \neq \mathscr{B}$, $\mathscr{A}$ не является полем. Тогда $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi) \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если $\phi = \phi_\psi$ при $\psi \in \operatorname{Aut}_d^q \mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $\phi = (\psi, \eta, 0, \pi) \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$. Из лемм 3.1 и 3.2 следует, что ψ и π невырожденны, $\psi(1) = 1$, $\pi(1) = \alpha \in F^*$, $\eta(1) = 0$. Обозначим $I := \operatorname{Ker} \eta$. Из (10) получаем

$$\eta(\mathscr{A} \cdot d(I)) = 0, \quad \mathscr{A} \cdot d(I) \subseteq I, \quad d(I) \subseteq I, \quad \mathscr{A} \cdot d(I) \trianglelefteq_d \mathscr{A},$$

откуда $d(I) = 0$ и $I = F$ по лемме 2.1, если $I \neq \mathscr{A}$.

Из (11) и (5$'$) следует $\eta(d\mathscr{A})d\psi(\mathscr{A}) = 0$, откуда $\eta(d\mathscr{A}) = 0$, но $\operatorname{Ker} \eta = \langle 1 \rangle$, так что это возможно только если $\mathscr{A} = F_2[x]$. Значит, $\eta = 0$. Из (5$'$) получаем $\psi \in \operatorname{Aut} \mathscr{A}$. По лемме 3.2 $\psi d = \alpha d \psi$, $\pi = \alpha \psi$, где $\alpha = \alpha_\psi$.

Обратно, если ϕ имеет указанный вид, то условия леммы 3.1 легко проверяются, т. е. ϕ является автоморфизмом. $\square$

Всюду далее символы ψ, η, θ, π обозначают соответствующие компоненты некоторого автоморфизма $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi)$ алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ над полем F, которое отождествляется с подалгеброй $\langle 1 \rangle_F$.

Лемма 3.4. *Пусть θ невырожденно. Если $\eta \neq 0$, то $I := \operatorname{Ker} \eta = F$.*

Доказательство. Из леммы 3.1 следует, что $F \subseteq I$. Если $\eta \neq 0$, то $I \neq \mathscr{A}$. Как и ранее, подставляя (6$''$) в (7$''$) и используя коммутативность, получаем $\eta(ad(b)) = \pi(a)d\eta(b) - \eta(b)d\pi(a)$ для любых $a, b \in \mathscr{A}$, откуда последовательно выводим $\mathscr{A} \cdot d(I) \subseteq I$, $d(I) \subseteq I$, $\mathscr{A} \cdot d(I) \trianglelefteq_d \mathscr{A}$, $d(I) = 0$ и $I = F$. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $\chi(F) = 2$, θ невырожденно, и $\mathscr{A} \ncong \mathscr{B}$. Тогда $d\psi(\mathscr{A}) \nsubseteq \mathscr{N}$.*

Доказательство. Если $\eta = 0$, то из невырожденности ϕ получаем невырожденность π. Из (6$''$) при $b = 1$ следует $\pi(a) = \psi(a)\pi(1)$. Значит, ψ невырожденно, $\psi(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$, и $d\psi(\mathscr{A}) \nsubseteq \mathscr{N}$.

Далее считаем, что $\eta \neq 0$ и $I := \operatorname{Ker} \eta = F$ по лемме 3.4.

Если $\eta(\mathscr{N}) \subseteq \mathscr{N}$, то $\eta(\mathscr{N}) = \mathscr{N}$, а значит, $d(\eta(\mathscr{N})) \nsubseteq \mathscr{N}$. Теперь если $a \in \mathscr{N}$ и $d\eta(a) \notin \mathscr{N}$, то $\eta(a)d\eta(a) = 0$ по (5$''$), откуда $\eta(a) = 0$; противоречие. Если $\eta(\mathscr{N}) \nsubseteq \mathscr{N}$ и $a \in \mathscr{N}$ такой, что $\eta(a) \notin \mathscr{N}$, то из $\eta(a)d\eta(a) = 0$ следует $d\eta(a) = 0$, т. е. $\eta(a) \in F^*$. Если $b \in \mathscr{N}$ и $b \notin \langle a \rangle$, то $\eta(b) \in \mathscr{N}$, откуда $\eta(a+b) \notin \mathscr{N}$; противоречие с условием $\mathscr{A} \ncong \mathscr{B}$. $\square$

Для произвольных $k, m, r, s \in F^*$ с условием $\Delta^2 = \nu m s$, где $\Delta := rm + ks$, определим следующий эндоморфизм $\phi_\Delta := (\psi, \eta, \theta, \pi)$ алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = r + sx, \quad \pi(1) = \frac{mr^2}{\Delta^2},$$

$$\psi(x) = k + mx, \quad \eta(x) = \frac{k^2 s}{\Delta^2}, \quad \theta(x) = \Delta\left(\frac{k}{m} + x\right), \quad \pi(x) = \frac{kr}{\Delta} + x.$$

Лемма 3.6. *Пусть $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, $\theta(1) \notin \mathscr{N}$, $\eta(\mathscr{A}) \nsubseteq \mathscr{N}$, $\operatorname{Ker} \psi = \operatorname{Ker} \theta = 0$ и $0 \neq d \in \operatorname{Der} \mathscr{A}$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если d унитально и $\phi = \phi_\Delta$ для некоторого $\Delta \in F^*$.*

Доказательство. Напомним, что в данном случае поле F имеет характеристику 2, $\mathscr{A} = \langle 1, x \rangle$ и $\mathscr{A}$ является d-простой, где $d = \nu\partial$ для некоторого обратимого $\nu \in \mathscr{A}$. По лемме 3.1 $\psi(1) = 1$ и $\eta(1) = 0$. Из (5$'$) следует

$\psi(x)^2 = \eta(x)d\psi(x)$. Пусть $\psi(x) = k + mx$ для некоторых $k, m \in F$. Тогда $k^2 = \eta(x)m\nu$, откуда $k, m \in F^*$ и $\frac{k^2}{m\nu} = \eta(x)$. Соотношение $(5'')$ дает $\eta(x)d(\eta(x)) = 0$, но $\eta(x)$ обратим, т. е. $d(\eta(x)) = 0$ и $\eta(x) \in F$. Значит, $\nu \in F^*$.

По условию $\theta(1) \notin \mathscr{N}$. Тогда из $(8')$ при $a = b = 1$ получаем обратимость $\pi(1)$ и $d\theta(1)$. Пусть $\theta(1) = r + sx$. Тогда $r, s \in F^*$. Из $(6')$ при $a = x, b = 1$ выводим $\theta(x) = \psi(x)\theta(1) + \eta(x)d(\theta(1))$, откуда $\theta(x) = \Delta(\frac{k}{m} + x)$. Из $(7')$ при $a = 1, b = x$ получаем $\nu + \theta(x) = \psi(x)\theta(1) + \pi(1)m\nu$, а потому $\pi(1) = \frac{m\nu + k^2 s}{m^2\nu}$. Из $(8')$ при $a = 1, b = x$ следует $\nu\theta(1) = \theta(1)\theta(x) + \pi(1)\Delta\nu$, откуда

$$(r + sx)(m\nu + \Delta(k + mx)) = \frac{m\nu + k^2 s}{m}\Delta;$$

сравнивая коэффициенты, приходим к равенству $\nu = \frac{\Delta^2}{sm}$. Тогда $\pi(1) = \frac{mr^2}{\Delta^2}$. Из $(6'')$ при $a = x, b = 1$ следует $\pi(x) = \psi(x)\pi(1) + \eta(x)\theta(1)$, откуда $\pi(x) = \frac{kr}{\Delta} + x$.

Включение $\phi_\Delta \in \operatorname{Aut}\mathscr{W}_\partial(\mathscr{B})$ проверяется непосредственно с использованием леммы 3.1. $\square$

Для произвольных $k, t \in F^*$ определим следующий эндоморфизм ϕ_k^t алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ при $d = \nu\partial$, $\nu \in F^*$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = t + k^{-1}x, \quad \pi(1) = \frac{kt^2}{\nu},$$
$$\psi(x) = 0, \quad \eta(x) = k, \quad \theta(x) = \nu, \quad \pi(x) = kt + x.$$

Лемма 3.7. *Пусть $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$, $\theta(1) \notin \mathscr{N}$, $\eta(\mathscr{A}) \nsubseteq \mathscr{N}$, $\operatorname{Ker}\psi \neq 0$, $\operatorname{Ker}\theta = 0$ и $0 \neq d \in \operatorname{Der}\mathscr{A}$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) \in \operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если d унитально и $\phi = \phi_k^t$ для некоторых $k, t \in F^*$.*

Доказательство. По лемме 3.1 $\psi(1) = 1$ и $\eta(1) = 0$. Из $(5'')$ следует $\eta(x) = k \in F^*$. Условие $\operatorname{Ker}\psi \neq 0$ влечет $\psi(x) \in F$, а из $(5')$ получаем $\psi(x) = 0$. Соотношение $(8')$ дает обратимость $\pi(1)$ и $d(\theta(1))$, $(8'')$ влечет $\pi(1) := \alpha \in F^*$, откуда $d(\theta(1)) \in F^*$ и $\nu \in F^*$.

Пусть $\theta(1) = t + sx$, $t, s \neq 0$. Тогда из $(6')$ при $b = 1$, $a = x$ получаем $\theta(x) = ks\nu$, а из $(6'')$ имеем $\pi(x) = k(t + sx)$. Теперь из $(7')$ при $a = 1$, $b = x$ выводим $ks = 1$, а подстановка $a = b = 1$ в $(8')$ дает $t^2 = s\alpha\nu$. В итоге $\phi = \phi_k^t$.

Включение $\phi_k^t \in \operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ при $d \in \langle\partial\rangle$ проверяется непосредственно с применением леммы 3.1. $\square$

Для произвольных $k, t \in F^*$ определим следующий эндоморфизм $\phi_{k,t}$ алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ при $d = \nu\partial$:

$$\psi(1) = 1, \quad \eta(1) = 0, \quad \theta(1) = k^{-1}x, \quad \pi(1) = 0,$$
$$\psi(x) = tk\left(1 + \frac{t}{\nu}x\right), \quad \eta(x) = k, \quad \theta(x) = \nu + tx, \quad \pi(x) = x.$$

Лемма 3.8. *Пусть $\chi(F) = 2$, $\theta(1) \in \mathscr{N}$, $\operatorname{Ker}\theta = 0$ и $0 \neq d\operatorname{Der}\mathscr{A}$. Тогда $\phi = (\psi, \eta, \theta, \pi) \in \operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, d унитально и $\phi = \phi_{k,t}$ для некоторых $k, t \in F^*$.*

Доказательство. По лемме 3.1 $\psi(1) = 1$, $\eta(1) = 0$. Из невырожденности θ и из $(6')$ при $b = 1$ получаем $\eta(\mathscr{A}) \nsubseteq \mathscr{N}$. Из леммы 3.4 имеем $\operatorname{Ker}\eta = F$. Из $(5'')$ выводим $\eta(a)d(\eta(a)) = 0$ для любого $a \in \mathscr{A}$. Значит, если $\eta(a)$ обратим, то $d(\eta(a)) = 0$, т. е. $\eta(a) = \alpha \in F^*$. Пусть $e \in \mathscr{A}$ такой, что $\eta(e) = 1$. Тогда

$\eta(a-\alpha e)=0$, т. е. $a\in\langle 1,e\rangle$. Если $b\notin\langle 1,e\rangle$, то $\eta(b)\in\mathscr{N}$, откуда $\eta(e+b)\notin\mathscr{N}$, а потому $e+b\in\langle 1,e\rangle$; противоречие. Таким образом, условия леммы выполняются только в случае $\mathscr{A}=F_2[x]$.

Пусть $d=\nu\partial$, $\nu\neq 0$. Так как $\theta(1)\in\mathscr{N}$ и $\operatorname{Ker}\theta=0$, то $d(\theta(1))\notin\mathscr{N}$. Из $(8')$ следует $\pi(1)=0$, а из $(6'')$ имеем $\pi(a)=\theta(1)\eta(a)$ для любого $a\in\mathscr{A}$. Далее, из условий леммы получаем $\eta(x)=k$, $\theta(1)=rx$ для некоторых $k,r\in F^*$. Тогда $\pi(x)=krx$. Из $(8'')$ при $a=x$, $b=x$ выводим $kr=1$. Пусть $\theta(x)=s+tx$ для некоторых $s,t\in F$, $s\neq 0$. Если $c=\frac{x}{s}+\frac{t}{rs}$, то $\theta(c)=1$. Теперь из $(6')$ при $b=c$ получаем

$$\psi(x)=\theta(xc)=\frac{t}{r}+\frac{t^2x}{rs}.$$

Из $(6')$ при $a=x$, $b=1$ следует $\nu kr=s$, т. е. $\nu=s$.

Включение $\phi_{k,t}\in\operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{B})$ проверяется непосредственно с использованием леммы 3.1. $\square$

Лемма 3.9. *Пусть* $\operatorname{Ker}\theta=0$. *Тогда* $\phi=(\psi,0,\theta,\pi)\in\operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ *в том и только в том случае, если* d *унитально,* $\psi\in\operatorname{Aut}^*_d\mathscr{A}$ *и* $\phi=\psi(\gamma):=(\psi,0,\gamma\psi,\alpha\psi)$, *где* $\gamma^2+\alpha d(\gamma)=0$, $2\gamma+d(\alpha)=0$, *откуда при* $a=\ell+\xi\beta^{-1}$ *для некоторых* $\beta,\xi\in F^*$ *имеем* $\gamma=\gamma_\psi:=\beta a$ *и* $\alpha=\alpha_\psi:=-\beta a^2$.

Доказательство. Так как $\eta=0$, то ψ невырожденно. Соотношение $(7'')$ влечет $\pi(a)=\alpha\psi(a)$ для любого $a\in\mathscr{A}$ при $\alpha:=\pi(1)$. Используя $(5')$, замечаем, что ψ — автоморфизм $\mathscr{A}$. Из $(6')$ следует $\theta(a)=\gamma\psi(a)$ для любого $a\in\mathscr{A}$ при $\gamma:=\theta(1)$, и из невырожденности θ получаем обратимость γ. Из $(7')$, $(6')$ и коммутативности $\mathscr{A}$ выводим $\psi(ad(b))=\alpha\psi(a)d(\psi(b))$ для любых $a,b\in\mathscr{A}$ и $\psi d=\alpha d\psi$, т. е. $\psi\in\operatorname{Aut}^*_d\mathscr{A}$.

Из $(8')$ при $a=b=1$ выводим обратимость α и $d(\gamma)$. Далее, замечаем, что $(8')$ эквивалентно равенству $\gamma^2+\alpha d(\gamma)=0$, а $(8'')$ равносильно $2\gamma+d(\alpha)=0$. Тогда

$$2\gamma d(\gamma)+d(\alpha)d(\gamma)+\alpha d(d(\gamma))=0\Rightarrow\alpha d(d(\gamma))=0\Rightarrow d(d(\gamma))=0\Rightarrow d(\gamma)\in F^*.$$

Пусть $\gamma=\xi+n$ для некоторых $\xi\in F^*,n\in\mathscr{N}$ и $d(n)=\beta\in F^*$. Тогда $n=\beta\ell$ и условие $\gamma^2+\alpha d(\gamma)=0$ (заметим, что теперь $2\gamma+d(\alpha)=0$ является его следствием) дает $\alpha=-\beta^{-1}\xi^2-2\xi\ell-\beta\ell^2$.

Обратно, если ϕ имеет указанный вид, то условия леммы 3.1 легко проверяются. $\square$

Замечание. При $\psi\in\operatorname{Aut}^*_d\mathscr{A}$ выполняется равенство $\psi d=\alpha d\psi$ для некоторого фиксированного обратимого $\alpha=\alpha(\psi)\in\mathscr{A}$. В случае $\chi(F)\neq 2$ однозначно определяются $\beta,\xi\in F^*$, а потому и γ. Таким образом, автоморфизм $\psi(\gamma)$ алгебры $\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ полностью определяется автоморфизмом $\psi\in\operatorname{Aut}^*_d\mathscr{A}$. Будем также использовать обозначение ${}_\psi\phi$ для $\psi(\gamma)$ в случае $\chi(F)\neq 2$. Отметим, что обозначение $\psi(\gamma)$ будем использовать далее для любых автоморфизмов $\phi=\psi(\gamma):=(\psi,0,\gamma\psi,\alpha\psi)$ с условием $\gamma^2+\alpha d(\gamma)=0,2\gamma+d(\alpha)=0$, т. е., в частности, случай $\alpha\in F^*$ и $\gamma=0$ также допускается.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathscr{A}$ *— конечномерная ассоциативная коммутативная* d*-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем* F, $\mathscr{A}$ *не является полем. Тогда если* $\phi=(\psi,\eta,\theta,\pi)\in\operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$, *то либо* $\theta=0$, *либо* $\phi=\psi(\gamma)$, *либо* $\mathscr{A}\cong F_2[x]$ *и* ϕ *является автоморфизмом вида* $\psi_{\alpha,\beta},\phi_\Delta,\phi^t_k,\phi_{k,t}$.

Доказательство. Пусть $\phi=(\psi,\eta,\theta,\pi)\in\operatorname{Aut}\mathscr{W}_d(\mathscr{A})$, $\theta\neq 0,\Theta:=\operatorname{Ker}\theta$ и $d(\Theta)\neq 0$. Тогда из $(6')$ получаем $\theta(\mathscr{A}\Theta)=0$, т. е. $\mathscr{A}\Theta\subseteq\Theta$. Из $(8')$ следует

$\theta(\mathscr{A}\cdot d(\Theta))=0$, $\mathscr{A}\cdot d(\Theta)\subseteq\Theta$, $d(\Theta)\subseteq\Theta$. Значит, $\mathscr{A}\cdot d(\Theta)\trianglelefteq_d\mathscr{A}$, $\mathscr{A}\cdot d(\Theta)=\mathscr{A}$, и $\Theta=\mathscr{A}$, т. е. $\theta=0$; противоречие.

Следовательно, если $\Theta\neq 0$, то $d(\Theta)=0$. В этом случае, так как $\mathscr{A}\Theta\subseteq\Theta$, то $\mathscr{A}\Theta=\mathscr{A}$, $\Theta=\mathscr{A}$ и $\theta=0$; противоречие. Таким образом, θ невырожденно.

Из невырожденности θ следует существование $c\in\mathscr{A}$ такого, что $\theta(c)=1$. Тогда из $(8')$ получаем $\theta(ad(c))=\theta(a)$ для любого $a\in\mathscr{A}$, откуда $ad(c)=a$ и $d(c)=1$. Полагая $\theta(1)=\gamma$, при $b=1$ из $(6')$ получаем

$$\theta(a)=\gamma\psi(a)+d(\gamma)\eta(a) \tag{13}$$

для любого $a\in\mathscr{A}$.

Рассмотрим случай $\mathscr{A}\not\cong\mathscr{B}$. Если $\chi(F)\neq 2$, то $\theta(ac)=\psi(a)$ по $(6')$, и из $(7')$ при $a=1$, $b=c$ следует, что либо $\psi(c)$ обратим, либо $d\psi(c)$ обратим. Опять же $(7')$ дает $\psi(c)=\pi(c)d\psi(c)$ при $a=b=c$. Таким образом, в любом случае $d\psi(c)$ обратим. Если $\chi(F)=2$, то лемма 3.5 обеспечивает существование $e\in\mathscr{A}$ такого, что $d\psi(e)$ обратим. Из коммутативности и $(5')$ получаем $\eta(a)d\psi(b)=\eta(b)d\psi(a)$ для любых $a,b\in\mathscr{A}$, откуда следует существование $\xi\in\mathscr{A}$ такого, что

$$\eta(a)=\xi d\psi(a) \tag{14}$$

для любого $a\in\mathscr{A}$. Далее, из (14) и (13) выводим $\operatorname{Ker}\psi\subseteq\operatorname{Ker}\eta$ и $\operatorname{Ker}\psi\cap\operatorname{Ker}\eta=0$, т. е. получили невырожденность ψ.

Действуя d на $(5')$, домножая полученное равенство на ξ и вычитая $(5'')$, с учетом получаемого из коммутативности и $(5'')$ равенства $\eta(a)d\eta(b)=\eta(b)d\eta(a)$ приходим к соотношению $\xi\eta(\mathscr{A})d^2\psi(\mathscr{A})=0$.

Если $\eta(\mathscr{A})$ содержит обратимые элементы, то ξ обратим. Тогда равенство $\xi\eta(\mathscr{A})d^2\psi(\mathscr{A})=0$ дает $d^2=0$. Поскольку $\dim\operatorname{Im}(d)=n-1$, где $n=\dim_F\mathscr{A}$, последнее равенство допустимо только в случае $\mathscr{A}=F_2[x]$, который не рассматривается в настоящий момент.

Если же $\eta(\mathscr{A})\subseteq\mathscr{N}$, то ξ нильпотентен и $\xi\eta(\mathscr{A})=0$, так как $d^2\neq 0$ и $\mathscr{A}\cdot d^2(\mathscr{A})=\mathscr{A}$. Тогда $\xi^2d\psi(\mathscr{A})=0$, $\xi^2=0$ и $\eta(\mathscr{A})^2=0$. Если $\eta=0$, то приходим к автоморфизмам $\psi(\gamma)$ из леммы 3.9. Пусть $I:=\operatorname{Ker}\eta\neq\mathscr{A}$. Из $(6'')$ и $(7'')$ получаем $\mathscr{A}\cdot d(I)\subseteq I$, откуда $d(I)=0$ и $I=F$, но тогда $\dim\operatorname{Im}\eta=n-1$, т. е. $\mathscr{A}=F_2[x]$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathscr{A}\cong\mathscr{B}$. Как и в лемме 3.5, если $\eta\neq 0$, то $\eta(\mathscr{N})\nsubseteq\mathscr{N}$, и приходим к следующим возможностям:

1) $\eta=0$, в этом случае выделяются автоморфизмы $\psi(\gamma)$ из леммы 3.9;

2) $\theta(1)\in\mathscr{N}$ — получаются автоморфизмы $\phi_{k,t}$ из леммы 3.8 и $\psi(\alpha,\beta)$ из леммы 3.3;

3) $\theta(1)\notin\mathscr{N}$ и $\operatorname{Ker}\psi\neq 0$ — в этом случае автоморфизмы имеют вид ϕ_k^t из леммы 3.7;

4) $\theta(1)\notin\mathscr{N}$ и $\operatorname{Ker}\psi=0$ — приходим к автоморфизмам ϕ_Δ из леммы 3.6. □

Заметим, что если $\chi(F)\neq 2$, то элемент γ из леммы 3.9 по α определяется однозначно: $\gamma=\frac{-d(\alpha)}{2}$; при этом условие, связывающее α и γ, может быть переписано в виде $d(\alpha)^2=2\alpha d^2(\alpha)$. В общем случае обозначим через $\mathscr{A}^\star$ множество обратимых $\alpha\in\mathscr{A}$ с условием, что существует обратимый (или нулевой, если $\alpha\in F$) $\gamma\in\mathscr{A}$ такой, что $\gamma^2+\alpha d(\gamma)=0$ и $d(\gamma)\in F$; при этом множество соответствующих элементов γ будем обозначать через $\mathscr{A}_\psi$. Пусть

$$\operatorname{Aut}_d^\star\mathscr{A}:=\{\phi\in\operatorname{Aut}\mathscr{A}:\phi d=\alpha d\phi \text{ для некоторого } \alpha=\alpha(\phi)\in\mathscr{A}^\star\}.$$

Используя лемму 3.3 и комбинируя теоремы 3.1 и 3.2, приходим к основному результату данного раздела.

Теорема 3.3. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем и $\mathscr{A}$ не является полем. Тогда $\phi \in \operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A})$ в том и только в том случае, если либо $\phi = \psi(\gamma)$ при $\psi \in \operatorname{Aut}_d^\star \mathscr{A}$, $\gamma \in \mathscr{A}_\psi$, либо $\mathscr{A} \cong F_2[x]$ и ϕ является одним из автоморфизмов $\psi_{\alpha,\beta}, \phi_\Delta, \phi_k^t, \phi_{k,t}$.*

Пусть далее для определенности $\chi(F) \neq 2$. Положим

$$H = \{\phi_\psi : \psi \in \operatorname{Aut}_d^q(\mathscr{A})\}; \quad G = \{\,{}_\psi\phi : \psi \in \operatorname{Aut}_d^\star \mathscr{A}\}.$$

Заметим, что по определению $H \subseteq G$, так как при $\alpha \in F^*$ выполняется $d(\alpha) = 0$, т. е. $\gamma = 0$. Заметим, что G является группой как следствие теоремы 3.3. Легко видеть, что H — подгруппа в G.

Следующий пример показывает неравенство $H \neq G$ в общем случае.

Пример 3.1. Пусть $\mathscr{A} = F_3[x_1, x_2]$, $d = \partial_1 + x_1^2\partial_2$, $\alpha = 1 + x_1 + x_1^2$. Тогда автоморфизм ψ такой, что $\psi(1) = 1$, $\psi(x_1) = x_1 + x_1^2$, $\psi(x_2) = x_2$, является α-перестановочным с d, при этом $d(\alpha)^2 = 2\alpha d^2(\alpha)$. Как хорошо известно, $\mathscr{A}$ является d-простой [9]. Легко проверяется, что если взять $\alpha = 1 + x_1$, то не существует автоморфизмов алгебры $\mathscr{A}$, которые α-перестановочны с d.

Лемма 3.10. *Пусть $\chi(F) \neq 2$, $\psi_i \in \operatorname{Aut}_d^\star \mathscr{A}$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$\phi_{\psi_1} \circ \phi_{\psi_2} = \phi_{\psi_1 \circ \psi_2}; \quad {}_{\psi_1}\phi \circ \phi_{\psi_2} = {}_{\psi_1 \circ \psi_2}\phi; \quad \phi_{\psi_1} \circ {}_{\psi_2}\phi = {}_{\psi_1 \circ \psi_2}\phi;$$
$${}_{\psi_1}\phi \circ {}_{\psi_2}\phi = {}_{\psi_1 \circ \psi_2}\phi, \text{ если } \alpha_1\psi_1(\alpha_2) \notin F^*;$$
$${}_{\psi_1}\phi \circ {}_{\psi_2}\phi = \phi_{\psi_1 \circ \psi_2}, \text{ если } \alpha_1\psi_1(\alpha_2) \in F^*.$$

Доказательство. Первые три равенства дает непосредственная проверка. К примеру, проверим второе равенство. Пусть ${}_{\psi_1}\phi = (\psi_1, 0, \gamma_1\psi_1, \alpha_1\psi_1) \in G$, $\phi_{\psi_2} = (\psi_2, 0, 0, \alpha\psi_2) \in H$, $\alpha \in F^*$. Тогда

$${}_{\psi_1}\phi \circ \phi_{\psi_2}(\overline{a}) = {}_{\psi_1}\phi(\overline{\alpha\psi_2(a)}) = \gamma_1\alpha\psi_1(\psi_2(a)) + \overline{\alpha_1\alpha\psi_1(\psi_2(a))},$$

откуда и следует доказываемое равенство.

Проверим оставшиеся два равенства. Пусть $\phi_i = (\psi_i, 0, \gamma_i\psi_i, \alpha_i\psi_i) \in G$, $i = 1, 2$. Заметим, что условия на α_i и γ_i влекут $d(\gamma_i) \in F^*$. Имеем

$$\phi_1 \circ \phi_2 = (\psi_1\psi_2, 0, (\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2))\psi_1\psi_2, \alpha_1\psi_1(\alpha_2)\psi_1\psi_2).$$

Покажем, что

$$(\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2))^2 + \alpha_1\psi_1(\alpha_2)d(\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2)) = 0.$$

Действительно,

$$\psi_1(\gamma_2^2) + \gamma_1^2\psi_1(\alpha_2^2) + 2\gamma_1\psi_1(\alpha_2\gamma_2) \\ + \psi_1(\alpha_2 d(\gamma_2)) + \alpha_1 d(\gamma_1)\psi_1(\alpha_2)^2 + \gamma_1\psi_1(\alpha_2 d(\alpha_2)) = 0,$$

так как $\phi_i \in G_2,\ i = 1, 2$. Также имеем

$$2(\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2)) + d(\alpha_1)\psi_1(\alpha_2) + \alpha_1 d(\psi_1(\alpha_2)),$$

так как $\alpha_1 d(\psi_1(\alpha_2)) = \psi_1(d(\alpha_2))$.

Заметим, что $\phi_1 \circ \phi_2 \in H \Leftrightarrow \psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2) = 0$. Поскольку по условию $\chi(F) \neq 2$, то

$$\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2) = 0 \Leftrightarrow -\psi_1(d(\alpha_2)) - d(\alpha_1)\psi_1(\alpha_2) = 0,$$

откуда $d(\alpha_1\psi_1(\alpha_2)) = 0$, так как

$$d(\alpha_1\psi_1(\alpha_2)) = d(\alpha_1)\psi_1(\alpha_2) + \alpha_1 d(\psi_1(\alpha_2)) = d(\alpha_1)\psi_1(\alpha_2) + \psi_1(d(\alpha_2)).$$

Значит, $\alpha_1\psi_1(\alpha_2) \in F^*$ и $\phi_1 \circ \phi_2 \in G_1$. Обратно, если $\alpha_1\psi_1(\alpha_2) \in F^*$, то $d(\alpha_1\psi_1(\alpha_2)) = 0$, а потому $\psi_1(\gamma_2) + \gamma_1\psi_1(\alpha_2) = 0$. $\square$

Следствие 3.1. *Пусть $\mathscr{A}$ — конечномерная ассоциативная коммутативная d-простая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики не 2, $d \neq 0$. Тогда* $\operatorname{Aut} \mathscr{W}_d(\mathscr{A}) \cong \operatorname{Aut}_d^{\star} \mathscr{A}$.

Благодарности. Автор благодарен В. Н. Желябину за интересные обсуждения результатов данной работы, а также автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пожидаев А. П.* Об обобщенной конструкции Мицухары // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 545–559.
2. *Кантор И. Л.* Универсальная градуированная супералгебра Ли // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. 1981. Т. 20. С. 162–175.
3. *Bertoncello L. N., Levcovitz D.* On the isotropy group of a simple derivation // J. Pure Appl. Algebra. 2020. V. 224, N 1. P. 33–41.
4. *Mendes L. G., Pan I.* On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations // J. Pure Appl. Algebra. 2016. V. 221, N 4. P. 875–882.
5. *Mendes L. G., Pan I.* Corrigendum to: “On plane polynomial automorphisms commuting with simple derivations” // J. Pure Appl. Algebra. 2021. V. 225. 106675.
6. *Желябин В. Н., Тихов А. С.* Алгебры Новикова — Пуассона и ассоциативные коммутативные дифференциальные алгебры // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 186–202.
7. *Posner E.* Differentiably simple rings // Proc. Am. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 337–343.
8. *Block R. E.* Determination of the differentiably simple rings with minimal ideal // Ann. Math. (2). 1969. V. 90. P. 433–459.
9. *Albert A. A.* On commutative power-associative algebras of degree two // Trans. Am. Math. Soc. 1953. V. 74, N 2. P. 323–343.

Поступила в редакцию 3 июля 2024 г.
После доработки 23 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
app@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 512.542

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЧЕТНЫХ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ГРУПП

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин, Д. А. Тауснев

Аннотация. Пусть G — группа всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел N. Доказано, что аддитивная группа поля Q рациональных чисел не изоморфна подгруппе из G.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.613

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, ограниченная группа.

1. Введение

Пусть $S(N)$ — группа всех подстановок множества натуральных чисел N. Подстановка $x \in S(N)$ называется *финитарной*, если ее носитель $\mathrm{supp}(x) = \{\beta \mid \beta \in N, \beta^x \neq \beta\}$ конечен. Множество $\mathrm{Fin}(N)$ всех финитарных подстановок образует локально конечную группу. Эта группа порождается транспозициями $t_\alpha = (\alpha\ \alpha+1)$, $\alpha \in N$. Далеко не каждая счетная локально конечная группа изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Fin}(N)$. В работе И. Д. Адо [1] установлено, в частности, что $\mathrm{Fin}(N)$ не содержит квазициклической p-подгруппы при любом простом p. Общая задача изучения подгрупп группы $\mathrm{Fin}(N)$ поставлена Д. А. Супруненко в монографии [2].

Определение 1. Подстановка $g \in S(N)$ называется *ограниченной*, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Все такие подстановки образуют группу $G = \mathrm{Lim}(N)$. Очевидно, что $\mathrm{Fin}(N) \lhd G$. В [3] доказано, что G порождается подстановками, в разложении которых на независимые циклы участвуют только транспозиции вида t_α, $\alpha \in N$. При этом смешанная группа G равна AB, где A, B — некоторые ее локально конечные подгруппы. В работе [4] начато исследование подгруппового строения группы G.

Определение 2. Произвольная группа называется *ограниченной*, если она изоморфна подгруппе группы $G = \mathrm{Lim}(N)$.

Доказано, что ограниченными являются, например, счетная свободная группа, 2-группа Алешина, счетная локально конечная группа, счетная свободная абелева группа. Естественным образом возник вопрос о существовании счетных неограниченных групп. В той же работе [4] сформулирована гипотеза о неограниченности группы Q рациональных чисел по сложению. В настоящей работе доказана эта гипотеза.

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 24-41-10004.

Теорема 1. *Группа $Q(+)$ неограниченная.*

Группа X называется 2-*полной*, если для любого элемента $x \in X$ найдется такой элемент $y \in X$, что $y^2 = x$. Поскольку группа $Q(+)$ является полной абелевой группой без кручения, теорема 1 легко вытекает из следующего результата.

Теорема 2. *Абелева 2-полная группа без кручения является неограниченной.*

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны [5].

2. Предварительные результаты

Предположим, что теорема 2 неверна, т. е. группа $G = \mathrm{Lim}(N)$ содержит 2-полную абелеву подгруппу H без кручения.

Лемма 1. *Если $h \in H$, то $h = y^2$ для единственного элемента $y \in H$.*

Доказательство. Такой элемент y существует в силу 2-полноты H. Пусть $y^2 = z^2$ для некоторого $z \in H$. Так как H — абелева группа без кручения, отсюда выводим $(yz^{-1})^2 = 1$, а значит, $y = z$. Лемма доказана.

Пусть $g \in G$, $\alpha \in N$. Обозначим

$$M_\alpha(g) = \{\beta \mid \beta \in N,\ \beta \leq \alpha < \beta^g\}.$$

Лемма 2. $|M_\alpha(g)| \leq \omega(g)$.

Доказательство. Пусть $\omega(g) = s$, $T_\alpha = \{\alpha, \alpha-1, \dots, \alpha-s+1\} \cap N$. Тогда $|T_\alpha(g)| \leq s$ и в силу определений $M_\alpha(g) \subseteq T_\alpha(g)$. Поэтому лемма верна.

Лемма 3. *Число бесконечных циклов в разложении любой подстановки $g \in G$ на независимые циклы не превосходит $s = \omega(g)$.*

Доказательство. Допустим, что найдутся бесконечные циклы $x_1, \dots, x_{s+1}$ из разложения g на независимые циклы. Обозначим через γ_i наименьшее число цикла $x_i, 1 \leq i \leq s+1$. Пусть α — любое натуральное число, превосходящее $\max\{\gamma_1, \dots, \gamma_{s+1}\}$. Тогда $|M_\alpha(x_i)| \geq 1$ при каждом $i = 1, \dots, s+1$. Очевидно, $M_\alpha(g)$ содержит попарно не пересекающиеся множества $M_\alpha(x_1), \dots, M_\alpha(x_{s+1})$, а потому $|M_\alpha(g)| \geq s+1$, что противоречит лемме 2. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть в разложении подстановки $g \in S(N)$ на независимые циклы имеется бесконечный цикл и $x^n = g$ для некоторых подстановки $x \in S(N)$ и натурального n. Тогда в этом разложении содержится не менее n бесконечных циклов.*

Доказательство. Очевидно, что в разложении подстановки x на независимые циклы имеется бесконечный цикл

$$y = (\dots \alpha_{-k} \dots \alpha_{-1}\alpha_0\alpha_1 \dots \alpha_k \dots).$$

Но тогда в разложении $g = x^n$ содержится n бесконечных циклов

$$y_i = (\dots \alpha_{i-kn} \dots \alpha_{i-n}\alpha_i\alpha_{i+n} \dots \alpha_{i+kn} \dots), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

из разложения y^n. Лемма доказана.

Лемма 5. *В разложении любой подстановки $z \in H$ на независимые циклы отсутствуют бесконечные циклы.*

Доказательство. Предположим, что в разложении z на независимые циклы имеется бесконечный цикл. Из определения группы H следует, что $z = t^{2^m}$, где $t \in H$, $2^m > \omega(z)$. Тогда в силу леммы 4 в разложении z на независимые циклы содержится более $\omega(z)$ бесконечных циклов. С другой стороны, согласно лемме 3 число бесконечных циклов в разложении подстановки z не превосходит $\omega(z)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

3. Длины независимых циклов

Определение 3. Пусть $\alpha, \beta \in N$ и $\alpha < \beta$. Множество

$$\Delta(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in N,\ \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$$

будем называть *отрезком натуральных чисел*; α — левый конец отрезка, β — правый.

Замечание 1. Поскольку H — группа без кручения, в силу леммы 5 разложение любой нееденичной подстановки из H на независимые циклы содержит только конечные циклы, длины которых неограниченные.

В этом разделе будет доказана

Лемма 6. *Пусть в разложении подстановки h группы H на независимые циклы имеются такие циклы $d_1, d_2, \dots, d_n, \dots$, что если t_i — длина цикла d_i, $i \in N$, то*

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots .$$

Тогда подмножество всех четных чисел множества $\{t_i \mid i \in N\}$ конечно.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна. Ясно, что тогда можно считать, что $t_i = 2m_i$ при всех $i \in N$. Пусть

$$c = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_t),$$

где $t = 2m$, — любой цикл из условия леммы. Так как группа H является 2-полной, то $h = h_1^2$ для единственной в силу леммы 1 подстановки $h_1 = H$. Нетрудно показать, что в разложении h_1 на независимые циклы имеется цикл

$$c_1 = (\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \dots \alpha_t \beta_t),$$

квадрат которого равен произведению циклов c и $(\beta_1 \beta_2 \dots \beta_t)$ из разложения h. По индукции легко получить более общий результат. Именно, для каждого натурального k найдется такая подстановка $h_k \in H$, что $h = h_k^m$, где $m = 2^k$, а в разложении h_k на независимые циклы есть цикл

$$c_k = (\alpha_1 \beta_{12} \dots \beta_{1m} \alpha_2 \beta_{22} \dots \beta_{2m} \dots \alpha_t \beta_{t2} \dots \beta_{tm})$$

длины tm. При этом c_k^m разлагается на m циклов

$$c, (\beta_{1j} \beta_{2j} \dots \beta tj), \quad 2 \leq j \leq m, \tag{1}$$

содержащихся в разложении подстановки h на независимые циклы. Ясно, что каждый из этих циклов можно взять в качестве цикла c. Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что α_1 — наименьшее из чисел, составляющих цикл c_k. Пусть γ_k — наибольшее число из c_k.

Обозначим $s = \omega(h)$ и фиксируем любое натуральное k, для которого $m = 2^k > s$. Пусть $\omega(h_k) = q$. Выберем цикл c таким образом, чтобы для его длины t выполнялось неравенство $t > 3mq$. Поскольку отрезок $\Delta(\alpha_1, \gamma_k)$ содержит t натуральных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$, то

$$\gamma_k - \alpha_1 \geq t - 1 \geq 3mq.$$

Рассмотрим непересекающиеся отрезки $\Delta(\alpha_1, \alpha_1 + mq)$, $\Delta(\gamma_k - mq, \gamma_k)$ натуральных чисел. Так как $\omega(c_k) \leq q$, расстояние между соседними элементами множества $Q = \{\alpha_1, \beta_{12}, \dots, \beta_{1m}\}$ не превосходит q. Отсюда выводим, что выполняется включение

$$Q \subseteq \Delta(\alpha_1, \alpha_1 + mq). \tag{2}$$

Очевидно, найдется такое натуральное $r \leq t$, что γ_k является элементом множества $P = \{\alpha_r, \beta_{r2}, \dots, \beta_{rm}\}$. Поэтому аналогично (2) получаем

$$P \subseteq \Delta(\gamma_k - mq, \gamma_k). \tag{3}$$

Так как $\gamma_k - \alpha_1 \geq 3mq$, существует такое $\lambda \in N$, что

$$\alpha_1 + mq < \lambda < \gamma_k - mq.$$

Пусть теперь x — любой из $m = 2^k$ циклов (1), X — множество всех элементов цикла x. Из определений множеств P и Q следует, что $X \cap P \neq \varnothing$ и $X \cap Q \neq \varnothing$. Значит, $|M_\lambda(x)| \geq 1$ ввиду включений (2), (3). Очевидно, $M_\lambda(x) \subseteq M_\lambda(h)$. Таким образом, $|M_\lambda(h)| \geq m > s = \omega(h)$. Но согласно лемме 2 $|M_\lambda(h)| \leq \omega(h)$. Получили противоречие. Лемма доказана.

4. Окончание доказательства теоремы 2

Предположим, что теорема 2 неверна. Тогда в силу замечания 1 в разложении неединичной подстановки h группы H на независимые циклы найдутся циклы

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots \tag{4}$$

нечетных порядков (длин) и при этом

$$|z_1| < |z_2| < \dots < |z_n| < \dots,$$

где $|z_n|$ — длина цикла $z_n, n \in N$.

Пусть $z = (\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_m)$, $m = 2t - 1$, — любой из этих циклов. По условию теоремы 2 найдется такая подстановка $h_1 \in H$, что $h_1^2 = h$. Тогда разложение h_1 на независимые циклы содержит либо цикл $(\gamma_1\beta_1\gamma_2\beta_2 \dots \gamma_m\beta_m)$ длины $2m$, квадрат которого равен произведению z на цикл $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)$, либо цикл z^t, квадрат которого равен z. Применяя лемму 6 к подстановке h_1, заключаем, что первый из этих вариантов возможен лишь для конечного числа циклов (4).

Таким образом, найдется такое $n_0 \in N$, что для $n > n_0$ разложение подстановки h_1 на независимые циклы содержит цикл $z_n^{t_n}$, квадрат которого равен произведению z на цикл $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_m)$, либо цикл z^t, квадрат которого равен z.

Пусть $\omega(h) = r$. В силу условия теоремы 2 и леммы 1 в группе H найдутся такие однозначно определенные подстановки h_i, $1 < i < r + 2$, что $h_i^{2^i} = h$. Повторяя для h_i вышеизложенный анализ разложения h_1 на независимые циклы, докажем, что для каждого достаточно большого n в разложении h_i на независимые циклы имеется такой цикл u_n, что $u_n^{2^i} = z_n$.

В последовательности (4) найдется такой цикл x сколь угодно большой длины, что при каждом $i = 1, \dots, r+2$ в разложении h_i на независимые циклы содержится цикл $x_i = x^{m_i}$ $(0 < m_i < |x|)$, для которого $x_i^{2^i} = x$. Из этого следует, что $x = x^{m_i 2^i}$, а потому

$$m_i 2^i = l_i |x| + 1. \tag{5}$$

Далее, поделим $|x|$ на 2^{r+3} с остатком:

$$|x| = k2^{r+3} + s, \tag{6}$$

где s — нечетное натуральное число и $s < 2^{r+3}$. Из соотношений (5) и (6) получаем

$$m_i 2^i = l_i(k2^{r+3} + s) + 1. \tag{7}$$

Положим

$$\gamma = \max(r, \omega(h_1), \dots, \omega(h_{r+2})). \tag{8}$$

Считаем, что цикл x выбран таким образом, что число k из (6) удовлетворяет неравенству

$$k > \gamma + 2^{r+3}. \tag{9}$$

Разделим теперь m_i на k с остатком:

$$m_i = t_i k + s_i \quad (0 \le s_i < k), \tag{10}$$

а равенство (7) запишем в виде

$$(t_i k + s_i)2^i = l_i(k2^{r+3} + s) + 1,$$

или, иначе,

$$(t_i - l_i 2^{r-i+3})k2^i = sl_i + 1 - s_i 2^i. \tag{11}$$

Оценим правую часть равенства (11). Из соотношения (5) следует, что $0 < l_i < 2^i$, а так как в силу (6), (9) выполняются неравенства $0 < s < 2^{r+3} < k$, то $0 < sl_i + 1 < k2^i$. Таким образом,

$$|(sl_i + 1) - s_i 2^i| < k2^i.$$

Но левая часть равенства (11) кратна $k2^i$, а значит, она равна 0. Итак,

$$t_i = l_i 2^{r-i+3}. \tag{12}$$

Так как $|x|$ — нечетное число, в силу (5) нечетным является и l_i. Поэтому $t_i \ne t_j$ при $1 \le i < j \le r+2$ и

$$|m_i - m_j| = |(t_i k + s_i) - (t_j k + s_j)| = |(t_i - t_j)k + (s_i - s_j)|.$$

Согласно (12) разность $t_i - t_j$ кратна двум, а потому

$$|(t_i - t_j)k| \ge 2k.$$

Отсюда и из неравенства $|s_i - s_j| < k$ получаем результат:

$$|m_i - m_j| > k. \tag{13}$$

Пусть $x = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_q)$. Будем считать, что α_1 — наименьшее число цикла x. Если i — любое из чисел $1, 2, \dots, r+2$, то $0 < m_i < q$. Поэтому $\alpha_1^{x_i} = \alpha_1^{x^{m_i}} = \alpha_{m_{i+1}}$. С учетом определения (8) числа γ отсюда получаем

$$\alpha_{m_i+1} - \alpha_1 \le \omega(x_i) \le \omega(h_i) \le \gamma.$$

Это означает, что все числа α_{m_1+1} принадлежат отрезку $\Delta_1 = \Delta(\alpha_1, \alpha_1 + \gamma)$ натуральных чисел. Числа $m_1, \dots, m_{r+2}$ расположим в порядке возрастания:

$$m_{i_1} < m_{i_2} < \dots < m_{i_{r+2}}. \tag{14}$$

Фиксируем любое j $(1 \leq j \leq r+1)$ и обозначим для краткости $\mu = m_{i_j}$, $\lambda = m_{i_{j+1}}$. Для этих чисел неравенство (13) примет вид

$$\lambda - \mu > k.$$

Поэтому число последовательных элементов

$$\alpha_1^{x^\mu} = \alpha_{\mu+1}, \dots, \alpha_1^{x^\lambda} = \alpha_{\lambda+1}$$

цикла x превосходит k. Так как $\lambda_{\mu+1} \in \Delta_1$, $|\Delta_1| = \gamma+1$, из неравенства (9) следует, что существует такой индекс i $(1 \leq i < k)$, для которого $\alpha_{\mu+i} \in \Delta_1, \alpha_{\mu+i+1} \notin \Delta_1$. Это означает, что

$$\alpha_{\mu+i} \in M_{\alpha_1+\gamma}(x) = M_{\alpha_1+\gamma}(h).$$

Поскольку $\mu = m_{i_j}$ можно выбрать $r+1$ способами, отсюда и из неравенств (14) выводим, что $|M_{\alpha_1+\gamma}(h)| \leq r+1 = \omega(h)+1$. Но это противоречит лемме 2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адо И. Д.* О подгруппах счетных симметрических групп // Докл. АН УССР. 1945. Т. 50. С. 15-17.
2. *Супруненко Д. А.* Группы матриц. М.: Наука, 1972.
3. *Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О группах ограниченных подстановок // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2010. Т. 3, № 2. С. 15-17.
4. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* О подгруппах группы Lim(N) // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208-217.
5. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 7 июля 2024 г.
После доработки 28 августа 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Сучков Николай Михайлович (ORCID 0009-0004-4019-4700),
Шлепкин Алексей Анатольевич (ORCID 0000-0003-2241-2842),
Тауснев Данил Алексеевич (ORCID 0009-0001-1033-6531),
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041
shlyopkin@mail.ru

Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2024. Том 65, № 6

УДК 517.518+517.54

ОЦЕНКА МЕРЫ ПРООБРАЗА ШАРА ПРИ $Q_{q,p}$–ГОМЕОМОРФИЗМАХ

А. О. Томилов

Аннотация. Рассматриваются гомеоморфизмы между областями в евклидовом пространстве, принадлежащие классу Соболева, геометрические свойства которых обусловлены контролем поведения емкости конденсаторов в прообразе через весовую емкость конденсатора в образе. Получена оценка меры прообраза шара и изучено асимптотическое поведение в точке.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.614

Ключевые слова: квазиконформный анализ, пространство Соболева, оператор композиции, емкость конденсатора, мера шара, асимптотика в точке.

1. Введение

Пусть D, D' — открытые области (т. е. открытые связные множества) в $\mathbb{R}^n$. Локально суммируемая функция $\omega : D' \to \mathbb{R}$ называется *весовой*, если $0 < \omega(y) < \infty$ для п. в. $y \in D'$.

Функция $u : D' \to \mathbb{R}$ *принадлежит весовому классу Соболева* $L^1_p(D', \omega)$, $p \in [1, \infty)$, если u локально суммируема в D', а обобщенные производные $\frac{\partial u}{\partial y_j}$ принадлежат $L_p(D', \omega)$ для любого $j = 1, \dots, n$.

Полунорма функции $u \in L^1_p(D', \omega)$ равна

$$\|u\|_{L^1_p(D',\omega)} = \biggl(\int\limits_{D'} |\nabla u|^p \omega(y)\, dy\biggr)^{\frac{1}{p}}.$$

Отображение $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, если $\varphi_j(x)$ принадлежит $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ и обобщенные производные $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ принадлежат $L_{q,\mathrm{loc}}(D)$ для любых $j, i = 1, \dots, n$.

Символом $\mathrm{Lip}_l(D')$ будем обозначать пространство локально липшицевых функций, определенных на области D'.

Будем говорить, что гомеоморфизм φ *порождает ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty,$$

если оператор

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 \le q \le p < \infty, \tag{1}$$

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

действующий по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, где $u \in L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D')$, ограничен: с некоторой постоянной $K_{q,p} < \infty$ справедливо неравенство

$$\|\varphi^* u\|_{L^1_q(D)} \leq K_{q,p} \|u\|_{L^1_p(D')} \quad \text{для всех } u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D', \omega).$$

Конденсатором в области $D' \subset \mathbb{R}^n$ называется пара $E = (F_1, F_0)$ связных компактов (континуумов) в D': $F_1, F_0 \subset D'$. Если континуум F содержится в U, где $U \Subset D'$ — открытое связное компактно вложенное в D' множество, то конденсатор $E = (F, \partial U)$ будем обозначать символом $E = (F, U)$.

Конденсатор $E = (F, U)$ называется *кольцевым*, если дополнение в $\mathbb{R}^n$ к открытому множеству $U \setminus F$ состоит из двух замкнутых связных множеств: ограниченной компоненты — континуума F — и неограниченной — $\mathbb{R}^n \setminus U$.

Непрерывная функция $u \in L^1_p(D', \omega)$ называется *допустимой для конденсатора* (F, U), если $u \equiv 1$ на F и $u \equiv 0$ на ∂U.

Емкость конденсатора (F, U) в весовом пространстве $u \in L^1_p(D', \omega)$ определим как величину

$$\operatorname{cap}\left(E; L^1_p(D', \omega)\right) = \inf \|u\|^p_{L^1_p(D'; \omega)},$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора (F, U) функциям класса $\mathrm{Lip}_l(D'; \omega)$.

Функция Φ, определенная на открытых подмножествах из D' и принимающая неотрицательные значения, называется *счетно-аддитивной функцией множества*, если

1) для всякой точки $x \in D'$ существует δ, $0 < \delta < \operatorname{dist}(x, \partial D')$, такое, что $0 < \Phi(B(x, \delta)) < \infty$;

2) для всякого счетного набора $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ попарно не пересекающихся открытых множеств из D' имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U_i) \leq \Phi(U), \quad \text{где} \quad \bigcup_i U_i \subset U. \tag{2}$$

Первое описание гомеоморфизмов $\varphi : D \to D'$, индуцирующих ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \to L^1_p(D)$, $1 \leq p < \infty$, $\omega \equiv 1$, получено в [1, теорема 8.7; 2, 3]. В работе [4] введено понятие $Q_{q,p}$-гомеоморфизмов, т. е. гомеоморфизмов, удовлетворяющих одному из условий следующей теоремы.

Теорема 1 [4, теорема 1]. *Пусть заданы гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ и весовая локально суммируемая функция $\omega : D' \to (0, \infty)$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ порождает ограниченный оператор*

$$\varphi^* : L^1_p(D', \omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D), \quad 1 < q \leq p < \infty,$$

по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, где $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) *существует ограниченная абсолютно непрерывная счетно-аддитивная функция $\Phi_{q,p}$ при $q < p$, заданная на открытых множествах в D, такая, что для всякого конденсатора $E = (F, U)$, расположенного в D', и прообраза $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$, расположенного в D, выполняются неравенства:*

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\right) \leq \begin{cases} \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\left(E; L^1_p(D'; \omega)\right), & 1 < q < p < \infty, \\ K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\left(E; L^1_p(D'; \omega)\right), & 1 < q = p < \infty; \end{cases} \tag{3}$$

3) *операторная функция искажения*

$$K_{q,p}^{1,\omega}(x) = \begin{cases} \frac{|D\varphi|(x)}{|J(x,\varphi)|^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \text{если } |J(x,\varphi)| \neq 0, \\ 0, & \text{если } |J(x,\varphi)| = 0, \end{cases}$$

принадлежит L_σ, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $q < p$, и $\sigma = \infty$, если $q = p$.

Символ $K_{q,p}^{1,1}(x)$ применяется в тех случаях, когда $\omega \equiv 1$.

Данная теорема содержит в качестве частного случая результаты, полученные в [1–3] (случай $q = p$, $\omega \equiv 1$) и [5–7] ($q \leq p$, $\omega \equiv 1$).

Замечание 2. Вообще класс отображений $Q_{q,p}$ определяется искажением только кубических конденсаторов [8, теорема 18], но в данной работе будем рассматривать кольцевые конденсаторы.

В работе [9] доказана эквивалентность двух подходов к описанию гомеоморфизмов: гомеоморфизм изменяет контролируемым способом емкость образа конденсатора через весовую емкость конденсатора в прообразе тогда и только тогда, когда модуль образа семейства кривых оценивается через весовой модуль исходного семейства кривых.

2. Искажение мер под действием $Q_{q,p}$-гомеоморфизмов

Перейдем к формулировке результатов данной работы.

Теорема 3. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ удовлетворяет одному из условий теоремы 1, ω локально суммируема в D', $\vartheta_{x_0}(r)$ — среднее значение весовой функции ω над сферой $|x - x_0| = r$, Ω_n — объем n-мерного шара единичного радиуса, m — мера Лебега, α — константа, равная половине расстояния от x_0 до границы множества D'. Тогда выполняется оценка меры прообраза шара:*

1) *в случаях, когда $n-1 < q < p \leq n$, $n-1 < q = p < n$ и $r < \alpha$ (или $1 \leq q \leq p \leq 2$, при $n = 2$):*

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \quad (4)$$

2) *в случае $n < q \leq p < \infty$ и $r > \varepsilon > 0$:*

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \geq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_\varepsilon^r \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \quad (5)$$

3) *в случае $n = q \leq p < \infty$ и $r < \alpha$:*

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \exp\left(-n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \int\limits_r^\alpha \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} \Lambda(t)^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}\right). \quad (6)$$

где

$$\Lambda(t) = \frac{1}{|S(x_0,t)|} \int\limits_{S(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi(\gamma)|}{|\det D\varphi(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)}\right)^\sigma d\gamma.$$

Доказательство. Рассмотрим кольцо $A_t = \{x \mid t < |x| < t + \Delta t\}$. Обозначим $F = \overline{B(x_0, t)}$ и $U = B(x_0, t + \Delta t)$. Тогда $E = (F, U)$ и $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F), \varphi^{-1}(U))$ — конденсаторы.

Так как гомеоморфизм φ удовлетворяет условию теоремы 1, выполняется емкостное неравенство

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big). \tag{7}$$

Левую часть этого неравенства можно оценить снизу согласно [12, предложение 5]:

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\big) \geq \frac{\inf m_{n-1}\sigma}{(m(\varphi^{-1}(U) \setminus \varphi^{-1}(F)))^{\frac{q-1}{q}}}. \tag{8}$$

где $H^{n-1}\sigma$ — $(n-1)$-мерная мера Хаусдорфа C^∞-многообразия σ, являющегося границей $\sigma = \partial T$ ограниченного открытого множества T, содержащего $\varphi^{-1}(F)$ и содержащегося вместе со своим замыканием $\overline{T}$ в $\varphi^{-1}(U)$, а точная нижняя грань берется по всем таким σ.

Для оценки правой части неравенства (7) выберем пробную функцию

$$\eta(r) = \begin{cases} \int\limits_0^r \frac{1}{It^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}, & \text{если } r \in (t, t + \Delta t), \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\vartheta_{x_0}(t)$ — среднее значение весовой функции ω над сферой $|x - x_0| = t$,

$$I = \int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}.$$

Выбор данной пробной функции объясняется тем, что при ее использовании правая часть неравенства (7) достигает инфимума среди радиальных функций (подробное доказательство можно увидеть в [10]). Нетрудно убедиться, что $\eta(r) \equiv 1$ на $\overline{B(x_0, t)}$ и $\eta(r) \equiv 0$ на $\partial(B(x_0, t + \Delta t))$, т. е. эта функция является допустимой для конденсатора $E = (F, U)$.

Подставляем эту пробную функцию в правую часть неравенства (7):

$$\Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\big(E; L^1_p(D'; \omega)\big) \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{9}$$

где ζ_{n-1} — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, комбинируя неравенства (6) и (7), получаем

$$\frac{\inf m_{n-1}\sigma}{\big(m\big(\varphi^{-1}(U) \setminus \varphi^{-1}(F)\big)\big)^{\frac{q-1}{q}}} \leq \Phi(U \setminus F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}.$$

Согласно изопериметрическому неравенству

$$\inf m_{n-1}\sigma \geq n\Omega_n^{\frac{1}{n}} (m(\varphi^{-1}(F)))^{\frac{n-1}{n}}.$$

Отсюда

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(m(\varphi^{-1}(F)))^{\frac{n-1}{n}} \leq \Phi(U\backslash F)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(m(\varphi^{-1}(U)\setminus\varphi^{-1}(F)))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{10}$$

Положим $\Theta(t) = m(\varphi^{-1}(B(x_0,t)))$ и $\Psi(t) = \Phi(B(x_0,t))$. Тогда неравенство (8) принимает вид

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq (\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t))^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(\Theta(t+\Delta t)-\Theta(t))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{11}$$

или

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq \left(\frac{\Psi(t+\Delta t)-\Psi(t)}{\Delta t}\right)^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}\left(\frac{\Theta(t+\Delta t)-\Theta(t)}{\Delta t}\right)^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\frac{1}{\Delta t}\int\limits_t^{t+\Delta t} \frac{ds}{s^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(s)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}. \tag{12}$$

Так как $\Theta(t)$ монотонна, можно перейти к пределу при $\Delta t \to 0$:

$$n\Omega_n^{\frac{1}{n}}(\Theta(t))^{\frac{n-1}{n}} \leq (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{pq}} \frac{\zeta_{n-1}^{\frac{1}{p}}(\Theta'(t))^{\frac{q-1}{q}}}{\left(\frac{1}{t^{\frac{n-1}{p-1}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{p-1}{p}}}, \tag{13}$$

для п. в. t. С учетом того, что $\zeta_{n-1} = n\Omega_n$, получаем

$$\frac{n^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}} \leq (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{\Theta'(t)}{(\Theta(t))^{\frac{q(n-1)}{n(q-1)}}}, \tag{14}$$

$$\frac{n^{\frac{q(p-1)}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}(\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}} \leq \frac{\Theta'(t)}{(\Theta(t))^{\frac{q(n-1)}{n(q-1)}}}. \tag{15}$$

В случаях $q < p \leq n$ и $q = p < n$, так как $\Theta(t)$ — монотонная функция, можно написать:

$$\int\limits_r^{\alpha} \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}\ (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}} \leq n^{\frac{q-p}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(n-p)}{pn(q-1)}}\frac{q-1}{q-n}(\Theta(\alpha)^{\frac{q-n}{n(q-1)}} - \Theta(r)^{\frac{q-n}{n(q-1)}}). \tag{16}$$

Отсюда

$$\Theta(r) \leq \left(\Theta(\alpha)^{\frac{q-n}{n(q-1)}} + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{q(p-n)}{pn(q-1)}}\frac{n-q}{q-1}\int\limits_r^{\alpha}\frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}(\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \tag{17}$$

Так как $m(\varphi^{-1}(B(x_0,\alpha))) \leq \Omega_n$, то

$$\Theta(r) \leq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_r^{\alpha} \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}. \tag{18}$$

Согласно [13, формула 3.12]

$$\Psi'(t) = \Bigg[\int\limits_{B(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(y)|}{|\det D\varphi^{-1}(y)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(y)} \right)^{\sigma} dy \Bigg]'$$

$$= \Bigg[\int\limits_0^t dt \int\limits_{S(x_0,t)\setminus Z'} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(\gamma)|}{|\det D\varphi^{-1}(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)} \right)^{\sigma} d\gamma \Bigg]'$$

$$= \int\limits_{S(x_0,t)} \left(\frac{|\operatorname{adj} D\varphi^{-1}(\gamma)|}{|\det D\varphi^{-1}(\gamma)|^{\frac{q-1}{q}} \omega^{\frac{1}{p}}(\gamma)} \right)^{\sigma} d\gamma.$$

Отсюда выводим финальную оценку (4).

В случае $n < q \leq p$ интегрируем неравенство (15) в пределах $[\varepsilon, r]$, $\varepsilon > 0$, что приводит к

$$\Theta(r) \geq \Omega_n \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}} \frac{n-q}{q-1} \int\limits_{\varepsilon}^{r} \frac{dt}{t^{\frac{q(n-1)}{p(q-1)}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{n(q-1)}{q-n}}, \tag{20}$$

после чего, выполняя подстановку (19), приходим к финальной оценке (5).

В случае $n = q \leq p$ неравенство (15) принимает вид

$$\frac{n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-n}{p(n-1)}}} \leq \frac{\Theta'(t)}{\Theta(t)}. \tag{21}$$

Последнее после интегрирования в пределах $[r, \alpha]$ дает оценку

$$\Theta(r) \leq \Omega_n \exp\left\{ -n^{\frac{n(p-1)}{p(n-1)}} \Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}} \int\limits_r^{\alpha} \frac{dt}{t^{\frac{n}{p}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}} (\Psi'(t))^{\frac{p-n}{p(n-1)}}} \right\}, \tag{22}$$

или, с учетом (19), финальную оценку (6).

Замечание 4. Основной результат, доказанный выше, содержит в качестве частного случая некоторые результаты работ [10, 11], в которых рассмотрены случаи $q = p \leq n$ и $n \leq q = p < \infty$. В данной работе доказан более широкий результат, так как рассматриваются условия, простирающиеся за пределы ограничений работ [10, 11]. Продемонстрируем, как на основе результатов теоремы 3 можно вывести одно из утверждений работы [10]. В теореме 3.1 той же работы при условиях $1 < p < n$ и $n \geq 2$ приведена следующая оценка:

$$m(\varphi^{-1}(B(x_0,r))) \leq \Omega_n \left(1 + \frac{n-p}{p-1} \int\limits_r^1 \frac{dt}{t^{\frac{n-1}{p-1}} \vartheta_{x_0}(t)^{\frac{1}{p-1}}}\right)^{\frac{n(p-1)}{p-n}}. \tag{23}$$

Легко убедиться, что при $p = q < n$ данная оценка соответствует оценке (4).

3. Асимптотическое поведение

Оценки теоремы 3 позволяют описать асимптотическое поведение отображения φ в точке.

Теорема 5. *Пусть гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ удовлетворяет условиям теоремы 3, $f = \varphi^{-1}$, $f(0) = 0$. Тогда имеет место оценка*

$$\lim_{x\to 0}\inf \frac{|f(x)|}{R(|x|)} \leq 1,$$

где

1) *в случае $n-1 < q < p \leq n$:*

$$R(|x|) = \left(1 + n^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\Omega_n^{\frac{p-q}{p(q-1)}}\frac{n-q}{q-1}\int\limits_{|x|}^{\alpha}\frac{dt}{t^{\frac{n-1}{q-1}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{q}{p(q-1)}}\Lambda(t)^{\frac{p-q}{p(q-1)}}}\right)^{\frac{1-q}{n-q}};$$

2) *в случае $n = q < p$:*

$$R(|x|) = \exp\left(-n^{\frac{p-n}{p(n-1)}}\Omega_n^{\frac{p-n}{p(n-1)}}\int\limits_{|x|}^{\alpha}\frac{dt}{t^{\frac{n}{p}}\vartheta_{x_0}(t)^{\frac{n}{p(n-1)}}\Lambda(t)^{\frac{p-n}{p(n-1)}}}\right).$$

Доказательство. Положим $l_f(r) = \min\limits_{|x|=r}|f(x)|$. Тогда с учетом условия $f(0) = 0$ получаем $\Omega_n l_f^n(r) \leq m(f(B_r))$, т. е.

$$l_f(r) \leq \left(\frac{m(f(B_r))}{\Omega_n}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Из теоремы 3 следует, что

$$m(f(B_r)) \leq \Omega_n R^n(r).$$

Таким образом, можно написать

$$\lim_{x\to 0}\inf\frac{|f(x)|}{R(|x|)} = \lim_{r\to 0}\inf\frac{l_f(r)}{R(r)} \leq \lim_{r\to 0}\inf\left(\frac{m(f(B_r))}{\Omega_n}\right)^{1/n}\frac{1}{R(r)} \leq 1,$$

откуда и вытекают доказываемые оценки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Водопьянов С. К.* Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.
2. *Водопьянов С. К.* Отображения однородных групп и вложения функциональных пространств // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 25–41.
3. *Водопьянов С. К.* Геометрические аспекты пространств обобщенно-дифференцируемых функций. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 1992.
4. *Водопьянов С. К., Томилов А. О.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 925–951.
5. *Ухлов А. Д.* Отображения, порождающие вложения пространств Соболева // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 1. С. 185–192.
6. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.

7. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.

8. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским, и теория $Q_{q,p}$-отображений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1257–1299.

9. *Водопьянов С. К.* Об эквивалентности двух подходов к задачам квазиконформного анализа // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1252–1270.

10. *Салимов Р. Р.* К теории кольцевых Q-гомеоморфизмов относительно p-модуля // Вісник Дніпропетровського університету. 2007. Т. 9, № 12. С. 119–123.

11. *Salimov R. R., Klishchuk B. A.* Lower bounds for the volume of the image of a ball // Ukrain. Math. J. 2019. V. 71, N 2. P. .

12. *Кругликов В. И.* Емкости конденсаторов и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Мат. сб. 1986. Т. 130, № 2. С. 185–206.

13. *Водопьянов С. К.* О совпадении функций множества в квазиконформном анализе // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 9. С. 3–33.

Поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.
После доработки 6 сентября 2024 г.
Принята к публикации 23 октября 2024 г.

Томилов Алексей Олегович (ORCID 0009-0006-7774-1239)
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
atomilov115@mail.ru

УКАЗАТЕЛЬ

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 30.10.2024. Уч.-изд. л. 17,6. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.11.2024. Объем файла 1.94 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.