ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65 5 2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:
С. С. Гончаров, С. С. Кутателадзе

Редакторы:
В. Л. Береснев, А. А. Лаптев,
А. А. Боровков, В. Д. Мазуров,
А. Ю. Веснин, А. Е. Миронов,
А. Е. Гутман, Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко, А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов, П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин, В. Г. Романов,
А. В. Косточка, Ю. Л. Трахинин

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 65, № 5 (387) **Сентябрь—октябрь, 2024**

СОДЕРЖАНИЕ

Азаров Д. Н. *О π-мощности нисходящих* HNN*-расширений групп* .. **775**

Асеев В. В. *Птолемеева характеристика тетрад и квазирегулярные отображения* **785**

Берестовский В. Н. *Времениподобные и изотропные геодезические Вселенной Гёделя как группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой* **795**

Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А. *Групповые биекции, перестановочные с внутренними автоморфизмами* **808**

Водопьянов С. К. *Функционально-геометрические свойства пределов ACL-отображений с интегрируемым искажением* **820**

Волчков В. В., Волчков Вит. В. *Интерполяция функций с нулевыми шаровыми средними с ограничением роста* **841**

Гаськова М. Н. *Об 1-разрешимости булевых алгебр с одним выделенным идеалом* **852**

Гаянов Н. В., Парусникова А. В. *О содержащих логарифмы формальных решениях q-разностных уравнений* **863**

Гречкосеева М. А., Паньшин В. В. *О распознаваемости по спектру линейных и унитарных групп небольшой размерности* **876**

Грешнов А. В., Жуков Р. И. *Задачи теории управления и теорема Рашевского — Чоу на группе Картана* **901**

Иванова О. А., Мелихов С. Н. *Замечание о голоморфных функциях, рациональных по части переменных* **921**

Карманова М. Б. *Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой* **926**

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Кожанов А. И., Бжеумихова О. И. *Собственные функции и собственные числа дифференциальных уравнений с инволюцией* **953**

Людковский С. В. *Пространства регулярные и полные над топологическими квазигруппами* **965**

Ма С. Ц., Мао Ю. М., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. *О периодических группах, насыщенных конечными простыми унитарными группами степени 4 над конечными полями нечетной характеристики* **985**

Подвигин И. В. *О скоростях сходимости в эргодической теореме Биркгофа* **991**

Ревин Д. О., Шепелев В. Д. *Сильная π-теорема Силова для групп $PSL_2(q)$* **1011**

Романов В. Г. *Обратная задача для нелинейного уравнения переноса* **1022**

Сенниджер А. *О дискретных ортогональных координатах, отвечающих пучкам без кручения над приводимыми спектральными кривыми* **1029**

Адрес редакции:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2024

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.543

О π–МОЩНОСТИ НИСХОДЯЩИХ HNN–РАСШИРЕНИЙ ГРУПП

Д. Н. Азаров

Аннотация. Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN–расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Свойство группы G «быть мощной» не наследуется группой G^* даже в простейшем случае, когда G — бесконечная циклическая группа. Доказано, что если G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения (полициклическая группа), то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* является π-мощной (почти π-мощной), где π — множество всех простых чисел, больших m. Доказаны также некоторые обобщения этого утверждения. Некоторые полученные в работе результаты о мощности нисходящих HNN-расширений являются аналогами хорошо известных теорем о финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.501

Ключевые слова: мощная группа, финитно аппроксимируемая группа, нисходящее HNN-расширение, полициклическая группа, нильпотентная группа, разрешимая группа.

1. Введение

Свойство мощности групп и его модификации в последнее время активно изучаются для групп из некоторых классов, а также для теоретико-групповых конструкций (см., например, [1–4]).

Напомним, что элемент x группы G называется *мощным*, если либо порядок элемента x бесконечен и для любого целого положительного числа n существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n, либо порядок элемента x конечен и для любого целого положительного n, делящего порядок x, существует гомоморфизм группы G на конечную группу, переводящий x в элемент порядка n.

Для элемента бесконечного порядка свойство «быть мощным» (без соответствующего термина) возникло в работе Стиба [5].

Очевидно, что элемент x группы G является мощным тогда и только тогда, когда для каждого целого положительного числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n (делителем бесконечности здесь и всюду далее считается любое целое положительное число).

Группа G называется *мощной*, если все ее элементы являются мощными.

Исследование выполнено за счет гранта Ивановского государственного университета № 2024–04.

© 2024 Азаров Д. Н.

Свойство группы «быть мощной» связано с такими аппроксимационными свойствами, как финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами. Напомним, что группа G называется *финитно аппроксимируемой* (*аппроксимируемой конечными p-группами*), если для любого ее неединичного элемента x существует гомоморфизм группы G на конечную группу (на конечную p-группу), переводящий x в элемент, отличный от 1. Очевидно, что любая мощная группа финитно аппроксимируема. Очевидно также, что любая группа, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p, является мощной.

Здесь исследуется вопрос о том, в какой мере свойство группы G «быть мощной» наследуется нисходящими HNN-расширениями группы G. Другие аппроксимационные свойства нисходящих HNN-расширений (в том числе финитная аппроксимируемость и аппроксимируемость конечными p-группами) исследовались ранее в работах [6–11].

Напомним определение нисходящего HNN-расширения (см., например, [12]). Пусть G — группа, порожденная элементами $a_1, a_2, \dots$ и определяемая множеством соотношений R, и пусть φ — изоморфизм группы G на некоторую ее подгруппу K. Тогда группа

$$G^* = (a_1, a_2, \dots, t; R, t^{-1}a_1t = a_1\varphi, t^{-1}a_2t = a_2\varphi, \dots)$$

называется *нисходящим* HNN-*расширением группы* G, *соответствующим изоморфизму* φ.

Простейшими примерами нисходящих HNN-расширений являются разрешимые группы Баумслага — Солитэра, т. е. группы

$$G(m) = (a, b; b^{-1}ab = a^m),$$

где m — ненулевое целое число. Группа $G(m)$ представляет собой нисходящее HNN-расширение бесконечной циклической группы (a). Очевидно, что группа $G(m)$ наследует от группы (a) свойство мощности, если $|m| = 1$. Если же $|m| \neq 1$, то группа $G(m)$ содержит подгруппу, изоморфную группе m-ичных дробей, и поэтому $G(m)$ уже не наследует от группы (a) свойство мощности. Тем не менее группа $G(m)$ наследует свойство мощности в следующем «ослабленном» виде [3, теорема 1].

Группа $G(m)$ является π-*мощной*, где π — множество всех простых чисел, взаимно простых с m.

Понятие π-мощности вводится следующим образом. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Элемент x группы G будем называть π-*мощным*, если для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует нормальная подгруппа N конечного индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n.

Элемент x группы G будем называть *вполне* π-*мощным*, если для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента x, в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N конечного π-индекса, по модулю которой элемент x имеет порядок n.

В этих определениях делителем бесконечности считается любое целое положительное число.

Группа называется π-*мощной* (*вполне* π-*мощной*), если все ее элементы являются π-мощными (вполне π-мощными).

Сформулированное выше утверждение о π-мощности группы $G(m)$ здесь обобщаем следующим образом.

Теорема 1. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ, и пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если G — вполне π-мощная группа, где π — некоторое множество простых чисел, не делящих m, то G^* — π-мощная группа.

Ниже доказано, что любая группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого p из некоторого множества π простых чисел, является вполне π-мощной. Поэтому частным случаем теоремы 1 является следующий результат.

Теорема 2. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ, и пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого числа p из некоторого множества π простых чисел, не делящих m, то G^* — π-мощная группа.

В связи с формулировкой теоремы 2 заметим, что накладываемому в ней условию конечности общего ранга удовлетворяют все конечно порожденные группы, а также и многие другие группы, в том числе группы, имеющие конечный ранг Прюфера. Напомним, что группа G *имеет конечный общий ранг*, если существует целое положительное число r такое, что любое конечное множество элементов группы G содержится в некоторой ее r-порожденной подгруппе.

В теоремах 1 и 2 предполагается, что индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен. Хорошо известно и легко проверяется, что это условие (независимо от выбора изоморфизма φ группы G на ее подгруппу K) выполняется, если базовая группа G полициклическая, и, в частности, оно выполняется, если G — конечно порожденная нильпотентная группа.

Так как любая конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируема конечными p-группами для любого простого числа p [13], то частным случаем теоремы 2 является следующий результат.

Теорема 3. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее* HNN-*расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.*

Если G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения, то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* является π-мощной, где π — множество всех простых чисел, не делящих m.

Эта теорема усиливает результат Д. И. Молдаванского о финитной аппроксимируемости произвольного нисходящего HNN-расширения свободной нильпотентной группы конечного ранга [6]. В дальнейшем этот результат многократно обобщался в различных направлениях [7–10]. Так, например, в работе Су и Вайза [7] доказано следующее утверждение: *нисходящее* HNN-*расширение полициклической группы финитно аппроксимируемо.*

В отличие от конечно порожденных нильпотентных групп полициклические группы (и даже полициклические группы без кручения) не обладают свойством мощности, но, тем не менее, они обладают этим свойством почти, т. е. содержат мощные подгруппы конечных индексов (см., например, [3]). При переходе от полициклической группы к ее нисходящему HNN-расширению свойство почти мощности наследуется в следующем более слабом виде.

Теорема 4. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.*

Если G — полициклическая группа, то индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен и группа G^* содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G^*, где π — множество всех простых чисел, больших m.

Этот результат усиливает упомянутую выше теорему Су и Вайза.

Полициклические группы и их нисходящие HNN-расширения являются примерами конструктивных разрешимых групп. Класс конструктивных разрешимых групп представляет собой наименьший класс разрешимых групп, замкнутый относительно расширений с помощью конечных групп и нисходящих HNN-расширений [14, п. 11.2.3].

Одним из обобщений теоремы, доказанной Су и Вайзом, является следующий результат [14, п. 11.2.4]: *любая конструктивная разрешимая группа финитно аппроксимируема.*

Этот результат (так же, как и теорема Су и Вайза) может быть дополнен следующим образом.

Теорема 5. *Любая конструктивная разрешимая группа G содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными элементами группы G, где π — некоторое множество, состоящее из почти всех простых чисел.*

Далее приведены доказательства сформулированных выше теорем.

Доказательство теоремы 1 приведено в разд. 2 и основано на методике исследования финитной аппроксимируемости HNN-расширений, разработанной Д. И. Молдаванским [6].

Доказательство теоремы 2 приведено в разд. 3 и сводится к обоснованию того факта, что теорема 2 является частным случаем теоремы 1.

Тот факт, что теорема 3 является частным случаем теоремы 2, обоснован выше.

Доказательство теоремы 5 приведено в разд. 4 и основано на некоторых результатах, относящихся к теории разрешимых групп конечного ранга.

Заметим, что теорема 4 не является следствием теоремы 5, так как она содержит конкретное описание множества π, для которого нисходящее HNN-расширение полициклической группы является почти π-мощной группой. Доказательство теоремы 4 приведено в разд. 5, и оно (так же, как и доказательство теоремы 5) основано на некоторых результатах из теории разрешимых групп конечного ранга.

2. Доказательство теоремы 1

Здесь используется методика изучения аппроксимационных свойств нисходящих HNN-расширений, разработанная Д. И. Молдаванским [6].

Пусть G — группа, H и K — некоторые изоморфные подгруппы группы G, φ — изоморфизм подгруппы H на подгруппу K. Пусть

$$G^* = (G, t; t^{-1}Ht = K, \varphi)$$

— HNN-расширение группы G с подгруппами H и K, связанными относительно изоморфизма φ. Это означает, что группа G^* в системе порождающих, состоящей из порождающих группы G и проходной буквы t, определяется всеми

определяющими соотношениями группы G и соотношениями вида $t^{-1}ht = h\varphi$, где $h \in H$.

Следуя Д. И. Молдаванскому [6], подгруппу N группы G будем называть (H, K, φ)-*совместимой*, если $(N \cap H)\varphi = N \cap K$.

Если N — нормальная (H, K, φ)-совместимая подгруппа группы G, то отображение φ_N, определенное по правилу $(hN)\varphi_N = h\varphi N$, где $h \in H$, является изоморфизмом между подгруппами HN/N и KN/N фактор-группы G/N. Пусть

$$G^*_N = (G/N, t; t^{-1}HN/Nt = KN/N, \varphi_N)$$

— HNN-расширение группы G/N с подгруппами HN/N и KN/N, связанными относительно изоморфизма φ_N. Обозначим через ρ_N гомоморфизм группы G^* на группу G^*_N, действующий тождественно на t и продолжающий естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N.

Предположим теперь, что $H = G$, т. е. что G^* — нисходящее HNN-расширение группы G. В этом случае (G, K, φ)-совместимость подгруппы N группы G означает, что $N\varphi = N \cap K$. Если N — нормальная (G, K, φ)-совместимая подгруппа группы G, то φ_N — изоморфизм группы G/N на ее подгруппу KN/N и

$$G^*_N = (G/N, t; t^{-1}G/Nt = KN/N, \varphi_N)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G/N. Если к тому же N имеет конечный индекс в G, то φ_N — автоморфизм группы G/N, и в этом случае группа G^*_N представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью бесконечной циклической группы.

Лемма 1. *Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K. Пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.*

Если N — вполне характеристическая подгруппа конечного индекса группы G и индекс $[G : N]$ взаимно прост с m, то подгруппа N является (G, K, φ)-совместимой, т. е. $N\varphi = N \cap K$.

Доказательство. Так как подгруппа N вполне характеристическая, то $N\varphi \subseteq N$. Очевидно также, что $N\varphi \subseteq K$. Таким образом, $N\varphi \subseteq N \cap K$. Поэтому для доказательства равенства $N\varphi = N \cap K$ остается проверить, что индексы $[G : N \cap K]$ и $[G : N\varphi]$ конечны и совпадают между собой.

Так как φ — изоморфизм группы G на подгруппу K, то $[G : N] = [K : N\varphi]$. Отсюда и из того, что $N\varphi \subseteq K \subseteq G$, получаем:

$$[G : N\varphi] = [G : K][K : N\varphi] = [G : K][G : N] = [G : N \cap K].$$

Последнее равенство в этой цепочке имеет место в силу взаимной простоты индексов $[G : N]$ и $[G : K]$. Таким образом, индексы $[G : N \cap K]$ и $[G : N\varphi]$ конечны и совпадают между собой. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть G — группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K, G^* — нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ. Пусть индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен.

Предположим, что G — вполне π-мощная группа, где π — некоторое множество простых чисел, не делящих m. Покажем, что G^* — π-мощная группа.

Заметим прежде всего, что произвольный элемент группы G^* может быть записан в виде $t^r a t^{-s}$, где $a \in G$. Поэтому произвольный элемент из G^* сопряжен с элементом $t^k a$, где $a \in G$, и для доказательства π-мощности группы G^* достаточно проверить π-мощность только для элементов вида $t^k a$, где $a \in G$.

Если $k \neq 0$, то π-мощность элемента $t^k a$ очевидна. В самом деле, рассмотрим гомоморфизм группы G^* на бесконечную циклическую группу (t), действующий тождественно на t и переводящий все элементы из G в 1. Образ t^k элемента $t^k a$ относительно этого гомоморфизма является π-мощным элементом бесконечной циклической группы (t). Поэтому $t^k a$ — π-мощный элемент группы G^*.

Остается доказать π-мощность в G^* элемента $t^k a$ при $k = 0$, т. е. π-мощность в G^* произвольного элемента a из базовой подгруппы G. Так как G — вполне π-мощная группа, элемент a вполне π-мощный в G, т. е. для любого целого положительного π-числа n, делящего порядок элемента a, в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N конечного π-индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок n. Так как простые числа из π не делят m, индекс $[G : N]$ взаимно прост с m. Таким образом, подгруппа N удовлетворяет условиям леммы 1, в силу которой подгруппа N является (G, K, φ)-совместимой. Поэтому можно рассмотреть изоморфизм φ_N группы G/N на ее подгруппу KN/N и соответствующее нисходящее HNN-расширение $G^*_N = (G/N, t; t^{-1}G/Nt = KN/N, \varphi_N)$ группы G/N, а также введенный выше гомоморфизм ρ_N группы G^* на группу G^*_N, действующий тождественно на t и продолжающий естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу G/N. Как отмечалось выше, группа G^*_N представляет собой расщепляемое расширение конечной группы G/N с помощью бесконечной циклической группы. Поэтому группа G^*_N финитно аппроксимируема. По построению подгруппы N порядок элемента $aN = a\rho_N$ группы G^*_N равен n. Отсюда и из финитной аппроксимируемости группы G^*_N следует, что существует гомоморфизм ρ группы G^*_N на конечную группу такой, что порядок элемента $a\rho_N\rho$ равен n. Тем самым доказана π-мощность в G^* произвольного элемента a из базовой подгруппы G.

Теорема 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть K — конечная группа, $\operatorname{Var} K$ — многообразие групп, задаваемое всеми тождествами группы K. Хорошо известно, что все конечно порожденные группы из многообразия $\operatorname{Var} K$ конечны (см., например, [15, гл. 5, п. 2, упражнение д8]). В [10, лемма 1] это утверждение обобщено следующим образом: любая группа конечного общего ранга из многообразия $\operatorname{Var} K$ конечна. Отсюда легко выводится следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть G — группа конечного общего ранга, и пусть M — нормальная подгруппа конечного π-индекса группы G, где π — некоторое множество простых чисел. Тогда в группе G существует вполне характеристическая (и даже вербальная) подгруппа V конечного π-индекса такая, что $V \subseteq M$.*

Доказательство. Пусть

$$(f_i(x_1, x_2, \dots) = 1)_{i \in I}$$

— система всех тождеств группы G/M. Обозначим через V вербальную подгруппу группы G, порожденную всеми ее элементами $f_i(h_1, h_2, \dots)$, где $i \in I, h_1 \in G, h_2 \in G, \dots$. Тогда $V \subseteq M$ и $G/V \in \operatorname{Var} G/M$. Отсюда и из того, что группа G/V имеет конечный общий ранг, а группа G/M конечна, в силу отмеченного выше результата [10, лемма 1] следует конечность группы G/V. Так как G/M — конечная π-группа, в ней выполняется тождество $x^m = 1$, где

m — π-число. А поскольку $G/V \in \operatorname{Var} G/M$, то и в группе G/V выполняется тождество $x^m = 1$. Поэтому G/V — конечная π-группа. Лемма доказана.

Пусть G — произвольная группа, n — целое неотрицательное число. Через G^n далее будем обозначать степенную подгруппу, т. е. подгруппу группы G, порожденную n-ми степенями всех ее элементов. Очевидно, что G^n — вполне характеристическая подгруппа группы G, и фактор-группа G/G^n является периодической группой с тождеством $x^n = 1$. Очевидно также, что если P — неединичная конечная p-группа, то $P^p \neq P$, и поэтому ряд $P = P_1 > P_2 > \dots$, где $P_{i+1} = {P_i}^p$ для каждого $i = 1, 2, \dots$, строго убывает и стабилизируется на единичной подгруппе группы P.

Лемма 3. *Любая конечная p-группа является вполне p-мощной. Иными словами, для каждого элемента a конечной p-группы P и для каждого делителя p^k порядка элемента a в группе P существует вполне характеристическая подгруппа Q такая, что порядок элемента a по модулю подгруппы Q равен p^k.*

Доказательство. Рассмотрим в группе P вполне характеристический ряд $P = P_1 > P_2 > \dots > P_r = 1$, где $P_{i+1} = {P_i}^p$ для каждого $i = 1, 2, \dots, r-1$. Так как элемент $a^{p^{k-1}}$ отличен от 1, то найдется индекс j такой, что элемент $a^{p^{k-1}}$ принадлежит P_j, но не принадлежит P_{j+1}. Очевидно, что порядок элемента a по модулю вполне характеристической подгруппы $Q = P_{j+1}$ равен p^k. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами. Тогда G — вполне p-мощная группа. Иными словами, для каждого элемента a группы G и для каждого делителя p^k порядка элемента a в группе G существует вполне характеристическая подгруппа конечного p-индекса, по модулю которой порядок элемента a равен p^k.*

Доказательство. Пусть a — неединичный элемент группы G, и пусть p^k — делитель порядка элемента a. Тогда элемент $a^{p^{k-1}}$ отличен от 1. Отсюда и из того, что G аппроксимируема конечными p-группами, следует, что в группе G существует нормальная подгруппа M конечного p-индекса, не содержащая элемент $a^{p^{k-1}}$. По лемме 2 в группе G существует вполне характеристическая подгруппа V конечного p-индекса такая, что $V \subseteq M$. Так как $a^{p^{k-1}}$ не принадлежит V, то p^k делит порядок элемента aV конечной p-группы G/V. По лемме 3 в группе G/V существует вполне характеристическая подгруппа Q/V, по модулю которой порядок элемента aV равен p^k. Очевидно, что Q — вполне характеристическая подгруппа конечного p-индекса группы G и порядок элемента a по модулю подгруппы Q равен p^k. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть G — группа конечного общего ранга, аппроксимируемая конечными p-группами для каждого простого p и некоторого множества π простых чисел. Тогда G — вполне π-мощная группа.*

Доказательство. Если множество π состоит из одного простого числа p, то утверждение леммы 5 совпадает с леммой 4. Поэтому далее будем считать, что множество π содержит более одного простого числа. Тогда группа G аппроксимируема конечными p-группами по крайней мере для двух значений числа p. Поэтому произвольный неединичный элемент a группы G имеет бесконечный порядок. Пусть n — целое положительное π-число, $n = {p_1}^{k_1} {p_2}^{k_2} \dots {p_r}^{k_r}$ — разложение числа n на простые множители. По условию леммы для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ группа G аппроксимируема конечными p_i-группами. Поэтому в

силу леммы 4 для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$ в группе G существует вполне характеристическая подгруппа N_i конечного p_i-индекса, по модулю которой элемент a имеет порядок ${p_i}^{k_i}$. Тогда подгруппа $N = N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_r$ вполне характеристична в G, имеет конечный π-индекс и порядок элемента a по модулю подгруппы N равен n. Лемма доказана.

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1 в силу леммы 5.

4. Доказательство теоремы 5

Здесь используются некоторые результаты, относящиеся к теории разрешимых групп конечного ранга.

Группы конечного ранга составляют подкласс в классе всех групп конечного общего ранга. Напомним, что группа G имеет *конечный ранг* (или, в другой терминологии, *конечный ранг Прюфера*), если существует целое положительное число r такое, что любая конечно порожденная подгруппа группы G порождается не более чем r элементами.

Фундаментальный результат Робинсона утверждает, что разрешимая группа конечного ранга финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда она редуцирована, т. е. не содержит квазициклических подгрупп и подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел [14, следствие 5.3.2]. Другие аппроксимационные свойства разрешимых групп конечного ранга исследуются в [16] (см. также [17]).

Важным подклассом в классе всех разрешимых групп конечного ранга является класс всех разрешимых минимаксных групп. Напомним, что группа G называется *минимаксной*, если в ней существует конечный субнормальный ряд, каждый фактор которого удовлетворяет условию минимальности для подгрупп или условию максимальности для подгрупп. Примерами разрешимых минимаксных групп являются разрешимые группы с условием минимальности для подгрупп, которые называются также *черниковскими группами* и представляют собой конечные расширения прямых произведений конечного числа квазициклических групп. Другим важным примером разрешимых минимаксных групп являются полициклические группы. Напомним, что полициклические группы могут быть охарактеризованы как разрешимые группы с условием максимальности для подгрупп. Класс всех конструктивных разрешимых групп занимает промежуточное положение между классом всех полициклических групп и классом всех разрешимых минимаксных групп.

С учетом сказанного выше очевидно, что любая разрешимая минимаксная группа G является поли (циклической, квазициклической), т. е. обладает конечным субнормальным рядом, каждый фактор которого является либо циклической группой, либо квазициклической группой. Рассмотрим множество всех простых чисел p, для которых квазициклическая группа типа p^∞ присутствует среди факторов указанного выше рада. Это множество является конечным, не зависит от выбора ряда и называется *спектром* группы G. Полициклические группы — это в точности разрешимые минимаксные группы с пустым спектром.

Классический результата Баумслага (см., например, [14, п. 11.2.4]) утверждает, что любая конструктивная разрешимая группа является редуцированной разрешимой минимаксной группой. С учетом сформулированного выше результата Робинсона этот результат допускает следующую формулировку.

Предложение 1. *Пусть G — конструктивная разрешимая группа. Тогда G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа.*

С другой стороны, в [3] доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть G — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа, π — множество всех простых чисел, не принадлежащих спектру группы G.*

Тогда группа G содержит подгруппу без кручения конечного индекса, все элементы которой являются π-мощными в группе G, и, в частности, группа G является почти π-мощной.

Справедливость теоремы 5 непосредственно вытекает из предложений 1 и 2.

5. Доказательство теоремы 4

Справедливость теоремы 4 вытекает из предложения 2 и следующей леммы.

Лемма 6. *Пусть G — полициклическая группа, φ — изоморфизм группы G на ее подгруппу K,*

$$G^* = (G, t; t^{-1}Gt = K, \varphi)$$

— нисходящее HNN-расширение группы G, соответствующее изоморфизму φ.

Тогда индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен, группа G^* является финитно аппроксимируемой разрешимой минимаксной группой и спектр группы G^* содержится в множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$.

Доказательство. Очевидно, что индекс $m = [G : K]$ подгруппы K в группе G конечен. Так как G^* — конструктивная разрешимая группа, по предложению 1 G^* — финитно аппроксимируемая разрешимая минимаксная группа.

Пусть F — нормальное замыкание подгруппы G в группе G^*. Так как фактор-группа группы G^* по подгруппе F является бесконечной циклической группой, спектр группы G^* совпадает со спектром подгруппы F.

Для каждого целого неотрицательного числа i введем следующее обозначение: $G_i = t^iGt^{-i}$. Подгруппы G_i обладают следующими очевидными свойствами: G_0 — полициклическая группа, $G_0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \ldots$, $G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup \cdots = F$ и $[G_{i+1} : G_i] = m$ для любого целого неотрицательного числа i.

Пусть X — подгруппа группы F, Y — нормальная подгруппа группы X, $P = X/Y$ — фактор-группа группы X по подгруппе Y. Для каждого целого неотрицательного числа i обозначим через P_i образ подгруппы $G_i \cap X$ относительно естественного гомоморфизма группы X на фактор-группу $P = X/Y$.

Из перечисленных выше свойств подгрупп G_i следует, что подгруппы P_i обладают следующими свойствами: P_0 — полициклическая группа, $P_0 \leq P_1 \leq P_2 \leq \ldots$, $P_0 \cup P_1 \cup P_2 \cup \cdots = P$ и $[P_{i+1} : P_i] \leq m$ для любого целого неотрицательного числа i.

Отсюда следует, что группа P не может быть квазициклической типа p^∞ ни для какого простого числа p, большего m. Поэтому спектр группы F, а значит, и совпадающий с ним спектр группы G^*, содержится в множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wong P. C., Tang C. K., Gan H. W.* Weak potency of fundamental groups of graphs of groups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2010. V. 33, N 2. P. 243–251.
2. *Азаров Д. Н.* О слабой π-мощности некоторых групп и свободных произведений // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1199–1211.
3. *Азаров Д. Н.* О почти мощности некоторых групп и свободных конструкций // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1023–1033.

4. *Азаров Д. Н.* О почти мощности групп автоморфизмов и расщепляемых расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.
5. *Stibe P.* Conjugacy separability of certain free products with amalgamation // Trans. Am. Math. Soc. 1971. V. 156. P. 119–129.
6. *Молдаванский Д. И.* Финитная аппроксимируемость нисходящих HNN-расширений групп // Укр. мат. журн. 1992. Т. 44. С. 842–845.
7. *Hsu T., Wise D.* Ascending HNN-extensions of polycyclic groups are residually finite // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 182, N 1. P. 65–78.
8. *Rhemtulla A. H., Shirvani M.* The residual finiteness of ascending HNN-extensions of certain soluble groups // Illinois J. Math. 2003. V. 47. P. 477–484.
9. *Borisov A., Sapir M.* Polynomial maps over finite fields and residual finiteness of mapping tori of group endomorphisms // Invent. Math. 2005. V. 160. P. 341–356.
10. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 96, № 2. С. 163–169.
11. *Азаров Д. Н.* О почти аппроксимируемости конечными p-группами нисходящих HNN-расширений // Чебышевский сб. 2012. Т. 13, № 1. С. 9–19.
12. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.
13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. London Math. Soc. 1957. V. 3, N 7. P. 29–62.
14. *Lennox J., Robinson D.* The theory of infinite soluble groups. Oxford: Clarendon Press, 2004.
15. *Каргаполов М. И, Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.
16. *Азаров Д. Н.* Аппроксимируемость разрешимых групп конечного ранга некоторыми классами конечных групп // Изв. вузов. Математика. 2014. № 8. С. 18–29.
17. *Wehrfritz B. A. F.* Remarks on Azarov's work on soluble groups of finite rank // Boll. Unione Mat. Ital. 2016. doi:10.1007/s40574-015-0047-8.

Поступила в редакцию 15 марта 2024 г.
После доработки 15 марта 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Азаров Дмитрий Николаевич
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
azarovdn@mail.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.54

ПТОЛЕМЕЕВА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕТРАД И КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В. В. Асеев

Аннотация. Рассматривается птолемеева характеристика четверки непустых попарно не пересекающихся компактных подмножеств (обобщенных тетрад). Основная теорема в этой статье утверждает, что любое многозначное отображение F пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, у которого образы различных точек не пересекаются и каждый из них содержит не более двух различных точек, является обратным к K-квазимероморфному отображению тогда и только тогда, когда F имеет контролируемую верхнюю оценку искажения птолемеевой характеристики тетрад.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.502

Ключевые слова: отображение с ограниченным искажением, квазирегулярное отображение, квазимероморфное отображение, квазимёбиусово отображение, многозначное отображение, птолемеева характеристика тетрад.

Введение

Пространственные отображения с ограниченным искажением были впервые введены и изучены в работах Ю. Г. Решетняка в середине прошлого века и впоследствии появились в статьях финских математиков под названием «квазирегулярные отображения». Их обобщение на пространство $\overline{\mathbb{R}}^n$ получило название «квазимероморфные отображения».

Многозначные квазимёбиусовы отображения в пространствах, наделенных птолемеевой мёбиусовой структурой (в смысле С. В. Буяло), были введены в [1] как отображения со свойством ω-BAD (bouded angular distortion). Свойство квазимёбиусовости определялось в [2] как контролируемое искажение абсолютного двойного отношения тетрад (четверок различных точек) при инъективных отображениях метрических пространств. Там же были отмечены связи между квазимёбиусовостью, квазисимметричностью и квазиконформностью отображений. В [3] было замечено, что птолемееву характеристику тетрад можно с тем же успехом использовать в определении квазимёбиусовости, как и абсолютное двойное отношение. Чтобы распространить понятие квазимёбиусовости на случай неинъективных отображений птолемееву характеристику пришлось определить для четверок попарно не пересекающихся множеств в метрических (или полуметрических) пространствах (для так называемых обобщенных тетрад), что и было сделано в [1]. В результате был получен класс многозначных отображений с контролируемым искажением птолемеевой характеристики тетрад, которые изучались в [4–6] как многозначные квазимёбиусовы отображения.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0005).

© 2024 Асеев В. В.

Один из основных вопросов в теории таких отображений заключался в установлении связи между квазимероморфными отображениями пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ из работ [7–9] и многозначной квазимёбиусовостью обратных к ним отображений.

Для натуральных $n \geq 2$ и $N \geq 1$ рассматривается семейство $\mathscr{F}(K; N, n)$ всех K-квазимероморфных отображений $f : \overline{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}^n}$, у которых $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, и соответствующее семейство $\mathscr{F}^{-1}(K; N, n)$ обратных к ним многозначных отображений. Вместе с этим рассматривается семейство $\mathscr{Q}M^*(\omega; N, n)$ всех многозначных отображений F пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ таких, что $\#F(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{\mathbb{R}^n}$, $F(\overline{\mathbb{R}^n}) = \overline{\mathbb{R}^n}$, и при этом для каждой тетрады Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ с птолемеевой характеристикой $\beta(\Psi)$ выполняется оценка $\beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi))$ с заданной контрольной функцией $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$.

В [10] было доказано включение $\mathscr{F}^{-1}(K; N, n) \subset \mathscr{Q}M^*(\omega; N, n)$ для всех $n \geq 2$ и $N \geq 1$ с контрольной функцией ω, зависящей только от K, n, N. Обратное включение $\mathscr{Q}M^*(\omega; N, n) \subset \mathscr{F}^{-1}(K; N, n)$ было получено в [6] только для $n = 2$, $N \geq 1$. В данной статье доказана справедливость этого включения для случая $n > 2$, $N = 2$ (теорема 4.1).

§ 1. Свойство ω-BAD

Пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$ наделяем хордовой метрикой $\sigma(\cdot, \cdot)$. Семейство всех непустых компактных множеств в $\overline{\mathbb{R}^n}$ обозначаем через $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$. *Тетрада* Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ есть четверка попарно различных точек, разбитая на две пары: $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$.

Птолемеева характеристика тетрады Ψ определяется формулой

$$\beta(\Psi) = \beta(a_1, a_2; b_1, b_2) := \frac{\sigma(a_1, b_1) \cdot \sigma(a_2, b_2) + \sigma(a_1, b_2) \cdot \sigma(a_2, b_1)}{\sigma(a_1, a_2) \cdot \sigma(b_1, b_2)}. \tag{1.0.1}$$

По теореме Птолемея для любой тетрады Ψ в $\overline{\mathbb{R}^n}$ выполняется неравенство $\beta(\Psi) \geq 1$. Если все точки тетрады Ψ лежат в $\mathbb{R}^n$, то хордовые расстояния в формуле (1.0.1) можно заменить евклидовыми расстояниями.

Аналогично *обобщенная тетрада* $(A_1, A_2; B_1, B_2)$ — это четверка непустых и попарно не пересекающихся множеств в $\overline{\mathbb{R}^n}$, разбитая на две пары. Ее птолемеева характеристика есть

$$\beta(A_1, A_2; B_1, B_2) := \max_{u_1 \in A_1; u_2 \in A_2} \{ \min_{v_1 \in B_1; v_2 \in B_2} \beta(u_1, u_2; v_1, v_2) \}. \tag{1.0.2}$$

Для заданного открытого множества $\Omega \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, натурального $N \geq 1$ и гомеоморфизма $\omega : [0, \infty) \to [0, +\infty)$ обозначим через $\mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ семейство всех многозначных отображений $F : \Omega \to \mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}}^n)$ таких, что

(1.0.3) множество $F(\Omega) := \bigcup \{F(y) : y \in \Omega\}$ открыто в $\overline{\mathbb{R}}^n$;

(1.0.4) (*гиперинъективность*) если $y' \neq y''$, то $F(y') \cap F(y'') = \varnothing$;

(1.0.5) $\#F(y) \leq N$ для всех $y \in \Omega$;

(1.0.6) (свойство ω-BAD) для любой тетрады $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ выполняется неравенство

$$\beta(F(\Psi)) = \beta(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2)) \leq \omega(\beta(\Psi)).$$

1.1. *Любое многозначное отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ непрерывно, т. е.*

$$F(y_0) = \operatorname*{Lim}_{y \to y_0; y \neq y_0} F(y) \tag{1.1.0}$$

в любой точке $y_0 \in \Omega$. Кроме того, левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ (оно существует в силу условия (1.0.4) *гиперинъективности) является непрерывным, открытым, замкнутым и дискретным в $F(\Omega)$.*

Доказательство. В силу (1.0.5) и (1.0.6) отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ удовлетворяет всем условиям теоремы [5, теорема 3.2], а именно: метрическое пространство $(\overline{\mathbb{R}^n}, \sigma)$ птолемеево и компактно, отображение $F : \Omega \to F(\Omega)$ имеет свойство ω-BAD и $F(y)$ компактно для любой точки $y \in \Omega$. По этой теореме для любой точки $y_0 \in \Omega$ и любой открытой окрестности V множества $F(y_0)$ существует такая окрестность U точки y_0, что $F(U) \subset V$. Согласно определению из [11, § 18.I(3)] это означает, что F полунепрерывно сверху в каждой точке $y_0 \in \Omega$, а следовательно (см. [11, § 18.I, теорема 1]), F непрерывно сверху в Ω. Так как отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ удовлетворяет условиям теоремы 6.2 из [1], получаем следующее утверждение: *в каждой точке $x_0 \in F(\Omega)$ отображение f либо непрерывно* (*случай* 1)*, либо в произвольно малой окрестности этой точки принимает все значения из Ω кроме, возможно, одного* (*случай* 2).

В открытом множестве $\Omega \setminus \{f(x_0)\}$ имеется пара различных точек a и b. По условию гиперинъективности (1.0.4) множества $F(a)$, $F(b)$ и $F(x_0)$ компактны и попарно не пересекаются. Значит, существует окрестность $U \subset F(\Omega)$ точки $x_0 \in F(f(x_0))$, не пересекающаяся с $F(a)$ и $F(b)$. Так как f не принимает в U значения a и b, то случай 2 не реализуется и, следовательно, реализуется случай 1, т. е. f непрерывно в каждой точке $x_0 \in F(\Omega)$ и тем самым f непрерывно на множестве $F(\Omega)$.

Так как (см. [11, § 18.I, теорема 4]) непрерывное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ замкнуто тогда и только тогда, когда отображение $F = f^{-1}$ полунепрерывно сверху, то f — замкнутое отображение.

Для любой точки $y \in \Omega$ множество $F(y)$ не имеет внутренних точек относительно открытого множества $F(\Omega)$ в силу (1.0.5). Теорема 2.2 из [4] утверждает, что в этой ситуации отображение f открыто.

Таким образом, f — открытое и дискретное (в силу (1.0.5)) отображение.

Теорема 4 из [11, § 18.I] утверждает, что непрерывное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ открыто тогда и только тогда, когда $F = f^{-1}$ полунепрерывно снизу. Значит, отображение F полунепрерывно снизу.

Таким образом, многозначное отображение F, будучи полунепрерывным сверху и снизу, непрерывно относительно экспоненциальной топологии в гиперпространстве $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$ (см. [11, § 17.I, § 42.I]). Так как $\overline{\mathbb{R}^n}$ — компактное метрическое пространство, то экспоненциальная топология в $\mathrm{Comp}(\overline{\mathbb{R}^n})$ совпадает с топологией, порожденной расстоянием по Хаусдорфу, и с топологией, порожденной топологическим пределом Lim (см. [11, § 42.II, замечание 1]). Таким образом, доказано (1.1.0), и это завершает доказательство утверждения 1.1.

§ 2. О нормальных окрестностях

Напомним некоторые важные свойства непрерывных открытых и дискретных отображений в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

2.1. Лемма [7, лемма 2.9]. *Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество Ω. Тогда у любой точки $x_0 \in D$ с образом $y_0 := f(x_0)$ существует положительное число $r^*(x_0)$ такое, что при $0 < r < r^*(x_0)$ замкнутый шар $\overline{B}(y_0, r)$ лежит в Ω, а x_0-компонента $U(r)$ множества $f^{-1}(B(y_0, r))$ имеет следующие свойства:*

(2.1.1) $\overline{U(r)}$ — *компактное подмножество в* D;

(2.1.2) $f(U(r)) = B(y_0, r)$;

(2.1.3) $f(\partial U(r)) = \partial B(y_0, r)$;

(2.1.4) $\overline{U(r)} \cap f^{-1}(y_0) = \{x_0\}$;

(2.1.5) $\overline{U(r)} \to \{x_0\}$ *при* $r \to 0$;

(2.1.6) *если* $0 < s < r \le r^*(x_0)$, *то* $U(r) \setminus \overline{U(s)}$ *является кольцевой областью и* $f(U(r) \setminus \overline{U(s)}) = B(y_0, r) \setminus \overline{B}(y_0, s)$.

Указанное здесь множество $U(r)$ называется (*канонической*) *нормальной окрестностью* точки x_0 и обозначается символом $U(x_0, f, r)$.

2.2. Утверждение. *Пусть отображение* $f : D \to \Omega$ *открытого множества* $D \subset \mathbb{R}^n$ *на открытое множество* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *таково, что* $F = f^{-1} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$. *Для каждой точки* $y_0 \in \Omega$ *положим* $\Delta(y_0) := \min\{|x' - x''|/3 : x', x'' \in F(y_0), x' \ne x''\}$, *если* $\#F(y_0) > 1$, *и* $\Delta(y_0) = 1$, *если* $\#F(y_0) = 1$. *Пусть* $\Delta_0(y_0) < \Delta(y_0)$ *выбрано так, чтобы* $\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) \subset D$ *при любом* $x \in F(y_0)$.

Тогда существует положительное число $\delta^*(y_0) < \min\{r^*(x) : x \in F(y_0)\}$ *такое, что при любом* $0 < r \le \delta^*(y_0)$ *канонические нормальные окрестности* $U(x, f, r)$ *точек* $x \in F(y_0)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

(2.2.1) $\overline{U}(x, f, r) \subset \overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) \subset D$ *при* $x \in F(y_0)$;

(2.2.2) $F(\overline{B}(y_0, r)) = f^{-1}(\overline{B}(y_0, r)) = \bigsqcup\{\overline{U}(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$;

(2.2.3) *ограничение* $F|_{\overline{B}(y_0,r)}$ *имеет то же самое свойство* ω-BAD, *что и* F.

Доказательство. Согласно 1.1 отображение $f : D \to \Omega$ непрерывное, открытое и дискретное. Поэтому оно удовлетворяет требованиям леммы 2.1 и, следовательно, можно рассматривать канонические нормальные окрестности $U(x, f, r)$.

Пусть $y_0 \in \Omega$. Так как $\#F(y_0) \le N$, существует положительное число $\Delta_0(y_0)$, указанное в формулировке, и получаем конечный набор $\{\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ попарно не пересекающихся замкнутых шаров в D. В обозначениях леммы 2.1 из свойства (2.1.5) вытекает, что для каждой точки $x \in F(y_0)$ имеется положительное число $r(x) < r^*(x)$ такое, что $U(x, f, r) \subset B(x, \Delta_0(y_0))$ при всех $0 < r < r(x)$.

Положив $\delta' := \min\{r(x) : x \in F(y_0)\}$, для каждого $0 < r < \delta'$ получаем конечный набор $\{U(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$ канонических нормальных окрестностей, удовлетворяющих условию (2.2.1).

Так как $B := \bigsqcup\{B(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ — открытая окрестность множества $F(y_0)$, а отображение F непрерывно (и, в частности, полунепрерывно сверху) в точке y_0, то существует положительное число $\delta^*(y_0) < \delta'$, для которого $F(B(y_0, r)) \subset B$, как только $r < \delta^*(y_0)$. Тогда каждая компонента U открытого множества $F(B(y_0, r)) = f^{-1}(B(y_0, r))$ содержится в B и поэтому имеет компактное замыкание в D. В силу [7, лемма 2.5] U является нормальной областью для отображения f и тем самым $f(U) = B(y_0, r)$.

Отсюда вытекает, что $U = U(x, f, r)$ для некоторой точки $x \in F(y_0)$. Таким образом, $f^{-1}(B(y_0, r)) = \bigsqcup\{U(x, f, r)) : x \in F(y_0)\}$, и это означает выполнение (2.2.2) при любом $0 < r < \delta^*(y_0)$.

В силу (2.2.2) $F(\Psi) \subset \bigcup\{\overline{U}(x, f, r) : x \in F(y_0)\}$ для любой тетрады Ψ в $\overline{B}(y_0, r)$. Это означает, что $F|_{\overline{B}(y_0,r)}(\Psi) = F(\Psi)$, и получаем оценку

$$\beta(F|_{\overline{B}(y_0,r)}(\Psi)) \le \omega(\beta(\Psi)).$$

Следовательно, для любого положительного $r < \delta^*(y_0)$ выполняется (2.2.3).

Утверждение 2.2 доказано.

§ 3. О квазирегулярных отображениях

Будем использовать метрическое определение квазирегулярного отображения, следуя [7].

3.1. Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Точку $x_0 \in D$ называют *регулярной* для f, если f инъективно в некоторой окрестности этой точки; в противном случае x_0 называют *точкой ветвления* отображения f. Множество $B_f \subset D$ всех точек ветвления для f замкнуто относительно D и имеет топологическую размерность $\leq n-2$ (см. [7, лемма 2.11]). Если D_0 — некоторая компонента множества D, то $D_0 \setminus B_f$ есть область, и ограничение $f|_{D_0}$ либо сохраняет ориентацию в D_0, либо меняет ее на противоположную.

3.2 [7, определение 4.2]. Пусть $x_0 \in D$, $y_0 = f(x_0) \in \Omega$ и $U(x_0, f, r)$ — каноническая нормальная окрестность точки x_0, где $0 < r < r^*(x_0)$. Число (возможно, ∞)

$$H^*(x_0, f) := \limsup_{r \to 0} \frac{\max\{|u - x_0| : u \in \partial U(x_0, f, r)\}}{\min\{|u - x_0| : u \in \partial U(x_0, f, r)\}} \tag{3.2.1}$$

называется *обратной линейной дилатацией* отображения f в точке x_0.

3.3. Определение [7, теорема 4.14]. Непрерывное, открытое и дискретное отображение $f : D \to \Omega$ открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется K^*-*квазирегулярным* с $1 \leq K^* < \infty$ если выполняются следующие два условия:

(3.3.1) $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$ относительно n-мерной меры Лебега;

(3.3.2) функция $H^*(x, f)$ локально ограничена на B_f.

3.4. Лемма. *Пусть $f : D \to \Omega$ — непрерывное, открытое и дискретное отображение открытого множества $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, на открытое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и пусть B_f — множество точек ветвления отображения f. Если $F = f^{-1} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$, то $H^*(x, f) \leq \omega(3)$ в любой точке $x \in D \setminus B_f$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in D \setminus B_f$ и $y_0 := f(x_0) \in \Omega$. Отметим некоторую точку $z_0 \in \Omega \setminus \{y_0\}$. Тогда $F(z_0) = f^{-1}(z_0) \subset D \setminus F(y_0)$. Применим утверждение 2.2 к отображению $f : D' \to \Omega'$ открытого множества $D' := D \setminus F(z_0)$ на открытое множество $\Omega' := \Omega \setminus \{z_0\}$ и используем константы $\Delta_0(y_0)$ и $\delta^*(y_0)$, установленные в 2.2. Получаем конечный набор $\{\overline{B}(x, \Delta_0(y_0)) : x \in F(y_0)\}$ замкнутых шаров с попарными расстояниями $\geq \Delta_0(y_0)$ между ними. Кроме того, если $r < \delta^*(y_0)$, то $U(x, f, r) \subset B(x, \Delta_0(y_0))$ для каждой точки $x \in F(y_0)$ и при этом

$$F(B(y_0, r)) = \bigcup \{U(x, f, r) : x \in F(y_0))\}. \tag{3.4.1}$$

Так как точка x_0 лежит вне B_f, отображение f инъективно в некоторой окрестности U_0 этой точки. Значит, существует $r_0 < \min\{\delta^*(y_0), |y_0 - z_0|/3\}$ такое, что $\overline{U}(x_0, f, r) \subset U_0$, как только $r \leq r_0$.

Для каждого $0 < r < r_0$ найдем пару различных точек $x_*(r)$ и $x^*(r)$ в $\partial U(x_0, f, r)$, для которых

$$|x_*(r) - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, r)\},$$

$$|x^*(r) - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, r)\}.$$

Точки $y_*(r) = f(x_*(r)) \in \partial B(y_0, r)$ и $y^*(r) = f(x^*(r)) \in \partial B(y_0, r)$ различны, ибо отображение $f|_{U_0}$ инъективно.

Получаем тетраду $\Psi(r) = (y_*(r), y_0; y^*(r), z_0)$ в Ω. Так как при $r \to 0$ имеется сходимость $|y_*(r) - z_0| \to |y_0 - z_0|$ и $|y^*(r) - z_0| \to |y_0 - z_0|$, справедлива оценка

$$\limsup_{r\to 0} \beta(\Psi(r)) = \limsup_{r\to 0} \frac{|y_*(r) - y^*(r)| \cdot |y_0 - z_0| + |y_*(r) - z_0| \cdot |y^*(r) - y_0|}{|y_*(r) - y_0| \cdot |y^*(r) - z_0|} \le \frac{2r \cdot |y_0 - z_0| + |y_0 - z_0| \cdot r}{r \cdot |y_0 - z_0|} = 3,$$

т. е.

$$\limsup_{r\to 0} \beta(\Psi(r)) \le 3. \tag{3.4.2}$$

Образ тетрады $\Psi(r)$ при отображении F есть обобщенная тетрада

$$F(\Psi(r)) = (F(y_*(r)), F(y_0); F(y^*(r)), F(z_0)),$$

и ее птолемеева характеристика имеет оценку

$$\beta(F(\Psi(r))) \ge \min\{\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) : v_1 \in F(y^*(r)), v_2 \in F(z_0)\},$$

где

$$\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) = \frac{|x_*(r) - v_1| \cdot |x_0 - v_2| + |x_*(r) - v_2| \cdot |x_0 - v_1|}{|x_*(r) - x_0| \cdot |v_1 - v_2|}.$$

Если $v_1 \in F(y^*(r)) \cap \overline{U}(x_0, f, r)$, то $v_1 = x^*(r)$ в силу инъективности $f|_{U_0}$.

Если $v_1 \in F(y^*(r)) \setminus \{x^*(r)\}$, то ввиду (3.4.1) $v_1 \in \partial U(x, f, r)$ для некоторого $x \in F(y_0) \setminus \{x_0\}$. В этом случае $v_1 \in \overline{B}(x, \Delta_0(y_0))$ при $x \ne x_0$ и поэтому $|v_1 - x_0| > \Delta_0(y_0) > |x^*(r) - x_0|$.

Таким образом, приходим к равенству

$$\min\{|v_1 - x_0| : v_1 \in F(y^*(r))\} = |x^*(r) - x_0|. \tag{3.4.3}$$

Так как $x^*(r) \in \overline{B}(x_0, \Delta_0(y_0)) \subset D'$, а $v_2 \in F(z_0) \subset \partial D'$, для любой точки $v_2 \in F(z_0)$

$$|v_2 - x_0| > \Delta_0(y_0) \ge |x^*(r) - x_0|. \tag{3.4.4}$$

Из (3.4.3) и (3.4.4) следует, что для всех $v_1 \in F(y^*(r))$ и $v_2 \in F(z_0)$ выполняется неравенство

$$\beta(x_*(r), x_0; v_1, v_2) \ge \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \cdot \frac{|v_1 - x_*(r)| + |x_*(r) - v_2|}{|v_1 - v_2|} \ge \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|}.$$

Следовательно, при любом $0 < r < r_0$

$$\frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \le \beta(F(\Psi(r))) \le \omega(\beta(\Psi(r))),$$

и вместе с (3.4.2) это дает требуемый результат:

$$H^*(x_0, f) = \limsup_{r\to 0} \frac{|x^*(r) - x_0|}{|x_*(r) - x_0|} \le \limsup_{r\to 0} \omega(\beta(\Psi(r))) \le \omega(3).$$

Лемма 3.4 доказана.

3.5. Следствие. *Пусть $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$, где Ω и $D = \bigcup\{F(y) : y \in \Omega\}$ — открытые множества в $\mathbb{R}^n$. Если $\#F(y) \equiv k \leq N$ для всех $y \in \Omega$, то левое обратное к F отображение $f : D \to \Omega$ не имеет точек ветвления в D и является K^*-квазирегулярным с $K^* \leq \omega(3)$.*

Доказательство. В силу 1.1 отображение F непрерывно, а его левое обратное отображение $f : D \to \Omega$ непрерывно, открыто и дискретно. Так как F удовлетворяет всем условиям в [6, утверждение 2.4], f является локальным гомеоморфизмом в D. Значит, $B_f = \varnothing$ и требуемый результат непосредственно вытекает из леммы 3.4.

Следствие доказано.

§ 4. Основной результат

4.1. Теорема. *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и отображение $F \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega)$ таково, что $\#F(y) = N > 1$ для всех $y \in \Omega \setminus \Omega_1$, где $\Omega_1 := \{y \in \Omega : \#F(y) = 1\}$. Тогда левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ является K^*-квазирегулярным с $K^* \leq \omega(3)$.*

Доказательство. Для случая $n = 2$ требуемое утверждение вытекает из более общей теоремы в [6]. Поэтому в дальнейшем считаем, что $n \geq 3$.

Каждая компонента открытого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ является открытым множеством в $\mathbb{R}^n$ (см. [11, § 49.II, теорема 4]) и замкнутым относительно A. Так как отображение F непрерывно, по утверждению 1.1 левое обратное отображение $f : F(\Omega) \to \Omega$ является открытым и замкнутым относительно $F(\Omega)$ и Ω (см. [11, § 17.III, теорема 2]). Следовательно, f переводит каждую компоненту множества $F(\Omega)$ в компоненту множества Ω. Если Ω' — компонента множества Ω, то множество $F(\Omega')$ есть конечное объединение компонент множества $F(\Omega)$ и поэтому является открытым в R^n. Тогда ограничение $F|_{\Omega'}$ отображения F на любой компоненте Ω' множества Ω удовлетворяет условиям (1.0.3)–(1.0.6) и тем самым $F|_{\Omega'} \in \mathscr{Q}M^*(\omega, N, \Omega')$.

Пусть компонента Ω' множества Ω такова, что либо $\Omega' \cap \Omega_1 = \varnothing$, либо $\Omega' \subset \Omega_1$. Тогда отображение $F' := F|_{\Omega'}$ удовлетворяет условию $\#F'(y) \equiv k$ для всех $y \in \Omega'$, где $k = N$ в первом случае и $k = 1$ во втором случае. Тогда согласно следствию 3.5 левое обратное отображение $f : F(\Omega') \to \Omega'$ является K^*-квазирегулярным с $K^* \leq \omega(3)$.

Остается рассмотреть случай, когда компонента Ω' множества Ω пересекается с каждым из множеств Ω_1 и $\Omega \setminus \Omega_1$. В этом случае $F(\Omega')$ является компонентой множества $F(\Omega)$. Действительно, имеется точка $y_0 \in \Omega' \cap \Omega_1$, для которой $F(y_0) = \{x_0\}$. Выше было показано, что f переводит любую компоненту множества $F(\Omega')$ в Ω'. Следовательно, $f^{-1}(y_0) \cap D' \neq \varnothing$ для каждой компоненты D' множества $F(\Omega')$, так что $x_0 \in D'$. Значит, существует только одна компонента D' у множества $F(\Omega')$ и $F(\Omega') = D'$.

Из всего этого следует, что теорему 4.1 достаточно доказать при дополнительном условии: Ω и $D = F(\Omega)$ суть области в $\mathbb{R}^n$ и при этом $\Omega \neq \Omega_1 \neq \varnothing$.

Из непрерывности F и утверждения [6, 2.0.2(iii)] следует, что множество $\Omega \setminus \Omega_1 = \{y \in \Omega : \#F(y) = N\}$ открытое. В силу утверждения 1.1 отображение $f : D = F(\Omega) \to \Omega$ непрерывно, так что множество $F(\Omega \setminus \Omega_1) = f^{-1}(\Omega \setminus \Omega_1)$ открыто. Значит, можно применить следствие 3.5 к ограничению $F|_{\Omega\setminus\Omega_1}$ и получить K^*-квазирегулярность отображения $f|_{F(\Omega\setminus\Omega_1)} \to \Omega \setminus \Omega_1$ с $K^* \leq \omega(3)$ и, кроме того, отсутствие в множестве $F(\Omega \setminus \Omega_1)$ точек ветвления отображения f. Таким образом, $B_f \subset F(\Omega_1)$.

Рассмотрим точку ветвления $x_0 \in B_f$ и ее образ $y_0 := f(x_0) \in \Omega_1$. Пусть $\delta^*(y_0)$ — величина, определенная в утверждении 2.2.

Допустим, существует такое $r_0 \in (0, \delta^*(y_0))$, что $\partial B(y_0, r_0) \cap \Omega_1 = \varnothing$. Так как множество Ω_1 замкнутое, существует $r_0' \in (0, r_0)$, для которого

$$(B(y_0, r_0) \setminus \overline{B}(y_0, r_0')) \cap \Omega_1 = \varnothing. \tag{4.1.1}$$

В силу (2.1.6) открытое множество $G := U(x_0, f, r_0) \setminus \overline{U}(x_0, f, r_0')$ является кольцевой областью и $f(G) = B(y_0, r_0) \setminus \overline{B}(y_0, r_0')$. Из (4.1.1) и равенства $B_f = F(\Omega_1)$ вытекает, что область G не содержит точек ветвления отображения f. Это означает, что $f|_G$ локально гомеоморфно в G. Так как $n \geq 3$, область $f(G)$ односвязная. Тогда из [9, лемма 2.2] следует, что $f|_G$ — гомеоморфизм. Но $F(f(G)) = G$, и это противоречит тому, что $N > 1$.

Таким образом, для любого $r \in (0, \delta^*(y_0))$ существует точка $y(r) \in \Omega_1 \cap \partial B(y_0, r)$.

Выберем точку $w_0 \in \Omega_1 \cap B(y_0, \delta^*(y_0))$, для которой $0 < r_0 = |w_0 - y_0| < \delta^*(y_0)$. Для произвольно малого $0 < \delta < r_0$ существует точка $y_\delta \in \Omega_1$ с $|y_\delta - y_0| = \delta$. Тогда $F(w_0) = \{z_0\}$, где $z_0 \in \partial U(x_0, f, r_0)$, $F(y_\delta) = \{x_\delta\}$, где $x_\delta \in \partial U(x_0, f, \delta)$, и $F(y_0) = \{x_0\}$.

Пусть точки $x_{\max}(\delta)$ и $x_{\min}(\delta)$ выбраны в $\partial U(x_0, f, \delta)$ такими, что

$$|x_{\max}(\delta) - x_0| = \max\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, \delta)\},$$

$$|x_{\min}(\delta) - x_0| = \min\{|x - x_0| : x \in \partial U(x_0, f, \delta)\}$$

и

$$y_{\max}(\delta) := f(x_{\max}(\delta)) \in \partial B(y_0, \delta), \quad y_{\min}(\delta) := f(x_{\min}(\delta)) \in \partial B(y_0, \delta).$$

В силу (2.1.5) существует такое $\delta_0 \in (0, r_0/2)$, что

$$|x_{\max}(\delta) - x_0| < |z_0 - x_0|/2$$

при $\delta < \delta_0$. Далее будем считать, что $\delta < \delta_0$. Для получения верхней оценки величины $|x_{\max}(\delta) - x_0|/|x_\delta - x_0|$ при $\delta \to 0$ рассмотрим тетраду

$$\Psi_\delta = (y_{\max}(\delta), w_0; y_0, y_\delta)$$

и ее образ

$$F(\Psi_\delta) = (F(y_{\max}(\delta)), \{z_0\}; \{x_0\}, \{x_\delta\}).$$

С учетом неравенства $\delta < r_0/2 = |w_0 - y_0|/2$ получаем оценки

$$\begin{aligned}\beta(\Psi_\delta) &= \frac{|y_{\max}(\delta) - y_0| \cdot |w_0 - y_\delta| + |y_{\max}(\delta) - y_\delta| \cdot |w_0 - y_0|}{|y_{\max}(\delta) - w_0| \cdot |y_\delta - y_0|} \\ &\leq \frac{\delta|w_0 - y_\delta| + 2\delta|w_0 - y_0|}{|y_{\max}(\delta) - w_0| \cdot \delta} \leq \frac{(r_0 + \delta) + 2r_0}{r_0 - \delta} \leq \frac{3r_0 + r_0/2}{r_0/2} = 7.\end{aligned}$$

Так как $x_{\max}(\delta) \in F(y_{\max}(\delta))$, то

$$\begin{aligned}\beta(F(\Psi_\delta)) &\geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0| \cdot |z_0 - x_\delta| + |x_{\max}(\delta) - x_\delta| \cdot |z_0 - x_0|}{|x_{\max}(\delta) - z_0| \cdot |x_\delta - x_0|} \\ &\geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0| \cdot (|z_0 - x_0| - |x_\delta - x_0|)}{|x_\delta - x_0| \cdot (|z_0 - x_0| + |x_{\max}(\delta) - x_0|)} \\ &\geq \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0|}{|x_\delta - x_0|} \cdot \frac{|z_0 - x_0|/2}{|z_0 - x_0| + |z_0 - x_0|/2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{|x_{\max}(\delta) - x_0|}{|x_\delta - x_0|}.\end{aligned}$$

Свойство ω-BAD дает верхнюю оценку

$$\frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_\delta-x_0|}\le 3\beta(F(\Psi_\delta))\le 3\omega(\beta(\Psi_\delta))\le 3\omega(7). \tag{4.1.2}$$

Теперь рассмотрим тетраду $\Psi'_\delta=(y_{\min}(\delta),y_0;y_\delta,w_0)$ и ее образ

$$F(\Psi'_\delta)=(F(y_{\min}(\delta)),\{x_0\};\{x_\delta\},\{z_0\}).$$

С одной стороны, имеем оценку

$$\beta(\Psi'_\delta)=\frac{|y_{\min}(\delta)-y_\delta|\cdot|y_0-w_0|+|y_{\min}(\delta)-w_0|\cdot|y_0-y_\delta|}{|y_{\min}(\delta)-y_0|\cdot|y_\delta-w_0|}$$
$$\le\frac{2\delta\cdot r_0+(r_0+\delta)\cdot\delta}{\delta\cdot(r_0-\delta)}\le\frac{3r_0+r_0/2}{r_0/2}=7.$$

С другой стороны,

$$\beta(F(\Psi'_\delta))\ge\frac{|x_{\min}(\delta)-x_\delta|\cdot|x_0-z_0|+|x_{\min}(\delta)-z_0|\cdot|x_0-x_\delta|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|\cdot|z_0-x_\delta|}$$
$$\ge\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\cdot\frac{|z_0-x_0|-|x_{\min}(\delta)-x_0|}{|z_0-x_0|+|x_\delta-x_0|}$$
$$\ge\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\cdot\frac{|z_0-x_0|/2}{|z_0-x_0|+|z_0-x_0|/2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}.$$

Свойство ω-BAD дает оценку

$$\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\le 3\beta(F(\Psi'_\delta))\le 3\omega(\beta(\Psi'_\delta))\le 3\omega(7). \tag{4.1.3}$$

Из (4.1.2) и (4.1.3) следует, что для всех достаточно малых δ справедливо неравенство

$$\frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}=\frac{|x_{\max}(\delta)-x_0|}{|x_\delta-x_0|}\cdot\frac{|x_\delta-x_0|}{|x_{\min}(\delta)-x_0|}\le 9(\omega(7))^2.$$

Это означает, что $H^*(x_0,f)\le 9(\omega(7))^2$ в каждой точке ветвления $x_0\in F(\Omega_1)$ и, следовательно, отображение $f:D\to\Omega$ является K^*-квазирегулярным с $K^*\le\omega(3)$.

Теорема 4.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Асеев В. В.* Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
2. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. d'Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
3. *Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенов А. В.* Мёбиус-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеевых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
4. *Асеев В. В.* Обобщенные углы в птолемеевых мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
5. *Асеев В. В.* Многозначные отображения со свойством квазимёбиусовости // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 953–972.
6. *Асеев В. В.* Многозначные квазимёбиусовы отображения на римановой сфере // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 450–464.
7. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. V. 448. P. 1–40.

8. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. V. 465. P. 1–13.

9. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. V. 488. P. 1–31.

10. *Асеев В. В.* Графические пределы квазимероморфных отображений и искажение характеристики тетрад // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.

11. *Куратовский К.* Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.

Поступила в редакцию 6 февраля 2024 г.
После доработки 6 февраля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
btp@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 514.82+512.81+517.977

ВРЕМЕНИПОДОБНЫЕ И ИЗОТРОПНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ВСЕЛЕННОЙ ГЁДЕЛЯ КАК ГРУППЫ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ

В. Н. Берестовский

Аннотация. Изучается Вселенная Гёделя как группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Методами геометрической теории оптимального управления для поиска геодезических на группах Ли с левоинвариантными (суб)лоренцевыми метриками найдены выражения для времениподобных и изотропных геодезических в элементарных функциях. Доказано, что у Вселенной Гёделя нет времениподобных и изотропных замкнутых геодезических. Последнему результату уделено особое внимание.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.503

Ключевые слова: времениподобная геодезическая, Вселенная Гёделя, группа Ли, изотропная геодезическая, замкнутая времениподобная кривая, замкнутая изотропная кривая, левоинвариантная лоренцева метрика.

§ 1. Введение

Курт Гёдель в статье [1] 1949 г. вводит в пространстве $\mathbb{R}^4$ лоренцеву метрику (1) сигнатуры $(+,-,-,-)$. Вселенная (пространство-время) Гёделя S является решением уравнений Эйнштейна общей теории относительности.

В первом разделе статьи Гёдель указывает основные свойства своего (называемого им новым) решения S. Упомянем здесь только первые два из них:

1. Пространство-время S однородно. Следовательно, S стационарно.

2. S имеет вращательную симметрию: для каждой точки P из S существует однопараметрическая группа изометрий S с неподвижной точкой P.

В [1] дано явное описание замкнутых изотропных кривых в S.

Заметим, что работа [1] была перепечатана в статье [2].

В работе [3], в основном без доказательств, Гёдель исследует свойства семейств вращающихся Вселенных (решений) без замкнутых времениподобных и изотропных кривых с нулевым давлением материи двух типов: I) пространственно однородных и расширяющихся; II) стационарных однородных.

I. В этом случае 1) пространства компактны, 2) плотность непостоянна. Последнее условие влечет, что модели расширяющиеся.

II. Для этого случая Гёдель формулирует следующие результаты.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0006.

© 2024 Берестовский В. Н.

1. Не существует стационарных однородных решений с $\Lambda = 0$.

2. Существуют вращающиеся стационарные однородные решения с компактным пространством, отсутствием замкнутых времениподобных кривых и $\Lambda > 0$, в том числе произвольно мало отличающиеся от Вселенной Эйнштейна.

Эти результаты Гёделя предшествовали многим исследованиям таких моделей. Программе Гёделя следует работа [4] и другие статьи ее авторов.

Первые работы, посвященные поиску геодезических в S, это [5] и [6].

В статье [6] 1961 г. Чандрасекар и Райт нашли с применеием символов Кристоффеля полное решение уравнений геодезических в S.

Автор статьи [7], следуя [8] и применяя методы группового анализа (по автору, "Noether gauge symmetries (NGS) of") дифференциальных уравнений геодезических, исследовал виды (типы) I–IV однородных пространств-времен «типа Гёделя» и явно проинтегрировал, *по его словам*, уравнения геодезических для всех типов. Из [7] и формулы (4) следует, что S имеет тип I. Для пространств-времен типов I–III в [7] указаны семь NGS, из них пять векторных полей Киллинга.

В статье [9] для Вселенной Гёделя указан базис алгебры Ли из 10 NGS с максимальной разрешимой подалгеброй размерности 7 и 5-мерной подалгеброй киллинговых векторных полей. С помощью последней подалгебры авторы понижают порядок дифференциальных уравнений геодезических до 1 и затем находят времениподобные геодезические.

Следует заметить, что из упомянутых NGS геометрический смысл имеют только пять векторных полей Киллинга, которые были известны давно. Остальные NGS не являются необходимыми и для поиска геодезических. Вычисления в [7] довольно громоздки и увидеть действительно явный вид геодезических для S в [7] не так уж просто. Кроме того, авторы статей [7] и [9] используют цилиндрические координаты для (под)пространства-времени Гёделя $S_0 = \mathbb{R}^3$, которые мы не применяем в нашей статье по причине, указанной в замечании 2.

В настоящей статье для Вселенной Гёделя S как группы Ли G с левоинвариантной лоренцевой метрикой в теоремах 1, 2 и предложениях 4, 5 найдены все времениподобные и изотропные геодезические в S, а в теореме 3 и предложении 3 доказано, что они не замкнуты. Применен метод геометрической теории оптимального управления для поиска геодезических на группах Ли с левоинвариантной (суб)лоренцевой метрикой. При этом геодезические — решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (13), (14) первого порядка. Связь теорем 1, 2 со статьей [6] указана в предложении 6.

Автор не нашел в [5, 6] четко сформулированного утверждения, что у Вселенной Гёделя нет времениподобных и изотропных замкнутых геодезических (большинство источников считает, что это так для [6]), а нашел лишь следующее в [10]: «исследования Кундта [5], Чандрасекара и Райта [6] явно показывают, что не существует замкнутых времениподобных геодезических» (с. 37).

А. В. Левичев указал автору, что в статье С. Гаврилова [11] дан общий метод поиска геодезических левоинвариантных лоренцевых метрик на группах Ли как решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Автор признателен А. В. Левичеву за указание на работы [12–14, 11].

§ 2. Времениподобные и изотропные геодезические

Гёдель вводит в [1] свое пространство-время S как $\mathbb{R}^4$ с линейным элементом

$$ds^2 = a^2\left(dx_0^2 + 2e^{x_1}dx_0dx_2 + \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 - dx_1^2 - dx_3^2\right), \quad a > 0. \tag{1}$$

Гёдель замечает в [1], что эту квадратичную форму можно записать в виде

$$ds^2 = a^2\left[(dx_0 + e^{x_1}\,dx_2)^2 - dx_1^2 - \frac{e^{2x_1}}{2}dx_2^2 - dx_3^2\right], \tag{2}$$

из которого очевидно, что ее сигнатура всюду равна $(+,-,-,-)$.

Вселенная Гёделя — решение уравнений гравитации Эйнштейна

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = 8\pi\kappa\rho u_iu_k + \Lambda g_{ik}, \quad T_{ik} = \rho u_iu_k;$$

$$R = \frac{1}{a^2}, \quad R_{ik} = \frac{1}{a^2}u_iu_k, \quad \frac{1}{a^2} = 8\pi\kappa\rho, \quad \Lambda = -\frac{R}{2}.$$

Здесь ρ — постоянная положительная плотность материи, u — нормированный вектор 4-скорости; знак Λ противоположен ее знаку в статичной Вселенной Эйнштейна, что соответствует положительному давлению p [1].

Замечание 1. В [5, 15] указано, что давление отсутствует. В [10] говорится, что существует много способов построения решения Гёделя из-за его большой симметричности. Если ω — завихренность, возможны случаи:

$$p = 0, \quad \Lambda = -\omega^2 < 0; \quad \Lambda = 0, \quad p = \omega^2/\kappa.$$

Нас интересуют в основном геодезические. Времениподобные геодезические локально являются длиннейшими времениподобными кривыми, соединяющими заданные пары точек. Поэтому можно считать, что $a = 1$.

Очевидно, что $(S, ds^2) = \left(S_0, ds_0^2\right) \times \left(S_1, ds_1^2\right)$, где $S_0 = \mathbb{R}^3$, $S_1 = \mathbb{R}$,

$$ds_0^2 = dx_0^2 + 2e^{x_1}\,dx_0dx_2 + \frac{e^{2x_1}}{2}\,dx_2^2 - dx_1^2, \quad ds_1^2 = -dx_3^2. \tag{3}$$

Отсюда следует, что поиск геодезических в (S, ds^2) сводится к поиску в $\left(S_0, ds_0^2\right)$.

Далее Гёдель вводит в S_0 «цилиндрические координаты» (r, φ, t) по формулам

$$e^{x_1} = \cosh 2r + \cos\varphi \sinh 2r, \quad x_2e^{x_1} = \sqrt{2}\sin\varphi\sinh 2r,$$

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right) = e^{-2r}\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{где} \quad \left|\frac{x_0 - 2t}{2\sqrt{2}}\right| < \frac{\pi}{2}.$$

Это приводит к следующему виду линейного элемента:

$$ds_0^2 = 4[dt^2 - dr^2 + \sinh^2 r((\sinh^2 r - 1)\,d\varphi^2 + 2\sqrt{2}\,d\varphi dt)]. \tag{4}$$

При этом Гёдель опускает вычисления, замечая, что они громоздкие. Компоненты этого линейного элемента не зависят от t и φ. Значит, в этих координатах сдвиги по t и вращения вокруг оси $r = 0$ по φ — изометрии в $\left(S_0, ds_0^2\right)$.

С учетом замечания Гёделя в [1], что на (S, ds^2) $((S_0, ds_0^2))$ действует просто транзитивно 4-мерная (соответственно 3-мерная) группа Ли G (соответственно G_0) изометрий, получаем, что для каждой точки $P \in S$ $(P_0 \in S_0)$ существует 1-параметрическая группа вращений-изометрий, сохраняющих точку P (P_0).

Замечание 2. Из приведенных выше формул для координат (r, φ, t) следует, что $x_1 = x_2 = 0$ и $x_0 = 2t$ (для близких к нулю x_0, t) при $r = 0$. Система этих координат имеет особенность, так как при $r = 0$ якобиан перехода от (r, φ, t) к (x_0, x_1, x_2) равен нулю [14]. Поэтому далее эти координаты не применяются.

Нетрудно увидеть, что указанное действие группы Ли G дается формулами

$$x_0 = x_0' + a, \quad x_1 = x_1' + b, \quad x_2 = x_2' e^{-b} + c, \quad x_3 = x_3' + d \tag{5}$$

с произвольными $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ (см. также [16]). Отсюда видно, что группа Ли G является простейшей некоммутативной 4-мерной группой Ли вида

$$G \cong (\mathbb{R}, +) \times G_2 \times (\mathbb{R}, +),$$

где G_2 — единственная с точностью до изоморфизма, необходимо диффеоморфная $\mathbb{R}^2$ 2-мерная некоммутативная группа Ли. При этом

$$G_0 \cong (\mathbb{R}, +) \times G_2. \tag{6}$$

В рассматриваемом нами случае при отождествлении тройки (x_0', x_1', x_2') с вектором-столбцом $(x_2', x_1', x_0', 1)^T$, где ^{T} — знак транспонирования, действие группы G_0 на $\mathbb{R}^3$ по формуле (5) имеет вид $(x_2, x_1, x_0, 1)^T = A(x_2', x_1', x_0', 1)^T$, где

$$A = \begin{pmatrix} e^{-b} & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

При этом формула

$$\begin{pmatrix} e^{-x_1} & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & x_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (0, 0, 0, 1)^T = (x_2, x_1, x_0, 1)^T \tag{8}$$

устанавливает биекцию группы G_0 на $\mathbb{R}^3$ и единице группы G_0 соответствует нуль-вектор $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$. На основании этого, (6) и (3) $\left(S_0, ds_0^2\right)$ можно отождествить с группой Ли G_0, снабженной левоинвариантной лоренцевой метрикой.

Вследствие сказанного и (3) в единице группы G_0 компоненты линейного элемента ds_0^2 относительно естественного базиса $(e_0 = e_{x_0}, e_1 = e_{x_1}, e_2 = e_{x_2})$, связанного с координатами (x_0, x_1, x_3), равны

$$g_{00} = 1, \quad g_{02} = g_{20} = 1, \quad g_{22} = \frac{1}{2}, \quad g_{11} = -1, \quad g_{01} = g_{10} = g_{12} = g_{21} = 0. \tag{9}$$

Согласно (8) в алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$ группы Ли G_0

$$e_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Как следствие в алгебре Ли $\mathfrak{g}_0$ группы Ли G_0

$$[e_1, e_2] = e_1 e_2 - e_2 e_1 = -e_2, \quad [e_0, e_1] = [e_0, e_2] = 0. \tag{11}$$

Выберем ортонормированный относительно ds_0^2 базис (e_0, e_1, e_2') в $\mathfrak{g}_0$. На основании (9) $e_2' = \alpha(e_0 - e_2)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и

$$-1 = (e_2', e_2') = \alpha^2 \left(1 - 2 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{\alpha^2}{2}, \quad \alpha = \sqrt{2}, \quad e_2' = \sqrt{2}(e_0 - e_2).$$

При этом $[e_1, e_2'] = \sqrt{2}e_2 = \sqrt{2}(e_0 - (e_0 - e_2)) = \sqrt{2}e_0 - e_2'$ и в выбранном ортонормированном базисе алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ все ненулевые структурные константы:

$$C_{12}^0 = -C_{21}^0 = \sqrt{2}, \quad C_{12}^2 = -C_{21}^2 = -1. \tag{12}$$

В теоремах 2 и 3 из [17] по аналогии с левоинвариантными (суб)римановыми метриками на группах Ли установлено, что каждая времениподобная или изотропная геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, на произвольной группе Ли G (с началом в ее единице) с левоинвариантной (суб)лоренцевой метрикой $(\cdot, \cdot)$ и ортонормированным относительно нее базисом $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ есть решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\gamma'(t) = dl_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \psi_0(t)e_0 - \sum_{i=1}^{r} \psi_i(t)e_i, \quad \psi_0(t) > 0, \tag{13}$$

$$\psi_j'(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(C_{0j}^k \psi_0 \psi_k - \sum_{i=1}^{r} C_{ij}^k \psi_i \psi_k \right), \quad j = 0, \ldots, n. \tag{14}$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы в базисе $(e_0, \ldots, e_n)$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

У нас $r = n = 2$; $i, j, k = 0, 1, 2$. С учетом (12) уравнения (14) принимают вид

$$\psi_j'(t) = -\sum_{k=0}^{2} \left(\sum_{i=1}^{2} C_{ij}^k \psi_i(t)\psi_k(t) \right) = -\left(\sum_{i=1}^{2} C_{ij}^0 \psi_i(t)\psi_0(t) + \sum_{i=1}^{2} C_{ij}^2 \psi_i(t)\psi_2(t) \right).$$

Снова учитывая (12), получаем $\psi_0'(t) = 0$, $\psi_0(t) \equiv \varphi_0$,

$$\psi_1'(t) = \psi_2(t)(\sqrt{2}\varphi_0 - \psi_2(t)), \quad \psi_2'(t) = -\psi_1(t)(\sqrt{2}\varphi_0 - \psi_2(t)). \tag{15}$$

Замечание 3. В случае изотропной (времениподобной) геодезической предполагается, что $(u(0), u(0)) = 0$, $\varphi_0 \equiv \psi_0(t) \equiv 1$ ($(u(0), u(0)) = 1$, $\varphi_0 \geq 1$).

Начнем с времениподобной геодезической в случае, когда $\varphi_0 = 1$. Тогда

$$\begin{gathered} (u(t), u(t)) \equiv (u(0), u(0)) = 1, \quad \psi_1(t) = \psi_2(t) \equiv 0, \quad u(t) \equiv u(0) = e_0, \\ \gamma(t) = \exp(te_0) = te_0 = (x_0(t) = t, x_1(t) = 0, x_2(t) = 0, x_3(t) = 0), \quad t \in \mathbb{R}. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее в случае времениподобной геодезической предполагается, что $\varphi_0 > 1$.

Предложение 1. *Для любой геодезической в* $\left(S_0, ds_0^2\right)$ *выполняются равенства*

$$u(t) = (\varphi_0 - b\sqrt{2}\cos\theta(t))e_0 + b(\sin\theta(t)e_1 + \sqrt{2}\cos\theta(t)e_2),$$

где $\theta(t)$ *— решение обыкновенного дифференциального уравнения*

$$\frac{d\theta}{dt} = b\cos\theta(t) - a, \tag{17}$$

где $a = \sqrt{2}\varphi_0$ *и* $b = 1$, $b = \sqrt{\varphi_0^2 - 1}$ *для изотропной и времениподобной геодезических соответственно.*

Доказательство. Из равенств $(u(t), u(t)) \equiv (u(0), u(0))$, $\psi_0(t) \equiv \psi_0(0) = \varphi_0$ и значений $(u(0), u(0))$ для каждого из трех упомянутых видов геодезической легко получаем, что $\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) = b^2$. Поэтому можно считать, что

$$(\psi_1(t), \psi_2(t)) = b(-\sin\theta(t), \cos\theta(t)). \tag{18}$$

Тогда вследствие (15)

$$\psi_1'(t) = b(-\cos\theta(t)\theta'(t)) = b\cos\theta(t)(a - b\cos\theta(t)),$$

$$\psi_2'(t) = b(-\sin\theta(t)\theta'(t)) = b\sin\theta(t)(a - b\cos\theta(t)),$$

откуда вытекает (17). □

Следствие 1. $b > 0$, $\theta'(t) < 0$.

Разделяя переменные в (17), находим согласно формуле 5.12.5 в [18]

$$t - t_0 = \int dt = \int \frac{d\theta}{-a + b\cos\theta} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{-(a+b)\tan(\theta/2)}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(-\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\tan(\theta/2)\right).$$

Отсюда последовательно получаем

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = -\sqrt{\alpha}\tan\sigma, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{a-b}{a+b}, \quad \sigma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}(t - t_0)}{2}, \tag{19}$$

$$\cos\theta(t) = \frac{1 - \alpha\tan^2\sigma}{1 + \alpha\tan^2\sigma}, \quad \sin\theta(t) = \frac{-2\sqrt{\alpha}\tan\sigma}{1 + \alpha\tan^2\sigma}. \tag{20}$$

Далее будет удобно иметь формулы (20) в виде

$$\cos\theta(t) = \frac{\cos^2\sigma - \alpha\sin^2\sigma}{\cos^2\sigma + \alpha\sin^2\sigma} = \frac{(1+\alpha)\cos 2\sigma + (1-\alpha)}{(1-\alpha)\cos 2\sigma + (1+\alpha)}, \tag{21}$$

$$\sin\theta(t) = \frac{-2\sqrt{\alpha}\cos\sigma\cdot\sin\sigma}{\cos^2\sigma + \alpha\sin^2\sigma} = \frac{-2\sqrt{\alpha}\sin 2\sigma}{(1-\alpha)\cos 2\sigma + (1+\alpha)}. \tag{22}$$

При $t = 2\sigma$ найдем с помощью 5.12.3 и 5.12.5 из [18] неопределенные интегралы от (21) и (22), опуская аддитивные константы:

$$\int \frac{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos t}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos t}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}[(1+\alpha)t - 4\sqrt{\alpha}\arctan(\sqrt{\alpha}\tan(t/2))],$$

$$\int \frac{-2\sqrt{\alpha}\sin t}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos t}\,dt = \frac{2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha}\ln((1+\alpha) + (1-\alpha)\cos t).$$

С помощью 5.12.1 из [18] вычислим следующий интеграл:

$$\int \frac{(1-\alpha) + (1+\alpha)\cos t}{[(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos t]^2}\,dt = \frac{\sin t}{(1+\alpha) + (1-\alpha)\cos t}.$$

Замечание 4. В случае времениподобной и изотропной геодезических

$$\alpha = \alpha_1 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 - (1/\varphi_0)^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - (1/\varphi_0)^2}}, \quad \sigma = \sigma_1 = \frac{\sqrt{1 + \varphi_0^2}(t - t_0)}{2};$$

$$\alpha = \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (3+2\sqrt{2})^{-1}, \quad \sigma = \sigma_2 = \frac{(t-t_0)}{2}.$$

При этом $\alpha_1 > \alpha_2$, $|\sigma_1| > \sqrt{2}|\sigma_2|$; неравенства в общем случае неулучшаемы.

Будем решать (первое) матричное дифференциальное уравнение в (13), используя предложение 1, равенства (10), (21), (22) и замечание 4, предполагая, что (4×4)-матрица $\gamma(t)$ выглядит как в (8) с неизвестными функциями $x_0(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $t\in\mathbb{R}$. При этом в рассматриваемом случае матричной группы Ли G_0 операция дифференциала $dl_{\gamma(t)}$ левого сдвига $l_{\gamma(t)}$ на элемент $\gamma(t)$ в (13) осуществляется умножением слева на матрицу $\gamma(t)$.

Теорема 1. *Изотропные геодезические в G_0 с началом в ее единице имеют следующий вид:*

$$x_0(t) = -t + 2\sqrt{2}\arctan((\sqrt{2}-1)\tan(\tau/2)|_{-t_0}^{(t-t_0)}, \tag{23}$$

$$x_1(t) = \ln((1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos\tau)|_{-t_0}^{t-t_0}, \tag{24}$$

$$x_2(t) = \left.\frac{\beta_2\sin\tau}{(1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos\tau}\right|_{-t_0}^{t-t_0}, \tag{25}$$

$$\beta_2 = \sqrt{2}[(1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos t_0].$$

В случае $\varphi_1 = \psi_1(0) = 0$, $\sin(0) = 0$ и при $t_0 = 0$

$$x_0(t) = -t + 2\sqrt{2}\arctan((\sqrt{2}-1)\tan(t/2)), \tag{26}$$

$$x_1(t) = \ln[((1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos t)/2], \tag{27}$$

$$x_2(t) = \frac{2\sqrt{2}\sin t}{(1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos t}. \tag{28}$$

Доказательство. Получаем следующие дифференциальные уравнения для элементов матрицы $\gamma(t)$ с ненулевыми правыми частями:

$$\gamma'_{11}(t) = \frac{-2\sqrt{\alpha_2}e^{-x_1}\sin(t-t_0)}{(1-\alpha_2)\cos(t-t_0)+(1+\alpha_2)},$$

$$\gamma'_{14}(t) = x'_2(t) = e^{-x_1}\sqrt{2}\frac{(1+\alpha_2)\cos(t-t_1)+(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2)\cos(t-t_0)+(1+\alpha_2)},$$

$$\gamma'_{24}(t) = x'_1(t) = \frac{-2\sqrt{\alpha_2}\sin(t-t_0)}{(1-\alpha_2)\cos(t-t_0)+(1+\alpha_2)},$$

$$\gamma'_{34}(t) = x'_0(t) = 1-\sqrt{2}\frac{(1+\alpha_2)\cos(t-t_0)+(1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2)\cos(t-t_0)+(1+\alpha_2)}. \tag{29}$$

Достаточно решить последние три дифференциальных уравнения.

Применяя найденные выше неопределенные интегралы при $\alpha = \alpha_2$, находим

$$x_0(t) = t - \frac{\sqrt{2}(1+\alpha_2)t}{1-\alpha_2} + \frac{4\sqrt{2}}{1-\alpha_2}\sqrt{\alpha_2}\arctan(\sqrt{\alpha_2}\tan\tau)|_{-t_0/2}^{(t-t_0)/2}, \tag{30}$$

$$x_1(t) = \frac{2\sqrt{\alpha_2}}{1-\alpha_2}\ln((1+\alpha_2)+(1-\alpha_2)\cos\tau)|_{-t_0}^{t-t_0}, \tag{31}$$

откуда получаем (23), (24). Теперь, применяя (24) и последний из вычисленных перед теоремой неопределенных интегралов, получаем (25). □

Теорема 2. *Времениподобные геодезические в G_0 с началом в ее единице имеют следующий вид:*

$$x_0(t) = -\varphi_0(t-t_0) + 2\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\alpha_1}\tan\left(\frac{\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)}{2}\right)\right)$$

$$-\left[\varphi_0 t_0 + 2\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\alpha_1}\tan\left(\frac{-\sqrt{\varphi_0^2+1}t_0}{2}\right)\right)\right],$$

$$x_1(t) = \ln((1+\alpha_1)+(1-\alpha_1)\cos\tau)\Big|_{-\sqrt{\varphi_0^2+1}t_0}^{\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)},$$

$$x_2(t) = \frac{\beta_1\sin\tau}{(1+\alpha_1)+(1-\alpha_1)\cos\tau}\Bigg|_{-\sqrt{\varphi_0^2+1}t_0}^{\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)},$$

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{2(\varphi_0^2-1)}}{\sqrt{\varphi_0^2+1}}\left[(1+\alpha_1)+(1-\alpha_1)\cos\sqrt{\varphi_0^2+1}t_0\right].$$

В случае $\varphi_1 = \psi_1(0) = 0$, $\sin(0) = 0$ *и при* $t_0 = 0$

$$x_1(t) = \ln\left[\left((1+\alpha_1)+(1-\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}t\right)\right)/2\right],$$

$$x_0(t) = -\varphi_0 t + 2\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{\alpha_1}\tan\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}t/2\right)\right),$$

$$x_2(t) = \frac{2\sqrt{2(\varphi_0^2-1)}}{\sqrt{\varphi_0^2+1}}\left[\frac{\sin\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}t\right)}{(1+\alpha_1)+(1-\alpha_1)\cos(\sqrt{\varphi_0^2+1}t)}\right].$$

Доказательство. Получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\gamma_{34}'(t) = x_0'(t) = \varphi_0 - \sqrt{2(\varphi_0^2-1)}\frac{(1+\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)+(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)+(1+\alpha_1)},$$

$$\gamma_{24}'(t) = x_1'(t) = \frac{-2\sqrt{\alpha_1(\varphi_0^2-1)}\sin\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)}{(1-\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)+(1+\alpha_1)},$$

$$\gamma_{14}'(t) = x_2'(t) = e^{-x_1}\sqrt{2(\varphi_0^2-1)}\frac{(1+\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)+(1-\alpha_1)}{(1-\alpha_1)\cos\left(\sqrt{\varphi_0^2+1}(t-t_0)\right)+(1+\alpha_1)}.$$

Теперь теорема доказывается применением рассуждений и вычислений, аналогичных приведенным в доказательстве теоремы 1. □

Предложение 2. *Функция* $f(t) = \arctan(\beta\tan t)$, $t \in \mathbb{R}$, *где* $\beta > 0$, *имеет ограниченную положительную производную на множестве всех чисел* $t \in \mathbb{R}$ *таких, что* $t \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; f *непрерывна и строго возрастает.*

Доказательство. Пусть $t \neq \pi/2 + k\pi$. Тогда

$$f'(t) = \frac{\beta(1+\tan^2 t)}{1+(\beta\tan t)^2} \to \frac{1}{\beta}, \quad \text{если } \tan t \to \pm\infty.$$

Отсюда следуют все утверждения предложения. □

Предложение 2, дополненное небольшими рассуждениями, влечет

Следствие 2. *Если* $\beta > 0$, *то*

$$f(\beta \tan(t + k\pi)) = \arctan(\beta \tan t) + k\pi; \quad -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Теорема 3. *У Вселенной Гёделя нет замкнутых как изотропных, так и времениподобных геодезических.*

Доказательство. Предположим, что существует замкнутая изотропная или времениподобная геодезическая $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (S, ds^2), другими словами, на группе Ли (G, ds^2). Так как ds^2 левоинвариантна, можно считать, что γ начинается в единице группы Ли G, т. е. $x_0(0) = x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$. Так как вектор $e_3 \in \mathfrak{g}$ коммутирует со всеми векторами из алгебры Ли $\mathfrak{g}$, вследствие уравнений (14) для γ имеем $\psi_3'(t) \equiv 0$, т. е. $\psi_3(t) \equiv \varphi_3 = \psi_3(0)$. Вследствие (13) $x_3(t) = \varphi_3 \cdot t$. Эта функция может принимать одинаковые значения при разных значениях t только при $\varphi_3 = 0$. Следовательно, $x_3(t) \equiv 0$, т. е. $\gamma \in S_0$, и γ — замкнутая геодезическая на группе Ли G_0 с началом в ее единице.

Из теоремы 1 (соответственно 2) следует, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют наименьший общий положительный период 2π (соответственно $2\pi/\sqrt{\varphi_0^2 + 1}$). Поэтому $x_1(t_2) - x_1(t_1) = 0$ и $x_2(t_2) - x_2(t_1) = 0$ одновременно тогда и только тогда, когда $t_2 - t_1 = 2\pi k$ (соответственно $t_2 - t_1 = 2\pi k/\sqrt{\varphi_0^2 + 1}$.)

Если $k \neq 0$, то вследствие предложения 2 и теоремы 1 (соответственно 2) $x_0(t_2) - x_0(t_1) = 2\pi k(\sqrt{2} - 1) \neq 0$ (соответственно $x_0(t_2) - x_0(t_1) = 2\pi k(\sqrt{2} - \varphi_0/\sqrt{\varphi_0^2 + 1}) \neq 0$).

Теорема доказана. □

Заметим, что в случае изотропной геодезической теорему 3 можно доказать, не применяя (32), на основании следующего предложения.

Предложение 3. *Для каждой изотропной геодезической и любого* $t \in \mathbb{R}$

$$x_0(t + 2\pi) = x_0(t) + T,$$

где T *— некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. На основании равенства (29) при $t_0 = 0$

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= 1 - \sqrt{2}\frac{(1+\alpha_2)\cos t + (1-\alpha_2)}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} \\ &= \frac{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2) - \sqrt{2}[(1+\alpha_2)\cos t + (1-\alpha_2)]}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} \\ &= \frac{(1-\sqrt{2}) + \alpha_2(1+\sqrt{2}) + \cos t[(1-\sqrt{2}) - \alpha_2(1+\sqrt{2})]}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} \\ &= \frac{-\sqrt{\alpha_2} + \sqrt{\alpha_2}\cdot 1 + \cos t[-\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}\cdot 1]}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} = \frac{-2\sqrt{\alpha_2}\cos t}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)}. \end{aligned}$$

Теперь вследствие периодичности функции $\cos t$

$$\begin{aligned} x_0(t + 2\pi) - x_0(t) &= -2\sqrt{\alpha_2} \int\limits_t^{t+2\pi} \frac{\cos\tau\, d\tau}{(1-\alpha_2)\cos\tau + (1+\alpha_2)} \\ &= -2\sqrt{\alpha_2} \int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\cos t\, dt}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} \end{aligned}$$

$$= -2\sqrt{\alpha_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{\cos t}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} + \frac{\cos(t+\pi)}{(1-\alpha_2)\cos(t+\pi) + (1+\alpha_2)} \right] dt$$

$$= 2\sqrt{\alpha_2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{-\cos t}{(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} + \frac{\cos t}{-(1-\alpha_2)\cos t + (1+\alpha_2)} \right] dt =: T > 0. \quad \square$$

Замечание 5. Из доказательства предложения 3 и равенств (23) и (32) (при $\beta = \sqrt{\alpha_2}$) следует, что

$$T = 2(\sqrt{2}-1)\pi, \quad \int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos t\, dt}{(1+\alpha_2) + (1-\alpha_2)\cos t} = -\pi.$$

Легко доказываются следующие результаты.

Предложение 4. *Каждая изотропная геодезическая с началом в единице группы Ли (G, ds^2), не лежащая в подгруппе Ли G_0, может быть одним из двух видов:*

$$x_0(t) = x_3(t) = t, \quad x_1(t) = x_2(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{33}$$

$$\gamma(t) = (\widetilde{\gamma}(t), \varphi_3 t), \quad 0 < |\varphi_3| < 1, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{34}$$

где $\widetilde{\gamma}(t)$ получается из формул в теореме 2 заменами

$$-\varphi_0 t \to -t, \quad \alpha_1 \to \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1-\varphi_3^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1-\varphi_3^2}}, \quad \sqrt{\varphi_0^2+1} \to \sqrt{\varphi_3^2+1},$$

$$\frac{\sqrt{2(\varphi_0^2-1)}}{\sqrt{\varphi_0^2+1}} \to \frac{\sqrt{2(1-\varphi_3^2)}}{\sqrt{\varphi_3^2+1}}.$$

Предложение 5. *Каждая времениподобная геодезическая с началом в единице группы Ли (G, ds^2), не лежащая в подгруппе Ли G_0, может быть двух видов:*

$$x_0(t) = \varphi_0 t, \quad x_3(t) = \sqrt{\varphi_0^2 - 1}\, t, \quad x_1(t) = x_2(t) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \varphi_0 > 1, \tag{35}$$

$$\gamma(t) = (\widetilde{\gamma}(t), \varphi_3 t), \quad 0 < |\varphi_3| < \sqrt{\varphi_0^2 - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{36}$$

где $\widetilde{\gamma}(t)$ получается из формул в теореме 2 заменами

$$\alpha_1 \to \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 - (1+\varphi_3^2)/\varphi_0^2}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 - (1+\varphi_3^2)/\varphi_0^2}}, \quad \sqrt{\varphi_0^2+1} \to \sqrt{\varphi_0^2+1+\varphi_3^2},$$

$$\frac{\sqrt{2(\varphi_0^2-1)}}{\sqrt{\varphi_0^2+1}} \to \frac{\sqrt{2(\varphi_0^2 - (1+\varphi_3^2))}}{\sqrt{\varphi_0^2+1+\varphi_3^2}}.$$

§ 3. Заключительные замечания

Замечание 6. Отсутствие замкнутых времениподобных геодезических во Вселенной Гёделя можно вывести из отсутствия замкнутых изотропных геодезических концептуально, не применяя теорему 2.

Предложение 6. *Если в первом равенстве из формулы* (35) *в* [6] *и в формулах* (26), (30), (33) *из* [6] *положить* $D = \sqrt{2}$, $B = 1$ (*соответственно* $D = \sqrt{2}\varphi_0$, $B = \sqrt{\varphi_0^1 - 1}$), *а* c_0, c_1, c_2 *взять так, чтобы соответствующая кривая начиналась в единице из* G_0, *то получатся геодезические из теоремы* 1 (*соответственно* 2).

Доказательство. Функция $x_1(t)$ из теоремы 1 (соответственно 2) не изменится, если аргумент у $\ln(\cdot)$ разделить на 2. Далее применение указанных значений D, B, формул из [6] и известных тригонометрических соотношений для перехода от 2σ к σ и обратно завершает доказательство предложения 6. □

Замечание 7. В [6] допускаются случаи $B = 0$ («мировые линии материи») и $B < 0$. Тогда согласно (37) в [6] $(\sqrt{2} - 1)^2 \le \alpha \le (\sqrt{2} + 1)^2$.

Разд. 5.7 в [15] называется «Модель Вселенной Гёделя».

Метрика записывается в виде

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 - \frac{1}{2}\exp(2\sqrt{2}\omega x)\,dy^2 + dz^2 - 2\exp(\sqrt{2}\omega x)\,dtdy, \qquad (37)$$

где $\omega > 0$ — постоянная угловая скорость вращения вектора потока u. При $\omega = \sqrt{2}/2$ и умножении на -1 метрика (37) изометрична метрике (1) при $a = 1$.

Орбиты (окружности) однопараметрической группы изометрических вращений в S_0 вокруг оси $r = 0$ для точек плоскости $t = 0$ в координатах (r, φ, t) изображены на рис. 31 в [15]. При $0 < r < \ln(\sqrt{2} + 1)$ они пространственноподобны, при $r = \ln(\sqrt{2} + 1)$ изотропны, при $r > \ln(\sqrt{2} + 1)$ времениподобны.

Заметим, что $\sqrt{2} + 1 = 1/\sqrt{\alpha_2}$.

В конце разд. 5.7 дается словесное описание времениподобных и изотропных геодезических. Повторим дословно описание последних: «Изотропные геодезические, проходящие через точку p на оси координат (рис. 31), первоначально расходятся (у оси), доходят до каустики $r = \ln(\sqrt{2} + 1)$ и затем сходятся к точке p' на оси», т. е. *нет замкнутых изотропных геодезических.*

При этом в [15] нет ссылок на источник этого утверждения, и в разд. 5.7 геодезические не исследуются. В последней фразе этого раздела говорится уже о другом и дается только ссылка на [1, 5]. Ссылок на [6] в [15] нет.

На с. 190 в [15] говорится, что решение Гёделя не имеет физического смысла.

В аннотации к [5] автор (тогда ученик Йордана) пишет, что в работе интегрируются дифференциальные уравнения геодезических в некоторой покоящейся относительно одной мировой линии материи инерциальной системе.

Кундт в статье [5] принимает (2) как исходный линейный элемент при $a = 1$ и получает после преобразования координат

$$x_1 = -\ln y, \quad x_2 = \sqrt{2}x, \quad 0 < y < \infty, \quad -\infty < x < \infty, \quad x_0 = t, \quad x_3 = z$$
$$: ds^2 = \left(dt + \frac{\sqrt{2}dx}{y}\right)^2 - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} + dz^2\right). \qquad (38)$$

Легко проверяется, что и временная, и пространственная компоненты этой метрики инвариантны относительно действия группы Ли G.

Как следствие (38) линейный элемент ds_0^2 в (3) можно записать в виде

$$ds_0^2 = \left(dt + \frac{\sqrt{2}dx}{y}\right)^2 - \left(\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}\right). \tag{39}$$

Известно, что пространственная компонента метрики (39) — плоскость Лобачевского гауссовой кривизны -1 в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости.

И временная, и пространственная компоненты этой метрики инвариантны относительно действия группы Ли G_0.

В работе [13] исследуются условия времениподобной и изотропной геодезической полноты, времениподобного схождения и слабого энергетического условия [19] для всех левоинвариантных лоренцевых метрик на группе $(\mathbb{R}, +) \times G_2 \times (\mathbb{R}, +)$. Для всех метрик составлены системы дифференциальных уравнений первого порядка для геодезических с началом в единице. Результаты получены в теореме 1 и суммированы в таблице из [13]. Из таблицы видно, что всем трем условиям подчинены только метрики системы 2б, включая метрику (1) Гёделя.

Также изучается причинная структура геодезически полных из рассмотренных многообразий. В теореме 2 со ссылкой на теорему 2 из [12] установлено, что лоренцевы многообразия из системы 2б полностью искаженные, т. е. любые две точки многообразия можно соединить некоторой времениподобной кривой. В [14] представлены и другие такие однородные лоренцевы пространства.

Приведем некоторые утверждения из статей [20, 21] о геодезических линиях Вселенной Гёделя с линейным элементом (37), взятым с обратным знаком. «Интегрируется система уравнений геодезических линий в элементарных функциях». Из второй: «Приводятся четыре первых интеграла системы уравнений геодезических линий. Поясняется физический смысл постоянных интегрирования. В результате полного интегрирования системы уравнений геодезических линий в декартовой системе координат выявляется пять семейств геодезических линий.» Видимо, в последнем утверждении речь идет о том, что если выбрана временная ориентация для времениподобных векторов, то получается пять видов геодезических линий: времениподобные и изотропные геодезические, направленные в будущее, пространственноподобные геодезические и времениподобные и изотропные геодезические, направленные в прошлое.

В обеих статьях для поиска геодезических применяются классические методы с использованием символов Кристоффеля, как в [5, 6], приводящие к системам ОДУ второго порядка. В ссылках к [20, 21] нет [5, 6, 15], а к [20] нет и [1].

Достаточного сходства геодезических из [20, 21] с найденными в [6] или в этой статье автор не нашел. Геодезических вида (10) из [20] не может быть. В работах [20, 21] нет утверждений о существовании или несуществовании замкнутых времениподобных или изотропных геодезических в общем случае.

Благодарности. Автор весьма признателен А. В. Левичеву за дискусии о Вселенной Гёделя и проявленный интерес. Автор благодарит И. А. Зубареву за критику и большую помощь в работе над статьей, а также анонимного рецензента за указание на статьи [7, 9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gödel K.* An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // Rev. Mod. Phys. 1949. V. 32, N 7. P. 1409–1417.

2. *Gödel K.* An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation // General Relativity and Gravitation. 2000. V. 21, N 3. P. 447–450.

3. *Gödel K.* Rotating universes in general relativity // Proc. Int. Congr. Math. Cambr. Mass. 1950. V. 1. P. 175–181.

4. *Ozsvath I., Schucking E.* Approaches to Gödel rotating universe // Class. Quantum Grav. 2001. V. 18. P. 2243–2252.

5. *Kundt W.* Trägheitsbahnen in einem von Gödel angegebenen kosmologischen Modell // Zeitschrift für Physik. 1956. V. 145, N 5. P. 611–620.

6. *Chandrasekhar S., Wright J. P.* The geodesics in Gödel universe // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1961. V. 47. P. 341–347.

7. *Camsi U.* Symmetries of geodesic motion in Gödel-type spacetimes // JCAP07. 2014. 002.

8. *Raychaudhuri A. K., Thakurta S.N.G.* Homogeneous spacetimes of the Gödel type // Phys. Rev. D. 1980. V. 22, N 4. P. 802–806.

9. *Al-Kindi F., Ziad M.* Lie-point symmetries of the geodesic equations of the Gödel's metric // The fifteenth Marcel Grossmann meeting. 2022. P. 1341–1346.

10. *Ellis G.F.R.* Contribution of Kurt Gödel to Relativity and Cosmology // Lecture Notes in Logic 6. Petr Hájek (Ed.) Gödel 96. Logical Foundations of Mathematics, Computer Science and Physics – Kurt Gödel Legacy. Brno, Czech Republic. August 1996, Proceedings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1996. P. 34–49.

11. *Гаврилов С. П.* Геодезические левоинвариантных метрик на связной двумерной неабелевой группе Ли // Гравитация и теория относительности. Казань, 1981. Т. 18. С. 28–44.

12. *Левичев А. В.* Методы исследования причинной структуры однородных лоренцевых многообразий // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 3. С. 39–54.

13. *Левичев А. В.* Причинная структура левоинвариантных лоренцевых метрик на группе $M_2 \times \mathbb{R}^2$ // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 4. С. 93–101.

14. *Левичев А. В.* Три полностью искаженные однородные лоренцевы пространства // Тр. Ин-та математики. 1992. Т. 21. С. 122–131.

15. *Хокинг С., Эллис Дж.* Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.

16. *Синг Дж. Л.* Общая теория относительности. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.

17. *Berestovskii V. N., Zubareva I. A.* Sub-Lorentzian geodesics on $GL^+(2,\mathbb{C})$ with the generating space of hermitian matrices in the Lie algebra $\mathfrak{gl}^+(2,\mathbb{C})$ //https://arXiv.org/abs/2310.08905. Pure and Applied Functional Analysis. Accepted.

18. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986.

19. *Бим Дж., Эрлих П.* Глобальная лоренцева геометрия. М.: Мир, 1985.

20. *Андроникова Е. О.* О геометрических свойствах Вселенной Гёделя // Вестн. МГОУ. Физика. Математика. 2017. № 1. С. 51–56.

21. *Андроникова Е. О.* О геометрических свойствах псевдориманова многообразия Вселенной Гёделя // Вестн. РГГУ. Математика. 2021. № 1. С. 66–80.

Поступила в редакцию 16 марта 2024 г.
После доработки 3 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.543.56

ГРУППОВЫЕ БИЕКЦИИ, ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ С ВНУТРЕННИМИ АВТОМОРФИЗМАМИ

А. Н. Бородин,
М. В. Нещадим, А. А. Симонов

Аннотация. Рассматриваются биекции произвольной группы G на себя, перестановочные со всеми внутренними автоморфизмами. Установлены общие свойства таких биекций. В частности, они образуют группу $B(G)$, которая содержит группу центральных автоморфизмов. Для групп диэдра D_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, получено полное описание групп $B(D_n)$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.504

Ключевые слова: группа, биекция, автоморфизм, класс сопряженности, инверсия, сплетение, квандл.

Введение

В работе [1] доказано, что если в обобщенном квандле Александера с операцией

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

построенного над группой G при помощи автоморфизма $\varphi \in \operatorname{Aut} G$, взять в качестве φ антиавтоморфизм, то такая конструкция также позволяет построить квандл тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$x\varphi(y)x^{-1} = \varphi(xyx^{-1}) \tag{1}$$

для произвольных $x, y \in G$.

Там же [1] сформулирована следующая

Проблема 1. *Пусть G — группа и φ — биективное отображение G на себя, удовлетворяющее соотношению* (1) *для любых x, $y \in G$. Описать все такие отображения φ.*

Кроме того, в [1] приведено полное описание таких биекций для симметрической группы S_3 на трех элементах и для абсолютно свободных групп.

Отметим, что условие (1) появляется также и в работе Кона [2], где автор рассматривал эквивалентное определение тела, построенного при помощи унарной операции φ, действующей на мультипликативной группе. Для построения тела помимо (1) требуется выполнение еще трех условий. Сама функция φ не является автоморфизмом или антиавтоморфизмом, она является некоторой специальной биекцией, удовлетворяющей трем дополнительным условиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

© 2024 Бородин А. Н., Нещадим М. В., Симонов А. А.

В предлагаемой работе рассматривается множество биекций $\varphi \in B(G)$, действующих над произвольной группой G, для которых выполнено условие (1). Устанавливаются некоторые общие свойства множества $B(G)$ над произвольными группами G. В частности, доказывается, что $B(G)$ — группа относительно операции композиции отображений.

В качестве приложения получено полное описание группы $B(G)$ для всех групп диэдра.

В заключительной части работы рассматриваются некоторые возможные обобщения формулировки проблемы 1 для квандлов и групп.

§ 1 Предварительные сведения и общие результаты

Установим некоторые общие свойства биекций группы G на себя, удовлетворяющих (1).

Лемма 1. (1) *Если* 1 — *единица группы* G, *то* $\varphi(1)$ — *центральный элемент группы* G.

(2) *Если группа* G *имеет нетривиальный центр* $Z(G)$, *то, взяв произвольную биекцию центра на себя и продолжив ее тождественно на дополнение* $G \backslash Z(G)$, *получим биекцию группы* G, *которая удовлетворяет соотношению* (1).

Доказательство. (1) Если положить $y = 1$ в (1), то $\varphi(1) = x\varphi(1)x^{-1}$. Из произвольности x следует, что $\varphi(1)$ — центральный элемент группы G.

Утверждение (2) очевидно. $\square$

Следствие 1. *Если центр группы* G *тривиален, то* $\varphi(1) = 1$.

Следствие 2. *Если группа* G *абелева, то отображение* φ — *произвольная биекция.*

Лемма 2. *Для любого элемента* x *группы* G *и любого целого* n *элемент* $\varphi(x^n)$ *лежит в централизаторе* $C_G(x)$ *элемента* x *группы* G.

Доказательство. Если в (1) $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\varphi(x^n) = x\varphi(x^n)x^{-1}$. Следовательно, $\varphi(x^n)$ лежит в централизаторе $C_G(x)$ элемента x группы G. $\square$

Лемма 3. *Если элемент* $x \in G$ *перестановочен с элементом* $y \in G$, *то элемент* $x \in G$ *также перестановочен с элементом* $\varphi(y) \in G$, *т. е. централизаторы элементов* y *и* $\varphi(y)$ *совпадают:*

$$C_G(y) = C_G(\varphi(y)), \quad y \in G.$$

Поэтому если $C_G(y) \neq C_G(z)$, *то нет биекции со свойством* (1), *которая переводит* y *в* z.

Доказательство очевидно.

Лемма 4. *Классы сопряженности элементов* y *и* $\varphi(y)$ *должны быть равномощными.*

Доказательство следует из того, что формула (1) как раз и определяет отображение классов сопряженности элементов y и $\varphi(y)$.

Определим $B(G)$ как множество всех биективных отображений группы G на себя, которые перестановочны со всеми внутренними автоморфизмами.

Лемма 5. *Множество $B(G)$ является группой относительно операции композиции отображений.*

Доказательство. Замкнутость относительно произведения:

$$\varphi\psi(xyx^{-1}) = \varphi(x\psi(y)x^{-1}) = x\varphi\psi(y)x^{-1}.$$

Единицей является тождественная биекция.

Если φ^{-1} обратная биекция, то $\varphi(x\varphi^{-1}(y)x^{-1}) = xyx^{-1}$, т. е. $x\varphi^{-1}(y)x^{-1} = \varphi^{-1}(xyx^{-1})$.

Ассоциативность очевидна. $\square$

Группы $B(G)$ и $\operatorname{Aut} G$ являются подгруппами в группе всех симметрий множества G.

Лемма 6. *Группа $\operatorname{Aut} G$ нормализует группу $B(G)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in B(G)$, $f \in \operatorname{Aut} G$ и $x, y \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} f\varphi f^{-1}(xyx^{-1}) &= f\varphi(f^{-1}(x)f^{-1}(y)f^{-1}(x)^{-1}) \\ &= f(f^{-1}(x)\varphi(f^{-1}(y))f^{-1}(x)^{-1}) = xf\varphi f^{-1}(y)x^{-1}. \quad \square \end{aligned}$$

Итак, группа $B(G)$ является нормальной подгруппой в произведении $\operatorname{Aut} G \cdot B(G)$, перестановочной с подгруппой внутренних автоморфизмов $\operatorname{Inn} G$. Причем при действии группы $\operatorname{Aut} G$ на группе $B(G)$ действует фактически группа внешних автоморфизмов $\operatorname{Out} G$.

Лемма 7. *Пересечение $B(G) \cap \operatorname{Aut} G$ совпадает с группой $\operatorname{Aut}_c G$ центральных автоморфизмов группы G.*

Доказательство. Действительно, пусть $\varphi \in B(G) \cap \operatorname{Aut} G$, тогда

$$\varphi(xyx^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}$$

и

$$\varphi(xyx^{-1}) = x\varphi(y)x^{-1}.$$

Следовательно,

$$x^{-1}\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)x^{-1}\varphi(x).$$

Так как x, y — произвольные элементы группы G, то $c(x) = x^{-1}\varphi(x)$ лежит в центре $Z(G)$ группы G, т. е.

$$\varphi(x) = x \cdot c(x), \quad x \in G,\ c(x) \in Z(G).$$

Обратно, если φ — центральный автоморфизм группы G, то

$$\varphi(xyx^{-1}) = xc(x)yc(y)(xc(x))^{-1} = xyc(y)x^{-1} = x\varphi(y)x^{-1}. \quad \square$$

Интересно было бы найти факторгруппу $B(G)/\operatorname{Aut}_c G$.

Также отметим, что $B(G)$ всегда содержит инверсию $\iota : x \mapsto x^{-1}$, $x \in G$. Если инверсия ι является тождественным отображением, то в группе G выполнено тождество $x^2 = 1$, $x \in G$. Такая группа является абелевой и любой ее автоморфизм является центральным. Следовательно, в этом случае $B(G) \supseteq \operatorname{Aut} G$.

Если же группа G неабелева, то инверсия ι не является автоморфизмом. Поэтому если $B(G) = \operatorname{Aut} G$, то группа G абелева с тождеством $x^2 = 1$, $x \in G$. Но в такой группе любая биекция группы G лежит в $B(G)$. Если при этом группа G нетривиальная, то есть биекции, которые не оставляют единицу группы G на месте. Следовательно, $B(G) = \operatorname{Aut} G$ тогда и только тогда, когда $G = 1$ — тривиальная группа.

§ 2. Описание групп $B(G)$ для групп диэдра

Напомним, что бесконечная группа диэдра задается копредставлением [3]

$$D = D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle,$$

а конечная группа диэдра задается копредставлением

$$D_n = \langle a, b \mid a^n = b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle,$$

где n — некоторое натуральное число.

Для формулировки основных результатов нам понадобится конструкция сплетения двух групп по некоторому множеству [4, 5].

Пусть заданы

1) B — группа, которая действует на множестве X:

$$B \times X \to X, \quad (b, x) \mapsto bx, \quad b \in B,\ x \in X,$$

2) A — группа и множество функций $\mathrm{Fun}(X, A)$ из множества X в группу A, которое является группой относительно операции покомпонентного умножения функций:

$$f, g \in \mathrm{Fun}(X, A) \mapsto fg \in \mathrm{Fun}(X, A),$$

где

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad x \in X.$$

Тогда множество пар bf, $b \in B$, $f \in \mathrm{Fun}(X, A)$, является группой относительно операции

$$b_1 f_1 \cdot b_2 f_2 = b_1 b_2 f_1^{b_2} f_2, \quad b_1, b_2 \in B, \quad f_1, f_2 \in \mathrm{Fun}(X, A),$$

где

$$f_1^{b_2}(x) = f_1(b_2 x), \quad x \in X,$$

и называется *сплетением групп A и B по множеству X*. Обозначение $A \wr_X B$. Отметим также, что сплетение $A \wr_X B$ можно представить в виде произведения

$$A \wr_X B = B\,\mathrm{Fun}(X, A)$$

своих подгрупп B и $\mathrm{Fun}(X, A)$.

Данная конструкция сплетения будет применяться в следующей ситуации. Пусть есть набор упорядоченных пар элементов

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_m, y_m),$$

где $x_1, y_1, \dots, x_m, y_m$ — попарно различные элементы из некоторого множества, число пар m может быть бесконечным. Рассматриваются всевозможные взаимно-однозначные отображения этих пар такие, что

1) пары переходят в пары,

2) элементы в паре могут переставляться.

Нетрудно понять, что множество таких отображений является сплетением $\mathbb{Z}_2 \wr_{X_m} S_m$ циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$ с помощью симметрической группы S_m степени m, которая действует подстановками на множестве $X_m = \{1, 2, \dots, m\}$. В силу вышесказанного имеет место равенство

$$\mathbb{Z}_2 \wr_{X_m} S_m = S_m\,\mathrm{Fun}(X_m, \mathbb{Z}_2).$$

Теорема 1. *Для бесконечной группы диэдра*

$$D = D_\infty = \langle a, b \mid b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle$$

группа $B(D)$ имеет следующее строение:

$$B(D) = \mathbb{Z}_2 \wr_{\mathbb{N}} S_\infty$$

— сплетение симметрической группы S_∞, которая действует подстановками на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Так как $Z(D) = 1$, в силу следствия 1 $\varphi(1) = 1$.

Далее, известно, что группа диэдра D имеет разбиение

$$D = \{1\} \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{a^k, a^{-k}\} \sqcup \{ab, a^{-1}b, a^3b, a^{-3}b, \dots\} \sqcup \{a^2b, a^{-2}b, a^4b, a^{-4}b, \dots\}$$

на классы сопряженных элементов.

Укажем централизаторы элементов:

$$C(a^k) = \langle a \rangle, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$C(a^kb) = \langle a^kb \rangle = \{1, a^kb\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\varphi \in B(G)$. Тогда возможны только следующие отображения:

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{a^k, a^{-k}\},$$

и в силу того, что $\varphi(1) = 1$,

$$\varphi(a^kb) = a^kb, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$B(D) = S_\infty \cdot \mathrm{Fun}(\mathbb{N}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \wr_{\mathbb{N}} S_\infty$$

— сплетение симметрической группы S_∞, которая действует подстановками на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Теорема 2. *Для группы диэдра*

$$D_{2m+1} = \langle a, b \mid a^{2m+1} = b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle$$

группа $B(D_{2m+1})$ имеет следующее строение:

$$B(D_{2m+1}) = \mathbb{Z}_2 \wr_{X_m} S_m$$

— сплетение симметрической группы S_m, которая действует подстановками на множестве $X_m = \{1, \dots, m\}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Так как $Z(D_{2m+1}) = 1$, в силу следствия 1 $\varphi(1) = 1$.

Далее, известно, что группа диэдра D_{2m+1} имеет следующее разбиение:

$$D_{2m+1} = \{1\} \bigsqcup_{k=1}^{m} \{a^k, a^{-k}\} \sqcup \{a^kb, \mid k = 0, \dots, 2m\}$$

на классы сопряженных элементов.

Укажем централизаторы элементов:

$$C(a^k) = \langle a \rangle, \quad k = 1, 2, \dots, 2m,$$

$$C(a^k b) = \langle a^k b \rangle = \{1, a^k b\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m.$$

Пусть $\varphi \in B(D)$. Тогда возможны только следующие отображения:

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{m} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \{a^k, a^{-k}\},$$

и в силу того что $\varphi(1) = 1$,

$$\varphi(a^k b) = a^k b, \quad k = 0, 1, \dots, 2m.$$

Следовательно,

$$B(D) = S_m \cdot \mathrm{Fun}(X_m, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \wr_{X_m} S_m$$

— сплетение симметрической группы S_m, которая действует подстановками на множестве $X_m = \{1, \dots, m\}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$. $\square$

Теорема 3. *Для группы диэдра*

$$D_{4m} = \langle a, b \mid a^{4m} = b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle$$

группа $B(D_{4m})$ имеет следующее строение:

$$B(D_{4m}) \cong \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m-1}} S_{2m-1}$$

и

$$B(D_{4m}) / \operatorname{Aut}_c D_{4m} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m-1}} S_{2m-1}.$$

Доказательство. Так как $Z(D_{4m}) = \{1, a^{2m}\}$, есть биекция

$$\varphi(1) = a^{2m}, \quad \varphi(a^{2m}) = 1.$$

Далее, известно, что группа диэдра D_{4m} имеет следующее разбиение:

$$D_{4m} = \{1\} \sqcup \{a^{2m}\} \bigsqcup_{k=1}^{2m-1} \{a^k, a^{-k}\}$$
$$\sqcup \{a^{2k} b \mid k = 0, 1, \dots, 2m-1\} \sqcup \{a^{2k+1} b \mid k = 0, 1, \dots, 2m-1\}$$

на классы сопряженных элементов.

Укажем централизаторы элементов:

$$C(1) = C(a^{2m}) = D_{4m};$$

$$C(a^k) = \langle a \rangle, \quad k = 1, \dots, 4m-1,\ k \neq 2m;$$

$$C(a^k b) = C(a^{k+2m} b) = \langle a^k b, a^{2m} \rangle = \{1, a^k b, a^{2m}, a^{k+2m} b\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Пусть $\varphi \in B(D_{4m})$. Тогда возможны только следующие отображения:

$$\varphi : \{1, a^{2m}\} \to \{1, a^{2m}\},$$

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{2m-1} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{2m-1} \{a^k, a^{-k}\},$$

$$\varphi : \{a^k b, a^{k+2m} b\} \to \{a^k b, a^{k+2m} b\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m-1.$$

Нетрудно заметить, что $\operatorname{Aut}_c D_{4m} = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \langle \alpha, \beta \rangle$, где

$$\alpha(a) = a,\ \alpha(b) = a^{2m}b, \quad \beta(a) = a^{2m+1},\ \beta(b) = b.$$

Поэтому по модулю центральных автоморфизмов можно считать, что

$$\varphi(b) = b, \quad \varphi(ab) = ab.$$

Но тогда, полагая в равенстве $\varphi(xbx^{-1}) = x\varphi(b)x^{-1} = xbx^{-1}$ последовательно $x = a, \dots, a^{2m-1}$, получим

$$\varphi(a^{2k}b) = a^{2k}b, \quad k = 1, \dots, 2m-1.$$

Аналогично, полагая в равенстве $\varphi(xabx^{-1}) = x\varphi(ab)x^{-1} = xabx^{-1}$ последовательно $x = a, \dots, a^{2m-1}$, получим

$$\varphi(a^{2k+1}b) = a^{2k+1}b, \quad k = 1, \dots, 2m-1.$$

Итак, $\varphi(a^k b) = a^k b$, $k = 0, 1, \dots, 4m-1$.

Биекции

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{2m-1} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{2m-1} \{a^k, a^{-k}\}$$

образуют группу $S_{2m-1} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m-1}, \mathbb{Z}_2)$ — сплетение симметрической группы S_{2m-1}, которая действует подстановками на множестве $X_{2m-1} = \{1, \dots, 2m-1\}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$.

Таким образом,

$$B(D_{4m}) \cong \mathbb{Z}_2^3 \times S_{2m-1} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m-1}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^3 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m-1}} S_{2m-1}$$

и

$$B(D_{4m})/\operatorname{Aut}_c D_{4m} \cong \mathbb{Z}_2 \times S_{2m-1} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m-1}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m-1}} S_{2m-1}. \quad \square$$

Теорема 4. *Для группы диэдра*

$$D_{2(2m+1)} = \langle a, b \mid a^{2(2m+1)} = b^2 = 1,\ bab = a^{-1} \rangle$$

группа $B(D_{2(2m+1)})$ имеет следующее строение:

$$B(D_{2(2m+1)}) \cong \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m}} S_{2m}$$

и

$$B(D_{2(2m+1)})/\operatorname{Aut}_c D_{2(2m+1)} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m}} S_{2m}.$$

Доказательство. Так как $Z(D_{2(2m+1)}) = \{1, a^{2m+1}\}$, есть биекция

$$\varphi(1) = a^{2m+1}, \quad \varphi(a^{2m+1}) = 1.$$

Далее, известно, что группа диэдра $D_{2(2m+1)}$ имеет разбиение

$$D_{2(2m+1)} = \{1\} \sqcup \{a^{2m+1}\} \bigsqcup_{k=1}^{2m} \{a^k, a^{-k}\} \\ \sqcup \{a^{2k}b \mid k = 0, \dots, 2m\} \sqcup \{a^{2k+1}b \mid k = 0, \dots, 2m\}$$

на классы сопряженных элементов.

Укажем централизаторы элементов:

$$C(1) = C(a^{2m+1}) = D_{2(2m+1)},$$

$$C(a^k) = \langle a \rangle, \quad k = 1, \dots, 4m, \ k \neq 2m+1,$$

$$C(a^k b) = C(a^{k+2m+1} b) = \langle a^k b, a^{2m+1} \rangle = \{1, a^k b, a^{2m+1}, a^{k+2m+1} b\}, \ k = 0, \dots, 2m.$$

Пусть $\varphi \in B(G)$. Тогда возможны только следующие отображения:

$$\varphi : \{1, a^{2m+1}\} \to \{1, a^{2m+1}\},$$

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{2m} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{2m} \{a^k, a^{-k}\},$$

$$\varphi : \{a^k b, a^{k+2m+1} b\} \to \{a^k b, a^{k+2m+1} b\}, \quad k = 0, \dots, 2m.$$

Нетрудно заметить, что $\operatorname{Aut}_c D_{2(2m+1)} = \mathbb{Z}_2 = \langle \theta \rangle$, где центральный автоморфизм θ определяется следующим образом:

$$\theta(a) = a, \quad \theta(b) = a^{2m+1} b.$$

Поэтому по модулю центральных автоморфизмов можно считать, что

$$\varphi(b) = b, \quad \varphi(a^{2m+1} b) = a^{2m+1} b.$$

Но тогда, полагая в равенстве $\varphi(xbx^{-1}) = x\varphi(b)x^{-1} = xbx^{-1}$ последовательно $x = a, \dots, a^{2m}$, получим

$$\varphi(a^{2k} b) = a^{2k} b, \quad k = 1, \dots, 2m.$$

Учитывая вышеприведенные возможности для φ (пара $\{a^k b, a^{k+2m+1} b\}$ содержит четную и нечетную степени элемента a), получаем

$$\varphi(a^{2k+1} b) = a^{2k+1} b, \quad k = 1, \dots, 2m.$$

Итак, $\varphi(a^k b) = a^k b$, $k = 0, \dots, 4m$.

Биекции

$$\varphi : \bigsqcup_{k=1}^{2m} \{a^k, a^{-k}\} \to \bigsqcup_{k=1}^{2m} \{a^k, a^{-k}\}$$

образуют группу $S_{2m} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m}, \mathbb{Z}_2)$ — сплетение симметрической группы S_{2m}, которая действует подстановками на множестве $X_{2m} = \{1, \dots, 2m\}$, и циклической группы второго порядка $\mathbb{Z}_2$.

Таким образом,

$$B(D_{2(2m+1)}) \cong \mathbb{Z}_2^2 \times S_{2m} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m}} S_{2m}$$

и

$$B(D_{2(2m+1)}) / \operatorname{Aut}_c D_{2(2m+1)} \cong \mathbb{Z}_2 \times S_{2m} \cdot \operatorname{Fun}(X_{2m}, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \wr_{X_{2m}} S_{2m}. \quad \square$$

В связи с доказанными утверждениями интересно было бы получить описание групп $B(G)$ для классических групп. Например, для

(1) групп матриц над полем, кольцом,

(2) свободных групп в некотором многообразии,

(3) свободных произведений и HNN-расширений групп,

(4) конечных и бесконечных симметрических групп (финитарных и общих), знакопеременных групп,

(5) групп кос,

(6) простых групп,

(7) G-групп, у которых все неединичные элементы сопряжены,

(8) групп Баумслага — Солитера

и т. д.

Заключение

Проблема 1 может быть сформулирована также для квандлов и, кроме того, ее формулировка допускает некоторые естественные обобщения.

Напомним определение квандла [6, 7].

Определение 1. *Квандлом* называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$, с операциями умножения «$\circ$» и деления «$/$», в которой для произвольных $x, y, z \in Q$ выполняются условия:

1) разрешимости слева, что эквивалентно делению справа $(x \circ y)/y = x$,
2) идемпотентности $x \circ x = x$,
3) дистрибутивности $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Аналог проблемы 1 для квандлов формулируется следующим образом.

Проблема 2. *Пусть $\langle K, \circ \rangle$ — квандл и φ — биективное отображение K на себя такое, что*

$$\varphi(y \circ x) = \varphi(y) \circ x \tag{2}$$

для любых x, $y \in K$. Описать все такие отображения φ.

Так как отображение

$$S_x : y \mapsto y \circ x, \quad y, x \in K,$$

является внутренним автоморфизмом квандла, равенство (2) означает, что отображение φ перестановочно с действиями внутренних автоморфизмов квандла и принимает следующий вид:

$$\varphi(S_x(y)) = S_x(\varphi(y)), \quad y, x \in K. \tag{3}$$

Например, если квандл $\langle K, \circ \rangle$ является Conj-квандлом [8], построенным по группе G, т. е. $K = G$ и

$$y \circ x = xyx^{-1}, \quad y, x \in G,$$

то равенство (2) в точности совпадает с (1).

Сделаем следующее

Замечание 1. В силу аксиомы идемпотентности

$$\varphi(x) = \varphi(x \circ x) = \varphi(x) \circ x, \quad x \in K. \tag{4}$$

Поэтому $\varphi(x)$ — неподвижная точка автоморфизма S_x.

Это замечание позволяет доказать, что если группа G не имеет 2-кручения, то для Core-квандла [6], построенного по группе G, только тождественные биекции удовлетворяют соотношению (2). Действительно, операция в Core-квандле, построенном по группе G, задается формулой

$$y \circ x = xy^{-1}x, \quad y, x \in G.$$

Тогда соотношение (4) принимает вид

$$\varphi(x) = x\varphi(x)^{-1}x, \quad x \in G,$$

или

$$(\varphi(x)x^{-1})^2 = 1, \quad x \in G.$$

Так как группа G не имеет 2-кручения, то

$$\varphi(x)x^{-1} = 1, \quad x \in G,$$

т. е.

$$\varphi(x) = x, \quad x \in G.$$

Если же в группе есть G нетривиальные элементы порядка 2, то

$$\varphi(x) = \theta(x)x, \quad x \in G,$$

где $\theta : G \to T_2(G)$ — некоторое отображение из группы G в множество $T_2(G)$ элементов порядка 2 в группе G. Это отображение не может быть произвольным. Так, из соотношения

$$\varphi(y \circ x) = x\varphi(y)^{-1}x, \quad y, x \in G,$$

следует, что

$$\theta(y \circ x) \cdot (y \circ x) = x(\theta(y)y)^{-1}x,$$
$$\theta(xy^{-1}x)xy^{-1}x = xy^{-1}\theta(y)^{-1}x,$$
$$\theta(xy^{-1}x)xy^{-1} = xy^{-1}\theta(y)^{-1}.$$

Так как $xy^{-1} = z$ — произвольный элемент группы G и $\theta(y)$ — элемент второго порядка, то

$$\theta(zx) = z\theta(z^{-1}x)z^{-1}, \quad z, x \in G. \tag{5}$$

Вопрос 1. *Достаточно ли выполнение равенства* (5) *для того, чтобы отображение* φ *удовлетворяло соотношению* (2) *для Core-квандла, построенного по группе* G*?*

Для групп можно также сформулировать расширенный аналог проблемы 1.

Проблема 3. *Пусть* G *— группа и* φ *— биективное отображение* G *на себя такое, что*

$$\varphi(f(x)) = f(\varphi(x)) \tag{6}$$

для любых $x \in G$ *и для любых* $f \in F$*, где* F *— некоторая фиксированная подгруппа (подмножество) в группе автоморфизмов* $\operatorname{Aut} G$ *группы* G*. Описать все такие отображения* φ*.*

Обозначим множество таких биекций группы G на себя через $B_F(G)$. Покажем, что это группа относительно операции композиции отображений.

Замкнутость относительно произведения:

$$\varphi\psi(f(x)) = \varphi(f(\psi(x))) = f(\varphi\psi(x)),$$

где $f \in F$, $\varphi, \psi \in B_F(G)$

Единицей является тождественная биекция.

Если φ^{-1} обратная биекция, то

$$\varphi(f(\varphi^{-1}(x))) = f(\varphi\varphi^{-1}(x)) = f(x),$$

т. е.

$$f(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(f(x)).$$

Ассоциативность очевидна.

В качестве подгруппы $F \leq \operatorname{Aut} G$ можно взять, например, группу внутренних автоморфизмов, группу нормальных автоморфизмов, группу центральных автоморфизмов и т. д.

В качестве примера рассмотрим случай, когда F состоит из одной инверсии

$$\iota : x \mapsto x^{-1}, \quad x \in G.$$

Тогда равенство (6) принимает вид

$$\varphi(x^{-1}) = (\varphi(x))^{-1}.$$

Если $x^{-1} = x$, то

$$\varphi(x) = (\varphi(x))^{-1},$$

т. е. если $x^2 = 1$, то $(\varphi(x))^2 = 1$. Поэтому φ переводит множество $G_2 = \{x \in G \mid x^2 = 1\}$ элементов второго порядка в себя, причем на G_2 отображение φ можно задать произвольным биективным способом. Оставшиеся элементы разбиваются естественным образом на двухэлементные множества $\{a, a^{-1}\}$, $a \in G \backslash G_2$. Так как если $\varphi(a) = b$, то $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1} = b^{-1}$, то φ — произвольное биективное отображение множества A таких пар на себя, которое может переставлять элементы в парах. Итак, в данном случае множество биекций совпадает со следующей группой преобразований множества G:

$$S(G_2) \times S(A) \operatorname{Fun}(A, \mathbb{Z}_2) = S(G_2) \times \mathbb{Z}_2 \wr_A S(A),$$

где $S(G_2)$ — группа перестановок множества G_2, $S(A)$ — группа перестановок множества A.

В заключение отметим, что результаты, связанные с автоморфизмами квандлов и связанными с ними алгебраическими структурами, можно найти в работах [7, 9–13] и цитируемой в них литературе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Симонов А. А., Нещадим М. В., Бородин А. Н.* Конструкции квандлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.
2. *Кон П. М.* Свободные кольца и их связи. М.: Мир, 1975.
3. *Serre J.P.* Linear representations of finite groups. New York: Springer-Verl., 1977.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1996.
5. *Hall M.* The theory of groups. New York: Macmillan Co, 1959.
6. *Матвеев С. В.* Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.
7. *Joyce D.* A classifying invariant of knots: the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. P. 37–65.
8. *Stein K. S.* Left-distributive quasigroups // Proc. Am. Math. Soc. 1959. V. 10, N 4. P. 577–578.
9. *Bardakov V. G., Nasybullov T., Singh M.* General constructions of biquandles and their symmetries // J. Pure Appl. Algebra. 2022. V 226, N 7. 106936.
10. *Bardakov V. G., Singh M.* Quandle cohomology, extensions and automorphisms // J. Algebra. 2021. V. 585. P. 558–591.
11. *Elhamdadi M., Macquarrie J., Restrepo R.* Automorphism groups of quandles // J. Algebra Appl. 2012. V. 11, N 01. P. 12.
12. *Bardakov V. G., Dey P., Singh M.* Automorphism groups of quandles arising from groups // Monatsh. Math. 2017. V. 184. P. 519–530.
13. *Bardakov V. G., Nasybullov T., Singh M.* Automorphism groups of quandles and related

groups // Monatsh. Math. 2019. V. 189, N 1. P. 1–21.

Поступила в редакцию 2 мая 2024 г.
После доработки 5 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Бородин Александр Николаевич
Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 659700
serajsova@yandex.ru

Нещадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артёмович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.518+517.54

ФУНКЦИОНАЛЬНО–ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ ACL–ОТОБРАЖЕНИЙ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

С. К. Водопьянов

Аннотация. Исследуются функциональные и геометрические свойства пределов ACL-отображений областей в группах Карно, имеющих интегрируемое искажение. Получены условия, при выполнении которых пределы последовательностей таких отображений также принадлежат классу ACL. Кроме того, пределы имеют конечное искажение и обладают $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.505

Ключевые слова: ACL-отображение, отображение класса Соболева, группа Карно, отображение с конечным искажением, внешняя операторная функция искажения, функциональное и геометрическое свойство предела ACL-отображений, $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина.

§ 1. Введение

Некоторые задачи нелинейной теории упругости (например, для гиперупругих материалов) сводятся к задаче минимизации функционала полной энергии [1]. В этой ситуации, в отличие от случая линейной теории упругости, подынтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов решения вариационных задач. Тем не менее существует заложенная Боллом математическая теория, в рамках которой можно исследовать функционалы полной энергии и моделировать достаточно широкий класс прикладных задач [2, 3].

В работе [4] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-е гг. прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка, см. [5]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

В работе [6] были заложены основы математической теории для решения вариационных задач нелинейной теории упругости [7, 8] на группах Карно: для произвольных групп Карно были установлены функциональные и геометрические свойства отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, а в случае групп Карно $\mathbb{H}$-типа — его

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект № FWNF-2022-0006).

© 2024 Водопьянов С. К.

свойство инъективности почти всюду. Многие ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно $\mathbb{H}$-типа, необходимые для решения поставленных задач, получены в недавних работах [9–11].

В настоящей работе мы исследуем функциональные и геометрические свойства пределов ACL-отображений (не обязательно гомеоморфных) с интегрируемым искажением областей в группах Карно. Получены условия, при выполнении которых пределы последовательностей таких отображений также принадлежат классу ACL с некоторыми дополнительными свойствами. Кроме того, мы доказываем, что пределы имеют конечное искажение и обладают $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина, и другие свойства (см. теорему 2).

§ 2. Предварительные сведения

Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной градуированной нильпотентной группой* или *группой Карно* (см., например, [12]) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_m$ ненулевых подпространств $\mathfrak{g}_i$, удовлетворяющих условиям $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$. Группа *двухступенчатая*, если $m = 2$.

Фиксируем скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1$ — *горизонтальное пространство* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальные векторные поля*. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Для удобства также обозначим $n = n_1$. Зафиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение

$$g = \exp\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij}\right)(e)$$

(где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathbb{G}$ [12], мы можем отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ, заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \to [0, +\infty)$ такая, что

(a) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(b) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda \rho(x)$.

Из определения также следует [12]:

(c) существует число $c > 0$ такое, что $\rho(xy) \le c\big(\rho(x) + \rho(y)\big)$ для всех $x, y \in \mathbb{G}$;

(d) любые две однородные нормы эквивалентны, т. е. для любых двух однородных норм ρ_1, ρ_2 найдутся числа $0 < \alpha \le \beta < \infty$ такие, что $\alpha\rho_1(x) \le \rho_2(x) \le \beta\rho_1(x)$ для всех $x \in \mathbb{G}$.

Кусочно-гладкая кривая $\gamma : [a; b] \to \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot\gamma(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$ для п. вс. t. *Расстоянием Карно — Каратеодори* $d_{cc}(x, y)$ между точками x, $y \in \mathbb{G}$ называется точная нижняя грань длин $\int\limits_a^b |\dot\gamma(t)|\, dt$ горизонтальных кривых с концевыми точками x и y. Отметим, что согласно теореме Рашевского — Чоу (см., например, [13]) любые две точки можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины. Метрика d_{cc} и однородная норма ρ эквивалентны: существуют положительные постоянные α и β

такие, что

$$\alpha d_{cc}(x,y) \le \rho(y^{-1}x) \le \beta d_{cc}(x,y).$$

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{m} i\, n_i$ — *однородная размерность* группы $\mathbb{G}$. Мера нормирована так, что ее значение на единичном шаре $B(0,1)$ равно единице, $|B(0,1)| = 1$. Здесь $B(0,1) = \{x \in \mathbb{G} \mid d_{cc}(0,x) < 1\}$ — шар в метрике Карно — Каратеодори.

Группа Карно $\mathbb{H}$ называется *группой Карно* $\mathbb{H}$*-типа*, если она является двухступенчатой и ее алгебра Ли $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$ может быть снабжена скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ таким, что $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$ и для каждого поля $Z \in \mathfrak{h}_2$ единичной длины линейное отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1 \to \mathfrak{h}_1$, определенное соотношением

$$\langle J_Z(X), Y\rangle = \langle Z, [X,Y]\rangle,\ X, Y \in \mathfrak{h}_1,$$

ортогональное.

Пример. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$ с групповой операцией

$$(x,y,z) * (x',y',z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{2}\right),$$

$x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k$, $z, z' \in \mathbb{R}$, — классический пример неабелевой группы Карно $\mathbb{H}$-типа. Ее алгебра Ли $\mathfrak{h}^k$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, k, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^k = \operatorname{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \dots, k\}$, $\mathfrak{h}_2^k = \operatorname{span}\{Z\}$, а нетривиальными скобками Ли являются лишь $[X_i, Y_i] = Z$, $i = 1, \dots, k$. Однородная размерность $\mathbb{H}^k$ равна $\nu = 2k + 2$. Если скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ такое, что векторные поля X_i, Y_i, $i = 1, \dots, k$, Z образуют ортонормированную систему, то отображение $J_Z : \mathfrak{h}_1^k \to \mathfrak{h}_1^k$ определяется соотношениями $J_Z(X_i) = -Y_i$, $J_Z(Y_i) = -X_i$ и, очевидно, является ортогональным.

ACL-отображения и отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ — область (непустое связное открытое множество в $\mathbb{G}$). Пространство $L_p(\Omega)$, $p \ge 1$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, интегрируемых в p-й степени. Норма на $L_p(\Omega)$ определяется как

$$\|u \mid L_p(\Omega)\| = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Говорим, что $u \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, \dots, X_n$ образуют базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$, и пусть Π_j — гиперплоскость $x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Мера $d\mu_j = \imath(X_j)\, dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$. Говорим, что отображение $\varphi : \Omega \to M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M *абсолютно непрерывно на линиях*, $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega; M)$, если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого $j = 1, \dots, n$ оно было абсолютно непрерывным на $\gamma_j(t) \cap \Omega$ для μ_j-почти всех $y \in \Pi_j$.

Пространство функций Соболева $L^1_p(\Omega)$, $p \geq 1$, состоит из функций $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{R})$ таких, что производные $X_j u$ (существующие п. вс.) принадлежат $L_p(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Полунорма функции $u \in L^1_p(\Omega)$ равна

$$\big\|u \mid L^1_p(\Omega)\big\| = \| \, |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\|,$$

где $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u)$ — *горизонтальный градиент* u, а $|\nabla_h u|$ — его длина. Далее вместо $\| \, |\nabla_h u| \mid L_p(\Omega)\|$ будем писать $\|\nabla_h u \mid L_p(\Omega)\|$.

Эквивалентное определение пространства $L^1_p(\Omega)$ основано на понятии обобщенной производной [14]: локально суммируемая функция $u_i : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции* $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ *вдоль векторного поля* X_i, $i = 1, \dots, n$, если

$$\int\limits_{\Omega} u_i(x) v(x)\, dx = -\int\limits_{\Omega} u(x) X_i v(x)\, dx$$

для любой тестовой функции $v \in C^\infty_0(\Omega)$. Локально суммируемая функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит $L^1_p(\Omega)$ в том и только том случае, когда существуют ее обобщенные производные $u_i \in L_p(\Omega)$, $i = 1 \dots, n$. При этом $u_i = X_i u$, где $X_i u$ — классические производные функции $u \in \mathrm{ACL}(\Omega)$, существующие п. вс.

Пространство Соболева $W^1_p(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega) \cap L^1_p(\Omega)$ и снабжено нормой

$$\big\|u \mid W^1_p(\Omega)\big\| = \|u \mid L_p(\Omega)\| + \big\|u \mid L^1_p(\Omega)\big\|.$$

Пусть $\mathbb{G}$, $\widetilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j\varphi(x) \in \mathfrak{g}_1(x)$ для п. вс. $x \in \Omega$ (см. [15, предложение 4.1]). Матрица $D_h\varphi(x) = (X_i\varphi_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \widetilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h\varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \to \widetilde{\mathfrak{g}}_1$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ. Известно (см. [14, теорема 1.2]), что для п. вс. $x \in \Omega$ отображение $D_h\varphi(x)$ определено и может быть продолжено до гомоморфизма алгебр Ли $\widehat{D}\varphi(x) : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\widehat{D}\varphi(x) : T_x\mathbb{G} \to T_{\varphi(x)}\widetilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов оцениваются друг через друга:

$$|D_h\varphi(x)| \leq |\widehat{D}\varphi(x)| \leq C|D_h\varphi(x)|,$$

где C зависит только от структуры групп. Последнему гомоморфизму также соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathscr{P}}\varphi(x) = \widetilde{\exp} \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы [14].

Определение 1. Класс отображений Соболева $W^1_p(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$ состоит из отображений $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$, для которых величина

$$\big\|\varphi \mid W^1_p(\Omega)\big\| = \|\rho \circ \varphi \mid L_p(\Omega)\| + \| \, |D_h\varphi| \mid L_p(\Omega)\|$$

конечна. Говорят, что φ *принадлежит* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W^1_p(U;\widetilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$.

Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [14, предложение 4.2]. Заметим, что если $\varphi \to \widetilde{\mathbb{G}}$ непрерывно и $\varphi \in W^1_p(\Omega;\widetilde{\mathbb{G}})$, то все координатные функции φ_i, $i = 1, \dots, \widetilde{N}$, принадлежат $W^1_p(\Omega)$.

§ 3. ACL-отображения и операторы композиции

2.1. Замена переменной для ACL**-отображений.** Далее мы будем применять формулу замены переменной с функцией кратности.

Предложение 1 [14, теорема 5.3]. *Пусть $U \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, а $\varphi : U \to \mathbb{G}$ — любое* ACL*-отображение.*

Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ нулевой меры такое, что отображение $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \to \mathbb{G}$ удовлетворяет $\mathscr{N}$-условию Лузина.

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \to \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

1) *функции $U \ni x \mapsto u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|$ и $\mathbb{G} \ni y \mapsto \sum\limits_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} u(x)$ измеримы;*

2) *верно равенство*

$$\int\limits_U u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi} u(x)\,dy; \tag{1}$$

3) *если функция $U \ni x \mapsto u(x)|\det \widehat{D}\varphi(x)|$ в левой части формулы* (1) *интегрируема, то и функция в правой части также интегрируема и верна формула* (1).

Отображение $\varphi \in \mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{G})$, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, называется *отображением с конечным искажением*, если $D_h\varphi = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$. Класс ACL-отображений $\varphi : \Omega \to \mathbb{G}$ с конечным искажением обозначается символом $FD(\Omega;\mathbb{G})$.

Для ACL-отображения $\varphi \in FD(\Omega;\mathbb{G})$ зададим *функцию искажения*[1)], определенную на произвольном измеримом множестве $A \subset \mathbb{G}$:

$$A \ni y \mapsto H_{\varphi,q}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0\} = \varnothing, \\ \Big(\sum\limits_{\substack{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus\Sigma_\varphi,\\ \det \widehat{D}\varphi(x)\neq 0}} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|}\Big)^{\frac{1}{q}}. \end{cases} \tag{2}$$

Пространство $\mathrm{Lip}(\Omega)$ состоит из липшицевых в метрике Карно — Каратеодори функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$, а пространство $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ — из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике Карно — Каратеодори на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с вопросом описания ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

В следующем утверждении установим двусторонние оценки для нормы оператора композиции φ^*. В случае гомеоморфизмов формулируемая ниже теорема доказана без предположения ACL-свойства (см. детали в [17, 18]).

Теорема 1. ACL*-отображение $\varphi : \Omega \to W$, определенное в области Ω в произвольной группе Карно $\mathbb{G}$ со значениями в открытом множестве $W \subset \mathbb{G}$, индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \le p < \infty, \tag{3}$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда

[1)] Функция (2) определена в [16] для операторов композиции в евклидовых пространствах.

1) *φ имеет конечное искажение;*
2) *$H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, здесь и далее $\sigma = \infty$ при $q = p$.*

При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{q,p}\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \le \|\varphi^*\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|, \quad 1 < q \le p < \infty. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть оператор (3) ограничен. Разобьем доказательство необходимости на несколько подразделов.

2.2. Конечность искажения отображения φ. Фиксируем произвольное открытое множество $U \subset W$. Обозначим через $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$ пространство липшицевых в метрике Карно — Каратеодори функций $u : W \to \mathbb{R}$, носители которых содержатся в U. Понятно, что $\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U) \subset \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W)$, так как функции $u \in \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$ можно продолжить нулем за пределы открытого множества U.

Обозначим через $\|\varphi^*_U\|$ норму сужения оператора композиции φ^* на подпространство $L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U)$. При $q < p$ определим функцию множества Φ, сопоставляя открытому множеству $U \subset W$ число

$$\Phi(U) = \|\varphi^*_U\|^\sigma = \sup_{u \in L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(U),\, u \ne 0} \left(\frac{\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\|}{\|u \mid L^1_p(W)\|} \right)^\sigma. \tag{5}$$

Лемма 1. *Функция множества Φ, определенная на открытых множествах $U \subset W$ формулой (5), монотонная*[2)] *и счетно-аддитивная*[3)]

Простое доказательство леммы 1 получено в [16, лемма 3.1] (ср. с первоначальным доказательством в [18, лемма 1]).

Предложение 2 [19]. *Пусть D — открытое множество в $\mathbb{G}$, а монотонная и счетно-аддитивная функция множества Φ определена на некоторой системе $\mathscr{O}(D)$ открытых подмножеств в D, содержащей все шары $B(x,r)$ такие, что $\overline{B}(x,r) \subset D$. Тогда*

(a) *в почти каждой точке $x \in D$ существует конечная производная*

$$\lim_{\substack{B_\delta \ni x,\\ \delta \to 0}} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} = \Phi'(x),$$

где $B_\delta \Subset D$ — шар в метрике Карно — Каратеодори радиуса δ, содержащий точку x;

(b) *для любого открытого множества $U \in \mathscr{O}(D)$ справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x)\, dx \le \Phi(U).$$

Сформулируем применяемое ниже свойство евклидовых шаров групп Карно (см. [20, 21], где доказаны свойства 1, 2 предложения 3, и [22], где доказано свойство 3 предложения 3).

[2)] Т. е. $\Phi(U_1) \le \Phi(U_2)$ для любых открытых множеств $U_1 \subset U_2 \subset W$.

[3)] Т. е. для любого счетного дизъюнктного набора открытых множеств $U_i \subset W$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Phi(U_i) = \Phi\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \right).$$

Предложение 3 [20–22]. *Для любого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^N$ с непустой границей существует не более чем счетное семейство $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ евклидовых шаров такое, что*

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} 2B_i^E = U$, *где* $2B_i^E = B^E(z_i, 2r_i)$;

2) *семейства* $\mathscr{F} = \{B_i^E\}$ *и* $2\mathscr{F} = \{2B_i^E\}$ *образуют конечнократное покрытие множества* U;

3) *семейство* $\{2B_i^E\}$ *может быть разбито на конечное число* β_N *(зависящее только от размерности* N*) подсемейств таких, что внутри каждого из них шары не пересекаются.*

Следствие 1. *Если покрытие* $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$ *открытого множества* $U \subset \mathbb{G}$ *выбрано в соответствии с предложением* 3, *то*

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \le \beta_N \Phi(U),$$

где постоянная β_N *зависит только от топологической размерности* N *группы* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}_i$ — подсемейства семейства $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$, состоящие из взаимно не пересекающихся шаров, такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\beta_N} \mathscr{B}_i = \{B^E(x_j, 2r_j)\}$. Тогда, очевидно, имеем

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) = \sum_{i=1}^{\beta_N} \sum_{B^E(x_j, 2r_j) \in \mathscr{B}_i} \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \le \sum_{i=1}^{\beta_N} \Phi(U) = \beta_N \Phi(U). \quad \square$$

Доказательство следующего предложения основано на модификации рассуждений из [16, лемма 3.4].

Предложение 4. *Пусть отображение* $\varphi : \Omega \to W$, *где* Ω, W *— области в группе Карно* $\mathbb{G}$, *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega; W)$ *и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \le p < \infty.$$

Тогда φ *имеет конечное искажение.*

Доказательство. Будем предполагать, что $q < p$, случай $q = p$ рассматривается аналогично. Применяя определенную выше функцию множества Φ, для любой функции $u \in L_p^1(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ можно записать

$$\|\varphi^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \le \Phi(V)^{1/\sigma} \|u \mid L_p^1(V)\|,$$

где $V \subset W$ — открытое ограниченное подмножество. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на $B^E(0,1)$ и нулю вне шара $B^E(0,2)$. Подставляя в это неравенство функции $h_j(z) = (z-y)_j \eta\big(\frac{z-y}{r}\big)$, $j = 1, \dots, n$, где $(z-y)_j$ обозначает j-ю координату точки $z - y \in \mathbb{G}$, $B^E(y, 2r) \subset W$, приходим к неравенству

$$\Bigg(\int\limits_{\varphi^{-1}(B^E(y,r))} |D_h \varphi|^q(x)\, dx \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le C \Phi(B^E(y, 2r))^{1/\sigma} |B^E(y, 2r)|^{\frac{1}{p}}, \tag{6}$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от N.

Здесь и далее при выводе неравенств типа (6) следует учесть, что $|\nabla_h h_j(z)| \le |\nabla h_j(z)| \le L$ для всех $j \in \mathbb{N}$, где $\nabla h_j(z)$ — риманов градиент функции h_j, а постоянная L не зависит от j.

Пусть $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma_\varphi \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$, где Σ_φ — множество сингулярности отображения φ нулевой меры. Покажем, что

$$\int\limits_Z |D_h\varphi|^q(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

По формуле замены переменной имеем $|\varphi(Z)| = 0$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и открытое множество $U \subset W$ такие, что $U \supset \varphi(Z)$ и $|U| < \varepsilon$. Выберем согласно предложению 3 конечнократное покрытие $\{B^E(y_i, r_i)\}$ открытого множества U евклидовыми шарами. Имеем

$$\sum_i |B^E(y_i, 2r_i)| < \beta_N \varepsilon.$$

Теперь, применяя к каждому шару $B^E(y_i, 2r_i)$ неравенство (6) и следствие 1, выводим

$$\int\limits_Z |D_h\varphi|^q(x)\,dx = \int\limits_{Z\setminus\Sigma_\varphi} |D_h\varphi|^q(x)\,dx \le \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y_i,r_i))} |D_h\varphi|^q(x)\,dx$$

$$\le C^q \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B^E(y_i, 2r_i))^{\frac{q}{\sigma}} (|B^E(y_i, 2r_i)|)^{\frac{q}{p}} \le C_2^q \Phi(U)^{\frac{p-q}{p}} |U|^{\frac{q}{p}} \le C_2^q \Phi(U)^{\frac{p-q}{p}} \varepsilon^{\frac{q}{p}}.$$

В последней строке применено неравенство Гёльдера: $\frac{q}{\sigma} + \frac{q}{p} = 1$. Так как $\Phi(U) \le \|\varphi^*\|^\sigma < \infty$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число, то (7) доказано и, следовательно, $|D_h\varphi| = 0$ почти всюду на множестве Z. $\square$

В следующем разделе докажем, что для ограниченного оператора композиции (3) справедлива левая часть соотношения (4).

2.3. Доказательство левой части неравенств (4). В доказываемых ниже соотношениях (8) V — открытое множество в W, φ_V^* — ограничение оператора композиции φ^* на подпространство $L_p^1(V) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$, а $\|\varphi_V^*\|$ — норма оператора $\varphi_V^* : L_p^1(V) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V) \to L_q^1(\Omega)$.

Предложение 5. *Пусть отображение $\varphi : \Omega \to W$ класса $\mathrm{ACL}(\Omega; W)$, где Ω, W — области в $\mathbb{G}$, индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \le p < \infty.$$

Тогда

$$\alpha_{q,p} \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(V)\| \le \|\varphi_V^*\| = \Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(V)\| \tag{8}$$

для любого открытого множества $V \subset W$, где $\alpha_{q,p}$ — положительная постоянная, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, если $q < p$, и $\Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi_V^*\|$, $\sigma = \infty$ при $q = p$.

Доказательство. Пусть $q < p$. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на субримановом шаре $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в неравенство (6) субриманов шар $B(y, 2r) \subset W$ вместо евклидова $B^E(y, 2r)$ и

функции $h_j(z) = (y^{-1}z)_j \eta(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z))$, где $(y^{-1}z)_j$ обозначает j-ю координату точки $y^{-1}z \in \mathbb{G}$, $j = 1, \dots, n$, в случае $q < p$ получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D_h\varphi|^q(x)\,dx \le \widetilde{C}^q \left(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|}\right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y,r)|.$$

Применим к левой части этого соотношения формулу (1) замены переменной

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))} |D_h\varphi|^q(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(B(y,r))\setminus Z} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|} |\det \widehat{D}\varphi(x)|\,dx$$

$$= \int\limits_{B(y,r)} \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|}\,dy \le \widetilde{C}^q \left(\frac{\Phi(B(y,2r))}{|B(y,2r)|}\right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y,r)|.$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества (см. предложение 2) вытекает

$$H^\sigma_{\varphi,q}(y) = \left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|}\right)^{\frac{p}{p-q}} \le \widetilde{C}^\sigma \Phi'(y)$$

для п. вс. $y \in W$ таких, что $\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi \cup Z) \ne \varnothing$, где $H_{\varphi,q}$ определена формулой (2). Интегрируя последнее неравенство по открытому множеству $V \subset W$, получаем

$$\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(V)\|^\sigma = \int\limits_V \left(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|}\right)^{\frac{p}{p-q}} dy$$

$$\le \widetilde{C}^\sigma \int\limits_V \Phi'(y)\,dy \le \widetilde{C}^\sigma \Phi(V) = \widetilde{C}^\sigma \|\varphi^*_V\|^\sigma.$$

Таким образом, для любого открытого множества $V \subset W$ доказано

$$\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(V)\| \le \widetilde{C}\|\varphi^*_V\|. \quad \square$$

Правая часть соотношений (4) и (8) будет установлена в следующем разделе.

2.4. Достаточность в теореме 1 и доказательство правой части неравенств (4). Пусть $Z = \{y \in \Omega \mid \det D_{\mathscr{P}}\varphi(y) = 0\}$ — множество нулей якобиана отображения φ. Дополнение $\Omega \setminus Z$ с точностью до множества Σ нулевой меры можно представить в виде не более чем счетной дизъюнктной совокупности измеримых множеств T_i (т. е. $\Omega \setminus Z = \Sigma \cup \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} T_i$), на каждом из которых отображение $\varphi : T_i \to \mathbb{G}$ липшицево относительно метрик Карно — Каратеодори [14]. Известно [14], что липшицево отображение $\varphi : T_i \to \mathbb{G}$ $\mathscr{P}$-дифференцируемо в почти всех точках плотности 1 множества T_i, $i \in \mathbb{N}$. Если $x \in T_i$ — точка $\mathscr{P}$-дифференцируемости, то для некоторого гомоморфизма $D_{\mathscr{P}}\varphi(x) : \mathbb{G} \to \mathbb{G}$ групп Карно имеем

$$d_{cc}([D_{\mathscr{P}}\varphi(x)\langle x^{-1}y\rangle]^{-1}\varphi(x)^{-1}\varphi(y)) = o(d_{cc}(x^{-1}y)) \quad \text{при } y \to x,\ y \in T_i. \tag{9}$$

Соответствующий гомоморфизму $D_{\mathscr{P}}\varphi(x)$ гомоморфизм $\widetilde{D}\varphi(x) : \mathfrak{g} \to \widetilde{\mathfrak{g}}$ алгебр Ли однозначно определяется [14] горизонтальным дифференциалом $D_h\varphi(x)$.

Свойство 1. *Пусть φ принадлежит классу* $\mathrm{ACL}(\Omega;\mathbb{G})$ *и имеет конечное искажение, $z \in \mathbb{G}$ — фиксированная точка, $y \ni \mathbb{G} \mapsto u(y) = d(y,z)$ — функция класса* $\mathrm{Lip}(\mathbb{G})$, *а $\Omega \ni x \mapsto (u\circ\varphi)(x) = d_{cc}(\varphi(x),z)$ — композиция отображения φ с функцией u. Тогда для п. вс. $x \in \Omega$ имеем равенство*

$$\nabla_h(u\circ\varphi)(x) = \begin{cases} [\nabla_h u](\varphi(x))[D_h\varphi(x)]^{\mathrm{tr}}, & \text{если } x \in \Omega\setminus Z,\\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда, в частности, получаем

$$|\nabla_h(u\circ\varphi)(x)| \le |D_h\varphi(x)|. \tag{11}$$

Доказательство. Известно, что совокупность $S \subset \Omega$ точек субримановой недифференцируемости липшицевой функции u имеет нулевую меру. Пусть мера $\varphi^{-1}(S)$ положительна. По формуле замены переменной $\det \widehat{D}_{\mathscr{P}}\varphi(x) = 0$ для п. вс. $x \in \varphi^{-1}(S)$. Следовательно, с точностью до множества меры нуль (т. е. $|\varphi^{-1}(S)\setminus Z| = 0$) выводим $\varphi^{-1}(S) \subset Z$. В силу конечности искажения имеем также $D_h\varphi(x) = 0$ п. вс. на Z.

Если $x \in T_i \cap Z$ — точка $\mathscr{P}$-дифференцируемости отображения φ, то $D_{\mathscr{P}}\varphi(x) = 0$. Из (9) выводим

$$\begin{aligned} |(u\circ\varphi)(y) - (u\circ\varphi)(x)| &= |d_{cc}(\varphi(y),z) - d_{cc}(\varphi(x),z)| \le d_{cc}(\varphi(y),\varphi(x))\\ &= d_{cc}(D_{\mathscr{P}}\varphi(x)\langle x^{-1}y\rangle) + o(d_{cc}(x^{-1}y)) = o(d_{cc}(x^{-1}y)) \quad \text{при } T_i \ni y \to x. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство в (10) доказано.

Для доказательства первого равенства в (10) рассмотрим точку $x \in T_i$ плотности 1, в которой отображение φ $\mathscr{P}$-дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут п. вс. точки T_i). Так как функция $\mathbb{G} \ni y \mapsto u(y)$ $\mathscr{P}$-дифференцируема во всех точках $y \notin S$, то функция $T_i \ni x \mapsto (u\circ\varphi)(x)$ $\mathscr{P}$-дифференцируема как композиция $\mathscr{P}$-дифференцируемых отображений [23, § 2, теорема 2.1]. Таким образом, (10) доказано. Неравенство (11) получаем из (10), поскольку $|[\nabla_h u](\varphi(x))| \le 1$. $\square$

Пусть отображение $\varphi : \Omega \to W$ принадлежит классу ACL, имеет конечное искажение и $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$). Фиксируем открытое множество $V \subset W$. Покажем, что для любой функции $u \in L^1_p(W) \cap \overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(V)$ выполняется неравенство $\big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(V)\| \cdot \big\|u \mid L^1_p(W)\big\|$, $q < p$. Композиция $u\circ\varphi$ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega)$, а по свойству (10) для композиции $\varphi^* = u\circ\varphi$ выводим

$$\begin{aligned} \big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| &\le \Bigg(\int\limits_{\Omega\setminus Z} (|\nabla_h u|(\varphi(x))|D_h\varphi|(x))^q\,dx\Bigg)^{1/q}\\ &\le \Bigg(\int\limits_V |\nabla_h u|^q(y)\Bigg(\sum_{x\in\varphi^{-1}(y)\setminus(\Sigma_\varphi\cup Z)} \frac{|D_h\varphi|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|}\Bigg)\,dy\Bigg)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера при $q < p$, имеем оценку

$$\big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le \Bigg(\int\limits_V H^\sigma_{\varphi,q}(y)\,dy\Bigg)^{1/\sigma}\Bigg(\int\limits_V |\nabla_h u|^p(y)\,dy\Bigg)^{1/p}.$$

Из этого неравенства получаем правую часть соотношений (8). При $q = p$ доказательство упрощается.

Таким образом, теорема 1 доказана. $\square$

§ 4. Функциональные и геометрические свойства предельного отображения

В первую очередь установим ряд свойств отображения, предельного для последовательности ACL-отображений с интегрируемым искажением.

Определение 2. Говорят, что отображение $\varphi : \Omega \to \overline{W}$ *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega, \overline{W})$, если

1) φ абсолютно непрерывно на пересечении $\Omega \cap \{\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\}$ (за исключением, возможно, замкнутого множества S_y нулевой меры) для $d\mu_j$-почти всех y, $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$, и всех $j = 1, 2, \dots, n$;

2) для любой точки τ такой, что $\gamma_j(\tau) \in S_y$, верно условие $\rho(\varphi(\gamma_j(t)) \to \infty$ при $t \to \tau$.

Теорема 2. *Пусть Ω, $W \subset \mathbb{G}$ — области в группе Карно $\mathbb{G}$, $1 < q \le p < \infty$, $\varphi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; W)$. Пусть $\{\varphi_k : \Omega \to W\}$, $k \in \mathbb{N}$, — последовательность отображений класса $\mathrm{ACL}(\Omega; W) \cap FD(\Omega; W)$ таких, что*

1) *$\{\varphi_k\}$ сходится к φ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega; W)$*[4]*;*
2) *последовательность $\{H_{\varphi_k,q}\}$ функций искажения ограничена в $L_\sigma(W)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).*

Тогда φ

(a) *индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_q(\Omega);$$

(b) $\|\varphi^*\| \le \varliminf\limits_{k\to\infty} \|\varphi^*_k\|$;

(c) *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \overline{W})$;

(d) *имеет конечное искажение;*

(e) $H_{\varphi,q} \in L_\sigma(W)$, *где* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ *при* $q = p$);

(f) *норма оператора $\|\varphi^*\|$ удовлетворяет неравенству*

$$\alpha_{q,p}\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\| \le \|\varphi^*\|, \ 1 < q \le p < \infty,$$

с некоторой константой $\alpha_{q,p} > 0$.

Если еще $p \le \nu$ и φ — непостоянное отображение, то

(g) *φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина, т. е. $|\varphi^{-1}(E)| = 0$ при $|E| = 0$, $E \subset W$.*

Утверждение, обратное к теореме 2, сформулировано в предложении 11.

Доказательство. Теорему 2 докажем в следующих положениях, в которых последовательно установим свойства предельного отображения φ.

Свойство 2. *В условиях теоремы 2 последовательность*

$$\left\{ \int\limits_{\varphi^{-1}(V)} |D_h\varphi_k(x)|^q \, dx \right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

ограничена, если область $V \subset W$ ограничена.

Доказательство. Действительно, из условий теоремы 2 имеем $H_{\varphi_k,q} \in L_\sigma(V)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$).

---

[4] Это означает, что для любого компакта $K \subset \Omega$ последовательность $\left\{\int\limits_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi(x))\, dx\right\}$ стремится к нулю при $k \to \infty$.

По формуле (1) замены переменной выводим

$$\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} |D_h\varphi_k|^q(x)\,dx = \int\limits_{\varphi_k^{-1}(V)\setminus Z} \frac{|D_h\varphi_k|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_k(x)|}|\det \widehat{D}\varphi_k(x)|\,dx$$

$$= \int\limits_V \sum_{x\in\varphi_k^{-1}(y)\setminus(\Sigma_{\varphi_k}\cup Z)} \frac{|D_h\varphi_k|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_k(x)|}\,dy \le \|H_{\varphi_k,q} \mid L_\sigma(V)\|^q|V|^{\frac{q}{p}}.$$

Таким образом, последовательность $\Big\{\int\limits_{\varphi^{-1}(V)} |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx\Big\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена. □

3.1. Ограниченность предельного оператора композиции.

Предложение 6 [6, предложение 3.1]. *Предположим, что $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ — последовательность действительнозначных функций класса $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, сходящаяся в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ к функции $f:\Omega\to\mathbb{R}$, где $\Omega\subset\mathbb{G}$ — область в группе Карно $\mathbb{G}$. Предположим, что $f_k\in L_q^1(\Omega)$, $q\in(1,\infty)$, и выполнено поточечное неравенство*

$$|\nabla_h f_k(x)| \le g_k(x) \text{ для п. вс. } x\in\Omega$$

при каждом $k\in\mathbb{N}$, где последовательность функций $g_k\in L_q(\Omega)$ ограничена в $L_q(\Omega)$. Тогда $f\in L_q^1(\Omega)$ и для всякой ограниченной неотрицательной измеримой функции $\alpha:\Omega\to\mathbb{R}$ имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega |\nabla_h f(x)|^q\alpha(x)\,dx \le \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_\Omega g_k^q(x)\alpha(x)\,dx. \tag{12}$$

Более того, если g — слабый предел в $L_q(\Omega)$ последовательности $\{g_k\}$, то

$$|\nabla_h f(x)| \le g(x) \text{ для п. вс. } x\in\Omega.$$

Предложение 7. *В условиях теоремы 2 отображение φ индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*: L_p^1(W)\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)\to L_q^1(\Omega)$$

и

$$\|\varphi^*\| \le \varliminf_{k\to\infty}\|\varphi_k^*\|. \tag{13}$$

Доказательство. Приводимое ниже доказательство представляет собой модификацию рассуждений работ [24, 25; 26, теорема 9]. Пусть $u\in L_p^1(W)\cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(W)$. В силу липшицевости функции u последовательность $\{u\circ\varphi_k\}$ сходится к $u\circ\varphi$ в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Согласно теореме 1 (см. соотношение (4)) из ограниченности последовательности $\{H_{\varphi_k,p}\}$ в $L_\sigma(\Omega)$ вытекает, что последовательность $\{\nabla_h(u\circ\varphi_k)\}$ ограничена в $L_q(\Omega)$, поскольку

$$\big\|u\circ\varphi_k \mid L_q^1(\Omega)\big\| \le \|\varphi_k^*\|\cdot\big\|u \mid L_p^1(W)\big\|. \tag{14}$$

Применяя предложение 6 с $f_k = u\circ\varphi_k$, $g_k = |\nabla_h(u\circ\varphi_k)|$ и $\alpha\equiv 1$, получаем, что $u\circ\varphi\in L_q^1(\Omega)$, причем

$$\int\limits_\Omega |\nabla_h(u\circ\varphi)(x)|^q\,dx \le \varliminf_k\int\limits_\Omega |\nabla_h(u\circ\varphi_k)(x)|^q\,dx. \tag{15}$$

Положим $C = \varliminf\limits_{k\to\infty}\|\varphi_k^*\| < \infty$. Из (14) и (15) выводим

$$\big\|u\circ\varphi \mid L_q^1(\Omega)\big\| \le \varliminf_k\big\|\varphi_k^* u \mid L_q^1(\Omega)\big\| \le \varliminf_{k\to\infty}\|\varphi_k^*\|\cdot\big\|u \mid L_p^1(W)\big\| \le C\big\|u \mid L_p^1(W)\big\|.$$

Отсюда получаем неравенство (13). Предложение 7 доказано. □

Предложение 8. *В условиях теоремы 2 отображение φ принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega;\overline{W})$.

Доказательство. Разобьем доказательство на несколько этапов.

Шаг 1. Здесь мы докажем, что в условиях теоремы 2 отображение φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega;\overline{W})$ и $\int\limits_\Omega |D_h\varphi(x)|^q\,dx<\infty$ при условии, что область W ограничена.

Последовательность функций $g_k(x)=|D_h\varphi_k|(x)$ ограничена в $L_q(\Omega)$ (см. свойство 2). Поскольку пространство $L_q(\Omega)$ рефлексивно, последовательность $\{g_k\}$ можно считать слабо сходящейся к неотрицательной функции $g\in L_q(\Omega)$.

Фиксируем точку $z\in\mathbb{G}$. С точкой z ассоциируем функцию

$$x\in\Omega\mapsto u_z(x)=d_{cc}(x,z).$$

Последовательности функций $f_k(x)=u_z\circ\varphi_k(x)$ и $g_k(x)=|D_h\varphi_k|(x)$ удовлетворяют всем условиям предложения 6. Пределом в $L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ последовательности функций f_k является функция $f(x)=u_z\circ\varphi(x)$, поэтому для нее поточечное неравенство (12) можно записать в следующем виде:

$$|\nabla_h(u_z\circ\varphi)(x)|\le g(x)\ \text{для п. вс. } x\in\Omega. \tag{16}$$

Выберем в $\mathbb{G}$ счетное всюду плотное множество Z_0. Неравенство (16) можно считать выполненным одновременно для всех $z\in Z_0$ при п. вс. $x\in\Omega$.

Рассмотрим слоение Γ_j области Ω, порожденное каким-либо горизонтальным векторным полем X_j. На $d\mu_j$-п. вс. линиях γ слоения Γ_j, выбор которых не зависит от точки $z\in Z_0$, функция $(u_z\circ\varphi)|_\gamma$ абсолютно непрерывна, $g|_\gamma\in L_q$ и

$$|X_j(u_z\circ\varphi)|_\gamma|(x)\le|\nabla_h(u_z\circ\varphi)|_\gamma(x)|\le g|_\gamma(x)$$

для п. вс. $x\in\gamma\cap\Omega$. Отсюда для отрезка $[x,y]$ слоя γ имеем

$$|(u_z\circ\varphi)|_\gamma(y)-(u_z\circ\varphi)|_\gamma(x)|\le\int\limits_{[x,y]}g\,dt.$$

Таким образом, приращение функции $u_z\circ\varphi|_\gamma$ вдоль слоя γ контролируется интегралом от интегрируемой функции g, не зависящим от выбора $z\in Z_0$. Следовательно, возможен предельный переход по $z\in Z_0$, а так как совокупность точек $z\in Z_0$ плотна в $\overline{\Omega'}$, то последнее неравенство справедливо для любой точки $z\in\overline{\Omega'}$. Полагая $z=\varphi(x)$, получим

$$d_{cc}(\varphi(x),\varphi(y))\le\int\limits_{[x,y]}g\,dt.$$

Отсюда вытекают абсолютная непрерывность отображения φ на п. вс. линиях горизонтальных слоений и оценка $|X_j\varphi(x)|\le g(x)$ для п. вс. $x\in\Omega$. Следовательно, φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}(\Omega;\overline{W})$ и $\int\limits_\Omega|D_h\varphi(x)|^q\,dx<\infty$.

Определение 3. Пусть $\{z_m\in W\}$, $m\in\mathbb{N}$, — счетная всюду плотная совокупность точек в открытом множестве W. Совокупность $\mathrm{Lip}_{\mathrm{tr}}(W)$ состоит из ограничений на W счетного семейства липшицевых функций $u_{m,l}:\mathbb{G}\to[0,\infty)$ вида

$$\mathbb{G}\ni y\mapsto u_{m,l}(y)=\max_{y\in\Omega}\left(\frac{1}{2^{l-1}}-d_{cc}(y,z_m),0\right),\quad m,l\in\mathbb{N}.$$

Заметим, что $u_{m,l}(y) \equiv 0$ вне замкнутого шара $\overline{B\big(z_m, \frac{1}{2^{l-1}}\big)}$. Очевидно вложение $\mathrm{Lip}_{\mathrm{tr}}(W) \subset L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}(W)$.

Шаг 2. На этом шаге докажем, что в условиях теоремы 2 отображение φ принадлежит классу $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; W)$ для произвольной области W (содержательный смысл обозначения $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; W)$ сформулирован в определении 2).

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, \dots, X_n$ образуют базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$, и пусть Π_j — гиперплоскость $x_j = 0$, $j = 1, \dots, n$. Мера $d\mu_j = \imath(X_j)\, dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема.

Каждой точке $x \in \mathbb{G}$ соответствует интегральная линия $\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma_j(t) = \exp(tX_j)(x)$, проходящая через точку $x = \gamma_j(0)$. Пересечение интегральной линии $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(x)$, $t \in \mathbb{R}$, с гиперплоскостью Π_j называется *проекцией* точки $x \in \mathbb{G}$ на гиперплоскость Π_j вдоль векторного поля X_j. Проекция точки x на гиперплоскость Π_j обозначается символом $\mathrm{Pr}_j(x)$. Если A — множество в $\mathbb{G}$, то проекция множества A на гиперплоскость Π_j вдоль векторного поля X_j — это совокупность всех точек $\{y \in \Pi_j \mid y = \mathrm{Pr}_j(x)$ для некоторого $x \in A\}$, обозначается символом $\mathrm{Pr}_j(A)$.

Далее докажем, что отображение φ «непрерывно» на пересечениях области Ω с $d\mu_j$-почти всеми интегральными линиями $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$ $(y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega))$, $j = 1, \dots, n$.

Фиксируем $j = 1, \dots, n$. На пересечениях области Ω с $d\mu_j$-почти всеми интегральными линиями $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$ $(y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega))$ векторного поля X_j композиция $u_{m,l} \circ \varphi$ абсолютно непрерывна (здесь $u_{m,l}$ — функция из определения 3). Поскольку совокупность функций $\{u_{m,l}\}_{m,l \in \mathbb{N}}$ счетная, упомянутая композиция $u_{m,l} \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на пересечениях области Ω с $d\mu_j$-почти всеми интегральными линиями $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$ $(y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega))$ для всех $m, l \in \mathbb{N}$.

Шаг 2.1. Наша первая задача — получить из вышеизложенного «непрерывность» отображения φ на пересечениях области Ω с $d\mu_j$-почти всеми интегральными линиями $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$ $(y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega))$.

Пусть $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ — точка такая, что композиция $u_{m,l} \circ \varphi$ абсолютно непрерывна на пересечении

$$\Omega \cap \{\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \tag{17}$$

для всех $m, l \in \mathbb{N}$. Удаляя из $\mathrm{Pr}_j(\Omega)$ множество нулевой меры, получаем, что для $d\mu_j$-п. вс. точек $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ одновременно и отображение φ определено и измеримо на (17), и композиции $u_{m,l} \circ \varphi$ абсолютно непрерывны на (17) для всех $m, l \in \mathbb{N}$. Фиксируем такую точку $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$. На пересечении (17) рассмотрим произвольную точку $x_0 = \gamma_j(\tau_0) \in W$ такую, что функция $\tau \mapsto \varphi \circ \gamma_j(\tau)$ аппроксимативно непрерывна в точке τ_0. Таковыми будут п. вс. точки $\tau \in \mathbb{R}$, для которых $\gamma_j(\tau) \in \Omega \cap \{\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\}$ [27].

Если отображение $\varphi : \Omega \cap \{\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \to W$ не является непрерывным в точке x_0, то в $\mathbb{R}$ найдутся две последовательности $\{\tau_k\}$ и $\{t_k\}$, сходящиеся к τ_0, такие, что $\varphi(\gamma_j(\tau_k)) \to \varphi(x_0)$ при $k \to \infty$, а $d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), \varphi(x_0)) > \delta' > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ при некотором δ'. Пусть $\delta = \min(\delta', \mathrm{dist}(\varphi(x_0), \partial W))$. Тогда имеем $d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), \varphi(x_0)) > \delta > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Так как счетная совокупность точек $\{z_m \in W\}$, $m \in \mathbb{N}$, всюду плотна в открытом множестве W, существует подпоследовательность $\{z_{m_i} \in W\}$, сходящаяся к точке $\varphi(x_0)$ при $i \to \infty$ и такая, что $d_{cc}(\varphi(x_0), z_{m_i}) < \delta/2$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Отсюда по неравенству треугольника имеем

$$d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), z_{m_i}) \geq |d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), \varphi(x_0)) - d_{cc}(\varphi(x_0), z_{m_i})| > \delta/2.$$

Если $\frac{1}{2^{l_0-1}} < \delta/2$ при некотором l_0, то

$$u_{m_i,l_0}(\varphi(\gamma_j(t_k))) = \max_{y\in\Omega}\left(\frac{1}{2^{l_0-1}} - d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), z_{m_i}), 0\right) = 0 \quad \text{для всех } k, i \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} d_{cc}(\varphi(\gamma_j(\tau_k)), z_{m_i}) &\leq d_{cc}(\varphi(\gamma_j(\tau_k)), \varphi(x_0)) + d_{cc}(\varphi(x_0), z_{m_i}) \\ &\leq \frac{1}{4\cdot 2^{l_0-1}} + \frac{1}{4\cdot 2^{l_0-1}} = \frac{1}{2\cdot 2^{l_0-1}} \end{aligned}$$

для всех $k \geq k_0$ и $i \geq i_0$ при подходящем выборе k_0 и i_0. Следовательно, $u_{m_i,l_0}(\varphi(\gamma_j(\tau_k))) \geq \frac{1}{2\cdot 2^{l_0-1}}$.

Отсюда следует, что абсолютно непрерывная функция $u_{m_i,l_0}(\varphi(\gamma_j(\tau)))$ разрывна в точке $\tau = \tau_0$. Из полученного противоречия выводим, что композиция $\varphi\circ\gamma_j$ непрерывна во всех точках, в которых она аппроксимативно непрерывна.

Пересечение (17) состоит из не более чем счетной дизъюнктной совокупности интервалов $I_s = (\alpha_s, \beta_s)$, $s \in \mathbb{N}$, два из которых могут быть бесконечными.

Пусть теперь $\tau_0 \in I_{s_0}$ — точка непрерывности функции $\varphi\circ\gamma_j$. Тогда существует окрестность $(\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa) \subset I_{s_0}$ точки τ_0 такая, что $d_{cc}(\varphi\circ\gamma_j(\tau), \varphi\circ\gamma_j(\tau_0)) < 1$ для любой точки $\tau \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$, в которой $\varphi\circ\gamma_j$ непрерывна. Если $\tau' \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$ — точка разрыва композиции $\varphi\circ\gamma_j$, то существуют две последовательности $\tau_k \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$ и $t_k \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$, сходящиеся к точке τ', такие, что $\varphi(\gamma_j(\tau_k)) \to A$ при $k \to \infty$ (здесь $A \in \mathbb{G}$ — некоторый элемент группы), а $d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), A) > \delta' > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$ при некотором $\delta' > 0$. Пусть $\delta = \min(\delta', \operatorname{dist}(A, \partial W))$. Тогда имеем $d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), A) > \delta > 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

Так как счетная совокупность точек $\{z_m \in W\}$, $m \in \mathbb{N}$, всюду плотна в открытом множестве W, существует подпоследовательность $\{z_{m_i} \in W\}$, сходящаяся к точке A при $i \to \infty$ и такая, что $d_{cc}(A, z_{m_i}) < \delta/2$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Отсюда по неравенству треугольника имеем

$$d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), z_{m_i}) \geq |d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), A) - d_{cc}(A, z_{m_i})| > \delta/2.$$

Если $\frac{1}{2^{l_0-1}} < \delta/2$ при некотором l_0, то

$$u_{m_i,l_0}(\varphi(\gamma_j(t_k))) = \max_{y\in\Omega}\left(\frac{1}{2^{l_0-1}} - d_{cc}(\varphi(\gamma_j(t_k)), z_{m_i}), 0\right) = 0 \quad \text{для всех } \ k, i \in \mathbb{N}.$$

Аналогично предыдущим рассуждениям выводим, что абсолютно непрерывная функция $u_{m_i,l_0}(\varphi(\gamma_j(\tau)))$ разрывна в точке τ', чего быть не может. Следовательно, композиция $\varphi\circ\gamma_j$ непрерывна во всех точках $\tau \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$, в которых $\varliminf\limits_{t\to\tau} \rho(\varphi(\gamma_j(t))) < \infty$.

Заметим, что совокупность S_y точек $\tau \in (\tau_0 - \varkappa, \tau_0 + \varkappa)$, в которых

$$\varliminf_{t\to\tau} \rho(\varphi(\gamma_j(t))) = \infty,$$

замкнута (в противном случае найдется точка τ_0, предельная для S_y, такая, что $\varliminf\limits_{t\to\tau_0} \rho(\varphi(\gamma_j(t))) < \infty$; по доказанному выше τ_0 — точка непрерывности функции $\varphi\circ\gamma_j$ и поэтому не может быть предельной для S_y).

Множество S_y — замкнутое множество меры нуль, а дополнение $(\tau_0-\varkappa, \tau_0+\varkappa) \setminus S_y$ открыто и представимо в виде счетного объединения интервалов.

На основании сказанного выше приходим к выводу, что существует счетная дизъюнктная совокупность интервалов $(\tau_k-\varkappa(\tau_k), \tau_k+\varkappa(\tau_k))$, не покрывающая лишь те точки $x=\varphi(\tau)$ открытого множества $\Omega \cap \{\gamma_j(t)=\exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\}$, в которых $\lim\limits_{s\to\tau} \rho(\varphi\circ\gamma_j(s))=\infty$.

Более того, предыдущие выводы позволяют заключить: *для п. вс. точек* $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ *отображение* φ *определено и непрерывно на* (17) (*за исключением, возможно, замкнутого множества* S_y *нулевой меры*), *и композиции* $u_{m,l}\circ\varphi$ *абсолютно непрерывны на* (17) *для всех* $m, l \in \mathbb{N}$.

Шаг 2.2. Полагая $V=V_l$ в свойстве 2, где V_l — ограниченная область, выводим, что последовательность интегралов

$$\left\{ \int\limits_{\varphi^{-1}(V_l)} |D_h\varphi_k(x)|^q\,dx \right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

ограничена. Если g_l — слабый предел в $L_q(\varphi^{-1}(V_l))$ последовательности $|D_h\varphi_k(x)|$, то из (16) имеем соотношение

$$|\nabla_h(u_{m,l}\circ\varphi)(x)| \le g_l(x) \text{ для п. вс. } x \in \varphi^{-1}(V_l),$$

$m, l \in \mathbb{N}$. Следовательно, для п. вс. всех $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ за исключением некоторого множества A_l нулевой $d\mu_j$-меры интегралы

$$\int\limits_{\{\gamma_j(t)=\exp(tX_j)(y):t\in\mathbb{R}\}\cap\varphi^{-1}(V_l)} g_l(x)^q\,dx, \quad l \in \mathbb{N},$$

конечные. Объединение $A=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}} A_l$ имеет нулевую $d\mu_j$-меру.

Фиксируем точку $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)\setminus A$. На области определения (17) композиции $\varphi\circ\gamma_j$ возьмем произвольный замкнутый промежуток $[\alpha,\beta]$ такой, что $[\alpha,\beta]\cap S_y=\varnothing$. Покажем, что на промежутке $[\alpha,\beta]$ композиция $\varphi\circ\gamma_j$ абсолютно непрерывна.

Рассмотрим для этого произвольное исчерпание области W открытыми компактно вложенными множествами: $V_1 \Subset V_2 \Subset \ldots \Subset V_l \Subset \ldots \Subset W$, $\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} V_l = W$. Так как пересечения

$$\Omega \cap \{\gamma_j(t)=\exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \cap \varphi^{-1}(V_l)$$

— открытые множества для всех $l \in \mathbb{N}$, а промежуток $[\alpha,\beta]$ компактен, то для какого-нибудь l_0 верно включение

$$[\alpha,\beta] \subset \Omega \cap \{\gamma_j(t)=\exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \cap \varphi^{-1}(V_{l_0}).$$

Для рассматриваемой ситуации выполняются условия первого шага в доказательстве предложения 8, и поэтому справедлив вывод, полученный на этом шаге: отображение φ абсолютно непрерывно на промежутке $[\alpha,\beta]$. Так как промежуток $[\alpha,\beta]$ был выбран произвольно, отображение φ абсолютно непрерывно на

$$\Omega \cap \{\gamma_j(t)=\exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \setminus S_y$$

для $d\mu_j$-п. вс. $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$ и всех $j=1,2,\ldots,n$. $\square$

Сформулируем в отдельном утверждении полученные в этом разделе выводы.

Предложение 9. *В условиях теоремы 2 отображение φ*
1) *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega;\overline{W})$,
2) *имеет конечное искажение,*
3) $H_{\varphi,q}\in L_\sigma(W)$, *где* $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$ ($\sigma=\infty$ *при* $q=p$).
При этом норма оператора $\|\varphi^*\|$ *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha_{q,p}\|H_{\varphi,q}\mid L_\sigma(W)\|\le\|\varphi^*\|,\quad 1<q\le p<\infty, \tag{18}$$

с некоторой константой $\alpha_{q,p}>0$.

Доказательство. В предложении 8 доказано, что отображение φ обладает всеми свойствами, необходимыми для применения аргументов теоремы 1. На этом основании справедливы выводы разд. 2.2, в частности, верно утверждение предложения 4: *отображение φ имеет конечное искажение.*

Неравенство (18) по существу доказано в предложении 5: это в точности левая часть соотношений (8). □

3.2. $\mathscr{N}^{-1}$-свойство предельного отображения: $|\varphi^{-1}(E)|=0$, если $|E|=0$, $E\subset W$. Сформулируем на группах Карно необходимое для доказательства неравенство типа Пуанкаре[5)].

Лемма 2 [6, лемма 3.2]. *Пусть F — измеримое подмножество шара $B=B(0,r)$ положительной меры. Для всех $u\in W^1_q(B)$, $1\le q<\nu$, $u|_F=0$, выполняется неравенство*

$$\Bigl(\int\limits_B|u(x)|^{q^*}\,dx\Bigr)^{\frac{1}{q^*}}\le\frac{Cr^{\frac{\nu}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}}\Bigl(\int\limits_B|\nabla_h u(x)|^q\,dx\Bigr)^{\frac{1}{q}}, \tag{19}$$

где $\frac{1}{q^*}=\frac{1}{q}-\frac{1}{\nu}$, *а C — некоторая постоянная, не зависящая от функции u.*

Сформулируем применяемую ниже на группах Карно лемму о покрытиях типа Уитни.

Лемма 3 [12, лемма 1.67]. *Пусть U — открытое подмножество группы $\mathbb{G}$ конечной меры. Существует счетное покрытие U субримановыми шарами $\{B(y_i,r_i)\}$ такое, что*
1) $U=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(y_i,r_i)=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}B(y_i,2r_i)$;
2) *кратность M покрытия $\{B(y_i,2r_i)\}$ не превосходит 48^ν.*

Предложение 10. *Пусть непостоянное отображение $\varphi:\Omega\to W$, где W — ограниченная область в $\mathbb{G}$, принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega;\mathbb{G})$, *имеет конечное искажение и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^*:L^1_p(W)\cap\overset{\circ}{\mathrm{Lip}}(W)\to L^1_q(\Omega),\quad 1<q\le p\le\nu.$$

Тогда $|\varphi^{-1}(E)|=0$ *при* $|E|=0$, $E\subset W$.

Доказательство. Поскольку области Ω и W ограничены, можно считать, что $p=\nu$ и $1<q<\nu$. Действительно, если отображение φ^* индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^*:L^1_p(W)\cap\mathrm{Lip}(W)\to L^1_q(\Omega)$, $1<q\le$

[5)] В евклидовом пространстве неравенство типа (19) доказано в [28]

$p < \infty$, то в силу неравенства Гёльдера для всех $q' \in (1;q)$, $p' \in (p;\infty)$ и $u \in L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}(W)$ имеем

$$|\Omega|^{\frac{q'}{q}-1}\big\|\varphi^* u \mid L^1_{q'}(\Omega)\big\| \le \big\|\varphi^* u \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le \|\varphi^*\| \cdot \big\|u \mid L^1_p(W)\big\| \\ \le |W|^{1-\frac{p}{p'}}\|\varphi^*\|\big\|u \mid L^1_{p'}(W)\big\|.$$

Последнее означает, что φ индуцирует ограниченный оператор композиции $\varphi^* : L^1_{p'}(W) \cap \mathrm{Lip}(W) \to L^1_{q'}(\Omega)$. Полагаем далее $p = \nu$, $1 < q < \nu$.

Шаг 1. Фиксируем срезку $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$, равную единице на субримановом шаре $B(0,1)$ и нулю вне шара $B(0,2)$. Подставляя в неравенство (6) субриманов шар $2B = B(y,2r) \subset W$ вместо евклидова $B^E(y,2r)$ и функции $f(z) = \eta(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z))$, получаем

$$\big\|\varphi^* f \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le C_1\Phi(2B)^{\frac{1}{\sigma}}|B(y,2r)|^{\frac{1}{p}}.$$

Фиксируем в W произвольное множество E нулевой меры. Так как отображение φ имеет конечное искажение (см. предложение 4), то $\varphi^{-1}(E) \ne \Omega$ (в противном случае $\det \widehat{D}\varphi = 0$ в Ω и, следовательно, $D_h\varphi = 0$ п. вс. в Ω, откуда получаем, что φ — постоянное отображение). Поэтому найдется шар $Q \subset \Omega$ такой, что $2Q \subset \Omega$ и $\big|Q\backslash\varphi^{-1}(E)\big| > 0$ (здесь $2Q$ — субриманов шар с тем же центром, что и Q, и вдвое большим радиусом сравнительно с радиусом шара Q).

Поскольку компоненты данного отображения измеримы, то по теореме Лузина найдется компакт $T \subset Q\backslash\varphi^{-1}(E)$ положительной меры такой, что $\varphi : T \to W$ непрерывно. Тогда образ $\varphi(T) \subset W$ компактен и $\varphi(T) \cap E = \varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $U \supset E$, $\varphi(T) \cap U = \varnothing$, $U \subset W$. Пусть $\{B(y_i,r_i)\}$ — набор шаров, выбранный согласно лемме 3, такой, что наборы $\{B(y_i,r_i)\}$ и $\{B(y_i,2r_i)\}$ образуют покрытия множества U и кратность M покрытия $\{B(y_i,2r_i)\}$ конечна ($B(y_i,2r_i) \subset U$ для всех $i \in \mathbb{N}$).

Тогда для f_i, ассоциированной с шаром $B(y_i,r_i)$, $f_i(z) = \eta\big(\delta_{r_i^{-1}}(y_i^{-1}z)\big)$, имеем $\varphi^* f_i = 1$ на множестве $\varphi^{-1}\big(B(y_i,r_i)\big)$ и $\varphi^* f_i = 0$ вне прообраза $\varphi^{-1}\left(B(y_i,2r_i)\right)$, в частности, $\varphi^* f_i = 0$ на множестве T. Кроме того, для нее справедлива оценка

$$\big\|\varphi^* f_i \mid L^1_q(Q)\big\| \le \big\|\varphi^* f_i \mid L^1_q(\Omega)\big\| \le C_1\Phi(B(y_i,2r_i))^{\frac{1}{\sigma}}.$$

В силу неравенства Пуанкаре (19) справедливо соотношение

$$\left(\int\limits_Q |u|^{q^*}\,dx\right)^{\frac{1}{q^*}} \le \frac{Cr^{\frac{\nu}{q}}}{|T|^{\frac{1}{q}}}\left(\int\limits_Q |\nabla_h u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $q^* = q\nu/(\nu - q)$, r — радиус шара Q, $u \in W^1_q(Q)$ — произвольная функция, равная нулю на множестве $T \subset Q$, а C — постоянная, не зависящая от функции u. Применяя неравенство Пуанкаре к функции $\varphi^* f_i$ вместо u, с учетом двух последних оценок и равенства $\sigma = q^*$ получаем

$$|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q| \le C_3\Phi(B(y_i,2r_i)).$$

Применяя правую часть соотношений (8), выводим неравенства

$$|\varphi^{-1}(E) \cap Q| \le \sum_{i=1}^{\infty}|\varphi^{-1}(B(y_i,r_i)) \cap Q| \le C_3\sum_{i=1}^{\infty}\Phi(B(y_i,2r_i)) \\ \le C_3\sum_{i=1}^{\infty}\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(B(y_i,2r_i))\|^\sigma \le C_3M\|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(U)\|^\sigma.$$

В силу свойств интеграла Лебега функция множества $U \mapsto \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(U)\|^\sigma$ абсолютно непрерывна. Следовательно, правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе открытого множества $U \supset E$.

Таким образом, $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi : Q \to \mathbb{G}$ доказано.

Шаг 2. Покажем, что отображение φ обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина на любом другом субримановом шаре $Q_1 = B(z, r_1) \subset \Omega$ таком, что $B(z, 2r_1) \subset \Omega$. Шар, выбранный на предыдущем шаге, обозначим символом $Q_0 = Q = B(x_0, r_0)$. Пусть $\gamma : [0, l] \to \Omega$ — спрямляемая в метрике Карно — Каратеодори кривая с концевыми точками $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(l) = z$ и параметризованная длиной дуги (построение кривой с указанными свойствами можно найти в [29, лемма 3]). Пусть еще $\Delta = \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega) = \inf\limits_{t\in[0,l]} \operatorname{dist}(\gamma(t), \partial\Omega)$. На отрезке $[0, l]$ отметим точки $0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_j < \ldots < s_m = l$ так, чтобы $d_{cc}(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \le \Delta/4$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим $x_j = \gamma(s_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m-1$, $\gamma(s_m) = \gamma(l) = z$.

Очевидно, шар $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$ имеет с шаром Q_0 непустое пересечение W_1, на котором $|\varphi^{-1}(E) \cap W_1| = 0$. Следовательно, шар $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$ можно взять в качестве шара Q на первом шаге рассуждения. В результате придем к выводу, что

$$|\varphi^{-1}(E) \cap B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))| = 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, докажем $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображения $\varphi : B_1 \to \mathbb{G}$ (на последнем шаге индукции следует взять шар $Q_1 = B(z, r_1) = B(\gamma(s_m), r_1)$).

Шаг 3. Остается заметить, что область Ω можно покрыть счетным набором субримановых шаров $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k, \ldots$, на каждом из которых мера пересечения $\varphi^{-1}(E) \cap Q_k$ равна нулю. Следовательно, прообраз $\varphi^{-1}(E)$ имеет нулевую меру. $\square$

Предложение 10 завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Справедливо также и обратное к теореме 2 утверждение.

Предложение 11. *Пусть отображение* $\varphi : \Omega \to \overline{W}$

1) *принадлежит классу* $\mathrm{ACL}_\infty(\Omega; \overline{W})$,

2) *имеет конечное искажение,*

3) *функция искажения* $H_{\varphi,q}(\cdot) \in L_\sigma(W)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *где* $1 < q \le p < \infty$.

Тогда отображение $\varphi : \Omega \to \overline{W}$ *индуцирует ограниченный оператор композиции*[6)]

$$\varphi^* : L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_\infty(\overline{W}) \to L^1_q(\Omega), \quad 1 < q \le p < \infty,$$

однородных пространств Соболева по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$. *При этом норма оператора* $\|\varphi^*\|$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\varphi^*\| \le \|H_{\varphi,q} \mid L_\sigma(W)\|, \quad 1 < q \le p < \infty.$$

Доказательство этого предложения сводится к почти дословному повторению аргументов разд. 2.4. Следует лишь учесть, что композиция $u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(W) \cap \mathrm{Lip}_\infty(W)$, равна нулю в некоторой окрестности замкнутого множества S_y нулевой меры для $d\mu_j$-почти всех y, $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$, и всех $j = 1, 2, \ldots, n$. Последнее свойство обеспечивает абсолютную непрерывность композиции $u \circ \varphi$ на $\Omega \cap \{\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y) : t \in \mathbb{R}\} \setminus S_y$ для $d\mu_j$-п. вс. $y \in \mathrm{Pr}_j(\Omega)$, и всех $j = 1, 2, \ldots, n$ [30, лемма 1].

[6)] $\mathrm{Lip}_\infty(\overline{W})$ — это пространство локально-липшицевых в замыкании $\overline{W}$ функций, каждая из которых равна нулю вне некоторого шара $B(0, r) \subset \mathbb{G}$, где радиус r может зависеть от выбора функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. 1977. V. 63. P. 337–403.
2. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter // Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A: Mathematics. 1981. V. 88, N 3–4. P. 315–328.
3. *Ciarlet P. G.* Mathematical elasticity. V. I. Amsterdam: North-Holland, 1988. (Stud. Math. Appl.).
4. *Molchanova A., Vodopyanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calc. Var. 2019. V. 59, N 17. P. 2–25.
5. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
6. *Водопьянов С. К., Павлов С. В.* Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, № 2. С. 215–236.
7. *Christodoulou D.* On the geometry and dynamics of crystalline continua // Ann. Inst. Henri Poincaré. 1998. V. 60, N 3. P. 335–358.
8. *Maione A.* Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields. Ph. D. Thesis submitted to the University of Trento for the degree of Doctor of Philosophy. Trento: Department of Mathematics. University of Trento. 2020.
9. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и $\mathscr{P}$-дифференцируемость соболевских отображений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 4. С. 700–719.
10. *Водопьянов С. К.* Непрерывность отображений класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 912–934.
11. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1151–1159.
12. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
13. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
14. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedengs on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
15. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espacies symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
16. *Водопьянов С. К.* Операторы подстановки пространств Соболева // Современные проблемы теории функций и их приложений. Тез. докл. конференции. Саратов, 2002 г. Саратов: Саратовский гос. университет, 2002. С. 42–43.
17. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.
18. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и (P, Q)-квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 39, № 4. С. 776–795.
19. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces // Sib. Adv. Math. Ch. I, II. 2004, 2005. V. 14, 15, N 4, 1. P. 78–125; 1–35.
20. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$. М.: Мир, 1978.
21. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
22. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* Одна задача комбинаторной геометрии // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 5. С. 1171–1173.
23. *Vodop'yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemporary Mathematics. Ann Arbor: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–302.
24. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
25. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 855–870.
26. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
27. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1960.

28. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
29. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.
30. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

Поступила в редакцию 16 июня 2024 г.
После доработки 16 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМИ ШАРОВЫМИ СРЕДНИМИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ РОСТА

В. В. Волчков, Вит. В. Волчков

Аннотация. Пусть $V_r(\mathbb{R}^n)$ $(n \geq 2,\ r > 0)$ — множество локально суммируемых функций $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, имеющих нулевые интегралы по всем шарам радиуса r в $\mathbb{R}^n$. В работе изучается интерполяционная задача $f(a_k) = b_k$, $k = 1, 2, \ldots$, для функций класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ с ограничениями роста на бесконечности. Рассматривается случай, когда $\{a_k\}_{k=1}^\infty$ — множество точек, лежащих на некоторой прямой l в $\mathbb{R}^n$, в некотором смысле близкое к конечному объединению арифметических прогрессий, а $\{b_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2 < +\infty.$$

Показано, что указанная интерполяционная задача разрешима в классе функций, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, которые вместе со всеми своими производными удовлетворяют специальному условию убывания на бесконечности. Это условие представляет собой верхнюю оценку, которая влечет степенное убывание в направлениях, ортогональных к l, а также не может быть существенно улучшена вдоль прямой l.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.506

Ключевые слова: интерполяция, сферические средние, функции Бесселя.

§ 1. Введение

Пусть $\mathbb{R}^n$ — евклидово пространство размерности $n \geq 2$ со стандартной нормой $|\cdot|$. Для области $G \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $V_r(G)$ множество функций $f \in L_{\mathrm{loc}}(G)$, имеющих нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, содержащимся в G (если область G не содержит таких шаров, то полагаем $V_r(G) = L_{\mathrm{loc}}(G)$). Определение указанного класса восходит к Помпейю [1], который ошибочно утверждал, что $V_r(\mathbb{R}^2) = \{0\}$. Простейшим примером ненулевой функции из $V_r(\mathbb{R}^n)$ является экспонента $f(x) = e^{i\lambda x_1/r}$, где λ — произвольный положительный нуль функции Бесселя $J_{n/2}$. Впервые это было установлено Л. Чакаловым [2] в 1944 г. В дальнейшем класс $V_r(G)$, а также различные его аналоги и обобщения изучались во многих работах (см. обзоры [3–5] и монографии [6–8], содержащие обширную библиографию).

Исследование проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № 1023020800027-5-1.1.1 и тема № 124012400352-6).

© 2024 Волчков В. В., Волчков Вит. В.

С недавнего времени исследуются вопросы, связанные с разрешимостью интерполяционных задач для гладких функций класса $V_r(\mathbb{R}^n)$. В работе [9] было показано, что интерполяционная задача

$$f(a_k) = b_k \tag{1}$$

имеет решение $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, если множество узлов интерполяции $\{a_k\} \subset \mathbb{R}^n$ конечно, а $\{b_k\}$ — произвольный набор комплексных чисел. В случае бесконечного множества узлов ситуация становится значительно сложнее. Единственный из известных до настоящего времени положительных результатов в этом направлении касается случая, когда множество $\{a_k\}$ содержится в некотором луче в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty \tag{2}$$

(см. [9]).

В данной работе изучается задача (1) для функций класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ с ограничениями роста на бесконечности. Рассматривается случай, когда множество $\{a_k\}$ является бесконечным и лежит на некоторой прямой l в $\mathbb{R}^n$. Показано, что если $\{a_k\}$ в некотором смысле близко к конечному объединению арифметических прогрессий, а $\{b_k\}$ удовлетворяет условию

$$\sum |b_k|^2 < +\infty,$$

то интерполяционная задача (1) разрешима в классе функций, принадлежащих $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ и удовлетворяющих вместе со всеми своими производными условию степенного убывания на бесконечности в направлениях, ортогональных к прямой l (см. теорему и ее обсуждение в § 2).

§ 2. Формулировка основного результата

Далее, как обычно, символами $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно множества натуральных, целых неотрицательных и комплексных чисел. Пусть $\mathbb{Z}_+^n$ — множество n-мерных мультииндексов, т. е. векторов $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$, у которых $\eta_j \in \mathbb{Z}_+$ при любом $j \in \{1, \dots, n\}$. Для мультииндекса $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ обозначим через

$$\partial^\eta = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\eta_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\eta_n}$$

оператор частного дифференцирования соответствующего порядка.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ — множество вещественных чисел, у которых все дробные части $\{\gamma_1\}, \dots, \{\gamma_m\}$ различны. Пусть также $a_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) — множество различных вещественных чисел, удовлетворяющее следующему условию: существуют постоянная $\alpha > 0$ и положительная невозрастающая функция φ на $[0, +\infty)$ такие, что

$$|a_{k,j} - \alpha(k + \gamma_j)| \le \varphi(|k|), \quad k \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \dots, m\}, \tag{3}$$

и

$$\int_1^\infty \frac{\varphi(t)}{t} dt < +\infty. \tag{4}$$

Теорема 1. *Пусть $r > 0$ и $b_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) — множество комплексных чисел, удовлетворяющее условию*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} |b_{k,j}|^2 < +\infty. \tag{5}$$

Тогда существует функция $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$f(a_{k,j}, 0, \dots, 0) = b_{k,j} \quad \text{при любых } k, j, \tag{6}$$

и

$$|\partial^\eta f(x)|^2 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\partial^\eta f(x)|^2 dx_1 = O\big(\big(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\big)^{2-n}\big), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

для всех $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$.

Сделаем несколько замечаний.

Можно показать, что функция с условиями (6) и (7) в теореме 1 не единственна. Для этого достаточно применить теорему 1 к расширенной системе узлов, соответствующей постоянной $\alpha > 0$ и множеству $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m, \gamma_{m+1}\}$, где число γ_{m+1} выбирается так, чтобы $\{\gamma_{m+1}\} \neq \{\gamma_j\}$ при $j = 1, \dots, m$. При этом к условию (6) добавляются дополнительные условия, в которых правые части можно выбрать произвольно, сохраняя аналог условия (5) для новой интерполяционной задачи.

Далее, оценка (7) показывает, что сужение интерполирующей функции на любую прямую в $\mathbb{R}^n$, параллельную прямой

$$l = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_j = 0,\ j = 2, \dots, n\},$$

принадлежит классу L^2. В силу условий (6) и (5) это утверждение нельзя существенно ослабить (например, потребовать выполнение оценки

$$f(x) = O(|x|^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}), \quad x \in l,$$

при $x \to \infty$ и некотором сколь угодно малом $\varepsilon > 0$).

Нетрудно видеть, что условие (2) является очевидным необходимым условием для того, чтобы интерполяционная задача (1) имела решение $f \in C(\mathbb{R}^n)$ для любой ограниченной последовательности $\{b_k\}_{k=1}^\infty$. Однако одного условия

$$\lim_{k\to\infty} a_{k,j} = \infty, \quad j = 1, \dots, m,$$

(без дополнительных требований на расположение узлов $a_{k,j}$) недостаточно для справедливости теоремы 1. Действительно, применяя к f, удовлетворяющей (6) и (7), теорему Лагранжа о среднем на отрезке с концами $a_{k,j}$, $a_{k+1,j}$, получим оценку

$$b_{k+1,j} - b_{k,j} = O(|a_{k+1,j} - a_{k,j}|),$$

показывающую, что числа $b_{k,j}$, удовлетворяющие (5), нельзя выбрать произвольно.

Отметим, наконец, что существуют функции класса $(V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, имеющие сколь угодно быстрый рост на заданном луче в $\mathbb{R}^n$ (см. [10, следствие 2]). Поэтому оценка (7) не выполняется без каких-либо дополнительных условий на $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство теоремы 1 приводится в § 4, а в § 3 содержатся необходимые вспомогательные утверждения.

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\gamma \in \mathbb{R}$ и

$$\alpha_k = k + \gamma, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{8}$$

Пусть также $\{\beta_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ — последовательность различных вещественных чисел такая, что

$$|\beta_k - \alpha_k| \le \varphi(|k|), \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{9}$$

где φ — положительная невозрастающая функция на $[0, +\infty)$, удовлетворяющая (4). Из условия (4) и монотонности φ получаем, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} < +\infty. \tag{10}$$

Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0. \tag{11}$$

Поэтому из (9) и (8) следует, что

$$\tau = \inf\{|\beta_k - \beta_l| : k, l \in \mathbb{Z},\ k \ne l\} > 0. \tag{12}$$

Для $\delta > 0$ обозначим

$$E_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha_k| \ge \delta,\ k \in \mathbb{Z}\}, \quad G_\delta = \{z \in \mathbb{C} : |z - \beta_k| \ge \delta,\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Рассмотрим целую функцию

$$B(z) = p_0(z) \prod_{k=1}^{\infty} p_k(z) p_{-k}(z), \quad z \in \mathbb{C}, \tag{13}$$

где

$$p_l(z) = \begin{cases} z, & \text{если } \beta_l = 0, \\ 1 - \frac{z}{\beta_l}, & \text{если } \beta_l \ne 0, \end{cases}$$

для любого $l \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1. *Пусть $\delta > 0$. Тогда*

$$|B(z)| \le c_1 |\sin(\pi(z-\gamma))| \quad \text{при } z \in E_\delta, \tag{14}$$

$$|\sin(\pi(z-\gamma))| \le c_2 |B(z)| \quad \text{при } z \in G_\delta, \tag{15}$$

где постоянные $c_1, c_2 > 0$ не зависят от z.

Доказательство. Далее символами $c_3, c_4, \ldots$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от z. Используя разложение функции $\sin(\pi(z-\gamma))$ в бесконечное произведение, из (13) при $z \in E_\delta$ находим

$$\frac{B(z)}{\sin(\pi(z-\gamma))} = \frac{p_0(z)}{\pi(z-\gamma)} \prod_{k=1}^{\infty} q_k(z),$$

где

$$q_k(z) = p_k(z) p_{-k}(z) \left(1 - \frac{z-\gamma}{k}\right)^{-1} \left(1 + \frac{z-\gamma}{k}\right)^{-1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Если $\beta_k \beta_{-k} \ne 0$, имеем

$$q_k(z) = \left(1 - \frac{k^2 + \beta_k\beta_{-k}}{\beta_k\beta_{-k}}\right) \left(1 + \frac{\beta_k - k - \gamma}{k + \gamma - z}\right) \left(1 + \frac{\beta_{-k} + k - \gamma}{\gamma - k - z}\right),$$

откуда

$$\ln|q_k(z)| \le \ln\left(1+\left|\frac{k^2+\beta_k\beta_{-k}}{\beta_k\beta_{-k}}\right|\right) + \ln\left(1+\left|\frac{\beta_k-k-\gamma}{k+\gamma-z}\right|\right) + \ln\left(1+\left|\frac{\beta_{-k}+k-\gamma}{\gamma-k-z}\right|\right). \quad (16)$$

Из (9) и (8) следует, что

$$|\beta_k-k-\gamma| \le \varphi(k), \quad |\beta_{-k}+k-\gamma| \le \varphi(k), \quad (17)$$

а также

$$|k^2+\beta_k\beta_{-k}| \le 2k\varphi(k) + (|\gamma|+\varphi(k))^2. \quad (18)$$

Используя неравенство $\ln(1+t) \le t$ при $t \ge 0$, из (16)–(18) получаем

$$\ln|q_k(z)| \le \frac{2k\varphi(k)+(|\gamma|+\varphi(k))^2}{|\beta_k\beta_{-k}|} + \varphi(k)\left(\frac{1}{|k+\gamma-z|}+\frac{1}{|\gamma-k-z|}\right).$$

Условие (10) показывает, что

$$\sum \frac{2k\varphi(k)+(|\gamma|+\varphi(k))^2}{|\beta_k\beta_{-k}|} < +\infty,$$

где суммирование производится по всем $k \in \mathbb{N}$ таким, что $\beta_k\beta_{-k} \ne 0$. Предположим теперь, что $x = \operatorname{Re} z \le \gamma$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{|k+\gamma-z|} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k+\gamma-x} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k} < +\infty.$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{|\gamma-k-z|} \le c_3 + \sum_{k\in M_1} \frac{\varphi(k)}{|k+x-\gamma|} + \sum_{k\in M_2} \frac{\varphi(k)}{k+x-\gamma},$$

где

$$M_1 = \{k \in \mathbb{N} : k+x-\gamma \le -1\}, \quad M_2 = \{k \in \mathbb{N} : k+x-\gamma \ge 1\}.$$

Учитывая, что при $M_1 \ne \varnothing$

$$\sum_{k\in M_1} \frac{\varphi(k)}{|k+x-\gamma|} \le \sum_{k<\frac{1}{2}(\gamma-x-1)} \frac{\varphi(k)}{\gamma-x-k} + \sum_{\frac{1}{2}(\gamma-x-1)\le k\le\gamma-x-1} \frac{\varphi(k)}{\gamma-x-k} \le c_4,$$

а также

$$\sum_{k\in M_2} \frac{\varphi(k)}{k+x-\gamma} \le \sum_{k\ge\gamma+1-x} \frac{\varphi(k+x-\gamma)}{k+x-\gamma} \le c_5,$$

приходим к оценке

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{|\gamma-k-z|} \le c_6.$$

Предположим теперь, что существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\beta_k\beta_{-k} = 0$. Тогда такое k единственно и

$$|q_k(z)| \le c_7 \quad \text{для } z \in E_\delta.$$

Отметим также, что

$$\left|\frac{p_0(z)}{z-\gamma}\right| \le c_8 \quad \text{для } z \in E_\delta.$$

Полученные выше неравенства приводят к оценке (14) в случае $\operatorname{Re} z \le \gamma$. Повторяя аналогичные рассуждения в случае $\operatorname{Re} z > \gamma$, получим (14) при всех $z \in E_\delta$.

Для доказательства оценки (15) достаточно повторить рассуждения из доказательства неравенства (14), при этом нужно поменять местами функции $B(z)$ и $\sin(\pi(z-\gamma))$, а также использовать (9), (11) и (10). $\square$

Лемма 2. *Выполнены следующие утверждения.*

(i) *Существует* $c_1 > 0$ *такое, что*

$$|B(z)| \le c_1 e^{\pi|\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{19}$$

(ii) *Существует* $c_2 > 0$ *такое, что*

$$|B'(\beta_k)| \ge c_2 \quad \text{для всех} \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Доказательство. Пусть $\delta > 0$. Если $z \in E_\delta$, оценка (19) следует из (14). В случае, когда $|z - \alpha_k| < \delta$ при некотором $z \in \mathbb{Z}$, для доказательства (i) достаточно применить принцип максимума модуля к функции $B(z)$ в круге $|z - \alpha_k| \le \delta$.

Докажем (ii). Пусть τ определено равенством (12) и $\delta \in (0, \tau/2)$. Тогда при достаточно больших $|k|$ имеем

$$|B'(\beta_k)| \ge \min_{|z-\beta_k|\le\delta} \frac{|B(z)|}{|z-\beta_k|} \ge \frac{1}{\delta} \min_{|z-\beta_k|=\delta} |B(z)|.$$

Используя (9), (11) и (15), из этого неравенства получаем (20). $\square$

Пусть $\{\xi_q\}_{q=-\infty}^{\infty}$ — последовательность вещественных чисел такая, что

$$K_1 < \xi_{q+1} - \xi_q < K_2 \tag{21}$$

для некоторых констант $K_1, K_2 > 0$ и всех $q \in \mathbb{Z}$. Пусть также $\{b_q\}_{q=-\infty}^{\infty}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q|^2 < +\infty. \tag{22}$$

Лемма 3. *Пусть* $\varepsilon > 0$ *и функция* u *голоморфна и ограничена в полосе*

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \varepsilon\}.$$

Пусть также $u(\xi_q) = 0$ *для всех* $q \in \mathbb{Z}$. *Тогда функция*

$$v(t) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} b_q \left| \frac{u(t)}{t - \xi_q} \right|^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

принадлежит классу $L^2(\mathbb{R})$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\{|u(z)|,\ z \in \Pi\}$ и $q \in \mathbb{Z}$. Если $z \in \Pi$ и $|z - \xi_q| > \varepsilon/2$, имеем

$$\left| \frac{u(z)}{z - \xi_q} \right| = \left(1 + \frac{1}{|z - \xi_q|}\right) \frac{|u(z)|}{1 + |z - \xi_q|} < \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right) \frac{M}{1 + |z - \xi_q|}.$$

Пусть теперь $|z - \xi_q| \le \varepsilon/2$. Применяя в данном круге принцип максимума модуля к функции $u(z)/(z - \xi_q)$, получаем

$$\max_{|z-\xi_q|\le\varepsilon/2} \left| \frac{u(z)}{z - \xi_q} \right| \le \frac{2}{\varepsilon} M \le \frac{(1 + 2/\varepsilon)M}{1 + |z - \xi_q|}.$$

Таким образом,

$$\left| \frac{u(t)}{t - \xi_q} \right| \le \frac{c_1}{1 + |t - \xi_q|}, \quad t \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{Z}, \tag{23}$$

где $c_1 > 0$ не зависит от t и q. Положим

$$t_q = \frac{1}{2}(\xi_{q-1} + \xi_q), \quad q \in \mathbb{Z},$$

и определим функцию $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенством

$$h(\xi) = |b_q| \quad \text{при } \xi \in [t_q, t_{q+1}), \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Из (22) и (21) следует, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\, dt = \sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q|^2 (t_{q+1} - t_q) < +\infty. \tag{24}$$

Кроме того, при $\xi \in [t_q, t_{q+1}]$, $t \in \mathbb{R}$ имеем

$$|(1 + |t - \xi_q|)^{-1} - (1 + |t - \xi|)^{-1}| \le \frac{|\xi - \xi_q|}{(1 + |t - \xi_q|)(1 + |t - \xi|)} < \frac{K_2}{1 + |t - \xi|},$$

откуда

$$(1 + |t - \xi_q|)^{-1} < \frac{K_2 + 1}{1 + |t - \xi|}.$$

Следовательно, в силу (21)

$$(1 + |t - \xi_q|)^{-2} < \frac{(K_2 + 1)^2}{K_1} \int\limits_{t_q}^{t_{q+1}} (1 + |t - \xi|)^{-2}\, d\xi \tag{25}$$

для всех $t \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{Z}$. Используя неравенства (23) и (25), получаем

$$\begin{aligned} |v(t)| &\le c_1^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} |b_q| (1 + |t - \xi_q|)^{-2} \\ &< c_2 \sum_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{t_q}^{t_{q+1}} \frac{|b_q|}{(1 + |t - \xi|)^2}\, d\xi = c_2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{h(\xi)\, d\xi}{(1 + |t - \xi|)^2}, \end{aligned} \tag{26}$$

где $c_2 > 0$ не зависит от t. Условие (24) показывает, что интеграл в правой части (26) есть свертка функций из класса $L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, эта свертка принадлежит $L^2(\mathbb{R})$ и из (26) следует утверждение леммы 3.

Пусть $\nu > -1$. Рассмотрим четную целую функцию

$$\mathbf{I}_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{k!\Gamma(\nu + k + 1) 2^{2k+\nu}}, \quad z \in \mathbb{C},$$

где Γ — гамма-функция. Функция $\mathbf{I}_\nu$ связана с функцией Бесселя J_ν равенством

$$\mathbf{I}_\nu(z) = z^{-\nu} J_\nu(z), \quad z \ne 0, \tag{27}$$

где, как обычно,

$$z^{-\nu} = |z|^{-\nu} e^{-i\nu \arg z}, \quad -\pi < \arg z \le \pi.$$

Из (27) следует (см. [11, гл. 1, § 23]), что функция $\mathbf{I}_\nu$ имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули вещественные и простые.

Пусть $\lambda > 0$, $t \in (-\lambda, \lambda)$ и

$$\Phi_{\lambda,t}(x) = e^{-itx_1} \mathbf{I}_{\frac{n-3}{2}} \Big(\sqrt{(\lambda^2 - t^2)(|x|^2 - x_1^2)}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\Delta\Phi_{\lambda,t} + \lambda^2\Phi_{\lambda,t} = 0, \tag{29}$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ *— оператор Лапласа в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для краткости положим

$$\mu = \sqrt{\lambda^2 - t^2}, \quad \psi(x) = \sqrt{|x|^2 - x_1^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть $j \in \{2, \dots, n\}$. Используя формулы

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{J_\nu(z)}{z^\nu}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu}, \quad \frac{d}{dz}\left(z^\nu J_\nu(z)\right) = z^\nu J_{\nu-1}(z)$$

(см. [11, гл. 1, § 6]), из (28) находим

$$\frac{\partial\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_j} = e^{-itx_1}(\mu\psi(x))^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n-1}{2}}(\mu\psi(x)) \frac{\mu^2 x_j}{(\mu\psi(x))^{n-1}},$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_j^2} = -\mu^2\Phi_{\lambda,t}\frac{x_j^2}{(\psi(x))^2} - e^{-itx_1}\mu^2 \mathbf{I}_{\frac{n-1}{2}}(\mu\psi(x))\left(1 - \frac{(n-1)x_j^2}{(\psi(x))^2}\right).$$

Суммируя полученные вторые производные по $j = 2, \dots, n$ и учитывая очевидное соотношение

$$\frac{\partial^2\Phi_{\lambda,t}}{\partial x_1^2} = -t^2\Phi_{\lambda,t},$$

получаем (29). $\square$

Лемма 5. *Для любых* $\varepsilon \in (0, \lambda)$, $\eta \in \mathbb{Z}_+^n$ *выполнено неравенство*

$$|\partial^\eta\Phi_{\lambda,t}(x)| \le c\big(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\big)^{1-\frac{n}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \ |t| \le \lambda - \varepsilon,$$

с постоянной $c > 0$, *не зависящей от* x *и* t.

Доказательство. Пусть $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — радиальная функция с носителем в шаре $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \le R\}$. Сферическое преобразование функции g задается равенством

$$\widetilde{g}(z) = 2^{\frac{n}{2}-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathbf{I}_{\frac{n}{2}-1}(z|x|)dx, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца если функция $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n,$$

то

$$(f * g)(x) = f(x)\widetilde{g}(\lambda), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где знак $*$ обозначает свертку функций f и g. Выбирая g так, что $\widetilde{g}(\lambda) \ne 0$, отсюда и из (29) получаем

$$\partial^\eta\Phi_{\lambda,t} = \frac{1}{\widetilde{g}(\lambda)}\partial^\eta(\Phi_{\lambda,t} * g) = \frac{1}{\widetilde{g}(\lambda)}\Phi_{\lambda,t} * \partial^\eta g.$$

Следовательно,

$$|\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)| \le \frac{1}{|\widetilde{g}(\lambda)|} \int\limits_{|y|\le R} |\partial^\eta g(y)|dy \cdot \max_{|y-x|\le R} |\Phi_{\lambda,t}(y)|. \tag{30}$$

Используя (28) и асимптотическую формулу для функции $\mathbf{I}_{\frac{n-3}{2}}(z)$ при $z \to \infty$ (см. [11, гл. 2, § 29]), имеем оценку

$$\max_{|y-x|\le R} |\Phi_{\lambda,t}(y)| \le c_1 \bigl(1 + \sqrt{|x|^2 - x_1^2}\bigr)^{1-\frac{n}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad |t| \le \lambda - \varepsilon,$$

где $c_1 > 0$ не зависит от x и t. Отсюда и из (30) следует утверждение леммы 5. $\square$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Прежде всего отметим, что если $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$, то функция $f(\lambda x)$ принадлежит классу $(V_{r/\lambda} \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$ для любого $\lambda > 0$. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\alpha = 1$. Пусть $j \in \{1, \dots, m\}$ и

$$B_j(z) = p_{0,j}(z) \prod_{k=1}^{\infty} p_{k,j}(z) p_{-k,j}(z), \quad z \in \mathbb{C},$$

где

$$p_{l,j}(z) = \begin{cases} z, & \text{если } a_{l,j} = 0, \\ 1 - \frac{z}{a_{l,j}}, & \text{если } a_{l,j} \ne 0, \end{cases}$$

при любом $l \in \mathbb{Z}$. Из (3) и (11) следует, что функция $B_j(z)$ целая. Положим

$$W(z) = \prod_{j=1}^{m} B_j(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{31}$$

Согласно (19) существует $c_1 > 0$ такое, что

$$|W(z)| \le c_1 e^{\pi m |\operatorname{Im} z|}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{32}$$

Числа $a_{k,j}$ ($k \in \mathbb{Z}$, $j \in \{1, \dots, m\}$) являются простыми нулями функции W. Поскольку все дробные части $\{\gamma_1\}, \dots, \{\gamma_m\}$ различны, из (20), (31) и (15) заключаем, что

$$|W'(a_{k,j})| \ge c_2 \quad \text{для всех } k, j, \tag{33}$$

где постоянная $c_2 > 0$ не зависит от k и j. Из (3) и (11) следует также, что

$$\zeta = \inf\{|a_{k,j} - a_{l,i}| : k, l \in \mathbb{Z},\ i, j \in \{1, \dots, m\},\ (k,j) \ne (l,i)\} > 0. \tag{34}$$

Рассмотрим функцию

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} b_{k,j} \left(\frac{W(z)}{W'(a_{k,j})(z - a_{k,j})} \right)^2, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{35}$$

Из условий (5), (33) и (3) вытекает, что ряд в правой части равенства (35) сходится в $\mathbb{C}$ локально равномерно. Следовательно, функция H целая, при этом

$$H(a_{k,j}) = b_{k,j} \quad \text{при всех } k, j. \tag{36}$$

Пусть $\delta \in (0, \zeta/2)$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$|z - a_{k,j}| \geq \delta \quad \text{для всех } k, j.$$

Из (35) и (33) получаем

$$|H(z)| \leq \frac{|W(z)|^2}{c_2^2} \Big(\sum_{k,j} |b_{k,j}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{k,j} \frac{1}{|z - a_{k,j}|^4} \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, из (5) и (32) видно, что

$$|H(z)| \leq c_3 e^{2\pi m |\operatorname{Im} z|}, \tag{37}$$

где $c_3 > 0$ не зависит от z. Применяя к функции H принцип максимума модуля в каждом круге вида $|z - a_{k,j}| \leq \delta$ и используя (37), получаем, что неравенство

$$|H(z)| \leq c_4 e^{2\pi m |\operatorname{Im} z|} \tag{38}$$

верно уже для всех $z \in \mathbb{C}$ и некоторого $c_4 > 0$, не зависящего от z. Далее, из (35) и (33) имеем

$$|H(z)| \leq \frac{1}{c_2^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} |b_{k,j}| \frac{|W(z)|^2}{|z - a_{k,j}|^2}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Согласно (34) и лемме 3 отсюда следует, что сужение функции H на вещественную ось содержится в классе $L^2(\mathbb{R})$. Используя (38) и теорему Пэли — Винера, приходим к выводу, что существует функция $h \in L^2(\mathbb{R})$ с носителем на $[-2\pi m, 2\pi m]$ такая, что

$$\widehat{h}(z) = \int\limits_{-2\pi m}^{2\pi m} h(t) e^{-itz} dt = H(z), \quad z \in \mathbb{C}. \tag{39}$$

Далее, пусть $\lambda > 2\pi m$ и $\mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(r\lambda) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \int\limits_{-2\pi m}^{2\pi m} h(t) \Phi_{\lambda,t}(x)\, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{40}$$

где $\Phi_{\lambda,t}$ определяется формулой (28). Из (40) и (29) следует, что

$$\Delta f + \lambda^2 f = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^n.$$

Применяя теорему о шаровых средних для решений уравнения Гельмгольца, отсюда имеем равенство

$$\int\limits_{|y| \leq r} f(x + y) dy = (2\pi)^{\frac{n}{2}} r^n \mathbf{I}_{\frac{n}{2}}(\lambda r) f(x) = 0$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Это означает, что $f \in (V_r \cap C^\infty)(\mathbb{R}^n)$. Кроме того, из (40), (39) и (36) видно, что

$$f(a_{k,j}, 0, \ldots, 0) = b_{k,j} \quad \text{для всех } k \in \mathbb{Z},\ j \in \{1, \ldots, m\}. \tag{41}$$

Пусть теперь $\eta = \{\eta_1, \ldots, \eta_n\} \in \mathbb{Z}_+^n$, тогда

$$\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x) = (-it)^{\eta_1} \partial^{\eta'} \Phi_{\lambda,t}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $t \in [-2\pi m, 2\pi m]$, $\eta' = \{0, \eta_2, \dots, \eta_n\}$. По теореме Планшереля отсюда и из (40) получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\partial^\eta f(x)|^2 dx_1 = 2\pi \int\limits_{-2\pi m}^{2\pi m} |h(t)|^2 |\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)|^2 \, dt. \tag{42}$$

Из (40) следует также, что

$$|\partial^\eta f(x)| \le \int\limits_{-2\pi m}^{2\pi m} |h(t)| \cdot |\partial^\eta \Phi_{\lambda,t}(x)| \, dt, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{43}$$

Ввиду леммы 5 неравенство (43) и соотношение (42) показывают, что выполнено условие (7). Применяя во внимание (41), заключаем, что функция f удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Pompeiu D.* Sur une propriété intégrale de fonctions de deux variables réeles // Bull. Sci. Acad. Royale Belgique. Sér. 5. 1929. V. 15. P. 265–269.
2. *Chakalov L.* Sur un problème de D. Pompeiu // Annuaire [Godišnik] Univ. Sofia Fac. Phys.-Math., Livre 1. 1944. V. 40. P. 1–14.
3. *Беренстейн К. А., Струппа Д. К.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111.
4. *Bagchi S. C., Sitaram A.* The Pompeiu problem revisited // L'Enseignement Math. 1990. V. 36, N 1–2. P. 67–91.
5. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1992. P. 185–194.
6. *Volchkov V. V.* Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
7. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl. London Limited, 2009.
8. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Offbeat integral geometry on symmetric spaces. Basel: Birkhäuser, 2013.
9. *Volchkov V. V., Volchkov Vit. V.* Interpolation problems for functions with zero ball means // Issues Anal. 2021. V. 10, N 3. P. 129–140.
10. *Волчков В. В., Волчков Вит. В.* Аппроксимация функций на лучах в $\mathbb{R}^n$ решениями уравнений свертки // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 56–64.
11. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 25 марта 2024 г.
После доработки 25 марта 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Волчков Валерий Владимирович, Волчков Виталий Владимирович
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская 24, Донецк 283001
valeriyvolchkov@gmail.com, volna936@gmail.com

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 510.5+510.6+512.563

ОБ 1–РАЗРЕШИМОСТИ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР С ОДНИМ ВЫДЕЛЕННЫМ ИДЕАЛОМ

М. Н. Гаськова

Аннотация. Получено описание 1-разрешимых булевых алгебр с одним выделенным идеалом в терминах вычислимости некоторого набора предикатов на данной алгебре, и показана минимальность полученных условий.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.507

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимая модель, разрешимая модель, n-разрешимая модель, ограниченные теории булевых алгебр, идеал на булевых алгебрах, I-алгебра.

1. Предварительные сведения

Булевы алгебры с выделенными идеалами являются популярным объектом исследований, среди результатов в рамках теории вычислимости — работы Ю. Л. Ершова, П. Е. Алаева, Д. Е. Пальчунова, А. С. Морозова и др., хороший обзор можно найти в [1]. Булевы алгебры с конечным числом выделенных идеалов называются I-*алгебрами.*

В данной работе рассматриваются не более чем счетные булевы алгебры. Модель конечного языка называется *вычислимой*, если ее носитель — вычислимое множество натуральных чисел, операции — вычислимые функции и отношения вычислимы. Говоря о вычислимой булевой алгебре, будем подразумевать, что она вычислима как модель в языке $\sigma_{BA} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$, где 0 и 1 соответствуют наименьшему и наибольшему элементам. Вычислимая модель называется *n-разрешимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе.

Для произвольных идеалов I_1 и I_2 булевой алгебры будем использовать следующее обозначение: $\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \{x + y \mid x \in \mathrm{I}_1, y \in \mathrm{I}_2\}$. Будем использовать следующие обозначения для канонических предикатов на булевых алгебрах: E_0 — предикат, выделяющий 0 в булевой алгебре, At_0 (или At) — множество атомов, Als_0 (или Als) — идеал безатомных элементов, Atm_0 (или Atm) — идеал атомных элементов, $\mathrm{E}_1 = \mathrm{Als} + \mathrm{Atm}$, At_n — множество элементов булевой алгебры, являющихся атомами в факторе по E_n, Als_n — идеал элементов булевой алгебры, являющихся безатомными в факторе по E_n, Atm_n — идеал элементов булевой алгебры, являющихся атомными в факторе по E_n, $\mathrm{E}_{n+1} = \mathrm{Als}_n + \mathrm{Atm}_n$. Если элементы $a_1, \ldots, a_k$ не пересекаются и их сумма это a, то будем говорить, что $a_1, \ldots, a_k$ — *разбиение* a, и коротко записывать «$a_1, \ldots, a_k | a$».

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0011).

© 2024 Гаськова М. Н.

С. С. Гончаровым [2] было показано, что n-разрешимость булевой алгебры равносильна вычислимости булевой алгебры с вычислимостью первых $n+1$ предикатов последовательности $\mathrm{E}_0, \mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \mathrm{At}_1, \ldots,$ т. е. n-разрешимость булевых алгебр полностью описана. В данной работе рассматривается аналогичная задача для булевых алгебр с выделенным идеалом и дается ответ для $n = 1$, т. е. получено описание 1-разрешимых булевых алгебр с одним выделенным идеалом (теорема 2), далее в разд. 3 показана минимальность полученных условий.

2. Основное описание

Будем пользоваться следующим известным фактом, приведем его в формулировке из [2] (следствие 2.1.10). Его также можно найти в более ранних монографиях [3, 4].

Теорема 1 [2]. *Пусть T — теория сигнатуры σ. Формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ T-эквивалентна $\forall$-формуле сигнатуры σ тогда и только когда, когда сохраняет истинность на подмоделях теории T, т. е. для любых моделей $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$ теории T и элементов $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{B}_1$, где $\mathscr{B}_1$ — подмодель $\mathscr{B}_2$ в теории T, если φ истинна на элементах $a_1, \ldots, a_n$ в $\mathscr{B}_2$, то φ истинна на этих же элементах и в модели $\mathscr{B}_1$.*

Комментарий. Достаточно рассматривать только счетные модели $\mathscr{B}_1$ и $\mathscr{B}_2$, потому что доказательство данного факта использует теорему о существовании модели, при этом известно, что если счетное множество формул непротиворечиво, то оно имеет модель счетной мощности.

Будем использовать следующие обозначения для сигнатур:

$\sigma_0^I = \sigma_{BA} \cup \{I, \mathrm{E}_0\}$,

$\sigma_1^I = \sigma_0^I \cup \{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\}$, где $I \to 0 = \{x \mid \forall y(y \leq x \Rightarrow (y = 0 \vee y \notin I))\}$, At_I — предикат, выделяющий множество элементов булевой алгебры, являющихся атомами в факторе по идеалу I.

Свойство $(*)$ предикатов сигнатуры σ. Пусть сигнатура σ содержит только одноместные предикаты. Будем говорить, что сигнатура σ *обладает свойством* $(*)$, если для любого предиката $P \in \sigma$ и любого $k > 0$ существует бескванторная формула $\Psi_P(x_1, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ такая, что для любой булевой алгебры $\mathscr{A}$ и для любого элемента $c \in \mathscr{A}$ и его разбиения $h_1, \ldots, h_k$ в $\mathscr{A}$ выполняется $\mathscr{A} \models P(c) \Leftrightarrow \mathscr{A} \models \Psi_P(h_1, \ldots, h_k)$ (иными словами, зная истинность предикатов сигнатуры σ на разбиении элемента, можно определить с помощью бескванторной формулы истинность заданного предиката на самом элементе).

Лемма 1. *Пусть σ^* и σ' — некоторые расширения сигнатуры σ_{BA} одноместными предикатами, содержащие E_0, σ^* обладает свойством $(*)$ и $\sigma^* \subseteq \sigma'$. Пусть $\mathscr{A}$ — подалгебра булевой алгебры $\mathscr{B}$ в сигнатуре σ'. Пусть для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ и его разбиения $e_1, \ldots, e_m$ в $\mathscr{B}$ существует разбиение $e'_1, \ldots, e'_m$ элемента a в $\mathscr{A}$ такое, что для любого $i \in [1, m]$ на e_i и e'_i истинны одни и те же предикаты из σ^*. Тогда для любой $\exists$-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ сигнатуры σ^* и любых $a_1, \ldots, a_k \in \mathscr{A}$ из $\mathscr{B} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$ следует $\mathscr{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_k)$.*

Доказательство. Лемма частично повторяет лемму 2.6.2 из [2]. Приведем доказательство с необходимыми корректировками. Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ — $\exists$-формула сигнатуры σ^*. Она имеет вид $(\exists y_1, \ldots, y_m)\Psi(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m)$,

где формула Ψ бескванторная. Если формула $\varphi(x_1,\dots,x_k)$ ложна в $\mathscr{B}$ на любых элементах из $\mathscr{A}$, то заключение леммы очевидно. В противном случае пусть $a_1,\dots,a_k$ — элементы $\mathscr{A}$ и

$$\mathscr{B} \models (\exists y_1 \dots \exists y_m)\Psi(a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m).$$

Рассмотрим подалгебру $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k)$, порожденную в булевой алгебре $\mathscr{B}$ элементами $a_1,\dots,a_k$ в сигнатуре булевых алгебр. Это подалгебра является также подалгеброй $\mathscr{A}$, так как $\sigma_{BA} \subseteq \sigma'$. Пусть $b_1,\dots,b_s$ — все атомы этой булевой алгебры. Тогда

$$\mathscr{B} \cong \widehat{b}_1 \times \dots \times \widehat{b}_s, \quad \mathscr{A} \cong \widehat{(b_1)}_{\mathscr{A}} \times \dots \times \widehat{(b_s)}_{\mathscr{A}},$$

где $\widehat{(b_i)}_{\mathscr{A}} \subseteq \widehat{b}_i$, $i \in [1,s]$. Для формулы

$$(\exists y_1 \dots \exists y_m)\Psi(a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m)$$

возьмем элементы $y_1,\dots,y_m$, которые делают ее истинной в $\mathscr{B}$. Рассмотрим булеву алгебру $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k,\, y_1,\dots,y_m)$ как подалгебру булевой алгебры $\mathscr{B}$ в сигнатуре булевых алгебр и все атомы этой булевой алгебры $e_0,\dots,e_r$. Заметим, что каждый атом лежит под одним из элементов $b_1,\dots,b_s$. Пусть K_i — множество номеров атомов, которые лежат под элементом b_i, $i \in [1,s]$, т. е.

$$K_1,\dots,K_s \subseteq \{0,\dots,r\}, \quad \bigvee_{i=1}^{s} K_i = \{0,\dots,r\}, \quad \bigvee_{j\in K_i} e_j = b_i.$$

Так как $a_1,\dots,a_k$ лежат в $\mathscr{A}$, атомы $b_1,\dots,b_s$ подалгебры $\mathbf{gr}_{\mathscr{B}}(a_1,\dots,a_k)$ лежат в $\mathscr{A}$. Согласно условию леммы для каждого $i \in [1,s]$ должны найтись $|K_i|$ элементов e'_j, $j \in K_i$, в подалгебре $\mathscr{A}$ таких, что они образуют разбиение b_i (т. е. $\bigvee\limits_{j\in K_i} e'_j = b_i$ и $e'_i \wedge e'_j = 0$ для любых $i \neq j$) и относительно предикатов сигнатуры σ^* выполнено следующее условие: на e'_i выполняются те же предикаты из σ^*, что и на e_i. Положим $y'_i = \bigvee\limits_{j:e_j\le y_i} e'_j$.

Докажем индукцией по сложности формулы, что формула $\Psi(a_1,\dots,a_k,$ $y'_1,\dots,y'_m)$ истинна в $\mathscr{A}$. На y'_i и y_i выполнены одни и те же предикаты из σ^* в силу того, что предикаты сигнатуры σ^* обладают свойством $(*)$. Любой терм от $a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m$ эквивалентен некоторой сумме атомов $e_0,\dots,e_r$. Соответственно два терма равны тогда и только тогда, когда они эквивалентны одной и той же сумме атомов. В силу определения $y'_i = \bigvee\limits_{j:e_j\le y_i} e'_j$ два терма от $a_1,\dots,a_k,y_1,\dots,y_m$ равны тогда и только тогда, когда равны эти же термы от $a_1,\dots,a_k,y'_1,\dots,y'_m$. Таким образом, любая атомная формула истинна в $\mathscr{B}$ на $\overline{a}$ и $\overline{y}$ тогда и только тогда, когда она истинна в $\mathscr{A}$ на $\overline{a}$ и $\overline{y}'$. Очевидно, что применение логических связок сохранит это свойство. Тем самым формула $\Psi(a_1,\dots,a_k,y'_1,\dots,y'_m)$ истинна в $\mathscr{A}$. Следовательно, в $\mathscr{A}$ истинна формула $\varphi(a_1,\dots,a_k)$. Лемма доказана.

Пусть Th_1^I — теория, расширяющая теорию булевых алгебр добавлением определений для каждого символа из σ_1^I.

Предложение 1. *Для любой $\exists$-формулы $\varphi(x_1,\dots,x_n)$ сигнатуры σ_0^I существует $\forall$-формула $\psi(x_1,\dots,x_m)$ сигнатуры σ_1^I такая, что*

$$Th_1^I \vdash (\forall x_1,\dots,\forall x_m)(\varphi(x_1,\dots,x_m) \Leftrightarrow \psi(x_1,\dots,x_m)).$$

Доказательство. В силу теоремы 1 достаточно доказать, что формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры σ_0^I сохраняет истинность при взятии подмоделей сигнатуры σ_1^I теории Th_1^I.

Пусть $(\mathscr{A}^*, \sigma_1^I)$ — подалгебра алгебры $(\mathscr{B}^*, \sigma_1^I)$. Заметим, что тогда булева алгебра $(\mathscr{A}^*, \sigma_{BA})$, являющаяся обеднением алгебры $(\mathscr{A}^*, \sigma_1^I)$ до сигнатуры σ_{BA}, также является подалгеброй булевой алгебры $(\mathscr{B}^*, \sigma_{BA})$. Воспользуемся леммой 1, в качестве $\mathscr{A}$ возьмем булеву алгебру $(\mathscr{A}^*, \sigma_{BA})$, в качестве $\mathscr{B}$ возьмем булеву алгебру $(\mathscr{B}^*, \sigma_{BA})$, в качестве σ^* возьмем σ_0^I (эта сигнатура обладает свойством $(*)$). Согласно лемме 1 достаточно показать, что для любого элемента $a \in \mathscr{A} = (\mathscr{A}^*, \sigma_{BA})$ и его разбиения на ненулевые элементы $e_1, \ldots, e_m, d_1, \ldots, d_r | a$ в $\mathscr{B} = (\mathscr{B}^*, \sigma_{BA})$ такого, что $e_i \in I$ для всех $i \in [1, m]$ и $d_j \notin I$ для всех $j \in [1, r]$, существует разбиение на ненулевые элементы $e'_1, \ldots, e'_m, d'_1, \ldots, d'_r$ элемента a в $\mathscr{A}$ такое, что $e_i \in I$ для всех $i \in [1, m]$ и $d_j \notin I$ для всех $j \in [1, r]$.

Лемма 2. *Если $\left(\mathscr{A}^*, \sigma_1^I\right)$ — подалгебра алгебры $\left(\mathscr{B}^*, \sigma_1^I\right)$, то для любого элемента $a \in \mathscr{A}$ выполняется $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = |(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}|$.*

Доказательство. Если $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = 1$, то $a \in I$ в $\mathscr{A}$ и $a \in I$ в $\mathscr{B}$ (так как $I \in \sigma_1^I$), следовательно, $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}| = 1$.

Если $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = 2^n$ для некоторого $n > 0$, то существует разбиение a в $\mathscr{A}$ на n атомов в факторе по I. В силу того, что $\mathrm{At}_I \in \sigma_1^I$, эти же элементы являются атомами в факторе по I в $\mathscr{B}$ и образуют разбиение a в $\mathscr{B}$. Значит, $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = |(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}|$.

Если $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = \omega$, то a в $\mathscr{A}$ можно разбить на сколь угодно большое число элементов, не лежащих в I. Так как $I \in \sigma_1^I$, то эти же элементы не лежат в I в $\mathscr{B}$ и образуют по-прежнему разбиение. Получаем, что $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}| = \omega$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство предложения.

Если $r > 0$, то $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}| \geq 2^r$, по лемме 2 $|(\widehat{a/I})_{\mathscr{A}}| = |(\widehat{a/I})_{\mathscr{B}}|$, значит, найдутся $b_1, \ldots, b_r | a$ в $\mathscr{A}$ такие, что $b_i \notin I$, $i \in [1, r]$. Найдем под a в $\mathscr{A}$ дизъюнктные элементы $e'_1, \ldots, e'_m$ из I. Почему такие элементы есть? Допустим, что под a в $\mathscr{A}$ всего l дизъюнктных элементов $e'_1, \ldots, e'_l$ из I, $l < m$, а $a - (e'_1 + \cdots + e'_l) \in I \to 0$. Тогда $e'_1, \ldots, e'_l$ должны быть атомами в $\mathscr{A}$, а следовательно, и в $\mathscr{B}$, кроме того, $a - (e'_1 + \cdots + e'_l) \in I \to 0$ в $\mathscr{B}$ (так как $\mathrm{At}, I \to 0 \in \sigma_1^I$), а это противоречит тому, что под a в $\mathscr{B}$ есть m дизъюнктных элементов из I. Значит, под a в $\mathscr{A}$ есть m дизъюнктных элементов $e'_1, \ldots, e'_m$ из I. Положим $d'_i = b_i - (e'_1 + \cdots + e'_l)$ для всех $i \in [1, r]$. Заметим, что $d'_i \notin I$, $e'_1, \ldots, e'_m, d'_1, \ldots, d'_r | a$ в $\mathscr{A}$, значит, это разбиение искомое.

Если $r = 0$, то аналогично предыдущему случаю под b в $\mathscr{A}$ можно найти m дизъюнктных элементов из I и, более того, в связи с тем, что $b \in I$, можно выбрать их таким образом, чтобы $e'_1, \ldots, e'_m | b$ в $\mathscr{A}$. Предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}^*$ — булева алгебра, I — предикат, выделяющий идеал в булевой алгебре, и $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^*, I)$. Алгебра $\mathscr{A}$ 1-разрешима тогда и только тогда, когда $\mathscr{A}$ вычислима и вычислимы предикаты* At, $I \to 0$, At_I.

Доказательство. Необходимость следует из возможности описания предикатов At, $I \to 0$, At_I Π_1-формулами в сигнатуре σ_0^I. Покажем достаточность. Согласно предложению 1 любая Σ_1-формула $\varphi(\overline{x})$ сигнатуры σ_0^I эквивалентна

$\forall$-формуле $\varphi_1(\overline{x})$ в сигнатуре σ_1^I. В [5] получен следующий результат (теорема 2.11): теория первого порядка булевых алгебр с последовательностью выделенных идеалов разрешима, т. е. множество геделевских номеров предложений соответствующей теории вычислимо. Перебирая элементы этого множества, для любой Σ_1-формулы $\varphi(\overline{x})$ за конечное число шагов можем найти эквивалентную ей $\forall$-формулу $\varphi_1(\overline{x})$ в сигнатуре σ_1^I такую, что формула $\forall\overline{x}(\varphi(\overline{x}) \leftrightarrow \varphi_1(\overline{x}))$, в которой предикаты At, $I \to 0$, At_I заменены определяющими их формулами, является предложением теории булевых алгебр с последовательностью выделенных идеалов $I, \{0\}, \{0\}, \ldots$. И далее по алгоритму из теоремы Поста, перебирая значения переменных, находящихся под квантором существования, за конечное число шагов определим, какая из $\exists$-формул истинна — $\varphi(\overline{x})$ или $\neg\varphi_1(\overline{x})$.

Теорема доказана.

3. Минимальность условий теоремы 2

В этом разделе покажем, что условия 1-разрешимости булевых алгебр с выделенным идеалом, сформулированные в теореме 2, минимальны в следующем смысле: для любого предиката $P \in \{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\}$ существует вычислимая булева алгебра с выделенным идеалом I такая, что в ней вычислимы предикаты $\{\mathrm{At}, I \to 0, \mathrm{At}_I\}\backslash\{P\}$, но нет 1-разрешимого представления.

Сначала рассмотрим случай $P = \mathrm{At}$. Воспользуемся следующим результатом, который является переработанным в [2] примером Фейнера.

Лемма 3 [2]. *Существует вычислимая атомная булева алгебра $\mathscr{B}^*$, не имеющая вычислимого представления с вычислимым множеством атомов.*

Предложение 2. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_1$ такая, что в ней вычислим некоторый идеал I, а также множества $I \to 0$ и At_I, но при этом у нее нет 1-разрешимого представления.*

Доказательство. В качестве $\mathscr{C}_1$ возьмем булеву алгебру $\mathscr{B}^*$ из леммы 3, $I = \mathscr{B}^*$, тогда $\mathrm{At}_I(\mathscr{C}_1) = \varnothing$, а $I \to 0 = \{0\}$, при этом у нее нет 1-разрешимого представления, так как нет вычислимого представления с вычислимым множеством атомов. Предложение доказано.

Далее рассмотрим случай $P = \mathrm{At}_I$.

Предложение 3. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_2$ такая, что в ней вычислим некоторый идеал I, а также множества At и $I \to 0$, но при этом у нее нет 1-разрешимого представления.*

Доказательство. По предложению 3.2.2 из [2] для каждой вычислимой булевой алгебры $\mathscr{B}$ существует вычислимый линейный порядок такой, что булева алгебра, построенная по нему, изоморфна $\mathscr{B}$. Пусть γ — вычислимый линейный порядок для булевой алгебры $\mathscr{B}^*$ из леммы 3, т. е. $\mathscr{B}^* \cong \mathscr{B}(\gamma)$. Рассмотрим булеву алгебру $\mathscr{C}_2 = \mathscr{B}(\eta \times \gamma)$, где η — линейный порядок по типу рациональных чисел. Определим идеал $I \subseteq \mathscr{C}_2$ такой, что $I = \{x \in \mathscr{C}_2 \mid x$ является конечной суммой полуинтервалов, оба конца которых лежат в одном экземпляре $\eta\}$. Идеал I вычислим в $\mathscr{C}_2$, так как принадлежность определяется по концам полуинтервалов, принадлежащих вычислимому линейному порядку. Заметим, что под любым ненулевым $x \in \mathscr{C}_2$ найдется ненулевой элемент идеала I, поэтому $I \to 0 = \{0\}$, а $\mathrm{At}(\mathscr{C}_2) = \varnothing$. При этом $\mathscr{C}_2/I \cong \mathscr{B}^*$, поэтому факторалгебра $\mathscr{C}_2/I$ не имеет 1-разрешимого представления, и в силу вычислимости

идеала I булева алгебра $\mathscr{C}_2$ тоже не может иметь 1-разрешимого представления. Предложение доказано.

Наконец, рассмотрим случай $P = I \to 0$. В качестве инструмента для построения искомой I-алгебры будем использовать приведенную далее теорему 3 из [6]. Предварительно поместим определения необходимых для этого терминов.

Основной объем работы при применении теоремы 3 для наших целей будет составлять описание отношения $\leq_\alpha^\sigma$ на булевых алгебрах (это так называемое "standard back-and-forth relation" на булевых алгебрах в языке, обогащенном предикатными символами из σ). Через $\Pi_\alpha(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех бесконечных Π_α-предложений, истинных в модели $\mathfrak{M}$, через $\mathfrak{M} \leq_\alpha \mathfrak{N}$ — то, что $\Pi_\alpha(\mathfrak{M}) \subseteq \Pi_\alpha(\mathfrak{N})$. Базовую теоретико-модельную информацию об этом отношении можно найти в [7, 8]. Пусть σ — некоторый конечный набор 1-местных предикатных символов (может быть, пустой), для каждого из которых заранее определена его реализация в любой алгебре, причем эта реализация сохраняется при изоморфизмах. Тогда $\mathscr{A}^\sigma$ означает единственное обогащение алгебры $\mathscr{A}$ предикатами из σ. Если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — булевы алгебры, то запись вида $\mathscr{A} \leq_\alpha^\sigma \mathscr{B}$ означает, что $\mathscr{A}^\sigma \leq_\alpha \mathscr{B}^\sigma$.

Идеальный оператор — это соответствие T, которое каждой алгебре $\mathscr{A}$ сопоставляет идеал $\mathrm{T}(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{A}$ и при этом обладает свойством: если $x \in \mathscr{A}$, $y \in \mathscr{B}$ и $\widehat{x} \cong \widehat{y}$, то $x \in \mathrm{T}(\mathscr{A}) \Leftrightarrow y \in \mathrm{T}(\mathscr{B})$.

Если $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ — алгебры и T — идеальный оператор, то изоморфное вложение $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ назовем T-*стабильным*, когда выполняются свойства:

(1) $f^{-1}(\mathrm{T}(\mathscr{B})) = \mathrm{T}(\mathscr{A})$;

(2) $\widehat{f(a)} = f(\widehat{a})$ для $a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})$.

В этом случае $\widehat{f(a)} \cong \widehat{a}$ для $a \in \mathrm{T}(\mathscr{A})$.

Идеальный оператор T-*стабилен*, если для любой последовательности алгебр $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ и любых T-стабильных вложений $h_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$ верно утверждение: если $\mathscr{C} = \mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются T-стабильными. Под операцией $\mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ понимается стандартная конструкция прямого предела последовательности структур, которую можно найти, например, в [9].

Набор σ будем называть *локальным*, если для любых алгебр $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, любых $a_0, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$, $a_0, \ldots, a_n|1$, и любых $b_0, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$, $b_0, \ldots, b_n|1$, верна эквивалентность: $(\mathscr{A}, a_0, \ldots, a_n) \leq_0^\sigma (\mathscr{B}, b_0, \ldots, b_n) \Leftrightarrow \widehat{a}_i \leq_0^\sigma \widehat{b}_i$ для всех $i \in [0, n]$.

Пусть $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ — изоморфное вложение, σ — локальный набор. Будем говорить, что f — σ-*вложение*, если f является изоморфным вложением $\mathscr{A}^\sigma$ в $\mathscr{B}^\sigma$, т. е. $\mathscr{A} \models P(a) \Leftrightarrow \mathscr{B} \models P(f(a))$ для всех $a \in \mathscr{A}$, $P \in \sigma$.

Пусть T — идеальный оператор, σ — локальный набор. Будем говорить, что σ *согласован* с T, если для любой последовательности алгебр $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ и T-стабильных σ-вложений $h_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{A}_{n+1}$ верно: если $\mathscr{C} = \mathrm{Lim}\{\mathscr{A}_n, h_n\}_{n\in\omega}$ и $g_n : \mathscr{A}_n \to \mathscr{C}$ — естественные вложения, то g_n также являются σ-вложениями.

Последовательность вида $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$, где $\mathscr{A}_n$ — алгебры, назовем *вычислимой*, если $\mathscr{A}_n$ вычислимы для всех $n \in \omega$ и индекс $\mathscr{A}_n$ может быть вычислен по $n \in \omega$. Если α — вычислимый ординал, то вычислимая последовательность $\{\mathscr{A}_n\}_{n\in\omega}$ является α-*дружественной*, если отношение $(\mathscr{A}_n, \overline{a}) \leq_\beta (\mathscr{A}_m, \overline{b})$ на $n, m \in \omega$ наборах $\overline{a}$ из $\mathscr{A}_n$ и $\overline{b}$ из $\mathscr{A}_m$, где $|\overline{a}| = |\overline{b}|$ и $\beta < \alpha$, является вычислимо-перечислимым. Точная формулировка вычислимой перечислимости по ординалам $\beta < \alpha$, вообще говоря, требует перехода к обозначениям для вычислимых

ординалов, но поскольку ниже будут рассматриваться только конечные α, полного определения приводить не будем.

Теорема 3 [6]. *Пусть* T *— стабильный идеальный оператор,* $\mathscr{B}_0$, $\mathscr{B}_1$ *— две бесконечные вычислимые алгебры,* $\mathscr{B}_0/\mathrm{T}$, $\mathscr{B}_1/\mathrm{T} \cong \mathscr{B}(1)$, $\mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$, $\mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$ *— вычислимые подмножества в* $\mathscr{B}_0$ *и* $\mathscr{B}_1$ *соответственно. Пусть также* $\alpha \geq 1$ *— вычислимый ординал,* σ *— локальный набор, согласованный с* T*, и выполняются условия:*

(a) $\forall a \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_0$ *и* $\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_1\big)$*;*

(b) $\forall a \in \mathscr{B}_1 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)\ \forall \beta < \alpha\ \big(\widehat{a} \leq^\sigma_\beta \widehat{a} \times \mathscr{B}_1\big)$*;*

(c) $\big\{\big(\mathscr{B}_0^n \times \mathscr{B}_1^m\big)^\sigma\big\}_{\langle n,m\rangle \in \omega}$ *— α-дружественное семейство.*

Тогда для любой Δ^0_α*-алгебры* $\mathscr{A} \neq 0$ *и для любого* Δ^0_α*-идеала* G *алгебры* $\mathscr{A}$ *найдется такая* σ*-вычислимая алгебра* $\mathscr{C}$*, что* $\mathscr{C}/\mathrm{T} \cong \mathscr{A}$*. При этом найдется изоморфизм* $f : \mathscr{A} \to \mathscr{C}/\mathrm{T}$ *со свойствами:*

(1) *если* $a \in \mathscr{A} \setminus G$ *и* $f(a) = b/\mathrm{T}(\mathscr{C})$*, то найдутся* $z \leq b$, $e \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$ *и* T*-стабильное вложение* $g : \widehat{e} \to \widehat{z}$*;*

(2) *если* $a \in G$*, то существует такой* $d \in \mathscr{C}$*, что* $f(a) = d/\mathrm{T}(\mathscr{C})$ *и при любом* $y \leq d$

(i) *если* $y \notin \mathrm{T}(\mathscr{C})$*, то найдутся* $z \leq y$, $e \in B_1 \setminus \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$ *и* T*-стабильное вложение* $g : \widehat{e} \to \widehat{z}$*;*

(ii) *если* $y \in \mathrm{T}(\mathscr{C})$*, то* $\widehat{y} \cong \widehat{a}_1 \times \cdots \times \widehat{a}_n$*, где* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$*;*

(3) *если* $y \in \mathrm{T}(\mathscr{C})$*, то* $\widehat{y} \cong \widehat{a}_1 \times \cdots \times \widehat{a}_n$*, где* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_0)$ *или* $a_i \in \mathrm{T}(\mathscr{B}_1)$*.*

Для описания отношения $\leq^\sigma_\alpha$ для $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$ будем использовать следующую лемму из [6].

Лемма 4 [6]. *Пусть* $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ *— алгебры,* σ *— локальный набор,* $a_1, \ldots, a_n \in \mathscr{A}$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathscr{B}$, α *— ординал. Отношение* $\mathscr{A} \leq^\sigma_{\alpha+1} \mathscr{B}$ *выполняется тогда и только тогда, когда для любых* $b_1, \ldots, b_n|1$ *из* $\mathscr{B}$ *существуют* $a_1, \ldots, a_n|1$ *из* $\mathscr{A}$ *такие, что* $\widehat{b}_i \leq^\sigma_\alpha \widehat{a}_i$ *для* $i \in [1, n]$*.*

Лемма 5. *Пусть* $\sigma = \{At, \mathrm{Atm}\}$*. Отношения* $\leq^\sigma_0$, $\leq^\sigma_1$, $\leq^\sigma_2$ *на булевых алгебрах могут быть описаны следующим образом.*

(0) $\mathscr{A} \leq^\sigma_0 \mathscr{B}$ *равносильно* ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(0) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(0)$), ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(1) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(1)$), ($\mathscr{A}$ *атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ *атомная*).

(1) $\mathscr{A} \leq^\sigma_1 \mathscr{B}$ *равносильно* $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$, ($\mathscr{A}$ *— атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ *— атомная*) *и* $|\,\mathrm{At}(\mathscr{B})| \leq |\,\mathrm{At}(\mathscr{A})|$.

(2) $\mathscr{A} \leq^\sigma_2 \mathscr{B}$ *равносильно выполнению следующего списка условий:*

(a) $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$*;*

(b) $\mathscr{A}$ *— атомная* $\Leftrightarrow \mathscr{B}$ *— атомная;*

(c) $|\,\mathrm{At}(\mathscr{A})| = |\,\mathrm{At}(\mathscr{B})|$*;*

(d) *если для некоторого* $p \in \omega$ *в* $\mathscr{B}$ *есть* p *дизъюнктных атомных элементов, под которыми бесконечное число атомов, то в* $\mathscr{A}$ *тоже есть* p *дизъюнктных атомных элементов, под которыми бесконечное число атомов;*

(e) *если* $1 \in E$ *в* $\mathscr{B}$*, то* $1 \in E$ *в* $\mathscr{A}$*;*

Доказательство. (0) Отношение $\mathscr{A} \leq^\sigma_0 \mathscr{B}$ равносильно тому, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ неразличимы бескванторными предложениями $L_{BA} \cup \sigma$. В языке L_{BA} две константы, поэтому любое атомарное предложение эквивалентно $0 = 0$, $0 \neq 0$, $0 = 1$, $\mathrm{At}(1)$ или $\mathrm{Atm}(1)$. Осталось заметить, что неразличимость $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ предложением $0 = 1$ равносильна условию ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(0) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(0)$), предложением

$\mathrm{At}(1)$ — условию ($\mathscr{A} \cong \mathscr{B}(1) \Leftrightarrow \mathscr{B} \cong \mathscr{B}(1)$), предложением $\mathrm{Atm}(1)$ — условию ($\mathscr{A}$ — атомная $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$ — атомная).

(1) Будем использовать лемму 4. Набор $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$ является локальным по лемме 3 из [6]. Согласно лемме 4 отношение $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ равносильно тому, что для любых $b_1, \ldots, b_n|1$ из $\mathscr{B}$ существуют $a_1, \ldots, a_n|1$ из $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$.

Необходимость списка условий. Если $|\mathscr{A}| > |\mathscr{B}| = 2^k$, то в $\mathscr{B}$ существуют $b_1, \ldots, b_k|1$ со свойством $\widehat{b}_i \cong \mathscr{B}(1)$, в то время как в $\mathscr{A}$ такого разбиения не будет. Если же $2^k = |\mathscr{A}| < |\mathscr{B}|$, то в $\mathscr{B}$ найдутся дизъюнктные $b_1, \ldots, b_{k+1}$ со свойством $\widehat{b}_i \ncong \mathscr{B}(0)$, и опять необходимое разбиение будет отсутствовать в $\mathscr{A}$. Отсюда получаем необходимость условия $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}|$. Если $k = |\,\mathrm{At}(\mathscr{A})| < |\,\mathrm{At}(\mathscr{B})|$, то в $\mathscr{B}$ существуют различные $b_1, \ldots, b_{k+1}$ со свойством $\widehat{b}_i \cong \mathscr{B}(1)$, которых не окажется в $\mathscr{A}$, поэтому необходимо требовать, чтобы $|\,\mathrm{At}(\mathscr{B})| \leq |\,\mathrm{At}(\mathscr{A})|$. Отношение $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ влечет $\mathscr{A} \leq_0^\sigma \mathscr{B}$, поэтому условие ($\mathscr{A}$ — атомная $\Leftrightarrow$ $\mathscr{B}$ — атомная) также является необходимым.

Достаточность списка условий. Пусть $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, найдем такие $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$, что $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$. Можно считать, что набор $b_1, \ldots, b_n$ разбивается на три части: $b_1^{\mathrm{At}}, \ldots, b_k^{\mathrm{At}}$ — атомы, $b_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, b_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, не являющиеся атомами, и $b'_1, \ldots, b'_m$ — неатомные элементы.

Если $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| < \infty$, то единицы в $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ разбиваются на равное количество атомов. Тогда можно поделить $1 \in \mathscr{A}$ на $a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы под b_i и под a_i было равное количество атомов. В этом случае, очевидно, выполнение $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$.

Пусть теперь $|\mathscr{A}| = |\mathscr{B}| = \omega$. Отделим от $1 \in \mathscr{A}$ k атомов $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$, это можно сделать благодаря условию $|\,\mathrm{At}(\mathscr{A})| \geq |\,\mathrm{At}(\mathscr{B})|$. Если $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — атомные алгебры, то $m = 0$ и в $\mathscr{A}$ счетное число атомов. Разделим $1 - \left(a_1^{\mathrm{At}} + \cdots + a_k^{\mathrm{At}}\right)$ на элементы $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ так, чтобы под каждым было хотя бы два атома.

Если же $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — неатомные алгебры, то в $\mathscr{A}$ есть ненулевой безатомный элемент, разделим его на ненулевые части $a'_1, \ldots, a'_{m-1}$ и a''_m, а каждый элемент из $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ положим равным сумме двух атомов (не равных $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$). Пусть, наконец,

$$a'_m = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m-1} a'_i.$$

Заметим, что a'_m неатомный, так как под ним лежит элемент a''_m. При таком разбиении очевидно выполнение всех условий для отношения $\widehat{b}_i \leq_0^\sigma \widehat{a}_i$ для всех $i \in [1, n]$.

(2) Необходимость списка условий. Выполнение $\mathscr{A} \leq_2^\sigma \mathscr{B}$ влечет $\mathscr{A} \leq_1^\sigma \mathscr{B}$ и $\mathscr{B} \leq_1^\sigma \mathscr{A}$, отсюда следует необходимость условий (a), (b), (c). Допустим, что $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, тогда должны существовать $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_1^\sigma \widehat{a}_i$, при этом если b_i атомный и $|\widehat{b}_i| = \omega$, то a_i тоже должен быть атомным и $|\widehat{a}_i| = \omega$, отсюда получаем необходимость условия (d). Покажем необходимость (e): если $1 \in E$ в $\mathscr{B}$, то $b_1, b_2|1_{\mathscr{B}}$ такие, что $b_1 \in \mathrm{Atm}$, $b_2 \in \mathrm{Als}$. Необходимо, чтобы нашлись $a_1, a_2|1_{\mathscr{A}}$ такие, что $\widehat{b}_1 \leq_1^\sigma \widehat{a}_1$ и $\widehat{b}_2 \leq_1^\sigma \widehat{a}_2$, откуда следует, что a_1 должен быть атомным и $|\,\mathrm{At}(\widehat{a}_2)| \leq |\,\mathrm{At}(\widehat{b}_2)|$, а значит, a_2 безатомный, следовательно, $1_{\mathscr{A}} \in E$.

Достаточность списка условий. Снова воспользуемся леммой 4. Пусть $b_1, \ldots, b_n|1$ в $\mathscr{B}$, найдем $a_1, \ldots, a_n|1$ в $\mathscr{A}$ такие, что $\widehat{b}_i \leq_1^\sigma \widehat{a}_i$ для всех $i \in [1, n]$. Заметим, что если некоторые элементы набора $\overline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ будут разделе-

ны на несколько новых элементов, которые образуют набор $\overline{b}'|1$, и мы найдем в $\mathscr{A}$ соответствующий набор $\overline{a}'|1$, то этого будет достаточно, так как искомые a_i будут равны соответствующим суммам элементов из $\overline{a}'$. Тем самым можно считать, что набор $\overline{b}$ разбивается на четыре части:

1) $b_1^{\mathrm{At}}, \ldots, b_k^{\mathrm{At}}$ — атомы;

2) $b_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, b_m^{\mathrm{Als}}$ — ненулевые безатомные элементы;

3) $b_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, b_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, под которыми счетное число атомов;

4) $b'_1, \ldots, b'_r$ — не атомные, под которыми бесконечное число атомов.

Случай 1. $|\operatorname{At}(\mathscr{A})| = |\operatorname{At}(\mathscr{B})| < \omega$. В этом случае $l = r = 0$. Атомы $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$ найдутся благодаря условию (c). Если $m \neq 0$, то $a_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, a_m^{\mathrm{Als}}$ можно найти благодаря условию (b). Очевидно, что можно выбрать указанные элементы таким образом, чтобы этот набор был разбиением 1 в $\mathscr{A}$.

Случай 2. $|\operatorname{At}(\mathscr{A})| = |\operatorname{At}(\mathscr{B})| = \omega$. Положим $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$ равными по одному атому из $\mathscr{A}$. В качестве $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_l^{\mathrm{Atm}}$ возьмем атомные элементы, под которыми бесконечное число атомов, не пересекающихся друг с другом и с $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$, такие существуют по условию (d). Если $m = r = 0$, то a_k^{At} выберем таким образом, чтобы полученный набор был разбиением.

Если $m + r \neq 0$, то в $\mathscr{B}$ есть ненулевой безатомный элемент, а по условию (b) такой элемент есть и в $\mathscr{A}$, разделим его на $a_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, a_m^{\mathrm{Als}}$ и $a'_1, \ldots, a'_{r-1}, a''_r$. Если $r \neq 0$, то положим

$$a'_r = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\mathrm{Als}} - \sum_{i=1}^{r-1} a'_i.$$

Имеем $a''_r \leq a'_r$, поэтому a'_r не атомный. Если же $r = 0$, то по условию (e) $1 \in E$ в $\mathscr{A}$. Тогда

$$1 - \sum_{i=1}^{k} a_i^{\mathrm{At}} - \sum_{i=1}^{l} a_i^{\mathrm{Atm}} - \sum_{i=1}^{m} a_i^{\mathrm{Als}} = a_1 + a_2,$$

где $a_1 \in \mathrm{Atm}$, а $a_2 \in \mathrm{Als}$. Положим $c_l^{\mathrm{Atm}} = a_l^{\mathrm{Atm}} + a_1$, $c_m^{\mathrm{Als}} = a_m^{\mathrm{Als}} + a_2$. Нетрудно видеть, что следующий набор будет искомым:

1) $a_1^{\mathrm{At}}, \ldots, a_k^{\mathrm{At}}$ — атомы;

2) $a_1^{\mathrm{Als}}, \ldots, a_{m-1}^{\mathrm{Als}}, c_m^{\mathrm{Als}}$ — ненулевые безатомные элементы;

3) $a_1^{\mathrm{Atm}}, \ldots, a_{l-1}^{\mathrm{Atm}}, c_l^{\mathrm{Atm}}$ — атомные элементы, под которыми счетное число атомов;

4) $a'_1, \ldots, a'_r$ не атомные и $|\operatorname{At}(\widehat{a}'_i)| \leq |\operatorname{At}(\widehat{b}'_i)|$.

Лемма доказана.

Теорема 4. *Существует вычислимая булева алгебра $\mathscr{C}_3$ такая, что в ней вычислимы* At *и* Atm, *но нет вычислимого представления, в котором вычислимы* At, Als *и* Atm.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 3, возьмем $\sigma = \{\mathrm{At}, \mathrm{Atm}\}$, $T = E = \mathrm{Atm} + \mathrm{Als}$, $\mathscr{B}_0 = \mathscr{B}_1 = \mathscr{B}(1 + \eta + (\omega \times \eta))$, $\alpha = 3$, $\mathscr{A}$ — Δ_3^0-вычислимая булева алгебра, не имеющая Δ_2^0-вычислимого представления, $G = \{0\}$. Такая $\mathscr{A}$ существует в силу релятивизации (относительно оракула $\varnothing'$) результата из [10], где доказано существование Δ_2^0-вычислимой булевой алгебры, не имеющей вычислимого представления.

Покажем, что выполняются все условия теоремы 3. Отображение E, сопоставляющее каждой булевой алгебре ее идеал Ершова — Тарского, является идеальным оператором, что легко проверить по определению, и, более того,

является стабильным идеальным оператором, что доказано в [11]. Набор σ является локальным набором, согласованным с E, по лемме 2 из [12].

Для проверки условий (a) и (b) достаточно показать, что $\forall a \in \mathscr{B}_0 \setminus \mathrm{E}(\mathscr{B}_0)$ $\widehat{a} \leq_2^\sigma \widehat{a} \times \mathscr{B}_0$. Это легко сделать по лемме 5. Осталось проверить условие (c). Зафиксируем для $\mathscr{B}_0$ вычислимое представление, полученное из вычислимых нумераций для ω и η с помощью стандартных приемов для построения нумерации прямого произведения порядков, суммы порядков и нумерации булевой алгебры, построенной по линейному порядку. При такой нумерации в доказательстве теоремы 3 из [12] было показано, что для α-дружественности достаточно сформулировать описание отношения $\leq_\beta^\sigma$ для $\beta < \alpha$ так, чтобы это описание можно было эффективно проверить по концам интервалов, задающих элементы. Такое описание предъявлено в лемме 5.

Согласно заключению теоремы 3 найдется такая σ-вычислимая алгебра $\mathscr{C}_3$, что $\mathscr{C}_3/\mathrm{E} \cong \mathscr{A}$. Идеал E в σ-вычислимой алгебре описывается $\exists\forall$-формулой, т. е. Σ_2-формулой. Если же у $\mathscr{C}_3$ найдется вычислимое представление, в котором вычислимы At, Als и Atm, то E в этом представлении будет описываться Σ_1-формулой, тогда $\mathscr{C}_3/\mathrm{E}$ будет иметь Δ_2^0-вычислимое представление, что противоречит выбору $\mathscr{A}$ и тому, что $\mathscr{C}_3/\mathrm{E} \cong \mathscr{A}$. Значит, у $\mathscr{C}_3$ нет вычислимого представления, в котором вычислимы At, Als и Atm. Теорема доказана.

Резюмируем минимальность условий описания 1-разрешимости булевых алгебр с выделенным идеалом, полученных в теореме 2.

Следствие 1. 1. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_1, I)$, *в которой вычислимы множества* $I \to 0$ *и* At_I, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

2. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_2, I)$, *в которой вычислимы множества* At *и* $I \to 0$, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

3. *Существует вычислимая* I-*алгебра* $(\mathscr{C}_3, I)$, *в которой вычислимы множества* At *и* At_I, *но при этом у нее нет* 1-*разрешимого представления.*

Доказательство. Следует из предложений 2 и 3 и теоремы 4. Для п. 3 возьмем булеву алгебру $\mathscr{C}_3$ из теоремы 4 $I = \mathrm{Atm}$ и заметим, что $\mathrm{At}_I = \varnothing$, так как любая булева алгебра является безатомной в факторе по Atm.

Благодарность. Автор благодарит д.ф.-м.н. Павла Евгеньевича Алаева за предложенную задачу и важные замечания в ходе работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пальчунов Д. Е.* Простые и счетно насыщенные модели теории булевых алгебр с выделенными идеалами // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 82–103.
2. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.
4. *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Наука, 1987.
5. *Rabin M. O.* Decidability of second-order theories and automata on infinite trees // Trans. Am. Math. Soc. 1969. V. 141, N Jul. P. 1–35.
6. *Алаев П. Е.* Гиперарифметические булевы алгебры с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 963–976.
7. *Ash C. J., Knight J.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.
8. *Barwise K. J.* Back and forth through infinitary logic // Studies in Model Theory. Ed. by M.D.Morley. M.A.A. Studies in Mathematics. 1973. V. 8. P. 5–34.
9. *Ершов Ю. Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. М.: Наука, 1980.

10. *Feiner L.* Hierarchies of Boolean algebras // J. Symbol. Logic. 1970. V. 35, N 3. P. 365–374.
11. *Алаев П. Е.* Вычислимые однородные булевы алгебры и одна метатеорема // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 133–158.
12. *Леонтьева М. Н.* Минимальность некоторых условий разрешимости для булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 132–147.

Поступила в редакцию 22 марта 2024 г.
После доработки 19 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Гаськова Маргарита Николаевна (ORCID 0000-0001-8236-9722)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
leontyeva@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.529.8+527.928.1

О СОДЕРЖАЩИХ ЛОГАРИФМЫ ФОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ q–РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н. В. Гаянов, А. В. Парусникова

Аннотация. Получен специальный вид q-разностных уравнений, для которых существует решение в виде ряда Дюлака. Нахождение коэффициентов рядов Дюлака сводится к решению алгебраических разностных уравнений, при некоторых условиях эти уравнения имеют полиномиальное решение. Приведен пример q-разностного уравнения, показывающий невозможность ограничения степени таких полиномиальных решений. Доказано утверждение, позволяющее оценить сверху степени многочленов-коэффициентов в разложении через степени коэффициентов начального отрезка ряда Дюлака. Приведены примеры вычисления разложений решений q-разностных уравнений в виде рядов Дюлака.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.508

Ключевые слова: асимптотические разложения, q-разностное уравнение, ряд Дюлака.

1. Введение

В настоящее время активно развивается аналитическая теория q-разностных уравнений. Появляются работы, распространяющие и обобщающие имеющиеся для обыкновенных дифференциальных уравнений понятия и теоремы на случай q-разностных уравнений.

В этой работе рассматривается алгебраическое q-разностное уравнение. Для алгебраических обыкновенных дифференциальных уравнений существуют алгоритмы, основанные на построении многоугольника Ньютона [1–3], позволяющие находить все формально удовлетворяющие таким уравнениям решения в определенных классах (например, в классе степенных разложений, разложений в ряды Пюизо, степенно-логарифмических разложений и др.), работа [4] содержит интересный анализ и обзор. Для q-разностных уравнений методы, опирающиеся на построение таких многоугольников, только развиваются. Так, например, в [5, 6] приведен способ нахождения обобщенных степенных формальных асимптотических разложений, а в [7] доказаны достаточные условия сходимости этих разложений.

В работе рассматривается возможность нахождения решений алгебраических q-разностных уравнений в классе формальных рядов Дюлака [8], доказаны достаточные условия наличия таких разложений решений уравнений для более

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00717, https://rscf.ru/project/22-21-00717/, в Институте проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН.

© 2024 Гаянов Н. В., Парусникова А. В.

широкого класса уравнений, чем алгебраические. Приведены примеры, показывающие, что имеется своя специфика при адаптации к q-разностным уравнениям алгоритмов построения формальных разложений решений в виде рядов Дюлака, которые разработаны для дифференциальных уравнений. Приведены примеры нахождения решений в виде формальных рядов Дюлака в определенных случаях, а также оценки на степени коэффициентов разложений в виде ряда Дюлака через степени коэффициентов начального отрезка разложения.

2. Основные понятия, определения и обозначения

Рассматриваются *q-разностные уравнения* — функциональные уравнения, которые связывают значение функции в точках z и $q^k z$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для некоторого фиксированного числа $q \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Далее также предполагаем, что $q^n \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Алгебраическим q-разностным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$P(z, y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y) = 0, \tag{1}$$

где $P \in \mathbb{C}[z, y, y_1, \ldots, y_n]$.

Рассмотрим пространство формальных степенных рядов с комплексными коэффициентами в окрестности нуля, т. е. по возрастающим степеням z, и будем использовать обозначение

$$\mathbb{C}[[z]] = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,\ c_k = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \right\}.$$

На этом линейном пространстве определяют [5] *q-разностную производную* — линейный оператор $\sigma : \mathbb{C}[[z]] \to \mathbb{C}[[z]]$ — формулой

$$\sigma : \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} c_k q^k z^k.$$

Обозначим через $E_q(z)$ множество решений уравнения $\sigma y = y$. Например, любая константа $C \in \mathbb{C}$ принадлежит множеству $E_q(z)$; функция $\sin(2\pi \log_q z)$ принадлежит $E_q(z)$.

Естественно, не любое q-разностное уравнение имеет решение в классе $\mathbb{C}[[z]]$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\sigma y - y = 1, \tag{2}$$

где y — однолистная функция из $U \subset \mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Легко видеть, что формального решения $y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]$ в окрестности нуля нет: подставляя такое решение в уравнение (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, имеем $c_0 - c_0 = 0 = 1$. Решения уравнения (2) имеют вид $y(z) = \log_q z + C$, $C \in E_q(z)$.

Уточним, что здесь и далее мы рассматриваем не многозначную функцию [9]

$$\mathrm{Log}_q\ z = \frac{\mathrm{Ln}\ z}{\mathrm{Ln}\ q},$$

а фиксируем главную ветвь натурального логарифма, полагая

$$\log_q z = \frac{\ln z}{\ln q},$$

и, вообще говоря, решения рассматриваем при $z : \arg(qz) = \arg q + \arg z$.

Итак, уравнение (2) не имеет решений среди элементов пространства $\mathbb{C}[[z]]$, тогда как в частном случае его решение является многочленом от $\log_q z$, т. е. многочленом от $\ln z$. Расширим множество решений, не ограничиваясь только $\mathbb{C}[[z]]$, но допуская в качестве коэффициентов при возрастающих степенях z многочлены от $\log_q z$.

Обозначим через $\mathbb{C}[[z]][\log_q z]$ линейное пространство формальных рядов Дюлака, т. е. рядов вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k(\log_q z) z^k, \tag{3}$$

где p_k — многочлены с комплексными коэффициентами.

На пространстве $\mathbb{C}[[z]][\log_q z]$ также зададим *q-разностную производную* — линейный оператор $\sigma : \mathbb{C}[[z]][\log_q z] \to \mathbb{C}[[z]][\log_q z]$ — формулой

$$\sigma : \sum_{k=0}^{\infty} p_k(\log_q z) z^k \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} q^k p_k(\log_q z + 1) z^k.$$

Рассмотрим разложение (3) как ряд по z с коэффициентами, являющимися многочленами от t, где $t = \log_q z$. Конечно, $z^\alpha \ln^\beta z \to 0$ при $z \to 0$, если $\alpha > 0$.

Определим порядок ряда y, записанного в виде

$$\sum_{j,k=0}^{\infty} c_{jk} t^j z^k, \tag{4}$$

по z (по t) как минимальную степень z (степень t), входящую в ряд y, т. е. $\operatorname{ord}_z(y) = \min\{k : \exists c_{jk} \neq 0\}$, $\operatorname{ord}_t(y) = \min\{j : \exists c_{jk} \neq 0\}$.

Два формальных ряда y и $\widetilde{y}$ вида (4) равны, если $c_{jk} = \widetilde{c}_{jk}$ $\forall j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Достаточные условия наличия формальных решений в классе рядов Дюлака

Основной задачей данной работы является нахождение решений алгебраических q-разностных уравнений в пространстве рядов Дюлака. Отметим, что алгоритмы нахождения таких разложений решений для алгебраических дифференциальных уравнений имеются в работе [1], такие разложения встречаются как формальные решения алгебраических дифференциальных уравнений (см. найденные для пятого уравнения Пенлеве разложения в [10]).

Начнем с доказательства теоремы для q-разностных уравнений специального вида, которые в общем случае не являются алгебраическими.

Теорема 1. *Уравнение*

$$L(\sigma)y = zM(z, \log_q z, y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y), \tag{5}$$

где $L(\sigma) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j \sigma^j$ *— многочлен от оператора* σ, $L \not\equiv 0$, $M \in \mathbb{C}[z, \log_q z, y, \ldots, y_n]$ *— многочлен от* $n+3$ *переменных, обладает* N*-параметрическим формальным решением в виде ряда Дюлака* (3), *где* N *— количество корней многочлена* $L(s)$, *которые имеют вид* q^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *с учетом их кратности.*

Замечание 1. Если $L(q^n) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то уравнение (5) имеет, притом единственное, решение в виде ряда Дюлака (3).

Если существует $n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : L(q^n) = 0$, уравнение (5) назовем *имеющим резонанс.*

Доказательство. Будем опять использовать обозначение $t = \log_q z$. Рассмотрим, как действует на ряд Дюлака (3) оператор $L(\sigma)$, приведем выкладки для одного члена ряда:

$$L(\sigma) : p_k(t)z^k \mapsto \sum_{j=0}^{n} a_j \sigma^j p_k(t) z^k = \sum_{j=0}^{n} a_j q^{jk} p_k(t+j) z^k$$
$$= z^k \sum_{j=0}^{n} a_j (q^k\sigma)^j p_k(t) = z^k \left(\sum_{j=0}^{n} a_j ((q^k\sigma)^j) \right) p_k(t) = z^k L(q^k\sigma) p_k(t).$$

Получаем, что оператор $L(\sigma)$ переводит ряды Дюлака вида (3) в ряды Дюлака. Рассмотрим минимальную степень по z в уравнении (5) при подстановке ряда Дюлака, т. е. нулевую.

В правой части (5) минимальная степень, которая может получиться, равна единице. Тогда на p_0 получается разностное уравнение

$$L(\sigma)p_0 = 0.$$

Полиномиальными решениями данного линейного однородного разностного уравнения являются функции, представляющие линейную комбинацию $1, t, \ldots, t^{\kappa_0 - 1}$, где κ_0 — кратность $s = 1$ как корня многочлена $L(s)$ [11, гл. 5, § 4]. В случае, если $s = 1$ — не корень, единственное полиномиальное решение — это нулевой многочлен $p_0 \equiv 0$.

Слагаемые в правой части (5), соответствующие первой степени z, суть мономы в M, не зависящие от $z, y, y_1, \ldots, y_n$, поскольку если бы z содержался в y_j, $j \geq 1$, то он содержался бы также и в y. Приравнивая функции при z в левой и правой частях (5), получаем разностное уравнение относительно функции p_1:

$$L(q\sigma)p_1(t) = M(0, t, 0, \ldots, 0), \quad p_1 \in C[t]. \tag{6}$$

Общим решением линейного уравнения является сумма частного решения линейного неоднородного уравнения и общего решения линейного однородного уравнения. Полиномиальное решение линейного однородного уравнения представляет собой линейную комбинацию функций $1, t, t^2, \ldots, t^{\kappa_1 - 1}$, где κ_1 — кратность $s = 1$ как корня уравнения $L(qs) = 0$. Аналогично, когда $s = 1$ — не корень этого уравнения, решение однородного уравнения — функция, тождественно равная нулю. Частное решение представляет собой многочлен степени $\kappa_1 + \deg_t M(0, t, 0, \ldots, 0)$. Получаем, что уравнение (6) имеет κ_1-параметрическое решение.

Функция M представляет собой сумму мономов вида

$$z^\mu \log_q^\nu z y^{q_0} (\sigma y)^{q_1} \ldots (\sigma^n y)^{q_n},$$

т. е. мономов $z^\mu t^\nu y^{q_0} (\sigma y)^{q_1} \ldots (\sigma^n y)^{q_n}$, поэтому для каждого p_k получаем линейное неоднородное разностное уравнение

$$L(q^k\sigma)p_k(t) = R_k(t)$$

где R_k — линейная комбинация мономов вида

$$t^\nu p_0^{i_{0,0}}(t) \ldots p_{k-1}^{i_{k-1,0}}(t)(p_0(t+1))^{i_{0,1}} \ldots (p_{k-1}(t+1))^{i_{k-1,1}}$$
$$\ldots (p_0(t+n))^{i_{0,n}} \ldots (p_{k-1}(t+n))^{i_{k-1,n}},$$

причем

$$1\sum_{j=0}^{n} i_{1,j} + \dots + (k-1)\sum_{j=0}^{n} i_{k-1,j} \le k-1.$$

Тогда по теореме о решении линейного неоднородного разностного уравнения [11, гл. 5, § 4] полиномиальное решение каждого такого уравнения — многочлен с числом параметров, равным кратности корня $s = 1$ для $L(q^k s) = 0$, т. е. кратности корня q^k для уравнения $L(s) = 0$. Теорема доказана.

Замечание 2. Формулы для вычисления R_k приведены в работе [12].

Доказательство теоремы 1 основано на доказательстве из работы [13].

Замечание 3. Далее рассматриваем все решения q-разностных и разностных уравнений, сразу предполагая, что в решении вместо $E_q(z)$ или функции $h : h(t+1) = h(t)$ берем постоянную, любое другое вхождение функций из класса $E_q(z)$ или периодической с периодом единица функции приведет к отличному от ряда Дюлака решению.

Приведем примеры вычисления коэффициентов ряда Дюлака для конкретных уравнений.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\sigma y - 2y = qz. \tag{7}$$

Здесь $M(z, t, y, \dots, y_n) = q$, $L(\sigma) = \sigma - 2$. Уравнение $L(s) = 0$ имеет решение $s = 2$, значит, если $q^n \ne 2$ $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, то решение в виде ряда Дюлака существует и единственно согласно доказанной ранее теореме 1, иначе (если $\exists n_0 \in \mathbb{N} : q^{n_0} = 2$) зависит от одного параметра.

Подставим в уравнение (7) решение в виде ряда (3). Приравнивая коэффициенты при степенях z, а также сразу вычисляя левые части уравнений с помощью теоремы 1, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} L(q^k\sigma)p_k(\log_q z) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \ne 1, \\ L(q\sigma)p_1(\log_q z) = q, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} p_0(t+1) - 2p_0(t) = 0, \\ qp_1(t+1) - 2p_1(t) = q, \\ q^k p_k(t+1) - 2p_{k+1}(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

С учетом замечания 3 решим полученную систему линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Видим, что единственное полиномиальное решение первого уравнения — это $p_0(t) \equiv 0$. Решения остальных уравнений системы зависят от значения q. Рассмотрим три случая.

Случай 1. При $q^n \ne 2$, $n \in \mathbb{N}$, имеем решение $p_1(t) = C\left(\frac{2}{q}\right)^t + \frac{q}{q-2}$, которое является полиномом при $C = 0$; многочлены $p_k(t)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, тождественно нулевые. Подставляя полученные функции в формулу (3), видим, что функция $y = \frac{q}{q-2}z$ — точное решение исходного уравнения (7).

Случай 2. $q = 2$. Получаем, что $p_1(t) = C + t$, $p_k(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Решение уравнения (7) имеет вид $y = (C + \log_q z)z$. При $C = \mathrm{const}$ это ряд Дюлака, зависит от одного параметра.

Случай 3. Если $\exists n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : q^{n_0} = 2$, то $p_1(t) = C\left(\frac{2}{q}\right)^t + \frac{q}{q-2}$, $p_{n_0}(t) = C$, $p_k(t) \equiv 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1, n_0\}$. Решение уравнения (7) имеет вид $y = Cz^{n_0} + \frac{q}{q-2}z$,

это не только ряд Дюлака, но и степенной ряд (многочлен), если рассмотреть $C = \mathrm{const}$, зависит от одного параметра.

Итак, только в случае 2 уравнение (7) имеет решения вида (3), содержащие логарифмы.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\sigma y - 2y = z \log_q z. \tag{8}$$

Аналогично подставим в уравнение (8) решение в виде ряда (3). Приравнивая коэффициенты при z, получаем уравнение на p_1: $qp_1(t+1) - 2p_1(t) = t$, опять же резонанса нет при $q^n \neq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$, тогда $p_1(t) = \frac{t}{q-2} - \frac{q}{(q-2)^2}$, исходное уравнение (8) имеет решение в виде ряда Дюлака

$$y = \left(\frac{\log_q z}{q-2} + \frac{q}{(q-2)^2}\right) z.$$

При $q = 2$ решение $y = \frac{\log_q^2 z - \log_q z + C}{4} z$; при $q^{n_0} = 2$, $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, решение — это функция

$$y = \left(\frac{\log_q z}{q-2} + \frac{q}{(q-2)^2}\right) z + C z^{n_0},$$

C — произвольная постоянная. Решение уравнения (8) вида (3) либо не зависит от параметра, либо зависит от одного параметра и всегда содержит логарифм.

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$\sigma y - qy = z. \tag{9}$$

Согласно теореме 1 здесь резонанс имеется при любом значении q, $L(s) = s - q$.

Ищем решение уравнения (9) в виде ряда (3). Приравнивая коэффициенты при степенях z, вычисляя левые части уравнений с помощью теоремы 1, имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} L(q^k\sigma)p_k(\log_q z) = 0, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ k \neq 1, \\ L(q\sigma)p_1(\log_q z) = 1, \end{cases}$$

преобразовав, получаем

$$\begin{cases} p_0(t+1) - qp_0(t) = 0, \\ qp_1(t+1) - qp_1(t) = 1, \\ q^{k+1}p_{k+1}(t+1) - qp_k(t) = 0, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Исходя из ограничений на q, сделанных в начале работы при определении рассматриваемого q-разностного уравнения ($q^n \neq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$), получаем полиномиальные решения уравнений $p_0(t) \equiv 0$, $p_1(t) = \frac{t}{q} + C$ и $p_{k+1}(t) \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$.

В итоге имеем

$$y = \left(C + \frac{\log_q z}{q}\right) z.$$

4. Алгебраические уравнения, сводящиеся к специальному виду

Как отмечено выше, уравнение (5) не является в общем случае алгебраическим, так как в правой части может содержаться логарифм. Однако некоторые алгебраические уравнения сводятся к такому виду после нахождения первого члена разложения.

Утверждение 2. *Уравнение вида*

$$L(\sigma)y + a + zM(z, y, \dots, y_n) = 0, \tag{10}$$

где $a = \mathrm{const} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, *с помощью замены приводится к уравнению* (5).

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$L(\sigma)y + a = 0. \tag{11}$$

Уравнение (11) обладает κ_0-параметрическим решением, где κ_0 — кратность единицы как корня многочлена $L(s)$. Выберем одно из решений $p_0(t)$ уравнения (11), а именно: если $L(1) \neq 0$, возьмем $p_0(t) = \frac{a}{L(1)}$, если $L(\sigma) = (\sigma - 1)^{\kappa_0}\widetilde{L}(\sigma)$, где $\widetilde{L}(1) \neq 0$, берем $p_0(t) = \frac{t^{\kappa_0}}{\kappa_0!\widetilde{L}(1)}$. Делая замену $y = p_0(t) + \widetilde{y}$ в уравнении (10), получаем уравнение

$$L(\sigma)\widetilde{y} + zM(z, p_0(t) + \widetilde{y}, \dots, p_0(n + t) + \sigma^n\widetilde{y}) = 0,$$

т. е.

$$L(\sigma)\widetilde{y} = z\widetilde{M}(z, t, \widetilde{y}, \sigma\widetilde{y}, \dots, \sigma^n\widetilde{y}).$$

Следствие. *Уравнение* (11) *обладает* N*-параметрическим формальным решением в виде ряда Дюлака* (3), *где* N *— количество корней многочлена* $L(s)$, *которые имеют вид* q^n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *с учетом их кратности.*

Доказательство. Следует из доказательства теоремы 1 и того, что при замене $y = p_0(t) + \widetilde{y}$ оператор L не меняется.

Применим утверждение 2, продемонстрировав, как можно свести конкретное уравнение к виду (5).

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$\sigma y - y - 1 = zy^2, \tag{12}$$

применим к нему утверждение 2. Здесь $L(\sigma) = \sigma - 1$, $a = -1$, $\widetilde{L}(\sigma) = 1$, $\kappa_0 = 1$.

Решая уравнение

$$\sigma y - y = 1,$$

находим его частное решение $p_0 = \log_q z$. Делаем замену $y = \log_q z + \widetilde{y}$ в исходном уравнении (12), получаем уравнение вида (5)

$$\sigma\widetilde{y} - \widetilde{y} = z(\log_q z + \widetilde{y})^2.$$

5. Нахождение коэффициентов рядов Дюлака

Мы рассматривали случаи, в которых для нахождения коэффициентов ряда Дюлака надо решать линейные разностные уравнения. В общей ситуации задача нахождения коэффициентов сведена к поиску полиномиальных решений алгебраических разностных уравнений, которые могут оказаться нелинейными. В этой части работы содержатся утверждения о том, как действовать при нахождении рядов Дюлака в конкретных случаях, а также рассуждения о том, какие возникают препятствия в общем случае.

5.1. Оценка степеней коэффициентов ряда Дюлака. Аналогично тому, как сделано в работе [14], проведем доказательство теоремы 2, а затем покажем, как при некоторых условиях оценить сверху степени многочленов, являющихся коэффициентами формального решения в виде ряда Дюлака, если известны степени таких многочленов для начального отрезка разложения.

Теорема 2. *Пусть ряд* $\varphi(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t)z^k$, $t = \log_q z$, *формально удовлетворяет уравнению* (1), *где* $P = P(z, y_0, y_1, \ldots, y_n)$, *а также существует* $k_0 \in \{0, \ldots, n\} : \frac{\partial P}{\partial y_{k_0}}(z, \varphi(z)) \not\equiv 0$ (*подразумевается подстановка в частную производную многочлена* P *по* y_{k_0} *вместо каждого* y_j *функции* $\sigma^j\varphi$).

Тогда существует $m = \min\limits_{j=0,\ldots,n} \operatorname{ord}_z\big(\frac{\partial P}{\partial y_j}(z, \varphi(z))\big)$ *такое, что для любого* $\ell \geq m$ *замена*

$$y = \sum_{k=1}^{\ell} p_k(t)z^k + z^{\ell+1}u \tag{13}$$

приводит уравнение (1) *к виду*

$$L_\ell(t, \sigma)u + a(t) = zM(z, t, u, \ldots, \sigma^n u), \tag{14}$$

где

$$L_\ell(t, \sigma) = \sum_{j=0}^{n} a_{j,m}(t)q^{\ell j}\sigma^j,$$

$a_{j,m}, a \in \mathbb{C}[t]$, $j = 0, \ldots, n$.

Доказательство. Возьмем $\ell \in \mathbb{N}$, рассмотрим замену (13), где $\operatorname{ord}_z u \geq 0$. Введем обозначения

$$\Phi = (y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y)|_{y=\varphi(z)}, \quad \Phi_\ell = (y, \sigma y, \ldots, \sigma^n y)|_{y=\sum\limits_{k=1}^{\ell} p_k(t)z^k},$$

тогда

$$\Phi = \Phi_\ell + z^{\ell+1}\Psi,$$

где $\Psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$, а $\psi_j = q^{j(\ell+1)}\sigma^j u$, откуда $\operatorname{ord}_z \psi_j \geq 0$.

Применив формулу Тейлора к выражению $P(z, \Phi_\ell + z^{\ell+1}\Psi)$, получим

$$\begin{aligned} 0 &= P(z, \Phi_\ell + z^{\ell+1}\Psi) \\ &= P(z, \Phi_\ell) + z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial P}{\partial y_i}(z, \Phi_\ell)\psi_i + \frac{z^{2\ell+2}}{2!}\sum_{k,j=1}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial y_j \partial y_k}(z, \Phi_\ell)\psi_j\psi_k + \ldots. \end{aligned} \tag{15}$$

Из определения m следует, что $\forall j = 0, 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial P}{\partial y_j}(z, \Phi) = a_{j,m}(t)z^m + a_{j,m+1}(t)z^{m+1} + \ldots,$$

где $\exists\, j_0 \in \{0, \ldots, n\} : a_{j_0,m} \not\equiv 0$.

Возьмем любое $\ell \geq m$, фиксируем j. Взяв частную производную по y_j от левой и правой частей уравнения (1) и применив формулу Тейлора, имеем

$$\frac{\partial P}{\partial y_j}(z, \Phi) - \frac{\partial P}{\partial y_j}(z, \Phi_\ell) = z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial y_i \partial y_j}(z, \Phi_\ell)\psi_i + \ldots.$$

Заметим, что либо левая и правая части выражения тождественно равны нулю, либо

$$\operatorname{ord}_z\left(z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial^2 P}{\partial y_i \partial y_j}(z, \Phi_\ell)\psi_i + \ldots\right) \geq \ell + 1,$$

поэтому

$$\operatorname{ord}_z\left(\frac{\partial P}{\partial y_j}(z,\Phi)-\frac{\partial P}{\partial y_j}(z,\Phi_\ell)\right)\geq \ell+1;$$

но поскольку $m<\ell+1$, получаем, что

$$\frac{\partial P}{\partial y_j}(z,\Phi_\ell)=a_{j,m}(t)z^m+\widetilde{a}_{j,m+1}(t)z^{m+1}+\dots. \tag{16}$$

Из формулы (15) следует, что

$$P(z,\Phi_\ell)=-z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial P}{\partial y_i}(z,\Phi_\ell)\psi_j-\frac{z^{2\ell+2}}{2!}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial y_j\partial y_k}(z,\Phi_\ell)\psi_j\psi_k+\dots,$$

поэтому $\operatorname{ord}_z P(z,\Phi_\ell)\geq m+\ell+1$.

Подставив в формулу (15) выражения (16), получим

$$\begin{aligned}P(z,\Phi_\ell)=-z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n}a_{i,m}(t)z^m\psi_i-z^{\ell+1}\sum_{i=0}^{n}\widetilde{a}_{i,m+1}(t)z^{m+1}\psi_i-\dots\\ -\frac{z^{2\ell+2}}{2!}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial y_j\partial y_k}(z,\Phi_\ell)\psi_j\psi_k+\dots.\end{aligned} \tag{17}$$

Поделив равенство (17) на $z^{\ell+m+1}$ и перенеся в правую часть слагаемые, содержащие z, получим необходимый вид уравнения, а именно

$$\begin{aligned}\left.\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\right|_{z=0}+\sum_{i=0}^{n}a_{i,m}(t)\psi_i=\left.\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\right|_{z=0}-\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}-z\sum_{i=0}^{n}\widetilde{a}_{i,m+1}(t)\psi_i-\dots\\ -\frac{z^{\ell+1-m}}{2!}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial y_j\partial y_k}(z,\Phi_\ell)\psi_j\psi_k+\dots.\end{aligned}$$

Переходя к переменной u, имеем уравнение вида (14):

$$\begin{aligned}\left.\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\right|_{z=0}+\sum_{i=0}^{n}a_{i,m}(t)q^{i(\ell+1)}\sigma^i u=\left.\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\right|_{z=0}-\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\\ -z\sum_{i=0}^{n}\widetilde{a}_{i,m+1}(t)q^{i(\ell+1)}\sigma^i u-\dots\\ -\frac{z^{\ell+1-m}}{2!}\sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial y_j\partial y_k}(z,\Phi_\ell)q^{(j+k)(\ell+1)}\sigma^j u\sigma^k u+\dots,\end{aligned} \tag{18}$$

а также явную формулу для вычисления многочлена a:

$$a(t)=\left.\frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}}\right|_{z=0}.$$

Теорема доказана.

Утверждение 3. *Линейный оператор в левой части уравнения* (14) *может быть представлен в виде*

$$L_\ell(t,\sigma)=t^\eta L_{\ell,\eta}(\sigma)+\dots+tL_{\ell,1}(\sigma)+L_{\ell,0}(\sigma), \tag{19}$$

где $L_{\ell,i}$ — многочлены, причем можно выбрать ℓ так, чтобы $L_{\ell,\eta}(q^k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Доказательство. Пусть $\eta = \max\limits_{j=0,\dots,n} \deg a_{j,m}$, т. е. $a_{j,m} = \sum\limits_{i=0}^{\eta} c_{i,j,m} t^i$. Подставив в $L_\ell(t,\sigma)$, получаем

$$L_\ell(t,\sigma) = \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{\eta} c_{i,j,m} t^i \right) q^{\ell j} \sigma^j = \sum_{i=0}^{\eta} t^i \left(\sum_{j=0}^{n} c_{i,j,m} q^{\ell j} \sigma^j \right),$$

откуда

$$L_{\ell,\eta}(s) = \sum_{j=0}^{n} c_{\eta,j,m} q^{\ell j} s^j$$

— ненулевой многочлен степени не выше n.

Если $L_{\ell,\eta}(q^k) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, утверждение доказано; иначе возьмем $r = \max\limits_{k \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \{L_{\ell,\eta}(q^k) = 0\}$. Заметим, что при $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ многочлен $L_{\ell+r+1,\eta}$ задается формулой

$$L_{\ell+r+1,\eta}(s) = \sum_{j=0}^{n} c_{\eta,j,m} q^{(\ell+r+1)j} s^j,$$

поэтому $L_{\ell+r+1,\eta}(q^k) = L_{\ell,\eta}(q^{k+r+1}) \neq 0$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что завершает доказательство утверждения.

Утверждение 4. *Рассмотрим разностное уравнение*

$$(t^\eta L_\eta(\delta) + \dots + t L_1(\delta) + L_0(\delta))y = R, \quad R \in \mathbb{C}[t], \tag{20}$$

где $R \not\equiv 0$, $\delta y(t) = y(t+1)$; L_i — многочлены, причем $L_\eta(1) \neq 0$ имеет ненулевое полиномиальное решение F. Тогда $\deg F = \deg R - \eta$.

Доказательство. Ищем решение уравнения (20) в виде многочлена $F(t) = c_N t^N + \dots + c_0$, подставляем его в уравнение. В левой части получаем многочлен, моном максимальной степени которого имеет вид $t^\eta L_\eta(1) t^N$, откуда $\eta + N = \deg R$. Утверждение доказано.

По аналогии с тем, как сделано в работе [13], проведем доказательство теоремы 3.

Теорема 3. *В условиях теоремы 2 возьмем $\ell : \ell \geq m$ и $L_{\eta,\ell}(q^n) \neq 0$ $\forall n \geq \ell$, где $L_{\eta,\ell}$ определяется из формулы (19). Тогда*

$$\deg_t p_{k+1} \leq (\ell + m + 1) \sum_{j=1}^{\ell} \deg_t p_j.$$

Доказательство. Заметим, что существование ℓ из условия доказываемого утверждения следует из утверждения 3.

Найдем из формулы (18) вид уравнения на $p_{\ell+1}$. Подставив дальнейшие члены ряда u в формулу (18), видим, что минимальная степень по z в левой части равна нулю, в правой части — единице.

Рассмотрим выражение при z^0, приравняем к нулю, получим линейное разностное уравнение

$$\left. \frac{P(z,\Phi_\ell)}{z^{m+l+1}} \right|_{z=0} + \sum_{i=0}^{n} a_{i,m}(t) q^{i(\ell+1)} \sigma^i p_{\ell+1} = 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что коэффициент при минимальной (равной $m+\ell+1$) степени по z в $P(z,\Phi_\ell)$ равен линейной комбинации мономов θ вида

$$\theta = (p_1(t))^{i_{1,0}}\dots(p_\ell(t))^{i_{\ell,0}}(p_1(t+1))^{i_{1,1}}\dots(p_\ell(t+1))^{i_{\ell,1}} \\ \dots(p_1(t+n))^{i_{1,n}}\dots(p_\ell(t+n))^{i_{\ell,n}},$$

где суммирование идет по подмножеству $i_{j,k}$ таких, что

$$1\sum_{k=0}^{n} i_{1,k} + \dots + \ell\sum_{k=0}^{n} i_{\ell,k} \le m+\ell+1,$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} i_{j,k} \le \ell+m+1 \quad \forall j \in \{1,\dots,\ell\}.$$

Это дает оценку для степени мономов:

$$\deg_t \theta \le \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{k=0}^{n} i_{j,k}\deg p_j = \sum_{j=1}^{\ell}\deg p_j \sum_{k=0}^{n} i_{j,k} \le (\ell+m+1)\sum_{j=1}^{\ell}\deg p_j.$$

Согласно утверждению 4 степень $p_{\ell+1}$ (полиномиального решения) не больше

$$(\ell+m+1)\sum_{j=1}^{\ell}\deg p_j.$$

Отметим, что в условии утверждения 4 требуется существование полиномиального решения $p_{\ell+1}$: такое решение существует, поскольку существует решение исходного уравнения в виде ряда Дюлака. Теорема доказана.

Итак, получены оценки на степень многочленов, являющихся коэффициентами формального решения в виде ряда Дюлака, через степени многочленов в начальном отрезке разложения.

5.2. Разностные алгебраические уравнения. Рассмотрим вопрос: всегда ли можно оценить степени многочленов — коэффициентов формально удовлетворяющего q-разностному уравнению ряда Дюлака через степени появляющихся при поиске таких коэффициентов разностных уравнений?

Если при нахождении коэффициентов ряда Дюлака появляется разностное уравнение вида

$$G(P(x),P(x-\tau)) = 0,$$

где G — многочлен, то, как показано в работе [15], полиномиальное решение, если существует, имеет степень не больше $\deg G$. Итак, в этом случае коэффициенты ряда Дюлака могут быть найдены с помощью метода неопределенных коэффициентов путем подстановки многочлена $P : \deg P = \deg G$ в уравнение.

В общем случае нельзя ограничить степень полиномиального решения разностного уравнения только через степени разностных мономов, входящих в уравнение. В качестве примера возьмем приведенное в работе [16] разностное уравнение третьего порядка

$$G(P(t+3),P(t+2),P(t+1),P(t)) = P(t+3)P(t+1)P(t) - 2P^2(t+2)P(t) \\ + P(t+2)P^2(t+1) + P(t+3)P(t+2)P(t) - 2P(t+3)P^2(t+1) \\ + P^2(t+2)P(t+1) = 0, \quad (21)$$

которое имеет решение в виде факториальной степени:

$$g_n(t) = (t+a)(t+a-1)\dots(t+a-(n-1)),$$

т. е. для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется полиномиальное решение g_n степени n, удовлетворяющее данному уравнению.

Построим пример q-разностного уравнения, при решении которого возникает разностное уравнение (21).

Пример 6. Учитывая то, что $\sigma^k \log_q z = \log_q z + k$, заметим, что уравнение (21) получится при подстановке $y = P(\log_q z)$ в q-разностное уравнение

$$y\sigma y\sigma^3 y - 2y(\sigma^2 y)^2 + (\sigma y)^2\sigma^2 y + y\sigma^2 y\sigma^3 y - 2(\sigma y)^2\sigma^3 y + \sigma y(\sigma^2 y)^2 = 0,$$

т. е. решения данного q-разностного уравнения являются рядами Дюлака $y = Cg_n(\log_q z)$, $C = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, это частный случай ряда Дюлака — многочлен от $\log_q z$, степень которого — произвольное натуральное число n.

Также можно построить q-разностное уравнение

$$q^k y\sigma y\sigma^3 y - 2q^k y(\sigma^2 y)^2 + q^k(\sigma y)^2\sigma^2 y + y\sigma^2 y\sigma^3 y - 2(\sigma y)^2\sigma^3 y + \sigma y(\sigma^2 y)^2 = 0,$$

которое имеет решения $y = Cg_n(\log_q z)z^k$, $C = \mathrm{const} \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. После замены $y = z^k P(\log_q z)$, $t = \log_q z$ и сокращения на $q^{4k}z^{3k}$ оно перейдет в разностное уравнение (21).

Тем не менее пример 6 не демонстрирует, что существует алгебраическое q-разностное уравнение, имеющее решение в виде ряда Дюлака, степень каждого коэффициента которого не ограничена и произвольна. Подчеркнем, что в условиях теоремы 2 степени коэффициентов решения-ряда Дюлака оцениваются через степени коэффициентов начального отрезка разложения и решение зависит от конечного числа параметров.

Благодарность. Авторы благодарят рецензента за сделанные ценные и важные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Брюно А. Д.* Асимптотики и разложения решений обыкновенного дифференциального уравнения // Успехи мат. наук. 2004. Т. 59, № 3. С. 31–80.
2. *Cano J.* The Newton polygon method for differential equations // Intern. Workshop on Mathematics Mechanization. Berlin; Heidelberg: Springer, 2004. P. 18–30. (Lect. Notes Math.; V. 3519)
3. *Dora J. D., Richard-Jung F.* About the Newton algorithm for non-linear ordinary differential equations // Proc. 1997 Intern. Sympos. Symbolic and Algebraic Computation. ACM, 1997. P. 298–304.
4. *Dragovic V., Goryuchkina I.* Polygons of Petrovic and Fine, algebraic ODEs, and contemporary mathematics // Archive for History of Exact Sciences. 2020. V. 74, N 6. P. 523–564.
5. *Cano J., Fortuny Ayuso P* Power series solutions of non-linear q-difference equations and the Newton–Puiseux polygon // Qualitative Theory Dynam. Syst. 2022. V. 21, N 4. P. 641–642.
6. *Barbe Ph., Cano J., Fortuny A.P., McCormic.* q-Algebraic equations, their power series solutions, and the asymptotic behavior of their coefficients. arXiv.org/abs/2006.09527#.
7. *Gontsov R., Goryuchkina I., Lastra A.* On the convergence of generalized power series solutions of q-difference equations // Aequationes Math. 2022. V. 96, N 3. P. 579–597.
8. *Мардешич П., Ресман М.* Аналитические модули для параболических ростков Дюлака // Успехи мат. наук. 2021. Т. 76, № 3. С. 13–92.
9. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. М.: Наука, 1967–1968. Т. 1.
10. *Брюно А. Д., Парусникова А. В.* Локальные разложения решений пятого уравнения Пенлеве // Докл. АН. 2011. Т. 438, № 4. С. 439–443.

11. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: URSS, 2006.
12. *Гаянов Н. В., Парусникова А. В.* Формулы для вычисления коэффициентов степенно-логарифмических разложений q-разностных уравнений специального вида // Дифференциальные уравнения и смежные вопросы математики: Тр. XIV приокской науч. конф. Коломна: ГСГУ, 2023. С. 50–55.
13. *Гонцов Р. Р., Горючкина И. В.* О сходимости формальных рядов Дюлака, удовлетворяющих алгебраическому ОДУ // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 9. С. 3–18.
14. *Malgrange B.* Sur le théorème de Maillet // Asympt. Anal. 1989. V. 2, N 1. P. 1–4.
15. *Feng R., Gao X. S., Huang Z.* Rational solutions of ordinary difference equations // J. Symbol. Comput. 1994. V. 339, N 6. P. 732–735.
16. *Shkaravska O., van Eekelen M.* Univariate polynomial solutions of algebraic difference equations // J. Symbol. Comput. 2014. V. 60. P. 15–28.

Поступила в редакцию 17 декабря 2023 г.
После доработки 13 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Гаянов Никита Владимирович (ORCID 0009-0001-0522-6856)
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Покровский бульвар, 11, Москва 101000
gajanovnv@gmail.com

Парусникова Анастасия Владимировна (ORCID 0000-0001-5387-1035)
(автор для переписки)
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»,
Таллинская ул., 34, Москва 123458
aparusnikova@hse.ru, parus-a@mail.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.542

О РАСПОЗНАВАЕМОСТИ ПО СПЕКТРУ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУПП НЕБОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ

М. А. Гречкосеева, В. В. Паньшин

Аннотация. Конечные группы называются *изоспектральными*, если множества порядков их элементов совпадают. В работе завершено описание конечных групп, изоспектральных простым группам $U_5(q)$, $L_6(q)$, $U_6(q)$ для нечетного q. Также доказано, что исключительные группы лиева типа не встречаются среди композиционных факторов групп, изоспектральных простым классическим группам.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.509

Ключевые слова: простая классическая группа, порядки элементов, распознавание по спектру.

§ 1. Введение

Спектром $\omega(G)$ конечной группы G называется множество порядков ее элементов, и группы с одинаковыми спектрами называются *изоспектральными.* Говорят, что для конечной группы G *решена проблема распознаваемости по спектру*, если известно число $h(G)$ различных конечных групп, изоспектральных G, и если $h(G)$ конечно, то все такие группы указаны явно. Обзор современного состояния проблемы распознаваемости по спектру можно найти в [1].

Согласно [2, лемма 1] если G имеет нетривиальную нормальную разрешимую подгруппу, то $h(G) = \infty$, поэтому проблема распознаваемости по спектру представляет интерес для групп с тривиальным разрешимым радикалом и, в первую очередь, для неабелевых простых групп. Назовем конечную неабелеву простую группу L *почти распознаваемой по спектру*, если любая конечная группа G, изоспектральная L, является почти простой группой с цоколем, изоморфным L, т. е. с точностью до изоморфизма выполнено $L \leq G \leq \operatorname{Aut} L$.

В настоящий момент проблема распознаваемости по спектру решена для большинства неабелевых простых групп и, более того, оказалось, что большинство из этих групп почти распознаваемы (см. [1, теорема 2.1]). Чтобы точно сформулировать приведенные утверждения, обозначим через $\mathscr{L}$ следующий список простых групп (q во всех случаях нечетно, и простые классические группы обозначаются согласно [3]):

(а) $L_n(q)$, где $6 \leq n \leq 26$;

(б) $U_n(q)$, где $5 \leq n \leq 26$;

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00127, https://rscf.ru/project/24-11-00127/.

© 2024 Гречкосеева М. А., Паньшин В. В.

(в) $S_{2n}(q)$ и $O_{2n+1}(q)$, где $5 \leq n \leq 15$;
(г) $O^+_{2n}(q)$, где $5 \leq n \leq 18$;
(д) $O^-_{2n}(q)$, где $5 \leq n \leq 17$.

В терминах этого списка $\mathscr{L}$ теорема 2.1 из [1] говорит следующее: *если L — конечная неабелева простая группа и $L \notin \mathscr{L}$, то для L решена проблема распознаваемости по спектру, а если, кроме того, $L \neq A_6$, A_{10}, J_2, ${}^3D_4(2)$ и L не является классической группой размерности, меньшей десяти, то L почти распознаваема по спектру.*

Настоящая работа является частью проекта по решению проблемы распознаваемости для групп из списка $\mathscr{L}$. Существует гипотеза [1, гипотеза 3.10] о том, что все эти группы также почти распознаваемы по спектру. Доказательство этой гипотезы сведено к некоторому специальному случаю. А именно, если $L \in \mathscr{L}$ и G — конечная группа, изоспектральная L, то в силу [1, теоремы 3.1, 3.6 и 3.8] либо G — почти простая группа с цоколем, изоморфным L, либо G имеет единственный неабелев композиционный фактор S и S — группа лиева типа над полем, характеристика которого отлична от характеристики определения группы L. Таким образом, гипотеза о почти распознаваемости всех групп из списка $\mathscr{L}$ эквивалентна следующей гипотезе.

Гипотеза 1. *Пусть $L \in \mathscr{L}$, S — простая группа лиева типа над полем, характеристика которого отлична от характеристики определения группы L, и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда S не может быть композиционным фактором группы G.*

Первый результат настоящей работы состоит в доказательстве гипотезы 1 в случае, когда S — исключительная группа лиева типа.

Теорема 1. *Пусть L — конечная простая классическая группа из списка $\mathscr{L}$ и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Если S — неабелев композиционный фактор группы G, то S не является исключительной группой лиева типа над полем характеристики, отличной от характеристики определения группы L.*

Утверждение теоремы 1 доказано в [4] для $S = E_7(u)$, $E_8(u)$ и в [5, предложение 3.8] для $S = {}^2B_2(u)$, ${}^3D_4(u)$, $G_2(u)$. Таким образом, нам остается рассмотреть в качестве фактора S группы ${}^2G_2(u)$, ${}^2F_4(u)$, $F_4(u)$, $E_6(u)$ и ${}^2E_6(u)$.

Отметим, что с учетом [1, теоремы 2.1, 3.1, 3.6 и 3.8] из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Пусть L — конечная простая классическая группа и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Если S — неабелев композиционный фактор группы G, то S не является исключительной группой лиева типа.*

Второй результат настоящей работы состоит в доказательстве гипотезы 1 в случае, когда L — группа размерности 5 или 6.

Теорема 2. *Пусть L — одна из групп $U_5(q)$, $L_6(q)$, или $U_6(q)$, где q нечетно, и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Если S — неабелев композиционный фактор группы G, то S не является группой лиева типа над полем характеристики, не делящей q.*

Как отмечено выше, непосредственным следствием теоремы 2 является

Следствие 2. *Пусть L — одна из групп $U_5(q)$, $L_6(q)$, $U_6(q)$, где q нечетно, и G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда G является почти простой группой с цоколем, изоморфным L.*

Следует отметить, что для любой неабелевой простой группы L известны почти простые группы с цоколем L, изоспектральные L (см. [1, теорема 3.7]), и

это дает решение проблемы распознаваемости для любой почти распознаваемой простой группы. В частности, следствие 2 и [6, теоремы 2, 3] дают полное описание конечных групп, изоспектральных $U_5(q)$, $L_6(q)$ или $U_6(q)$ для нечетного q.

§ 2. Предварительные сведения

Пусть a и b — целые числа, r — простое число. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел a и b обозначаются через (a, b) и $[a, b]$ соответственно. Через $\pi(a)$ обозначается множество всех простых делителей числа a. Через $(a)_r$ обозначается r-часть числа a, т. е. наибольшая степень числа r, делящая a. При этом $(a)_{r'} = a/(a)_r$. Если π — множество простых чисел, то $(a)_\pi = \prod\limits_{r\in\pi}(a)_r$. Если r нечетно и не делит a, то $e(r, a)$ обозначает мультипликативный порядок a по модулю r. Для нечетного числа a положим $e(2, a) = 1$, если $a \equiv 1 \pmod 4$, и $e(2, a) = 2$, если $a \equiv 3 \pmod 4$. Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 2.1. *Пусть a — целое число, $|a| > 1$ и m — натуральное число.*
(а) *Если r нечетное простое и $a \equiv 1 \pmod r$, то $(a^m - 1)_r = (m)_r(a - 1)_r$.*
(б) *Если $a \equiv 1 \pmod 4$ или m нечетно, то $(a^m - 1)_2 = (m)_2(a - 1)_2$.*
(в) *Если $a \equiv -1 \pmod 4$ и m четно, то $(a^m - 1)_2 = (m)_2(a + 1)_2$.*

Пусть $|a| > 1$ и $i \geq 1$. Простое число r называется *примитивным простым делителем* числа $a^i - 1$, если $e(r, a) = i$. Множество всех примитивных делителей числа $a^i - 1$ обозначается через $R_i(a)$, и через $r_i(a)$ обозначается произвольный примитивный делитель. Существование примитивных делителей для почти всех пар (a, i) доказано Бэнгом [7] и Жигмонди [8].

Лемма 2.2 (Бэнг — Жигмонди). *Предположим, что a — целое число и $|a| > 1$. Тогда для любого натурального числа i множество $R_i(a)$ непусто, за исключением случаев, когда $(a, i) \in \{(2, 1), (2, 6), (-2, 2), (-2, 3), (3, 1), (-3, 2)\}$.*

Для $i \geq 3$ наибольшим примитивным делителем $k_i(a)$ числа $a^i - 1$ называется произведение чисел $(a^i - 1)_r$ по всем $r \in R_i(a)$ (мы не будем рассматривать наибольшие примитивные делители $k_1(q)$ и $k_2(q)$). Как обычно, $\varphi(x)$ и $\Phi_i(x)$ обозначают функцию Эйлера и i-й круговой многочлен соответственно.

Лемма 2.3. *Пусть a и i — целые числа, $|a| \geq 2$ и $i \geq 3$. Пусть r — наибольший простой делитель числа i и $l = (i)_{r'}$. Тогда*

$$k_i(a) = \frac{|\Phi_i(a)|}{(r, \Phi_l(a))}.$$

Кроме того, если l не делит $r - 1$, то $(r, \Phi_l(a)) = 1$.

Доказательство. См. [9, предложение 2]. □

Лемма 2.4. *Пусть $a \geq 2$ — натуральное число.*
(а) *Если $i \geq 3$ и $(a, \varepsilon, i) \notin \{(2, -, 3), (2, +, 6)\}$, то $k_i(\varepsilon a) > a^{\varphi(i)/2}$.*
(б) *Если $i \geq 5$ и $i \neq 6$, то $k_i(\pm a) > a^2$.*
(в) *Если $a \neq 2$, то $k_6(a) > a^2/4$, $k_3(a) > a^2/3$, $k_3(a)k_6(a) > a^4/3$ и $k_4(a) > a^2/2$.*
(г) *Если $a = 2$, то $k_3(a), k_4(a) > a^2$.*

Доказательство. П. (а) доказан, например, в [10, лемма 1.5], и из него следует п. (б). Остальные пункты несложно проверить, явно выписав выражение для $k_i(a)$. □

Лемма 2.5. *Пусть q — степень нечетного простого числа, $\varepsilon \in \{+1, -1\}$ и $r \in \{3, 5\}$. Если $\pi(q+\varepsilon) = \{2\}$ и $\pi(q-\varepsilon) \subseteq \{2, r\}$, то $q = 3, 9$ при $r = 5$ и $q = 3, 7, 17$ при $r = 3$.*

Доказательство. Пусть $q + \varepsilon = 2^x$ и $q - \varepsilon = 2^y r^z$, где $x, y \geq 1$ и $z \geq 0$. Тогда $\varepsilon = 2^{x-1} - 2^{y-1} r^z$. Ясно, что либо $x = 1$, либо $y = 1$. В первом случае $q = 3$. Во втором случае по теореме Жероно [11] либо $z = 1$, либо $r^z = 9$, и несложные вычисления завершают доказательство. □

Множество максимальных по делимости порядков элементов группы G обозначается через $\mu(G)$. Наибольший (по абсолютному значению) порядок элемента обозначается через $\mathrm{meo}(G)$. Период группы G обозначается через $\exp(G)$. Для простого числа r числа $(\exp(G))_r$ и $(\exp(G))_{r'}$ называются r- и r'-*периодами* группы G соответственно. Спектры простых групп лиева типа известны, ссылки на соответствующие работы можно найти в [12] (см. также [13, лемма 2.3] по поводу опечаток в описании спектров групп $O^{\pm}_{2n}(q)$). Здесь приведем только оценку на максимальный порядок элемента простой классической группы. Мы используем стандартное сокращение $L^{\varepsilon}_n(q)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$, $L^{+}_n(q) = L_n(q)$ и $L^{-}_n(q) = U_n(q)$.

Лемма 2.6. *Пусть L — одна из простых групп $L^{\pm}_{m+1}(q)$, где $m \geq 1$, $S_{2m}(q)$, где $m \geq 1$, $O_{2m+1}(q)$, где $m \geq 2$, или $O^{\pm}_{2m}(q)$, где $m \geq 4$. Тогда $\mathrm{meo}(L) < 2q^m$.*

Доказательство. См., например, [14, лемма 1.3]. □

Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей порядка группы G. Граф Грюнберга — Кегеля (или граф простых чисел) $GK(G)$ — это граф, множеством вершин которого является $\pi(G)$ и в котором две различные вершины r и s смежны тогда и только тогда, когда $rs \in \omega(G)$. Если r — простое число, то $GK(G)_{r'}$ обозначает подграф графа $GK(G)$, порожденный множеством вершин $\pi(G) \setminus \{r\}$. Простые группы с несвязным графом простых чисел найдены в [15, 16], таблицы с исправленными опечатками можно найти, например, в [17].

Кокликой графа называется некоторое множество его вершин, попарно не смежных между собой. Максимальный размер коклики называется неплотностью графа. *Неплотность* графа $GK(G)$ обозначается через $t(G)$. Для $r \in \pi(G)$ максимальный размер коклики графа $GK(G)$, содержащей r, называется r-*неплотностью* и обозначается через $t(r, G)$.

Критерии смежности в графах простых чисел простых групп, а также неплотности этих графов и некоторые коклики максимального размера найдены в [18]. Все коклики максимального размера, а также исправленные версии некоторых результатов из [18] можно найти в [19]. Мы будем пользоваться этими результатами, как правило, без явных ссылок.

Замечание 1. Согласно табл. 2 из [19] если $G = {}^2D_n(q)$, где $n > 4$ и $n \equiv 2 \pmod 4$, то коклики максимального размера графа $GK(G)$ — это в точности множества вида $\Theta(G) \cup \{r_n(q)\}$, $\Theta(G) \cup \{r_{n/2}(q)\}$ и $\Theta(G) \cup \{r_{n-2}(q)\}$, где $\Theta(G) = \{r_i(q) \mid i$ четно, $n < i \leq 2n$ или i нечетно, $n < 2i \leq 2n\}$. Это верно во всех случаях, кроме случая, когда $n = 6$. Если $n = 6$, то $2n/(n-2)$ является целым нечетным числом и $r_{n-2}(q)$ смежно с $r_{2n}(q)$ по [19, предложение 2.5]. Таким образом, при $n = 6$ коклики максимального размера в $GK(G)$ — это $\Theta(G) \cup \{r_6(q)\}$ и $\Theta(G) \cup \{r_3(q)\}$, а $t(r_4(q), G) = 4$.

Лемма 2.7. *Пусть L — конечная неабелева простая группа такая, что $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$, и G — конечная группа, удовлетворяющая условию $\omega(G) = \omega(L)$. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(а) *Существует неабелева простая группа S такая, что*

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \operatorname{Aut} S,$$

где K — наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G.

(б) *Для каждой коклики ρ графа $GK(G)$, размер которой больше 2, не более чем одно число из ρ делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(S) \geq t(L) - 1$.*

(в) *Каждое простое число $r \in \pi(G)$, не смежное в $GK(G)$ с числом 2, не делит произведение $|K| \cdot |\overline{G}/S|$. В частности, $t(2, S) \geq t(2, L)$.*

(г) *Группа K нильпотентна.*

Доказательство. (а)–(в) См. [20, 21]. (г) См. [22]. □

В оставшейся части раздела приведены сведения, касающиеся порядков элементов в расширениях элементарных абелевых групп простыми группами лиева типа и другими конструкциями.

Лемма 2.8. *Пусть t и s — различные простые числа, G — полупрямое произведение t-группы T и циклической группы $\langle g \rangle$ порядка s и $[T, g] \neq 1$. Предположим, что G точно действует на векторном пространстве V положительной характеристики $r \neq t$. Тогда либо естественное полупрямое произведение $V \rtimes G$ содержит элемент порядка sr, либо выполнены следующие утверждения:*

(а) *$C_T(g) \neq 1$;*

(б) *T неабелева;*

(в) *$t = 2$ и s — простое число Ферма.*

Доказательство. См. [10, лемма 3.6]. □

Лемма 2.9. *Пусть S — одна из групп $SL_3^\tau(u)$ или $\mathrm{Spin}_9(u)$, t — простое число из $R_3(\tau u)$ или $R_8(u)$ соответственно и $g \in S$ — t-элемент. Пусть $\mathfrak{X}$ — нетривиальное неприводимое представление группы S над полем положительной характеристики r, где $r \neq t$ и r не делит u. Если 1 не является собственным числом для $\mathfrak{X}(g)$, то выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *$S = SL_3^\tau(u)$, $(3, u - \tau) = 1$ и $|g| = u^2 + \tau u + 1$;*

(б) *$S = \mathrm{Spin}_9(u)$, u нечетно и $|g| = (u^4 + 1)/2$.*

Доказательство. Если $S = SL_3(u)$ или $S = SU_3(u)$, то требуемое следует из [23, лемма 2.6] и [24, предложение 6.1] соответственно. Пусть $S = \mathrm{Spin}_9(u)$. Если u четно, то $S \simeq Sp_8(u)$ и в силу [24, предложение 5.7] у $\mathfrak{X}(g)$ есть собственное число, равное 1. Если u нечетно, то g лежит в подгруппе группы S, изоморфной $\mathrm{Spin}_8^-(u)$, и можно применить [24, лемма 5.10]. □

Лемма 2.10. *Пусть S — одна из групп ${}^2G_2(u)$, где $u > 3$, ${}^2F_4(u)$, где $u > 2$, $F_4(u)$, $E_6^\tau(u)$, r — простое число и G — конечная группа такая, что $G/K \simeq S$ для некоторой нетривиальной нормальной r-подгруппы K группы G. Предположим, что $t \in \pi(S)$, $t \neq r$ и $tr \notin \omega(G)$. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(а) *$S = {}^2F_4(8)$, $r = 3$ и $t = 109$;*

(б) *$S = F_4(u)$, u нечетно, r не делит u и $t = (u^4 + 1)/2$;*

(в) *$S = E_6^\tau(u)$, r делит u и $t \in R_9(\tau u)$;*

(г) *$S = E_6^\tau(u)$, $(3, u - \tau) = 1$ и $t = u^6 + \tau u^3 + 1$.*

Доказательство. Можно считать, что K — элементарная абелева r-группа и $G = K \rtimes S$. Обозначим через v простой делитель числа u. Сведения о подгруппах групп $F_4(u)$ и $E_6^\tau(u)$ взяты из [25].

Предположим, что $t = v$. Тогда в S есть нециклическая подгруппа порядка t^2 (см., например, [26, табл. 3.3.1]) и эта подгруппа не может действовать на K без неподвижных точек по [27, теорема 3.3.3]. Значит, $tr \in \omega(G)$.

Таким образом, далее $t \neq v$. Если $S \neq F_4(u), E_6^\tau(u)$ или $S = F_4(u)$ и $r = v$, или $S = F_4(u)$ и $t \in \pi({}^3D_4(u))$, то требуемое следует из [28, теорема 1.3] при $r = v$ и основного результата в [23] при $r \neq v$ с учетом того, что ${}^3D_4(u) < F_4(u)$.

Пусть $S = F_4(u)$, $r \neq v$ и $t \notin \pi({}^3D_4(u))$. Тогда $t \in R_8(u)$ или $t \in R_4(u)$. В первом случае, используя вложение $\mathrm{Spin}_9(u) < S$ и применяя лемму 2.9, видим, что либо $tr \in \omega(G)$, либо выполнен п. (б). Если $t \in R_4(u)$, то в $\mathrm{Spin}_9(u)$, а значит, и в S есть элементарная абелева подгруппа порядка t^2 и $tr \in \omega(G)$ по [27, теорема 3.3.3].

Пусть $S = E_6^\tau(u)$. Отметим, что $F_4(u) < S$ и $\pi(S) = \pi(F_4(u)) \cup R_5(\tau u) \cup R_9(\tau u)$. Предположим, что $r = v$. Если $t \in \pi(F_4(u))$, то $tr \in \omega(G)$ в силу доказанного выше. Если $t \in R_5(\tau u)$, то уже в группе S есть элемент порядка tr. Если $t \in R_9(\tau u)$, то выполнен п. (в).

Пусть $r \neq v$. Опять же в силу доказанного выше достаточно рассмотреть случай, когда $t \in R_8(u) \cup R_5(\tau u) \cup R_9(\tau u)$. Предположим, что $t \in R_8(u) \cup R_5(\tau u)$. В S есть параболическая подгруппа, порядок фактора Леви которой делится на t: с фактором Леви типа D_5 при $\tau = +$, типа ${}^2A_5$ при $\tau = -$ и $t \in R_5(\tau u)$, типа ${}^2D_4$ при $\tau = -$ и $t \in R_8(u)$). Кроме того, $vt \notin \omega(G)$ при $t \in R_8(u)$ и t не является простым числом Ферма, если $t \in R_5(\tau u)$, поэтому, применяя лемму 2.8, получаем, что $tr \in \omega(G)$. Если $t \in R_9(\tau u)$, то требуемое следует из вложения $PSL_3^\tau(u^3) < E_6^\tau(u)$ и леммы 2.9. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть S — конечная простая классическая группа над полем характеристики v, и пусть $s \neq v$ — нечетное простое число, делящее порядок собственной параболической подгруппы группы S. Если S действует на r-группе W, где r — простое число, отличное от v и s, то $sr \in \omega(W \rtimes S)$.*

Доказательство. См. [22, лемма 2.16]. $\square$

§ 3. Доказательство теорем: общие соображения и вычисления

Предположим, что мы находимся в условиях гипотезы 1: L — простая группа из списка $\mathscr{L}$, p — характеристика поля, над которым определена группа L, S — простая группа лиева типа над полем характеристики $v \neq p$, G — конечная группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$ и в G есть неабелев композиционный фактор, изоморфный S.

Поскольку $t(L) \geq 3$ и $t(2, L) \geq 2$, по лемме 2.7 выполнено

$$S \leq \overline{G} = G/K \leq \mathrm{Aut}\, S, \tag{3.1}$$

где K — разрешимый радикал группы G, причем K нильпотентна, $t(2, S) \geq t(2, L)$ и $t(S) \geq t(L) - 1$. Также известно следующее.

Лемма 3.1. *В условиях гипотезы* 1 *можно считать, что S отлична от $L_2(u)$, $S_4(u)$, ${}^2B_2(u)$, ${}^3D_4(u)$, $G_2(u)$, $E_7(u)$, $E_8(u)$.*

Доказательство. См. [5, предложение 3.8] и [4]. $\square$

Лемма 3.2. *В условиях гипотезы* 1 *можно считать, что L отлична от следующих групп:*

Таблица 1. Числа, не смежные с 2 и p в $GK(L)$

L	Условия на L	$R_z(L)$	$R_y(L)$	$m_z(L)$	$m_y(L)$
$L_n^\varepsilon(q), n \geq 5$	$(n)_2 < (q-\varepsilon)_2$ $(n)_2 \geq (q-\varepsilon)_2$	$R_n(\varepsilon q)$ $R_{n-1}(\varepsilon q)$	$R_{n-1}(\varepsilon q)$ $R_n(\varepsilon q)$	$\frac{q^n-\varepsilon^n}{(q-\varepsilon)(n,q-\varepsilon)}$ $\frac{q^{n-1}-\varepsilon^{n-1}}{(n,q-\varepsilon)}$	$\frac{q^{n-1}-\varepsilon^{n-1}}{(n,q-\varepsilon)}$ $\frac{q^n-\varepsilon^n}{(q-\varepsilon)(n,q-\varepsilon)}$
$S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, $n \geq 5$ нечетно	$q \equiv \varepsilon \pmod 4$	$R_{2n}(\varepsilon q)$	$R_n(\varepsilon q)$	$\frac{q^n+\varepsilon}{2}$	$\frac{q^n-\varepsilon}{2}$
$S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, $n \geq 6$ четно	нет	$R_{2n}(q)$	$R_{n-1}(\epsilon q)$	$\frac{q^n+1}{2}$	$\frac{(q^{n-1}-\epsilon)(q+\epsilon)}{2}$, $\frac{p(q^{n-1}-\epsilon)}{d}$
$O_{2n}^\varepsilon(q)$, $n \geq 5$ нечетно	$q \equiv \varepsilon \pmod 4$ $q \equiv -\varepsilon \pmod 4$	$R_{2n-2}(q)$ $R_n(\varepsilon q)$	$R_n(\varepsilon q)$ $R_{2n-2}(q)$	$\frac{(q^{n-1}+1)(q+\varepsilon)}{4}$ $\frac{q^n-\varepsilon}{2}$	$\frac{q^n-\varepsilon}{4}$ $\frac{(q^{n-1}+1)(q+\varepsilon)}{2}$
$O_{2n}^+(q), n \geq 6$ четно	$q \equiv \varepsilon \pmod 4$	$R_{2n-2}(\varepsilon q)$	$R_{n-1}(\varepsilon q)$	$\frac{q^{n-1}+\varepsilon}{2}$	$\frac{q^{n-1}-\varepsilon}{2}$
$O_{2n}^-(q), n \geq 6$ четно	нет	$R_{2n}(q)$	$R_{2n-2}(q)$	$\frac{q^n+1}{2}$	$\frac{(q^{n-1}+1)(q-1)}{2}$

(а) $L_r(q)$, $U_r(3)$, $U_{r+1}(3)$, $S_{2r}(3)$, $O_{2r+1}(3)$, $O_{2r}^+(3)$, $O_{2r}^+(5)$, $O_{2r+2}^+(3)$, $O_{2r}^-(3)$, *где r — простое число;*

(б) $S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$, $O_{2n}^-(q)$, *где n — степень числа 2;*

(в) $U_5(5)$, $U_6(5)$, $L_6(3)$, $L_6(5)$.

Доказательство. (а), (б) См. теорему 2.1 и табл. 7 в [1]. (в) См., например, лемму 3.7 в [5] и рассуждение перед гипотезой 3.10 в [1]. $\square$

Нам потребуются некоторые специальные подмножества в $\pi(L)$ и числа в $\omega(L)$. Введем множества $R_z(L)$, $R_y(L)$ и числа $m_z(L)$, $m_y(L)$ согласно табл. 1. Для $L \neq S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$, где n четно, эта таблица повторяет [5, табл. 5].

Пусть $L = S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, где n четно. Тогда $\{r_{2n}(q), r_{n-1}(-q), r_{n-1}(q)\}$ — коклика в $GK(L)$, а значит, и в $GK(G)$, поэтому в силу леммы 2.7 найдется $\epsilon \in \{+,-\}$ такое, что $R_{n-1}(\epsilon q)$ не пересекается с $\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. Именно этот знак ϵ участвует в определении множества $R_y(L)$. Запись в ячейке, соответствующей $m_y(L)$, означает, что $m_y(L) \in \{(q^{n-1}-\epsilon)(q+\epsilon)/2, p(q^{n-1}-\epsilon)/d\}$, при этом $d = 1$ при $L = S_{2n}(q)$ и $d = 2$ при $L = O_{2n+1}(q)$.

Вместе с $R_z(L)$ и $R_y(L)$ также неявно вводим числа z и y как нижние индексы в определении $R_z(L)$ и $R_y(L)$ соответственно. Например, если $L = L_n^\varepsilon(q)$, то $z = n$, если $(n)_2 < (q-\varepsilon)_2$, и $z = n-1$ в противном случае. Для $x \in \{z, y\}$ обозначим $R_x(L)$-часть числа $m_x(L)$ через $k_x(L)$. Несложно заметить, что если $R_x(L) = R_x(\nu q)$, где $\nu \in \{+,-\}$, то $k_x(L) = k_x(\nu q)$.

Свойства введенных множеств и чисел отражены в следующей лемме.

Лемма 3.3. *Пусть $L \in \mathscr{L}$, $r \in R_z(L)$, $s \in R_y(L)$. Тогда выполнены следующие утверждения.*

(а) *$\{2, r\}$ — коклика в $GK(L)$ и $m_z(L)$ — единственное число в $\mu(L)$, кратное r.*

(б) *Если $L \neq S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, где n четно, то $\{p, r, s\}$ — коклика в $GK(L)$ и $m_y(L)$ — единственное число в $\mu(L)$, кратное s.*

(в) *Если $L = S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, где n четно, то $p(q^{n-1}-\epsilon)/d$ и $(q^{n-1}-\epsilon)(q+\epsilon)/2$ — единственные числа в $\mu(L)$, кратные s.*

(г) *У вершин r и s нет общих соседей в $GK(L)$.*

(д) *Если $t \in \{r, s\}$, то $e(t, q) \geq 3$ и $t \geq 5$.*

Доказательство. (а)–(г) Утверждения следуют из критерия смежности в графе $GK(L)$ и описания множества $\omega(L)$.

(д) Первое неравенство следует из определения, второе — из того факта, что $2, 3$ всегда делят $q^2 - 1$, если взаимно просты с q. $\square$

В силу п. (а) леммы 3.3 и леммы 2.7 выполнено

$$R_z(L) \cap (\pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)) = \varnothing. \tag{3.2}$$

В частности, $k_z(L)$ лежит в $\omega(S)$ и делит некоторое число $m(S) \in \mu(S)$. Обозначим через $k(S)$ наибольший делитель числа $m(S)$, все простые делители которого не смежны с 2 в $GK(S)$. Тогда выполнена следующая цепочка делимостей:

$$k_z(L) \mid k(S) \mid m(S) \mid m_z(L). \tag{3.3}$$

С точки зрения группы S число $k(S)$ — это максимальный по делимости элемент из $\omega(S)$ такой, что каждый его простой делитель не смежен с 2 в $GK(S)$. Все такие числа несложно найти с помощью описаний спектров и критериев смежности.

Также отметим, что в силу п. (а) леммы 3.3 числа из $R_z(L)$ смежны в $GK(L)$ только с числами из $\pi(m_z(L))$. Поэтому $k_z(L) = m_z(L)$ тогда и только тогда, когда $R_z(L)$ — компонента связности графа $GK(L)$. В этом случае $k_z(L) = k(S)$, а значит, $\pi(k(S))$ — компонента связности графа $GK(S)$.

Для $R_y(L)$ не обязательно выполнен аналог свойства (3.2), однако, исходя из определения в случае $L = S_{2n}(q), O_{2n+1}(q)$, где n четно, и применяя [5, лемма 3.4] в остальных случаях, имеем

$$R_y(L) \cap \pi(\overline{G}/S) = \varnothing. \tag{3.4}$$

Оставшаяся часть раздела посвящена некоторым вычислениям с $k_z(L)$ и $m_y(L)$. Обозначим через $\mathscr{L}_0$ множество групп из $\mathscr{L}$, не упомянутых в лемме 3.2.

Лемма 3.4. *Пусть $L \in \mathscr{L}_0$ и $k_z(L) \leq 127$. Тогда L и $k_z(L)$ указаны в табл. 2.*

Таблица 2. $L \in \mathscr{L}_0$ с $k_z(L) \leq 127$

L	$U_6(7)$	$L_6(9), S_{12}(3), O_{13}(3), O^-_{12}(3)$	$L_6(17)$	$U_{10}(3)$	$U_6(19)$
$k_z(L)$	19	73	$7 \cdot 13$	11^2	127

Доказательство. Число $k_z(L)$ имеет вид $k_z(\nu q)$, где $\nu \in \{+, -\}$ и $z \geq 3$. Значит, $k_z(L) \geq q^2/4$ в силу леммы 2.4, откуда $q \leq 19$. Кроме того, $k_z(L) \geq q^{\varphi(z)/2}$, откуда $\varphi(z) \leq 8$. Вычисляя $k_z(\pm q)$ для указанных q и z, а затем восстанавливая группу L согласно табл. 1, получаем требуемое. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть $L \in \mathscr{L}_0$, $t(L) \leq 5$, $GK(L)$ несвязен и $L \neq U_5(q), U_7(q)$. Тогда компонента связности графа $GK(L)$ не может состоять из одного простого числа вида $u^6 \pm u^3 + 1$.*

Доказательство. Из условий на L следует, что L — одна из групп $L_6(7)$, $L_8(3)$, $L_8(5)$, $L_8(9)$, $U_8(7)$. Для этих групп несложно проверить заключение леммы. $\square$

Лемма 3.6. *Пусть $L = U_n(q)$, где $n = 5, 7$ и $q \geq 7$ нечетно. Тогда* $\exp(L) < k_z(L)^{13/3}/3$.

Доказательство. Поскольку $q \geq 7$, выполнено $\exp_p(L) \leq q$. Также $\exp_{p'}(L) \leq \prod_{i=1}^{n} \Phi_i(-q)$ в силу [29, лемма 3.5]. Следовательно,

$$\exp(U_5(q)) \leq q(q^5+1)(q^2+1)(q^2-q+1)(q-1) \leq q^{11},$$

$$\exp(U_7(q)) \leq q \cdot \frac{q^7+1}{q+1} \cdot \frac{q^5+1}{q+1} \cdot (q^2+1)(q^6-1) \leq q^{19}.$$

Обозначим $k_z(L)$ через k. Тогда

$$k = k_{2n}(q) = \frac{q^n+1}{(q+1)(n, q+1)} > q^{n-2}.$$

Значит, $k^{13/3} > q^{13(n-2)/3} > 3q^{(13n-29)/3}$. Вместе с предыдущими вычислениями это дает требуемое неравенство. □

Лемма 3.7. *Пусть $L \in \mathscr{L}$ и $t(L) \leq 5$. Если $m_y(L) = u^4+1$, где u — степень нечетного простого числа, то $m_y(L)/2$ не является простым числом.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда, в частности, $(m_y(L))_2 = 2$. Для вычисления 2-частей различных выражений будет использоваться лемма 2.1.

Пусть $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, где $5 \leq n \leq 10$. Если n нечетно, то $(m_y(L))_2 = (q^{n-1}-1)_2 > 2$. Если $1 < (n)_2 < (q-\varepsilon)_2$, то

$$m_y(L) = \frac{q^{n-1}-\varepsilon}{q-\varepsilon} \cdot \frac{q-\varepsilon}{(n, q-\varepsilon)},$$

причем второй множитель в данном разложении четен. Следовательно, первый множитель — простое число, а второй равен 2. Из первого утверждения следует, что $n-1$ — простое число, а из второго — что $q-\varepsilon = 2(n)_2$. Если $n = 8$, то $q-\varepsilon = 16$; если $n = 6$, то $q-\varepsilon = 4$. Вычисляя $(q^{n-1}-\varepsilon)/(q-\varepsilon)$ для этих значений n и q, видим, что это число либо не является простым, либо не имеет вида $(u^4+1)/2$.

Если $(n)_2 \geq (q-\varepsilon)_2$, то

$$m_y(L) = \frac{2(q^n-1)}{(q^2-1)(n, q-\varepsilon)} \cdot \frac{q+\varepsilon}{2}.$$

Отметим, что первый множитель является целым числом, поскольку $(n, q-\varepsilon)/2$ делит $(n/2, q^2-1)$, что, в свою очередь, делит $(q^n-1)/(q^2-1)$. Значит, $q+\varepsilon = 2, 4$. Снова, вычисляя $m_y(L)/2$ для конечного числа значений q и n, убеждаемся, что оно не является простым.

Пусть $L = S_{12}(q)$, $O_{13}(q)$. Тогда для $m_y(L)$ есть две возможности. Поскольку $p(q^{n-1}-\epsilon)/d$ делится и на p, и на $r_{n-1}(\epsilon q)$, это число не может иметь вид $2r$ для простого r. С другой стороны, как несложно понять, $(q^{n-1}-\epsilon)(q+\epsilon)/2$ делится на 4, поэтому тоже не подходит. Случай $L = O_{12}^{-}(q)$ разбирается аналогично.

Пусть $L = S_{10}(q)$, $O_{11}(q)$, $O_{12}^{+}(q)$ и $q \equiv \varepsilon \pmod 4$. Тогда $m_y(L) = (q^5-\varepsilon)/2$, откуда $q-\varepsilon = 4$ и, значит, $m_y(L) = m_y(L_6^{\varepsilon}(q))$. Этот случай уже был рассмотрен.

Пусть $L = O_{10}^{\varepsilon}(q)$. Если $q \equiv \varepsilon \pmod 4$, то $m_y(L) = (q^5-\varepsilon)/4$ и, значит, $q-\varepsilon = 8$. Тогда $m_y(L)/2 \in \{2101, 7381\}$ не является простым. Если $q \equiv -\varepsilon \pmod 4$, то $(m_y(L))_2 = (q^4+1)_2(q+\varepsilon)_2/2 = (q+\varepsilon)_2 > 2$. □

§ 4. Исключительный фактор

В этом параграфе докажем теорему 1. Сохраним все обозначения предыдущего параграфа и предположим, что S — исключительная группа лиева типа.

В силу леммы 3.1 можно считать, что S — одна из групп ${}^2G_2(u)$, где $u > 2$, ${}^2F_4(u)$, где $u > 2$, $F_4(u)$ и $E_6^{\pm}(u)$. Для всех этих групп выполнено неравенство $t(S) \leq 5$ и, значит, $t(L) \leq 6$. Следовательно, L — одна из групп $L_n^{\pm}(q)$, где $n \leq 12$, $S_{2n}(q)$, $O_{2n+1}(q)$ и $O_{2n}^{-}(q)$, где $n \leq 7$, $O_{2n}^{+}(q)$, где $n \leq 8$. Напомним, что во всех случаях $n \geq 5$.

Нам потребуются две леммы о графах простых чисел некоторых групп с композиционным фактором $F_4(u)$ или $E_6^{\tau}(u)$.

Лемма 4.1. *Пусть $S = F_4(u)$, где $u = v^l$, и $S \leq H \leq \operatorname{Aut} S$. Если $\pi(H) \not\subseteq \pi(S)$, то $t(H) = t(S)+1$. Если $\pi(H) = \pi(S)$, $r \in \pi(S)$ и $r \neq 2$, то $t(r, H) = t(r, S)$.*

Доказательство. По теореме Стейнберга $\operatorname{Aut} S = S \rtimes \langle\alpha\rangle$, где $|\alpha| = l$ при $v \neq 2$ и $|\alpha| = 2l$ при $v = 2$. Любой внешний автоморфизм нечетного простого порядка r сопряжен элементу из $\langle\alpha\rangle$, а значит, его централизатор в S изоморфен $F_4(v^{l/r})$ по [27, предложение 4.9.1].

Если $u = 2$ или $u = 4$, то $\pi(H) = \pi(S)$ и утверждение о $t(r, H)$ несложно проверить непосредственно. Пусть $u \neq 2, 4$. Тогда существуют примитивные делители $r_{il}(v)$, где $i \in I = \{3, 4, 6, 8, 12\}$. Ни одно из них не делит l, поскольку il делит $r - 1$ для любого $r \in R_{il}(v)$. Кроме того, эти числа образуют коклику максимального размера в $GK(S)$ (см., например, [19, табл. 4]), обозначим эту коклику через ρ.

Покажем, что вершина $r_{il}(v)$ имеет такую же окрестность в $GK(H)_{2'}$, какую имела в $GK(S)_{2'}$, для любого $i \in I$. Если это не так, то найдется $r \in \pi(H/S)$ такое, что $rr_{il}(v) \in \omega(H) \setminus \omega(S)$ и, значит, в $H \setminus S$ найдется элемент порядка r, порядок централизатора которого делится на $r_{il}(v)$. В силу первого абзаца доказательства это означает, что $r_{li}(v) \in \pi(F_4(v^{l/r}))$. Тогда li делит lj/r для некоторого j, делящего 12 или равного 8, откуда $r = 3$ и $i = 4$. Однако $r_{4l}(v)$ и 3 смежны в $GK(S)$.

Если $r \in \pi(H) \setminus \pi(S)$, то $\{r\} \cup \rho$ — коклика в $GK(H)$. При этом $t(H) \leq t(S)+1$, поскольку H/S — циклическая группа. Таким образом, $t(H) = t(S)+1$.

Предположим, что $\pi(H) = \pi(S)$, $r \in \pi(S)$ и $r \neq 2$. Ясно, что $t(r, H) \leq t(r, S)$. В силу строения графа $GK(S)$ найдется подмножество ρ' в ρ такое, что $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(S)$ размера $t(r, S)$ (см. [19, рис. 2]). Множество $\{r\} \cup \rho'$ останется кокликой в $GK(H)$. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $S = E_6^{\tau}(u)$, где $u = v^l$, $\tau \in \{+, -\}$, и $S \leq H/K \leq \operatorname{Aut} S$, где K — нормальная v-подгруппа группы H. Если $\pi(H) \neq \pi(S)$, то $t(H) = t(S) + 1$. Если $\pi(H) = \pi(S)$, то выполнены следующие утверждения:*

(а) *$t(r, H) = t(r, H/K)$ для любого $r \in \pi(S) \setminus \{v\}$;*

(б) *$t(r, H/K) = t(r, S)$ для любого $r \in \pi(S) \setminus \{2, 3\}$;*

(в) *$t(3, H/K) = t(3, S)$, если $\operatorname{Inndiag} S \cap (H/K) = S$, и $t(3, H/K) = 1$ в противном случае.*

Доказательство следует тем же идеям, что и доказательство леммы 4.1. Обозначим H/K через $\overline{H}$.

Пусть α — внешний автоморфизм группы S простого нечетного порядка r. Если $r > 3$, то α сопряжен полевому автоморфизму и $C_S(\alpha) \simeq E_6^{\tau}(v^{l/r})$. Если $r = 3$, то α сопряжен полевому автоморфизму или диагональному в силу [27,

предложение 4.9.1(d)]. В первом случае $C_S(\alpha) \simeq E_6^\tau(v^{l/3})$, во втором — $\langle S, \alpha\rangle = \operatorname{Inndiag} S$.

Пусть $\rho = \{r_{il}(v) \mid i \in I\}$, где $I = \{4, 8, 12, 9, 5\}$ при $\tau = +$ и $I = \{4, 8, 12, 18, 10\}$ при $\tau = -$. Тогда ρ — коклика в $GK(S)$ и $\rho \cap \pi(\operatorname{Out} S) = \varnothing$. Предположим, что некоторое число $r_{il}(v)$ из ρ делит порядок централизатора внешнего автоморфизма α простого порядка r. Тогда $r = 3$ и либо $i = 4$, либо $\langle S, \alpha\rangle = \operatorname{Inndiag} S$. Отметим, что $r_{4l}(v)$ и 3 смежны в $GK(S)$. Таким образом, если окрестность вершины из ρ изменилась при переходе от $GK(S)_{2'}$ к $GK(\overline{H})_{2'}$, то $\operatorname{Inndiag} S \cap \overline{H} > S$ и изменение состоит в добавлении в окрестность вершины 3.

Ясно, что $t(H) \le t(\overline{H})$. Кроме того, $t(\overline{H}) \le t(S) + 1$, поскольку $\pi(S)'$-холлова подгруппа группы $\operatorname{Out} S$ циклическая. Если $r \in \pi(H) \setminus \pi(S)$, то в силу доказанного выше $\{r\} \cup \rho$ — коклика в $GK(\overline{H})$, а значит, и в $GK(H)$. Таким образом, $t(H) = t(S) + 1$.

Пусть $t(H) = t(S)$ и $r \in \pi(S)$. Если r не смежно с v в $GK(S)$, то $t(r, S) = t(S)$ и v не входит в колику максимального размера, содержащую r (см. [19, рис. 3]), поэтому выполнено (а). Пусть теперь $r \ne 2$. Ясно, что $t(r, H) \le t(r, S)$. В силу строения графа $GK(S)$ найдется $\rho' \subseteq \rho$ такое, что $\{r\} \cup \rho'$ — коклика в $GK(S)$ размера $t(r, S)$. Если $r \ne 3$, то $\{r\} \cup \rho'$ останется кокликой в $GK(\overline{H})$, откуда следует п. (б). То же самое верно и для $r = 3$ при условии $\operatorname{Inndiag} S \cap \overline{H} = S$. Если же $\operatorname{Inndiag} S \cap \overline{H} > S$, то $t(3, H) = t(3, H/K) = 1$ (см., например, [30, теорема 2]). $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Рассмотрим простые числа $r_z(L) \in R_z(L)$ и $r_y(L) \in R_y(L)$. По лемме 3.3 у $r_z(L)$, $r_y(L)$ нет общих соседей в $GK(G)$. Также $r_z(L) \notin \pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$ и $r_y(L) \notin \pi(\overline{G}/S)$ в силу (3.2) и (3.4).

1. Пусть $S = {}^2G_2(u)$, где $u > 2$. Предположим, что $r \in \pi(K)$. Тогда r смежен с $r_z(L)$ в $GK(G)$ по лемме 2.10. Следовательно, $r \ne r_y(L)$ и $r_y(L) \notin \pi(K)$. Значит, $r_y(L) \in \pi(S)$, и $rr_y(L) \in \pi(G)$ по лемме 2.10. Получаем, что r — общий сосед чисел $r_z(L)$ и $r_y(L)$ в $GK(G)$, но это невозможно. Таким образом, $K = 1$, и тогда $t(G) = t(S) = 5$, $t(2, G) = t(2, S) = 3$ в силу [31, теорема 3]. Значит, $t(L) = 5$, поэтому L — одна из групп $L_9^\pm(q)$, $L_{10}^\pm(q)$, $S_{10}(q)$, $O_{11}(q)$, $S_{12}(q)$, $O_{13}(q)$, $O_{12}^-(q)$. Но тогда $t(2, L) = 2$; противоречие.

2. Пусть $S = {}^2F_4(u)$, где $u > 2$. Если $u = 8$, то $k(S) \in \{109, 37, 19\}$ и, значит, $k_z(L) \in \{109, 37, 19\}$. Тогда $L = U_6(7)$ по лемме 3.4, и $109 \in \pi(S) \setminus \pi(L)$; противоречие. Если $u > 8$, то, применяя лемму 2.10, так же, как в предыдущем случае, получаем, что $K = 1$. Тогда $t(2, G) = 4$ по [31, теорема 3]. Однако для всех $L \in \mathscr{L}$ выполнено $t(2, L) \le 3$.

3. Таким образом, $S = F_4(u)$ или $S = E_6^\tau(u)$. Покажем, что $t(L) \le 5$.

Если $S = F_4(2)$, то $k_z(L) \in \{13, 17\}$, но это невозможно по лемме 3.4. Тем самым $S \ne F_4(2)$ и, следовательно, $t(S) = 5$.

Предположим, что $t(L) = 6$. Тогда L — одна из групп $L_{12}^\pm(q)$, $L_{11}^\pm(q)$, $S_{14}(q)$, $O_{15}(q)$, $O_{14}^\pm(q)$, $O_{16}^+(q)$. В силу [19, табл. 2, 3] в $GK(L)$ найдется коклика ρ вида $\{r_i(q) \mid i \in I\}$, где $|I| = 6$ и $i \ge 3$, $i \ne 4$ для любого $i \in I$. Поскольку $\rho \not\subseteq \pi(S)$, найдется $j \in I$ такое, что $r_j(q) \in \pi(K) \cup \pi(\overline{G}/S)$. Тогда $\{r_i(q) \mid i \in I, i \ne j\} \subseteq \pi(S)$, и по лемме 2.10 хотя бы одно число из этого множества смежно с любым числом из $\pi(K)$ в $GK(G)$. Следовательно, $r_j(q) \notin \pi(K)$. Это означает, что $R_j(q) \cap (\pi(S) \cup \pi(K)) = \varnothing$, и поскольку $k_j(q) \in \omega(L)$, заключаем, что $k_j(q) \in \omega(\overline{G}/L)$.

Из условия $j \ge 3$ следует, что $k_j(q)$ взаимно просто с 6, поэтому $k_j(q)$ делит

l, где l определяется из равенства $u = v^l$. Значит, $l \geq k_j(q) > q^2/4$, где последнее неравенство выполнено по лемме 2.4. В S есть элемент порядка u^4+1, поэтому

$$\mathrm{meo}(S) > u^4 \geq 2^{4k_j(q)} > 2^{q^2}.$$

С другой стороны, $\mathrm{meo}(L) < 2q^{11}$ по лемме 2.6. В итоге получаем, что $2^{q^2-1} < q^{11}$, откуда $q = 3, 5$. Но тогда $k_j(q) \geq 7$ и, стало быть,

$$2^{28} \leq 2^{4k_j(q)} \leq \mathrm{meo}(S) < 2q^{11} \leq 2 \cdot 5^{11},$$

но это неверно.

4. Пусть $S = F_4(u)$, где $u > 2$. Отметим, что если u нечетно, то $r_z(L)$ не делит $(u^4+1)/2$, поскольку $u^4+1 \in \omega(S)$. Применяя лемму 2.10, видим, что $rr_z(L) \in \omega(G)$ для любого $r \in \pi(K)$. Это означает, что $R_y(L) \cap \pi(K) = \varnothing$ и, более того, $\pi(m_y(L)) \cap \pi(K) = \varnothing$, поскольку в противном случае у $r_z(L)$ и $r_y(L)$ были бы общие соседи в $GK(G)$. Следовательно, $R_y(L) \subseteq \pi(S)$ и $m_y(L) \in \omega(\overline{G})$. Поскольку $rr_y(L) \notin \omega(G)$ для любого $r \in \pi(K)$, применяя опять лемму 2.10, заключаем, что либо u нечетно, $t = (u^4+1)/2$ — простое число и $R_y(L) = \{t\}$, либо $K = 1$.

Рассмотрим первый случай. Ясно, что t не делит ни $|\overline{G}/S|$, ни порядки централизаторов полевых автоморфизмов группы S, поэтому $2t \in \mu(\overline{G})$. При этом $2t$ делит $m_y(L)$ и, как было отмечено выше, $m_y(L) \in \omega(\overline{G})$. Таким образом, $m_y(L) = 2t$, но это противоречит лемме 3.7.

Следовательно, $K = 1$. Применяя лемму 4.1 и тот факт, что $t(L) \leq 5$, видим, что $t(G) = 5$, $\pi(G) = \pi(S)$ и $t(r, G) = t(r, S)$ для любого $r \neq 2$. При этом $t(r, S) \in \{3, 5\}$ для всех $r \neq 2$ (см. [19, рис. 2]). С другой стороны, если $L = S_{12}(q), O_{13}(q)$, то $t(p, L) = 2$, а если $L \neq S_{12}(q), O_{13}(q)$ и $r \in R_4(q)$, то $t(r, L) = 4$ (см. замечание 1 по поводу $t(r_4(q), O_{12}^-(q))$). Это противоречие завершает рассмотрение случая $S = F_4(u)$.

5. Пусть $S = E_6^\tau(u)$. Предположим, что $r \in \pi(K)$. Поскольку r не может быть смежен и с $r_z(L)$, и с $r_y(L)$ в $GK(G)$, в силу леммы 2.10 получаем, что найдется $x \in \{z, y\}$ такой, что либо $(3, u-\tau) = 1$, $t = u^6 + \tau u^3 + 1$ — простое число, $R_x(L) = \{t\}$ и $tr \notin \omega(G)$, либо $r = v$, $R_x(L) \subseteq R_9(\tau u)$ и $vr_x(L) \notin \omega(G)$.

Пусть имеет место первый случай. Покажем, что t — изолированная вершина в $GK(G)$. Во-первых, t — изолированная вершина в $GK(S)$. Также ясно, что t не делит ни $|\overline{G}/S|$, ни $|K|$. В силу предыдущего абзаца $tr \notin \pi(G)$ для любого $r \in \pi(K)$. Предположим, что $tr \in \omega(\overline{G})$ для некоторого $r \in \pi(\overline{G}/S)$. Можно считать, что $|\overline{G} : S| = r$. Поскольку t не делит порядки централизаторов полевых автоморфизмов группы S и $(3, u-\tau) = 1$, получаем, что $r = 2$. Если $\tau = +$, то l нечетно в силу условия $(3, u-\tau) = 1$ и полевых автоморфизмов порядка 2 нет. Значит, в любом случае $\overline{G}$ — это расширение графовым автоморфизмом, но t не делит порядок централизаторов инволюций из этого расширения (см., например, [27, табл. 4.5.1 и предложение 4.9.2]).

Таким образом, граф $GK(L)$ несвязен и простое число $t = u^6 + \tau u^3 + 1$ является компонентой связности. По лемме 3.5 это невозможно, если L отлична от $U_5(q)$, $U_7(q)$.

Пусть $L = U_n(q)$, где $n = 5, 7$. Поскольку $k_z(L) \in \omega(S)$, по [5, лемма 4.3] имеем $\exp(S) > k_z(L)^{13/3}/3$. Тогда $\exp(L) > k_z(L)^{13/3}/3$, но это противоречит лемме 3.6.

Осталось рассмотреть случай, когда либо $\pi(K) = \{v\}$, $R_x(L) \subseteq R_9(\tau u)$ и $vr_x(q) \notin \omega(G)$, либо $K = 1$. Применяя лемму 4.2 и учитывая, что $t(L) \leq 5$,

получаем, что $t(L) = 5$, $\pi(G) = \pi(S)$ и $t(r, G) = t(r, S)$ для любого $r \neq 2, 3, v$. Более того, поскольку $t(3, L) > 1$, имеем $t(3, G) = t(3, S)$, если $v \neq 3$ или $K = 1$. Также $t(v, G) = 2$, если $K \neq 1$.

С другой стороны, $t(r, S) \in \{3, 5\}$ для любого $r \neq v, 3$ и $t(v, S) = 4$; при этом $t(3, S) = 3$ при $(u - \tau)_3 \neq 3$ и $v \neq 3$ и $t(3, S) = 4$ в противном случае (см. [19, рис. 3]).

Если $L = S_{12}(q), O_{13}(q)$, то $t(p, L) = 2$, откуда заключаем, что $p = 3$. Тогда $v \neq 3$ и $t(3, G) = t(3, S) \geq 3$; противоречие.

Пусть $L \neq S_{12}(q), O_{13}(q)$ и $s \in R_4(q)$. Тогда $t(s, L) = 4$. Поскольку $s > 3$, получаем, что $s = v$ и $K = 1$. Таким образом, $R_4(q) = \{v\}$ и $t(3, G) = t(3, S)$, откуда следует, что $t(r, G) \geq 3$ для любого $r \neq 2$.

Допустим, что $L \neq O_{12}^-(q)$. Мы придем к противоречию, показав, что для достаточно больших q найдется $r \in \pi(L)$ такое, что $r \neq 2$ и $t(r, L) = 2$, и рассмотрев небольшие q отдельно. Если $L = S_{10}(q), O_{11}(q)$ и $q > 3$, то в качестве r можно взять нечетный делитель числа $q^2 - 1$. Если $L = L_{10}^{\varepsilon}(q)$ и $q \neq 3, 9$, то подойдет $r \in \pi(q+\varepsilon)\backslash\{2\}$ или $r \in \pi(q-\varepsilon)\backslash\{2, 5\}$. Если $L = L_9^{\varepsilon}(q)$ и $q \neq 3, 7, 17$, то подойдет $r \in \pi(q+\varepsilon)\backslash\{2\}$ или $r \in \pi(q-\varepsilon)\backslash\{2, 3\}$. Отметим, что указанное простое число r найдется по лемме 2.5. Если $q = 3, 9, 7, 17$, то из условия $R_4(q) = \{v\}$ вытекает, что $q \neq 17$ и $v = 5, 41$. Теперь несложно проверить, что $R_8(v) \not\subseteq \pi(L)$, однако $R_8(v) \subseteq \pi(S)$.

Пусть, наконец, $L = O_{12}^-(q)$. Тогда $t(p, L) = 4$ и, значит, $p = 3$, $(u - \tau)_3 = 3$. Сравним коклики, содержащие $r_4(q) = v$ и $p = 3$, в $GK(L)$ и $GK(S)$. Напомним, что $\pi(G) = \pi(S)$, поэтому любая коклика из $GK(L)$ является кокликой в $GK(S)$. В $GK(L)$ число $r_4(q)$ образует коклику с $r_{10}(q)$, $r_5(q)$ и $r_8(q)$ (см. замечание 1). Следовательно, эти числа попадают по одному в $R_9(\tau u)$, $R_{12}(u)$ и $R_8(u)$ При этом p образует коклику с $r_{10}(q)$, $r_5(q)$, $r_{12}(q)$ в $GK(L)$, поэтому $r_{12}(q)$ лежит в том из множеств $R_9(\tau u)$, $R_{12}(u)$ и $R_8(u)$, в которое не попали $r_{10}(q)$ и $r_5(q)$. Но тогда $r_8(q)$ и $r_{12}(q)$ смежны в $GK(S)$. Это противоречие завершает доказательство теоремы 1.

§ 5. Классический фактор большой размерности

В данном параграфе сохраним обозначения и соглашения из § 3, однако будем действовать в условиях теоремы 2, т. е. $L = L_n^{\varepsilon}(q)$, где $n = 5, 6$ и $\varepsilon = -$ при $n = 5$. При этом по лемме 3.2 можно считать, что $q \geq 7$.

В силу теоремы 1 и леммы 3.1 можно считать, что S — одна из групп $L_m^{\tau}(u)$, $S_{2m}(u)$, $O_{2m+1}(u)$, $O_{2m}^{\tau}(u)$, где $m \geq 3$ в первых трех случаях и $m \geq 4$ в последнем. Как и прежде, через v обозначается простой делитель числа u, и пусть $u = v^l$.

Цель данного параграфа — свести доказательство теоремы 2 к случаю, когда S имеет не очень большую размерность. Граница между большой и малой размерностями примерно задается условием $t(S) = 4$, поэтому для удобства все классические группы данной неплотности (кроме групп $L_3^{\tau}(u)$) приведены в табл. 3. В втором столбце таблицы указана некоторая коклика ρ графа $GK(S)$ наибольшего размера (через r_i обозначено $r_i(u)$). В третьем столбце указаны возможности для $k(S)$.

Также в табл. 4 перечислены классические группы S с несвязным графом простых чисел, удовлетворяющие условию $t(S) \leq 4$ и отличные от $L_2(u)$, $S_4(u)$. В третьем столбце данной таблицы точка с запятой отделяет значения для разных u (таким образом, в последней строке написано, что $k(S) \in \{11, 17\}$ при

Таблица 3. Простые классические группы $S \neq L_3^\tau(u)$ с $t(S) = 4$

S	ρ	$k(S)$
$L_7(u), u \neq 2$	r_7, r_6, r_5, r_4	$k_7(u), k_6(u)$
$L_8(u), u \neq 2$	r_8, r_7, r_6, r_5	$k_8(u), k_7(u)$
$L_9(2)$	r_9, r_8, r_7, r_5	$17, 73$
$L_{10}(2)$	r_{10}, r_9, r_8, r_7	$11, 73$
$U_7(u)$	r_{14}, r_3, r_{10}, r_4	$k_{14}(u), k_3(u)$
$U_8(u)$	r_8, r_{14}, r_3, r_{10}	$k_8(u), k_{14}(u)$
$S_8(u), O_9(u), u \neq 2$	r_8, r_6, r_3, r_4	$k_8(u)$
$S_{10}(2)$	r_{10}, r_5, r_8, r_3	$11, 31$
$O_{10}^+(2)$	r_5, r_8, r_3, r_4	$17, 31$
$O_{10}^+(u), u \neq 2$	r_5, r_8, r_6, r_3	$k_5(u), k_8(u)$
$O_{12}^+(u)$	r_{10}, r_5, r_8, r_3	$k_5(u), k_{10}(u)$
$O_8^-(u), u \neq 2$	r_8, r_6, r_3, r_4	$k_3(u), k_6(u), k_8(u)$
$O_{10}^-(u), u \neq 2$	r_{10}, r_8, r_6, r_3	$k_8(u), k_{10}(u)$

Таблица 4. Простые классические группы $S \neq L_2(u), S_4(u)$ с $t(S) \leq 4$ и несвязным графом простых чисел

S	Условия	$k(S)$
$L_m^\tau(u)$	$m = 3$	$3, (u+\tau)_{2'}, k_3(\tau u)$
	$m = 5, 7$	$k_m(\tau u), k_{m-1}(\tau u)$
	$m = 4, 6, 8, (u-\tau) \mid m$	$k_m(\tau u), k_{m-1}(\tau u)$
$S_{2m}(u), O_{2m+1}(u)$	$m = 3, u = 2, 3$	$7; 13$
	$m = 4$	$k_8(u)$
	$m = 5, u = 2$	$11, 31$
$O_{2m}^+(u)$	$m = 4, u = 2, 3$	$7; 13$
	$m = 5, u = 2, 3, 5$	$17, 31; 11^2; 313, 11 \cdot 71$
	$m = 6, u = 2, 3$	$11, 31; 11^2$
$O_{2m}^-(u)$	$m = 4$	$k_3(u), k_6(u), k_8(u)$
	$m = 5, u = 2, 3$	$11, 17; 41, 61$

$u = 2$ и $k(S) \in \{41, 61\}$ при $u = 3$).

Наконец, нам потребуется полный спектр группы L.

Лемма 5.1. *Положим* $d = (n, q - \varepsilon)$.

(а) $\omega\big(L_6^\varepsilon(q)\big)$ *состоит из всех делителей чисел* $(q^6 - 1)/(d(q - \varepsilon))$, $(q^5 - \varepsilon)/d$, $(q^3 - \varepsilon)(q + \varepsilon)$, $q^4 - 1$, $p(q^4 - 1)/d$, $p(q^3 - 1)$, $p(q^2 - 1)$, 25 (*только при* $p = 5$), $9(q^2 - 1)/d$ (*только при* $p = 3$).

(б) $\omega(U_5(q))$ *состоит из всех делителей чисел* $(q^5 + 1)/(d(q + 1))$, $(q^4 - 1)/d$, $(q^3 + 1)(q - 1)/d$, $p(q^3 + 1)/d$, $p(q^2 - 1)$, $9(q + 1)/d$ (*только при* $p = 3$).

Доказательство. См. [32, следствие 3]. $\square$

Из лемм 5.1 и 2.1 несложно вывести следующее утверждение.

Лемма 5.2. *Пусть* $r, s \in \pi(L)$, $r \neq s$, $r \geq 5$ *и* $s \geq 7$.

(а) *Если* $r \neq p$ *и* $\exp_r(L) > (q^k - \varepsilon^k)_r$, *где* $k = e(r, \varepsilon q)$, *то* $r = 5$, $k = 1$ *и* $L = L_6^\varepsilon(q)$.

(б) *Если* $rs \in \omega(L)$ *и* $\exp_r(L) \cdot \exp_s(L) \notin \omega(L)$, *то* $r = 5$, 5 *делит* $p(q-\varepsilon)$ *и* $L = L_6^{\varepsilon}(q)$.

Приступим к доказательству теоремы. Согласно табл. 1 если $n = 5$, то $k_z(L) = m_z(L) = k_{10}(q)$, поэтому граф $GK(L)$ несвязен, откуда вытекает, что $GK(S)$ тоже несвязен, $k_{10}(q) = k(S)$ и $\pi(k(S))$ — компонента связности графа $GK(S)$. Если $n = 6$, то $\{k_z(L), k_y(L)\} = \{k_6(\varepsilon q), k_5(\varepsilon q)\}$.

Лемма 5.3. *Группа* S *отлична от* $L_m(2)$, *где* $9 \le m \le 11$. *Если* $t(S) \le 4$ *и* $GK(S)$ *несвязен, то* S — *одна из групп* $L_m^{\tau}(u)$, *где* $m = 3, 5, 7$, $S_8(u)$, $O_9(u)$, $O_8^-(u)$.

Доказательство. Предположим противное. Как видно из табл. 4, кроме $L_m(2)$, где $9 \le m \le 11$, нужно рассмотреть еще конечное число возможностей для S. Напомним, что $k_z(L)$ делит $k(S)$ и любой $r_z(L)$ сравним с 1 по модулю z. Вычисляя $k(S)$, беря только подходящие простые делители, а также применяя лемму 3.4, заключаем, что либо $S = L_{10}(2)$, $L_9(2)$ и $L = L_6(9)$, либо $S = L_8(2)$ и $L = U_6(19)$, либо $S = L_8(9)$, $U_8(3)$ и $L = L_6(41)$. В любом из этих случаев $\pi(S) \not\subseteq \pi(L)$; противоречие. $\square$

Лемма 5.4. *Если* $L = L_6^{\varepsilon}(q)$, *то* $v \notin R_y(L)$.

Доказательство. Пусть $v \in R_y(L)$. Тогда $k_z(L) = m_z(L)$ в силу [5, лемма 3.5] и того факта, что $S \ne L_2(u)$. Значит, L имеет несвязный граф простых чисел, откуда $L = L_6(7)$. Тогда $2081 = k_z(L) \in \pi(S)$ и $v = r_y(L) = 43$. Поскольку $e(2081, 43) = 65$, несложно понять, что $\pi(S) \not\subseteq \pi(L)$. $\square$

Лемма 5.5. *Пусть* $r \in \pi(K)$.

(а) *Если* $r \ne v$ *или* $S = L_m^{\tau}(u)$, *где* $m \ge 3$ *нечетно, то* $t(r, G) \le 2$ *и* r *делит* $q^2 - 1$.

(б) *Если* $L = L_6^{\varepsilon}(q)$, *то* $R_y(\varepsilon q) \cap (\pi(K) \cap \pi(\overline{G}/S)) = \varnothing$.

(в) *Если* $L = L_6^{\varepsilon}(q)$ *и* $r \ne v$, *то* r *делит* $q - \epsilon$, *где* $\epsilon = \varepsilon$, *если* $r_5(\varepsilon q)$ *делит порядок собственной параболической подгруппы группы* S, *и* $\epsilon = -\varepsilon$ *в противном случае.*

Доказательство. (а) Из леммы 5.1 (см. также рис. 4 и 5 ниже) видно, что $t(s, G) = 3$ для любого $s \in \pi(G) \setminus \pi(q^2 - 1)$, поэтому достаточно показать, что $t(r, G) \le 2$.

Предположим, что $r \ne v$ и $\{r, t, s\}$ — коклика в $GK(G)$ размера 3. Тогда числа t, s лежат в $\pi(S)$ по лемме 2.7 и хотя бы одно из них делит порядок собственной параболической подгруппы группы S, а значит, смежно с r в $GK(G)$ по лемме 2.11; противоречие.

Пусть $r = v$ и $S = L_m^{\tau}(u)$, где $m \ge 3$ нечетно. Покажем, что v смежно с любым числом $s \in \pi(G) \setminus (R_m(\tau u) \cup \{v\})$. Если $s \in \pi(\overline{G}/S) \setminus \pi(S)$, то s — порядок полевого автоморфизма и $sv \in \omega(G)$. Если $s \in \pi(K)$, то $sv \in \omega(G)$ в силу нильпотентности группы K. Если $s \in \pi(S)$ и $s \notin R_{m-1}(\tau u)$, то $sv \in \omega(S)$. Если же $s \in R_{m-1}(\tau u)$, то $sv \in \omega(G)$ по [33, следствие 9(2)].

(б) Вытекает из п. (а), леммы 5.4 и (3.4).

(в) В силу п. (б) оба числа $r_z(L)$ и $r_y(L)$ лежат в $\pi(S)$ и хотя бы одно из них, скажем $r_x(L)$, делит порядок собственной параболической подгруппы группы S. Тогда $rr_x(L) \in \omega(G)$ по лемме 2.11, откуда следует, что r делит $m_x(L)$. Значит, r делит $(m_x(L), q^2 - 1))$. Осталось отметить, что $(q^5 - \varepsilon, q^2 - 1) = q - \varepsilon$ и

$$\left(\frac{q^6 - 1}{(q-\varepsilon)(6, q-\varepsilon)}, q^2 - 1\right) = \frac{q+\varepsilon}{2},$$

где последнее равенство несложно проверить с помощью леммы 2.1. $\square$

Лемма 5.6. *Если $r \in \pi(S)$ и r не делит $v(u \pm 1)$, то $\exp_r(S) = (u^k - 1)_r$ для некоторого k и, в частности, $\exp_r(S) > (l)_r$.*

Доказательство. Поскольку r не делит $v(u \pm 1)$ и S — классическая группа, $\exp_r(S)$ равно $([u^{k_1} \pm 1, \dots, u^{k_t} \pm 1])_r$ для некоторых $k_1, \dots, k_t$. Значит, $\exp_r(S) = (u^{2k_i} - 1)_r$ для некоторого $1 \le i \le t$, и в качестве k можно взять $2k_i$. Осталось заметить, что $(u^k - 1)_r = (v^{lk} - 1)_r = (lk)_r(v^{(lk)_{r'}} - 1)_r > (l)_r$ в силу леммы 2.1. $\square$

Лемма 5.7. *Пусть $r \ge 5$, $s \ge 7$ — различные простые числа из $\pi(S)$, s, r не делят $v(u \pm 1)$ и $rs \in \omega(G) \setminus \omega(S)$. Если $r \ge 7$ или $L = U_5(q)$, или 5 не делит $p(q - \varepsilon)$, то хотя бы одно из чисел r и s лежит в $\pi(K)$.*

Доказательство. Предположим противное. По лемме 5.2 число $\exp_r(L) \cdot \exp_s(L)$ лежит в $\omega(G)$, а значит, и в $\omega(\overline{G})$. Поскольку $rs \notin \omega(S)$, одно из чисел $\exp_r(L)$ и $\exp_s(L)$, скажем первое, лежит в $\omega(\overline{G}/S)$, следовательно, делит l. Но тогда $\exp_r(S) > \exp_r(L)$ в силу леммы 5.6; противоречие. $\square$

Предложение 5.8. $t(S) \le 4$.

Доказательство. Предположим, что $t(S) \ge 5$, и пусть m — нескрученный лиев ранг группы S (т. е. имеет тот же смысл, что и в лемме 2.6). Если S — линейная или унитарная группа, то $t(S) \ge (m+1)/2$ (отметим, что $S \ne L_{11}(2)$ по лемме 5.3). Если S — симплектическая или ортогональная, то $t(S) \ge (3m-2)/4 \ge (m+1)/2$. Таким образом, в любом случае $m \le 2t(S) - 1$.

Поскольку $k_5(\varepsilon q) \in \omega(S)$ (это следует из леммы 2.7 при $z = 5$ и из п. (б) леммы 5.5 при $z = 6$), применяя лемму 2.6, оцениваем q сверху следующим образом:

$$k_5(\varepsilon q) < 2u^m \le 2u^{2t(S)-1}. \tag{5.1}$$

Теперь оценим q в терминах u и $t(S)$ снизу. Используя [19, табл. 3], несложно проверить, что найдется множество индексов I такое, что $\{r_i(u) \mid i \in I\}$ — коклика размера $t(S)$ в $GK(S)$, $i \ge 3$ и $i \ne 4$ для любого $i \in I$. В частности, $r_i(u) \ge 7$ для любого $i \in I$.

Положим $I' = \{i \in I \mid R_i(u) \setminus \pi(K) \ne \varnothing\}$ и для $i \in I'$ обозначим через $r_i^0(u)$ какой-нибудь элемент из $R_i(u) \setminus \pi(K)$. Тогда $\{r_i^0(u) \mid i \in I'\}$ — коклика в $GK(G)$ в силу леммы 5.7, следовательно, $|I'| \le 3$ и $|I \setminus I'| \ge t(S) - 3$.

Если $i \in I \setminus I'$, то $R_i(u) \subseteq \pi(K)$ и, значит, по лемме 5.5 выполнено $R_i(u) \subseteq \pi(a)$, где $a = q^2 - 1$ при $L = U_5(q)$ и $a = q - \epsilon$ для фиксированного $\epsilon \in \{+1, -1\}$ при $L = L_6^{\varepsilon}(q)$. При этом для любого $r \in R_i(u)$ имеем

$$(k_i(u))_r \le \exp_r(S) \le \exp_r(L) = (a)_r,$$

где последнее равенство следует из п. (а) леммы 5.2. Значит, $k_i(u)$ делит b, где $b = (a)_{\{2,3,5\}'}$. Таким образом,

$$\prod_{i \in I \setminus I'} k_i(u) \le b.$$

Оценивая каждое из $k_i(u)$ с помощью леммы‘2.4, видим, что

$$b \ge \prod_{i \in I \setminus I'} k_i(u) \ge \frac{u^{2(|I \setminus I'|)}}{c} \ge \frac{u^{2(t(S)-3)}}{c}, \tag{5.2}$$

где $c = 1$ при $u = 2$, $c = 2$ при $u = 3$ и $c = 4$ при $u > 3$.

Для дальнейшего нам потребуется связать b и $k_5(\varepsilon q)$.

Лемма 5.9. *Пусть $q \geq 7$ — степень нечетного простого числа и $\varepsilon \in \{+,-\}$.*

(а) *Если $b = (q^2-1)_{\{2,3\}'}/(5, q^2-1)$, то $k_{10}(q) > 61b^2$.*

(б) *Если $b = (q-\epsilon)_{\{2,3,5\}'}$ для некоторого $\epsilon \in \{+,-\}$, то $k_5(\varepsilon q) > 32b^4/15$. Если при этом $\epsilon = \varepsilon$, то $k_5(\varepsilon q) > 32b^4/3$.*

(в) *Если $b = (q-\epsilon)_{\{2,3\}'}$ для некоторого $\epsilon \in \{+,-\}$, то либо $k_5(\varepsilon q) > 32b^4/15$, либо $q = 9$ и $\varepsilon = -$.*

Доказательство. Отметим, что

$$k_5(\varepsilon q) \geq \frac{q^5+1}{5(q+1)}$$

для любого q и что $k_5(\varepsilon q) \geq 1181$ для $q \geq 7$.

(а) Ясно, что $(q^2-1)_{2'} \leq (q^2-1)/8$. Если $q \geq 27$, то $(q^5+1)/(q+1) > 61((q^2-1)/8)^2$, следовательно,

$$k_{10}(q)(5, q+1) = \frac{q^5+1}{q+1} > 61\left(\frac{q^2-1}{8}\right)^2 \geq 61b^2(5, q^2-1)^2.$$

Для $q \leq 25$ требуемое неравенство проверяется непосредственно.

(б) Если $q \leq 11$, то $b = 1$, поэтому требуемое неравенство выполнено. Предположим, что $q \geq 13$. Тогда $q^5+1 > 2(q+1)^5/3$, поэтому

$$k_5(\varepsilon q) \geq \frac{q^5+1}{5(q+1)} > \frac{2(q+1)^4}{15} = \frac{32}{15}\cdot\left(\frac{q+1}{2}\right)^4.$$

При этом $(q-\epsilon)_{2'} \leq (q+1)/2$.

Более того,

$$k_5(\varepsilon q) \geq \frac{q^5+1}{(5, q-\varepsilon)(q+1)} > \frac{2(q+1)^4}{3(5, q-\varepsilon)} = \frac{32(5, q-\varepsilon)^3}{3}\cdot\left(\frac{q+1}{2(5, q-\varepsilon)}\right)^4,$$

и осталось заметить, что $(q-\varepsilon)_{\{2,3,5\}'} \leq (q-\varepsilon)/(2(5, q-\varepsilon))$.

(в) При $q \geq 13$ подходит доказательство из п. (б). Если $q \leq 11$ и $b > 1$, то $b = 5$ и $q = 9, 11$. Если $q = 9$ и $\varepsilon = +$ или $q = 11$, то $k_5(\varepsilon q) > 32 \cdot 5^4/15$. $\square$

Вернемся к доказательству предложения.

Пусть $L = U_5(q)$. Тогда из (5.2), п. (а) леммы 5.9 и (5.1) вытекает, что

$$\frac{u^{4(t(S)-3)}}{c^2} \leq b^2 < \frac{k_{10}(q)}{61} \leq \frac{2u^{2t(S)-1}}{61},$$

откуда $4t(S) - 12 < 2t(S) - 1$ и, значит, $t(S) = 5$. При этом S имеет несвязный граф простых чисел, откуда $S = S_{10}(3)$, $O_{11}(3)$. Тогда $k_z(L) = k(S) = 11^2$, и $q = 3$ по лемме 3.4; противоречие.

Если $L = L_6^{\varepsilon}(q)$, то аналогичным образом, заменяя п. (а) леммы 5.9 на п. (б), получаем, что

$$\frac{u^{8(t(S)-3)}}{c^4} \leq b^4 < \frac{15k_5(\varepsilon q)}{32} \leq \frac{15u^{2t(S)-1}}{16},$$

откуда

$$u^{8(t(S)-3)} \leq \frac{15c^4}{16}u^{2t(S)-1}.$$

Несложно проверить, что $\frac{15c^4}{16} < u^4$, поэтому $8(t(S)-3) < 2t(S)+3$, откуда $6t(S) < 27$; противоречие. $\square$

Предложение 5.10. *Если $L = L_6^{\varepsilon}(q)$, то S отлична от групп $L_7^{\tau}(u)$, $L_8^{\tau}(u)$, $S_8(u)$, $O_9(u)$, $O_8^-(u)$, $O_{10}^{\pm}(u)$, $O_{12}^+(u)$. В частности, $t(S) \leq 3$ или $S = L_3^{\tau}(u)$.*

Доказательство. **1.** Предположим, что S — одна из групп $L_8^{\tau}(u)$, $O_{10}^{\pm}(u)$, $O_{12}^+(u)$. Тогда S отлична от $L_8(2)$, $O_{10}^{\pm}(2)$ по лемме 5.3, и согласно табл. 3 найдется множество индексов I такое, что $\{r_i(u) \mid i \in I\}$ — коклика размера 4 в $GK(S)$, $i \geq 3$ и $i \neq 4$ для любого $i \in I$. Рассуждая так же, как при доказательстве предложения 5.8, заключаем, что найдется $i \in I$ такое, что $R_i(u) \subseteq \pi(K)$ и $k_i(u)$ делит b, где $b = (q-\epsilon)_{\{2,3,5\}'}$ для некоторого $\epsilon \in \{+1, -1\}$.

Если $S = O_{10}^{\pm}(u)$, $O_{12}^+(u)$, то, применяя п. (б) леммы 5.9 и лемму 2.6, получаем, что

$$(k_i(u))^4 \leq b^4 < \frac{15k_5(\varepsilon q)}{32} \leq \frac{15u^m}{16}, \tag{5.3}$$

где $m = 5, 6$ соответственно. В частности, $k_i(u) < u^{3/2}$, откуда $i = 3, 6$. Отметим, что $i = 3$ при $m = 6$ (см. табл. 3). Теперь из (5.3) следует, что $u = 5$ при $m = 5$ и $u = 4$ при $m = 6$. Эти случаи, а также все случаи подобного рода, возникающие далее, будут рассмотрены ниже в п. 3.

Пусть $S = L_8^{\tau}(u)$. Предположим, что ни одно число из $R_5(\varepsilon q)$ не делит порядок собственной параболической подгруппы группы S. Тогда $k_5(\varepsilon q)$ делит $k_8(u)$ или $k_{14}(u)$, следовательно, $k_5(\varepsilon q) \leq u^6$. Используя это неравенство вместо леммы 2.6, получаем, что

$$(k_i(u))^4 \leq b^4 < \frac{15k_5(\varepsilon q)}{32} \leq \frac{15u^6}{32},$$

откуда $i = 6$ и $u = 5$. Учитывая, что $6 \notin I$ при $S = U_8(u)$, заключаем, что $S = L_8(5)$ и $k_5(\varepsilon q)$ делит $k_8(5) = 313$. Это противоречит тому, что $r_5(\varepsilon q) \equiv 1 \pmod 5$.

Пусть теперь некоторый $r_5(\varepsilon q)$ делит порядок собственной параболической подгруппы группы S. Тогда $\epsilon = \varepsilon$ по лемме 5.5. Применяя п. (б) леммы 5.9 с условием $\epsilon = \varepsilon$, заключаем, что

$$(k_i(u))^4 \leq b^4 < \frac{3k_5(\varepsilon q)}{32} \leq \frac{3u^7}{16}.$$

Решая это неравенство, получаем, что $u = 4, 7$ при $i = 3$ и $u = 5, 8, 11, 17$ при $i = 6$.

2. Пусть S — одна из групп $L_7^{\tau}(u)$, $S_8(u)$, $O_9(u)$, $O_8^-(u)$. Тогда $S \neq L_7(2)$, $S_8(2)$, $O_8^-(2)$. Положим $I = \{7, 6, 5, 4\}$ при $S = L_7(u)$, $I = \{14, 10, 4, 3\}$ при $S = U_7(u)$ и $I = \{8, 6, 4, 3\}$ в остальных случаях. Тогда, как видно из табл. 3, множество $\rho = \{r_i(u) \mid i \in I\}$ — коклика в $GK(S)$.

Отличие от предыдущих случаев состоит в том, что $4 \in I$ и, значит, 5 может лежать в ρ. Тем не менее, рассуждая так же, как при доказательстве предложения 5.8, находим $i \in I$ такое, что $(k_i(u))_{5'}$ делит a, где $a = q - \epsilon$ для $\epsilon \in \{+, -\}$. Более того, поскольку рассуждение основывается на лемме 5.7 и п. (а) леммы 5.2, если $k_i(u)$ не делит a, то $i = 4$, $5 \in R_4(u)$ и 5 делит $p(q - \varepsilon)$.

Предположим сперва, что $k_i(u)$ делит a. Тогда $k_i(u)$ делит b, где $b = (a)_{\{2,3\}'}$. Если $q = 9$ и $\varepsilon = -$, то $k_z(L) = 1181$ и $b = 5$. Из условий, что $k_i(u)$ делит b и $v \neq p$, получаем, что $u = 2$, и тогда $1181 \notin \pi(S)$. Следовательно, можно применить неравенство из п. (в) леммы 5.9 и прийти к следующему:

$$(k_i(u))^4 \leq b^4 \leq \frac{15k_5(\varepsilon q)}{32} \leq \frac{15u^m}{16},$$

где $m = 6$ при $S = L_7^\tau(u)$ и $m = 4$ в остальных случаях. Отсюда видно, что $m = 6$ и либо $i = 6$, $u = 5, 8$, либо $i = 3$, $u = 4$, либо $i = 4$, $u = 3$.

Пусть теперь $R_j(u) \not\subseteq \pi(K)$ для $j \in I \setminus \{4\}$, $5 \in R_4(u)$, 5 делит $p(q - \varepsilon)$ и $(k_4(u))_5 > (a)_5$. Заметим, что $\exp_5(\overline{G}) = \exp_5(S) = (k_4(u))_5$, где первое равенство доказано, например, в [10, лемма 3.10].

Если $p = 5$, то $25 \in \mu(G)$ и 5 не делит $|K|$. Значит, $25 = \exp_5(S) = (k_4(u))_5$, и тогда $(u^4 - 1)/(2, u - 1) \in \omega(S) \setminus \omega(G)$.

Пусть 5 делит $q - \varepsilon$. Тогда $\exp_5(G) = (q^5 - \varepsilon)_5 = 5(q - \varepsilon)_5$. Если $5 \in \pi(K)$, то $\epsilon = \varepsilon$ и $5(k_4(u))_5 \in \omega(G)$. Значит, $5(k_4(u))_5 \le \exp_5(G) = 5(a)_5$; противоречие.

Следовательно, $5 \notin \pi(K)$. Числа $r_j^0(u) \in R_j(u) \setminus \pi(K)$, где $j \in I \setminus \{4\}$, образуют коклику размера 3 в $GK(G)$. Любая такая коклика содержит $r_5(\varepsilon q)$, и пусть r — то из трех чисел $r_j^0(u)$, которое попало в $R_5(\varepsilon q)$. Тогда $\exp_5(G) \cdot \exp_r(G) \in \omega(G)$. Поскольку $5, r \notin \pi(K)$, приходим к противоречию так же, как при доказательстве леммы 5.7.

3. Таким образом, осталось рассмотреть случаи, когда S — одна из групп $O_{12}^+(4)$, $O_{10}^\pm(5)$, $L_8(u)$, где $u = 5, 8, 11, 17$, $U_8(4)$, $U_8(7)$, $L_7(3)$, $L_7(5)$, $L_7(8)$, $U_7(3)$, $U_7(4)$. Группы $O_{10}^+(5)$, $L_8(5)$ и $U_8(7)$ имеют несвязный граф простых чисел и исключены в лемме 5.3. Считая для оставшихся групп $k(S)$ и учитывая, что $k_z(L)$ делит $k(S)$, приходим к тому, что либо $S = L_7(8)$ и $L = U_6(7), U_6(19)$, либо $S = L_8(8)$ и $L = U_6(19)$, либо $S = U_7(3)$ и $L = L_6(41)$. В любом из этих случаев $\pi(S) \not\subseteq \pi(L)$. $\square$

Предложение 5.11. *Если $L = U_5(q)$, то $S \ne S_8(u)$, $O_9(u)$, $O_8^-(u)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда

$$\frac{q^5 + 1}{(5, q + 1)(q + 1)} = k_{10}(q) = k_4(u) = \frac{u^4 + 1}{(2, u - 1)}.$$

Отметим, что

$$\frac{q^5 + 1}{q + 1} - 1 = \frac{q(q^4 - 1)}{q + 1}, \quad \frac{q^5 + 1}{5(q + 1)} - 1 = \frac{(q + 1)(q^3 - 2q^2 + 3q - 4)}{5}, \tag{5.4}$$

причем $q^3 - 2q^2 + 3q - 4$ делится на 5, если 5 делит $q + 1$.

Если u четно, то $k_{10}(q) - 1 = u^4$, но это противоречит предыдущему абзацу. Значит, u нечетно и $k_{10}(q) - 1 = (u^4 - 1)/2 \in \omega(S)$. Поскольку $pr_4(q) \notin \omega(L)$, получаем, что $(q + 1, 5) = 5$ и $f = (q + 1)(q^3 - 2q^2 + 3q - 4)/5$ лежит в $\omega(L)$. Учитывая, что $(f)_5 = (q + 1)_5$, и применяя леммы 5.1 и 2.1, приходим к тому, что $(q^3 - 2q^2 + 3q - 4)/5$ делит $q - 1$; противоречие. $\square$

§ 6. Классический фактор малой размерности

В этом параграфе будет завершено доказательство теоремы 2. В силу предложений 5.8, 5.10, 5.11, а также леммы 5.3 осталось проверить, что S отлична от групп $L_m^\tau(u)$, где $3 \le m \le 6$, $S_6(u)$, $O_7(u)$, $O_8^+(u)$ при $L = L_6^\varepsilon(q)$ и от групп $L_m^\tau(u)$, где $m = 3, 5, 7$, при $L = U_5(u)$.

Доказательство основано на рассмотрении коклик в графе $GK(S)$, поэтому для удобства на рис. 1–6 изображены компактные формы графов простых чисел указанных групп (отметим, что $GK(S_6(u)) = GK(O_7(u)) = GK(O_8^+(u))$ для любого u). В компактной форме графа $GK(G)$ вершинами являются множества простых чисел, образующие разбиение множества $\pi(G)$. Все числа из одной вершины компактной формы смежны друг с другом в $GK(G)$. Ребро между

двумя вершинами A и B компактной формы означает, что любое число из A смежно с любой вершиной из B в $GK(G)$. Таким образом, два различных числа из $\pi(G)$ смежны в $GK(G)$ тогда и только тогда, когда они лежат либо в одной вершине, либо в смежных вершинах компактной формы. Если $A = \varnothing$, то нужно удалить данную вершину и все инцидентные ей ребра из компактной формы.

Лемма 6.1. *Если $R_3(\varepsilon q) \cap \pi(\overline{G}/S) \neq \varnothing$, то выполнены следующие утверждения:*

(а) $R_4(q) \cap (\pi(\overline{G}/S) \cup \pi(K)) = \varnothing$ *и* $v \notin R_4(q)$;

(б) *для некоторого $r \in R_4(q)$ силовская r-подгруппа группы S не циклическая;*

(в) 5 *делит* $q - \varepsilon$;

(г) $p \notin \pi(\overline{G}/S)$.

Доказательство. (а) Пусть $s \in R_3(\varepsilon q) \cap \pi(\overline{G}/S)$. Поскольку $s \geq 7$, либо s — порядок полевого автоморфизма, либо $s = 7$ и $S = L_7^\tau(u)$. В любом случае $sv \in \omega(G)$, следовательно, $v \notin R_4(q)$. Кроме того, $\{r_3(\varepsilon q), r_4(\varepsilon q), r_5(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(G)$, поэтому $R_4(q) \cap (\pi(\overline{G}/S) \cup \pi(K)) = \varnothing$ по лемме 2.7.

(б) Предположим, что для любого $r \in R_4(q)$ силовская r-подгруппа R группы S циклическая. Тогда ее порядок совпадает с $\exp_r(S) = \exp_r(L)$. В силу аргумента Фраттини в $N_{\overline{G}}(R)$ есть элемент порядка s, и он действует на R без неподвижных точек, поскольку $rs \notin \omega(G)$. Значит, $\exp_r(L) \equiv 1 \pmod s$, и, беря произведение по всем $r \in R_z(L)$, получаем, что $k_4(q) - 1 = (q^2 - 1)/2$ делится на s; противоречие.

(в), (г) Предположим, что $k_z(L) = k_5(\varepsilon q)$. Поскольку для любого $r \in \pi(S)$ такого, что $2r \notin \pi(S)$, силовская r-подгруппа группы S циклическая, рассуждая так же, как в предыдущем абзаце, видим, что s делит $k_5(\varepsilon q) - 1$. Значит, 5 делит $q - \varepsilon$, поскольку в противном случае $k_3(\varepsilon q)$ взаимно просто с $k_5(\varepsilon q) - 1$.

Пусть $L = L_6^\varepsilon(q)$ и $k_z(L) = k_6(\varepsilon q)$. Тогда $S \neq L_7^\tau(u)$. Возьмем r из п. (б) и рассмотрим коклику $\{r_6(\varepsilon q), r, r_5(\varepsilon q)\}$ графа $GK(S)$. Несложно проверить, что в любой коклике размера три графа $GK(S)$, не содержащей 3, не может быть двух чисел таких, что соответствующая силовская подгруппа группы S нециклическая. Следовательно, силовская $r_5(\varepsilon q)$-подгруппа группы S циклическая для любого $r_5(\varepsilon q)$, и применимо рассуждение предыдущего абзаца.

В любом случае если $p \in \pi(\overline{G}/S)$, то p также делит $k_5(\varepsilon q) - 1$, но это неверно при $(5, q - \varepsilon) = 5$ (ср. с (5.4)). $\square$

Предложение 6.2. *Утверждение теоремы 2 верно для $L = U_5(q)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $S = L_m^\tau(u)$, где $m = 3, 5, 7$, и $k_{10}(q) = k_m(\tau u)$. Отметим, что $\pi(K) \subseteq \pi(q^2 - 1)$ в силу леммы 5.5, а также что $R_4(q) \cap \pi(\overline{G}/S) = \varnothing$ в силу (3.4).

Предположим, что $(5, q+1) = (m, u-\tau)$. Вычитая из обеих частей равенства $k_{10}(q) = k_m(\tau u)$ единицу, получаем

$$\frac{q(q^4 - 1)}{q + 1} = \frac{u(u^{m-1} - 1)}{u - \tau}. \tag{6.1}$$

Числа p и $r_4(q)$ не смежны в $GK(G)$. С другой стороны, любая пара различных простых делителей правой части равенства (6.1), произведение которых не лежит в $\omega(S)$, имеет вид v и $r_{m-1}(u)$. Значит, $p \in R_{m-1}(\tau u)$ и $k_4(q) = u$. Тогда из (6.1) следует, что $R_{m-1}(\tau u) \subseteq \pi(q-1) \cup \{p\}$. С другой стороны, $R_3(\varepsilon q) \subseteq \pi(S)$

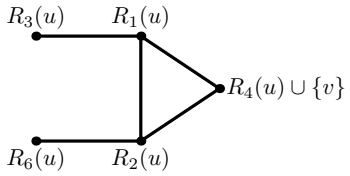
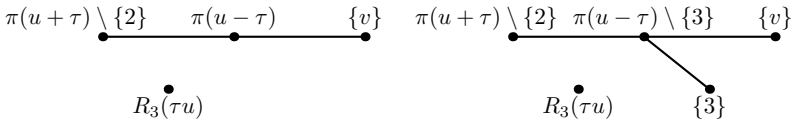
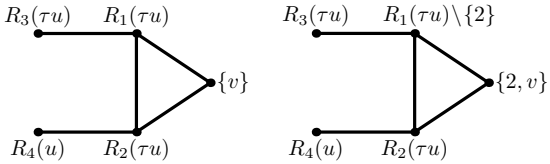


Рис. 1. Компактная форма графа $GK(S_6(u))$.



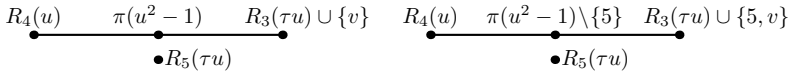
(а) $(u-\tau)_3 \neq 3$. (б) $(u-\tau)_3 = 3$.

Рис. 2. Компактная форма графа $GK(L_3^\tau(u))$.



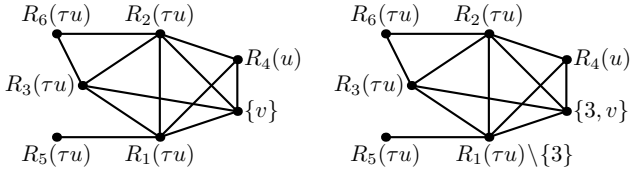
(а) $(u-\tau)_2 \neq 4$. (б) $(u-\tau)_2 = 4$.

Рис. 3. Компактная форма графа $GK(L_4^\tau(u))$.



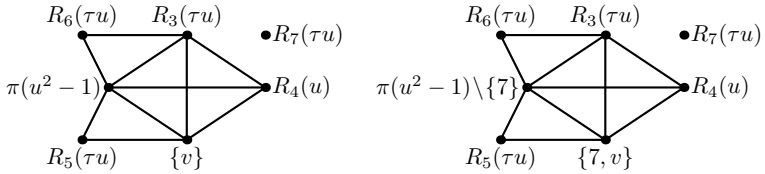
(а) $(u-\tau)_5 \neq 5$. (б) $(u-\tau)_5 = 5$.

Рис. 4. Компактная форма графа $GK(L_5^\tau(u))$.



(а) $(u-\tau)_3 \neq 3$. (б) $(u-\tau)_3 = 3$.

Рис. 5. Компактная форма графа $GK(L_6^\tau(u))$.



(а) $(u-\tau)_7 \neq 7$. (б) $(u-\tau)_7 = 7$.

Рис. 6. Компактная форма графа $GK(L_7^\tau(u))$.

по п. (а) леммы 6.1, и поскольку $R_3(\varepsilon q) \cap (R_m(\tau) \cup R_{m-1}(\tau u)) = \varnothing$, получаем, что $r_3(\varepsilon q)$ смежно с $r_4(q) = v$; противоречие.

Таким образом, далее считаем, что $(5, q+1) \neq (m, u\tau)$. Пусть $t = (u^m - \tau)/(u-\tau)$. Тогда

$$(m, u-\tau)\frac{q(q^4-1)}{q+1} = (5, q+1)\cdot t - (m, u-\tau).$$

Следовательно, $b = (5, q+1)\cdot t - (m, u-\tau)$ делится на $k_4(q)$. Кроме того, $k_4(q) \in \omega(S)$. Значит, $k_4(q)$ делит (b, a) для некоторого $a \in \omega(S)$.

Отметим, что $v \notin R_4(q)$. Действительно, в противном случае $v \geq 5$, при этом $t \equiv 1 \pmod v$ и, значит, $b \equiv (5, q+1) - (m, u-\tau) \pmod v$. Следовательно, v делит $|(5, q+1) - (m, u-\tau)| \in \{2, 4, 6\}$; противоречие. Также отметим, что $t(r, S) \geq 3$ для любого $r \in R_4(q)$, поскольку по лемме 6.1 хотя бы одно из чисел $r_3(\varepsilon q)$ и p лежит в $\pi(S)$.

1. Пусть $m = 3$. Тогда, как видно из рис. 2, $R_4(q) \subseteq \pi(u+\tau)$. Значит, $a = u+\tau$. Поскольку $t \equiv 1 \pmod{u+\tau}$, приходим к противоречию так же, как при $v \in R_4(q)$.

2. Пусть $m = 5$. Тогда либо $R_4(q) \subseteq R_4(u)$ и $a = u^2+1$, либо $R_4(q) \subseteq R_3(\tau u)$ и $a = u^2+\tau u+1$, либо $(u-\tau)_5 = 5$, $5 \in R_4(q) \subseteq R_3(\tau u) \cup \{5\}$ и $a = 5(u^2+\tau u+1)$. Первый случай невозможен, так как $t \equiv 1 \pmod{u^2+1}$.

Во втором случае $t \equiv \tau u + 1 \pmod a$ и $k_4(q)$ делит одно из чисел

$$(5t-1, u^2+\tau u+1) = (5u+4\tau, u^2+\tau u+1) = (5u+4\tau, 21),$$

$$(t-5, u^2+\tau u+1) = (u-4\tau, u^2+\tau u+1) = (u-4\tau, 21),$$

но $(k_4(q), 21) = 1$.

В третьем случае $b = t-5$ и $k_4(q)$ делит

$$(t-5, 5(u^2+\tau u+1)) = (t-5, 5)\cdot(t-5, u^2+\tau u+1) = 5\cdot(u-4\tau, 21),$$

однако $k_4(q) \geq 25$.

3. Пусть $m = 7$. Тогда $R_4(q)$ лежит в объединении множеств $R_i(\tau u)$, где $3 \leq i \leq 6$, и a делит одно из чисел $k_3(u)k_6(u)$, $k_3(\tau u)k_4(u)$ и $k_5(\tau u)$. Поскольку $t-1$ делится на $k_3(u)k_6(u)$, видим, что $(k_4(q), k_3(\pm u)) = 1$.

Несложно проверить, что t сравнимо с τu и $\tau u + 1$ по модулю u^2+1 и $(u^5-\tau)/(u-\tau)$ соответственно. Таким образом,

$$(b, u^2+1) = ((5, q+1)\tau u - (7, u-\tau), (5, q+1)^2 + (7, u-\tau)^2),$$

$$\left(b, \frac{u^5-\tau}{u-\tau}\right) = \left((5, q+1)\tau u + (5, q+1) - (7, u-\tau), \frac{c^5 - (5, q+1)^5}{c - (5, q+1)}\right),$$

где $c = (7, u-\tau) - (5, q+1)$.

Значит, если $k_4(q)$ делит $k_4(u)$, то $k_4(q)$ делит одно из чисел 13, 25, 37, откуда $k_4(q) = 25$ и $u \equiv 7\tau \pmod{25}$. Из первого условия вытекает, что $q = 7$, из второго — что $u \geq 32$, но тогда $k_{10}(q) < k_7(\tau u)$. Если же $k_4(q)$ делит $k_5(\tau u)$, то $k_4(q)$ равно одному из чисел 461, 311, 1301, но это невозможно. $\square$

Предложение 6.3. *Утверждение теоремы* 2 *верно для* $L = L_6^{\varepsilon}(q)$.

Доказательство. Напомним, что $\pi(K) \subseteq \pi(q^2-1) \cup \{v\}$. Также отметим, что $R_4(q) \cap \pi(S) \neq \varnothing$. В противном случае $R_4(q) \cap (\pi(K) \cup \pi(\mathrm{Inndiag}\, S)) = \varnothing$ и, значит, $k_4(q)$ делит l, откуда $u \geq 2^{(q^2+1)/2}$. При этом в S есть элемент порядка $(u^2-1)/(3, u^2-1)$, следовательно, $u^2 \leq 6q^5+1$. Значит, $2^{q^2+1} < 6q^5+1$, но это противоречит тому, что $q \geq 7$. Зафиксируем $s \in R_4(q) \cap \pi(S)$.

Дальнейшие рассуждения основаны на том, что $R_6(\varepsilon q), R_5(\varepsilon q) \subseteq \pi(S)$ и у любых $r_6(\varepsilon q)$, $r_5(\varepsilon q)$ нет общих соседей в $GK(S)$.

1. Пусть S — одна из групп $S_6(u)$, $O_7(u)$, $O_8^+(u)$. Если $u = 2, 3$, то граф $GK(S)$ несвязен и можно применить лемму 5.3. Если $u \neq 2, 3$, то все вершины компактной формы графа $GK(S)$ не являются пустыми. Значит, любая пара вершин графа $GK(S)$, не имеющая общих соседей, лежит в $R_3(u) \cup R_6(u)$, тем самым $R_6(\varepsilon q) \subseteq R_6(\tau u)$ и $R_5(\varepsilon q) \subseteq R_3(\tau u)$ для некоторого $\tau \in \{+, -\}$.

Следовательно, $s \in R_4(u) \cup \{v\}$. В частности, $v \notin R_3(\varepsilon q)$. Если $R_3(\varepsilon q) \cap \pi(\overline{G}/S) \neq \varnothing$, то, применяя лемму 6.1, видим, что, с одной стороны, $R_4(q) \subseteq R_4(u)$, а с другой стороны, для некоторого $r \in R_4(q)$ силовская r-подгруппа не циклическая; противоречие. Значит, $R_3(\varepsilon q) \cap \pi(\overline{G}/S) = \varnothing$, тогда $R_3(\varepsilon q) \subseteq R_6(\tau u)$.

Отметим, что $p \neq 3$ и $pr_3(\varepsilon q) \notin \pi(S)$ (действительно, если $p \in \pi(S)$, то $p \in R_4(u)$). При этом в G есть элемент порядка $pk_3(\varepsilon q)$. Значит, $p \in \pi(\overline{G}/S)$, в $\overline{G}$ есть полевой автоморфизм порядка p и в его централизаторе в S есть элемент порядка $k_3(\varepsilon q)$. Следовательно, $k_3(\varepsilon q) \in \omega(O_8^+(u^{1/p}))$, откуда получаем неравенство $q^2/4 < k_3(\varepsilon q) < 2u^{4/p}$. С другой стороны, в S есть элемент порядка $(u^3+1)/(2, u-1)$, поэтому $u^3/2 < 2q^5$. Система этих неравенств приводит к тому, что $q^{6p-20} < 2^{9p+8}$, откуда $q = 25$ или $q = 7$. Тогда из неравенства $v^{3p} \leq u^3 < 4q^5$ получаем, что $q = 25$ и $u = 2^5, 3^5$. Это противоречит тому, что $s \in R_4(u) \cup \{v\}$.

2. Пусть $S = L_4^\tau(u)$. Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получаем, что $s = v$, $R_3(\varepsilon q) \subseteq R_3(\tau u) \cup R_4(u)$ и $p \notin \pi(S)$. Отсюда $p > 5$, в $\overline{G}$ есть полевой автоморфизм порядка p и в его централизаторе в S есть элемент порядка $k_3(\varepsilon q)$. Следовательно, $k_3(\varepsilon q) \in \omega(L_4^\tau(u^{1/p}))$, и $q^2/4 < 2u^{3/p}$. При этом в S есть элемент порядка $(u^3-\tau)/(4, u-\tau)$, значит, $(u^3-\tau)/(4, u-\tau) < 2u^5$. Вместе с условием $p > 5$ эти неравенства приводят к противоречию.

3. Пусть $S = L_6^\tau(u)$. Если $S = L_6(u)$, где $u = 2, 3, 4, 7$, или $S = U_6(u)$, где $u = 2, 5$, то граф $GK(S)$ несвязен. Если $S = U_6(3)$, то $k_z(L) = 13$; противоречие. В остальных случаях, рассуждая так же, как в п. 1, получаем, что $R_6(\varepsilon q) \cup R_5(\varepsilon q) \subseteq R_6(\tau u) \cup R_5(\tau u)$. Следовательно, $s \in R_4(\tau u) \cup \{v\}$, и тогда $R_3(\varepsilon q) \subseteq R_5(\tau u) \cup R_6(\tau u) \cup R_3(\tau u)$.

Пусть $p = 3$. Тогда $p \in \pi(S)$ и, значит, $(u-\tau)_3 = 3$. В частности, l не делится на 3. Кроме того, $\operatorname{Inndiag} S \cap \overline{G} = S$ в силу [30, теорема 1]. Следовательно, 3 не делит $|\overline{G}/S|$, откуда вытекает, что $pr_3(\varepsilon q) \in \omega(S)$. Но тогда $R_3(\varepsilon q) \subseteq R_3(\tau u)$, и $9r_3(\varepsilon q) \in \omega(S) \setminus \omega(L)$.

Значит, $p > 3$ и $pr_3(\varepsilon q) \notin \omega(S)$. Как и выше, получаем, что $k_3(\varepsilon q) \leq 2u^{5/p}$. При этом $(u^5-\tau)/(6, u-\tau) \leq 2q^5$. Из этих неравенств следует, что $q = 7$ или $q = 25$, и приходим к противоречию так же, как в п. 1.

4. Пусть $S = L_5^\tau(u)$. Тогда $\pi(K) \subseteq \pi(q^2-1)$ в силу леммы 5.5.

Поскольку $\{s, r_6(\varepsilon q), r_5(\varepsilon q)\}$ — коклика в $GK(S)$, получаем, что $R_6(\varepsilon q) \subseteq A$, $R_5(\varepsilon q) \subseteq B$ и $s \in C$, где $\{A, B, C\} = \{R_5(\tau u), R_4(u), R_3(\tau u) \cup \{5, v\}\}$ и одно из множеств A, B совпадает с $R_5(\tau u)$. Тогда $R_3(\varepsilon q) \subseteq A$ и, значит, числа из $R_3(\varepsilon q)$ смежны с теми же вершинами в $GK(S)$, что и числа из $R_6(\varepsilon q)$. Следовательно, $pr_3(\varepsilon q) \notin \pi(S)$ и $p \in \pi(\overline{G}/S)$. При этом p не может делить u^2-1, поэтому $p \geq 5$ и p является порядком полевого автоморфизма. Таким образом, $k_3(\varepsilon q) \leq 2u^{4/p}$.

С другой стороны, в S есть элемент порядка $(u^4-1)/(5, u-\tau)$ и, значит, $u^4 < 10q^5$. В итоге $q^{2p} < 8^p u^4 < 10 \cdot 8^p q^5$, но это противоречит тому, что $q \geq 7$.

5. Пусть $S = L_3^\tau(u)$. Снова рассматривая коклику $\{s, r_6(\varepsilon q), r_5(\varepsilon q)\}$ и замечая, что она не содержит 3, получаем, что $R_6(\varepsilon q)$ и $R_5(\varepsilon q)$ содержатся соответственно в $R_3(\tau u)$ и $\pi(u+\tau)$ или наоборот, а $s = v$. Как и в предыдущем пункте, $R_3(\varepsilon q)$ лежит в том из множеств $R_3(\tau u)$ и $\pi(u+\tau)$, в котором лежит $R_6(\varepsilon q)$, а значит, $pr_3(\varepsilon q) \notin \omega(S)$ и $p \in \pi(\overline{G}/S)$. Если $p = 3$, то $(u-\tau)_3 = 3$, и приходим к противоречию так же, как в случае $S = L_6^\tau(u)$. Тем самым $p > 3$ и $q^2/4 < k_3(\varepsilon q) \leq 2u^{2/p}$. При этом $u^2 < 6q^5$. Таким образом, $q^{2p} < 8^p u^2 < 6 \cdot 8^p q^5$, и это противоречие, как и выше.

Это завершает доказательство предложения 6.3, а значит, и теоремы 2. □

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grechkoseeva M. A., Mazurov V. D., Shi W., Vasil′ev A. V., Yang N.* Finite groups isospectral to simple groups // Commun. Math. Stat. 2023. V. 11, N 2. P. 169–194.
2. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных групп по множеству порядков их элементов // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 651–666.
3. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
4. *Старолетов А. М.* О композиционных факторах конечных групп, изоспектральных простым классическим группам // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 422–440.
5. *Гречкосеева М. А., Звездина М. А.* О распознаваемости по спектру групп $L_4(q)$ и $U_4(q)$ // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 6. С. 1300–1330.
6. *Grechkoseeva M. A.* On orders of elements of finite almost simple groups with linear or unitary socle // J. Group Theory. 2017. V. 20, N 6. P. 1191–1222.
7. *Bang A. S.* Taltheoretiske Undersfigelser // Tidsskrift Math. 1886. V. 4. P. 70–80, 130–137.
8. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3. P. 265–284.
9. *Roitman M.* On Zsigmondy primes // Proc. Am. Math. Soc. 1997. V. 125, N 7. P. 1913–1919.
10. *Vasil'ev A. V.* On finite groups isospectral to simple classical groups // J. Algebra. 2015. V. 423. P. 318–374.
11. *Gerono G. C.* Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$ // Nouv. Ann. Math. Ser. 2. 1870. V. 9. P. 469–471.
12. *Бутурлакин А. А.* Спектры групп $E_8(q)$ // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 3–13.
13. *Гречкосеева М. А.* О спектрах почти простых групп с симплектическим или ортогональным цоколем // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 4. С. 746–754.
14. *Васильев А. В., Гречкосеева М. А., Мазуров В. Д.* Характеризация конечных простых групп спектром и порядком // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 6. С. 685–728.
15. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 487–513.
16. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
17. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
18. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Критерий смежности в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 6. С. 682–725.
19. *Васильев А. В., Вдовин Е. П.* Коклики максимального размера в графе простых чисел конечной простой группы // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 4. С. 425–470.
20. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.
21. *Васильев А. В., Горшков И. Б.* О распознавании конечных простых групп со связным графом простых чисел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 292–299.
22. *Yang N., Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V.* On the nilpotency of the solvable radical of a finite group isospectral to a simple group // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 3. P. 447–470.
23. *Tiep P. H., Zalesski A. E.* Hall–Higman type theorems for exceptional groups of Lie type, I // J. Algebra. 2022. V. 607, Part A. P. 755–794.
24. *Tiep P. H., Zalesski A. E.* Hall-Higman-type theorems for semisimple elements of finite classical groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 2008. V. 97, N 3. P. 623–668.

25. *Craven D. A.* The maximal subgroups of the exceptional groups $F_4(q)$, $E_6(q)$ and ${}^2E_6(q)$ and related almost simple groups // Invent. Math. 2023. V. 234, N 2. P. 637–719.
26. *Gorenstein D., Lyons R., Solomon R.* The classification of finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1998.
27. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper & Row Publ., 1968.
28. *Guralnick R. M., Tiep P. H.* Finite simple unisingular groups of Lie type // J. Group Theory. 2003. V. 6, N 3. P. 271–310.
29. *Grechkoseeva M. A., Vasil'ev A. V., Zvezdina M. A.* Recognition of symplectic and orthogonal groups of small dimensions by spectrum // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 12. 1950230.
30. *Grechkoseeva M., Vasil'ev A.* On the prime graph of a finite group with unique nonabelian composition factor // Commun. Algebra. 2022. V. 50, N 8. P. 3447–3452.
31. *Гречкосеева М. А.* О примитивных простых делителях порядков групп Сузуки и Ри // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 1. С. 59–70.
32. *Бутурлакин А. А.* Спектры конечных линейных и унитарных групп // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 2. С. 157–173.
33. *Zavarnitsine A. V.* Fixed points of large prime-order elements in the equicharacteristic action of linear and unitary groups // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. V. 8. P. 333–340.

Поступила в редакцию 6 июня 2024 г.
После доработки 5 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Гречкосеева Мария Александровна (ORCID 0000-0001-9908-6462)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
grechkoseeva@gmail.com

Паньшин Виктор Владимирович (ORCID 0000-0002-1934-6621)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
v.panshin@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ И ТЕОРЕМА РАШЕВСКОГО — ЧОУ НА ГРУППЕ КАРТАНА

А. В. Грешнов, Р. И. Жуков

Аннотация. Рассматривается задача управления нелинейными 5-мерными системами, индуцированными горизонтальными векторными полями X, Y, $[\cdot,\cdot]$-порождающими алгебру Картана, линейно зависящими от двух кусочно-постоянных управлений. Изучены свойства решений таких систем. Решение интерпретируется как горизонтальная k-ломаная L_k на канонической группе Картана $\mathbb{K}$, где звенья ломаной L_k — отрезки интегральных линий векторных полей вида $aX + bY$, $a, b = \mathrm{const}$. На $\mathbb{K}$ доказано, что минимальное число $N_{\mathbb{K}}$ такое, что любые две точки $u, v \in \mathbb{K}$ соединяются L_k, $k \le N_{\mathbb{K}}$, равно 4. Таким образом, получена наилучшая версия теоремы Рашевского — Чоу на группе Картана. Доказано, что минимальное число звеньев замкнутой горизонтальной ломаной на $\mathbb{K}$ равно 6.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.510

Ключевые слова: горизонтальные векторные поля, группы Карно, группа Картана, горизонтальная ломаная, вершина, теорема Рашевского — Чоу.

§ 1 Введение

Рассмотрим следующую задачу управления:

$$\dot{x}(s) = \varphi_1(s)X_1(x(s)) + \ldots + \varphi_{r_1}(s)X_{r_1}(x(s)), \quad x(0) = u,\ x(s_0) = v, \quad s \in [0, s_0], \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{r_1}) \in \mathbb{R}^{r_1}$ — измеримые локально ограниченные управления, $\mathscr{X} = \{X_1, \ldots, X_{r_1}\}$, $r_1 < N$, — гладкие векторные поля такие, что рассматриваемая система вполне управляема [1]. Система называется *вполне управляемой*, если для любых u, v задача (1) разрешима для некоторого $s_0 > 0$. Критерий управляемости системы из задачи (1) может быть сформулирован в терминах условия Хермандера (степени n) на векторные поля $\mathscr{X}$ [2–4], которые в этом случае называются $[\cdot,\cdot]$- *порождающими* [4]. Задача (1) возникает естественным образом в анализе и геометрии [3, 4], в инженерии [1].

В настоящее время не существует способа в явном виде решать задачу (1). Отметим, что задача (1) имеет решение в классе измеримых управлений φ_i; более того, решение задачи (1) существует в классе кусочно-постоянных управлений, где количество переключений ограничено некоторой константой [3, 4]. Действительно, рассмотрим гладкое связное многообразие $\mathscr{M}$, $\dim \mathscr{M} = N$, и пусть $Y_1, \ldots, Y_m$, $m < N$, — C^∞- гладкие векторные поля, удовлетворяющие условию Хермандера на многообразии $\mathscr{M}$ (субриманово многообразие). Векторные поля

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН проект FWNF-2022-0006.

© 2024 Грешнов А. В., Жуков Р. И.

$Y_1, \dots, Y_m$ и подрасслоение $H_{\mathscr{M}} \subset T\mathscr{M}$, натянутое на $Y_1, \dots, Y_m$, называются *горизонтальными*. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma(s) : [0, s_0] \to \mathscr{M}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(s) \in H_{\mathscr{M}}(\gamma(s))$ почти всюду. Хорошо известна следующая

Теорема 1 (Рашевского — Чоу [3, 4]). *Любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ могут быть соединены некоторой горизонтальной кривой $\gamma \subset \mathscr{M}$, состоящей из конечного числа отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$.*

Отметим следующий более точный (по сравнению с теоремой 1) результат.

Теорема 2 [4]. *Любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ могут быть соединены (во всяком случае локально) горизонтальной кривой в $\mathscr{M}$, состоящей не более чем из $2N$ отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$.*

Естественная задача, которая возникает в свете теоремы Рашевского — Чоу, состоит в нахождении минимального числа $N_{\mathscr{M}}$ такого, что любые две точки $u, v \in \mathscr{M}$ можно соединить (во всяком случае локально) горизонтальной кривой, состоящей не более чем из k отрезков интегральных линий горизонтальных векторных полей $Y_1, \dots, Y_m$, где $k \le N_{\mathscr{M}}$.

Положим

$$a_J X = \sum_{j=1}^{r_1} a_j X_j, \quad a_J = (a_1, \dots, a_{r_1}) \in \mathbb{R}^{r_1}, \quad a_i = \mathrm{const}\,.$$

Обозначим через $\exp(a_J X)(u)$ точку интегральной линии $\exp(s a_J X)(u)$, $s \ge 0$, горизонтального векторного поля $a_J X$, соответствующую значению $s = 1$; для простоты полагаем, что выражение $\exp(a_J X)(u)$ корректно определено для каждого вектора a_J, $u \in \mathbb{R}^N$. По индукции определим *горизонтальную k-ломаную* $L_k(x_0, x_k)$, *состоящую из k сегментов* I_i, $i = 1, \dots, k$, (*имеющую k звеньев*) и $k + 1$ *вершин* в точках $x_0, \dots, x_k$ с началом в точке x_0 и концом в точке x_k:

$$L_k(x_0, x_k) = \bigcup_{i=1}^{k} I_i, \ I_i = \bigcup_{s \in [0,1]} \exp(s a_{J_i} X)(x_{i-1}), \ \exp(a_{J_i} X)(x_{i-1}) = x_i, \ |a_{J_i}| \ne 0. \tag{2}$$

Если $x_0 = x_k$ ($k \ge 2$), то горизонтальная k-ломаная $L_k(x_0, x_k)$ *замкнута*; таким образом, k вершинами замкнутой горизонтальной k-ломаной являются точки $x_1, \dots, x_k = x_0$ и каждая вершина замкнутой k-ломаной принадлежит двум звеньям. Таким образом, решение задачи (1) (принимая во внимание теорему 1) в классе кусочно-постоянных управлений можно интерпретировать как некоторую горизонтальную k-ломаную, где величина $k - 1$ соответствует количеству переключений. Такую интерпретацию решений задачи (1) в классе кусочно-постоянных управлений будем использовать в дальнейшем.

Расстояние Карно — Каратеодори на $\mathscr{M}$ определяется как

$$d_{cc}(u, v) = \inf\{l_{\mathscr{M}}(\gamma) \mid \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая } u, v\};$$

длина $l_{\mathscr{M}}(\gamma)$ абсолютно непрерывной кривой $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, определяется при помощи скалярного риманова произведения обычным способом. Пара

$(\mathscr{M}, d_{cc})$ называется *пространством Карно — Каратеодори* [3, 4]. Важнейшим частным случаем пространств Карно — Каратеодори являются группы Карно [5–7].

Горизонтальная кривая $\gamma = \gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, называется *cc-кратчайшей*, соединяющей $u, v \in (\mathscr{M}, d_{cc})$, если

$$l_{\mathscr{M}}(\gamma) = d_{cc}(u, v), \quad u = \gamma(0),\ v = \gamma(s_0).$$

cc-Кратчайшая является решением задачи (1) на классе измеримых управлений, минимизирующем функционал длины на соответствующем классе горизонтальных кривых. Явное нахождение *cc*-кратчайших даже в частных случаях пространств Карно — Каратеодори является сложной задачей (см., например, [4, 8–19]). Многие свойства *cc*-кратчайших до сих пор неизвестны, в частности, открытой проблемой является гладкость *cc*-кратчайших (см., например, [20]). В ряде задач (например, доказательство существования равномерных и NTA-областей в субримановой геометрии [21]) информация о свойствах *cc*-кратчайших может оказаться ключевой. Однако в силу отсутствия такой информации используют вспомогательные горизонтальные кривые, в частности, *cc*-ломаные. В настоящей работе на канонической группе Картана $\mathbb{K}$ решается задача нахождения наименьшего числа $N_{\mathbb{K}} \in \mathbb{N}$ такого, что любые две точки $u, v \in \mathbb{K}$ соединяются горизонтальной k-ломаной $L_k(u, v)$, где $k \leq N_{\mathbb{K}}$. Такая задача ранее была решена для канонических 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением коранга 1 [22], для канонической группы Энгеля [23], для канонических 2-ступенчатых групп Карно с горизонтальным распределением ранга 3 [24, 25].

В работе доказана следующая

Теорема 3. $N_{\mathbb{K}} = 4$.

С точки зрения количественных оценок теорем 1, 2 теорема 3 является наилучшей версией теоремы Рашевского — Чоу для группы Картана.

В последнее время аналитические и геометрические свойства группы Картана интенсивно изучались в связи с различными задачами вариационного исчисления и оптимального контроля (см., например, [13, 19]).

Группа Картана естественным образом возникает в задаче об управлении машиной с двумя прицепами и в задаче о качении шара по плоскости без проскальзывания и прокручивания [17, 18]. Отметим, что в работах [17, 18] изучалась задача построения приближенного решения в задаче о качении шара по плоскости без проскальзывания при помощи точного решения соответствующей нильпотентной задачи (в алгебре Картана) в классе кусочно-постоянных управлений. Для определения коэффициентов управления в системе Mathematica авторами была написана соответствующая программа, но из-за сложности формул сам алгоритм в работах [17, 18] не приводился; при этом отмечалось, что для построения этого точного решения достаточно трех переключений. Отсюда можно сделать вывод о том, что любые две точки группы Картана можно соединить горизонтальной 4-ломаной. Наше доказательство теоремы 3 не использует методы работ [17, 18]. Реализация группы Картана как канонической группы, которую мы используем, отличается от той, что была использована в [17, 18]. Используя свойства канонических групп, в серии вспомогательных

утверждений (утверждения 9, 13, теоремы 16, 17, следствие 11) для произвольной точки $M \in \mathbb{K}$ мы непосредственным образом строим горизонтальную ломаную $L_k(O, M)$, где $k \leq 4$. В то же время существуют точки $M \in \mathbb{K}$, для которых не существуют горизонтальные k-ломаные $L_k(O, M)$, где $k \leq 3$ (следствие 10, замечание 15). Отсюда получаем теорему 3.

Другая задача, которая решается в работе, состоит в нахождении минимального числа $k_{\mathbb{K}}$ такого, что существует горизонтальная замкнутая $k_{\mathbb{K}}$-ломаная. В § 4 нами доказана следующая

Теорема 4. $k_{\mathbb{K}} = 6$.

Доказательство теоремы 4 базируется на тех же идеях, что и доказательство теоремы 2 (см. теорему 22); при этом на группе Картана $\mathbb{K}$ не существует замкнутых горизонтальных k-ломаных $L_k(u, v)$, где $k \leq 5$ (см. свойства 18, 19). Отметим, что на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}^1_\alpha$ и на группе Энгеля $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ не существуют замкнутые горизонтальные 3-ломаные, но существуют замкнутые горизонтальные 4-ломаные [23].

Существование горизонтальных замкнутых ломаных связано с описанием и оценками множеств достижимости управляемой системы (1), где φ_i — кусочно-постоянные управления, а правый конец траектории $x(s_0) = v$ не закреплен [1]. Результат теоремы 4 говорит о том, что не менее чем за шесть шагов вдоль подходящим образом выбранных горизонтальных траекторий любая точка группы Картана попадет в исходное положение при условии, что мы не можем последовательно двигаться в обратном направлении.

§ 2. Вспомогательные определения и результаты

Канонической N-мерной группой Ли [26] называется аналитическая группа Ли G такая, что ее экспоненциальное отображение $\mathrm{Exp} : \mathbb{R}^N \to G$ тождественно; таким образом, любой элемент $x \in G$ однозначно определяется координатной записью $x = (x_1, \dots, x_N)$, точка O (начало координат $\mathbb{R}^N$) является нейтральным элементом, $x^{-1} = (-x_1, \dots, -x_N)$, групповая операция $P^G_u u' = u \cdot u'$ для любых $u, u' \in G$ определяется посредством формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа, а таблица коммутаторов определяется на векторах $\{e_i\}_{i=1,\dots,N}$ из $\mathbb{R}^N$.

Каноническая *группа Картана* $\mathbb{K}$ определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ с системой координат (x, y, t, z_1, z_2), индуцированной координатным репером $(O, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, при помощи следующей таблицы коммутаторов:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, & \alpha \neq 0, \\ [e_1, e_3] = \beta_1 e_4, & \beta_1 \neq 0, \\ [e_2, e_3] = \beta_2 e_5, & \beta_2 \neq 0; \end{cases} \tag{3}$$

все остальные возможные коммутаторы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 равны 0. Изменяя нумерацию и направления векторов $\{e_i\}$, всегда можно добиться того, что $\alpha > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$; поэтому в дальнейшем будем придерживаться таких условий. Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа [27] и таблицу (3), получаем аналитическую запись левого сдвига $P^{\mathbb{K}}_w w'$ произвольного элемента $w' =$

$(x', y', t', z_1', z_2') \in \mathbb{K}$ на произвольный элемент $w = (x, y, t, z_1, z_2) \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} P_w^{\mathbb{K}} w' = w \cdot w' &= (x, y, t, z_1, z_2)(x', y', t', z_1', z_2') \\ &= \Bigg(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y), \\ &\quad z_1 + z_1' + \frac{\beta_1}{2}(xt' - x't) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - x')(xy' - x'y), \\ &\quad z_2 + z_2' + \frac{\beta_2}{2}(yt' - y't) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - y')(xy' - x'y) \Bigg). \end{aligned} \tag{4}$$

Используя (4), получаем выражения базиса левоинвариантных векторных полей (базис Якоби [5]) на $\mathbb{K}$ в произвольной точке (x, y, t, z_1, z_2):

$$\begin{aligned} X &= \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2}y, -\frac{\beta_1}{2}t - \frac{\alpha\beta_1}{12}xy, -\frac{\alpha\beta_2}{12}y^2\right), \\ Y &= \left(0, 1, \frac{\alpha}{2}x, \frac{\alpha\beta_1}{12}x^2, -\frac{\beta_2}{2}t + \frac{\alpha\beta_2}{12}xy\right), \\ T &= \left(0, 0, 1, \frac{\beta_1}{2}x, \frac{\beta_2}{2}y\right), \quad Z_1 = e_4, \quad Z_2 = e_5, \end{aligned} \tag{5}$$

и $[X, Y] = \alpha T$, $[X, T] = \beta_1 Z_1$, $[Y, T] = \beta_2 Z_2$. Алгебра Ли, порожденная векторными полями $\{X, Y, T, Z_1, Z_2\}$, называется *алгеброй Картана* (ср. с [13]).

Векторные поля X, Y горизонтальные, и их линейная оболочка $\mathscr{L}\{X, Y\}$ формирует пространство $[\cdot, \cdot]$-порождающих векторных полей на $\mathbb{K}$. *Горизонтальный отрезок* интегральной линии горизонтального векторного поля $a_1 X + a_2 Y$, $a_i = \mathrm{const}$, начинающийся в точке $u \in \mathbb{K}$, определяется как

$$\exp\big(s(a_1 X + a_2 Y)\big)(u) = u \cdot (sa) = P_u^{\mathbb{K}} sa, \quad s \in [0, 1],\ a_i = \mathrm{const},\ a_1^2 + a_2^2 \neq 0,$$

где $a = (a_1, a_2, 0, 0, 0)$, и так же, как и выше, можно определить понятие *горизонтальной ломаной* на $\mathbb{K}$.

Действие однородной подгруппы растяжений $\delta_\tau : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ определяется по правилу

$$\delta_\tau : (x, y, t, z_1, z_2) \to (\tau x, \tau y, \tau^2 t, \tau^3 z_1, \tau^3 z_2),$$

и для любой точки $u = (x, y, t, z_1, z_2) \in \mathbb{K}$ и любой однопараметрической подгруппы

$$\exp(s(a_1 X + a_2 Y + a_3 T + a_4 Z_1 + a_5 Z_2))(u) = P_u^{\mathbb{K}}(sa), \quad a = (a_1, \dots, a_5),\ s \in \mathbb{R},$$

имеем

$$\delta_\lambda\big(P_u^{\mathbb{K}}(sa)\big) = P_{\delta_\lambda u}^{\mathbb{K}}(s\delta_\lambda a). \tag{6}$$

С группой Картана $\mathbb{K}$ тесно связана первая группа Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$, которая определяется в стандартном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с системой координат (x, y, t), индуцированной координатным репером (O, e_1, e_2, e_3), при помощи следующей таблицы коммутаторов:

$$\begin{cases} [e_1, e_2] = \alpha e_3, \quad \alpha > 0, \\ [e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Используя формулу Кэмпбелла — Хаусдорфа [27] и таблицу (7), получаем аналитическое выражение операции левого сдвига $P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w'$ произвольного элемента $w' = (x', y', t') \in \mathbb{H}_\alpha^1$ на произвольный элемент $w = (x, y, t) \in \mathbb{H}_\alpha^1$:

$$P_w^{\mathbb{H}_\alpha^1} w' = w \cdot w' = \left(x + x', y + y', t + t' + \frac{\alpha}{2}(xy' - x'y) \right). \tag{8}$$

Используя (8), получаем аналитическое выражение для базиса левоинвариантных векторных полей (базис Якоби [5]) группы $\mathbb{H}^1_\alpha$ в каждой точке (x, y, t):

$$X = \left(1, 0, -\frac{\alpha}{2}y\right), \quad Y = \left(0, 1, \frac{\alpha}{2}x\right), \quad T = (0, 0, 1) = e_3. \tag{9}$$

Векторные поля X, Y горизонтальные, и их линейная оболочка $\mathscr{L}\{X, Y\}$ формирует пространство $[\cdot, \cdot]$-порождающих векторных полей на $\mathbb{H}^1_\alpha$. Интегральная линия векторного поля $aX + bY + cT$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, с началом в точке $M \in \mathbb{H}^1_\alpha$ является обычной прямой линией, а множество

$$\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M) = \Big\{ \bigcup_{a,b,s\in\mathbb{R}} \exp(s(aX + bY))(M) \mid a^2 + b^2 = 1 \Big\}$$

является обычной плоскостью в 3-мерном пространстве (*горизонтальная плоскость в точке* M).

Приведем некоторые свойства группы $\mathbb{H}^1_\alpha$, которые будут использоваться в дальнейшем.

Теорема 5 [23]. $N_{\mathbb{H}^1_\alpha} = 3$.

Доказательство. 1^0. Каждая точка $M = (x_0, y_0, 0)$ соединяется с $O = (0, 0, 0)$ одним горизонтальным отрезком.

2^0. Рассмотрим точку $M = (x_0, y_0, t_0)$, где $\left(x_0^2 + y_0^2\right)t_0 \neq 0$. Для определенности положим $t_0 > 0$. Горизонтальные плоскости $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M)$ и $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O)$ не параллельны, поэтому

$$l_{O,M} = \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M) \cap \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(O),$$

где $l_{O,M}$ — прямая линия. Имеем $O \notin l_{O,M}$. Рассмотрим точку $Q \in l_{O,M}$. Тогда O, M соединяются горизонтальной 2-ломаной $[OQ] \cup [QM]$, где $[OQ]$, $[QM]$ — обычные отрезки. Таким образом, точки M и O соединяются бесконечным числом горизонтальных 2-ломаных $[OQ] \cup [QM]$, где Q — произвольная точка прямой $l_{O,M}$.

3^0. Рассмотрим точку $W = (0, 0, t_0)$, $t_0 \neq 0$. Тогда O и W соединяются горизонтальной 3-ломаной $[OQ] \cup [QM] \cup [MW]$, где $[OQ]$, $[QM]$ из п. 2^0, $M \in \Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(W)$, а $[MW]$ — обычный прямолинейный отрезок. Понятно, что не существует горизонтальной 2-ломаной, соединяющей O и W.

Теорема 5 доказана.

Замечание 6 (см. п. 2^0 теоремы 5). Плоскость $\Gamma_{\mathbb{H}^1_\alpha}(M)$ определяется в системе координат (x, y, t) евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ уравнением

$$\frac{\alpha}{2}y_0 x - \frac{\alpha}{2}x_0 y + t - t_0 = 0,$$

и таким образом уравнение прямой линии $l_{O,M}$ записывается как

$$-y_0 x + x_0 y + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0. \tag{10}$$

Вектор $(x_0, y_0, 0)$ является направляющим вектором для прямой $l_{O,M}$. Имеем

$$\frac{2|t_0|}{\alpha} = \rho(l_{O,M}, l_0)\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \tag{11}$$

где $\rho(l_{O,M}, l_0)$ — обычное евклидово расстояние между прямыми $l_{O,M}$ и

$$l_0 : -y_0 x + x_0 y = 0. \tag{12}$$

Из (10), (11) вытекает, что чем меньше $x_0^2 + y_0^2$, тем дальше прямая $l_{O,M}$ находится от прямой l_0 при фиксированном значении t_0. Пусть для определенности $t_0 > 0$, и пусть векторы $u = (x, y)$, $v = (x_0, y_0)$ образуют положительно ориентированный базис евклидовой плоскости, где пара (x, y) удовлетворяет (10). Тогда

$$t_0 = \frac{\alpha}{2} S(u, v),$$

где $S(u, v)$ — ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на векторы u, v.

Замечание 7 (см. п. 3^0 теоремы 5). Пусть

$$Q = \exp(xX + yY)(O), \quad M = \exp(aX + bY)(Q), \quad W = \exp(\widetilde{x}X + \widetilde{y}Y)(M),$$

тогда

$$\begin{aligned} W = (0, 0, t_0) = (x, y, 0)(a, b, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0) = (x_0, y_0, t_0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0) \\ = \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya)\right)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0) \\ = \left(x + a + \widetilde{x}, y + b + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x})\right) \\ = \left(x_0 + \widetilde{x}, y_0 + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}(x_0\widetilde{y} - y_0\widetilde{x})\right), \end{aligned}$$

таким образом,

$$(x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x} = x_0\widetilde{y} - y_0\widetilde{x} = 0. \tag{13}$$

Следовательно, для любых x_0, y_0, t_0, $(x_0^2 + y_0^2)t_0 \neq 0$, существует горизонтальная 3-ломаная, соединяющая точки O и W с вершинами

$$O, \quad Q = (x, y, 0), \quad M = (x_0, y_0, t_0), \quad W = (0, 0, t_0),$$

где числа x и y, $x^2 + y^2 \neq 0$, удовлетворяют соотношению (10).

Лемма 8 [23]. *Зафиксируем точку $M = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{H}^1_\alpha$, $m_1 \neq 0$. Тогда для каждого x существуют единственные значения a, y, b такие, что $(x, y, 0)(a, b, 0) = (m_1, m_2, m_3)$.*

§ 3. Горизонтальные 3- и 4-ломаные на $\mathbb{K}$. Доказательство теоремы 3

Утверждение 9. *Любая точка вида $M = (0, 0, t_0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, где $t_0(m_4^2 + m_5^2) \neq 0$, соединяется с началом координат O горизонтальной 3-ломаной.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $t_0 > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\ &= \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\ &= \Bigg(x + a + \widetilde{x}, y + b + \widetilde{y}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x}), \\ &\frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_1}{4}\widetilde{x}(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x})((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x}), \\ &\frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_2}{4}\widetilde{y}(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(y + b - \widetilde{y})((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x})\Bigg). \end{aligned} \tag{14}$$

Полагаем, что векторы $u = (x, y)$, $v = (a, b)$ образуют положительно ориентированный базис на плоскости.

Имеем $x + a + \widetilde{x} = 0$, $y + b + \widetilde{y} = 0$. Пусть

$$\begin{cases} x_0 = x + a = -\widetilde{x}, \\ y_0 = y + b = -\widetilde{y}, \end{cases} \quad x_0^2 + y_0^2 \neq 0.$$

Используя (13), перепишем (14) в виде

$$\begin{aligned}
&(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) \\
&\quad = \Bigg(0, 0, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_1}{4}\widetilde{x}(xb - ya), \\
&\qquad \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) - \frac{\alpha\beta_2}{4}\widetilde{y}(xb - ya)\Bigg) \\
&\quad = \Bigg(0, 0, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{4}(x + a)(xb - ya), \\
&\qquad \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_2}{4}(y + b)(xb - ya)\Bigg) \\
&\qquad\qquad = \Bigg(0, 0, t_0, \frac{\beta_1}{3}(2x_0 - a)t_0, \frac{\beta_2}{3}(2y_0 - b)t_0\Bigg). \qquad (15)
\end{aligned}$$

Зафиксируем

$$t_0 = \frac{\alpha}{2}(xb - ya).$$

По построению точка с координатами (x, y) принадлежит прямой (10), откуда с учетом тождества $y_0(x + a) - x_0(y + b) = 0$ получаем

$$y_0 a - x_0 b + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0.$$

Учитывая уравнение (10), выводим, что точка с координатами $(2x_0 - a, 2y_0 - b)$ принадлежит прямой (10). При фиксированных значениях x_0, y_0, t_0 все точки

$$(2x_0 - a, 2y_0 - b), \quad \text{где} \quad y_0 a - x_0 b + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0$$

(см. (15)), образуют прямую (10). Тогда (см. замечание 6) можно сделать вывод, что при фиксированном значении t_0 все точки $M^{a,b}_{\tau,x_0,y_0} = (2\tau x_0 - a, 2\tau y_0 - b)$, $0 < \tau < \infty$, где $\tau y_0 a - \tau x_0 b + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0$ (см. (15)), заполняют открытую полуплоскость $P \subset \mathbb{R}^2$ такую, что

$$\partial P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y_0 x - x_0 y = 0\}.$$

Произвольно меняя направление (x_0, y_0), для фиксированного значения t_0 получим, что

$$\bigcup_{\substack{\tau, x_0, y_0, a, b, \\ \tau \in (0,\infty),\, x_0^2 + y_0^2 > 0, \\ \tau y_0 a - \tau x_0 b + \frac{2}{\alpha}t_0 = 0}} M^{a,b}_{\tau,x_0,y_0} = \mathbb{R}^2 \setminus O',$$

где $O' = (0, 0)$.

Таким образом, для любой тройки чисел t_0, m_4, m_5, где $t_0\big(m_4^2 + m_5^2\big) \neq 0$, найдутся значения $x, y, a, b, \widetilde{x}, \widetilde{y}$ такие, что

$$(x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0) = (0, 0, t_0, m_4, m_5).$$

Утверждение 9 доказано.

Следствие 10. *Точка вида $M = (0, 0, t_0, 0, 0) \in \mathbb{K}$, $t_0 \neq 0$, не может быть соединена с O горизонтальной 3-ломаной.*

Доказательство. В нашей ситуации, используя (15), получаем $2x_0 - a = 0$, $2y_0 - b = 0$, стало быть, векторы (x, y), (a, b) коллинеарны. Следствие 10 доказано.

Следствие 11. *Любая точка $M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\left(m_1^2 + m_2^2\right)m_3 \neq 0$, может быть соединена с точкой O горизонтальной 4-ломаной.*

Доказательство. Зафиксируем числа m_1, m_2, m_3 такие, что $\left(m_1^2+m_2^2\right)m_3 \neq 0$. Имеем

$$(0, 0, m_3, m_4', m_5')(m_1, m_2, 0, 0, 0) = \left(m_1, m_2, m_3, m_4' - \frac{\beta_1}{2}m_1m_3, m_5' - \frac{\beta_2}{2}m_2m_3\right),$$

$$(m_1, m_2, 0, 0, 0)(0, 0, m_3, m_4', m_5') = \left(m_1, m_2, m_3, m_4' + \frac{\beta_1}{2}m_1m_3, m_5' + \frac{\beta_2}{2}m_2m_3\right).$$

Рассмотрим системы

$$\begin{cases} m_4' - \frac{\beta_1}{2}m_1m_3 = m_4, \\ m_5' - \frac{\beta_2}{2}m_2m_3 = m_5, \end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} m_4' + \frac{\beta_1}{2}m_1m_3 = m_4, \\ m_5' + \frac{\beta_2}{2}m_2m_3 = m_5. \end{cases} \tag{17}$$

Всегда найдутся числа m_4', m_5', $(m_4')^2 + (m_5')^2 \neq 0$, такие, что для любых m_4, m_5 выполняется или (16), или (17). Из утверждения 9 следует, что найдется горизонтальная 3-ломаная, соединяющая точки O и $(0, 0, m_3, m_4', m_5')$.

Следствие 11 доказано.

Следствие 12. *Любая точка $M = (0, 0, m_3, 0, 0) \in \mathbb{K}$, $m_3 \neq 0$, может быть соединена с точкой O горизонтальной 5-ломаной.*

Доказательство. Следствие 12 вытекает из формулы

$$(-x_0, 0, 0, 0, 0)(0, 0, m_3, \beta_1 x_0 m_3, 0)(x_0, 0, 0, 0, 0) = (0, 0, m_3, 0, 0) \tag{18}$$

и утверждения 9.

Следствие 12 доказано.

Утверждение 13. *Любая точка $M = (0, 0, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $m_4^2 + m_5^2 \neq 0$, может быть соединена с точкой O горизонтальной 4-ломаной $L_4(O, M)$.*

Доказательство. Пусть точки

$$\begin{gathered} O = (0, 0, 0, 0, 0), \quad M_1 = (x, y, 0, 0, 0), \quad M_2 = M_1 \cdot (a, b, 0, 0, 0), \\ M_3 = M_2 \cdot (\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0), \quad M_4 = M_3 \cdot (\widetilde{a}, \widetilde{b}, 0, 0, 0) \end{gathered} \tag{19}$$

являются вершинами ломаной $L_4(O, M)$. Имеем

$$M_2 = \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right),$$

$$M_4 = M_2 \cdot \left(\widetilde{x} + \widetilde{a}, \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})\right). \tag{20}$$

Так как $M_4 = M = (0, 0, 0, m_4, m_5)$, то

$$x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a} = 0, \quad y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b} = 0. \tag{21}$$

Полагаем

$$u = (x, y), \quad v = (a, b), \quad \widetilde{u} = (\widetilde{x}, \widetilde{y}), \quad \widetilde{v} = (\widetilde{a}, \widetilde{b}). \tag{22}$$

Тогда можно переписать (21) в виде

$$u + v + \widetilde{u} + \widetilde{v} = 0. \tag{23}$$

В дальнейшем для удобства будем рассматривать упорядоченную пару векторов u, v, образующих положительно ориентированный базис евклидовой плоскости.

Из (23) следует, что

$$S(u + v, \widetilde{u} + \widetilde{v}) = 0, \tag{24}$$

и, таким образом, третья координата точки M имеет вид

$$\frac{\alpha}{2}(S(u, v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})).$$

Для любого $u \neq 0$ найдутся векторы $v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ такие, что

$$S(u, v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = 0. \tag{25}$$

Действительно, на евклидовой плоскости

— проводим прямую линию $l_{u,v}$ через точку $M_2' = (x + a, y + b)$ и начало координат $O' \in \mathbb{R}^2$,

— проводим прямую линию l, $l \parallel l_{u,v}$, через точку $M_1' = (x, y)$,

— выбираем произвольным образом точку $M_3' \in l$, тогда $\widetilde{u} = \overrightarrow{M_2'M_3'}$, $\widetilde{v} = \overrightarrow{M_3'O'}$.

В таком случае тождество (25) выполняется и третья координата точки M равна 0, а две последние координаты точки M равны соответственно

$$z_1 = z_1(u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - \widetilde{x} + \widetilde{a} - a)(xb - ya) = \frac{\alpha\beta_1}{6}(x + \widetilde{a})(xb - ya),$$

$$z_2 = z_2(u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - \widetilde{y} + \widetilde{b} - b)(xb - ya) = \frac{\alpha\beta_2}{6}(y + \widetilde{b})(xb - ya).$$

Например, пусть

$$u = (1, 0), \quad v = (0, 1), \quad \widetilde{u} = (1, 0), \quad \widetilde{v} = (-2, -1),$$

тогда

$$\begin{aligned}(1, 0, 0, 0, 0)\,(0, 1, 0, 0, 0)\,(1, 0, 0, 0, 0)\,(-2, -1, 0, 0, 0)\\ = \left(1, 1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha\beta_1}{12}, -\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\left(-1, -1, -\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha\beta_1}{4}, -\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\\ = \left(0, 0, 0, -\frac{\alpha\beta_1}{6}, -\frac{\alpha\beta_1}{6}\right).\end{aligned}$$

Обозначим через A_φ матрицу вращения на угол $\varphi \in [0, 2\pi)$ вокруг начала координат O' в евклидовой плоскости. Тогда

$$A_\varphi u = (x_\varphi, y_\varphi), \ A_\varphi v = (a_\varphi, b_\varphi), \ A_\varphi \widetilde{u} = (\widetilde{x}_\varphi, \widetilde{y}_\varphi), \ A_\varphi \widetilde{v} = (\widetilde{a}_\varphi, \widetilde{b}_\varphi)$$

и

$$A_\varphi u + A_\varphi v + A_\varphi \widetilde{u} + A_\varphi \widetilde{v} = 0, \quad S(A_\varphi u, A_\varphi v) = S(u,v) = xb - ya = S_0,$$

$$\frac{\alpha}{2}(S(A_\varphi u, A_\varphi v) + S(A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) + S(A_\varphi u + A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u} + A_\varphi \widetilde{v})) = 0$$

(см. (24), (25)). Далее,

$$z_1^\varphi = z_1(A_\varphi u, A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_1}{6}(x_\varphi + \widetilde{a}_\varphi)S_0,$$

$$z_2^\varphi = z_2(A_\varphi u, A_\varphi v, A_\varphi \widetilde{u}, A_\varphi \widetilde{v}) = \frac{\alpha\beta_2}{6}(y_\varphi + \widetilde{b}_\varphi)S_0.$$

Пусть $r = |u + \widetilde{v}| = |A_\varphi u + A_\varphi \widetilde{v}|$, тогда координаты z_1^φ, z_2^φ удовлетворяют уравнению эллипса

$$\frac{\left(z_1^\varphi\right)^2}{\beta_1^2} + \frac{\left(z_2^\varphi\right)^2}{\beta_2^2} = \frac{(\alpha r S_0)^2}{36}$$

в евклидовой плоскости с координатами (z_1, z_2). Следовательно, любая точка $M_\varphi = \left(0,0,0,z_1^\varphi, z_2^\varphi\right)$ соединяется с началом координат O горизонтальной ломаной $L_4(O, M_\varphi)$. Действуя подгруппой растяжений δ_τ на множество $\bigcup\limits_{\varphi\in[0,2\pi)} M_\varphi$, получаем утверждение 13.

Утверждение 13 доказано.

Следствие 14. *Любая точка* $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\left(m_1^2 + m_2^2\right)\left(m_4^2 + m_5^2\right) \neq 0$, *может быть соединена с началом координат* O *некоторой горизонтальной* 5*-ломаной.*

Замечание 15. Никакая точка $(0,0,0,m_4,m_5)$, $m_4^2 + m_5^2 \neq 0$, не может быть соединена с началом координат O горизонтальной 3-ломаной, так как на первой группе Гейзенберга $\mathbb{H}_\alpha^1$ нет замкнутых горизонтальных 3-ломаных.

Теорема 16. *Любая точка* $M = (0,0,m_3,0,0) \in \mathbb{K}$, $m_3 \neq 0$, *соединяется с началом координат* O *некоторой горизонтальной* 4*-ломаной* $L_4(O, M)$.

Доказательство. Рассмотрим вершины O, M_1, M_2, M_3, M_4 горизонтальной 4-ломаной $L_4(O, M)$ (см. (19)). Далее будем использовать обозначения и формулы (20)–(23) из утверждения 13. Учитывая (24), получаем

$$\frac{\alpha}{2}(S(u,v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})) = m_3.$$

Имеем $M_4 = (0,0,m_3,z_1,z_2)$, где

$$z_1 = \frac{\alpha\beta_1}{12}(x-a)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x+a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya)), \quad (26)$$

$$z_2 = \frac{\alpha\beta_2}{12}(y-b)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_2}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y} + \widetilde{b})(xb - ya)). \quad (27)$$

Так как $M_4 = M$, векторы $u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ таковы, что $z_1 = z_2 = 0$, откуда, используя (26), (27), получаем

$$(xb - ya)(x - a - 3(\widetilde{x} + \widetilde{a})) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{x} - \widetilde{a} + 3(x + a)) = 0, \tag{28}$$

$$(xb - ya)(y - b - 3(\widetilde{y} + \widetilde{b})) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{y} - \widetilde{b} + 3(y + b)) = 0. \tag{29}$$

Используя (21) и обозначения

$$x_0 = x + a = -\widetilde{x} - \widetilde{a}, \quad y_0 = y + b = -\widetilde{y} - \widetilde{b}, \quad w = (x_0, y_0) = u + v = -\widetilde{u} - \widetilde{v},$$

перепишем (28), (29) в виде

$$S(u, v)(x_0 + x) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})(x_0 - \widetilde{a}) = S(u, w)(x_0 + x) - S(w, \widetilde{v})(x_0 - \widetilde{a}) = 0, \tag{30}$$

$$S(u, v)(y_0 + y) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v})(y_0 - \widetilde{b}) = S(u, w)(y_0 + y) - S(w, \widetilde{v})(y_0 - \widetilde{b}) = 0. \tag{31}$$

Так как $L_4(O, M)$ — горизонтальная 4-ломаная, должно быть

$$S(u, w)S(w, \widetilde{v}) \neq 0.$$

В этом случае из (30), (31) получаем

$$w + u = \frac{S(w, \widetilde{v})}{S(u, w)}(w - \widetilde{v}) = \tau(w - \widetilde{v}), \quad \frac{S(w, \widetilde{v})}{S(u, w)} = \tau.$$

С другой стороны,

$$\frac{S(w, \widetilde{v})}{S(u, w)} = \frac{S(w, \widetilde{v})}{S(\tau(w - \widetilde{v}) - w, w)} = \frac{1}{\tau},$$

поэтому $\tau^2 = 1$.

Пусть $\tau = 1$. Тогда $u = -\widetilde{v}$, откуда $v = -\widetilde{u}$, что противоречит тому, что $L_4(O, M)$ является горизонтальной 4-ломаной.

Пусть $\tau = -1$. Тогда

$$2w = \widetilde{v} - u. \tag{32}$$

Рассмотрим, например,

$$u = (1, 0, 0, 0, 0), \ v = (0, 1, 0, 0, 0) \Rightarrow w = (1, 1, 0, 0, 0).$$

Используя (32), выводим

$$\widetilde{v} = (3, 2, 0, 0, 0), \quad \widetilde{u} = (-4, -3, 0, 0, 0)$$

и, применяя (4), получаем

$$\begin{aligned}&(1, 0, 0, 0, 0)(0, 1, 0, 0, 0)(-4, -3, 0, 0, 0)(3, 2, 0, 0, 0)\\ &\quad = \left(1, 1, \frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha\beta_1}{12}, -\frac{\alpha\beta_1}{12}\right)\left(-1, -1, \frac{\alpha}{2}, -\frac{7\alpha\beta_1}{12}, -\frac{5\alpha\beta_1}{12}\right) = (0, 0, \alpha, 0, 0).\end{aligned} \tag{33}$$

Принимая во внимание (33), действуя однопараметрической группой растяжений δ_τ на $\mathbb{K}$, получаем теорему 16.

Теорема 16 доказана.

Теорема 17. *Любая точка* $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathbb{K}$, $\big(m_1^2 + m_2^2\big)\big(m_4^2 + m_5^2\big) \neq 0$, *соединяется с началом координат* O *некоторой горизонтальной* 4*-ломаной* $L_4(O, M)$.

Доказательство. Рассмотрим вершины O, M_1, M_2, M_3, M_4 ломаной $L_4(O, M)$ (см. (19)). Имеем

$$\begin{aligned}
M_4 &= (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0)(\widetilde{a}, \widetilde{b}, 0, 0, 0)\\
&= \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right)\\
&\quad \cdot \left(\widetilde{x} + \widetilde{a}, \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}), \frac{\alpha\beta_2}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})\right)\\
&= \Bigg(x+a+\widetilde{x}+\widetilde{a}, y+b+\widetilde{y}+\widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(xb-ya)+\frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha}{2}((x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})),\\
&\quad \frac{\alpha\beta_1}{12}(x-a)(xb-ya)+\frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x}-\widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha\beta_1}{4}((x+a)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})-(\widetilde{x}+\widetilde{a})(xb-ya))\\
&\qquad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x} - \widetilde{a})((x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a})),\\
&\quad \frac{\alpha\beta_1}{12}(y-b)(xb-ya)+\frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y}-\widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})+\frac{\alpha\beta_1}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})-(\widetilde{y}+\widetilde{b})(xb-ya))\\
&\qquad + \frac{\alpha\beta_1}{12}(y + b - \widetilde{y} - \widetilde{b})((x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}))\Bigg). \qquad (34)
\end{aligned}$$

Так как $M_4 = M$, то

$$x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a} = m_1, \quad y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b} = m_2, \tag{35}$$

$$0 = (xb - ya) + (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + (x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}). \tag{36}$$

Пусть $m = (m_1, m_2)$. Далее будем использовать обозначения (22). Выберем векторы $u, v, \widetilde{u}, \widetilde{v}$ так, чтобы

$$u + v = \tau m,\ \tau > 0,\ \tau \neq 1, \quad u + v + \widetilde{u} + \widetilde{v} = m, \quad S(u, v) + S(\widetilde{u}, \widetilde{v}) = 0. \tag{37}$$

При этом рассматриваем такие векторы u, v, что $S(u, v) > 0$, откуда вытекает, что $S(\widetilde{u}, \widetilde{v}) < 0$, следовательно, упорядоченный набор векторов $\widetilde{u}, \widetilde{v}$ образует отрицательно ориентированный базис евклидовой плоскости с началом координат в точке O'.

Используя (37), получаем

$$(x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}) = 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
m_4 &= \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})\\
&\quad + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x + a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya)) = \frac{\alpha\beta_1 S(u, v)}{6}(x + \widetilde{a} - 2m_1),
\end{aligned}$$

$$m_5 = \frac{\alpha\beta_1}{12}(y-b)(xb-ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y}-\widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})$$
$$+ \frac{\alpha\beta_1}{4}((y+b)(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y}+\widetilde{b})(xb-ya)) = \frac{\alpha\beta_2 S(u,v)}{6}(y+\widetilde{b}-2m_2).$$

Зафиксируем $m \neq 0$.

1^0. Зафиксируем $\tau > 1$ и $S = S(u,v)$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{O'M'_S} = u + \widetilde{v}$. Множество $\bigcup\limits_{u,\widetilde{v}} M'_S$ представляет собой прямую L_S, расположенную на расстоянии

$$\frac{S}{\tau(\tau-1)|m|} \tag{38}$$

от начала координат O'.

Будем менять векторы u, v так, чтобы величина $S = S(u,v)$ принимала все значения из промежутка $(0,\infty)$; тогда (см. (38)) множество $\bigcup\limits_{S\in(0,\infty)} L_S$ совпадает с открытой полуплоскостью Π_1 такой, что

$$\partial\Pi_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid m_2x - m_1y = 0\}.$$

2^0. Зафиксируем $\tau \in (0,1)$ и $S = S(u,v)$. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{O'M'_S} = u + \widetilde{v}$. Множество $\bigcup\limits_{u,\widetilde{v}} M'_S$ представляет собой прямую L_S, расположенную на расстоянии

$$\frac{S}{\tau(1-\tau)|m|} \tag{39}$$

от начала координат O'.

Будем менять векторы u, v так, чтобы величина $S = S(u,v)$ принимала все значения из промежутка $(0,\infty)$; тогда (см. (39)) множество $\bigcup\limits_{S\in(0,\infty)} L_S$ совпадает с открытой полуплоскостью $\Pi_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Pi_1}$.

3^0. Если $S(u,v) = 0$, то $u \parallel m$. Полагаем $\widetilde{u} = \widetilde{v} = 0$, $u = \overrightarrow{O'M''}$. Тогда множество $\bigcup M''$ совпадает с прямой $m_2x - m_1y = 0$.

Учитывая пп. 1^0–3^0, можем сделать вывод о том, что отображение

$$(x,y,a,b,\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{a},\widetilde{b}) \to (m_4,m_5)$$
$$= \left(\frac{\alpha\beta_1 S(u,v)}{6}(x+\widetilde{a}-2m_1), \frac{\alpha\beta_2 S(u,v)}{6}(y+\widetilde{b}-2m_2)\right),$$

где $x,y,a,b,\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{a},\widetilde{b}$ удовлетворяют условиям (35), (36), является сюръекцией на все $\mathbb{R}^2$ при любых фиксированных m_1, m_2, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$.

Таким образом, теорема 17 доказана.

Доказательство теоремы 3. Из утверждений 9, 13, теорем 16, 17 и следствия 11 вытекает, что любая точка из $\mathbb{K}$ может быть соединена с началом координат O некоторой горизонтальной k-ломаной, где $k \leq 4$. Используя действия однопараметрической группы растяжений и левые сдвиги (см. (6)), получаем теорему 3.

§ 4. Замкнутые горизонтальные ломаные на $\mathbb{K}$. Доказательство теоремы 4

Свойство 18. *Не существует замкнутой горизонтальной* 4*-ломаной на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Предположим, что замкнутая горизонтальная 4-ломаная L существует на $\mathbb{K}$. Пусть вершины ломаной L совпадают с точками

$$M_1 = O, \quad M_2 = (x, y, 0, 0, 0), \quad M_3 = (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0),$$
$$M_4 = (x, y, 0, 0, 0)(a, b, 0, 0, 0)(\widetilde{x}, \widetilde{y}, 0, 0, 0).$$

Так как L замкнута, имеем $M_4 = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$ и $x + a + \widetilde{x} = m_1$, $y + b + \widetilde{y} = m_2$.

Поскольку третья координата M_4 равна 0, используя (14), выводим

$$((x + a)\widetilde{y} - (y + b)\widetilde{x}) = -(xb - ya).$$

Принимая во внимание равенство нулю двух последних координат точки M_4 (см. (14)), получаем

$$0 = (x - a)(xb - ya) - 3\widetilde{x}(xb - ya) - (x + a - \widetilde{x})(xb - ya) = (xb - ya)(x - m_1), \quad (40)$$

$$0 = (y - b)(xb - ya) - 3\widetilde{y}(xb - ya) - (y + b - \widetilde{y})(xb - ya) = (xb - ya)(y - m_2). \quad (41)$$

Так как векторы (x, y), (a, b) не должны быть коллинеарны, то $(xb - ya) \neq 0$, но тогда из (40), (41) вытекает, что $x = m_1$, $y = m_2$; противоречие.

Свойство 18 доказано.

Свойство 19. *Не существует замкнутой горизонтальной* 5*-ломаной на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Предположим, что существует замкнутая горизонтальная 5-ломаная L на $\mathbb{K}$ с вершинами O, M_1, M_2, M_3, M_4 (см. (19)). Пусть $M_4 = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$.

Так как L — замкнутая горизонтальная 5-ломаная, то $m_3 = m_4 = m_5 = 0$. Используя (34), получаем

$$M_5 = \Bigg(x + a + \widetilde{x} + \widetilde{a}, y + b + \widetilde{y} + \widetilde{b}, \frac{\alpha}{2}(xb - ya) + \frac{\alpha}{2}(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha}{2}A,$$
$$\frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{x} - \widetilde{a})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((x + a)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{x} + \widetilde{a})(xb - ya))$$
$$+ \frac{\alpha\beta_1}{12}(x + a - \widetilde{x} - \widetilde{a})A,$$
$$\frac{\alpha\beta_1}{12}(y - b)(xb - ya) + \frac{\alpha\beta_1}{12}(\widetilde{y} - \widetilde{b})(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) + \frac{\alpha\beta_1}{4}((y + b)(\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}) - (\widetilde{y} + \widetilde{b})(xb - ya))$$
$$+ \frac{\alpha\beta_1}{12}(y + b - \widetilde{y} - \widetilde{b})A\Bigg).$$

Так как $m_3 = 0$, то

$$A = (x + a)(\widetilde{y} + \widetilde{b}) - (y + b)(\widetilde{x} + \widetilde{a}) = -(xb - ya) - (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a}). \quad (42)$$

Используя (42) в тождествах $m_4 = m_5 = 0$, получаем

$$\begin{cases} (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{x} + x + a) - (xb - ya)(a + \widetilde{x} + \widetilde{a}) = 0, \\ (\widetilde{x}\widetilde{b} - \widetilde{y}\widetilde{a})(\widetilde{y} + y + b) - (xb - ya)(b + \widetilde{y} + \widetilde{b}) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Поскольку L — замкнутая горизонтальная 5-ломаная, должно выполняться $(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})(xb-ya)\neq 0$ (в противном случае или векторы (x,y), (a,b), или векторы $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, $(\widetilde{a},\widetilde{b})$ будут коллинеарны), и таким образом исследование системы (43) сводится к следующим двум случаям.

1^0. $(\widetilde{x}+x+a)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})\neq 0$, $(\widetilde{y}+y+b)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})\neq 0$. Используя (43), получаем

$$\frac{\widetilde{x}+x+a}{a+\widetilde{x}+\widetilde{a}}=\frac{\widetilde{y}+y+b}{b+\widetilde{y}+\widetilde{b}}\Leftrightarrow(\widetilde{x}+x+a)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})-(\widetilde{y}+y+b)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})=0.$$

Последнее тождество может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}0&=(\widetilde{x}+x+a)(b+\widetilde{y}+\widetilde{b})-(\widetilde{y}+y+b)(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})\\&=(xb-ya)+(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{a}\widetilde{y})+x\widetilde{y}+x\widetilde{b}+a\widetilde{b}-\widetilde{x}y-\widetilde{a}y-\widetilde{a}b.\end{aligned}\tag{44}$$

С другой стороны,

$$(x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})=x\widetilde{y}+a\widetilde{y}+x\widetilde{b}+a\widetilde{b}-\widetilde{x}y-b\widetilde{x}-\widetilde{a}y-\widetilde{a}b.\tag{45}$$

Из (42), (44), (45) получаем $a\widetilde{y}-b\widetilde{x}=0$, но это влечет коллинеарность векторов (a,b), $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, что, в свою очередь, противоречит тому, что L является замкнутой горизонтальной 5-ломаной.

2^0. Пусть

$$\widetilde{x}+x+a=0.\tag{46}$$

Принимая во внимание $xb-ya\neq 0$, получаем

$$a+\widetilde{x}+\widetilde{a}=0\tag{47}$$

и

$$x=\widetilde{a}.\tag{48}$$

Используя (42), (46)–(48), выводим

$$\begin{aligned}0&=(x+a)(\widetilde{y}+\widetilde{b})-(y+b)(\widetilde{x}+\widetilde{a})+(xb-ya)+(\widetilde{x}\widetilde{b}-\widetilde{y}\widetilde{a})\\&=b(x-\widetilde{x}-\widetilde{a})-y(a+\widetilde{x}+\widetilde{a})+\widetilde{b}(\widetilde{x}+x+a)+\widetilde{y}(-\widetilde{a}+a+x)=-b\widetilde{x}+\widetilde{y}a,\end{aligned}$$

что влечет коллинеарность векторов $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, (a,b), а это, в свою очередь, противоречит тому, что L является замкнутой горизонтальной 5-ломаной. Случай $\widetilde{y}+y+b=0$ исследуется аналогично разобранному выше.

Свойство 19 доказано.

Определение 20 (ср. с [28, 29]). Пусть $\mathscr{G}$ — гладкое многообразие, $\mathscr{G}\subset\mathbb{K}$, $2\leq\dim\mathscr{G}<5$. Точка $p\in\mathscr{G}$ называется *характеристической*, если плоскость, натянутая на векторы $X(p)$, $Y(p)$, содержится в касательном пространстве $T_p\mathscr{G}$. Обозначим через $\mathrm{Char}(\mathscr{G})$ множество всех характеристических точек многообразия $\mathscr{G}$.

Любая точка $M'\in\mathbb{K}$, которая соединяется с O горизонтальной 2-ломаной, имеет вид

$$M'=\exp(aX+bY)\circ\exp(xX+yY)(O)=(m_1,m_2,m_3,m_4,m_5)$$

для некоторых чисел a,b,x,y, $(a^2+b^2)(x^2+y^2)\neq 0$. Пусть

$$\Gamma_{\mathbb{K}}(M_0)=\Big\{\bigcup_{a,b,s\in\mathbb{R}}\exp(s(aX+bY))(M_0)\mid a^2+b^2=1\Big\},\quad M_0\in\mathbb{K}.$$

Отметим, что $\Gamma_{\mathbb{K}}(O)$ является (в обычном смысле) 2-мерной плоскостью в $\mathbb{R}^5$. Обозначим $\mathscr{P}(O)=\Gamma_{\mathbb{K}}(O)\cup\bigcup M'$.

Утверждение 21. 1^0) $\mathrm{Char}\big(\Gamma_{\mathbb{K}}(O)\big) = O$,

2^0) *$\mathscr{P}(O)$ является 4-мерной гладкой поверхностью без самопересечений в $\mathbb{R}^5$ с координатами $(m_1, m_2, m_3, m_4, m_5)$,*

3^0) $\Gamma_{\mathbb{K}}(O) \subseteq \mathrm{Char}(\mathscr{P}(O))$.

Доказательство. П. 1^0 следует из координатной записи векторных полей X, Y.

П. 2^0. Пусть $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5)$ — отображение, переводящее произвольную точку с координатами (x, y, a, b) в точку $\exp(aX + bY) \circ \exp(xX + yY)(O) \in \mathbb{R}^5$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathscr{F} = (\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5) : (x, y, a, b) &\to \exp(aX + bY) \circ \exp(xX + yY)(O)\\ &= \left(x + a, y + b, \frac{\alpha}{2}(xb - ya), \frac{\alpha\beta_1}{12}(x - a)(xb - ya), \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\right)\\ &= (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5). \qquad (49)\end{aligned}$$

Из (49) выводим

$$m_4 = \frac{\beta_1 m_3}{6}(2x - m_1). \qquad (50)$$

Пусть $m_1 \neq 0$, $m_3 \neq 0$. Используя лемму 8 и формулу (50), получаем, что m_2, m_4 принимают любые значения, и в то же самое время имеем

$$x = \frac{3m_4}{\beta_1 m_3} + \frac{m_1}{2}.$$

Тогда

$$m_3 = \frac{\alpha}{2}(xm_2 - ym_1) \Rightarrow y = \frac{xm_2 - \frac{2}{\alpha}m_3}{m_1} = \frac{m_2}{m_1}\left(\frac{3m_4}{\beta_1 m_3} + \frac{m_1}{2}\right) - \frac{2m_3}{\alpha m_1},$$

значит,

$$\begin{aligned}m_5 = m_5(m_1, m_2, m_3, m_4) &= \frac{\alpha\beta_2}{12}(y - b)(xb - ya)\\ &= \frac{\beta_2 m_3}{6}(2y - m_2) = \frac{\beta_2 m_3}{6}\left(2\left(\frac{3m_4 m_2}{\beta_1 m_3 m_1} + \frac{m_2}{2} - \frac{2m_3}{\alpha m_1}\right) - m_2\right)\\ &= \frac{\beta_2}{3\alpha\beta_1 m_1}\big(3\alpha m_4 m_2 - 4\beta_1 m_3^2\big).\end{aligned}$$

В случае $m_2 \neq 0$, $m_3 \neq 0$, используя переформулировку леммы 8 и выражение для m_5, аналогичное формуле (50), так же, как и в предыдущем случае, получим

$$m_4 = m_4(m_1, m_2, m_3, m_5).$$

Таким образом, множество $\mathscr{P}(O)$ является 4-мерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^5$ в некоторой окрестности любой точки $M = (m_1, m_2, m_3, m_4, m_5) \in \mathscr{P}(O)$, $m_3(m_1^2 + m_2^2) \neq 0$.

Если $m_1 = m_2 = 0$, то $m_3 = 0$, и тогда $m_4 = m_5 = 0$ (см. (49)).

Пусть $M = (m_1, m_2, 0, m_4, m_5) \in \mathscr{P}(O)$, тогда $M = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$ (см. (49)). Случай $m_3 = 0$, $m_1^2 + m_2^2 \neq 0$, эквивалентен ситуации $x^2 + y^2 \neq 0$, $(a, b) = \tau(x, y)$, $\tau = \mathrm{const}$. Стандартными вычислениями получаем

$$\mathrm{rank}\frac{\partial(\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2, \mathscr{F}_3, \mathscr{F}_4, \mathscr{F}_5)}{\partial(x, y, a, b)}\bigg|_{(x,y,a,b)=(x,y,\tau x,\tau y)} < 4.$$

Таким образом, точки $M = (m_1, m_2, 0, 0, 0)$ — особые точки поверхности $\mathscr{P}(O)$.

Из свойства 18 вытекает, что поверхность $\mathscr{P}(O)$ не имеет самопересечений.

П. 3^0 вытекает из определения $\mathscr{P}(O)$.

Утверждение 21 доказано.

Теорема 22. *Существуют замкнутые горизонтальные* 6-*ломаные на* $\mathbb{K}$.

Доказательство. Рассмотрим поверхность $\mathscr{P}(O)$ из утверждения 21. Так как векторные поля X, Y удовлетворяют условию Хермандера, найдутся точка $u \in \operatorname{Int} \mathscr{P}(O)$ и константы a, b, $ab \neq 0$, такие, что

$$(aX + bY)(u') \notin T_{u'}\mathscr{P}(O) \quad \forall u' \in U,$$

где $U \subset \mathscr{P}(O)$ — некоторая окрестность точки u (здесь топология индуцирована стандартной топологией евклидова пространства $\mathbb{R}^5$). Таким образом,

$$U \not\subset \operatorname{Char}(\mathscr{P}(O)).$$

Пусть $w = \exp(s_0(aX + bY))(u)$, $s_0 > 0$. Тогда $u = \exp(-s_0(aX + bY))(w)$. Из теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров вытекает, что число $s_0 > 0$ можно выбрать так, чтобы

$$U_{a',b'} = \exp(s(a'X + b'Y))(w) \cap U \neq \varnothing, \quad s \in (0, s'),$$

где (a', b') принадлежит некоторой 2-мерной окрестности V' точки $(-s_0 a, -s_0 b)$, s' — некоторая константа, не зависящая от выбора $(a', b') \in V'$, и при этом

$$(a'X + b'Y)(u_{a',b'}) \notin T_{u_{a',b'}}\mathscr{P}(O) \quad \forall (a', b') \in V',$$

где $u_{a',b'} \in U_{a',b'}$.

Выберем две различные пары $(a'_i, b'_i) \in V'$, $i = 1, 2$. Учитывая утверждение 21, выводим, что для каждой пары (a'_i, b'_i) найдется некоторая горизонтальная 2-ломаная $L_2(O, u_{a'_i,b'_i}) \subset \mathscr{P}(O)$. В результате получаем замкнутую горизонтальную 6-ломаную

$$L_2(O, u_{a'_1,b'_1}) \cup I_1 \cup I_2 \cup L_2(O, u_{a'_2,b'_2}),$$

где I_i — отрезок интегральной линии $\exp(s(a'_i X + b'_i Y))(w)$ такой, что $u_{a'_i,b'_i} \in I_i$.

Теорема 22 доказана.

Теорема 4 следует из свойств 18, 19 и теоремы 22.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аграчев А. А., Сачков Ю. Л.* Геометрическая теория управления. М.: Физматлит, 2005.
2. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.
3. *Gromov M.* Carnot–Carathéodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry (Prog. Math., 144). Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
4. *Agrachev A., Barilari D., Boscain U.* A comprehensive introduction to sub-Riemannian geometry. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.
5. *Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F.* Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacian. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007.
6. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.

7. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Владикавк. мат. журн. 2003. Т. 5, № 1. С. 14–34.

8. *Грешнов А. В.* Геометрия *cc*-шаров и константы в теореме Ball-Box на группалгебрах Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1040–1058.

9. *Берестовский В. Н.* Универсальные методы поиска нормальных геодезических на группах Ли с левоинвариантной субримановой метрикой // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 959–970.

10. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Экстремали левоинвариантной субфинслеровой метрики на группе Энгеля // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 735–751.

11. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 481–501.

12. *Берестовский В. Н., Зубарева И. А.* Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.

13. *Ardentov A., Le Donne E., Sachkov Yu.* A sub-Finsler problem on the Cartan group // Proc. Steklov Inst. Math. 2019. V. 304. P. 42–59.

14. *Ardentov A. A., Sachkov Yu. L.* Maxwell strata and cut locus in the sub-Riemannian problem on the Engel group // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. V. 22, N 8. P. 909–936.

15. *Ардентов А. А., Сачков Ю. Л.* Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.

16. *Сачков Ю. Л., Сачкова Е. Ф.* Анормальное множество для $(2,3,5,8)$-распределения // Мат. заметки. 2021. Т. 109, № 2. С. 318–320.

17. *Mashtakov A. P.* Algorithms and software solving a motion planning problem for nonholonomic five-dimensional control systems // Progr. Syst.: Theory Appl. 2012. V. 3. P. 3–29.

18. *Сачков Ю. Л., Ардентов А. А., Маштаков А. П.* Конструктивное решение задачи управления на основе метода нильпотентной аппроксимации // Программные системы: теория и приложения (Труды международной конференции «Программные системы: теория и приложения», ИПС им. А. К. Айламазяна РАН, г. Переславль-Залесский, май 2009). Переславль-Залесский: Университет города Переславля, 2009. Т. 1. С. 5–23.

19. *Sachkov Yu. L.* Sub-Riemannian Cartan sphere // Dokl. Math. 2022. V. 106, N 3. P. 462–466.

20. *Monti R., Pigati A., Vittone D.* Existence of tangent lines to Carnot–Carathéodory geodesics // Calc. Var. 2018. V. 57. P. 57–75.

21. *Грешнов А. В.* О равномерных и NTA-областях на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1018–1035.

22. *Грешнов А. В., Жуков Р. И.* Горизонтальная соединимость на канонической 3-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коранга 2 // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 736–746.

23. *Greshnov A. V.* Optimal horizontal joinability on the Engel group // Atti Accad. Naz. dei Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. Rend. Lincei Mat. Appl. 2021. V. 32, N 3. P. 535–547.

24. *Грешнов А. В.* Метод Аграчева — Барилари — Боскайна и оценки числа звеньев горизонтальных ломаных, соединяющих точки в канонической группе Карно $G_{3,3}$ // Оптимальное управление и динамические системы. К 95-летию академика Реваза Валериановича Гамкрелидзе. Тр. МИАН. М.: МИАН, 2023. Т. 321. С. 108–117.

25. *Грешнов А. В., Жуков Р. И.* Горизонтальная соединимость на 5-мерной 2-ступенчатой группе Карно с горизонтальным распределением коразмерности 2 // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 2. С. 205–218.

26. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

27. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

28. *Capogna L., Garofalo N.* Non tangentially accessible domains for Carnot–Carathéodory metrics and a Fatou type theorem // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 1995. V. 321, N 12. P. 1565–1570.

29. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA-domains for Carnot–Carathéodory metrics // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4,

N 4–5. P. 403–432.

Поступила в редакцию 10 июня 2024 г.
После доработки 4 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Грешнов Александр Валерьевич (ORCID 0000-0002-1218-2767)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru

Жуков Роман Иванович(ORCID 0009-0007-0251-4995)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
eifromdc@yandex.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.553

ЗАМЕЧАНИЕ О ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЯХ, РАЦИОНАЛЬНЫХ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

О. А. Иванова, С. Н. Мелихов

Аннотация. Исследованы голоморфные в полицилиндрической области функции, рациональные по части переменных при произвольно зафиксированных остальных. Доказано, что такие функции можно представить в виде отношения многочленов от этих переменных, коэффициенты которых голоморфны по остальным переменным. При этом применяется метод Кронекера доказательства критерия рациональности голоморфной в окрестности точки 0 функции одной комплексной переменной, использующий свойства ганкелевых матриц.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.511

Ключевые слова: голоморфная функция, рациональная функция, ганкелева матрица.

1. Введение

Пусть $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$ — произведение односвязных областей в $\mathbb{C}$. В настоящей работе изучаются функции, голоморфные в Ω и рациональные по переменным $z_1, \ldots, z_M$, $1 \le M < N$, при любых фиксированных остальных. Такие функции для любых $z_j \in \Omega_j$, $M+1 \le j \le N$, можно представить в виде отношения многочленов от переменных $z_1, \ldots, z_M$, коэффициенты и степени которых зависят от $z_{M+1}, \ldots, z_N$. Возникает естественный вопрос о том, можно ли формальные степени таких многочленов выбрать не зависящими от $z_{M+1}, \ldots, z_N$, а их коэффициенты — голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$. Основной результат данной работы — теорема 1 — положительно отвечает на этот вопрос. Мы предлагаем доказательство этого результата, поскольку в известной нам литературе его не нашли.

При доказательстве теоремы 1 используется метод Кронекера [1], установившего с его помощью критерий рациональности голоморфной функции одной комплексной переменной в терминах ее тейлоровских коэффициентов (см. также [2, разд. 7, § 2]). Существенную роль в нем играют свойства ганкелевых матриц. Особенностью рассмотренной в статье ситуации является то, что элементы таких матриц здесь являются голоморфными функциями. Внимание авторов к упомянутому методу привлекла работа Сичака [3], использовавшего его при доказательстве достаточного условия рациональности функции многих комплексных переменных. Потребность исследовать «почти» рациональные функции возникла при изучении циклических векторов и инвариантных подпространств системы операторов частного обратного сдвига в пространствах функций, голоморфных в полицилиндрических областях, в частности (и тогда речь идет о «почти» многочленах), в пространстве всех целых в $\mathbb{C}^N$ функций (см., например, [4]).

© 2024 Иванова О. А., Мелихов С. Н.

2. Основной результат

Далее $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$; Ω_j, $1 \leq j \leq N$, — односвязные области в $\mathbb{C}$, содержащие точку 0; $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_N$; $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Для $z \in \mathbb{C}^N$ полагаем $z' := (z_2, \ldots, z_N)$; $\Omega' := \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_N$.

Теорема 1. *Пусть функция f голоморфна в Ω, отлична от тождественного нуля и рациональна по переменным $z_1, \ldots, z_M$, $1 \leq M < N$, при произвольно зафиксированных остальных. Тогда f можно представить в виде $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, где P, Q — многочлены от переменных $z_1, \ldots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$ коэффициентами.*

Доказательство. Мы следуем идее доказательства критерия Кронекера рациональности функции одной комплексной переменной [1, § X, XI]. Доказательство упомянутого критерия Кронекера, связанное с ганкелевыми матрицами, содержится, например, в [2, разд. 7, § 2]. Приведем соответствующие рассуждения с необходимой адаптацией к рассматриваемой многомерной ситуации.

Вначале покажем нужное для $M = 1$. Для любого $z' \in \Omega'$ найдется $k = k(z') \in \mathbb{N}$ такое, что f представляется в виде

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k-1} a_j(z') z_1^j}{\sum\limits_{q=0}^{k} b_q(z') z_q^l}, \quad z \in \Omega. \tag{1}$$

Существует $\varepsilon > 0$, для которого круг $\{z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| < \varepsilon\}$ содержится в Ω_1. В этом круге функцию f можно разложить в ряд Тейлора по переменной z_1:

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} c_s(z') z_1^s, \quad z' \in \Omega'. \tag{2}$$

Из равенств

$$c_s(z') = \frac{1}{s!} \frac{\partial^s f}{\partial z_1^s}(0, z'), \quad z' \in \Omega', \ s \in \mathbb{N}_0, \tag{3}$$

следует, что функции c_s, $s \in \mathbb{N}_0$, голоморфны в Ω'.

Если не более конечного числа функций c_s ненулевые в Ω', то представление f в виде (2) является тем, которое нужно доказать. Пусть бесконечное число функций c_s являются ненулевыми в Ω'. В силу (1) в Ω' выполняются равенства

$$\sum_{s=0}^{j} c_s b_{j-s} = a_j, \ 0 \leq j \leq k-1, \qquad \sum_{s=j-k}^{j} c_s b_{j-s} = 0, \ j \geq k. \tag{4}$$

Для $m, l \in \mathbb{N}_0$, $z' \in \Omega'$ введем матрицы

$$\mathscr{C}_{m,l}(z') := \begin{pmatrix} c_m(z') & c_{m+1}(z') & \cdots & c_{m+l}(z') \\ c_{m+1}(z') & c_{m+2}(z') & \cdots & c_{m+l+1}(z') \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ c_{m+l}(z') & c_{m+l+1}(z') & \cdots & c_{m+2l}(z') \end{pmatrix}.$$

Из равенств (4) и того, что для любого $z' \in \Omega'$ хотя бы один из коэффициентов $b_q(z')$ отличен от 0, вытекает, что $\det \mathscr{C}_{m,l}(z') = 0$ для всех $z' \in \Omega'$, $m \in \mathbb{N}_0$,

$l \geq k$. Выберем $r > 0$ такое, что замкнутый поликруг $\overline{D}_r := \{z' \in \Omega' \mid |z_j| \leq r,\ 2 \leq j \leq N\}$ содержится в Ω'. Введем множества

$$M_p := \{z' \in \overline{D}_r \mid k(z') = p\}, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ясно, что $\overline{D}_r = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} M_p$. Вследствие теоремы Бэра о категориях, примененной к полному метрическому пространству $\overline{D}_r$ с обычной евклидовой метрикой, существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого множество M_{k_0} не является нигде не плотным в $\overline{D}_r$. Тогда замыкание M_{k_0} в $\overline{D}_r$ содержит некоторое непустое открытое множество $V \subset \Omega'$. Это влечет, что $\det C_{m,l} = 0$ в V, а значит, и в Ω' для всех $m \in \mathbb{N}_0$ и $l \geq k_0$.

Воспользуемся таким свойством альтернативной стабильности матриц $\mathscr{C}_{m,l}$: если для $l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $z' \in \Omega'$ выполняются равенства $\det \mathscr{C}_{m+t,l}(z') = 0$ для любого $t \in \mathbb{N}_0$, то либо все определители $\det \mathscr{C}_{m+1+t,l-1}(z')$, $t \in \mathbb{N}_0$, равны 0, либо все они не равны 0 (см. [2, разд. 7, § 2, задачи 19, 20]). В силу этого свойства найдется $r_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $r_0 \leq k_0$, $\det \mathscr{C}_{m,r_0} = 0$ в Ω' для любых $m \geq k_0 - r_0$, и существует $z'_0 \in \Omega'$, для которого $\det \mathscr{C}_{m,r_0-1}(z'_0) \neq 0$ для всех $m \geq k_0 - r_0 + 1$. Введем множество

$$\Omega'_0 := \{z' \in \Omega' \mid \det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z') \neq 0\},$$

непустое и открытое в Ω'. Из теоремы единственности для голоморфных функций следует, что множество $\{z' \in \Omega' \mid \det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z') = 0\}$ нигде не плотно в Ω' (см., например, [5, гл. II, § 8, п. 21, теорема 1]), а значит, Ω'_0 плотно в Ω'. Свойство стабильности влечет, что $\det \mathscr{C}_{m,r_0-1}(z') \neq 0$ для всех $m \geq k_0 - r_0 + 1$ и $z' \in \Omega'_0$.

Определим подходящим образом заново коэффициенты a_j и b_q, оставив для них предыдущие обозначения. Для каждого $z' \in \Omega'_0$ существует решение $\xi(z') = (\xi_{k_0-r_0}(z'), \xi_{k_0-r_0}(z'), \cdots, \xi_{k_0}(z'))$ системы

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}(z')\xi_s(z') = 0, \quad 1 \leq j \leq r_0,$$

для которого $\xi_{k_0}(z') = 1$. Из формул Крамера следует, что все функции ξ_s, $k_0 - r_0 \leq s \leq k_0$, могут быть представлены в следующем виде:

$$\xi_s(z') = \frac{\eta_s(z')}{\det \mathscr{C}_{k_0-r_0+1,r_0-1}(z')}, \quad z' \in \Omega'_0, \tag{5}$$

где функции η_s, $k_0 - r_0 \leq s \leq k_0$, голоморфны в Ω'. Так как для любого $z' \in \Omega'_0$ первая строка матрицы $\mathscr{C}_{k_0-r_0,r_0}(z')$ является линейной комбинацией остальных ее строк, то для $z' \in \Omega'_0$ выполняется равенство

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_s(z')\xi_s(z') = 0.$$

Поскольку для каждого $j \geq r_0 + 1$ и всякого $z' \in \Omega'_0$ последняя строка матрицы $\mathscr{C}_{k_0-r_0+j,r_0}(z')$ является линейной комбинацией предыдущих, то вектор $\xi(z')$ для $z' \in \Omega'_0$ является решением и бесконечной системы

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}(z')\xi_s(z') = 0, \quad j \geq r_0 + 1.$$

Равенства (5) и плотность Ω_0' в Ω' влекут, что для любого $j \geq 0$ в Ω'

$$\sum_{s=k_0-r_0}^{k_0} c_{s+j}\eta_s = 0.$$

Если $r_0 < k_0$, то положим $\eta_s(z') = 0$ при $0 \leq s \leq k_0 - r_0 - 1$, $z' \in \Omega'$. Тогда $\sum\limits_{s=0}^{k_0} c_{s+j}\eta_s = 0$ в Ω' для любого $j \in \mathbb{N}_0$. Положим $b_q(z') = \eta_{k_0-q}(z')$, $0 \leq q \leq k_0$, $z' \in \Omega'$. Коэффициенты a_j определим равенствами

$$a_j := \sum_{s=0}^{j} c_s b_{j-s}, \quad 0 \leq j \leq k_0 - 1.$$

Так как $\sum\limits_{s=j-k_0}^{j} c_s b_{j-s} = 0$ в Ω' для любого $j \geq k_0$, то функция f имеет представление

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{k_0-1} a_j(z')z_1^j}{\sum\limits_{q=0}^{k_0} b_q(z')z_1^q}, \quad z \in \Omega, \tag{6}$$

обладающее требуемыми свойствами при $M = 1$.

Предположим, что $2 \leq M \leq N-1$ и доказываемое утверждение верно для $M-1$. Зафиксируем $z_j \in \Omega_j$, $M+1 \leq j \leq N$. Функцию f можно представить в виде $f(z) = A(z_1, \ldots, z_M)/B(z_1, \ldots, z_M)$, где A, B — взаимно простые многочлены от переменных $z_1, \ldots, z_M$, зависящие от зафиксированных $z_j \in \Omega_j$, $M+1 \leq j \leq N$. Согласно [6, лемма 2.2.2] B не имеет корней в $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_M$. Поэтому для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq M$, функция $B(z_1, \ldots, z_M)$ является ненулевым многочленом от z_1. Значит, функция $f(z)$ рациональна по z_1 для любых $z_j \in \Omega_j$, $2 \leq j \leq N$. По предыдущей части f имеет вид, как в (6). При этом коэффициенты a_j и b_q выражаются описанным выше образом через функции c_s, $s \in \mathbb{N}_0$. Вследствие равенств (33) и того, что $B \neq 0$ в $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_M$, все функции c_s рациональны по $z_2, \ldots, z_M$. Поэтому все коэффициенты a_j и b_q рациональны по переменным $z_2, \ldots, z_M$ при любых фиксированных $z_j \in \Omega_j$, $M+1 \leq j \leq N$. По предположению каждая из функций a_j и b_q является отношением многочленов от $z_2, \ldots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$ коэффициентами. Поэтому функция f представляется нужным образом и для M. Теорема доказана. $\square$

Отметим простое утверждение, которое влекут приведенные при доказательстве предыдущей теоремы рассуждения.

Следствие 1. *Пусть функция f голоморфна в Ω и является многочленом от переменных $z_1, \ldots, z_M$, $1 \leq M < N$, при любых фиксированных остальных. Тогда f является многочленом от переменных $z_1, \ldots, z_M$ с голоморфными в $\Omega_{M+1} \times \cdots \times \Omega_N$ коэффициентами.*

Доказательство. Будем использовать обозначения из доказательства теоремы 1. В этом случае при $M = 1$ в равенстве (1) можно взять $b_0(z') = 1$ и $b_q(z') = 0$, $1 \leq q \leq k = k(z')$, $z' \in \Omega'$. Тогда для $z' \in \Omega'$ выполняются соотношения $a_j(z') = c_j(z')$, если $0 \leq j \leq k-1$, и $c_j(z') = 0$, если $j \geq k$. По доказательству теоремы 1 для $M = 1$ существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого замыкание множества M_{k_0} в Ω' содержит непустое открытое подмножество Ω' и $c_j = 0$ в M_{k_0} для всех

$j \geq k_0$. Значит, $c_j = 0$ в Ω' для любого $j \geq k_0$. С помощью доказанного для $M = 1$ случай с $M \geq 2$ сводится к $M - 1$. $\square$

Благодарность. Авторы выражают признательность профессору А. В. Домрину и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kronecker L.* Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen // Monatsber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. (Berlin). 1881. P. 535–600.
2. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. М.: Наука, 1978. Т. II.
3. *Siciak J.* A note on rational functions of several complex variables // Ann. Polonici Math. 1962. V. 12. P. 139–142.
4. *Ivanov P. A., Melikhov S. N.* Pommiez operator in spaces of analytic functions of several complex variables // J. Math. Sci. 2021. V. 252, N 3. P. 345–359.
5. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Т. II.
6. *Rudin W., Stout E. L.* Boundary properties of functions of several complex variables // J. Math. Mech. 1965. V. 14. P. 991–1005.

Поступила в редакцию 1 декабря 2023 г.
После доработки 1 декабря 2023 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Иванова Ольга Александровна
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону 344090
neo_ivolga@mail.ru

Мелихов Сергей Николаевич (ORCID 0000-0002-5895-9607)
Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича,
ул. Мильчакова, 8-а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Ватутина, 53, Владикавказ 362025
snmelihov@yandex.ru, snmelihov@sfedu.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.518.1

ПЛОЩАДЬ ОБРАЗОВ КЛАССОВ ИЗМЕРИМЫХ МНОЖЕСТВ НА ГРУППАХ КАРНО С СУБЛОРЕНЦЕВОЙ СТРУКТУРОЙ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для липшицевых во внутреннем смысле отображений, определенных на классах измеримых подмножеств групп Карно произвольной глубины и принимающих значения на группах Карно с сублоренцевой структурой, выведен сублоренцев аналог формулы площади. В частности, введено адекватное определение меры Хаусдорфа для образов измеримых множеств с учетом специфики их структуры.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.512

Ключевые слова: субриманова квазиметрика, измеримое множество, липшицево отображение, группа Карно, сублоренцева структура, мера Хаусдорфа, формула площади.

Тематика данного исследования — геометрическая теория меры на сублоренцевых структурах. Такие структуры являются неголономным обобщением геометрии Минковского [1]. Исследования как самих структур, так и их приложений в физике [2, 3] начались относительно недавно. Статья [4] является одной из первых работ, в которых исследовались подобные структуры. Для дальнейшего ознакомления с современными результатами, установленными для сублоренцевых структур и их обобщений (например, на случай многомерной временно́й координаты), см., например, [5] и список цитируемых источников.

Настоящая статья распространяет результаты работы [5] о формуле площади образов открытых множеств групп Карно при липшицевых в субримановом смысле отображениях на классы измеримых множеств (см. также более частные случаи в [6, 7]). Напомним, что, в отличие от классического случая отображений евклидовых пространств, о продолжениях на открытые множества липшицевых отображений подмножеств субримановых структур, принимающих значения на другой субримановой структуре, известно только в некоторых частных случаях (см., например, [8]). Кроме того, в силу специфики сублоренцевых шаров, которые не являются ограниченными множествами, определение аналога меры Хаусдорфа для образов множеств, не являющихся открытыми, требует новый подход, отличный от примененного в [5] и других работах для образов открытых множеств. По этим причинам вывод результата требует создание нового подхода как к определению меры образов, так и к способу доказательства основного результата.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0006).

© 2024 Карманова М. Б.

В разд. 1 приведены все необходимые определения и установленные ранее факты, в разд. 2 содержится напоминание определения сублоренцевой меры Хаусдорфа для билипшицевых образов открытых множеств и исследуются некоторые тонкие свойства структуры субриманова дифференциала. В разд. 3 введено новое определение меры Хаусдорфа для случая измеримых множеств, прокомментирована специфика и установлена корректность. Разд. 4 содержит основные результаты о формуле площади.

1. Группы Карно и липшицевы отображения

Определение 1.1 (см., например, [9]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^{M} V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1},\ j < M,\ [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x.

Определение 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V, причем

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_{k-1}+1}, \dots, X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_k} & \text{— базис } V_k,\ 1 < k \le M. \end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Если

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(\mathbf{0}), \quad y = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} z_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu+\beta|_h = \deg X_j}} F^j_{\mu,\beta} x^\mu y^\beta$$

при $\deg X_j > 1$, и для каждого N-мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ с началом в $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j$ с началом

в x. Таким образом, интегральная линия поля $\sum\limits_{j=1}^{N} z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(x)$.

Определение 1.3. Константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы* $\mathbb{G}$.

Замечание 1.4. Так как на группе Карно по определению верно

$$[X_i, X_j] = \sum_{k:\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k,$$

где все $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны, а при вычислении координат $\{z_j\}_{j=1}^N$ используется формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то константы $\{F^j_{\mu,\beta}\}_{j,\mu,\beta}$ всегда определяются однозначно.

Определение 1.5. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (*относительно* $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

В качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную известной метрике Карно — Каратеодори на группах Карно.

Определение 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно и $w = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(v)$. Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v,w) = \max\Big\{\Big(\sum_{j:\deg X_j = 1} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \Big(\sum_{j:\deg X_j = 2} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot 2}}, \dots, \Big(\sum_{j:\deg X_j = M} w_j^2\Big)^{\frac{1}{2\cdot M}}\Big\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v,w) < r\}$ называется *шаром относительно* d_2 *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\mathrm{Box}_2(v,r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности, и для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника. Кроме того, d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори (см., например, [10]), описываемую ниже.

Определение 1.7. Абсолютно непрерывная кривая называется *горизонтальной*, если в почти каждой точке x ее касательный вектор принадлежит $V_1(x)$.

Определение 1.8. Значение *метрики Карно — Каратеодори* между точками равно точной нижней грани длин горизонтальных кривых, соединяющих эти точки.

Недостаток метрики Карно — Каратеодори состоит в том, что структура шаров в этой метрике в настоящее время известна только в нескольких частных случаях.

Свойство 1.9. *Образ шара* $\mathrm{Box}_2(v,r)$ *при отображении* θ_v^{-1} *— декартово произведение* M *(евклидовых) шаров, диаметры которых равны* $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.

Определение 1.10. Определим функцию множества $\mathscr{H}^\nu$ для $A \subset \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\mathscr{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\delta\to 0} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i,r_i) \supset A,\ y_i \in A,\ r_i < \delta\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A.

Здесь и далее символ ω_l обозначает объем евклидова шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^l$.

Замечание 1.11. Определение 1.10 отличается от классического тем, что центры шаров покрытия берутся на самом множестве. Однако для исследуемых в статье множеств такое отличие не является принципиальным в силу абсолютной непрерывности по мере $\mathscr{H}^N$ (см. ниже свойство 1.12).

Из [5, разд. 1] следует

Свойство 1.12. *Функция множества* $\mathscr{H}^\nu$ *является мерой (в частности, она обладает свойством счетной аддитивности на* σ*-алгебре борелевских множеств). Кроме того, меры* $\mathscr{H}^\nu$ *и* $\mathscr{H}^N$*, где мера Хаусдорфа* $\mathscr{H}^N$ *построена по метрике вида* $\sqrt{\langle\cdot, g\cdot\rangle}$*, определяемой римановым тензором* g *на* $\mathbb{G}$*, абсолютно непрерывны одна относительно другой и удовлетворяют условию удвоения. Производная* $\mathscr{H}^N$ *по* $\mathscr{H}^\nu$ *в точке* $x \in \mathbb{G}$ *равна* $\sqrt{\det(g(x))}$.

Замечание 1.13. То, что $\mathscr{H}^\nu$ является мерой, можно доказать из абсолютной непрерывности $\mathscr{H}^\nu$ относительно $\mathscr{H}^N$ и квазиаддитивности $\mathscr{H}^\nu$ (см. определение 3.16). Абсолютная непрерывность устанавливается стандартно, а квазиаддитивность — по той же схеме, что в теореме 3.17, с очевидными изменениями.

Определение 1.14. Функция множества $\mathscr{H}^\nu$ называется *субримановой мерой.*

Свойство 1.15. *С помощью свойства* 1.9 *непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы* $\mathbb{G}$ *относительно* d_2 *равна*

$$\nu = \sum_{j=1}^{M} j \dim V_j.$$

Рассмотрим еще одну группу Карно $\widetilde{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли $\widetilde{V} = \bigoplus_{k=1}^{\widetilde{M}} \widetilde{V}_k$ и базисными полями $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\widetilde{N}}$. Квазиметрику, построенную на $\widetilde{\mathbb{G}}$ так же, как описано в определении 1.6, обозначим символом $\widetilde{d}_2$, а отображение нормальных координат относительно произвольного элемента $x \in \widetilde{\mathbb{G}}$ — символом $\widetilde{\theta}_x$.

Приведем определение субриманова аналога дифференцируемости для рассматриваемого случая и некоторые важные результаты. Прежде всего, напомним определение горизонтального гомоморфизма в виде, в котором нам потребуется это понятие.

Определение 1.16. Отображение $\mathscr{L} : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ групп Карно называется *горизонтальным гомоморфизмом*, если оно сохраняет групповую операцию и переводит любую горизонтальную кривую в горизонтальную.

Напомним определение субриманова аналога дифференцируемости.

Определение 1.17 ([10], см. также [11]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathscr{L}_x : \mathbb{G} \to \widetilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widetilde{d}_2(\varphi(y), \mathscr{L}_x\langle y\rangle) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \to 0 \text{ при } \Omega \ni y \to x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathscr{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\varphi(x)$.

Определение 1.18. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \to \widetilde{\mathbb{G}}$. Если φ липшицево относительно квазиметрик d_2 и $\widetilde{d}_2$, то будем говорить, что φ *липшицево во внутреннем смысле.*

Обозначение 1.19. Для матрицы размера $\widetilde{N} \times N$ здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из $\widetilde{V}_k$, а номер столбца — полям из V_k, $k = 1, \dots, M$. Таким образом, размер этих блоков равен $\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k$.

Следующий результат установлен в [10] для открытых множеств и С. К. Водопьяновым [12] (см. также, например, [11], где этот результат доказан для более общего случая пространств Карно — Каратеодори) для измеримых множеств.

Теорема 1.20. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество и $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно hc-дифференцируемо почти всюду. Кроме того, матрица гомоморфизма $\widehat{D}\varphi$ (построенная в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widetilde{X}_j\}_{j=1}^{\widetilde{N}}$) состоит из «диагональных» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоков, а остальные элементы нулевые.*

Обозначение 1.21. Обозначим «диагональные» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоки, из которых составлена матрица $\widehat{D}\varphi$, символами $\widehat{D}_k\varphi$ (или, чтобы не перегружать текст, $\widehat{D}_k$), $k = 1, \dots, M$.

Из теоремы Егорова следует

Свойство 1.22. *В условиях теоремы 1.20 для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое множество Σ, что $\mathscr{H}^\nu(\Sigma) < \varepsilon$, и на $D \setminus \Sigma$ отображение φ непрерывно hc-дифференцируемо всюду (см., например,* [10]).

2. Сублоренцева структура и свойства субриманова дифференциала

Здесь и далее в статье будем предполагать, что для $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ справедливо $\widetilde{M} \geq M$ и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$. Тогда и топологическая размерность $\widetilde{N}$ группы $\widetilde{\mathbb{G}}$ строго больше, чем N.

Опишем сублоренцеву структуру на $\widetilde{\mathbb{G}}$.

Обозначение 2.1. Для каждого $k = 1, \dots, M$ выберем целые числа $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$.

Кроме того, положим $\widetilde{n}_0 = 0$ и $\widetilde{n}_k = \sum\limits_{l=1}^{k} \dim \widetilde{V}_l$ для $k = 1, \dots, \widetilde{M}$.

Определение 2.2. Пусть $w = \exp\Big(\sum\limits_{i=1}^{\widetilde{N}} w_i \widetilde{X}_i\Big)(v)$, $v, w \in \widetilde{\mathbb{G}}$. Положим величину $\mathfrak{d}_2^2(v,w)$ равной

$$\max_{k=1,\dots,\widetilde{M}} \left\{ \left| \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \right|^{1/k} \right.$$
$$\left. \times \operatorname{sgn}\left(\sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^- +1}^{\widetilde{n}_k} w_j^2 - \sum_{j=\widetilde{n}_{k-1}+1}^{\widetilde{n}_{k-1}+\dim \widetilde{V}_k^-} w_j^2 \right) \right\}.$$

Множество $\big\{ w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(v,w) < r^2 \big\}$ называется *шаром относительно* $\mathfrak{d}_2^2$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* v и обозначается символом $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)$.

Для исследования метрических свойств лежащих в $\widetilde{\mathbb{G}}$ поверхностей достаточно рассматривать приведенный выше аналог квадрата расстояния $\mathfrak{d}_2^2$ без перехода к корням из участвующих в определении величин. Опишем сначала меру на классах лежащих в $\widetilde{\mathbb{G}}$ поверхностей, построенную с помощью такой системы шаров.

В [5] мера на образе $B \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ открытого множества из $\mathbb{G}$ определяется как

$$\omega_{\mathfrak{d}} \cdot \lim_{\delta \to 0} \inf \Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{\mu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B) \supset B,\ x_i \in B,\ r_i < \delta \Big\}, \tag{1}$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества B, $\omega_{\mathfrak{d}}$ — заранее выбранный нормировочный коэффициент, а символ $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ означает компоненту связности множества $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$, содержащую точку x_i.

В [5] рассмотрен случай $\mu = \nu$ и $\omega_{\mathfrak{d}} = \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k}$. В настоящей статье будем работать с этими же значениями.

Замечание 2.3. Требование использовать пересечение $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap^{x_i} B$ вместо $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \cap B$ связано со спецификой структуры, а именно с неограниченностью шаров (см. подробности и комментарии в [6, 13]).

Если B — образ открытого множества из $\mathbb{G}$, полученный при горизонтальном гомоморфизме L, удовлетворяющем условиям [5, теорема 2.4], то определенная таким способом функция множества (1) является мерой [5].

Перейдем к нашему случаю, когда рассматривается образ измеримого множества при липшицевом во внутреннем смысле отображении. Предположим дополнительно, что это отображение непрерывно hc-дифференцируемо в топологии области определения (пример выполнения таких условий приведен в свойстве 1.22).

Так как образ отображения в общем случае не является открытым, то рассмотрение компоненты связности не имеет смысла. Поэтому компоненту связности будем заменять другим объектом, являющимся образом подмножества некоторого открытого множества. Для определения новой функции множества и доказательства его корректности опишем класс исследуемых отображений φ и выведем основные свойства его субриманова дифференциала.

Обозначение 2.4. В каждом «диагональном» $(\dim \widetilde{V}_k \times \dim V_k)$-блоке $\widehat{D}_k$ субриманова дифференциала $\widehat{D}\varphi$ (см. обозначение 1.21) часть, состоящую из

первых $\dim V_k^-$ строк, обозначим через $\widehat{D}_k^-$, а оставшуюся — символом $\widehat{D}_k^+$, $k = 1, \dots, M$.

Прежде чем сформулировать требования на класс рассматриваемых отображений, приведем некоторые наблюдения. Для точек, в которых ранг субриманова дифференциала максимален, свойства блоков описаны подробно в [5, теоремы 2.1, 3.3, замечание 3.4].

Обозначение 2.5. Положим

$$D_0 = \{y \in D : \operatorname{rank} \widehat{D}\varphi(y) < N\}.$$

Рассмотрим точку $y \in D_0$, в которой ранг $\widehat{D}\varphi$ не максимален, т. е. не превосходит $N-1$. Тогда ранг r_k по крайней мере одного из блоков $\widehat{D}_k$ строго меньше, чем $\dim V_k$. Так как $\widehat{D}\varphi$ — горизонтальный гомоморфизм, то если ранг $\widehat{D}\varphi$ не максимален, то и ранг $\widehat{D}_1$ строго меньше, чем $\dim V_1$. Фиксируем такое k и рассмотрим соответствующий блок $\widehat{D}_k$. Необходимое условие того, что пересечение $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi$ и

$$\left\{w \in \widetilde{\mathbb{G}} : \mathfrak{d}_2^2(x, w) \le 0\right\} \tag{2}$$

состоит из одной точки, это максимально возможный ранг $\widehat{D}_k^+$, т. е. равный r_k. Аналогичное утверждение справедливо и для всех остальных блоков с номерами от 1 до M. Устанавливается это рассуждениями, примененными в [6, теорема 9]. Таким образом, имеет смысл рассматривать отображения φ, для субримановых дифференциалов которых выполняется данное условие.

Далее, для $\widehat{D}_k^+$ существует ортогональное преобразование O_k такое, что строки $\widehat{D}_k^+ O_k$ лежат в $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$.

Замечание 2.6. Если $r_k = 0$, то из приведенных выше рассуждений следует, что весь блок $\widehat{D}_k$ нулевой, т. е. образ всех полей степени k будет состоять из единственной точки.

Обозначение 2.7. Если ранг $\widehat{D}_k$ равен $r_k < \dim V_k$, $r_k > 0$, T_k — матрица, составленная из строк $\widehat{D}_k$, а O_k — ортогональное преобразование, переводящее строки $\widehat{D}_k$ в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$, то символ $[T_k O_k]$ обозначает часть матрицы $T_k O_k$, состоящую из ее первых r_k столбцов.

Предположим, что в $[\widehat{D}_k^+ O_k]$ существуют r_k линейно независимых строк, составленная из которых (квадратная) матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$ такова, что длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{r_k} - c$ всюду для некоторого $c > 0$.

Теорема 2.8. *Фиксируем такое k, для которого ранг $\widehat{D}_k^+$ равен $r_k < \dim V_k$, $r_k > 0$, и ортогональное отображение O_k, переводящее строки $\widehat{D}_k$ в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$.*

Пусть для r_k линейно независимых строк $[\widehat{D}_k^+ O_k]$ с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$, из которых составлена матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$, выполнено свойство, что длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{r_k} - c$. Тогда выполнение этого свойства для матрицы, составленной из строк с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$, не зависит от выбора преобразования O_k.

Кроме того, если матрица $\widehat{L}_{r_k}^+$ существует для некоторого набора строк и некоторого O_k, то для сохранения оценки на длины столбцов ни одну из строк $\widehat{L}_{r_k}^+$ нельзя заменить строкой из $[\widehat{D}_k^- O_k]$.

Замечание 2.9. В [5, теорема 2.1] допущена неточность: а именно, там сказано о единственности матрицы $\widehat{L}_k^+$. Единственность есть, если $\dim \widetilde{V}_k^- =$

$\dim \widetilde{V}_k - \dim V_k$. Если же $\dim \widetilde{V}_k^- < \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k$, то выбор $\widehat{L}_k^+$ может не быть единственным. Принципиально важным свойством является то, что ни одну строку из $\widehat{L}_k^+$ нельзя заменить строкой $[\widehat{D}_k^- O_k]$ (иначе оценка на длины столбцов не будет выполняться). Это следует из рассуждений, приведенных в цитируемых утверждениях из [14], на которые идет ссылка в [5, теорема 2.1]. Также, так как $\widehat{L}_k^+$ не фигурирует в формулировках основных утверждений о формуле площади, эта неточность в рассуждениях не влияет на правильность доказательства и корректность установленных формул.

Доказательство теоремы 2.8. Установим первое свойство об оценке длин столбцов; для этого проанализируем свойства O_k. По определению $\widehat{L}_{r_k}^+$ справедливо соотношение

$$\widehat{L}_{r_k}^+ = [\widetilde{L}_{r_k}^+ O_k],$$

где матрица $\widetilde{L}_{r_k}^+$ размера $r_k \times \dim V_k$ составлена из линейно независимых строк $\widehat{D}_k^+$ с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$. По выбору O_k имеем

$$\widetilde{L}_{r_k}^+ O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)} = 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)}.$$

Здесь матрица $O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)}$ составлена из последних $\dim V_k - r_k$ столбцов O_k, а $0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)}$ — нуль-матрица размера $r_k \times (\dim V_k - r_k)$. Таким образом, последние $\dim V_k - r_k$ столбцов O_k ортогональны всем r_k строкам $\widetilde{L}_{r_k}$.

Рассмотрим вспомогательную матрицу

$$\mathbb{L}_k = \begin{pmatrix} \widetilde{L}_{r_k}^+ \\ (O_{\dim V_k \times (\dim V_k - r_k)})^T \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbb{L}_k O_k = \begin{pmatrix} \widehat{L}_{r_k}^+ & 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)} \\ 0_{(\dim V_k - r_k) \times r_k} & E_{\dim V_k - r_k} \end{pmatrix},$$

где $E_{\dim V_k - r_k}$ — единичная матрица размера $\dim V_k - r_k$. Следовательно,

$$(\mathbb{L}_k O_k)^{-1} = O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\widehat{L}_{r_k}^+\right)^{-1} & 0_{r_k \times (\dim V_k - r_k)} \\ 0_{(\dim V_k - r_k) \times r_k} & E_{\dim V_k - r_k} \end{pmatrix}.$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \widehat{D}_k^- \mathbb{L}_k^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k (\mathbb{L}_k O_k)^{-1} \\ = \left([\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1} \quad 0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}\right), \end{aligned}$$

где $0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}$ — нуль-матрица размера $\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)$.

Так как комбинация ортогональных преобразований также ортогональна, для доказательства независимости длин столбцов будем рассматривать преобразования матрицы $\widetilde{L}_{r_k}^+ O_k$. Пусть $\widehat{O}_k$ — новое ортогональное преобразование блока $\widehat{D}_k$. Тогда справедливо

$$(\mathbb{L}_k O_k \widehat{O}_k)^{-1} = \widehat{O}_k^T (\mathbb{L}_k O_k)^{-1}$$

и

$$\begin{aligned} \widehat{D}_k^- O_k \widehat{O}_k \left(\mathbb{L}_k O_k \widehat{O}_k\right)^{-1} = \widehat{D}_k^- O_k \widehat{O}_k \widehat{O}_k^T O_k^T \mathbb{L}_k^{-1} \\ = \widehat{D}_k^- \mathbb{L}_k^{-1} \left([\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1} \quad 0_{\dim V_k^- \times (\dim V_k - r_k)}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, длины столбцов $[\widehat{D}_k^- O_k](\widehat{L}_{r_k}^+)^{-1}$ не зависят от ортогонального преобразования.

Чтобы показать, что для сохранения оценки на длины столбцов ни одну из строк $\widehat{L}_{r_k}^+$ нельзя заменить строкой из $[\widehat{D}_k^- O_k]$, достаточно применить рассуждения из леммы 2.12 в [14], транспонировав $\widehat{L}_{r_k}^+$ и $[\widehat{D}_k^- O_k]$ и рассмотрев в качестве вспомогательной матрицу

$$\left([\widehat{D}_k^- O_k]^T \quad \left(\widehat{L}_{r_k}^+\right)^T\right)$$

(см. также [6, теорема 2.1]). Теорема доказана.

Предположение 2.10. *Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, и $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$, $k = 1, \dots, M$.*

Пусть еще

(1) *$D \subset \mathbb{G}$ — такое измеримое множество, что прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(D_0))$ компактен;*

(2) *$\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение, которое непрерывно hc-дифференцируемо всюду в топологии области определения;*

(3) *в точках, где ранг $\widehat{D}\varphi$ максимален, в каждом $\widehat{D}_k^+$ найдутся $\dim V_k$ строк, составленная из которых (квадратная) матрица $\widehat{L}_k^+$ такова, что длины столбцов $\widehat{D}_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходят $\frac{1}{\dim V_k} - c$ для некоторого $c > 0$ на всем множестве $D \setminus D_0$, где $c > 0$ не зависит от $y \in D \setminus D_0$, $k = 1, \dots, M$;*

(4) *на множестве $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ;*

(5) *если ранг $\widehat{D}\varphi$ в некоторой точке не является максимальным, то ранг $\widehat{D}_k^+$ равен рангу $r_k \leq \dim V_k$ блока $\widehat{D}_k$; кроме того, в $\widehat{D}_k^+$ существует по крайней мере один набор линейно независимых строк с номерами $i_1, \dots, i_{r_k}$ такой, что блок $\widehat{L}_{r_k}^+$, полученный поворотом этих строк преобразованием O_k в пространство $\mathbb{R}^{r_k} \times 0^{\dim V_k - r_k}$, обладает теми же свойствами, что блок $\widehat{L}_k^+$ из п. 3, с заменой $\widehat{D}_k^-$ на $[\widehat{D}_k^- O_k]$ и $\frac{1}{\dim V_k} - c$ на $\frac{1}{r_k} - c$, $k = 1, \dots, M$ (см. теорему 2.8).*

Замечание 2.11. П. 1 предположения 2.10 выполняется для всех компактных множеств.

Замечание 2.12. Построить простейшие примеры отображений, описанных в предположении 2.10, можно следующим образом. Рассмотрим невырожденный горизонтальный гомоморфизм групп Карно $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$, где $\widetilde{M} \geq M$, и хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim \widetilde{V}_{k_0} > \dim V_{k_0}$, а $\dim \widetilde{V}_k \geq \dim V_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, и $\dim \widetilde{V}_k^- \in \overline{[0, \dim \widetilde{V}_k - \dim V_k]}$, $k = 1, \dots, M$. При необходимости базисные поля в образе можно масштабировать (т. е. умножить на константы), чтобы длины столбцов $\widehat{D}_k^-(\widehat{L}_k^+)^{-1}$ не превосходили $\frac{1}{\dim V_k} - c$ для некоторого $c > 0$. При таких преобразованиях структура группы Карно сохранится, изменятся только структурные константы.

Для образа каждого из отображений

$$w \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w \rangle,$$

$y \in D$, справедливо приведенное ниже утверждение.

Теорема 2.13 [5]. *Фиксируем $y \in D$ и $x = \varphi(y)$. Тогда при выполнении условий предположения* 2.10 *верны следующие свойства.*

1. *Пересечение множества* (2) *с* $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)$ *будет состоять из единственной точки* x.
2. *Пересечение шара* $\operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r)$ *с множеством* $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)$ *будет ограниченным.*
3. *На* $\operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)$ *(для каждого фиксированного* y*) значения* $(\widetilde{d}_2)^2$ *и* $\mathfrak{d}_2^2$ *локально билипшицево эквивалентны.*

Замечание 2.14. В п. 3 формулировки теоремы 2.13 говорится о том, что если зафиксировать точку $y \in D$ и рассмотреть горизонтальный гомоморфизм $L = \widehat{D}\varphi(y)$, то на $\operatorname{Im} L$ значения $(\widetilde{d}_2)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ будут локально билипшицево эквивалентны.

Подчеркнем, что утверждения теоремы 2.13 справедливы и для точек $y \in D_0$, в которых ранг $\widehat{D}\varphi(y)$ не является максимальным. Это следует из тех же аргументов, что применены при доказательстве [5, теорема 2.1].

3. Меры на образе

Цель данного раздела — показать, что для отображений, удовлетворяющих условиям предположения 2.10, функция множества из данного ниже нового определения 3.10 является мерой.

Прежде чем вводить новую функцию множества, приведем некоторые наблюдения и опишем свойства отображения φ и его hc-дифференциала.

Обозначение 3.1. Пусть $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ является hc-дифференцируемым всюду и на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ.

Фиксируем $y \in D$ и $\varepsilon > 0$, тогда существует такое $\delta_y(\varepsilon) > 0$, что если $y, w \in D$ и $d_2(y, w) < \delta_y(\varepsilon)$, то

$$\widetilde{d}_2(\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \varphi(w)) < \varepsilon d_2(y, w).$$

Для каждого $x = \varphi(y)$, $y \in D \setminus D_0$, $x \notin \varphi(D_0)$, и $\varepsilon > 0$ символом $r_{x,\varepsilon}$ обозначим

$$\sup\{r > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)\rangle \subset \operatorname{Box}_2(y, \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\})\}.$$

Также для $y = \varphi^{-1}(x)$, где $y \in D \setminus D_0$ и $\varphi(y) \notin \varphi(D_0)$, положим $\overline{r}_{y,\varepsilon} = r_{x,\varepsilon}$. Если же $y \in D_0$ или $\varphi(y) \in \varphi(D_0)$, то символ $\overline{r}_{y,\varepsilon}$ равен значению

$$\sup\{r > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \operatorname{Box}_2(y, \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\})\}$$

(если $y \notin D_0$ и $\varphi(y) \in \varphi(D_0)$, то $\big(\ker \widehat{D}\varphi(y)\big)^{\perp} = \mathbb{G}$), где $x = \varphi(y)$. Положим $r_{x,\varepsilon} = \sup\limits_{y:\varphi(y)=x} \{\overline{r}_{y,\varepsilon}\}$.

Обозначение 3.2. Для точки y, где $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$, и значений $\varepsilon > 0$ и $r \leq \overline{r}_{y,\varepsilon}$, $r > 0$, определим величину $\widehat{r}_{r,y,\varepsilon}$, равную

$$\inf\{\widehat{r} > 0 : \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \operatorname{Box}_{\mathfrak{d}}(x, r) \cap^x \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \operatorname{Box}_2(y, \widehat{r})\}.$$

Напомним, что если $y \notin D_0$, то $(\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} = \mathbb{G}$.

Если же $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, то положим

$$\widehat{r}_{r,y,\varepsilon} = \min\left\{\max\left\{1, \frac{1}{\operatorname{Lip}(\varphi)}\right\} r, \delta_y(\varepsilon), \varepsilon\right\}.$$

Свойство 3.3. *Из определения величины* $\widehat{r}_{r,y,\varepsilon}$ *следует, что*

$$\widehat{r}_{r,y,\varepsilon} \le \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\}.$$

Свойство 3.4. *Пусть* $K \ge \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$.
Тогда если $0 < r < \min\{\varepsilon, \overline{r}_{y,\varepsilon}/K\}$ *и* $\widehat{D}\varphi(y) \ne 0$, *то* $r \le \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}$.
Если $0 < r < \min\{\delta_y(\varepsilon), \varepsilon\}$ *и* $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, *то* $r \le \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}$.

Доказательство. Для случая $\widehat{D}\varphi(y) = 0$ утверждение очевидно.
Пусть $\widehat{D}\varphi(y) \ne 0$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$\mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} = \widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(\varphi(y),r)\rangle\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

а в силу особенностей структуры $\ker \widehat{D}\varphi$ (см. теорему 1.20 и, например, [11]) и определения 1.6 квазиметрики d_2 имеем

$$\inf\{t : \mathrm{Box}_2(y,t) \supset \mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}\} = r.$$

Так как

$$\begin{aligned}\widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(y,r)\rangle &= \widehat{D}\varphi(y)\langle \mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}\rangle \\ &\subset \mathrm{Box}_2(\varphi(y),Kr) \cap \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y) \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y),Kr) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)\end{aligned}$$

для $K \ge \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, то $\mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}$ является подмножеством

$$\widehat{D}\varphi(y)^{-1}\langle \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y),Kr) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)\rangle \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}.$$

В силу того, что $K \cdot r < \overline{r}_{y,\varepsilon}$, и, следовательно, это пересечение по определению лежит в $\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon})$ или совпадает с ним, причем $\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon})$ можно заменить на

$$\mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

то

$$\mathrm{Box}_2(y,r) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp} \subset \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{K\cdot r,y,\varepsilon}) \cap (\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp},$$

и свойство доказано.

Замечание 3.5. В силу билипшицевости $\widehat{D}\varphi(y)$ на $(\ker \widehat{D}\varphi(y))^{\perp}$ и п. 3 теоремы 2.13 верно $T_1(y)r \le \widehat{r} \le T_2(y)r$, $0 < T_1 \le T_2 < \infty$. Исключением является случай, когда $\widehat{D}\varphi(y)$ — нулевой оператор.

Свойство 3.6. *В силу п. 2 теоремы 2.13 значения* $r_{x,\varepsilon}$, $\overline{r}_{y,\varepsilon}$ *положительны для всех* $\varepsilon > 0$, $x \in \varphi(D)$, $y \in D$. *Это свойство следует из ограниченности пересечений образов субримановых дифференциалов* $\mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)$ *с шарами* $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r)$, $y \in D$, $x = \varphi(y)$.

Обозначение 3.7. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество. Предположим, что отображение $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ является hc-дифференцируемым и на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ.

Фиксируем $x \in \varphi(D)$ и рассмотрим $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)$, $r > 0$.

Пусть π_x — проекция

$$\varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle,$$

где $\varphi(y) = x$. Для $x \in \varphi(D)$, $\varepsilon > 0$ и $r < r_{x,\varepsilon}$ обозначим символом $\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x, r)$ множество

$$\begin{cases} \pi_x^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)), \text{ если } \operatorname{rank}\widehat{D}\varphi(y) = N \text{ и } x \notin \varphi(D_0), \\ \bigcup\limits_{y:\varphi(y)=x} \pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)), \\ \qquad\qquad \text{если } \operatorname{rank}\widehat{D}\varphi(y) < N \text{ и } x \notin \varphi(D \setminus D_0), \\ \mathscr{A}, \text{ если } x \in \varphi(D \setminus D_0) \cap \varphi(D_0), \end{cases} \tag{3}$$

где $\pi_{r,y,\varepsilon}$ — отображение

$$\begin{cases} \varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \text{ если } w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon}), \ \rho = \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}, \text{ и } \widehat{D}\varphi(y) \neq 0, \\ \varphi(w) \mapsto \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle, \text{ если } w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{r,y,\varepsilon}) \text{ и } \widehat{D}\varphi(y) = 0, \end{cases} \tag{4}$$

$\mathscr{A}$ — объединение множеств

$$\pi_x^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y_x)),$$

где элементу x соответствует $y_x \notin D_0$, $\varphi(y_x) = x$, и

$$\bigcup_{y \in D_0 : \varphi(y) = x} \pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x, \min\{r, \overline{r}_{y,\varepsilon}\}) \cap^x \mathrm{Im}\,\widehat{D}\varphi(y)).$$

Заметим, что $\pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}$ в общем случае не является отображением, так как одному значению $\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle$ может соответствовать более одного элемента w' такого, что $\widehat{D}\varphi(y)\langle w'\rangle = \widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle$ и $\varphi(w') \neq \varphi(w)$.

Замечание 3.8. Из (4) следует, что при $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$ если $\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle = \widehat{D}\varphi(y)\langle w'\rangle$, где $w \in \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon})$, а $w' \notin \mathrm{Box}_2(y, \widehat{r}_{\rho,y,\varepsilon})$, то прообраз $\pi_{r,y,\varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y)\langle w\rangle)$ точку $\varphi(w)$ содержит, но точку $\varphi(w')$ содержать не будет.

Аналогичное утверждение верно и для случая $\widehat{D}\varphi(y) = 0$.

Замечание 3.9. Использование $\pi_{r,y,\varepsilon}$ вместо π_x обусловлено необходимостью ограниченности пересечений $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x,r) \cap \varphi(D_0)$ и их прообразов.

Определение 3.10. Пусть $A \subset \widetilde{\mathbb{G}}$ — подмножество образа измеримого множества $D \subset \mathbb{G}$, полученного при липшицевом во внутреннем смысле отображении φ, которое hc-дифференцируемо всюду на области определения. Предположим, что на $D \setminus D_0$ отображение φ биективно на свой образ. Определим функцию множества $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ следующим образом:

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \inf\Big\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset A, \ x_i \in A,$$
$$r_i < \min\{\varepsilon, r_{x_i,\varepsilon}\}, \delta_i = \varepsilon \text{ при } \varphi^{-1}(x_i) \cap D_0 \neq \varnothing \text{ и } \delta_i = 1 \text{ при } x_i \notin \varphi(D_0)\Big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A вида $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset A$.

Заметим, что функции множества, описываемые в определениях 1.10 и 3.10, зависят от наборов векторных полей из определений 1.6 и 2.2 функций расстояния и аналога квадрата расстояния.

Для дальнейшего доказательства формулы площади необходимо установить, что функция множества из определения 3.10 является мерой для исследуемого класса отображений. Для этого докажем следующие свойства.

1. Абсолютная непрерывность функции множества Φ, равной
$$\mathbb{G} \supset A \mapsto \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(A)), \tag{5}$$
относительно $\mathscr{H}^{\nu}$ на $\mathbb{G}$.
2. Квазиаддитивность (см. определение 3.16) на открытых шарах функции (5). Промежуточный шаг — оценка сверху значения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(A))$ через $\mathscr{H}^{\nu}(A)$.
3. Вычисление в явном виде производной функции множества (5) по мере $\mathscr{H}^{\nu}$ на $\mathbb{G}$.

Отсюда и из предыдущих пунктов будет следовать

4. Восстановление $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ по производной, а также ее счетная аддитивность. В частности, выведем формулу площади.

Замечание 3.11. Фактически приведенная выше схема повторяет схему [5, разд. 1]. Однако доказательство квазиаддитивности функции множества (5) из аддитивности на удаленных шарах не настолько очевидна, как для $\mathscr{H}^{\nu}$.

Установим первое свойство.

Теорема 3.12. *Функция множества* (5) *абсолютно непрерывна относительно* $\mathscr{H}^{\nu}$ *на* $\mathbb{G}$.

Доказательство. Пусть $\Sigma \subset D$ имеет $\mathscr{H}^{\nu}$-меру нуль. Покажем, что для произвольного $\widehat{\varepsilon} > 0$ будет выполняться
$$\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(\Sigma)) < \widehat{\varepsilon}.$$
Схема доказательства состоит из двух шагов. На первом строится покрытие субримановыми шарами множества Σ, структура которого согласуется с определением $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ в образе, такое, что сумма мер шаров достаточно мала, а на втором доказывается, что сумма мер образов этих шаров также будет мала.

Шаг 1. Фиксируем произвольные $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$ и рассмотрим покрытие множества Σ шарами $\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ такое, что
$$r_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}/K, \quad i \in \mathbb{N},$$
и сумма их $\mathscr{H}^{\nu}$-мер не превосходит $\widehat{\varepsilon}/K^{\nu} > 0$, т. е.
$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu} < \frac{\widehat{\varepsilon}}{K^{\nu}},$$
где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, причем $K < \infty$ не зависит от точек Σ.

Покажем, что покрытие с такими свойствами существует. Действительно, пусть $\{\mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$ — такой набор шаров, что их объединение содержит Σ, и сумма их $\mathscr{H}^{\nu}$-мер не превосходит заданного $\widetilde{\varepsilon} > 0$. В силу обобщенного неравенства треугольника можем считать, что $t_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$. Фиксируем $j \in \mathbb{N}$ и рассмотрим пересечение $\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma$. Пусть $\widetilde{K} < \infty$. Система шаров
$$\{\mathrm{Box}_2(y, r) : y \in \Sigma,\ r < \min\{\varepsilon, \delta_y(\varepsilon), \overline{r}_{y,\varepsilon}\}/\widetilde{K},\ \mathrm{Box}_2(y, r) \subset \mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$$

образует покрытие Витали множества $\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma$. Тогда можно выбрать такую дизъюнктную систему $\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, r_{j,l})\}_{l\in\mathbb{N}}$, что

$$\mathrm{Box}_2(t_j, r_j) \cap \Sigma \subset \bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l}), \tag{6}$$

где число $L < \infty$ зависит только от группы $\mathbb{G}$. Так как по условию

$$\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_{j,l},\, r_{j,l}) \subset \mathrm{Box}_2(t_j, r_j),$$

то сумма их $\mathscr{H}^\nu$-мер не превосходит $\prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} r_j^\nu$. Тогда и сумма $\mathscr{H}^\nu$-мер всех шаров $\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l})\}_{l\in\mathbb{N}}$ будет не более чем $L^\nu \prod\limits_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} r_j^\nu$. Повторяя эту процедуру для всех $j \in \mathbb{N}$ и полагая $\widetilde{K} = LK$ и $\widetilde{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon}/(KL)^\nu$, получим искомое покрытие

$$\{\mathrm{Box}_2(y_{j,l}, Lr_{j,l}),\ y_{j,l} \in \Sigma,\ r_{j,l} < \min\{\varepsilon, \delta_{y_{j,l}}(\varepsilon), \overline{r}_{y_{j,l},\varepsilon}\}/(KL)\}_{j,l\in\mathbb{N}}$$

множества Σ, где сумма мер шаров покрытия не превосходит $\widehat{\varepsilon}/K^\nu$.

Для упрощения обозначений будем использовать символ $\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ для построенного покрытия.

Шаг 2. Перейдем в группу $\widetilde{\mathbb{G}}$. Тогда

$$\widehat{D}\varphi(y_i)\langle \mathrm{Box}_2(y_i, r_i)\rangle \subset \mathrm{Box}_2(x_i, Kr_i) \cap \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i) \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i),$$

где $x_i = \varphi(y_i)$, а $\mathfrak{d}_2^2 \le \big(\widetilde{d}_2\big)^2$, $i \in \mathbb{N}$. В силу теоремы 2.13 такое пересечение ограничено, и, кроме того,

$$\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i) = \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap^{x_i} \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i).$$

Так как для $A = \varphi(\Sigma)$ в силу определения (3) (см. обозначение 3.7) множество $\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, Kr_i)$ совпадает с

$$\pi_{x_i}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \cap^{x_i} \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_i))$$

или с

$$\bigcup_{y_{x_i}:\varphi(y_{x_i})=x_i} \pi_{Kr_i, y_{x_i},\varepsilon}^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i, \min\{Kr_i, \overline{r}_{y_{x_i},\varepsilon}\}) \cap^{x_i} \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_{x_i})),$$

или с объединением этих двух множеств, $i \in \mathbb{N}$, то

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i, Kr_i)\big) \supset \varphi(\Sigma).$$

Действительно, пусть $v \in \varphi(\Sigma)$. Тогда существует $w \in \Sigma$ такое, что $\varphi(w) = v$. Кроме того, найдется шар $\mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$ из покрытия множества Σ, содержащий точку w. Тогда если $x_w = \varphi(y_w)$, то

$$\widehat{D}\varphi(y_w)\langle \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)\rangle \subset \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_w, Kr_w) \cap \operatorname{Im} \widehat{D}\varphi(y_w).$$

Кроме того, по выбору покрытия

$$r_w < \min\{\varepsilon, \delta_{y_w}(\varepsilon), \overline{r}_{y_w,\varepsilon}\}/K, \tag{7}$$

где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Покажем, что для $v = \varphi(w)$ верно

$$v = \pi_{x_w}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle) \quad \text{или} \quad v \in \pi_{Kr_w, y_w, \varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle);$$

отсюда будет следовать, что

$$v \in \mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_w, Kr_w).$$

Если $y_w \notin D_0$, то из (7) вытекает $Kr_w < r_{x_w,\varepsilon}$, поэтому значение $\pi_{x_w}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle)$ определено корректно и оно совпадает с v (см. (3)).

Далее, для $y_w \in D_0$ выражение

$$\pi_{Kr_w, y_w, \varepsilon}^{-1}(\widehat{D}\varphi(y_w)\langle w\rangle) \tag{8}$$

также определено корректно для всех $w \in \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$. Действительно, пусть $\widehat{D}\varphi(y_w) \neq 0$. Тогда в силу (7) имеем $\max\{r_w, Kr_w\} < \overline{r}_{y_w,\varepsilon}$, поэтому ρ из соотношения (4), равное в нашем случае $\min\{Kr_w, \overline{r}_{y_w,\varepsilon}\}$, совпадает с Kr_w. В свою очередь, из свойства 3.4 следует $r_w \le \widehat{r}_{K\cdot r_w, y_w, \varepsilon}$, а так как $w \in \mathrm{Box}_2(y_w, r_w)$, то и v совпадет с одним из значений (8).

Если же $\widehat{D}\varphi(y_w) = 0$, то в силу (7) выполняется $r_w < \min\{\varepsilon, \delta_{y_w}(\varepsilon)\}$ и, следовательно, $r_w \le \widehat{r}_{K\cdot r_w, y_w, \varepsilon}$.

Таким образом, для заданных $\widehat{\varepsilon} > 0$ и $\varepsilon > 0$ найдено покрытие из определения 3.10 величины $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ такое, что ему соответствует сумма, не превосходящая $\widehat{\varepsilon}$, выбранного произвольным образом. Тогда и точная нижняя грань сумм из определения 3.10 не будет превосходить $\widehat{\varepsilon}$, и предельное значение при $\varepsilon \to 0$ также будет оцениваться этой величиной.

Теорема доказана.

Теорема 3.13. *Значение $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}$ корректно определено для образов измеримых множеств $E \subset D$ в том смысле, что множество покрытий из определения 3.10 величины $\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(E))$ непусто для любого $\varepsilon > 0$.*

Кроме того, существует такое $T = T(D) < \infty$, что

$$\mathscr{H}_{\mathfrak{d}}^{\nu}(\varphi(E)) < T\mathscr{H}^{\nu}(E), \quad \text{где } T < \infty \text{ и зависит только от } \mathbb{G} \text{ и } \varphi. \tag{9}$$

Доказательство. Так как бóльшая часть рассуждений проводится по той же схеме, что и для теоремы 3.12, ограничимся описанием шагов, имеющих принципиальные отличия.

Если $\mathscr{H}^{\nu}(E) = 0$, то все доказано в теореме 3.12.

Пусть теперь $\mathscr{H}^{\nu}(E) = S > 0$. Фиксируем $\widehat{\varepsilon} > 0$ и рассмотрим такое покрытие $\{\mathrm{Box}_2(t_j, r_j)\}$ из определения $\mathscr{H}^{\nu}(E)$ множества E, что

$$\left| \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_j^{\nu} - \mathscr{H}^{\nu}(E) \right| < \widehat{\varepsilon} \cdot \mathscr{H}^{\nu}(E).$$

Повторяя аргументы первого шага доказательства теоремы 3.12, получим новое покрытие $\{\mathrm{Box}(y_i, r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, $y_i \in E$, множества E, которому соответствует сумма

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \sum_{i\in\mathbb{N}} r_i^{\nu} < L^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(E)(1 + \widehat{\varepsilon}),$$

где число $L < \infty$ такое же, как в (6).

Осталось повторить рассуждения второго шага доказательства теоремы 3.12, получить набор $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(\varphi(y_i), Kr_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$, где $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$, и убедиться, что

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i) \supset \varphi(E).$$

Этому покрытию соответствует сумма

$$(KL)^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(E)\big(1+\widehat{\varepsilon}\big). \tag{10}$$

Окончательно выводим, что множество покрытий из определения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$ для образов измеримых множеств E непусто и значение $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(E))$ контролируется значением $\mathscr{H}^{\nu}(E)$, т. е. верно (9). Теорема доказана.

Еще один результат — утверждение о значении $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(D_0))$.

Теорема 3.14. *Имеем* $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(D_0)) = 0$.

Доказательство. Схема повторяет шаги доказательства теоремы 3.13 почти дословно. Различие состоит в том, что в соотношении, аналогичном (10), будет присутствовать множитель $\varepsilon > 0$ из соотношения $Kr_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}$, $K = \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$ (см. (7), а также начало доказательства теоремы 3.12 и определение 3.10).

Действительно, пусть $E = D_0$. Если $\mathscr{H}^{\nu}(D_0) = 0$, то все доказано в теореме 3.12. Если же $\mathscr{H}^{\nu}(D_0) > 0$, построим, пользуясь рассуждениями доказательства теоремы 3.13, покрытие

$$\{\mathrm{Box}_2(y_i, r_i),\ y_i \in D_0,\ r_i < \min\{\varepsilon, \delta_{y_i}(\varepsilon), \overline{r}_{y_i,\varepsilon}\}/K\}.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, Kr_i)\big) \supset \varphi(D_0), \tag{11}$$

где $x_i = \varphi(y_i)$, $i \in \mathbb{N}$ (см. подробности в доказательстве второго шага теоремы 3.12). Кроме того, в силу определения 3.10 и аргументов, аналогичных выводу (10), получаем, что (11) соответствует сумма

$$\varepsilon(KL)^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(D_0)(1+\widehat{\varepsilon}),$$

где $\varepsilon, \widehat{\varepsilon} > 0$ взяты произвольным образом. Иными словами, эта сумма может быть сделана сколь угодно близкой к нулю. Теорема доказана.

Для доказательства квазиаддитивности функции множества (5) нам потребуется следующее утверждение, касающееся слагаемых r_i^{ν}, $i \in \mathbb{N}$, в определении $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}$, где $i \in \mathbb{N}$ таковы, что $x_i \in \varphi(D_0)$.

Теорема 3.15. *Рассмотрим множество* $\widehat{B} \subset D$ *такое, что пересечение* $\varphi^{-1}(\varphi(D_0) \cap B)$, *где* $B = \varphi(\widehat{B})$, *замкнуто, и* $\sigma > 0$. *Пусть* $\varepsilon_0 > 0$ *таково, что для всякого* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *значение* $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(B)$, *равное*

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset B,\ x_i \in B,$$
$$r_i < \min\{\varepsilon, r_{x_i,\varepsilon}\}, \delta_i = \varepsilon \text{ при } \varphi^{-1}(x_i) \cap D_0 \neq \varnothing \text{ и } \delta_i = 1 \text{ при } x_i \notin \varphi(D_0)\Big\},$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(B)$ *не более чем на* $\sigma/4$. *Тогда для достаточно малых* $\xi > 0$, $\xi < \varepsilon_0$, *и покрытий*

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)) \supset B, \quad r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\},$$

таких, что

$$\left|\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^{\nu} - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}(B)\right| < \sigma/4,$$

справедлива оценка

$$\xi\cdot\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)\cap B} r_i^{\nu} < \sigma.$$

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ — произвольное малое значение. Рассмотрим покрытие

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)) \supset B$$

из определения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\eta}(B)$. Тогда объединение

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0)\cap B}(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i))$$

согласно свойству 3.3 совпадает с образом при отображении φ подмножества η-окрестности множества $\varphi^{-1}(\varphi(D_0)\cap B) \supset D_0 \cap \widehat{B}$. Действительно, по определению $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\eta}$ верно $r_i < \min\{\eta, r_{x_i,\eta}\}$, и если y таково, что $\varphi(y) = x_i$, то величина ρ из соотношения (4) не превосходит $\min\{r_i, \overline{r}_{y,\eta}\}$; тогда $\widehat{r}_{\rho,y,\eta} \le \eta$.

Положим

$$\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0)\cap B).$$

Это множество по условию теоремы замкнуто и, следовательно, компактно.

Дальнейшая задача — рассмотреть малую величину $\xi > 0$ и заменить образ подмножества ξ-окрестности множества $\widehat{D}_0$ образом множества, содержащего ξ-окрестность $\widehat{D}_0$.

Пусть $\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}_0) > 0$. Рассмотрим его покрытие, построенное, как в доказательстве теорем 3.12 и 3.13:

$$\{\mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i),\ y_i \in \widehat{D}_0,\ \rho_i < \min\{\eta, \delta_{y_i}(\eta), \overline{r}_{y_i,\eta}\}/K\}, \tag{12}$$

где $K \ge \max\{1, \mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Из аргументов доказательств теорем 3.12 и 3.13 (где величина $\widehat{\varepsilon}$ из теоремы 3.13 взята не превосходящей единицу) следует, что

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\rho_i^{\nu} < 2L^{\nu}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}_0).$$

Кроме того, так как $\widehat{D}_0$ компактно, покрытие (12) конечно. Из компактности $\widehat{D}_0$ следует, что существует $\xi_0 = \xi_0(\eta) > 0$ такое, что

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i) \tag{13}$$

содержит ξ-окрестность множества $\widehat{D}_0$ для всякого $\xi < \xi_0$.

Фиксируем

$$\eta < \min\left\{\varepsilon_0, \frac{\sigma}{8(LK)^\nu \mathscr{H}^\nu(\widehat{D}_0)}\right\}$$

и $\xi < \min\{\xi_0(\eta), \eta\}$ и рассмотрим покрытие

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \supset B, \quad r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}, \tag{14}$$

из определения $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}$ такое, что

$$\left|\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}(B)\right| < \sigma/4. \tag{15}$$

По доказанному выше объединение

$$\bigcup_{i: x_i\in\varphi(D_0)} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) \tag{16}$$

совпадает с образом при отображении φ подмножества ξ-окрестности множества $\widehat{D}_0$. Действительно, если $r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}$, то величина ρ из свойства 3.3 для случая $\widehat{D}\varphi(y) \neq 0$ не превосходит $\min\{\xi, \overline{r}_{y,\xi}\}$, где $\varphi(y) = x_i$, и поэтому $\widehat{r}_{\rho,y,\xi} \leq \xi$. Если же $\widehat{D}\varphi(y) = 0$, то аналогично $\widehat{r}_{r_i,y,\xi} \leq \xi$. В свою очередь, ξ-окрестность множества $\widehat{D}_0$ лежит в объединении (13) в силу выбора $\xi > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\bigcup_{i: x_i\in\varphi(D_0)} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\big) &\subset \varphi\Big(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i)\Big) \\ &\subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \varphi(\mathrm{Box}_2(y_i, \rho_i)) \subset \bigcup_{i:\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Box}^\varphi_{\mathfrak{d}}(\varphi(y_i), K\rho_i)\big)\end{aligned} \tag{17}$$

(см. аргументы второго шага доказательства теоремы 3.12). Заменим в покрытии (14) объединение (16) объединением из правой части (17). Объединению из правой части (17) соответствует сумма

$$\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta \cdot (K\rho_i)^\nu < \eta \cdot 2(LK)^\nu \mathscr{H}^\nu(\widehat{D}_0) < \sigma/4.$$

Так как $\xi < \eta$, то $r_{x_i,\xi} \leq r_{x_i,\eta}$, т. е. новое покрытие корректно подходит для множества сумм, приближающих $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}$. По выбору ε_0 справедливо

$$\left|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta} - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\xi}\right| < \sigma/2,$$

а из (15) вытекает

$$\left|\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B)\right| < 3\sigma/4.$$

Если

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu \leq \sum_{i: x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \sum_{i\in\mathbb{N}} \eta \cdot (K\rho_i)^\nu,$$

то

$$\xi \cdot \sum_{i: x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu \leq \eta \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} (K\rho_i)^\nu,$$

и теорема доказана. Пусть теперь

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^\nu > \sum_{i:x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \sum_{i\in\mathbb{N}}\eta\cdot(K\rho_i)^\nu.$$

Тогда

$$\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B) \le \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\notin\varphi(D_0)} r_i^\nu + \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\eta\cdot(K\rho_i)^\nu$$
$$< \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^\nu < \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\eta}(B) + 3\sigma/4,$$

поэтому

$$\xi\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu - \eta\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}(K\rho_i)^\nu < 3\sigma/4$$

и

$$\xi\cdot\prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i:x_i\in\varphi(D_0)} r_i^\nu < \sigma.$$

Случай $\mathscr{H}^\nu(D_0)=0$ рассматривается аналогично с заменой в выводимых оценках величины $\mathscr{H}^\nu(D_0)$ на некоторое $\kappa>0$ и применением аргументов и оценок из теоремы 3.12. Теорема доказана.

Установим квазиаддитивность функции (5).

Определение 3.16 (см., например, [15, 16]). Функция множества Φ называется *квазиаддитивной*, если для любого конечного набора попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$, лежащих в некотором открытом шаре B_0, справедливо

$$\sum_{j=1}^J \Phi(B_j) \le \Phi(B_0).$$

Теорема 3.17. *Функция множества* (5) *квазиаддитивна.*

Замечание 3.18. Значение (5) на произвольном шаре B понимается как $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B\cap D))$.

Прежде чем доказывать квазиаддитивность функции (5), докажем еще одно свойство $\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}$ для открытых множеств.

Лемма 3.19. *Пусть $B\subset\mathbb{G}$ — шар. Тогда для всякого $\delta>0$ существует такой вложенный замкнутый шар $\widehat{B}\subset B$, что*

$$\left|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B})) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B))\right| < \delta.$$

Доказательство. Прежде всего приведем наблюдения о свойствах B и $\widehat{B}\subset B$. Пусть $\widehat{\varepsilon}>0$. Рассмотрим вложенный замкнутый шар $\widehat{B}\subset B$ такой, что

$$\mathscr{H}^\nu(B\setminus\widehat{B}) < \widehat{\varepsilon}.$$

Для множеств $\varphi(\widehat{B})$ и $\varphi(B)$ рассмотрим $\sigma>0$ и $\varepsilon_0=\varepsilon_0(\sigma)>0$ такие, что для всякого $\varepsilon<\varepsilon_0$ значение

$$\max\left\{\left|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B}))\right|, \left|\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(B))\right|\right\}$$

не превосходит $\sigma > 0$ (см. также формулировку теоремы 3.15, где описана величина $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}$).

Построим для $\varphi(\widehat{B})$ покрытие $\widehat{\mathscr{P}_\sigma} = \{\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, \rho_i)\}$, соответствующая которому сумма

$$\widehat{S}(\widehat{\mathscr{P}_\sigma}) = \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i \rho_i^{\nu}$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ не более чем на $\sigma > 0$. Далее, для $\varphi(B \setminus \widehat{B})$ рассмотрим покрытие $\mathscr{P}_{B\setminus\widehat{B}}$, построенное, как в доказательстве теоремы 3.13. Ему соответствует сумма, не превосходящая $T\widehat{\varepsilon}$, $T < \infty$.

Пусть теперь $\delta > 0$. Рассмотрим такое $\widehat{B} \subset B$, что

$$T\mathscr{H}^{\nu}(B \setminus \widehat{B}) < \delta/16, \tag{18}$$

возьмем $\sigma < \delta/16$ и рассмотрим соответствующее этому значению число ε_0 и покрытие $\widehat{\mathscr{P}_\sigma}$. Тогда сумма S, соответствующая построенному покрытию

$$\mathscr{P}_B = \widehat{\mathscr{P}_\sigma} \cup \mathscr{P}_{B\setminus\widehat{B}} \tag{19}$$

образа шара B, не будет отличаться от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ более, чем на $\delta/8$, и от $\widehat{S}(\widehat{\mathscr{P}_\sigma})$ более, чем на $\delta/16$.

Покажем, что эта же сумма будет приближать $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ с точностью до $3\delta/8$.

Предположим, что это не так: иными словами, так как $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}$ — точная нижняя грань, то $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ не может быть больше, чем S, поэтому если

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - S\right| > 3\delta/8,$$

то

$$\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) < S - 3\delta/8 < \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - 3\delta/8 + \delta/8 = \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B})) - \delta/4. \tag{20}$$

Построим для $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ покрытие

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\right) \supset \varphi(B)$$

такое, что

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu}$$

отличается от $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B))$ менее, чем на $\delta/16$. Рассмотрим объединение

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}: x_i\in\varphi(\widehat{B})} \left(\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)\right). \tag{21}$$

Проверим, как соотносится (21) с $\varphi(\widehat{B})$. Если (21) содержит $\varphi(\widehat{B})$, то получаем противоречие с выбором $\widehat{\mathscr{P}_\sigma}$, так как новая сумма получилась строго меньше точной нижней грани: в силу соотношений (20) сумма

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}: x_i\in\varphi(\widehat{B})} \delta_i r_i^{\nu}$$

будет меньше, чем $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$, на $3\delta/16 > 0$.

Пусть теперь (21) не содержит $\varphi(\widehat{B})$. Тогда если существует элемент $w \in \varphi(\widehat{B})$, который не принадлежит (21), то он принадлежит по крайней мере одному из множеств $\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$, где $x_i \in \varphi(B) \setminus \varphi(\widehat{B})$. Следовательно, у x_i нет прообразов в $\widehat{B}$, так что все его прообразы могут лежать только в $B \setminus \widehat{B}$. Поэтому прообраз v элемента w может принадлежать пересечению ε-окрестности U_ε множества $B \setminus \widehat{B}$ и $\widehat{B}$ (см. (3) и свойство 3.3). Построим для $U_\varepsilon \cap \widehat{B}$ покрытие, как в теореме 3.13. Его $\mathscr{H}^{\nu}$-мера не превосходит $\varepsilon \cdot P$, где $P < \infty$ зависит от B, поэтому покрытию будет соответствовать сумма, не превосходящая $\varepsilon \cdot Q$, где $Q < \infty$ зависит от B и от φ. Так как можно выбрать $\varepsilon_0 > 0$, которое обеспечивает одновременно $\sigma < \delta/16$ и $\varepsilon \cdot Q < \delta/16$, снова получаем противоречие с определением $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$ как точной нижней грани: полученная сумма будет меньше, чем $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))$, на $\delta/8 > 0$.

Таким образом,

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - S\right| \le 3\delta/8 \text{ и } \left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B)) - S\right| \le \delta/2, \tag{22}$$

поэтому

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(\widehat{B}))\right| < 3\delta/8 + \delta/8 = \delta/2$$

и тем самым

$$\left|\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B)) - \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(\widehat{B}))\right| < \delta.$$

Лемма доказана.

Замечание 3.20. Так как $\widehat{B}$ — замкнутый шар, его образ компактен и, следовательно, замкнут. Тогда и прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(\widehat{B}))$ будет замкнут, а прообраз $\varphi^{-1}(\varphi(D_0) \cap \varphi(\widehat{B}))$ компактен (см. п. 1 предположения 2.10).

Доказательство теоремы 3.17. Рассмотрим шар B_0 и набор попарно не пересекающихся шаров $\{B_j\}_{j=1}^{J}$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^{J} B_j \subset B_0.$$

Идея состоит в том, чтобы для малых величин $\xi > 0$, $\eta > 0$ и произвольного покрытия

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) \supset \varphi(B_0) \tag{23}$$

множества $\varphi(B_0)$, соответствующая которому сумма приближает значение $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}$, где все $r_i < \min\{\xi, r_{x_i,\xi}\}$, $i \in \mathbb{N}$, найти аналогичные покрытия

$$\left\{\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_{jl}, r_{jl})\right\}_{l\in\mathbb{N}}$$

для каждого $\varphi(B_j)$ такие, что

$$\sum_{j=1}^{J}\prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{l\in\mathbb{N}}\delta_{jl}r_{jl}^{\nu} \le \prod_{k=1}^{M}\omega_{\dim V_k}\cdot\sum_{i\in\mathbb{N}}\delta_i r_i^{\nu} + \eta.$$

Фиксируем $\sigma > 0$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ таково, что для каждого из шаров B_j, $j = 1, \dots, J$, значения $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\varepsilon}(\varphi(B_j))$ отличаются от соответствующих пределов $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_j))$ не более, чем на $\sigma/(4J)$, если $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Далее, рассмотрим замкнутый шар $\widehat{B}_0 \subset B_0$ такой, что

$$\left|\mathscr{H}^\nu_\mathfrak{d}(\varphi(\widehat{B}_0)) - \mathscr{H}^\nu_\mathfrak{d}(\varphi(B_0))\right| < \sigma$$

(см. лемму 3.19). Для $\xi > 0$, $\xi < \varepsilon_0$, и $\sigma > 0$ рассмотрим покрытие вида (23) множества $\varphi(\widehat{B}_0)$, удовлетворяющее условиям теоремы 3.15 для σ и ξ, и дополним это покрытие до покрытия множества $\varphi(B_0)$ так же, как это сделано в лемме 3.19 (см. (19)). Тогда соответствующая ему сумма отличается от значения $\mathscr{H}^\nu_\mathfrak{d}(\varphi(B_0))$ не более чем на $\sigma/2$ (см. (22)). Пусть для покрытия множества $\varphi(B_0)$ верно

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^\nu > 0. \tag{24}$$

В силу определения 3.10 каждое пересечение $\mathrm{Box}^\varphi_\mathfrak{d}(x_i, r_i)$, если $x_i \notin \varphi(D_0)$, является образом при отображении φ подмножества, которое лежит в шаре $\mathrm{Box}_2(y_i, s)$, где $\varphi(y_i) = x_i$ и $s < \xi$ (см. обозначение 3.1). Если же $x_i \in \varphi(D_0 \cap \widehat{B}_0)$, то объединение

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(D_0\cap\widehat{B}_0)} \left(\mathrm{Box}^\varphi_\mathfrak{d}(x_i, r_i)\right) \tag{25}$$

является образом подмножества ξ-окрестности компактного множества $\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0 \cap \widehat{B}_0)) \supset D_0 \cap \widehat{B}_0$ (см. обозначения 3.1, 3.2 и 3.7 и свойство 3.3). Кроме того, (25) совпадает с множеством

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(\widehat{D}_0\cap\widehat{B}_0)} \left(\mathrm{Box}^\varphi_\mathfrak{d}(x_i, r_i)\right).$$

Согласно теореме 3.15 объединению (25) в сумме (24) соответствуют слагаемые, сумма которых не превосходит σ.

Кроме того, для $x_i \in \varphi(B_0) \setminus \varphi(\widehat{B}_0)$ объединению

$$\bigcup_{i:x_i\in\varphi(B_0)\setminus\varphi(\widehat{B}_0)} \left(\mathrm{Box}^\varphi_\mathfrak{d}(x_i, r_i)\right) \tag{26}$$

в сумме (24) соответствуют слагаемые, сумма которых не превосходит $\sigma/16$ (см. (18)).

Заменим каждый из шаров B_j вложенным шаром $\widehat{B}_j$ меньшего радиуса таким, что если $y \notin B_j$, то $\mathrm{Box}_2(y, \xi) \cap \widehat{B}_j = \varnothing$, $j = 1, \dots, J$. Тогда по теореме 3.13 для каждого из множеств $\varphi(B_j \setminus \widehat{B}_j)$ существует такое покрытие из определения 3.10, что соответствующая ему сумма не будет превосходить

$$T\mathscr{H}^\nu(B_j \setminus \widehat{B}_j), \quad T < \infty.$$

Обозначим каждое такое покрытие символом $\mathscr{P}_j$, $j = 1, \dots, J$. Каждый шар $\widehat{B}_j$ можно выбрать таким образом, что $\mathscr{H}^\nu(B_j \setminus \widehat{B}_j) < P\xi$, где $P < \infty$ зависит только от множества D.

При построении новых покрытий для каждого B_j рассмотрим элементы (23), где $x_i \in \varphi(B_j)$, $j = 1, \dots, N$. Так как если $x_i \in \varphi(\widehat{D}_0)$, прообразы x_i могут принадлежать нескольким B_j, поэтому объединение (25) может входить в каждое из новых покрытий. Поскольку среди x_i из объединения (26) могут также оказаться $x_i \in \varphi(D_0)$, то и элементы (26) могут входить в каждое из

новых покрытий. Если же $x_i \in \varphi(B_j)$ и $x_i \notin \varphi(D_0)$, то x_i имеет единственный прообраз в B_j, поэтому множество $\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$ не может быть использовано как элемент покрытия для любого другого $\varphi(B_k)$, $k \neq j$.

Покажем, что для каждого фиксированного j выбранные наборы

$$\left\{\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) : x_i \in \varphi(B_j)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

покрывают $\varphi(\widehat{B}_j)$. Фиксируем $j = 1, \dots, J$. Если $y \in \widehat{B}_j \subset B_0$, то для $\varphi(y)$ найдется по крайней мере одно содержащее его множество $\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i)$. Если $x_i \in \varphi(D_0)$, то все прообразы $\varphi^{-1}(\varphi(y))$, для которых определены соотношения (3) и (4), лежат в подмножестве ξ-окрестности (относительно d_2) прообразов x_i (см. обозначение 3.7). Так как по предположению по крайней мере один из таких прообразов $\varphi(y)$ принадлежит $\widehat{B}_j$, существует хотя бы один прообраз x_i, который не может лежать вне B_j. Если же $x_i \notin \varphi(D_0)$, то рассуждения аналогичны.

Как итог, получены покрытия каждого из $\varphi(B_j)$, равные

$$\left\{\mathrm{Box}^{\varphi}_{\mathfrak{d}}(x_i, r_i) : x_i \in \varphi(B_j)\right\}_{i\in\mathbb{N}} \cup \mathscr{P}_j,$$

$j = 1, \dots, N$. Им соответствует сумма, не превосходящая

$$\prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} + J\cdot\sigma + J\cdot\sigma/16 + J\cdot TP\cdot\xi,$$

где $T, P < \infty$ зависят только от множества D. Таким образом, для произвольного малого $\eta > 0$ достаточно взять $\sigma < \eta/(8J)$ и $\xi < \eta/(8JTP)$. Тогда с учетом того, что $\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}$ — точная нижняя грань, выводим с учетом свойства, установленного в (22), что

$$\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_j)) \le \sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d},\xi}(\varphi(B_j)) + \sigma/4 \le \prod_{k=1}^{M} \omega_{\dim V_k} \cdot \sum_{i\in\mathbb{N}} \delta_i r_i^{\nu} + 3\eta/8$$
$$\le \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_0)) + \sigma/2 + 3\eta/8 < \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_0)) + \eta.$$

Так как $\eta > 0$ взято произвольно, то

$$\sum_{j=1}^{J} \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_j)) \le \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(B_0)).$$

Следовательно, функция множества (5) квазиаддитивна. Теорема доказана.

Из результатов [15, 16] получаем следующее свойство.

Теорема 3.21. *Функция* (5) *дифференцируема почти всюду по мере* $\mathscr{H}^{\nu}$*: для почти всех* $x \in D$ *существует предел*

$$\Phi'(y) = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}\big(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))\big)}{\mathscr{H}^{\nu}(\mathrm{Box}_2(y,r))} = D_{\mathscr{H}^{\nu}} \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(y).$$

Кроме того, функция (5) *восстанавливается по своей производной: для* $A \subset D$ *верно*

$$\mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(\varphi(A)) = \int_A D_{\mathscr{H}^{\nu}} \mathscr{H}^{\nu}_{\mathfrak{d}}(y)\, d\mathscr{H}^{\nu}(y).$$

4. Формула площади

В настоящем разделе установим формулу площади для отображений, определенных на измеримых подмножествах.

Обозначение 4.1. Положим $\widehat{D}_0 = \varphi^{-1}(\varphi(D_0))$.

В силу аддитивности интеграла выводим

$$\Phi(A) = \int\limits_A \Phi'(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y) = \int\limits_{A\setminus\widehat{D}_0} \Phi'(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y) + \int\limits_{A\cap\widehat{D}_0} \Phi'(y)\, d\mathscr{H}^\nu(y)$$
$$= \Phi(A\setminus\widehat{D}_0) + \Phi(A\cap\widehat{D}_0) = \Phi(A\setminus\widehat{D}_0).$$

Следовательно, $\Phi'(y) = 0$ для почти всех $y \in \widehat{D}_0$.

Известно [17], что почти все точки измеримого множества являются точками плотности. Иными словами, для почти всех $y \in D$ выполняется

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^N(B(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^N(B(y,r))} = 1,$$

где $B(y,r)$ — евклидов шар радиуса $r > 0$ с центром в $y \in D$. Тогда почти всюду верно

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^N(\mathrm{Box}_2(y,r))} = \lim_{r\to 0} \frac{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))} = 1.$$

Таким образом, для вывода формулы площади необходимо исследовать значения $\Phi'(y)$, где $y \notin \widehat{D}_0$ и y — точка плотности $D\setminus\widehat{D}_0$.

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi : D \to \widetilde{\mathbb{G}}$ удовлетворяет условиям предположения* 2.10. *Тогда*

$$\Phi'(y) = \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^+\varphi(y)^*\widehat{D}_k^+\varphi(y) - \widehat{D}_k^-\varphi(y)^*\widehat{D}_k^-\varphi(y)\bigr)}$$

для почти всех $y \in D\setminus\widehat{D}_0$ и справедлива формула площади

$$\int\limits_{A\cap D} \prod_{k=1}^{M} \sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^+\varphi(y)^*\widehat{D}_k^+\varphi(y) - \widehat{D}_k^-\varphi(y)^*\widehat{D}_k^-\varphi(y)\bigr)}\, d\mathscr{H}^\nu(y) = \mathscr{H}_0^\nu(\varphi(A)). \quad (27)$$

Доказательство. Без ограничения общности будем рассматривать множество точек плотности $D\setminus\widehat{D}_0$. Воспользуемся идеей работы [18] и результатами [5]. Фиксируем точку плотности $y \in D\setminus\widehat{D}_0$, рассмотрим шар $B = \mathrm{Box}_2(y,r)$, $r > 0$, такой, что $\overline{\mathrm{Box}_2(y,r)} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$, и его образ $\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Так как $\overline{\mathrm{Box}_2(y,r)} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$, существует $\widehat{r} > r$ такое, что и $\overline{\mathrm{Box}_2(y,\widehat{r})} \cap \widehat{D}_0 = \varnothing$. Положим $\widehat{B} = \mathrm{Box}_2(y,\widehat{r})$. Для произвольного $\sigma > 0$ существует такое $r_0 > 0$, что если $r < r_0$, то

$$\frac{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap D)}{\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))} > 1 - \sigma. \quad (28)$$

Будем считать, что $\widehat{r} < r_0$ для взятого произвольным образом малого $\sigma > 0$ и, кроме того, что

$$\mathscr{H}^\nu\bigl(\widehat{B}\setminus B\bigr) < \frac{\sigma}{2}\cdot\mathscr{H}^\nu(B) \quad (29)$$

и на $\widehat{B}\cap D$ выполняется

$$\widetilde{d}_2(\varphi(w),\widehat{D}\varphi(w)\langle u\rangle)>\kappa d_2(w,u)$$

для всех $w,u\in\widehat{B}\cap D$, $\kappa>0$.

Фиксируем $\varepsilon>0$ и рассмотрим покрытие $\{\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i,r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ из определения 3.10 множества $\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Положим $x_j=\varphi(y_j)$, $j\in\mathbb{N}$. Без ограничения общности можем считать $\varepsilon>0$ настолько малым, что $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,r_j))\subset\widehat{B}$, и, следовательно, $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,r_j))\cap\widehat{D}_0=\varnothing$, $j\in\mathbb{N}$. Из [5, теорема 2.4] вытекает, что значение $\prod\limits_{k=1}^{M}\omega_k\cdot r_i^{\nu}$ с точностью до множителя $1+o(1)$ совпадает с

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y_i)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y_i)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y_i)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y_i)\bigr)}\cdot\mathscr{H}^{\nu}\bigl(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\bigr),$$

$i\in\mathbb{N}$, где величина $o(1)$ равномерна на компактных окрестностях точки y в силу непрерывности риманова тензора, и поэтому

$$\prod_{k=1}^{M}\omega_k\sum_{i\in\mathbb{N}}r_i^{\nu}=(1+o(1))\cdot\sqrt{\det\bigl(\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{+}\varphi(y)-\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)^*\widehat{D}_k^{-}\varphi(y)\bigr)}$$
$$\times\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))),\qquad(30)$$

где $y_i=\varphi^{-1}(x_i)$, $i\in\mathbb{N}$. Таким образом, левая часть (30) достигает точной нижней грани тогда и только тогда, когда правая часть этого соотношения близка к точной нижней грани с точностью до множителя $1+o(1)$, и наоборот.

Исследуем точную нижнюю грань значений

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))).$$

По определению 3.10, определению отображения π_x (см. обозначение 3.7) и выбору $\varepsilon>0$ выводим, что

$$\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\cap D=\varphi^{-1}\bigl(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}^{\varphi}(x_i,r_i)\bigr),$$

следовательно, множества $\{\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\}$ образуют покрытие пересечения $B\cap D$, $i\in\mathbb{N}$. Из локальной билипшицевой эквивалентности $\bigl(\widetilde{d}_2\bigr)^2$ и $\mathfrak{d}_2^2$ на $\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)$, $w\in D\setminus\widehat{D}_0$ (см., например, [5, теорема 2.1; 6, теорема 9]), следует

$$\mathrm{Box}_2(v,r)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)\subset\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w)\subset\mathrm{Box}_2(v,Qr)\cap\operatorname{Im}\widehat{D}\varphi(w),$$

$v=\varphi(w)$, где Q одно и то же для всех w из окрестности y, поэтому в прообразе справедливо

$$\mathrm{Box}_2(w,r/K)\subset\widehat{D}\varphi(w)^{-1}(\mathrm{Box}_2(v,r))\subset\widehat{D}\varphi(w)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(v,r)),\qquad(31)$$

где $K=\max\{1,\mathrm{Lip}(\varphi)\}$. Напомним, что в силу выбора $\varepsilon>0$ радиусы $r_i>0$ таковы, что $\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\subset\widehat{B}$ для всех $i\in\mathbb{N}$. Далее, как и в [5], для доказательства того, что величина

$$\Bigl|\inf\Bigl\{\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^{\nu}(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)))\colon x_i\in\varphi(B)\Bigr\}-\mathscr{H}^{\nu}(\mathrm{Box}_2(y,r))\Bigr|\qquad(32)$$

не превосходит $\sigma \cdot \mathscr{H}^\nu\big(\mathrm{Box}_2(y,r)\big)$, достаточно

- по теореме Витали выбрать набор $\{\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i))\}_{i\in\mathbb{N}}$, покрывающий $B\cap D$ с точностью до множества $\mathscr{H}^\nu$-меры нуль;
- для оставшегося множества $\mathscr{H}^\nu$-меры нуль выбрать покрытие шарами $\{\mathrm{Box}_2(y_j,\rho_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$, сумма $\mathscr{H}^\nu$-мер которых не превосходит заранее заданного $\widehat{\varepsilon}>0$, и где $\rho_j>0$ таковы, что $\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}(x_j,K\rho_j))\subset\widehat{B}$ (см. (31)), $j\in\mathbb{N}$; идея построения покрытия аналогична примененной в доказательстве теоремы 3.12;
- этот набор шаров заменить набором $\big\{\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,K\rho_j))\big\}_{j\in\mathbb{N}}$ таким, что
$$\widehat{D}\varphi(y_j)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_j,K\rho_j))\supset\mathrm{Box}_2(y_j,\rho_j),$$
$x_j=\varphi(y_j)$, $K=\max\{1,\mathrm{Lip}(\varphi)\}<\infty$, $j\in\mathbb{N}$ (см. (31)); тогда сумма мер элементов этого набора не будет превосходить $\widehat{K}\widehat{\varepsilon}$, $\widehat{K}<\infty$. Величину $\widehat{\varepsilon}>0$ можно выбрать таким образом, что
$$\widehat{K}\widehat{\varepsilon}<\frac{\sigma}{2}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)).$$

Отсюда с учетом (28) и (29) имеем

$$\begin{aligned}(1-\sigma)\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)) &\le \mathscr{H}^\nu(B\cap(D\setminus\widehat{D}_0))\\ &\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{H}^\nu(\widehat{D}\varphi(y_i)^{-1}(\mathrm{Box}_{\mathfrak{d}}(x_i,r_i)))+\widehat{K}\widehat{\varepsilon}\\ &\le\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))+2\cdot\frac{\sigma}{2}\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))=(1+\sigma)\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)).\end{aligned}$$

Отсюда выводим, что (32) не превосходит $\sigma\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r))$. Так как $\sigma>0$ взято произвольным образом, значение

$$\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r)\cap(D\setminus\widehat{D}_0)))=\mathscr{H}^\nu_{\mathfrak{d}}(\varphi(\mathrm{Box}_2(y,r)))$$

совпадает с

$$(1+o(1))\cdot\sqrt{\det\big(\widehat{D}^+_k\varphi(y)^*\widehat{D}^+_k\varphi(y)-\widehat{D}^-_k\varphi(y)^*\widehat{D}^-_k\varphi(y)\big)}\cdot\mathscr{H}^\nu(\mathrm{Box}_2(y,r)),$$

где $o(1)\to0$ при $r\to0$. Таким образом, производная $\Phi'(y)$ равна

$$\prod_{k=1}^{M}\sqrt{\det\big(\widehat{D}^+_k\varphi(y)^*\widehat{D}^+_k\varphi(y)-\widehat{D}^-_k\varphi(y)^*\widehat{D}^-_k\varphi(y)\big)},$$

и в силу результатов [15, 16] верна формула (27). Теорема доказана.

Замечание 4.3. Если потребовать, чтобы отображение φ было биективно на $D\setminus\varphi^{-1}(\varphi(D_0))$, то теорема 4.2 будет также верна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А.* Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
2. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Уравнения движения заряженной частицы в пятимерной модели общей теории относительности с неголономным четырехмерным пространством скоростей // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2007. № 1. С. 62–70.
3. *Крым В. Р., Петров Н. Н.* Тензор кривизны и уравнения Эйнштейна для четырехмерного неголономного распределения // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. 2008. № 3. С. 68–80.

4. *Берестовский В. Н., Гичев В. М.* Метризованные левоинвариантные порядки на топологических группах // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 4. С. 1–34.

5. *Карманова М. Б.* Липшицевы образы открытых множеств на сублоренцевых структурах // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 2. С. 138–161.

6. *Карманова М. Б.* Площадь поверхностей на сублоренцевых структурах глубины два // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 1. С. 93–119.

7. *Карманова М. Б.* Мера образов контактных отображений на двухступенчатых сублоренцевых структурах // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 1. С. 149–153.

8. *Magnani V.* Contact equations, Lipschitz extensions and isoperimetric inequalities // Calc. Var. PDE. 2010. V. 39, N 1–2. P. 233–271.

9. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.

10. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129. P. 1–60.

11. *Vodopyanov S.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.

12. *Vodopyanov S.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2000. P. 603–670.

13. *Карманова М. Б.* Об аппроксимируемости и параметризации прообразов элементов групп Карно на сублоренцевых структурах // Мат. заметки. 2022. Т. 111, № 1. С. 140–144.

14. *Карманова М. Б.* Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 298–325.

15. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.

16. *Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

17. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer, 1969.

18. *Карманова М. Б.* Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

Поступила в редакцию 9 апреля 2024 г.
После доработки 6 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.927.2+517.956

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

А. И. Кожанов, О. И. Бжеумихова

Аннотация. Показано, что наличие в обыкновенном дифференциальном уравнении слагаемых с инволютивным отклонением в аргументе может существенно повлиять на корректность задачи Коши и других задач. Также показано, что обнаруженные эффекты могут повлиять на корректность классических краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными — например, для параболических и псевдопараболических уравнений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.513

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с инволюцией, задача Коши, корректность, нелокальные задачи, разрешимость.

1. Введение

Простейшей инволюцией отрезка $[0,T]$ в себя является линейная инволюция $\varphi(t)=T-t$. Нетрудно предъявить дробно-линейную инволюцию:

$$\varphi(t)=\frac{a(T-t)}{ct+a},\quad a,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0;$$

для $\varphi(t)$ в случае $a(cT+a)>0$ также выполняется инволютивное условие $\varphi(\varphi(t))=t$, $t\in[0,T]$. Общий метод нахождения инволюции можно найти в [1].

Дифференциальные уравнения с инволюцией в аргументе неизвестного решения или тех или иных его производных активно изучаются в последнее время (см. [2–27]). В основном изучаются уравнения с линейной инволюцией, но и случай дифференциальных уравнений с инволюцией общего вида также встречается (см. [25]).

Целью настоящей работы является исследование влияния инволюции на корректность естественных краевых (начально-краевых) задач и прежде всего на существование и единственность решений. Будут рассмотрены обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Инволюция в основном будет линейной, но и уравнения с общей инволюцией также будут исследованы.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2022–282 с Министерством науки и высшего образования Российской федерации.

© 2024 Кожанов А. И., Бжеумихова О. И.

2. Собственные функции и собственные числа задачи Коши для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с линейной инволюцией

Пусть t — точка интервала $(0,T)$, $0<T<\infty$, λ и μ — заданные действительные числа.

Задача Коши. *Найти функцию $y(t)$, являющуюся на интервале $(0,T)$ решением уравнения*

$$y'(t)+\lambda y(t)+\mu y(T-t)=0 \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняется условие

$$y(0)=0. \tag{2}$$

Как хорошо известно, в случае $\mu=0$ задача (1), (2) имеет только тривиальное решение $y(t)\equiv 0$. Ситуация меняется, если в уравнении (1) $\mu\neq 0$.

Рассмотрим вначале случай $\lambda>0$.

Обозначим через $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ упорядоченную по возрастанию последовательность положительных корней уравнения

$$z+\lambda\,\mathrm{tg}\,(Tz)=0.$$

Положим $\mu_m=\left(z_m^2+\lambda^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Теорема 1. *Пусть λ — фиксированное положительное число. Тогда*

(a) *если $|\mu|\le\lambda$, то задача Коши* (1), (2) *имеет только нулевое решение;*

(b) *если $m=2l$, $\mu=\mu_m$ или $m=2l-1$, $\mu=-\mu_m$, $l=1,2,\ldots$, то задача Коши* (1), (2) *имеет ненулевые решения;*

(c) *если $\mu>\lambda$, $\mu\neq\mu_m$ для $m=2l$, или $\mu<-\lambda$, $\mu\neq-\mu_m$ для $m=2l-1$, $l=1,2,\ldots$, то задача Коши* (1), (2) *имеет только тождественно нулевое решение.*

Доказательство. Пусть выполняется условие $|\mu|<\lambda$. Умножим уравнение (1) на функцию $y(t)$ и проинтегрируем по отрезку $[0,T]$. После несложных выкладок получим неравенство

$$y^2(T)+(\lambda-|\mu|)\int\limits_0^T y^2(t)\,dt\le 0. \tag{3}$$

Из этого неравенства следует, что $y(t)$ — тождественно нулевая на отрезке $[0,T]$ функция.

Если $\mu=\lambda$, то из (3) имеем $y(T)=0$. Далее, из (1) следует равенство

$$y'(t)-y'(T-t)=0,$$

которое вместе с условием (2) и равенством $y(T)=0$ дает соотношение

$$y(t)+y(T-t)=0.$$

В свою очередь, из последнего равенства и уравнения (1) вытекает тождество $y'(t)\equiv 0$. Это означает, что $y(t)\equiv 0$ при $t\in[0,T]$.

Аналогичные выкладки в случае $\mu=-\lambda$ дают тождество $y(t)\equiv 0$ при $t\in[0,T]$.

Перейдем к анализу случая (b).

Заметим прежде всего, что все числа μ_m лежат в интервале $(\lambda, +\infty)$. Пусть μ совпадает с одним из чисел μ_m для четного номера m. Имеют место равенства

$$z_m \cos(z_m T) + \lambda \sin(z_m T) = 0, \quad \lambda^2 = \mu_m^2 - z_m^2.$$

Из этих равенств следует, что

$$z_m^2 - \mu_m^2 \sin^2(z_m T) = [z_m - \mu_m \sin(z_m T)][z_m + \mu_m \sin(z_m T)] = 0. \tag{4}$$

Для чисел z_m справедливы неравенства

$$\frac{(2m-1)\pi}{2T} < z_m < \frac{(2m+1)\pi}{2T}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Положим $g(z) = z + \lambda \operatorname{tg}(zT)$. На каждом интервале $\left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{(2m+1)\pi}{2T}\right)$ эта функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, причем в точке $\frac{\pi m}{T}$ ее значение положительно. Но тогда каждое число z_m принадлежит соответствующему интервалу $\left(\frac{(2m-1)\pi}{2T}, \frac{m\pi}{T}\right)$ и тем самым для четных m выполняется

$$\sin(z_m T) < 0.$$

Из этих неравенств и равенств (4) следует, что для таких m выполняется

$$z_m + \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{5}$$

Используя (5), нетрудно показать, что функции $C \sin(z_m t)$, $C = \text{const}$, будут нетривиальными решениями задачи (1), (2) в случае $\mu = \mu_m$, $m = 2l$.

Пусть μ — число $-\mu_m$, $m = 2l-1$. Рассуждая, как выше, нетрудно показать, что для чисел z_m в случае $m = 2l - 1$ выполняется неравенство $\sin(z_m T) > 0$. Из этого неравенства и равенства (4) следует, что

$$z_m - \mu_m \sin(z_m T) = 0. \tag{6}$$

Из (6), в свою очередь, вытекает, что функции $C \sin(z_m t)$, $C = \text{const}$, будут нетривиальными решениями задачи (1), (2) в случае $\mu = -\mu_m$, $m = 2l - 1$.

Пусть число μ не совпадает с числами μ_m в случае $m = 2l$ и не совпадает с числами $-\mu_m$ в случае $m = 2l-1$. Дифференцируя (1) (что возможно), получим равенство

$$y''(t) + \lambda y'(t) - \mu y'(T - t) = 0.$$

Используя соотношение

$$y'(T - t) + \lambda y(T - t) + \mu y(t) = 0,$$

получим, что для функции $y(t)$ на интервале $(0, T)$ выполняется уравнение

$$y''(t) + (\mu^2 - \lambda^2) y(t) = 0. \tag{7}$$

Кроме того, для функции $y(t)$ выполняется равенство

$$y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{8}$$

Краевая задача (7), (2), (8) имеет нетривиальные решения лишь в случае, когда число $\mu^2 - \lambda^2$ совпадает с одним из чисел z_m^2. Поскольку по условию теоремы этого не может быть, функция $y(t)$ тождественно нулевая на интервале $(0, T)$. Это означает, что утверждение (c) истинно.

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим случай $\lambda \le 0$. Приведем вначале одно вспомогательное утверждение. Положим

$$h(z) = z + \frac{\lambda(1 - e^{-2zT})}{1 + e^{-2zT}}.$$

Утверждение 1. *Пусть λ — фиксированное отрицательное число такое, что $|\lambda|\,T > 1$. Тогда уравнение $h(z) = 0$ имеет на промежутке $(0, +\infty)$ ровно одно решение z^*.*

Доказательство. Имеют место равенства

$$h'(z) = 1 + \frac{4\lambda T}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^2}, \quad h''(z) = -\frac{8\lambda T^2\left(e^{zT} - e^{-zT}\right)}{\left(e^{zT} + e^{-zT}\right)^3}.$$

Поскольку $h'(0) < 0$, $h'(z) \to 1$ при $z \to +\infty$, найдется точка z_0, в которой $h'(z_0) = 0$. Заметим, что $h'(z)$ на промежутке $(0, +\infty)$ не может иметь более одного нуля, поскольку если есть еще один нуль, то функция $h''(z)$ должна обращаться в нуль на промежутке $(0, +\infty)$, а это невозможно.

Из приведенных рассуждений следует, что функция $h(z)$ монотонно убывает на $(0, z_0)$ и монотонно возрастает на $(z_0, +\infty)$, причем в точке z_0 выполняется $h(z_0) < 0$. Но тогда на $(z_0, +\infty)$ найдется ровно одна точка z^*, в которой $h(z^*) = 0$.

Утверждение доказано.

Положим

$$\mu^* = \frac{2\lambda}{e^{z^*T} + e^{-z^*T}}.$$

Вновь рассмотрим уравнение $z + \lambda\,\mathrm{tg}\,(Tz) = 0$, но теперь при $\lambda < 0$. Обозначим через $\overline{z}_m$ положительные корни этого уравнения и будем считать, что последовательность $\{\overline{z}_m\}_{m=1}^{\infty}$ упорядочена по возрастанию. Положим

$$\overline{\mu}_m = \left[\overline{z}_m^2 + \lambda^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$. Тогда задача Коши (1), (2) имеет ненулевые решения, если*

(a) *для чисел λ и μ выполняется $|\lambda|\,T > 1$, $\mu = \mu^*$;*

(b) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = -\frac{1}{T}$;

(c) $\lambda < 0$, $\mu = \overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l$, $\mu = -\overline{\mu}_m$ *для* $m = 2l - 1$, $l = 1, 2, \ldots$;

(d) $\lambda = 0$, $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. В случае (a) положим

$$v(t) = e^{z^*t} - e^{-z^*t}.$$

Для определенного выше числа μ^* и для этой функции выполняется

$$v'(t) + \lambda v(t) + \mu^* v(T - t) = 0.$$

Это означает, что задача Коши (1), (2) имеет ненулевые решения.

В случае (b) искомыми решениями будут функции Ct, $C = \mathrm{const}$.

Перейдем к анализу случая (c).

Для положительных решений $\overline{z}_m$ уравнения $z + \lambda\,\mathrm{tg}\,(Tz) = 0$ в случае $\lambda < 0$ выполняется

$$\sin\left(\overline{z}_m T\right) < 0 \quad \text{для } m = 2l - 1,$$

$$\sin\left(\overline{z}_m T\right) > 0 \quad \text{для } m = 2l,\ l = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда следует, что для нечетных чисел m

$$\overline{z}_m + \overline{\mu}_m \sin\left(\overline{z}_m T\right) = 0$$

и соответственно для четных

$$\overline{z}_m - \overline{\mu}_m \sin(\overline{z}_m T) = 0.$$

Определим функцию $v_m(t)$:

$$v_m(t) = \sin(\overline{z}_m t).$$

Для этих функций при нечетных m выполняется

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) + \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0$$

и соответственно для четных

$$v_m'(t) + \lambda v_m(t) - \overline{\mu}_m v_m(T-t) = 0.$$

Эти равенства и означают, что для отрицательного числа λ и чисел $\overline{\mu}_m$ или $-\overline{\mu}_m$ функции $Cv_m(t)$ являются решениями задачи Коши (1), (2).

В случае $\lambda = 0$ непосредственно проверяется, что при $\mu = \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \ldots$, задача Коши (1), (2) имеет решение $C\sin(\mu t)$, $C = \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть λ — фиксированное число из промежутка $(-\infty, 0]$, Задача Коши* (1), (2) *имеет лишь тождественно нулевое решение, если*

(a) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$;

(b) $\lambda < 0$, $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} \neq \frac{1}{2T} \ln \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2-\mu^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2-\mu^2}}$;

(c) $\lambda = -\frac{1}{T}$, $\mu = \frac{1}{T}$;

(d) $\lambda = 0$, $\mu \neq \frac{(4m+3)\pi}{2T}$, $m = 0, 1, \ldots$.

Доказательство. Решение $y(t)$ задачи Коши (1), (2) является решением краевой задачи

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y(t) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(T) + \lambda y(T) = 0. \tag{9}$$

Если число $\mu^2 - \lambda^2$ положительно и $y(t)$ — не тождественно нулевое решение этой задачи, то должно выполняться равенство

$$\mu^2 - \lambda^2 = \overline{z}_m^2.$$

Но вследствие условия $|\mu| \neq \overline{\mu}_m$ в случае (a) это невозможно.

В случае (b) решение $y(t)$ представленной выше краевой задачи будет не тождественно нулевым, если выполняются условия

$$\mu^2 - \lambda^2 < 0, \quad (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \mu^2})e^{\sqrt{\lambda^2-\mu^2}T} = (\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \mu^2})e^{-\sqrt{\lambda^2-\mu^2}T}.$$

Поскольку второе из этих уравнений не имеет места, решение $y(t)$ как краевой задачи (9), так и задачи Коши (1), (2) будет тождественно нулевой функцией.

В случае (c) выполняется $\mu^2 - \lambda^2 = 0$, и если $\mu = -\frac{1}{T}$, то решение $y(t)$ будет ненулевым, если же $\mu = \frac{1}{T}$, то $y(t) \equiv 0$.

Наконец, в случае (d) непосредственно получаем, что $y(t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Задачу (1), (2) можно трактовать как задачу на собственные значения со спектральным параметром λ. Доказанные теоремы дают условия на число μ, при выполнении которых данное число λ будет собственным числом этой задачи (т. е. когда задача (1), (2) имеет ненулевые решения) или не будет (в случае лишь тождественно нулевых решений).

3. Собственные функции и собственные числа нелокальных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с линейной инволюцией

В настоящем разделе будет показано, что коэффициенты λ и μ в уравнении (1) могут оказать существенное влияние на наличие и отсутствие собственных чисел и собственных функций некоторых нелокальных задач.

Нелокальная задача I. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$y(0) = y(T). \tag{10}$$

Нелокальная задача II. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$y(0) = -y(T). \tag{11}$$

Нелокальные задачи I и II представляют собой задачи нахождения периодических и соответственно антипериодических режимов в обыкновенных дифференциальных уравнениях первого порядка с инволюцией.

Положим

$$\mu_{m,1} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 4. *Пусть λ — фиксированное число. Если выполняется одно из условий*

(a) $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,1}$, $m = 1, 2, \ldots$;

(b) $\mu = -\lambda$,

то нелокальная задача I *имеет ненулевые решения. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача* I *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Для решений $y(t)$ нелокальной задачи I имеют место равенства

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y = 0, \tag{12}$$

$$y'(0) = y'(T). \tag{13}$$

Пусть выполняется неравенство $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. Из (12), (10) и (13) следует, что функция $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2},$$

и что для чисел A и B имеют место соотношения

$$A(1 - \cos(\gamma T)) - B\sin(\gamma T) = 0, \tag{14}$$

$$A\sin(\gamma T) + B(1 - \cos(\gamma T)) = 0. \tag{15}$$

В случае $|\mu| = \mu_{m,1}$ эти соотношения справедливы для любых чисел A и B. Выберем такие A и B, для которых

$$A\gamma = B(\lambda - \mu). \tag{16}$$

Заметим, что из (16) следует равенство

$$A(\lambda + \mu) + B\gamma = 0. \tag{17}$$

Из (16) и (17) непосредственно вытекает, что в случае $|\mu| = \mu_{m,1}$ функции

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$$

будут ненулевыми решениями нелокальной задачи I.

Очевидно теперь, что в случае $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| \neq \mu_{m,1}$ система (14), (15) имеет единственное решение $A = B = 0$. Но тогда и решение $y(t)$ нелокальной задачи I будет тождественно нулевой функцией.

Пусть для чисел λ и μ выполняется $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\lambda > 0$. Умножая уравнение (1) на функцию $y(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, T]$, получим, что выполняется неравенство

$$(\lambda - |\mu|) \int\limits_0^T y^2(t)\,dt \leq 0.$$

Из этого неравенства непосредственно следует, что решение нелокальной задачи I в рассматриваемом случае есть тождественно нулевая функция.

В случае $\mu^2 - \lambda^2 < 0$, $\lambda < 0$ решение $y(t)$ нелокальной задачи I представляется в виде

$$y(t) = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}, \quad \gamma = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Условия (10) и (13) дают для чисел A и B алгебраическую систему, решение которой суть числа A и B, равные нулю. Следовательно, и в этом случае решение $y(t)$ нелокальной задачи I есть тождественно нулевая функция.

Наконец, непосредственно проверяется, что при $\mu = \lambda$ решение $y(t)$ нелокальной задачи I есть тождественно нулевая функция, при $\mu = -\lambda$ решение $y(t)$ имеет вид $y(t) \equiv \mathrm{const}$.

Теорема доказана.

Положим

$$\mu_{m,2} = \left[\lambda^2 + \left(\frac{(2m+1)\pi}{T}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Теорема 5. *Пусть λ — фиксированное число. Тогда если $\mu^2 - \lambda^2 > 0$, $|\mu| = \mu_{m,2}$, $m = 1, 2, \ldots$, то нелокальная задача* II *имеет ненулевые решения. Для всех остальных чисел μ нелокальная задача* II *имеет только нулевое решение.*

Доказательство теоремы 5 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 4.

Нелокальную задачу I можно трактовать как задачу с интегральным условием, а именно как задачу нахождения решения уравнения (1), удовлетворяющего условию

$$\int\limits_0^T y(t)\,dt = 0.$$

Дальнейшим обобщением подобной задачи может служить задача с общим интегральным условием.

Пусть $N(t)$ — заданная функция, определенная на отрезке $[0, T]$.

Нелокальная задача III. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условию*

$$\int\limits_0^T N(t)y(t)\,dt = 0. \tag{18}$$

Покажем, что для этой задачи во многих случаях также возможна ситуация, в которой для бесконечного набора чисел μ будут существовать ненулевые решения.

Теорема 6. *Пусть λ — фиксированное число, и пусть выполняется одно из условий*

(a) *$N(t)$ — определенная при $t \in (-\infty, \infty)$ четная не тождественно нулевая периодическая с периодом $\frac{T}{2}$ функция;*

(b) *$N(t)$ — определенная при $t \in (-\infty, \infty)$ нечетная не тождественно нулевая периодическая с периодом $\frac{T}{2}$ функция.*

Тогда найдется бесконечно много чисел μ таких, что для каждого их них задача III *будет иметь ненулевые решения.*

Доказательство. Пусть выполняется условие (a). Решение $y(t)$ нелокальной задачи III является решением уравнения

$$y'' + (\mu^2 - \lambda^2)y = 0.$$

Вследствие четности и периодичности функции $N(t)$ выполняется равенство $N(t) = N(T - t)$. Отсюда вытекает, что помимо условия (18) для функции $y(t)$ будет выполняться условие

$$\int_0^T N(t)y'(t)\,dt = 0. \tag{19}$$

Пусть выполняется неравенство $\mu^2 - \lambda^2 > 0$. Тогда функция $y(t)$ имеет вид

$$y(t) = A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t), \quad \gamma = \sqrt{\mu^2 - \lambda^2}.$$

Условия (18) и (19) означают, что числа A и B являются решениями системы

$$A\int_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt + B\int_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = 0,$$

$$-A\int_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt + B\int_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = 0.$$

Данная система имеет ненулевые решения лишь при выполнении равенств

$$\int_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = 0, \quad \int_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = 0. \tag{20}$$

Пусть γ — число, для которого $\gamma T = 2\pi m$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$\int_0^T N(t)\sin(\gamma t)\,dt = \int_0^T N(T-\tau)\sin[\gamma(T-\tau)]\,d\tau$$

$$= \int_0^T N(T-\tau)[\sin(\gamma T)\cos(\gamma\tau) - \cos(\gamma T)\sin(\gamma\tau)]\,d\tau$$

$$= -\int_0^T N(T-\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau = -\int_0^T N(\tau)\sin(\gamma\tau)\,d\tau.$$

Отсюда следует, что для выбранных чисел γ второе равенство (20) выполняется.

Далее, имеем

$$\int_0^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt = \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_{T/2}^T N(t)\cos(\gamma t)\,dt$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_0^{T/2} N\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\cos\left[\gamma\left(\tau+\frac{T}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt + \int_0^{T/2} N(\tau)\left[\cos(\gamma\tau)\cos\left(\frac{\gamma T}{2}\right) - \sin(\gamma\tau)\sin\left(\frac{\gamma T}{2}\right)\right]d\tau$$

$$= \int_0^{T/2} N(t)\cos(\gamma t)\,dt - \int_0^{T/2} N(\tau)\cos(\gamma\tau)\,d\tau = 0.$$

Следовательно, для выбранных чисел γ выполняется и первое равенство (20).

Положим $\mu = (\lambda^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}$. Справедливость равенств (20) означает, что числа A и B можно выбрать так, чтобы выполнялось равенство (17). Но тогда всевозможные функции $A\cos(\gamma t) + B\sin(\gamma t)$ будут давать ненулевые решения нелокальной задачи III с указанными выше числами λ и μ.

При выполнении условия (b) для функции $N(t)$ справедливо равенство $N(t) = -N(T-t)$. Это равенство и условие периодичности означают, что при выбранных выше числах γ оба равенства (20) будут иметь место. Это вновь дает существование бесконечного множества ненулевых решений нелокальной задачи III.

Теорема доказана.

Замечание 1. Фактически условием существования ненулевых решений нелокальной задачи III является условие (20), теорема 6 дает примеры функций $N(t)$, для которых это условие выполняется.

4. Собственные числа и собственные функции для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией

Результаты о разрешимости задачи Коши для уравнения (1) дают возможность получить новые результаты о разрешимости спектральных задач для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией по временной переменной.

Пусть Ω — ограниченная область из пространства R^n с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega\times(0,T)$, $S = \Gamma\times(0,T)$ — боковая граница Q, λ и μ — заданные действительные числа.

Рассмотрим начально-краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) + \lambda u(x,t) + \mu u(x,T-t) = 0,$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0)=0, \quad x\in\Omega,$$
$$u(x,t)|_S=0$$

(Δ — *оператор Лапласа по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

Представим решение этой задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям однородной задачи Дирихле для оператора Лапласа (с собственными функциями $w_k(x)$ и собственными числами β_k):

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)w_k(x).$$

Функции $v_k(t)$ в этом представлении определяются как решения задач Коши

$$v_k'(t)+(\lambda-\beta_k)\,v_k(t)+\mu v_k(T-t)=0, \quad v_k(0)=0.$$

Используя теоремы 1–3, нетрудно получить результаты о существовании нулевых или ненулевых решений изучаемой начально-краевой задачи.

Если в изучаемой задаче начальное условие $u(x,0)=0$ заменить нелокальным условием $u(x,0)=u(x,T)$ или условием $u(x,0)=-u(x,T)$, или интегральным условием

$$\int\limits_0^T N(t)u(x,t)\,dt=0,$$

то с помощью теорем 4–6 нетрудно получить результаты о существовании ненулевых решений соответствующих нелокальных задач.

Аналогичным образом можно провести исследование существования только нулевых или ненулевых решений для псевдопараболических уравнений

$$u_t(x,t)-\alpha\Delta u(x,t)-\beta\Delta u_t(x,t)+\lambda u(x,t)+\mu u(x,T-t)=0$$

($\alpha>0$, $\beta>0$; подобные уравнения возникают при моделировании процессов фильтрации или влагопереноса в трещиноватых породах (см. [28–31])).

5. Заключительные замечания

Исследования, проведенные выше, могут быть продолжены в различных направлениях. Опишем некоторые из них.

1. В целом аналогичные результаты о существовании собственных функций и собственных чисел можно получить для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с инволюцией не только в решении, но и в производной — именно, для уравнений

$$y'(t)+\alpha y'(T-t)+\lambda y(t)+\mu y(T-t)=0, \quad \alpha\in R,\ \lambda\in R,\ \mu\in R.$$

2. В свою очередь, имея результаты о существовании и несуществовании ненулевых решений задачи Коши, нетрудно получить результаты о существовании и несуществовании ненулевых решений начально-краевых задач для параболических уравнений с двойной инволюцией

$$u_t(x,t)+\alpha u_t(x,T-t)-\Delta u(x,t)+\lambda u(x,t)+\mu u(x,T-t)=0,$$

а также для соответствующих псевдопараболических уравнений.

3. Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с общей инволюцией:

$$y'(t)+\lambda y(t)+\mu y\left(\varphi(t)\right)=0, \quad y(0)=0 \tag{21}$$

($\varphi(\varphi(t))=t$ при $t\in[0,T]$).

Теорема 7. *Пусть выполняются условия*

$$\lambda > 0, \quad \varphi(t) \in C^1([0,T]), \quad \lambda - |\mu| \max_{[0,T]} |\psi'(t)| > 0, \quad \psi(t) = \varphi^{-1}(t).$$

Тогда задача Коши (21) *имеет только нулевое решение.*

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству первой части теоремы 1.

Аналогичные теоремы единственности нетрудно доказать и для начально-краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений с инволюцией, а также для нелокальных задач с условиями (10), (11) или (18).

4. В разд. 2–4 работы обсуждался вопрос о единственности и неединственности решений задачи Коши и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с нулевой правой частью. Используя технику, связанную с переходом к сопряженной задаче, с помощью полученных выше результатов нетрудно получить теоремы о существовании и несуществовании решений задачи Коши и начально-краевых задач для дифференциальных уравнений с инволюцией в зависимости от параметров λ и μ для тех или иных уравнений с ненулевой правой частью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Shisha O., Mehr C. B.* On involutions // J. Research of the National Bureau of Standards. B. Mathematics and Math. Physics. 1967. V. 71B, N 1. P. 19–20.
2. *Wiener J.* Generalized solutions of functional differential equations. Singapore: World Sci., 1993.
3. *Andreev A. A.* Analogs of classical boundary value problems for a second-order differential equation with deviating argument // Differ. Equ. 2004. V. 40. P. 1192–1194.
4. *Piao D.* Pseudo almost periodic solutions for differential equations involving reflection of the argument // J. Korean Math. Soc. 2004. V. 41, N 4. P. 747–754.
5. *Кальменов Т. Ш., Искакова У. А.* Критерий сильной разрешимости смешанной задачи Коши для уравнения Лапласа // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 2. С. 168–171.
6. *Watkins W.* Asymptotic properties of differential equations with involutions // Intern. J. Pure Appl. Math. 2008. V. 44, N 4. P. 485–492.
7. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Классическое решение для смешанной задачи с инволюцией // Докл. АН. 2010. Т. 435, № 2. С. 151–154.
8. *Kal'menov T. Sh., Shaldanbaev A. Sh.* On a recurrence method for solving a singularly perturbed Cauchy problem for a second order equation // Sib. Adv. Math. 2011. V. 21. P. 274–281.
9. *Ashyralyev A., Sarsenbi A. M.* Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electron. J. Differ. Equ. 2015. V. 284. P. 1–8.
10. *Искакова У. А., Торебек Б. Т.* Об одном методе решения некорректной задачи Робена — Коши для оператора Лапласа // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. 2016. Т. 6, № 310. С. 115–120.
11. *Шалданбаев А. Ш., Шоманбаева М. Т., Ахметова С. Т.* О канторовости спектра оператора периодической краевой задачи для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом // Изв. НАН Республики Казахстан. Сер. физ.-мат. 2016. Т. 3, № 307. С. 148–157.
12. *Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R. G.* An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Math. 2017. V. 40, N 2. P. 151–160.
13. *Tojo F. A. F., Torres P.* Green's functions of partial differential equations with involutions // J. Appl. Anal. & Computation. 2017. V. 7, N 3. P. 1127–1138.
14. *Sadybekov M. A., Dildabek G., Ivanova M. B.* On an inverse problem of reconstructing a heat conduction process from nonlocal data // Adv. Math. Phys. 2018. V. 2018. P. 1–8.
15. *Sarsenbi A. A.* A solvability conditions of mixed problems for equations of parabolic type with involution // Bul. Karaganda Univ. Math. Ser. 2018. V. 4, N 92. P. 87–93.

16. *Al-Salti N., Kirane M., Torebek B. T.* On a class of inverse problems for a heat equation with involution perturbation // Hacettepe J. Mathematics and Statistics. 2019. V. 48, N 3. P. 669–681.

17. *Криштал И. А., Ускова Н. Б.* Спектральные свойства дифференциальных операторов первого порядка с инволюцией и группы операторов // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1091–1132.

18. *Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi A. M.* Properties in L_p of root functions for a nonlocal problem with involution // Turkish J. Math. 2019. V. 43, N 1. P. 393–401.

19. *Сарсенби А. А.* Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Журн.q СВМО. 2019. Т. 21, № 1. С. 48–59.

20. *Турметов Б. Х.* Об одном обобщении третьей краевой задачи для уравнения Лапласа // Челябинск. физ.-мат. журн. 2019. Т. 4, № 1. С. 33–41.

21. *Yarka U., Fedushko S., Vesel P.* The Dirichlet problem for the perturbed elliptic equation // Mathematics. 2020. V. 8, N 12:2108. P. 1–13.

22. *Nazarova K. Z., Turmetov B. K., Usmanov K. I.* On the solvability of some boundary value problems with involution // Vestn. Samara Univ. Natural Sci. Ser. 2020. V. 26, N 3. P. 7–16.

23. *Алтынбек Д. Н., Муратбекова М. А.* Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения высокого порядка с инволюцией // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова. Нур-Султан, 2021. С. 85–88.

24. *Сарсенби А. М.* Разрешимость смешанной задачи для уравнения теплопроводности с инволютивным возмущением // Международная научно-практическая конференция «Проблемы современной фундаментальной и прикладной математики» посвященная 30-летию независимости Республики Казахстан и 20-летию Казахстанского филиала МГУ имени М. В. Ломоносова. Нур-Султан, 2021. С. 143–144.

25. *Kozhanov A. I., Bzheumikhova O. I.* Elliptic and parabolic equations with involution and degeneration at higher derivatives // Mathematics. 2022. V. 10, N 18:3325. P. 1–10.

26. *Mahmudova D., Abbasova M., Alixanov O.* Influence of involution on differential equations with second-order constant coefficients // Intern. J. Research in Commerce, IT, Engineering, and Social Sciences. 2022. V. 16, N 01. P. 40–44.

27. *Kirane M., Sarsenbi A. A.* Solvability of mixed problems for a fourth-order equation with involution and fractional derivative // Fractal and Fractional. 2023. V. 7, N 2:131. P. 1–12.

28. *Баренблатт Г. Н., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 852–864.

29. *Дзекцер Е. С.* Уравнение движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР. 1975. Т. 220, № 3. С. 540–543.

30. *Чудновский А. Ф.* Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976.

31. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения. 1982. Т. 18, № 2. С. 280–285.

Поступила в редакцию 12 августа 2024 г.
После доработки 12 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Бжеумихова Оксана Игоревна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
ул. Чернышевского, 173, Нальчик 360004
bzhoksana@gmail.com

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.546.8+512.548.7+515.122.23+515.122.55+517.986.9

ПРОСТРАНСТВА РЕГУЛЯРНЫЕ И ПОЛНЫЕ НАД ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ КВАЗИГРУППАМИ

С. В. Людковский

Аннотация. Статья посвящена структуре топологических пространств. Исследуются вполне регулярные и полные пространства над топологическими квазигруппами и квазикольцами. Для них также изучаются вложения и свойства отделимости. Изучаются их гомеоморфизмы и изоморфизмы, соотношения между компактификациями и полнотой пространств над топологическими квазигруппами. Исследуются приложения к топологическим пространствам семейств отображений над топологическими квазигруппами и квазикольцами, ограничения отображений, их открытость и уплотнения. Также доказываются необходимые теоремы о структуре топологических квазигрупп.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.514

Ключевые слова: регулярность, полнота, топологическое пространство, топологическая квазигруппа, квазикольцо, непрерывное отображение.

1. Введение

Изучение вложений топологических пространств, вполне регулярных и полных по Хьюитту пространств, играют большую роль в топологии и ее приложениях [1, 2]. В них важное значение имеют свойства семейств функций из топологического пространства в поле вещественных чисел [3–5]. При этом вполне регулярные пространства используются для исследований топологических векторных пространств вещественнозначных функций. Они применяются в функциональном анализе, абстрактном гармоническом анализе, теории случайных процессов, математической физике [6]. С другой стороны, в последнее время развиваются приложения неассоциативных алгебр, близких к квазигруппам, в некоммутативном математическом анализе, некоммутативной геометрии, теории операторов, дифференциальных уравнениях с частными производными [7–9], физике элементарных частиц и квантовой теории поля [10]. Согласно исследованиям в 20-м веке существование нетривиальной некоммутативной геометрии равносильно существованию соответствующей квазигруппы или лупы (см. [11–17] и ссылки в них). В последнее время неассоциативные алгебры, близкие к квазигруппам, использовались для исследования подчиненных бозонных разложений в сверхпроводниках [18] и в неассоциативной квантовой механике [19]. Они также активно использовались в калибровочных теориях и суперструнах Грина — Шварца в [20, 21]. Такие неассоциативные алгебры связаны с квазихопфовыми деформациями в неассоциативной квантовой механике [22]. Алгебры, близкие к квазигруппам, и квазигруппы были одним из главных инструментов при исследовании представления Де Ситтера искривленного

© 2024 Людковский С. В.

пространства-времени [23], в теории большого объединения и для изучения полей Янга — Миллса [24]. Семейство таких неассоциативных алгебр использовалось для анализа дифференциальных уравнений в частных производных типа Янга — Бакстера с приложением к теории большого объединения (см. [25–27] и ссылки там). Другое приложение квазигруппы нашли в информатике и теории кодирования, так как они открывают новые возможности по сравнению с группами [28–33].

Также большой интерес вызывают функциональный анализ, абстрактный гармонический анализ, теория случайных процессов, математическая физика над полями с неархимедовыми мультипликативными нормами [34–42]. Следует подчеркнуть, что указанные в начале введения темы интенсивно изучались над полями вещественных чисел $\mathbf{R}$ и комплексных чисел $\mathbf{C}$, но гораздо меньше известно в случае рассмотрения семейств функций со значениями в топологических квазигруппах. Согласно представленному выше обсуждению их изучение стимулируется, например, функциональным анализом, абстрактным гармоническим анализом, теорией случайных процессов, математической физикой над алгебрами, близкими к квазигруппам, топологическими полями, исследованием структуры микрорасслоений [43]. Перечисленные области основаны на тополого-алгебраических бинарных системах.

Таким образом открывается новое перспективное направление исследований топологических квазигрупп и их действий на топологических пространствах, о которых известно очень мало по сравнению с топологическими группами и действиями топологических групп на топологических пространствах.

Данная статья посвящена вполне регулярным и полным топологическим пространствам над топологическими квазигруппами. Для них также изучаются вложения и свойства отделимости. Изучаются их гомеоморфизмы и изоморфизмы, соотношения между компактификациями и полнотой пространств над топологическими квазигруппами. Исследуются приложения к топологическим пространствам семейств отображений над топологическими квазигруппами, ограничения отображений, их открытость и уплотнения. В частности, изучаются квазикольца семейств функций на таких пространствах. Для исследований используются методы топологии и алгебры, в частности, полиэдральные разложения. Также используются необходимые предварительные теоремы о топологических квазигруппах, доказанные в разд. 1.1.

1.1. Предварительные сведения.

Теорема 1.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая квазигруппа, где Q — топологическое пространство, $\mathscr{A} : Q^2 \to Q$ — непрерывная бинарная операция на G. Тогда $Q(\mathscr{A})$ главно изотопна топологической лупе $G_1 = Q(\mathscr{B})$.*

Доказательство. Пусть a и b принадлежат Q. Положим

$$\mathscr{B}(x, y) = \mathscr{A}\big(R_a^{-1}x, L_b^{-1}y\big)$$

для любых x и y из Q, где $R_a x = \mathscr{A}(x, a)$, $L_b x = \mathscr{A}(b, x)$, $R_a^{-1}d = d/a$ — единственное решение уравнения $\mathscr{A}(y, a) = d$, $L_b^{-1}d = b \setminus d$ — единственное решение уравнения $\mathscr{A}(b, y) = d$, где a и b заданы, а y — неизвестная. Поскольку G — топологическая квазигруппа, отображения $Q^2 \ni (a, d) \mapsto d/a \in Q$ и $Q^2 \ni (b, d) \mapsto b \setminus d \in Q$ непрерывны. В силу теоремы 1.3.2 в [15] $G_1 = Q(\mathscr{B})$ — лупа с единицей $e = \mathscr{A}(b, a)$, $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{(R_a^{-1}, L_b^{-1}, id_Q)}$, $Q(\mathscr{B})$ есть LR-изотоп квазигруппы $Q(\mathscr{A})$, где $id_Q(q) = q$ для всякого $q \in Q$. При этом отображения $\mathscr{A}$, R_d, R_d^{-1},

L_d, L_d^{-1} непрерывны для любого $d \in G$, следовательно, $\mathscr{B} : Q^2 \to Q$ непрерывно и $Q(\mathscr{B})$ — топологическая лупа.

Теорема 1.2. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая лупа, C_e — компонента единицы e в G, тогда C_e — замкнутая нормальная подлупа в G, $\mathsf{C}_e b = b\mathsf{C}_e$ — компонента $b \in G$.*

Доказательство. Поскольку $e \in \mathsf{C}_e$ и C_e — наибольшее связное подмножество в Q, содержащее e, то $b\mathsf{C}_e$ и $\mathsf{C}_e b$ связны и содержат $b \in G$, так как $L_b : G \to G$ и $R_b : G \to G$ — гомеоморфизмы. Поэтому $\mathsf{C}_e b = b\mathsf{C}_e$ — компонента C_b для $b \in G$, так как $L_b^{-1} : G \to G$ и $R_b^{-1} : G \to G$ — гомеоморфизмы. Тогда $\mathsf{C}_{ab} = (ab)\mathsf{C}_e$, $(ab)\mathsf{C}_e = a(b\mathsf{C}_e)$, $a(b\mathsf{C}_e) = a(\mathsf{C}_e b)$, $a(\mathsf{C}_e b) = (a\mathsf{C}_e)b$, $(a\mathsf{C}_e)b = (\mathsf{C}_e a)b$, $(\mathsf{C}_e a)b = \mathsf{C}_e(ab)$, $\mathsf{C}_e(ab) = \mathsf{C}_{ab}$. При этом

$$\forall a \in G, \forall b \in G, (\mathsf{C}_a \cap \mathsf{C}_b \neq \varnothing) \ \leftrightarrow \ (\mathsf{C}_a = \mathsf{C}_b),$$

а компонента C_b замкнута в G для любого $b \in G$. Поэтому $\mathsf{C}_e\mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e \setminus \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e/\mathsf{C}_e$ связны и содержат e, так как $\mathsf{C}_b/b = \mathsf{C}_e$ и $b \setminus \mathsf{C}_b = \mathsf{C}_e$ для любого $b \in G$, $\mathsf{C}_b = \mathsf{C}_e$ для любого $b \in \mathsf{C}_e$, где $ab := A(a, b)$ — сокращенное обозначение умножения для произвольных $a \in G$ и $b \in G$. Итак, $\mathsf{C}_e\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e \setminus \mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$, $\mathsf{C}_e/\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_e$.

Теорема 1.3. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая лупа, C_e — компонента ее единицы $e = e_G$. Тогда существует $P = G/_c\mathsf{C}_e$ — вполне несвязная факторная $T_1 \cap T_3$-лупа.*

Доказательство. В силу теоремы 1.2 C_e — нормальная замкнутая подлупа в G. Из следствия 2.2 в [44] вытекает, что пространство $P = G/_c\mathsf{C}_e$ левых классов смежности $\{b\mathsf{C}_e : b \in G\}$ является топологической лупой и факторное отображение $\pi : G \to P$ — непрерывный открытый гомоморфизм. При этом P является $T_1 \cap T_3$-лупой согласно теореме 2.3 в [44], так как C_e замкнута в G. Рассмотрим подмножество $X \subset G$ такое, что $\mathsf{C}_e \subset \bigcup\{b\mathsf{C}_e : b \in X\} =: Y$ и $Y \neq \mathsf{C}_e$. Если $J \subset G$, то $\pi(J \cap (X\mathsf{C}_e)) = \pi(J) \cap (X\mathsf{C}_e)$. Поскольку $Y \neq \mathsf{C}_e$, то Y несвязно, следовательно, существуют непустые открытые подмножества U_1 и U_2 в G такие, что $Y = (U_1 \cap Y) \cup (U_2 \cap Y)$ и $(U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = \varnothing$. Поэтому

$$X\mathsf{C}_e = (\pi(U_1) \cap (X\mathsf{C}_e)) \cup (\pi(U_2) \cap (X\mathsf{C}_e)),$$

где $\pi(U_1)$ и $\pi(U_2)$ открыты в Q, так как π — непрерывный открытый гомоморфизм. Для любого $b \in G$ левый класс смежности $b\mathsf{C}_e = \mathsf{C}_b$ связен, следовательно, либо $b\mathsf{C}_e \subset U_1 \cap Y$, либо $b\mathsf{C}_e \subset U_2 \cap Y$. Тогда

$$(\pi(U_1) \cap (X\mathsf{C}_e)) \cap (\pi(U_2) \cap (X\mathsf{C}_e)) = \varnothing,$$

стало быть, $\pi(X) = X\mathsf{C}_e$ несвязно. Таким образом, компонента единицы e_P в P совпадает с e_P.

Теорема 1.4. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа. Тогда она имеет равномерность $\mathscr{U}_Q$, совместимую с ее топологией.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть топологическую T_1-лупу $G_1 = Q(\mathscr{B})$, главно изотопную квазигруппе. Пусть $\mathscr{T}_Q$ — топология на Q. Тогда отображения $L_g : Q \to Q$ и $L_g^{-1} : Q \to Q$ — гомеоморфизмы для всякого $g \in G_1$.

Рассмотрим минимальную группу H, порожденную гомеоморфизмами

$$L_{g_1}^{\epsilon_1} \circ \cdots \circ L_{g_k}^{\epsilon_k} : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (Q, \mathscr{T}_Q)$$

для всевозможных $k \in \mathbf{N}$, $g_j \in G_1$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j \in \{1, \dots, k\}$, где

$$L_{g_1}^{\epsilon_1} \circ L_{g_2}^{\epsilon_2}(g) = L_{g_1}^{\epsilon_1}\big(L_{g_2}^{\epsilon_2}(g)\big),$$

$L_{g_2}(g) = B(g_2, g)$, $L_{g_2}^{-1}(g)$ — единственное решение уравнения $B(g_2, y) = g$ с неизвестной y и данными g, g_2 в G_1. Снабдим H базой топологии

$$\mathscr{B}_H = \{W(g_1, \dots, g_k; L_{g_{k+1}}(V)) : k \in \mathbf{N};\ g_j \in G_1;\ j \in \{1, \dots, k+1\};\ V \in \mathscr{B}_{e,G_1}\},$$

где

$$W(g_1, \dots, g_k; L_{g_{k+1}}(V)) \\ := \big\{g \in G_1 : L_{g_j}^{\epsilon_j}(g) \in L_{g_{k+1}}(V);\ \epsilon_j \in \{-1, 1\};\ j \in \{1, \dots, k\}\big\},$$

$\mathscr{B}_{e,G_1}$ — база открытых окрестностей единичного элемента e в G_1. Поскольку G_1 — топологическая лупа, то для любой открытой окрестности V единичного элемента e в G_1, $n \in \mathbf{N}$, $\epsilon_j \in \{-1, 1\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, существует открытая окрестность W для e такая, что $L_{W_1}^{\epsilon_1} \circ \dots \circ L_{W_k}^{\epsilon_k} \subset V$, где $L_W^{\epsilon} = \{L_g^{\epsilon} : g \in W\}$. Поэтому $(H, \mathscr{T}_H)$ — топологическая группа, где $\mathscr{T}_H$ — топология на H с базой $\mathscr{B}_H$.

Отображение $\phi : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (H, \mathscr{T}_H)$ такое, что $\phi(q) = L_q$ для любого $q \in Q$, непрерывно по построению выше, разделяет точки и замкнутые множества в Q, так как G_1 — лупа, и $B(q, P)$ замкнуто в $(Q, \mathscr{T}_Q)$ для любого замкнутого P в $(Q, \mathscr{T}_Q)$. Из теоремы 2.3.20 и леммы 2.3.19 в [2] вытекает, что $\phi : (Q, \mathscr{T}_Q) \to (\phi(Q), \mathscr{T}_H|_Q) \subseteq (H, \mathscr{T}_H)$ — гомеоморфизм. С другой стороны, на топологической группе $(H, \mathscr{T}_H)$ существует левая равномерность $\mathscr{U}_H$, совместимая с топологией $\mathscr{T}_H$ на ней (см. пример 8.1.17 в [2]). Тогда $\mathscr{U}_H$ индуцирует равномерность $\mathscr{U}_Q$ на Q, совместимую с топологией $\mathscr{T}_Q$ на Q.

Замечание 1.1. В отличие от топологических групп равномерность на квазигруппе в общем случае может оказаться ни лево- ни право-инвариантной, так как отображение ϕ в общем случае не является гомоморфизмом, поскольку G может быть неассоциативной, будучи квазигруппой.

2. Регулярность и полнота над топологическими квазигруппами

Определение 2.1. Пусть X — топологическое пространство, $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая нетривиальная бесконечная квазигруппа. При этом пусть G является топологическим T_1-пространством с топологией $\mathscr{T}_G$ и G полно относительно своей равномерности $\mathscr{U}_G$. Если X есть T_1-пространство и для любого замкнутого подмножества B и точки x в X таких, что $x \notin B$, существуют $q \neq r$ в Q и непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(B) = \{q\}$, то X называется *слабо вполне G-регулярным пространством.* Если это выполняется для фиксированных $q \neq r$ в Q и любых x и B, удовлетворяющих данным выше условиям, то X называется *вполне (G, q, r)-регулярным пространством.* Если X вполне (G, q, r)-регулярно для любых $q \neq r$ в Q, то X называется *вполне G-регулярным пространством.*

Замечание 2.1. Определение 2.1 означает, что если топологическое пространство X вполне (G, q, r)-регулярно, то оно слабо вполне G-регулярно; если X вполне G-регулярно, то X вполне (G, q, r)-регулярно. В частном случае, если X — тихоновское нульмерное пространство, то X вполне G-регулярно. В самом

деле, для x существует открыто-замкнутая окрестность $V \ni x$ с $V \subset X \setminus B$. В качестве f можно взять характеристическую функцию $\chi_{X\setminus V}$, где $\chi_A(y) = q$ для любого $y \in A$, $\chi_A(y) = e$ для любого $y \notin A$ для $A \subset X$, так как $q \neq e$, а $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа. Функция $\chi_{X\setminus V}$ непрерывна, поскольку V открыто-замкнуто в X.

В силу теоремы 2.1, приведенной ниже, сама топологическая квазигруппа G слабо вполне G-регулярна.

Теорема 2.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности. Тогда G слабо вполне G-регулярна.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай топологической лупы $G_1 = Q(\mathscr{B})$ с $r = e$. По теореме 1.2 компонента C_e единицы является замкнутой нормальной подлупой в G. Более того, $\mathsf{C}_e g = g\mathsf{C}_e$ — связная компонента для произвольного $g \in G_1$. При этом факторлупа $P = G_1/_c\mathsf{C}_e$ хаусдорфова и вполне несвязна согласно теореме 1.3.

Если C_e нетривиальна, то применим к топологическому пространству $g\mathsf{C}_e$ разложение в виде предела обратного спектра полиэдров над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ по теореме Фрейденталя для любого $g \in G_1$ (см. ссылку в [2] или [45]). Если факторлупа $P = G_1/_c\mathsf{C}_e$ нетривиальна, то разложим топологическое пространство $Q/_c\mathsf{C}_e$ в виде предела обратного спектра полиэдров над полем $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{Q}_p$ — конечным алгебраическим расширением поля p-адических чисел $\mathbf{Q}_p$ (см. теорему 3.19 в [45]). Полиэдры над $\mathbf{R}$ являются $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространствами, а полиэдры над $\mathbf{L}$ вполне несвязны.

Для замкнутого подмножества B и точки x в Q таких, что $x \notin B$, выберем точку q в B. Для любого $b \in Q$ отображение левого сдвига L_b является гомеоморфизмом Q на Q как топологического пространства, где $L_b y = by$ для любых b и y из Q. Поэтому без ограничения общности можно взять $x = e$. Используя полиэдральные разложения, получим, что существует непрерывное отображение $f : Q \to Q$ такое, что $f(x) = e$, $f(B) = \{q\}$.

Следствие 2.1. *Если G — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности либо связная, либо вполне несвязная, то она вполне G-регулярна.*

Замечание 2.2. Наряду с квазигруппами рассмотрим $\mathbf{F} = Q(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ — топологическое квазикольцо, т. е. имеются две непрерывные бинарные операции $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ из Q^2 в Q, удовлетворяющие условию дистрибутивности, где $Q(\mathscr{A}_1)$ — лупа, $Q(\mathscr{A}_2)$ — группоид. При этом пусть $\mathbf{F}$ бесконечно, является топологическим T_1-пространством и $\mathbf{F}$ полно относительно своей равномерности, совместимой с топологией. Вместо $Q(\mathscr{A}_1)$ также пишут $Q(+)$ с 0 вместо e.

Следствие 2.2. *Если $\mathbf{F}$ — топологическое T_1-квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$, то оно вполне $\mathbf{F}$-регулярно.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 $\mathbf{F}$ слабо вполне G-регулярно, где $G = Q(+)$. Поскольку $\mathbf{F}$ — квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$, для любых $q \neq 0$ и b из $\mathbf{F}$ уравнение $yq = b$ имеет единственное решение $y = b/q$. Поэтому для любого $q \neq 0$ из $\mathbf{F}$ отображение $M_{r,q} : Q \to Q$ — гомеоморфизм топологического пространства Q, где $M_{r,q}x = xq$ для всяких q и x из $\mathbf{F}$. При этом если отображение $f : Q \to Q$ непрерывно, то $(yf) : Q \to Q$ непрерывна, где $(yf)(x) = y(f(x))$ для $x \in \mathbf{F}$, $y \in \mathbf{F}$.

Следствие 2.3. *Пусть G — топологическая T_1-квазигруппа, полная относительно своей равномерности либо связная, либо вполне несвязная; либо $G = Q(\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2)$ топологическое T_1-квазикольцо с правым делением в $Q(\mathscr{A}_2) - \{0\}$. Если пространство X слабо вполне G-регулярно, то оно вполне G-регулярно.*

Теорема 2.2. *Пусть A — подпространство (слабо) вполне G-регулярного или (G, q, r)-регулярного пространства X. Тогда A (слабо) вполне G-регулярно или (G, q, r)-регулярно соответственно.*

Доказательство. В силу предложения 2.1.1 в [2] и определения 2.1 A является T_1-пространством. Пусть $x \in A$, B — замкнутое подмножество в A, $x \notin B$. По предложению 2.1.1 в [2] $B = A \cap \overline{B}$, следовательно, $x \notin \overline{B}$, где $\overline{B} = \mathrm{cl}_X B$ — замыкание B в X. В случае слабой вполне G-регулярности существуют $q \neq r$ в Q и непрерывное отображение $f : X \to Q$ такие, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. Если же X вполне (G, q, r)-регулярно, то существует непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. В случае вполне G-регулярности для всяких $q \neq r$ в Q существует непрерывное отображение $f : X \to Q$ такое, что $f(x) = r$ и $f(\overline{B}) = \{q\}$. Тогда ограничение f на A непрерывно, $f|_A : A \to Q$, причем $f(x) = r$ и $f(B) = \{q\}$, следовательно, A слабо вполне G-регулярно или вполне G-регулярно или (G, q, r)-регулярно соответственно.

Предложение 2.1. *Пусть даны T_1-пространство X и предбаза $\mathscr{P}_X$ его топологии $\mathscr{T}_X$. X вполне G-регулярно тогда и только тогда, когда для любого $x \in X$ и любой окрестности V точки x, где V принадлежит предбазе $\mathscr{P}_X$, для любых $q \neq r$ в G существует непрерывное отображение $f : X \to \mathbf{F}$ такое, что $f(x) = r$ и $f(X \setminus V) = \{q\}$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из определения 2.1, так как $x \notin X \setminus V$, а $X \setminus V$ замкнуто в X.

Достаточность. Пусть $x \in X$, B замкнуто в X, $x \notin B$. По определению предбазы существуют $V_1, \ldots, V_k$ из $\mathscr{P}_X$ такие, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_i \subseteq X \setminus B$. Согласно определению 2.1 для любого $i \in \{1, \ldots, k\}$ и для любых $q_i \neq r_i$ в G существует непрерывное отображение $f_i : X \to G$ такое, что $f_i(x) = r_i$ и $f_i(X \setminus V_i) = \{q_i\}$. Положим $f(z) = f_1(z)$ при $k = 1$, $f(z) = f_1(z)f_2(z)$ при $k = 2$, $f(z) = (\ldots(f_1(z)f_2(z))\ldots)f_k(z)$ при $k \geq 3$ для любого $z \in X$. Тогда f — непрерывное отображение, так как G — топологическая квазигруппа. При этом $f(x) = r$ и $f(y) = q$ для любого $y \in B$, поскольку $B \subseteq X \setminus V_i$ для любого $i = 1, \ldots, k$, где $r = r_1$ и $q = q_1$ при $k = 1$, $r = r_1 r_2$ и $q = q_1 q_2$ при $k = 2$, $r = (\ldots(r_1 r_2)\ldots)r_k$ и $q = (\ldots(q_1 q_2)\ldots)q_k$ при $k \geq 3$. Поскольку G — квазигруппа, то для любых $q \neq r$ в G существуют $q_1 \neq r_1$, ... , $q_k \neq r_k$ в G такие, что q и r имеют разложения в виде упорядоченных произведений, данных выше.

Теорема 2.3. *Пусть $X = \prod\limits_{j \in J} X_j$ — произведение топологических пространств, где J — множество, $X \neq \varnothing$. X вполне G-регулярно тогда и только тогда, когда X_j вполне G-регулярно для любого $j \in J$.*

Доказательство. Пусть X_j вполне G-регулярно для любого $j \in J$. В силу предложения 2.1 достаточно доказать, что для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности вида $V = \pi_{j_0}^{-1}(W_{j_0})$ и для любых $q \neq r$ в G, где W_{j_0} открыто в X_{j_0}, $j_0 \in J$, $\pi_j : X \to X_j$ — проекция, существует непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(x) = r$ и $f(X \setminus V) = \{q\}$, так как $\prod\limits_{j \in J} X_j$ снаб-

жено тихоновской топологией произведения (см. также разд. 2.3 в [2]). Из вполне G-регулярности пространства X_{j_0} согласно определению 2.1 вытекает, что существует непрерывное отображение $g : X_{j_0} \to G$ такое, что $g(x_{j_0}) = r$ и $g(X_{j_0} \setminus W_{j_0}) = \{q\}$, где $x_{j_0} = \pi_{j_0}(x)$. Тогда отображение $f(y) = g(\pi_{j_0}(y))$ удовлетворяет нужным условиям, где $y \in X$.

Обратно, пусть X вполне G-регулярно. Возьмем произвольную фиксированную точку $y_j \in X_j$ для любого $j \in J$. Рассмотрим произведение топологических пространств $Y_{j_0} = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где $A_{j_0} = X_{j_0}$, $A_j = \{y_j\}$ для любого $j \in J \setminus \{j_0\}$. Поскольку $\pi_{j_0} : Y_{j_0} \to X_{j_0}$ — гомеоморфизм, существует вложение X_{j_0} в Y_{j_0}. По определению 2.1 X_j есть T_1-пространство для любого $j \in J$. Поэтому Y_{j_0} замкнуто в X. Таким образом, существует вложение X_{j_0} в X в качестве замкнутого подпространства, следовательно, X_{j_0} вполне G-регулярно в силу теоремы 2.2.

Теорема 2.4. *Пусть X — слабо вполне G-регулярное пространство, $w(X) = \mathsf{m} \geq \aleph_0$, где $w(X)$ обозначает вес топологического пространства X. Тогда существует гомеоморфное вложение X в G^{m}.*

Доказательство. Из теоремы 2.3.13 в [2] вытекает, что $w(G^{\mathsf{m}}) \leq \mathsf{m}w(G)$, так как $\mathsf{m}w(G) = \max(\mathsf{m}, w(G))$, $\mathsf{m}\mathsf{m} = \mathsf{m}$, $w(G)w(G) = w(G)$, $\mathsf{m} \geq \aleph_0$, $w(G) \geq \aleph_0$ [46]. Существует вложение дискретного пространства $D(\mathsf{m})$ мощности m в G^{m}, так как G — бесконечная T_1-топологическая квазигруппа. Из $w(D(\mathsf{m})) = \mathsf{m}$ следует, что $w(G^{\mathsf{m}}) \geq \mathsf{m}$. В силу теоремы 1.1.15 в [2] существует база $\{U_j : j \in J\}$ пространства X, состоящая из функционально открытых множеств $U_j = f_j^{-1}(V_j)$, где $f_j : X \to G$ — непрерывное отображение для любого $j \in J$, V_j — открытое подмножество в G, J — множество мощности m.

Если $x \in X$, B замкнуто в X, $x \notin B$, то $W = X \setminus B$ открыто в X, $x \in W$, тогда существует $j_0 \in J$ такое, что $U_{j_0} \subseteq W$, следовательно, f_{j_0} разделяет x и B. Таким образом, семейство $\mathscr{F} = \{f_j : j \in J\}$ разделяет точки и замкнутые множества в X. Поскольку X есть T_1-пространство, по теореме о диагональном отображении 2.3.20 в [2] диагональ $\Delta_{j \in J} f_j$ — гомеоморфное вложение X в G^{m}.

Замечание 2.2. Если в определении вполне регулярности использовать вместо всей топологической квазигруппы G некоторое каноническое замкнутое подмножество W в G, то получится определение (слабо) вполне W-регулярного ((W, q, r)-регулярного) пространства. Тогда теоремы 2.2 и 2.4 переносятся на (слабо) вполне W-регулярные пространства с $f : X \to W$ и W^{m} вместо $f : X \to G$ и G^{m} соответственно. Если дополнительно $WW \subseteq W$, то предложение 2.1 и теорема 2.3 тоже переносятся на вполне W-регулярные пространства.

Определение 2.2. Топологическое пространство называется *G-полным*, если оно слабо вполне G-регулярно и не существует слабо вполне G-регулярного пространства $Y = Y_X$, которое удовлетворяло бы следующим условиям:

(i) существует гомеоморфное вложение $h : X \to Y$ такое, что $h(X) \neq \overline{h(X)} = Y$;

(ii) для любого непрерывного отображения $f : X \to G$ существует непрерывное отображение $g : Y \to G$ такое, что $g(h) = f$, где $\overline{A} = \mathrm{cl}_Y A$ обозначает замыкание подмножества A в Y.

Теорема 2.5. *Топологическое пространство X G-полно тогда и только тогда, когда X гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для некоторого множества J, где G^J снабжено тихоновской топологией произведения.*

Доказательство. Пусть X замкнуто в G^J и имеется гомеоморфное вложение $h : X \to Y$, где Y — слабо вполне G-регулярное пространство. Пусть h удовлетворяет условию (ii) из определения 2.2. Без ограничения общности можно рассмотреть случай $\mathrm{cl}_Y\, h(X) = Y$. В силу условия (ii) для любой проекции $\pi_j : G^J \to G_j$, где $G_j = G$, $G^J = \prod\limits_{j\in J} G_j$, существует непрерывное отображение $\eta_j : Y \to G_j$ такое, что $\eta_j(h) = \pi_j|_X$, так как каждая проекция π_j имеет непрерывное ограничение $\pi_j|_X$ на X. Поэтому существует непрерывное инъективное диагональное отображение $\eta = \Delta_{j\in J}\eta_j : Y \to G^J$ в силу теоремы 2.3.20 в [2]. Тогда получается, что $\eta(h(x)) = x$ для любого $x \in X$, следовательно, $\eta(Y) = \eta(\mathrm{cl}_Y\, h(X)) \subseteq \mathrm{cl}_{G^J}\, \eta(h(X)) = X$, так как X замкнуто в G^J. При этом $h(\eta(h(x))) = h(x)$ для любого $x \in X$. Таким образом, $h(\eta|_{h(X)}) = id_{h(X)}$. Поскольку топологическая T_1-квазигруппа $(G, \mathscr{T}_G)$ имеет равномерность $\mathscr{U}_G$, совместимую с ее топологией по теореме 1.4, она является топологическим $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространством по теореме 8.1.20 в [2]. В силу теоремы 2.3.11 в [2] G^J является $T_1 \cap T_{3\frac{1}{2}}$-пространством. Из теоремы 1.5.4 в [2] вытекает, что $h(\eta|_{h(X)}) = id_Y$. Таким образом, $h(X) = Y$, так как $h(\eta(Y)) = h(X)$. Следовательно, не существует слабо вполне G-регулярного пространства, которое удовлетворяло бы условиям (i) и (ii) из определения 2.2. Это означает, что X G-полно.

Пусть теперь X является G-полным топологическим пространством. Возьмем пространство $C(X, G)$ всех непрерывных отображений $f : X \to G$ и диагональное отображение $\psi := \Delta_{f\in C(X,G)} f : X \to \prod\limits_{f\in C(X,G)} G_f$, где $G_f = G$ для любого $f \in C(X, G)$. Семейство $C(X, G)$ разделяет точки и замкнутые множества в X согласно определениям 2.1 и 2.2. В силу теоремы 2.3.20 в [2] о диагональном отображении ψ является гомеоморфным вложением. Тогда можно задать $Y = \mathrm{cl}_{G^J}\, \psi(X)$, где $J = C(X, G)$. Для любого непрерывного отображения $g : X \to G$ существует непрерывное отображение $\widetilde{g} : Y \to G$ такое, что $\widetilde{g}(\psi) = g$ и $\widetilde{g} = \pi_g|_Y$, где $\pi_g : \prod\limits_{f\in J} G_f \to G_g$. Из определения 2.2 вытекает, что $Y = \psi(X)$. Таким образом, X гомеоморфно замкнутому подпространству $\psi(X)$ в G^J.

Лемма 2.1. *Пусть $G = Q(\mathscr{A})$ — бесконечная топологическая недискретная T_1-квазигруппа. Пусть существуют непрерывные отображения $h_j : G \to G$ такие, что $\mathscr{A}(h_1, h_2) = \mathrm{id}$; $h_j(G) \neq G$, $\mathrm{Int}_G\, h_j(G)$ является G-полным для любого $j \in \{1, 2\}$, $\mathrm{Int}_G(h_1(G) \cap h_2(G)) = \varnothing$, $\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G\, h_1(G) \cup \mathrm{Int}_G\, h_2(G)) = G$, где $\forall x \in G$ $id(x) = x$. Пусть также X — топологическое пространство, $A \subset X$, любое непрерывное отображение $f : A \to G$ с $f(A) \subset \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G\, W_j)$ для некоторого $j \in \{1, 2\}$ имеет непрерывное продолжение $F : G \to G$, где $W_1 = h_1(G)$, $W_2 = h_2(G)$. Тогда любое непрерывное отображение $f : A \to G$ непрерывно продолжается на X.*

Доказательство. Поскольку отображения h_1 и h_2 непрерывны, отображение $\mathscr{A}(h_1, h_2)$ тоже непрерывно на G, так как $\mathscr{A}(h_1, h_2)(x) = \mathscr{A}(h_1(x), h_2(x))$ для любого $x \in G$. Из условий леммы следует, что G плотна в себе и $\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G\, W_1) \cup \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G\, W_2) = G$. Положим $f_1(x) = h_1(f(x))$, $f_2(x) = h_2(f(x))$ для любого $x \in A$. Тогда $f_j : A \to G$ и $f_j(A) \subseteq \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G\, W_j)$. По условию леммы существует непрерывное продолжение F_j на G для f_j, $F_j : G \to G$, $F_j|_A = f_j$ для любого $j \in \{1, 2\}$. Поэтому $F = \mathscr{A}(F_1, F_2)$ является непрерывным продолжением на G для отображения f.

Пример 2.1. Если $G = (\mathbf{R}, +)$, то $h_1(x) = \max(x, 0)$, $h_2(x) = \min(x, 0)$, $h_1(x) + h_2(x) = x$ для любого $x \in \mathbf{R}$, $h_1(\mathbf{R}) = [0, +\infty)$, $h_2(\mathbf{R}) = (-\infty, 0]$. Если топологическое поле $\mathbf{F}$ — расширение поля $\mathbf{R}$, то $\mathbf{F}$ также имеет структуру топологического векторного пространства над $\mathbf{R}$. Поэтому в таком случае также можно задать функции h_1 и h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1.

Пример 2.2. Пусть $G = Q(\mathscr{B})$ — вполне несвязная топологическая бесконечная недискретная T_1-лупа. Для любых открыто-замкнутых непустых подмножеств A_1 и A_2 в G таких, что $A_1 \cup A_2 = G$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, зададим $h_1(x) = x$ при $x \in A_1$, $h_1(x) = e$ при $x \in A_2$ и $h_2(x) = x$ при $x \in A_2$, $h_2(x) = e$ при $x \in A_1$, где e — единичный элемент в G. Тогда отображения h_1 и h_2 непрерывны, $\mathscr{B}(h_1(x), h_2(x)) = x$ для любого $x \in G$, $h_1(G) = A_1 \cup \{e\}$, $h_2(G) = A_2 \cup \{e\}$.

В силу теоремы 1.1 функции h_1 и h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1, существуют также для вполне несвязной топологической бесконечной недискретной T_1-лупы $Q(\mathscr{A})$.

Теорема 2.6. *Пусть X — слабо вполне G-регулярное пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *X G-полно;*

(ii) *для любого $j \in \{1, 2\}$ существует компактификация $Z_j = c(\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_j)))$ такая, что для любого $y \in (\beta X) \setminus X$ существует $i = i(y) \in \{1, 2\}$ и существует непрерывное отображение $h_{i,y} : \beta X \to Z_i$ такое, что $h_{i,y}(y) \in Z_i \setminus ((\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_i))) \setminus (W_1 \cap W_2))$ и $h_{i,y}(x) \in (\mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G(W_i))) \setminus (W_1 \cap W_2)$ для любого $x \in X$, где W_1 и W_2 удовлетворяют условиям леммы 2.1, βX обозначает стоун-чеховскую компактификацию пространства X.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство X G-полно, $y \in (\beta X) \setminus X$. Положим $Y = X \cup \{y\}$, следовательно, $Y \subseteq \beta X$. Поэтому выполняется условие (i) из определения 2.2. Из условия (ii) определения 2.2 вытекает, что существует непрерывное отображение $f : X \to G$, которое не имеет непрерывного продолжения на Y. В силу леммы 2.1 достаточно рассмотреть случай: существует $j \in \{1, 2\}$ такое, что $f(X) \subseteq \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$. В силу теоремы 1.4 G имеет равномерность, совместимую с ее топологией, следовательно, вполне регулярно (т. е. тихоновское) по теореме 8.1.20 в [2]. Поскольку G вполне регулярно, а X слабо вполне G-регулярно, то X вполне регулярно. Из теоремы 2.1 с использованием полиэдральных разложений в ее доказательстве следует, что существуют подмножества W_1, W_2 и функции h_1, h_2, удовлетворяющие условиям леммы 2.1. В силу теорем 3.1.9 и 3.6.1 в [2] отображение f имеет непрерывное продолжение $\widetilde{f} : \beta X \to Z_j$. Если бы $f(y) \in \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$, то существовало бы непрерывное продолжение $\widetilde{f}|_Y : Y \to G$ для f. Тогда получится противоречие. Поэтому $\widetilde{f}(y) \in Z_j \setminus \mathrm{cl}_G(\mathrm{Int}_G W_j)$.

Поскольку $\mathrm{cl}_G(V_1 \cup V_2) = G$, где $V_1 = \mathrm{Int}_G h_1(G)$ и $V_2 = \mathrm{Int}_G(h_2(G))$, то $Z_1 \cup Z_2 \supset G$. Пусть для любого $y \in (\beta X) \setminus X$ существует непрерывное отображение $h_{i,y} : \beta X \to Z_i$ такое, что $h_{i,y}(y) \in Z_i \setminus ((\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2))$ и $h_{i,y}(X) \subset (\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2)$, где $i = i(y) \in \{1, 2\}$. Тогда

$$X = \bigcap_{y \in (\beta X) \setminus X} h_{i(y),y}^{-1}((\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W_i) \setminus (W_1 \cap W_2)).$$

Для продолжения доказательства понадобятся следующие леммы и теоремы.

Лемма 2.2. *Любое замкнутое подпространство X G-полного пространства G-полно.*

Доказательство. Пусть X замкнуто в G-полном пространстве Y. В силу теоремы 2.5 Y гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для некоторого множества J. Поэтому X гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J, следовательно, X G-полно по теореме 2.5.

Теорема 2.7. *Пусть $X_d \neq \varnothing$ для любого $d \in D$, где D — множество. Произведение $\prod\limits_{d\in D} X_d$ G-полно тогда и только тогда, когда X_d G-полно для любого $d \in D$.*

Доказательство. Если X_d G-полно, то X_d гомеоморфно замкнутому подпространству в G^{J_d} для некоторого множества J_d по теореме 2.2. Поэтому $\prod\limits_{d\in D} X_d$ гомеоморфно замкнутому подпространству в G^J для $J = \bigcup\limits_{d\in D} J_d$ в силу предложения 2.3.7 и следствия 2.3.4 в [2]. Из теоремы 2.4 следует, что $\prod\limits_{d\in D} X_d$ G-полно.

Обратно, пусть $\prod\limits_{d\in D} X_d$ G-полно. Из следствия 2.3.4, предложения 2.3.7 в [2] и теоремы 2.4 вытекает, что X_d гомеоморфно замкнутому подпространству в G^{J_d} для некоторого множества J_d для любого $d \in D$, следовательно, X_d G-полно по лемме 2.2.

Следствие 2.4. *Предел обратного спектра G-полных пространств является G-полным.*

Доказательство. Это следует из предложения 2.5.1 в [2], леммы 2.2 и теоремы 2.7 выше.

Теорема 2.8. *Пусть X — топологическое пространство, $\{A_j : j \in J\}$ — семейство его подпространств. Если A_j G-полно для любого $j \in J$, то $\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ G-полно.*

Доказательство. Пересечение $\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ гомеоморфно $(\prod\limits_{j\in J} A_j)\cap\Delta_X$, где Δ_X — диагональ в $\prod\limits_{j\in J} X_j$, $X_j = X$ для любого $j \in J$. Из теоремы 2.7 вытекает, что $\prod\limits_{j\in J} A_j$ G-полно. В силу леммы 2.2 $\bigcap\limits_{j\in J} A_j$ G-полно.

Следствие 2.5. *Пусть топологическое пространство X G-полно, Y — хаусдорфово пространство, $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, D есть G-полное подпространство в Y. Тогда прообраз $f^{-1}(D)$ G-полон.*

Доказательство. Рассмотрим ограничение h функции f на $f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in D\}$ и $\Gamma(h) = (X \times D) \cap \Gamma(f)$, где $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ — график отображения f. Тогда $\Gamma(h)$ замкнут в $X\times D$, а $X\times D$ G-полно по теореме 2.7. Поскольку прообраз $f^{-1}(D)$ гомеоморфен $\Gamma(h)$, то $f^{-1}(D)$ G-полон согласно лемме 2.2.

Окончание доказательства теоремы 2.6. В силу следствий 2.4 и 2.5 X G-полно, так как $(\mathrm{cl}_G \mathrm{Int}_G W) \setminus (W_1 \cap W_2)$ G-полно, ибо $\mathrm{Int}_G h_j(G)$ G-полно для любого $j \in \{1, 2\}$.

Определение 2.3. Для слабо вполне G-регулярного пространства X пусть на пространстве $C(X, G)$ всех непрерывных функций $f : X \to G$ задана база

$$\mathsf{B}(C(X,G)) = \{W(x_1,\dots,x_n;U) : x_i \in X,\ i = 1,\dots,n,\ n \in \mathbf{N};\ U \in \mathsf{B}(G)\}$$

топологии $\mathscr{T} = \mathscr{T}(C(X,G))$ на $C(X,G)$, где

$$W(x_1,\dots,x_n;U) = \{g \in C(X,G) : g(x_i) \in U,\ i = 1,\dots,n\},\ n \in \mathbf{N},\ \mathbf{N} = \{1,\dots\},$$

$\mathsf{B}(G)$ — база топологии квазигруппы G. Тогда $(C(X,G),\mathscr{T})$ называется *пространством всех непрерывных функций* из X в G в топологии поточечной сходимости и обозначается через $C_p(X,G)$.

Предложение 2.2. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство. Тогда $C_p(X,G)$ является всюду плотным подпространством в G^X.*

Доказательство. Из вполне G-регулярности пространства X следует, что для любых $x_1,\dots,x_n$ в X и $f \in G^X$ существует отображение $h \in C_p(X,G)$ такое, что $f(x_j) = h(x_j)$ для любого $j = 1,\dots,n$. Из определения топологии тихоновского произведения на G^X тогда вытекает, что $f \in \mathrm{cl}_{G^X} C_p(X,G)$.

Предложение 2.3. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $Y \subset X$, $\xi_Y : C_p(X,G) \to C_p(Y,G)$ — отображение сужения, $\xi_Y(f) = f|_Y$ для любого $f \in C_p(X,G)$. Тогда отображение $\xi = \xi_Y$ непрерывно и $\mathrm{cl}_{C_p(X,G)}\,\xi(C_p(X,G)) = C_p(Y,G)$.*

Доказательство. Из определения 2.3 вытекает, что отображение ξ непрерывно. Для произвольного заданного отображения $g \in C_p(Y,G)$ возьмем открытую окрестность $W(y_1,\dots,y_n;U)$ отображения g, где $y_1,\dots,y_n$ принадлежат Y, $U \in \mathsf{B}(G)$, $n \in \mathbf{N}$. Поскольку X является вполне G-регулярным пространством, существует отображение $f \in C_p(X,G)$ такое, что $f(y_i) = g(y_i)$ для любого $i = 1,\dots,n$. При $n = 1$ это очевидно. При $1 < n$ для любого $1 \le i \le n$ подмножество $P_i := \{y_j : 1 \le j \le n, j \ne i\}$ замкнуто в X, и для любых q_i и r_i из G существует отображение $f_i \in C_p(X,G)$ такое, что $f_i(y_i) = r_i$, $f_i(P_i) = \{q_i\}$. Используя упорядоченные произведения вида $d_{i+1} = d_i b_{i+1}$ при $i = 1,\dots,n-1$, где $d_1 = b_1$, и выбирая подходящие r_i и q_i, получим отображение f, так как G — квазигруппа. Таким образом, $\xi(f) \in W(y_1,\dots,y_n;U)$.

Лемма 2.3. *Пусть X — (слабо) вполне G-регулярное пространство, A — замкнутое подмножество в X, B — компактное подмножество в X, $A \cap B = \varnothing$. Тогда (существуют $q \ne r$ в G соответственно) для любых $q \ne r$ в G существует непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(A) = \{q\}$ и $f(B) = \{r\}$.*

Доказательство. Рассмотрим отношение эквивалентности E на X такое, что xEy, если или ($x \in A$ и $y \in A$), или ($x \in X - A$ и $x = y$). Тогда существуют факторпространство $Y = X/E$ и естественное факторное отображение $w : X \to Y$ (см., например, разд. 2.4 в [2]). В силу предложения 2.4.3 в [2] Y является T_1-пространством, так как A замкнуто в X, $w(x) = x$ для любого $x \in X \setminus A$. Из предложения 2.4.2 в [2] следует, что для любых различных точек $x \in Y - \{a\}$ и $y \in Y$, $x \ne y$, существует непрерывное отображение $f : Y \to G$ такое, что $f(x) = r_x$, $f(y) = q_y$, $q_y \ne r_x$ в G, где $a = w(A)$. Таким образом, семейство $C(Y,G)$ всех непрерывных функций $f : Y \to G$ разделяет точки в Y. Из теоремы 2.3.20 в [2] вытекает, что диагональ $\eta = \Delta_{f \in C(Y,G)} f$ есть инъективное непрерывное отображение $\eta : Y \to G^{C(Y,G)}$. С другой стороны, B компактно, следовательно, $w(B)$ компактно, а значит, и замкнуто в Y согласно теоремам 3.1.8 и 3.1.10 в [2]. При этом $w(B) \cap w(A) = \varnothing$. Тогда $\eta(w(B)) \cap \eta(w(A)) = \varnothing$, $\eta(w(B))$ замкнуто в $G^{C(Y,G)}$, $\eta(w(A)) = \eta(a)$. Из теоремы 2.4 следует, что (существуют $q \ne r$ в G соответственно) для любых $q \ne r$ в G существует непрерывное отображение $g : G^{C(Y,G)} \to G$ такое, что $g(\eta(w(B))) = \{r\}$ и $g(\eta(a)) = q$, следовательно,

$f = g \circ \eta \circ w$ — непрерывное отображение $f : X \to G$ такое, что $f(A) = \{q\}$, $f(B) = \{r\}$.

Предложение 2.4. *Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $Y \subset X$, $\xi_Y : C_p(X,G) \to C_p(Y,G)$ — отображение сужения и Y замкнуто в X. Тогда $\xi = \xi_Y$ открыто отображает $C_p(X,G)$ на подпространство $\xi(C_p(X,G))$ пространства $C_p(Y,G)$.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай, когда G — лупа. Для $x_1, \dots, x_l$ из Y и $x_{l+1}, \dots, x_n$ из $X - Y$ с $n \in \mathbf{N}$ и $f \in C_p(X,G)$ рассмотрим открытую окрестность $W(x_1, \dots, x_n; U)$ для f, где $U \in \mathsf{B}(G)$, $0 \le l \le n$. Тогда $\xi(W(x_1, \dots, x_n; U)) \subset W(x_1, \dots, x_l; U) \cap \xi(C_p(X,G))$. Возьмем произвольную функцию $g \in \xi(C_p(X,G))$ такую, что $g \in W(x_1, \dots, x_l; U)$. Пусть $h \in C_p(X,G)$ и $\xi(h) = g$. Из вполне G-регулярности пространства X и замкнутости Y в X вытекает, что существует отображение $s \in C_p(X,G)$ такое, что $s(Y) = \{e\}$ и $s(x_j)h(x_j) = f(x_j)$ для любого $j = l+1, \dots, n$. Тогда $sh \in W(x_1, \dots, x_n; U)$ и $\xi(sh) = g$, следовательно, $\xi(W(x_1, \dots, x_n; U)) = W(x_1, \dots, x_l; U) \cap \xi(C_p(X,G))$. Таким образом, отображение ξ открыто.

Предложение 2.5. *Пусть выполнены условия предложения 2.3 и Y всюду плотно в X. Тогда $\xi : C_p(Y,G) \to \xi(C_p(X,G)) =: C_p(Y|X,G)$ является уплотнением, где $\xi = \xi_Y$.*

Доказательство. Поскольку Y всюду плотно в X, из $f \ne g$ в $C_p(X,G)$ вытекает, что $f|_Y \ne g|_Y$, следовательно, $\xi(f) \ne \xi(g)$. В силу предложения 2.3 отображение $\xi = \xi_Y$ непрерывно. Таким образом, отображение ξ непрерывно, инъективно и сюръективно на $\xi(C_p(X,G))$, ξ — уплотнение $C_p(X,G)$ на $C_p(Y|X,G)$.

Следствие 2.6. *Если выполнены условия предложения 2.5 и $S \subseteq C_p(X,G)$, то отображение $\xi|_S : S \to \xi(S) \subseteq C_p(Y|X,G)$ является гомеоморфизмом.*

Пример 2.3. Пусть $\tau \ge \aleph_0$, S — дискретное пространство, $\mathrm{card}(S) = \tau$. Из изоморфизма топологических квазигрупп $(G^\tau)^\tau$ и G^τ вытекает, что топологические квазигруппы $C_p(X, G^\tau)$ и $(C_p(X, G^\tau))^\tau$ изоморфны, так как $C_p(X, (G^\tau)^\tau)$ изоморфно $C_p(X, G^\tau)$. При этом $(C_p(X, G^\tau))^\tau$ изоморфно $C_p(X \times S, G^\tau)$. Таким образом, из изоморфизма топологических квазигрупп $C_p(X, G^\tau)$ и $C_p(Y, G^\tau)$ в общем не следует, что топологические пространства X и Y гомеоморфны.

Определение 2.4. Для отображения f множества X в множество Y пусть задано отображение $f^* : G^Y \to G^X$ такое, что $f^*(v)(x) = v(f(x))$ для любых $v \in G^Y$ и $x \in X$. Тогда f^* называется двойственным отображением к f.

Предложение 2.6. (а) *Двойственное отображение f^* непрерывно.*

(б) *Пусть $f(X) = Y$. Тогда f^* — гомеоморфизм из G^Y на $f^*(G^Y)$ и $f^*(G^Y)$ замкнуто в G^X.*

Доказательство легко проводится с использованием определения 2.3 и замечания 2.1, так как для дискретного топологического пространства X пространства $C_p(X,G)$ и G^X гомеоморфны.

Предложение 2.7. *Пусть X, Y, Z — вполне G-регулярные пространства, $f : X \to Y$ и $g : X \to Z$ — непрерывные отображения такие, что $f(X) = Y$ и $g(X) = Z$. Тогда следующие условия равносильны:*

(а) $f^*(C(Y,G)) \subseteq g^*(C(Z,G))$;

(б) *существует непрерывное отображение* $h : Z \to Y$ *такое, что* $f = h \circ g$.

Доказательство проводится с использованием определения 2.3 и теоремы 2.3.

Следствие 2.7. *Предположим, что* X *и* Y *— вполне* G*-регулярные пространства,* $f : X \to Y$ *— сюръективное отображение. Тогда*

(а) f *непрерывно тогда и только тогда, когда* $f^*(C(Y,G)) \subseteq C(X,G)$*;*

(б) *если* f *— факторное отображение, то* $f^*(C_p(Y,G))$ *является замкнутым подпространством в* $C_p(X,G)$*;*

(в) f *— уплотнение в том и только том случае, если* $f^*(C_p(Y,G))$ *всюду плотно в* $C_p(X,G)$*;*

(г) f *— гомеоморфизм тогда и только тогда, когда* $f^*(C_p(Y,G)) = C_p(X,G)$.

Доказательство (а), (б), (г) проводится с использованием предложения 2.7.

(в) Пусть f — уплотнение, $h \in C(X,G)$. Возьмем открытую окрестность $W(x_1,\dots,x_n;V)$ функции h, где $x_1,\dots,x_n$ принадлежат X, $n \in \mathbf{N}$, $V \in \mathsf{B}(G)$. Из взаимной однозначности отображения f следует, что $y_i \neq y_j$ для любого $i \neq j$, где $f(x_i) = y_i$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Поскольку пространство Y вполне G-регулярно, существует отображение g такое, что $g(y_i) = h(x_i)$ для любого $i \in \{1,\dots,n\}$. Поэтому $f^*(g) \in W(x_1,\dots,x_n;V)$, следовательно, $f^*(C_p(Y,G))$ всюду плотно в $C_p(X,G)$.

Обратно, пусть $f^*(C_p(Y,G))$ всюду плотно в $C_p(X,G)$. В силу п. (а) f непрерывно. Предположим, что существуют $x_1 \neq x_2$ в X такие, что $f(x_1) = f(x_2)$. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай лупы. Возьмем произвольную открытую окрестность V единичного элемента e в G такую, что $V \neq G$. Существует открытая окрестность V_1 единичного элемента e в G такая, что $V_1V_1 \cup V_1 \setminus V_1 \cup V_1/V_1 \subset V$, так как G — бесконечная топологическая лупа, являющаяся T_1-пространством (см. определение 2.1). Тогда для любой функции $h \in f^*(C_p(Y,G))$ выполняется равенство $h(x_1) = h(x_2)$. С другой стороны, пространство X вполне G-регулярно, следовательно, существует $g \in C(X,G)$ такое, что $g(x_1) = e$, $g(x_2) \notin V$. Тогда $(W(x_1,x_2;V_1)g) \cap f^*(C_p(Y,G)) = \varnothing$. Получилось противоречие. Таким образом, отображение f взаимно однозначно и непрерывно, $f(X) = Y$, т. е. f — уплотнение.

Определение 2.5. Пусть X — вполне G-регулярное пространство, $f : X \to Y$ — отображение из X на Y. Сильнейшая из всех вполне G-регулярных топологий $\mathscr{T} = \mathscr{T}_{X,f,Y}$ на Y, относительно которой f непрерывно, называется *G-факторной топологией на множестве Y порожденной отображением f*. При этом отображение f называется *G-факторным*, если топология на Y совпадает с G-факторной топологией, порожденной f.

Предложение 2.8. (а) *Семейство* $\mathsf{B} = \{h^{-1}(U) : h \in \mathscr{F}_G, U$ *открыто в* $G\}$ *образует предбазу топологии* $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ *(см. определение 2.5), где* $\mathscr{F}_G = \{h \in G^Y : f^*(h) \in C(X,G)\}$.

(б) $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ *— слабейшая топология на* Y*, для которой непрерывны все функции* h *из* $\mathscr{F}_G$.

(в) *Если* $\mathscr{T}_Y^1$ *— топология на* Y*, а отображение* $f : X \to (X, \mathscr{T}_Y^1)$ *непрерывно,* $\mathscr{F}_G \subset C\big((Y,\mathscr{T}_Y^1),G\big)$*, то* $\mathscr{F}_G = C\big((Y,\mathscr{T}_Y^1),G\big)$.

(г) $\mathscr{T}_{X,f,Y}$ *— единственная вполне* G*-регулярная топология на* Y*, для которой* $C((Y,\mathscr{T}_{X,f,Y}),G) = \mathscr{F}_G$.

Доказательство проводится с использованием теорем 2.2, 2.4 и определения 2.5.

Определение 2.6. Отображение $f : X \to Y$ топологических вполне G-регулярных пространств X и Y, где $f(X) = Y$, называется *G-функционально замкнутым*, если $f^*(C(Y,G))$ замкнуто в $C_p(X,G)$.

Предложение 2.9. *Пусть X и Y — вполне G-регулярные пространства. Отображение f из X на Y есть G-факторное отображение тогда и только тогда, когда f G-функционально замкнуто.*

Доказательство. Пусть f G-функционально замкнуто. В силу предложения 2.2 $C(Y,G)$ всюду плотно в G^Y. Согласно следствию 2.4(а) отображение f непрерывно. Поэтому $f^*(C(Y,G))$ всюду плотно в $f^*(G^Y)$. С другой стороны, $f^*(C(Y,G)) \subseteq E_G$, где $E_G = C(X,G) \cap f^*(G^Y)$, так как $f^*(C(Y,G)) \subseteq C(X,G)$. Таким образом, $f^*(C(Y,G))$ всюду плотно в E_G относительно топологии, наследуемой из $C_p(X,G)$. Поскольку отображение f G-функционально замкнуто, то $f^*(C(Y,G))$ замкнуто в $C_p(X,G)$, следовательно, $f^*(C(Y,G)) = E_G$. В силу инъективности отображения f^* получается равенство $C(Y,G) = \mathscr{F}_G$. Пространство Y вполне G-регулярно. Поэтому из предложения 2.8(г) вытекает, что топология пространства Y является G-факторной топологией, порожденной отображением f (см. также определение 2.5). Теперь предположим, что отображение f является G-факторным. В силу предложения 2.8(г) $C(Y,G) = \mathscr{F}_G$, следовательно, $f^*(C(Y,G)) = f^*(\mathscr{F}_G)$ — замкнутое подмножество в $C_p(X,G)$. Таким образом, f есть G-функционально замкнутое отображение.

Замечание 2.3. Пусть G — топологическая T_1-квазигруппа, X — множество, $v_x(f) = f(x)$ для любых $x \in X$, $f \in G^X$, $\mathscr{F} \subseteq G^X$. Тогда отображение $v_x : \mathscr{F} \to G$ непрерывно для любого данного x в силу определения топологии тихоновского произведения на G^X. Также существует каноническое отображение вычисления $\psi_{\mathscr{F}} : X \to G^{\mathscr{F}}$ такое, что $\psi_{\mathscr{F}}(x) = v_x$ для любого $x \in X$. Если $\mathscr{F}$ задано, то для краткости можно писать ψ вместо $\psi_{\mathscr{F}}$.

Предложение 2.10. *Если X — вполне G-регулярное пространство, $\mathscr{F} \subseteq C_p(X,G)$, то отображение $\psi_{\mathscr{F}} : X \to C_p(\mathscr{F},G)$ непрерывно.*

Доказательство. В силу теоремы 1.1 достаточно рассмотреть случай лупы G. Для любого x из X и открытой окрестности V единичного элемента e в G такой, что $V \neq G$, $f_1, \ldots, f_n$ из $C_p(X,G)$, имеется открытая окрестность

$$W(v_x; f_1, \ldots, f_n; V, G) = \{h \in C(\mathscr{F},G) : \forall j = 1, \ldots, n;\ h(f_j) \in v_x(f_j)V\}$$

для v_x в $C_p(\mathscr{F},G)$, где $n \in \mathbf{N}$. При этом

$$\bigcap_{j=1}^{n} f_j^{-1}(f_j(x)V) = \psi_{\mathscr{F}}^{-1}(W(v_x; f_1, \ldots, f_n; V, G))$$

открыто в X и содержит x, так как $af \in C_p(X,G)$ и $fs \in C_p(X,G)$ для любых $a \in G$, f и s из $C_p(X,G)$. Поэтому отображение $\psi_{\mathscr{F}}$ непрерывно.

Определение 2.7. Пусть X и Y — множества, $\mathscr{F}$ — некоторое семейство отображений из X в Y. Семейство $\mathscr{F}$ называется *разделяющим*, если для всяких различных точек $x_1 \neq x_2$ в X существует $f \in \mathscr{F}$ такое, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Если X и Y — топологические пространства и для любых $x \in X$, $A \subset X$ с $x \notin \mathrm{cl}_X A$ существует $f \in \mathscr{F}$ такое, что $f(x) \notin \mathrm{cl}_Y f(A)$, то семейство $\mathscr{F}$ называется *регулярным*. При этом если $\mathscr{F} \subseteq C(X,G)$ и $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X) \subseteq C_p(\mathscr{F},G)$ —

гомеоморфизм, то семейство G-значных отображений $\mathscr{F}$ называется *порождающим.* Если B — подпространство в X и любое непрерывное отображение $f : B \to G$ имеет непрерывное продолжение $f_X : X \to G$, то B называется (C, G)-*вложенным в* X.

Замечание 2.4. Из определения 2.7 и замечания 2.3 следует, что $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ — разделяющее семейство G-значных отображений на $\mathscr{F}$.

Предложение 2.11. *Предположим, что X — вполне G-регулярное пространство, $\mathscr{F} \subseteq C(X, G)$. Тогда*

(а) *если $\mathscr{F}$ — разделяющее семейство, $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ вложено в $C_p(\mathscr{F}, G)$, то $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ взаимно однозначно и непрерывно.*

(б) *Если $\mathscr{F}$ — регулярное семейство, $\psi_{\mathscr{F}}(X)$ вложено в $C_p(\mathscr{F}, G)$, то $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ — гомеоморфизм.*

Доказательство. (а) Семейство $\mathscr{F}$ разделяющее, следовательно, для любых $x_1 \neq x_2$ в X существует $f \in \mathscr{F}$ с $f(x_1) \neq f(x_2)$; следовательно, $v_{x_1}(f) \neq v_{x_2}(f)$, т. е. $v_{x_1} \neq v_{x_2}$.

(б) Существует обратное отображение $\psi_{\mathscr{F}}^{-1} : \psi_{\mathscr{F}}(X) \to X$, так как $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X)$ взаимно однозначно согласно п. (а). Из регулярности семейства $\mathscr{F}$ вытекает, что для любых $x \in X$ и U, открытого в X, с $x \in U$, $U \neq X$, существуют открытое подмножество V в G и отображение $f \in \mathscr{F}$ такие, что $(f(x)V) \cap (f(X - U)) = \varnothing$. Для открытого подмножества $W = W(v_x; f; V, G) = \{h \in C(\mathscr{F}, G) : h(f) \in v_x(f)V\}$ в $C_p(\mathscr{F}, G)$ получается $v_x \in W$ и $\psi_{\mathscr{F}}^{-1}(W \cap \psi_{\mathscr{F}}(X)) \subseteq U$, следовательно, $\psi_{\mathscr{F}}^{-1}$ — непрерывное отображение. Применение предложения 2.10 и утверждения (а) данного предложения дает, что $\psi_{\mathscr{F}} : X \to \psi_{\mathscr{F}}(X) \subseteq C_p(\mathscr{F}, G)$ — гомеоморфизм.

Следствие 2.8. *Если пространство X вполне G-регулярно, $\mathscr{F} = C_p(X, G)$, то X гомеоморфно $\psi(X)$, где $\psi = \psi_{\mathscr{F}}$, $\psi(X)$ вложено в $C_p(C_p(X, G), G)$.*

Доказательство. Это вытекает из предложения 2.11 и замечания 2.3.

Замечание 2.5. Пусть $\mathbf{F}$ — топологическое T_0-поле,

$$L_p(X, \mathbf{F}) := \{y \in C_p(C_p(X, \mathbf{F}), \mathbf{F}) : y = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n,\ n \in \mathbf{N},\\ x_1 \in X, \ldots,\ x_n \in X,\ b_1 \in \mathbf{F}, \ldots,\ b_n \in \mathbf{F}\}$$

— подпространство в $C_p(C_p(X, \mathbf{F}), \mathbf{F})$, где x_j отождествлено с $\psi(x_j)$, $x_j \in X$. В силу следствия 2.5 $\psi(X)$ является подпространством в $L_p(X, \mathbf{F})$.

Если Y — топологическое векторное пространство над топологическим полем $\mathbf{F}$, то Y' обозначает линейное над $\mathbf{F}$ пространство всех непрерывных линейных функционалов $g : Y \to \mathbf{F}$, где Y' наделено топологией поточечной сходимости.

Предложение 2.12. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство, $g \in C_p(C_p(X, \mathbf{F}), \mathbf{F})$ и $g : C(X, \mathbf{F}) \to \mathbf{F}$ — линейная функция. Тогда существуют $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in X$, … , $x_n \in X$, $b_1 \in \mathbf{F}$, … , $b_n \in \mathbf{F}$ такие, что $g = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$. Более того, $L_p(X, \mathbf{F}) = (C_p(X, \mathbf{F}))'$.*

Доказательство. Из непрерывности и линейности g следует, что $g(0) = 0$ и для любой открытой окрестности V нуля в $\mathbf{F}$ с $V = -V$ и $\mathbf{F}V$, не содержащемся в V, существуют $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in X$, … , $x_n \in X$ и открытая окрестность нуля P в $\mathbf{F}$ с $P = -P$ такие, что $g(W(x_1, \ldots, x_n; P)) \subseteq V$, где $f_0 = 0 \in C_p(X, \mathbf{F})$, $W(x_1, \ldots, x_n; P) = \{h \in C_p(X, \mathbf{F}) : \forall j = 1, \ldots, n; h(x_j) \in P\}$, $f_0 \in$

$W(x_1,\dots,x_n;P)$, $x_i \neq x_j$ для любых $i \neq j$. Возьмем произвольную функцию $f \in C_p(X,\mathbf{F})$ такую, что $f(x_j)=0$ $\forall j=1,\dots,n$. Поэтому $bf \in W(x_1,\dots,x_n;P)$ для любого $b \in \mathbf{F}$, следовательно, $g(bf) \in V$ для любого $b \in \mathbf{F}$ и $g(f)=0$, так как $\mathbf{F}V$ не содержится в V. Согласно вполне $\mathbf{F}$-регулярности пространства X существуют $f_i \in C_p(X,\mathbf{F})$ такие, что $f_i(x_i)=1$ и $f_i(x_j)=0$ для любых $i \neq j$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$.

Возьмем произвольную $h \in C_p(X,\mathbf{F})$ и $h_1 = h - h(x_1)f_1 - \dots - h(x_n)f_n$. По построению $h_1 \in C_p(X,\mathbf{F})$, так как $C_p(X,\mathbf{F})$ есть векторное пространство над $\mathbf{F}$. При этом $h_1(x_i)=0$ для любого $i=1,\dots,n$. Из линейности g вытекает, что $g(h_1)=g(h)-h(x_1)g(f_1)-\dots-h(x_n)g(f_n)$, а по доказанному выше $g(h_1)=0$. Таким образом, $g(h)=b_1h(x_1)+\dots+b_nh(x_n)$, где $b_i=g(f_i)$ для любого $i=1,\dots,n$. Используя гомеоморфизм X с $\psi(X)$ (см. следствие 2.5), можно также записать $g=b_1x_1+\dots+b_nx_n$, отождествляя x с $\psi(x)=v_x$, где $v_x(h)=h(x)$ для любого $x \in X$. При этом функционал $x(h)=h(x)$ непрерывен на $C_p(X,\mathbf{F})$ для любого $x \in X$, где $h \in C_p(X,\mathbf{F})$. Таким образом, $g \in L_p(X,\mathbf{F})$ и $L_p(X,\mathbf{F}) = (C_p(X,\mathbf{F}))'$.

Предложение 2.13. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда X замкнуто в $L_p(X,\mathbf{F})$, а $L_p(X,\mathbf{F})$ замкнуто в $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$.*

Доказательство. Предположим, что $y \in (\mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})} X) \setminus X$. Тогда по предложению 2.12 $y=b_1x_1+\dots+b_nx_n$, где $n \in \mathbf{N}$, $x_1 \in X$, … , $x_n \in X$, $b_1 \in \mathbf{F}$, … , $b_n \in \mathbf{F}$. Поэтому $y \neq x_j$ для любого $j=1,\dots,n$, $Q := X \cup \{y\} \subset L_p(X,\mathbf{F}) \subset Y$, где $Y = C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. В силу предложения 2.2 и теорем 2.1 и 2.2 пространства $C_p(X,\mathbf{F})$ и $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$ вполне $\mathbf{F}$-регулярны. Поэтому $L_p(X,\mathbf{F})$ и Q — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства по теореме 2.2. Из вполне $\mathbf{F}$-регулярности пространства Q вытекает, что существует функция $f \in C_p(Q,\mathbf{F})$ такая, что $f(y)=1$ и $f(x_j)=0$ для любого $j=1,\dots,n$ (см. также лемму 2.3). Возьмем ограничение $g=f|_X$. Тогда $v_x(g)=g(y)=0$. Рассмотрим $P=\{x \in X : f(x) \in S\}$, где $S=1+V$, $V=-V$ — открытая симметричная окрестность нуля в $\mathbf{F}$ такая, что $\mathbf{F}V$ не содержится в V, $1 \notin V$, $1 \in \mathbf{F}$, $0 \notin \mathrm{cl}_X S$. Поскольку f непрерывна и $f(y)=1$, то $y \notin \mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})}(X \setminus P)$ и $y \in \mathrm{cl}_{L_p(X,\mathbf{F})} P$. С другой стороны, $v_x(g)=g(x) \in S$ для любого $x \in P$, следовательно, $v_y(g)=y(g)=g(y) \in \mathrm{cl}_X S$. Это противоречит тому, что $g(y)=0$. Таким образом, X замкнуто в $L_p(X,\mathbf{F})$. Из предложения 2.12 вытекает, что $L_p(X,\mathbf{F})$ является пространством всех линейных функций, принадлежащих $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. Поэтому $\mathrm{cl}_{C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})} L_p(X,\mathbf{F}) = L_p(X,\mathbf{F})$.

Следствие 2.9. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда $\psi(X)$ $(C,\mathbf{F})$-вложено в $\mathbf{F}^{\mathscr{F}}$, где $\mathscr{F} = C(X,\mathbf{F})$.*

Доказательство. В силу предложений 2.2 и 2.13 имеется вложение X в $\mathbf{F}^{\mathscr{F}}$. Каждой $f \in \mathscr{F}$ соответствует непрерывная проекция $\pi_f : \mathbf{F}^{\mathscr{F}} \to \mathbf{F}_f$, где $\mathbf{F}_f = \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^{\mathscr{F}} = \prod\limits_{f \in \mathscr{F}} \mathbf{F}_f$. Поэтому $f \in \mathscr{F}$ соответствует сужение $\pi_f|_{\psi(X)}$.

Предложение 2.14. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство, $f : X \to \mathbf{F}$ — непрерывная функция. Тогда существует единственное непрерывное линейное продолжение $\widehat{f} : L_p(X,\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$.*

Доказательство. Пусть $g \in C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$, положим $\psi(f)(g)=g(f)$. Тогда $\psi(f)$ — непрерывный линейный функционал на $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$. Поэтому $\widehat{f} = \psi(f)|_{L_p(X,\mathbf{F})}$ — непрерывный линейный функционал на $L_p(X,\mathbf{F})$. Из предложений 2.12 и 2.13 вытекает, что $\widehat{f}|_X = f$. Единственность $\widehat{f}$ следует из

линейности $\widehat{f}$ и того, что каждое $y \in L_p(X, \mathbf{F})$ имеет вид $y = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$ для некоторых $n \in \mathbf{N}$, $b_1 \in \mathbf{F}$, ... , $b_n \in \mathbf{F}$, $x_1 \in X$, ... , $x_n \in X$.

Предложение 2.15. *Пусть X — вполне $\mathbf{F}$-регулярное пространство. Тогда линейные топологические пространства $C_p(X, \mathbf{F})$ и $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ над полем $\mathbf{F}$ изоморфны.*

Доказательство. В силу предложения 2.14 достаточно доказать, что $\psi : C_p(X, \mathbf{F}) \to (L_p(X, \mathbf{F}))'$ и ψ^{-1} непрерывны. Поскольку $C_p(X, \mathbf{F})$ и $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ являются линейными топологическими пространствами над $\mathbf{F}$, то для доказательства непрерывности ψ и ψ^{-1} достаточно рассмотреть базы окрестностей нуля в этих пространствах. База открытых окрестностей нуля в $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ состоит из $W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(y_1, \dots, y_k; V) = \{\widetilde{f} \in (L_p(X, \mathbf{F}))' : \widetilde{f}(y_1) \in V, , \dots, \widetilde{f}(y_k) \in V\}$, где $k \in \mathbf{N}$, $y_1 \in L_p(X, \mathbf{F})$, ... , $y_k \in L_p(X, \mathbf{F})$, а V принадлежит базе $\mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ открытых окрестностей нуля в топологическом поле $\mathbf{F}$, причем V без ограничения общности симметрична, т. е. $V = -V$. В силу предложения 2.12 каждый вектор y_j имеет разложение $y_j = b_{j,1}x_{j,1} + \dots + b_{j,n_j}x_{j,n_j}$, где $b_{j,l} \in \mathbf{F}$, $x_{j,l} \in X$, $l = 1, \dots, n_j$, $n_j \in \mathbf{N}$. Тогда

$$\widetilde{f}(y_j) = \sum_{l=1}^{n_j} b_{j,l}\widetilde{f}(x_{j,l})$$

для любого $j = 1, \dots, k$. В силу непрерывности умножения и сложения на $\mathbf{F}$ существует открытая окрестность нуля $V_4 \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ при $V_4 = -V_4$ такая, что $\sum\limits_{l=1}^{n} V_4 \subset V$, где $n = \max(n_1, \dots, n_k)$, а также для любых j и l существует $V_{3,j,l} \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F})$ такая, что $b_{j,l}V_{3,j,l} \subset V_4$, $V_{3,j,l} = -V_{3,j,l}$. Тогда для $V_3 = \bigcap\limits_{j=1}^{k}\bigcap\limits_{l=1}^{n_j} V_{3,j,l}$ выполняется включение

$$W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(y_1, \dots, y_k; V) \supset \bigcap_{j=1}^{k}\bigcap_{l=1}^{n_j} W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(x_{j,l}; V_3).$$

Поэтому

$$\{W_{(L_p(X,\mathbf{F}))'}(x; V) : x \in X, V \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F}), V = -V\}$$

— предбаза открытых окрестностей нуля в $(L_p(X, \mathbf{F}))'$. С другой стороны, предбаза открытых окрестностей нуля в $C_p(X, \mathbf{F})$ состоит из $\{W_{C_p(X,\mathbf{F})}(x; V) : x \in X, V \in \mathsf{B}_0(\mathbf{F}), V = -V\}$, где $W_{C_p(X,\mathbf{F})}(x; V) = \{f \in C_p(X, \mathbf{F}) : f(x) \in V\}$. Поэтому из предложения 1.4.1 в [2] и предложения 2.12 выше следует, что $\psi : C_p(X, \mathbf{F}) \to (L_p(X, \mathbf{F}))'$ и ψ^{-1} непрерывны.

Следствие 2.10. *Пусть X и Y — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства. Линейные топологические пространства $L_p(X, \mathbf{F})$ и $L_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны тогда и только тогда, когда линейные топологические пространства $C_p(X, \mathbf{F})$ и $C_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны.*

Доказательство. Это вытекает из предложений 2.12 и 2.15, так как изоморфизм $L_p(X, \mathbf{F})$ с $L_p(Y, \mathbf{F})$ влечет изоморфизм $(L_p(X, \mathbf{F}))'$ с $(L_p(Y, \mathbf{F}))'$, а изоморфизм $C_p(X, \mathbf{F})$ с $C_p(Y, \mathbf{F})$ влечет изоморфизм $(C_p(X, \mathbf{F}))'$ с $(C_p(Y, \mathbf{F}))'$.

Теорема 2.9. *Пусть X и Y — вполне $\mathbf{F}$-регулярные пространства. Если $C_p(X, \mathbf{F})$ и $C_p(Y, \mathbf{F})$ изоморфны как топологические кольца, то X и Y гомеоморфны.*

Доказательство. В силу предложений 2.11 и 2.12 имеются вложения $\psi(X) \hookrightarrow M(X,\mathbf{F}) \hookrightarrow L_p(X,\mathbf{F})$, где $M(X,\mathbf{F})$ — подпространство пространства $C_p(C_p(X,\mathbf{F}),\mathbf{F})$, образованное всеми непрерывными линейными ненулевыми мультипликативными функционалами $g : C_p(X,\mathbf{F}) \to \mathbf{F}$, $\psi = \psi_{C(X,\mathbf{F})}$. Из изоморфизма топологических колец $C_p(X,\mathbf{F})$ и $C_p(Y,\mathbf{F})$ вытекает, что топологические пространства $M(X,\mathbf{F})$ и $M(Y,\mathbf{F})$ гомеоморфны. Если $g \in M(X,\mathbf{F})$, то $g \in L_p(X,\mathbf{F}) \setminus \{0\}$. Поэтому в силу предложения 2.12 существуют попарно различные точки $x_1, \dots, x_n$ в X, $n \in \mathbf{N}$, и ненулевые числа $b_1, \dots, b_n$ в поле $\mathbf{F}$ такие, что $g = b_1x_1 + \dots + b_nx_n$.

Предположим, что $n > 1$. Поскольку X вполне $\mathbf{F}$-регулярно, существуют функции $f_j \in C(X,\mathbf{F})$, $j \in \{1,\dots,n\}$, такие, что $f_1(x_1) = 1/b_1$, $f_2(x_2) = 1/b_2$, $f_i(x_j) = 0$ для остальных пар (i,j), где $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, так как $\mathbf{F}$ — поле, $b_i \neq 0$. Тогда $g(f_1) = b_1f_1(x_1) + \dots + b_nf_1(x_n) = 1$ и $g(f_2) = 1$. С другой стороны, $f_1(x_j)f_2(x_j) = 0$ для любого $j \in \{1,\dots,n\}$, следовательно, $g(f_1f_2) = 0$. Это противоречит мультипликативности линейного функционала g. Таким образом, случай $n > 1$ невозможен.

При $n = 1$ выполняется $g = b_1x_1$. Для функции $f(x) = 1$ для любого $x \in X$ тогда $g(f) = g(f^2) = g(f)g(f)$, так как $f^2 = f$. Поэтому $g(f) = b_1f(x_1) = b_1$, следовательно, $b_1 = 1$, поскольку $b_1^2 = b_1$, а $\mathbf{F}$ — поле. Таким образом, $g = x_1$, следовательно, $\psi(X) = M(X,\mathbf{F})$, так как $M(X,\mathbf{F}) \subseteq \psi(X)$ и $\psi(X) \subseteq M(X,\mathbf{F})$ согласно доказанному выше, где $\psi = \psi_{C(X,\mathbf{F})}$. Аналогично $\psi(Y) = M(Y,\mathbf{F})$, где $\psi = \psi_{C(Y,\mathbf{F})}$. Поэтому X и Y гомеоморфны, поскольку $M(X,\mathbf{F})$ и $M(Y,\mathbf{F})$ гомеоморфны.

Замечание 2.6. Полезно отметить, что теоремы 2.2–2.8, предложения 2.1–2.11, леммы 2.1, 2.2, следствия 2.1, 2.3–2.8 можно обобщить на случай топологической левой T_1-лупы, имеющей равномерность, совместимую с ее топологией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Adhikari A. A., Adhikari M. R.* Basic topology. Singapore: Springer, 2022. V. 1–3.
2. *Engelking R.* General topology. Berlin: Heldermann, 1989. (Sigma Ser. Pure Math.; V. 6).
3. *Jordan F.* Coincidence of function space topologies // Topology Appl. 2010. V. 157. P. 336–351.
4. *McCoy R. A., Ntantu I.* Topological properties of spaces of continuous functions. Berlin: Springer, 2006. (Lect. Notes Math.; V. 1315).
5. *Rojas-Sánchez A. D., Tamariz-Mascarúa A., Villegas-Rodríguez H.* On the pseudouniform topology on $C(X)$ // Topology Appl. 2021. V. 304, N 107796. P. 1–18.
6. *Narici L., Beckenstein E.* Topological vector spaces. New York: Marcel Dekker Inc., 2010.
7. *Ludkovsky S. V.* C^*-algebras of meta-invariant operators in modules over Cayley–Dickson algebras // Southeast Asian Bull. Math. 2015. V. 39. P. 625–684.
8. *Ludkovsky S. V.* Integration of vector hydrodynamical partial differential equations over octonions // Complex Var. Elliptic Equ. 2013. V. 58, N 5. P. 579–609.
9. *Ludkovsky S. V.* Integration of vector Sobolev type PDE over octonions // Complex Var. Elliptic Equ. 2016. V. 61, N 7. P. 1014–1035.
10. *Gürsey F., Tze C.-H.* On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1996.
11. *Акивис М. А., Шелехов А. М.* Многомерные три-ткани и их приложения. Тверь: Твер. гос. унив., 2010.
12. *Culbert C.* Cayley–Dickson algebras and loops // J. Gener. Lie Theory Appl. 2007. V. 1, N 1. P. 1–17.
13. *Eakin P., Sathaye A.* On automorphisms and derivations of Cayley–Dickson algebras // J. Algebra. 1990. V. 129, N 2. P. 263–278.
14. *Мальцев А. И.* Аналитические лупы // Мат. сб. 1955. Т. 36, № 3. С. 569–576.
15. *Мовсисян Ю. М., Давидов С. С.* Алгебры, близкие к квазигруппам. М.: Наука, 2018.
16. *Sabinin L. V.* Smooth quasigroups and loops. Dordrecht: Kluwer, 1999.

17. *Smith J. D. H.* An introduction to quasigroups and their representations. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC; Taylor and Francis Group, 2007.

18. *Dzhunushaliev V.* Non-associative slave-boson decomposition // J. Gener. Lie Theory Appl. 2007. V. 1, N 2. P. 129–134.

19. *Dzhunushaliev V.* Toy models of a nonassociative quantum mechanics // Adv. High Energy Phys. 2007. V. 2007, N 12387. P. 1–10.

20. *Hasiewicz Z., Defever F, Troost W.* Nonassociative superconformal algebras // J. Math. Phys. 1991. V. 32, N 9. P. 2285–2297.

21. *Majid S.* Gauge theory on nonassociative spaces // J. Math. Phys. 2005. V. 46, N 10. 103519. 24 pp.

22. *Mylonas D., Schupp P., Szabo R. J.* Non-geometric fluxes, quasi-Hopf twist deformations, and nonassociative quantum mechanics // J. Math. Phys. 2014. V. 55, N 122301. P. 1–38.

23. *Kerner E. H.* Nonassociative structure of quantum mechanics in curved space-time // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 4664–4676.

24. *Castro C.* On the noncommutative and nonassociative geometry of octonionic space time, modified dispersion relations and grand unification // J. Math. Phys. 2007. V. 48. 073517. 23 p.

25. *Iantovics L. B., Nichita F. F.* On the colored and the set-theoretical Yang–Baxter equations // Axioms, MDPI. 2021. V. 10, N 3, 146. P. 1–10.

26. *Iordanescu R., Nichita F. F., Nichita I. M.* The Yang–Baxter equation, (quantum) computers and unifying theories // Axioms, MDPI. 2014. V. 3, N 4. P. 360–368.

27. *Nichita F. F.* Unification theories: new results and examples // Axioms, MDPI. 2021. V. 8, N 2, 60. P. 1–5.

28. *Blahut R. E.* Algebraic codes for data transmission. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.

29. *Голубов В. В., Манько С. В.* Автоматизация стыковки автономных мобильных роботов на основе развития метода поисковых случайных деревьев со встречным ростом // Российский технол. журн. (Russian Technol. J.) 2024. Т. 12, № 1. С. 7–14.

30. *Гонсалес С., Коусело Е., Марков В. Т., Нечаев А. А.* Групповые коды и их неассоциативные обобщения // Дискр. математика. 2004. Т. 16, № 1. С. 146–156.

31. *Markov V. N., Mikhalev A. V., Nechaev A. A.* Nonassociative algebraic structures in cryptography and coding // J. Math. Sci., N.Y. (Springer). 2020. V. 245, N 2. P. 178–196.

32. *Plotkin B.* Universal algebra, algebraic Logic, and databases. New York: Kluwer, 1994.

33. *Shum K. P., Ren X., Wang Y.* Semigroups on semilattice and the constructions of generalized cryptogroups // Southeast Asian Bull. Math. 2014. V. 38. P. 719–730.

34. *Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.* P-адический анализ и математическая физика. М.: Физматлит, 1994.

35. *Lawson H. B., Michelson M.-L.* Spin geometry. Princeton: Princeton Univ. Press, 1989.

36. *Ludkovsky S. V.* Topological transformation groups of manifolds over non-Archimedean fields; representations and quasi-invariant measures. I; II // J. Math. Sci.; N.Y. (Springer). 2008. V. 147, 150, N 3, 4. P. 6703–6846, 2123–2223.

37. *Ludkovsky S. V.* Stochastic processes and antiderivational equations on non-Archimedean manifolds // Int. J. Mathematics Math. Sci. 2004. V. 31, N 1. P. 1633–1651.

38. *Ludkovsky S. V.* Non-Archimedean valued quasi-invariant descending at infinity measures // Int. J. Mathematics Math. Sci. 2005. V. 2005, N 23. P. 3799–3817.

39. *Людковский С . В.* Квазиинвариантные и инвариантные функционалы и меры на системах топологических луп и квазигрупп // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1032–1049.

40. *Rooij A. C. M. van* Non-Archimedean functional analysis. New York: Marcel Dekker Inc., 1978.

41. *Wiesław W.* Topological fields. New York: Marcel Dekker Inc., 1988.

42. *Yasuda K.* Semi-stable processes on local fields // Tohoku Math. J. 2006. V. 58. P. 419–431.

43. *Ludkovsky S. V.* Microbundles over topological rings // Topology Appl. 2019. V. 260. P. 126–138.

44. *Людковский С. В.* Факторные и трансверсальные отображения топологических квазигрупп // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, № 3. С. 497–522.

45. *Людковский С. В.* Неархимедовы полиэдральные разложения ультраравномерных пространств // Фундам. и прикл. математика. 2000. Т. 6, № 2. С. 455–475.

46. *Kunen K.* Set theory. London: College Publ., 2011.

Поступила в редакцию 6 декабря 2023 г.
После доработки 30 мая 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Людковский Сергей Викторович (ORCID 0000-0002-4733-8151)
МИРЭА — Российский технологический университет,
кафедра прикладной математики,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
sludkowski@mail.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.542

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУППАХ, НАСЫЩЕННЫХ КОНЕЧНЫМИ ПРОСТЫМИ УНИТАРНЫМИ ГРУППАМИ СТЕПЕНИ 4 НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ НЕЧЕТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

С. Ц. Ма, Ю. М. Мао,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Пусть M — некоторое непустое множество конечных групп. Группа G насыщена группами из M, если каждая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу множества M. В работе доказывается, что периодическая группа с локально конечными централизаторами инволюций, насыщенная простыми унитарными группами степени 4 над конечными полями фиксированной нечетной характеристики p, изоморфна простой унитарной группе степени 4 над некоторым локально конечным полем характеристики p.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.515

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, инволюция, централизатор, насыщенность, унитарная группа.

1. Введение

Пусть p — нечетное простое число, M_p — множество простых унитарных групп степени 4 над конечными полями характеристики p. По определению группа G *насыщена группами из* M_p, если любая конечная подгруппа группы G содержится в подгруппе, изоморфной элементу множества M_p.

Целью работы является доказательство следующего результата.

Теорема. *Периодическая группа с локально конечными централизаторами инволюций, насыщенная группами из M_p, изоморфна простой унитарной группе степени 4 над некоторым локально конечным полем характеристики p.*

В работе используются обозначения и сведения из [1]. Дополнительно $X \circ Y$ будет обозначать минимальное центральное произведение групп X и Y.

Пусть F — конечное поле порядка q^2, где q — степень простого числа, V — векторное пространство размерности n над F, снабженное невырожденной эрмитовой формой f, и пусть $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ — соответствующий эрмитов базис V, т. е. базис, для которого $f(v_i, v_i) = 1$, $f(v_i, v_j) = 0$ для $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Через $GU(V)$ обозначается подгруппа $GL(V)$, сохраняющая форму f.

Работа первого и второго авторов выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая, проект No. 12371021; работа третьего автора выполнена в рамках Государственного задания № 071-03-2024-008 от 19.01.2024; работа четвертого автора выполнена в рамках Государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0002.

© 2024 Ма С. Ц., Мао Ю. М., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.

Сопоставление каждому элементу $u \in GU(V)$ его матрицы $[u]_v$ в эрмитовом базисе v является изоморфизмом $GU(V)$ с группой $GU_n(q) \leq GL_n(q^2)$, состоящей из унитарных матриц X, для которых $X^{-1} = \overline{X}^T$, где $\overline{X}$ получается из X заменой каждого элемента X его q-й степенью, а T означает транспонирование. Будем отождествлять группы $GU(V)$ и $GU_n(q)$. Группа $GU_n(q)$ называется *общей унитарной группой степени n над полем порядка q*.

Пересечение $SU_n(q)$ группы $GU_n(q)$ с $SL_n(q^2)$ называется *специальной унитарной группой степени n над полем порядка q*. Факторгруппу $U = U_n(q)$ группы $SU_n(q)$ по ее центру будем называть *унитарной группой степени n над полем порядка q*. При $n \geq 4$ она проста.

В работе рассматривается случай, когда $n = 4$, а q нечетно. В этом случае

$$|SU_4(q)| = q^6(q^4-1)(q^3+1)(q^2-1),$$

$$|GU_4(q)| = |SU_4(q)| \cdot (q+1), \quad |U| = |SU_4(q)|/(q+1,4).$$

Отметим еще, что $SU_2(q)$ изоморфна $SL_2(q)$.

Пусть V — четырехмерное эрмитово пространство над полем P нечетного порядка $q^2 > 9$, $v = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ — его эрмитов базис. Подпространство V_1, натянутое на v_1, v_2, и V_2, натянутое на v_3, v_4, составляют ортогональное разложение $V = V_1 \oplus V_2$ пространства V. Подгруппа $\widetilde{H} = \widetilde{H}(q)$ из $SU(V)$, сохраняющая это разложение, изоморфна $(SU_2(q) \times SU_2(q)) : (q+1).2$. Она содержит силовскую 2-подгруппу группы $SU_4(q)$. По [2, табл. 8.10] $\widetilde{H}$ — максимальная подгруппа в $SU(V)$. Пусть β — порождающий элемент мультипликативной группы поля P, $\gamma = \beta^{q-1}$,

$$\widetilde{C} = \left\langle \begin{bmatrix} \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} \mid \alpha \in \langle\gamma\rangle \right\rangle,$$

$$\widetilde{i}_1 = \begin{bmatrix} -1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad \widetilde{i}_2 = -\widetilde{i}_1, \ \widetilde{t} = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{S}_1 = \left\langle \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \mid X \in SU_2(q) \right\rangle, \quad \widetilde{S}_2 = \left\langle \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \mid X \in SU_2(q) \right\rangle.$$

Легко проверить, что $\widetilde{C}$ — циклическая группа порядка $q+1$, $\widetilde{i}_1$ и $\widetilde{i}_2$ — инволюции, $\langle \widetilde{C}, \widetilde{t} \rangle = (q+1) : 2$ — группа диэдра,

$$\widetilde{H} = \langle \widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2, \widetilde{C}, \widetilde{t} \rangle = \langle \widetilde{S}_1, \widetilde{S}_2 \rangle \cdot \langle \widetilde{C}, \widetilde{t} \rangle = (SL_2(q) \times SL_2(q)) : (q+1) : 2.$$

Пусть H, i_1, i_2, C, S_1, S_2, t — образы соответственно $\widetilde{H}$, $\widetilde{i}_1$, $\widetilde{i}_2$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{S}_1$, $\widetilde{S}_2$, $\widetilde{t}$ при каноническом гомоморфизме $SU_4(q)$ на $U_4(q) = PSU_4(q) = U$.

Лемма 1. (1a) *$S_1 \simeq \widetilde{S}_1 \simeq \widetilde{S}_2 \simeq S_2 \simeq SU_2(q)$, $\langle S_1, S_2 \rangle = S_1 \circ S_2$ — центральное произведение групп S_1 и S_2, $i = i_1 = i_2$ — единственная инволюция из центра S_1S_2, $S_2 = S_1^t$, $S_2^t = S_1$ и $C_H(S_1) = S_2Z$, где Z — образ циклической подгруппы*

$$\left\langle \begin{bmatrix} \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha^{-1} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha^{-1} \end{bmatrix} \mid \alpha \in \langle\gamma\rangle \right\rangle$$

при каноническом гомоморфизме $SU_4(q)$ на U, $C_H(S_2) = S_1Z$.

(1b) *Подгруппа $H = H(q)$ совпадает с $C_U(i)$. Она является максимальной подгруппой в U; i — единственная инволюция в центре H. Все максимальные*

подгруппы из U, изоморфные H, сопряжены. Если $u \in U$ — инволюция, не сопряженная с i, то $C_U(u)$ содержит нормальную подгруппу, изоморфную либо $L_2(q^2)$, либо $U_3(q)$.

(2a) *Если $r \in S_1S_2$ и $r^2 = i$, то $r \in S_1 \cup S_2$.*

(2b) *H содержит подгруппу, изоморфную $SL_2(3) = SU_2(3)$, и если D — одна из этих подгрупп, то подгруппа $O_2(D)$, изоморфная группе кватернионов порядка 8, содержится в S_j для некоторого $j \in \{1, 2\}$ и $C_H(O_2(D)) = C_H(S_j)$. Если $D \simeq D_1 \leq H$ и $[O_2(D), O_2(D_1)] = 1$, то $C_H(O_2(DD_1)) = Z$.*

Доказательство. (1a) Проверяется непосредственно.

(1b) Структура централизаторов инволюций в $U_4(q)$ установлена в [3, 6(5.15)]. Теперь утверждение следует из таблиц 8.10 и 8.33 в [2].

(2a) Пусть $r = s_1s_2$, где $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$ и $r^2 = i$. Тогда $r^2 = s_1^2s_2^2 = i$, откуда $S_1 \ni s_1^2 = s_2^{-2}i \in S_2$ и $s_1^2 \in S_1 \cap S_2 = \langle i \rangle \ni s_2^{-2}i$. Если $s_1^2 = 1$, то поскольку i — единственная инволюция в S_1, имеем $s_1 \in \langle i \rangle \leq S_2$ и $r \in S_2$. Если же $s_1^2 \neq 1$, то $s_1^2 = i = s_2^{-2}i$, $s_2^2 = 1$ и $r \in S_1$.

(2b) Пусть D — подгруппа из H, изоморфная $SL_2(3)$. Так как H/S_1S_2 — группа диэдра, то $O_2(D) \leq S_1S_2$.

Если D не содержит i, то $D \cap S_1 = 1$, что невозможно, поскольку $O_2(D)$ в этом случае изоморфно вкладывалась бы в группу диэдра — силовскую 2-подгруппу группы $L_2(q) \simeq S_1S_2/S_1$. Пусть $\langle r_1 \rangle$, $\langle r_2 \rangle$, $\langle r_3 \rangle$ — различные подгруппы порядка 4 из $O_2(D)$. Тогда $r_1^2 = r_2^2 = r_3^2 = i$. По (2a) две из этих трех подгрупп содержатся в S_j для некоторого $j \in \{1, 2\}$ и порождают $O_2(D)$, т. е. $O_2(D) \leq S_j$. Поскольку $C_{S_j}(O_2(D)) = \langle i \rangle$, то $C_H(O_2(D)) = C_H(S_j)$. При этом $O_2(D_1) \leq S_{3-j}$, откуда $C_H(O_2(DD_1)) = C_H(S_1S_2) = Z$.

2. Основной результат

Поскольку строение простых унитарных групп похоже на строение простых линейных групп, доказательство теоремы во многом повторяет доказательство основного результата из [4].

В дальнейшем инволюцию из U, централизатор которой содержит подгруппу, изоморфную $SL_2(3) \circ SL_2(3)$ (см. введение), будем называть *инволюцией главного типа в U*.

Пусть G — периодическая группа, насыщенная множеством M_p (см. введение), в которой централизатор каждой инволюции локально конечен. Обозначим через $M(G)$ множество подгрупп группы G, изоморфных элементам из $M = M_p$.

Если $M(G) = \{U_4(3)\}$, то теорема верна по [5], поэтому далее считаем, что $M(G) \neq \{U_4(3)\}$.

Выберем в $M(G)$ подгруппу $U \simeq U_4(q)$ с условием $q > 3$.

Зафиксируем U до конца доказательства теоремы и сохраним обозначения для ее подгрупп и элементов из введения. Зафиксируем подгруппу $D_1 \simeq SL_2(3)$ из S_1. Пусть $D_2 = D_1^t$. Отметим, что $D_1D_2 = D_1 \circ D_2$ и, в частности, $[D_1, D_2] = 1$.

Лемма 2. *Подгруппа $C = C_G(O_2(D_1D_2))$ является локально циклической группой. Если D — подгруппа из $C_G(i)$, изоморфная $SL_2(3) \circ SL_2(3)$, то $C_G(O_2(D)) = C$. В частности, $C \trianglelefteq C_G(i)$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in C$. Тогда $X = \langle D_1D_2, x, y \rangle \leq C_G(i)$, поэтому X конечна. Пусть $U^* \simeq U_4(q^*)$ — подгруппа из $M(G)$, содержащая X,

и $H^* = C_{U^*}(i)$. Так как H^* содержит $D_1D_2 \simeq SL_2(3) \circ SL_2(3)$, то по [2, табл. 8.10] и [3, с. 424–427] H^* содержит нормальную подгруппу $S_1^* \circ S_2^*$, где $S_1^* \simeq S_2^* \simeq SU_2(q^*)$. По лемме 1(2b) x, y принадлежат циклической подгруппе $C_{H^*}(O_2(D_1D_2))$, откуда вытекает, что C — локально циклическая группа.

Пусть $x \in C_G(O_2(D))$, $y \in C_G(O_2(D_1D_2))$. Тогда $\langle x, y, D, D_1D_2\rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(i)$, содержащаяся в некотором элементе U^* множества $M(G)$. Так же, как и выше, i — инволюция главного типа в U^* и если $H^* = C_{U^*}(i)$, то $C_{H^*}(O_2(D)) = C_{H^*}(O_2(D_1D_2))$ и $x, y \in C_G(O_2(D_1D_2))$, откуда $C = C_G(O_2(D)) = C_G(O_2(D_1D_2))$.

Если теперь $x \in C_G(i)$, то $C^x = C_G(O_2(D_1^xD_2^x)) = C$. Лемма доказана.

Лемма 3. *$C_G(O_2(D_1))/C \simeq L_2(F^*)$ для некоторого локально конечного поля F^* нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 2 $C \trianglelefteq C_G(i)$, и так как $C \leq C_G(O_2(D_1)) \leq C_G(i)$, то $C \trianglelefteq C_G(O_2(D_1))$. Пусть X — конечная подгруппа в $C_G(O_2(D_1))/C$, содержащая $O_2(D_1)C/C$, а $\widetilde{X}$ — ее конечный прообраз в $C_G(O_2(D_1))$, содержащий $O_2(D_1)$. По условию $\widetilde{X} \cup U \leq U^* \simeq U_4(q^*)$ для некоторого q^*, поэтому $XU^* \leq U^* \cap C_G(O_2(D_1)) \simeq SL_2(q^*)$. Так как $(U^* \cap C_G(O_2(D_1)))C/C \simeq U_2(q^*)$, то по [6] $C_G(O_2(D_1))/C \simeq L_2(F^*)$ для некоторого локально конечного поля F^* нечетной характеристики. Лемма доказана.

Лемма 4. (1) *Подгруппа $C_G(i)$ счетна.*

(2) *U содержит подгруппу B со следующими свойствами: если U^* — подгруппа G, содержащая H и изоморфная $U_4(q^*)$, где $q^* > q$, то $U^* = \langle C_{U^*}(i), B\rangle$ и $U \leq U^*$.*

Доказательство. (1) Так как $O_2(D_2) = O_2(D_1)^t$ и C инвариантна относительно t, по лемме 3 $C_G(O_2(D_2))/C \simeq L_2(F^*)$.

Покажем, что $[C_G(O_2(D_1)), C_G(O_2(D_2))] = 1$. Пусть $x \in C_G(O_2(D_1))$, $y \in C_G(O_2(D_2))$ и $X = \langle x, y, D_1, D_2\rangle$. Так как $U \leq C_G(i)$, по условию X — конечная группа. Она содержится в подгруппе $U^* \cap C_G(i)$, где $U^* \simeq U_4(q^*)$ для некоторого q^*, и содержит D_1D_2.

По лемме 2 $[x, y] = 1$.

Покажем, что $N = C_G(O_2(D_1))C_G(O_2(D_2))$ — подгруппа конечного индекса в $C_G(i)$.

Во-первых, $N \trianglelefteq C_G(i)$. Действительно, пусть $g \in C_G(i)$. Тогда $O_2(D_1)^g \leq C_G(O_2(D_1))$ или $C_G(O_2(D_2))$ и $O_2(D_1)^g \leq N$. Точно так же $O_2(D_2)^g \leq N$. Отсюда $\langle O_2(D_1)^{C_G(i)}, O_2(D_2)^{C_G(i)}, C\rangle = N$.

Далее, если $g \in C_G(i)$, то $C_G(O_2(D_1))^g = C_G(O_2(D_j))$, где $j \in \{1, 2\}$, поэтому $|C_G(i) : N_{C_G(i)}(C_G(O_2(D_1))| = 2$.

Так как в $U_2(F^*)$ не более двух классов сопряженных нециклических подгрупп порядка 4, то N — подгруппа конечного индекса в $C_G(i)$. Поскольку C — счетная группа и N/C также счетна, то $C_G(i)$ — счетная конечная группа.

(2) Пусть $\widetilde{U} = SU_4(q)$ и $\widetilde{Y} = Sp_4(q)$ — симплектическая группа, содержащаяся в $\widetilde{U}$ (см. [2, табл. 8.10]). Подгруппа $\widetilde{Y}$ содержит подгруппу, изоморфную $2_-^{1+4}.S_5$ или $2_-^{1+4}.A_5$, коммутант $\widetilde{B}$ которой изоморфен $2_-^{1+4}.A_5$ [2, табл. 8.12]. Образ B группы $\widetilde{B}$ при естественном гомоморфизме $\widetilde{U}$ на U равен $2^4.A_5$, и поскольку $C_U(i)$ содержит силовскую 2-подгруппу U, то $O_2(B) \leq C_U(i) \leq C_{U^*}(i)$. Так как $C_U(i)$ — максимальная подгруппа U и $B \not\leq C_U(i)$, то $U = \langle C_U(i), B\rangle$.

Так как $\widetilde{B}$ — группа типа $\mathscr{C}_6$ (см. [2, §4.6]), то

$$[N_{\widetilde{U}^*}(2_-^{1+4}), N_{\widetilde{U}^*}(2_-^{1+4})] = \widetilde{B},$$

где $\widetilde{U}^*$ — накрывающая подгруппа для U^*, изоморфная $SU_4(q^*)$,

$$B = \left[N_{U^*}(2_-^{1+4}), N_{U^*}(2_-^{1+4})\right],$$

откуда $U^* = \langle C_{U^*}(i), B\rangle \geq \langle C_U(i), B\rangle = U$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Подгруппа $C_G(i)$ содержится в подгруппе R группы G, изоморфной $U_4(F)$ для некоторого локально конечного поля F нечетной характеристики.*

Доказательство. По лемме 4 $C_G(i)$ счетна, т. е. $C_G(i) = \{x_j \mid x_j \in C_G(i),\ j = 1, 2, \dots\}$. Пусть $H_1 = C_U(i)$, где U — подгруппа, зафиксированная в начале доказательства теоремы. Если для $k \in \mathbb{N}$ подгруппа H_k уже определена, то пусть y_k — первый из элементов x_j, не содержащийся в H_k. Подгруппа $\langle H_k, y_k\rangle$ конечна и поэтому содержится в некоторой подгруппе $U_{k+1} \simeq U_4(q_{k+1})$ группы G. Положим $H_{k+1} = C_{U_{k+1}}(i)$. По лемме 4(2) $U_{k+1} = \langle H_{k+1}, B\rangle$, где B определена в лемме 4(2), поэтому $U_k \leq U_{k+1}$. Объединение $R = \bigcup\limits_k U_k$ является локально конечной группой и содержит $C_G(i)$. По [6] $R \simeq U_4(F)$ для некоторого локально конечного поля F нечетной характеристики. Лемма доказана.

Лемма 6. *R содержит любую инволюцию из G, сопряженную с i, и эта инволюция сопряжена с i в R.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ и $X = \langle i, i^g\rangle$. Подгруппа X конечна и по условию содержится в подгруппе $U_* \simeq U_4(q_*)$ для некоторого q_*. Определим граф Γ, вершинами которого являются инволюции из U_*, сопряженные в G с i, и соединим две инволюции из Γ ребром, если они перестановочны.

Покажем, что Γ связен. Докажем вначале, что U_* действует транзитивно на множестве вершин Γ, т. е. докажем, что две инволюции из U_*, сопряженные с i в G, сопряжены с i в U_*. Предположим, что это неверно, и пусть u — вершина Γ, не сопряженная с i в U_*. По лемме 1(b) $C_{U_*}(u)$ содержит простую нормальную подгруппу, изоморфную $L_2(q^2)$ или $U_3(q)$.

С другой стороны, поскольку u сопряжена в G с i, $C_{U_*}(u)$ содержится в некоторой конечной подгруппе H^* из $C_G(u)$, изоморфной $SU_2(q^*) \circ SU_2(q^*) : 2(q^*+1)/(4, q^*+1) : 2$ (см. лемму 1), в которой нет таких подгрупп. Полученное противоречие показывает, что любая вершина из Γ сопряжена в U_* с i, и поэтому U_* действует при сопряжении транзитивно на вершинах Γ. Если $q_* > 3$, то $C_{U_*}(i)$ — максимальная подгруппа в U_* (см. лемму 1) и содержит по крайней мере одну инволюцию i^*, сопряженную и перестановочную с i, поэтому компонента связности Γ, содержащая i, совпадает со всем множеством вершин Γ. Если же $q_* = 3$, то рутинные вычисления в GAP [7] непосредственно показывают, что Γ связен.

Пусть $i = i_0, i_1, \dots, i_s = i^g$, где (i_k, i_{k+1}) — ребро в Γ для всех $k = 0, \dots, s-1$. Индукцией по s покажем, что инволюция $i_s \in R$ сопряжена в R с i. Если $s = 1$, то $i_1 \in R$ по лемме 5, и в этом случае U_* можно выбрать в R. По доказанному выше $i = i_1^r$ для некоторого $r \in R$ и $\{i = i_1^r, i_2^r, \dots, i_s^r\}$ — цепь длины $s-1$ в Γ. По индукции $i^{gr} \in R$ сопряжена в R с i. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 7. $R = G$.

Доказательство. По лемме 6 $\langle i^G \rangle \leq R$, и поскольку R проста, то $R = \langle i^G \rangle \trianglelefteq G$. Если $g \in G$, то $i^g \in R$ и существует $x \in R$ такой, что $i^{gx} = i$. Так как $C_G(i) \leq R$, то $gx \in R$ и $g \in R$. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Благодарность. Авторы благодарны анонимному рецензенту за вдумчивые замечания, способствовавшие устранению многочисленных оплошностей в изложении и тем самым существенному улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

2. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.).

3. *Suzuki M.* Group theory. II. New York; Berlin; Heidelberg; Tokyo: Springer-Verl., 1986.

4. *Го В. Б., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О периодических группах, насыщенных конечными простыми группами $L_4(q)$ // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 6. С. 549—556.

5. *Шлёпкин А. К., Рубашкин А. Г.* О группах, насыщенных конечным множеством групп // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1397—1400.

6. *Боровик А. В.* Вложения конечных групп Шевалле и периодические линейные группы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 24, № 6. С. 26–35.

7. GAP: Groups, algorithms, and programming, http://www/gap-system.org.

Поступила в редакцию 14 апреля 2024 г.
После доработки 19 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Ма Сяоцзянь (Ma Xiaojian) Школа математики и статистики,
Университет Датуна в Шаньси,
Датун, Шаньси, 037009, КНР
(School of Mathematics and Statistics,
ShanXi DaTong University,
Datong, Shanxi, 037009, P.R. China
mxj790808@163.com

Мао Юемэй (Mao Yuemei)
Школа математики и статистики,
Университет Датуна в Шаньси,
Датун, Шаньси, 037009, КНР
(School of Mathematics and Statistics,
ShanXi DaTong University,
Datong, Shanxi, 037009, P.R. China
maoyuemei@126.com

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
vic.mazurov@gmail.com

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.987

О СКОРОСТЯХ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ БИРКГОФА

И. В. Подвигин

Аннотация. Приведен обзор результатов об оценках скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа, основанный на двух подходах. Первый подход посвящен поточечным оценкам эргодических средних, имеющим место почти всюду, второй основан на оценках мер максимальных отклонений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.516

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, корреляции, большие уклонения.

1. Введение

1.1. Первые эргодические теоремы (Биркгоф, 1931 и фон Нейман, 1932) возникли из попыток обоснования эргодической гипотезы статистической механики. Естественный интерес представляет задача о скорости сходимости в этих теоремах для динамических систем, возникающих как в самой статистической механике, например для моделирующих газ различных бильярдов, так и для не менее важных систем алгебраической, геометрической и вероятностной природы происхождения.

Эргодическая теорема Биркгофа является более сложным результатом, из нее можно вывести и саму теорему фон Неймана. Теорема Биркгофа — результат из теории меры, и при первом его рассмотрении сразу возникает вопрос: что называть скоростью сходимости в этой теореме? Первый естественный подход — это фиксировать точку фазового пространства, где имеется сходимость (а она имеется почти всюду), и исследовать скорость сходимости числовой последовательности модулей отклонений эргодических средних в данной точке от предела.

Большое количество результатов в этой задаче появилось к середине 1970-х — началу 1980-х. Кренгель в статье [1] показал, что почти всюду скорость поточечной сходимости может быть сколь угодно медленной. А именно, для заданного эргодического сохраняющего меру преобразования и произвольной последовательности, сходящейся к нулю, построена функция, эргодические средние которой для почти всех точек фазового пространства стремятся к своему пределу медленнее, чем эта последовательность. Естественный интерес представляет не рассматривавшаяся ранее двойственная постановка о существовании сохраняющего меру преобразования для заданной функции и последовательности.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

© 2024 Подвигин И. В.

Аналогичное результату Кренгеля утверждение другим методом было получено Какутани и Петерсеном в [2]. Позднее дель Юнко и Розенблатт в [3] и Волны в [4] показали, что такая ситуация типична. Халаш в работе [5] показал, что эргодические средние с дискретным временем бесконечно осциллируют вокруг своего предела; Маркус и Петерсен в [6] получили аналогичный результат для эргодических средних с непрерывным временем. Аткинсон показал в [7], что для эргодического преобразования и вещественнозначной функции с нулевым средним последовательность биркгофовых сумм почти всюду сколь угодно близко приближается к нулю. Аналогичный результат другими методами был получен Шмидтом в [8] для дискретного времени и Шнейбергом в [9] для непрерывного времени. Неявно этот факт следует и из работы А. Б. Крыгина [10] (см. обсуждение в статье В. В. Рыжикова [11]).

Обзор большинства результатов по этой тематике, полученных к середине 1980-х, был кратко представлен в монографии Кренгеля [12]; первый обширный обзор появился в 1996 г. в работе А. Г. Качуровского [13]. К этому времени стало ясно, что скорость сходимости зависит от пары: сохраняющее меру преобразование — усредняемая функция. И для ее оценки нужно найти отвечающие за это параметры рассматриваемой пары. Для перемешивающих динамических систем такими параметрами могут быть корреляционные коэффициенты. В. Ф. Гапошкин в [14] представил метод оценивания скорости поточечной сходимости эргодических средних через оценки для корреляционных коэффициентов. Позднее этот подход был развит в работах Коэна и Лина [15], Кюни [16] и др. (см. также ссылки в этих работах). Во всех этих работах получены имеющие место почти всюду оценки скорости сходимости в виде o-малого или в виде сходимости некоторых специальных рядов. Вопрос о существовании таких одинаковых оценок скорости поточечной сходимости для почти всех точек оставался неизученным. Он представляет определенный интерес и обсуждается далее.

В [13] было показано для дискретного времени, что максимальной скоростью поточечной сходимости эргодических средних будет $\mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ и достигается она в точности на когомологичных в L_∞ нулю функций, т. е. удовлетворяющих когомологическому уравнению (или уравнению Пуассона) $f = g \circ T - g$ для $g \in L_\infty$ и сохраняющего меру преобразования T (см. также [17, 18]). Для непрерывного времени аналогичного результата доказано не было. Диррие́нник и Лин в [19] получили оценки скорости поточечной сходимости для функций, удовлетворяющих дробному уравнению Пуассона.

1.2. В той же работе [13] А. Г. Качуровский предложил второй подход к определению скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа. Поскольку сходимость почти всюду на пространствах с конечной мерой эквивалентна стремлению к нулю мер максимальных отклонений последовательности от предела (в обозначениях далее P_n), то скорость сходимости этой последовательности и можно назвать скоростью сходимости в эргодической теореме Биркгофа. Аналогичный подход был предложен и для непрерывного времени. Он позволяет находить оценки P_n через оценки для больших уклонений (в обозначениях далее p_n); большое количество методов оценивания последних появлялось в работах по теории вероятностей и по динамическим системам. Отметим среди них недавнюю работу [20] (и ссылки в ней), в которой Фанг, Такахаси и Жанг получили точную асимптотику больших уклонений в терминах сходимости некоторого ряда.

Отметим также, что в [13] были получены оценки P_n через оценки скорости сходимости в теореме фон Неймана. Дальнейшая разработка этого подхода была в работах В. Ф. Гапошкина [21], А. М. Вершика и А. Г. Качуровского [22] и В. В. Седалищева [23–25].

А. Г. Качуровским было также показано, что для ограниченных функций степенное убывание величин P_n эквивалентно степенному убыванию больших уклонений. Развитие этого результата на широкий класс скоростей убывания далее подробно обсуждается.

1.3. С конца 1990-х появилась масса работ по оцениванию больших уклонений и корреляций для регулярных функций как для конкретных динамических систем, так и для целых классов динамических систем. Было выяснено, что типичным является сколь угодно медленное убывание корреляций для перемешивающих систем [26, 27] и больших уклонений [28]. Большое влияние на дальнейшие исследования оказали пионерские работы Янг [29, 30], в которых разработан метод получения оценок корреляций для гёльдеровских функций для широкого класса систем. Заметный интерес вызвали работы Мельбурна и Никола [31, 32] и Рей-Беллета и Янг [33] по большим уклонениям для неравномерно гиперболических динамических систем. Дальнейшая разработка их подходов сделана в работе Алвеса и др. [34], где была получена связь между убыванием корреляций и больших уклонений как для диапазона степенных скоростей, так и (растянутых) экспоненциальных. Уточнение для растянутых экспоненциальных скоростей было недавно получено в работе Аймино и Фрейтаса [35].

1.4. Вышеупомянутые работы выявили важность оценки корреляционных коэффициентов для перемешивающих систем в задаче оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа и в рамках второго подхода тоже.

Отметим конкретные важные динамические системы, для которых обсчитаны оценки корреляций (и больших уклонений) для регулярных наблюдаемых: классические системы Аносова и некоторые хаотические бильярды. Для диффеоморфизмов Аносова оценки корреляций получены разными методами в работах Боуэна [36], Янг [30] и Брессо и Ливерани [37]; для потоков Аносова — Черновым [38], Долгопятом [39–41], Ливерани [42] и Стояновым [43] (см. также ссылки в последней работе). Оценки корреляций в упоминаемых бильярдах были посчитаны Черновым, Маркаряном и их коллегами в серии работ; итоговые оценки для динамически гёльдеровских функций можно найти в их монографии [44].

Оценки корреляций в описанных работах получены для регулярных функций (гладких, гёльдеровских). Нерешенными остаются задачи получения оценок корреляций для менее регулярных функций (отметим в этом направлении работы [45, 46], где получены оценки корреляций для негёльдеровских непрерывных наблюдаемых).

1.5. Наиболее изученными динамическими системами среди неперемешивающих действий в плане получения оценок скорости поточечной сходимости эргодических средних являются эргодические повороты окружности (и более общо эргодические сдвиги на торах). Эта тематика непосредственно связана с теорией равномерного распределения последовательности на интервале [47]. Эргодические средние для непрерывных функций сходятся уже равномерно на всем фазовом пространстве, поэтому возникает вопрос об их скорости сходимо-

сти в каждой точке. Эффект возвращаемости (в эргодическом случае) биркгофовых сумм к нулю для вещественной функции с нулевым средним для п.в. точек здесь усиливается до синхронной возвращаемости. А именно, для всякой абсолютно непрерывной функции с нулевым средним и эргодического поворота окружности максимум модулей сумм Биркгофа сколь угодно близко приближается к нулю. Это свойство обнаружено В. В. Козловым в [48] для дважды гладких функций, усилено А. Б. Крыгиным в [49] для непрерывно дифференцируемых функций и расширено В. А. Сидоровым в [50] до абсолютно непрерывных функций. Подробное обсуждение похожих результатов для сдвигов на торе можно найти в статье Н. Г. Мощевитина [51, § 11].

Скорость сходимости эргодических средних зависит и от гладкости усредняемой функции, и от свойств иррационального числа, соответствующего повороту. Отметим в этом направлении результаты А. В. Рождественского [52], а также новые результаты, недавно полученные А. Б. Антоневичем, А. В. Кочергиным и А. А. Шукуром [53], Клейном, Лиу и Мело [54] и Колзани [55]. Для общих же неперемешивающих динамических систем неизвестно, какие параметры могут быть полезны в оценке скорости сходимости. Далее обсуждается один из таких параметров.

1.6. Задача о нахождении оценок скорости поточечной сходимости в эргодической теореме Биркгофа успешно решена также для некоторых конкретных популярных в приложениях потоков и достаточно гладких функций. При этом существенно использовалась специфика рассматриваемых потоков. Для некоторых орициклических потоков этому вопросу посвящены работы Ратнер [56], Бургера [57], Фламинио и Форни [58] и Стрембергсона [59]; вопрос об эффективной оценке скорости сходимости для таких потоков был поставлен Маргулисом в сборнике проблем и гипотез [60]. Некоторым плоским потокам посвящены работы Атрея и Форни [61], Буфетова [62] и Форни [63] (см. также библиографию в этих работах).

Отметим любопытное отличие дискретных и непрерывных оценок, встречающихся в литературе: для дискретного времени оценки получены в основном в виде o-малого, а для непрерывного — в виде $\mathscr{O}$-большого. Во всех описанных работах, насколько известно автору, вопрос о неулучшаемости полученных оценок не исследовался. Разумным постановкам этого вопроса посвящена часть этого обзора.

2. Используемые понятия и обозначения

2.1. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство с вероятностной мерой, T — его эндоморфизм, т. е. такое отображение $T : \Omega \to \Omega$, что для всех $A \in \mathfrak{F}$ множество $T^{-1}A$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и $\lambda(A) = \lambda(T^{-1}A)$. Пусть $\mathbf{T} = \{T^t,\ t \in \mathbb{R}^+\}$ — полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, т. е. такая однопараметрическая полугруппа эндоморфизмов T^t этого пространства, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T^t\omega)$ измерима на прямом произведении $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Эндоморфизм T определяет динамическую систему с дискретным временем; полупоток $\mathbf{T}$ называют *динамической системой с непрерывным временем.* Обратимые динамические системы называются *автоморфизмом* и *потоком* соответственно. Иногда будем обозначать вероятностное пространство как пару (Ω, λ), опуская σ-алгебру. Кроме того, для инвариантной меры будет встречаться также обозначение μ, а для фазового пространства вместо Ω будет встречаться обозначение M, в

особенности если имеется дополнительная метрическая структура на нем. Все такие обозначения будут ясны из контекста.

Для $f \in L_1(\Omega)$, $\omega \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{R}^+$ введем эргодические средние

$$A_n f(\omega) = A_n^T f(\omega) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(T^k\omega) \quad \text{и} \quad A_t f(\omega) = A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(T^\tau\omega)\,d\tau.$$

Тогда индивидуальная эргодическая теорема Биркгофа утверждает существование λ-п.в. пределов (будем их обозначать одинаково)

$$f^* = \lim_{n\to\infty} A_n^T f \quad \text{или} \quad f^* = \lim_{t\to\infty} A_t^{\mathbf{T}} f$$

и равенства $\int f^*\,d\lambda = \int f\,d\lambda$. Пространственное среднее $\int\limits_\Omega f\,d\lambda$ часто обозначают также через $\lambda(f)$ или $\mathbb{E}f$. Оба предела являются условными математическими ожиданиями относительно σ-алгебры $\mathscr{J}$ измеримых множеств, инвариантных относительно динамической системы, т. е. $f^* = \mathbb{E}(f \mid \mathscr{J})$.

В эргодической теореме Биркгофа важна инвариантность меры относительно динамической системы. Этот факт существенно используется в дальнейшем. Отметим, что сходимость средних может иметь место и в отсутствии инвариантной меры [64].

2.2. Можно рассматривать эргодические средние и с (полу)групповым временем. Пусть $\mathscr{G}$ — полугруппа, $\mathfrak{B}(\mathscr{G})$ — σ-алгебра подмножеств полугруппы $\mathscr{G}$ и ν — σ-конечная мера, определенная на $\mathfrak{B}(\mathscr{G})$. Пусть полугруппа $\mathscr{G}$ действует сохраняющими меру λ преобразованиями $\tau_g : \Omega \to \Omega$, $g \in \mathscr{G}$, т. е. для всякого измеримого множества $E \subseteq \Omega$ множество $\tau_g^{-1}(E)$ также измеримо для всех $g \in \mathscr{G}$ и $\lambda\bigl(\tau_g^{-1}(E)\bigr) = \lambda(E)$. Полугрупповое свойство (в аддитивной записи) означает, что для всех $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ и $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\tau_{g_1}(\tau_{g_2}\omega) = \tau_{g_1+g_2}\omega$.

Для всякой функции $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ и любого $G \in \mathfrak{B}(\mathscr{G})$ такого, что $0 < \nu(G) < \infty$, определим эргодические средние

$$A_G f(\omega) = \frac{1}{\nu(G)}\int\limits_G f(\tau_g\omega)d\nu(g), \quad \omega \in \Omega.$$

Пусть $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^+$ — неограниченное множество индексов (временная шкала), нумерующих семейство подмножеств $G_t \in \mathfrak{B}(\mathscr{G})$, $t \in \mathbb{T}$, причем 1) G_t — возрастающее семейство, т. е. $G_t \subset G_s$ и $\nu(G_t) < \nu(G_s)$ при $t < s$; 2) $0 < \nu(G_t) < \infty$ и 3) $\lim\limits_{t\to\infty} \nu(G_t) = \infty$.

Предположим, что λ-п.в. существует предел $\lim\limits_{t\to\infty} A_{G_t} f$, который будем обозначать (так же, как и ранее) через f^*. Утверждение о такого рода сходимости называется *индивидуальной эргодической теоремой.* Классическими примерами таких утверждений являются эргодическая теорема Биркгофа и эргодическая теорема Винера. В эргодической теореме Биркгофа рассматривают средние относительно действия полугруппы $\mathscr{G} = \mathbb{Z}^+$ или группы $\mathbb{Z}$, при этом $G_t = \{0, 1 \dots, t\}$, $t \in \mathbb{N}$, и ν — считающая мера, т. е. $\nu(G_t) = \#G_t = t + 1$; относительно действия полугруппы $\mathscr{G} = \mathbb{R}^+$ или группы $\mathbb{R}$, при этом $G_t = [0, t]$, $t \in \mathbb{R}^+$, и ν — мера Лебега, т. е. $\nu(G_t) = t$. Теорема Винера [65] рассматривает усреднение относительно действий полугрупп $\mathscr{G} = (\mathbb{R}^+)^m$, $(\mathbb{Z}^+)^m$, $m \in \mathbb{N}$, и действий групп $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{Z}^m$, $m \in \mathbb{N}$, со считающей мерой и m-мерной мерой Лебега

соответственно. За последние десятилетия эта тематика сильно разрослась — эргодические теоремы для действия других (полу)групп с эргодическими средними более общего вида можно посмотреть, например, в [66, 67].

2.3. Есть два хорошо известных в общей теории стохастических процессов вероятностных подхода к оценке скорости сходимости п.в. последовательности эргодических средних $\{A_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$.

При первом подходе исследуем последовательности φ, для которых п.в. выполняется асимптотическое соотношение

$$A_n^T f(\omega) - f^*(\omega) = \mathscr{O}(\varphi(n)) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Во втором подходе для каждого $\varepsilon > 0$ оценивается снизу вероятность того, что соответствующее n_ε принимает значение не более данного n, т. е. получается оценка снизу скорости роста к единице для каждого $\varepsilon > 0$ при $n \to \infty$ числовой последовательности $\lambda\big\{\sup\limits_{k\geq n}\big|A_k^T f - f^*\big| < \varepsilon\big\}$, или, что то же, оценку сверху скорости убывания к нулю комплементарной ей последовательности

$$\mathrm{P}_n^\varepsilon(f) = \lambda\big\{\sup_{k\geq n}\big|A_k^T f - f^*\big| \geq \varepsilon\big\}$$

(как нетрудно видеть, сходимость P_n^ε к нулю при $n \to \infty$ для любого $\varepsilon > 0$ эквивалентна утверждению эргодической теоремы Биркгофа).

Для динамических систем с непрерывным временем также оцениваем

$$\mathrm{P}_t^\varepsilon(f) = \lambda\big\{\sup_{s\geq t}\big|A_s^{\mathbf{T}} f - f^*\big| \geq \varepsilon\big\}$$

во втором подходе и исследуем такие φ, для которых п.в. выполняется асимптотическое соотношение

$$A_t^{\mathbf{T}} f(\omega) - f^*(\omega) = \mathscr{O}(\varphi(t))$$

при $t \to \infty$ в первом подходе.

2.4. Как отмечено во введении, скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа можно оценить с помощью таких статистических величин, как вероятности больших уклонений и корреляционные коэффициенты.

Вероятностями больших уклонений или, коротко, *большими уклонениями*, называются величины

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) = \lambda\big\{\big|A_n^T f - f^*\big| \geq \varepsilon\big\} \quad \text{и} \quad \mathrm{p}_t^\varepsilon(f) = \lambda\big\{\big|A_t^{\mathbf{T}} f - f^*\big| \geq \varepsilon\big\}.$$

Выполнение для всех $\varepsilon > 0$ условия $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{p}_n^\varepsilon(f) = 0$ или $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{p}_t^\varepsilon(f) = 0$ есть по определению свойство сходимости $A_n^T f$ или $A_t^{\mathbf{T}} f$ по мере при $n \to \infty$ или $t \to \infty$.

В полугрупповом контексте рассматривается величина

$$\mathrm{p}_t^\varepsilon(f) = \lambda\{|A_{G_t} f - f^*| \geq \varepsilon\}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/p + 1/q = 1$, и $f \in L_p(\Omega)$, $g \in L_q(\Omega)$. *Коэффициентом парных корреляций* или просто *корреляционным коэффициентом* называется величина

$$c_\tau(f, g) = \int\limits_\Omega f(\omega) g(T^\tau \omega)\, d\lambda - \lambda(f)\lambda(g),$$

где $\tau \in \mathbb{Z}^+$ для дискретной динамической системы и $\tau \in \mathbb{R}^+$ для систем с непрерывным временем. Динамическая система (T, λ) называется *перемешивающей*, если $c_\tau(f, g) \to 0$ при $\tau \to \infty$ для всех $f, g \in L_2(\Omega)$.

Оценки корреляций играют важную роль в обоих подходах оценивания скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа.

3. Первый подход: поточечные оценки

3.1. Максимально возможные скорости. Для дискретного времени известен критерий наличия максимально возможной скорости для каждой рассматриваемой пары (f, T).

Теорема 1 [18, 13]. *Пусть T — эргодический эндоморфизм. Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ следующие три условия равносильны:*

(1) $A_n f = \mathscr{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ *при $n \to \infty$ на множестве положительной меры;*

(2) *существует такая константа C, что $|A_n f| \le \frac{C}{n}$ п.в. для всех n;*

(3) $f = h \circ T - h$ *для некоторой $h \in L_\infty(\Omega)$.*

Как отмечено в [13] (замечание 2 к теореме 19), если (Ω, λ) — стандартное пространство Лебега, то условие эргодичности в формулировке этой теоремы в части (2) $\Leftrightarrow$ (3) можно опустить (и нельзя опустить в части, касающейся п. (1)).

Этот результат был перенесен с дискретного времени (т. е. со случая эндоморфизма) на время непрерывное (т. е. на полупоток) в [68].

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{T} = \{T^t\}_{t \ge 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега (Ω, λ). Для каждой $f \in L_1(\Omega)$ следующие три условия равносильны:*

1) $A_t^{\mathbf{T}} f = \mathscr{O}\left(\frac{1}{t}\right)$ *при $t \to \infty$ на множестве положительной меры;*

2) *существует такая константа C, что $\left|A_t^{\mathbf{T}} f\right| \le \frac{C}{t}$ п.в. для всех $t > 0$;*

3) *существует $h \in L_\infty(\Omega)$ такая, что для п.в. $\omega \in \Omega$ верно представление*

$$f(\omega) = \lim_{\tau \to 0} \frac{h(\omega) - h \circ T^\tau(\omega)}{\tau}.$$

Максимальность скорости $\mathscr{O}(1/t)$ в обеих теоремах следует из того, что скоростей вида $o(1/t)$ для непостоянных функций на множестве положительной меры не бывает. Стоит также отметить, что верхняя граница скорости поточечной сходимости зависит от процесса усреднения. Как показано в [69] (см. также [70–72]), можно получить лучшую скорость, заменив усреднение по Чезаро весовыми средними.

Максимальность указанных скоростей может быть увидена также из следующей нижней оценки монотонной огибающей [73].

Теорема 3. *Пусть $f \in L_1^0(\Omega, \mathbb{C})$, $f \not\equiv 0$ и T — эргодический автоморфизм $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$. Тогда для п.в. $\omega \in \Omega$ найдется константа $c = c_f(\omega) > 0$ такая, что для всех $n \ge 1$*

$$\mathscr{A}_n f(\omega) = \sup_{k \ge n} |A_k f(\omega)| \ge \frac{c(\omega)}{n}.$$

Аналогичный результат справедлив и для непрерывного времени [74].

Теорема 4. *Пусть $\mathbf{T} = \{T^t\}_{t \ge 0}$ — эргодический полупоток в пространстве Лебега $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, $f \in L_1^0(\Omega)$ и $f \not\equiv 0$. Тогда существует такое $p \in (0, 1)$, зависящее от функции f и полупотока $\mathbf{T}$, что для п.в. $\omega \in \Omega$ найдется константа $c = c_f(\omega) > 0$ такая, что для всех $t \ge p$ верно неравенство*

$$\sup_{s \ge t} \left|A_s^{\mathbf{T}} f(\omega)\right| \ge \frac{c(\omega)}{t}.$$

В [74] получены также аналоги этих теорем для $\mathbb{Z}^d$- и $\mathbb{R}^d$-действий. Важными при доказательстве этих обобщений являются лемма о частоте возвращения системы в множество положительной меры и абстрактный результат о

$(a, \mathscr{L})$-возвращающихся сетях. Отметим, что в обоих случаях $c_f \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ и $\|c_f\|_\infty \le \|f\|_1/2$.

Также стоит отметить, что максимальная поточечная скорость может быть реализована для любой функции $f \in L^0_\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ на стандартном пространстве Лебега. Это давний результат Квапеня.

Теорема 5 [75]. *Пусть $f \in L^0_\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$. Тогда существуют автоморфизм T и функция $h \in L_\infty(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ такие, что $f = h - h \circ T$.*

Новые доказательства этой теоремы недавно получены в [76, 77], где, в частности, показано, что T может быть эргодическим.

3.2. Структура оценок. Рассмотрим следующие множества оценок:

$$c_0^{f,T} = \bigl\{\varphi \in c_0^+ : \text{п.в. } A_n^T f = \mathscr{O}(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\},$$

$$\widetilde{c}_0^{f,T} = \bigl\{\varphi \in c_0^+ : \text{п.в. } A_n^T f = o(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\},$$

где

$$c_0^+ = \{\varphi : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \text{ такой, что } \varphi(t) \to 0 \text{ при } t \to \infty\}.$$

Аналогичные множества вводятся и для непрерывного времени.

Здесь рассматриваются только поточечные оценки, которые имеют место почти везде. Это мотивировано следующим законом нуля-единицы [73, 78].

Теорема 6. *Пусть $\varphi \in c_0^+$ — монотонная функция. Тогда множества*

$$\bigl\{\omega \in \Omega : A_n^T f(\omega) = \mathscr{O}(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\};$$

$$\bigl\{\omega \in \Omega : A_n^T f(\omega) = o(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\}$$

имеют меру либо 0, либо 1. Аналогичный результат справедлив и для непрерывного времени.

С топологической точки зрения множества из этой теоремы могут иметь сложную структуру (см. [79, 80]).

Из этой теоремы и теоремы Егорова показывается существование оценок вида $\mathscr{O}$-большое (и соответственно o-малое), а также отсутствие минимальных оценок вида o-малое. Последний факт приводит к вопросу о лучшей оценке. Мы рассматриваем понятия оптимальной и почти оптимальной оценок.

Монотонную функцию $\varphi \in c_0^+$ будем называть *оптимальной оценкой* для пары (f, T), если $\varphi \in c_0^{f,T} \setminus \widetilde{c}_0^{f,T}$, т. е.

$$\text{п.в. } A_n^T f = \mathscr{O}(\varphi(n)) \text{ и п.в. } A_n^T f \ne o(\varphi(n))$$

при $n \to \infty$.

Существуют ли оптимальные оценки? Единственный положительный ответ на сегодняшний день известен для L_∞-кограниц: $\varphi(t) = \frac{1}{t}$ является оптимальной оценкой для таких функций. Даже для L_p-кограниц имеем только оценки типа o-малое.

Теорема 7 [19]. *Пусть T будет эргодическим эндоморфизмом, и пусть $f = h \circ T - h$ для некоторого $h \in L_p(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$, $p \in [1, \infty)$. Тогда п.в.*

$$A_n^T f = o(n^{-1/q}) \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

где $1/p + 1/q = 1$.

Этот факт является простым следствием эргодической теоремы Биркгофа и следует из эквивалентности: п.в. при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{h(T^n\omega)}{n^{1/p}} = o(1) \;\Leftrightarrow\; A_n^T f(\omega) = o(n^{-1/q}).$$

Монотонную функцию $\varphi \in c_0^+$ будем называть *почти оптимальной оценкой* для пары (f, T), если для любых $\varepsilon \in (0,1)$ и $\varepsilon' > 1$ имеем $\varphi^\varepsilon \in c_0^{f,T}$ и $\varphi^{\varepsilon'} \notin \widetilde{c}_0^{f,T}$, т. е.

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \quad A_n^T f = \mathscr{O}(\varphi^\varepsilon(n)) \text{ п.в.}, \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon' > 1 \quad A_n^T f \neq o(\varphi^{\varepsilon'}(n)) \text{ п.в.} \tag{2}$$

при $n \to \infty$.

Существуют ли почти оптимальные оценки? Легко видеть, что любая оптимальная оценка почти оптимальна. Также несложно проверить, что асимптотическое соотношение (1) эквивалентно аналогичному условию с малым символом o вместо большого $\mathscr{O}$. То же самое утверждение справедливо для асимптотического соотношения (2). Асимптотические соотношения (1) и (2) вместе подразумевают, что п.в.

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \varphi(t)}{\ln \mathscr{A}_t^T f} = 1, \tag{3}$$

где $\mathscr{A}_t^T f(\omega) = \sup\limits_{s \geq t} \bigl| A_s^T f(\omega) \bigr|$. Аргументы для доказательства такого равенства основаны на раскрытии символов o и $\mathscr{O}$, логарифмировании и использовании монотонности φ. Фактически соотношение (3) эквивалентно (1) и (2) вместе взятым.

Мы предполагаем, что почти оптимальные оценки существуют для любой функции $f \in L_1^0(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ и эргодической динамической системы T. Это мотивируется следующим результатом для дискретного времени [81].

Теорема 8. *Пусть T — эргодический эндоморфизм. Тогда для любой ненулевой функции $f \in L_1^0(\Omega)$ функция*

$$\lambda_{f,T}(\omega) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln(1/n)}{\ln \mathscr{A}_n^T f(\omega)}$$

является константой п.в. Если это не бесконечность, то $\varphi(n) = \frac{1}{n^{1/\lambda_{f,T}}}$ является почти оптимальной оценкой для пары (f, T).

На непрерывное время (а также на более широкий диапазон скоростей) этот результат переносится следующим образом [82]. Пусть $\mathfrak{s}$ — набор монотонных функций $\psi \in c_0^+$, для каждой из которых существует $\ell = \ell(\psi) \geq 1$ такой, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln \psi(t)}{\ln \psi(t+\ell)} = 1$. Поскольку ψ убывают до нуля, для всех достаточно больших t и любых $\ell' \in (0, \ell]$ имеем

$$\frac{\ln \psi(t)}{\ln \psi(t+\ell)} \leq \frac{\ln \psi(t)}{\ln \psi(t+\ell')} \leq 1.$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \psi(t)}{\ln \psi(t+\ell')} = 1$$

для всех $\ell' \in (0, \ell]$. Это наблюдение используется в доказательстве следующего результата.

Теорема 9. *Пусть T — эргодическая динамическая система и $\psi \in \mathfrak{s}$. Тогда для любой ненулевой функции $f \in L_1^0(\Omega)$ функция*

$$\lambda_{f,T,\psi}(\omega) := \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \psi(t)}{\ln \mathscr{A}_t^T f(\omega)}$$

является константой п.в. Если она не бесконечна, то $\varphi(t) = \psi(t)^{1/\lambda_{f,T,\psi}}$ является почти оптимальной оценкой для пары (f, T).

Существование степенных почти оптимальных оценок связано с таким понятием из анализа, как показатель сходимости для монотонной последовательности (величина $\lambda_{f,T}$ в теореме 8). В [81] также приведен критерий для минимального значения (равного 1) показателя сходимости. А именно, справедлива

Теорема 10. *Пусть T — эргодический эндоморфизм и $f \in L_1^0(\Omega)$. Тогда $\lambda_{f,T}(\omega) = 1$ п.в. тогда и только тогда, когда справедлива п.в. асимптотическая оценка*

$$A_n^T f(\omega) = \mathscr{O}\left(\frac{\phi(n)}{n}\right) \text{ при } n \to \infty,$$

где $\frac{\phi(n)}{n}$ монотонно стремится к нулю и $\phi(n) = o(n^\tau)$ при $n \to \infty$ для любого $\tau \in (0, 1)$.

Также в [81] содержится описание когомологичных нулю функций с заданным показателем сходимости. Для такой характеризации рассмотрены специальные пространства функций, изучавшиеся Танни [83] и позднее Вощем [18].

3.3. Сходимость вдоль подпоследовательностей. Вызывает интерес вопрос о существовании оценок φ поточечной скорости сходимости эргодических средних со свойством $\varphi(\ell_k) = o(1/\ell_k)$ при $k \to \infty$ для некоторой возрастающей последовательности ℓ натуральных чисел. Данная задача мотивирована в том числе видом оценок скорости сходимости в теореме 10. В ее терминах вопрос переформулируется следующим образом: может ли $\phi(\ell_k) = o(1)$ для некоторой последовательности ℓ? Оказалось, наличие таких оценок влечет довольно жесткое ограничение [84].

Теорема 11. *Пусть T — эргодический автоморфизм, функция $f \in L_1(\Omega)$ не равна тождественно константе и $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots)$ — возрастающая последовательность натуральных чисел.*

Если для некоторой последовательности $\varphi \in c_0^{T,f}$

$$\varphi(\ell_k) = o(1/\ell_k) \quad \text{при } k \to \infty,$$

то

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{\ell_k}\omega) \to f(\omega) \quad \text{при } N \to \infty \text{ п.в.}$$

Из этого утверждения и теоремы Блюма — Хансона [85] сразу следует, что для сильных перемешиваний таких оценок φ не существует. Более того, В. В. Рыжиков недавно показал [86], что таких оценок не существует только тогда, когда T есть мягкое перемешивание (mild mixing). Примеры слабо перемешивающих преобразований, для которых такие оценки имеют место, обсуждаются в [84] и включают в себя равномерно жесткие гомеоморфизмы из работ [87, 88]. Для вполне эргодических преобразований показано, что последовательность ℓ должна с необходимостью иметь нулевую асимптотическую плотность.

3.4. Для заданной оценки φ рассмотрим множества функций и соответственно эргодических автоморфизмов с быстрыми и медленными скоростями сходимости по отношению к φ, т. е.

$$\mathscr{F}_p(T,\varphi) = \bigl\{f \in L_p(\Omega) : \mu\bigl\{A_n^T f(\omega) - f^* = \mathscr{O}(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\} = 1\bigr\},$$

$$\mathscr{S}_p(T,\varphi) = \left\{f \in L_p(\Omega) : \mu\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{1}{\varphi(n)}\bigl|A_n^T f(\omega) - f^*\bigr| = +\infty\right\} = 1\right\},$$

и

$$\mathscr{F}(f,\varphi) = \bigl\{T \in \mathrm{Aut}_e(\mu) : \mu\bigl\{A_n^T f(\omega) - f^* = \mathscr{O}(\varphi(n)) \text{ при } n \to \infty\bigr\} = 1\bigr\},$$

$$\mathscr{S}(f,\varphi) = \left\{T \in \mathrm{Aut}_e(\mu) : \mu\left\{\sup_{n\geq 1} \frac{1}{\varphi(n)}\bigl|A_n^T f(\omega) - f^*\bigr| = +\infty\right\} = 1\right\}.$$

В [84] описываются дополнительные (по отношению к упоминаемым во введении результатам Халаша) категорные свойства множеств $\mathscr{F}_p(T,\varphi)$. Доказательство основано на законе нуля или единицы для скорости сходимости и результатах дель Юнко и Розенблатта о категорных свойствах множества $\mathscr{S}_p(T,\varphi)$. Также показана непустота множества автоморфизмов $\mathscr{F}(f,\varphi)$ для ограниченной функции f и некоторых φ. Это утверждение опирается на упоминаемый результат Квапеня.

В. В. Рыжиков недавно получил [89] двойственный к теореме Кренгеля результат, ответив на поставленный автором в [84] вопрос. А именно, показал, что в пространстве Лебега с непрерывной мерой μ для любого нетривиального измеримого множества A и для любой последовательности $\varphi \in c_0^+$ множество $\mathscr{S}(\chi_A,\varphi)$ непусто.

4. Второй подход, оценки больших уклонений и корреляций

Рассмотрим метрический подход к измерению скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа и близкие задачи. Здесь для каждого $\varepsilon > 0$ оцениваем величины

$$\mathrm{P}_t^\varepsilon(f) = \lambda\bigl\{\sup_{s\geq t}\bigl|A_s^T f - f^*\bigr| \geq \varepsilon\bigr\}.$$

4.1. Первый результат связан с максимальным расширением результата А. Г. Качуровского об эквивалентности степенного убывания при $n \to \infty$ вероятностей больших уклонений $\mathrm{p}_n^\varepsilon(f)$ и степенной с тем же показателем степени, скорости убывания величин $\mathrm{P}_n^\varepsilon(f)$ для ограниченной функции f. Исследуется распространение этого подхода на более широкий класс скоростей, чем степенные, а также его применимость для общих полугрупповых действий.

Рассмотрим функции $\varphi(x) : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$, которые монотонно убывают (начиная с некоторого $x_0 = x_0(\varphi) > 0$) к нулю так, что интеграл $\int\limits_{x_0}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dx$ сходится. Обозначим этот класс функций через $\mathscr{S}$. Для каждой $\varphi \in \mathscr{S}$ положим

$$\widehat{\varphi}(x) = \int\limits_x^\infty \frac{\varphi(t)}{t}\,dt, \quad x \geq x_0.$$

Среди функций $\varphi \in \mathscr{S}$ особо выделим класс $\widetilde{\mathscr{S}}$ тех из них, для которых выполнено асимптотическое соотношение

$$\widehat{\varphi}(x) = \mathscr{O}(\varphi(x)) \quad \text{при } x \to \infty,$$

что, как известно, означает существование константы $M = M(\varphi) > 0$ такой, что для всех $x \geq x_0$

$$\widehat{\varphi}(x) \leq M\varphi(x).$$

Такое асимптотическое условие будем называть условием Бари — Стечкина. Это связано со следующим замечанием. В работе Н. К. Бари и С. Б. Стечкина по приближениям функций [90] использовалось условие (Z):

$$\int\limits_0^\delta \frac{\psi(t)}{t}\,dt = \mathscr{O}(\psi(\delta)) \quad \text{при } \delta \to 0+$$

для монотонно возрастающей в окрестности нуля функции ψ. Нетрудно видеть, что для каждой $\varphi \in \widetilde{\mathscr{S}}$ функция $\psi(t) = \varphi\left(\frac{1}{t}\right)$ будет удовлетворять условию Бари — Стечкина (Z). Класс $\widetilde{\mathscr{S}}$ (и, следовательно, $\mathscr{S}$) достаточно широк и содержит такие функции, как степенные, степенные с логарифмическими множителями и экспоненциальные.

Пусть $\Delta = \|f - f^*\|_\infty$. Будем предполагать, что функция f не является инвариантной относительно рассматриваемой динамической системы, иначе оценивать просто нечего. Для каждого $\varepsilon > 0$ и $d > 1$ полагаем

$$r = r(\varepsilon, d) = 1 + \frac{\varepsilon(d-1)}{\Delta}.$$

Тогда для полугрупповых действий справедлива следующая теорема [91].

Теорема 12. *Пусть $f \in L_\infty(\Omega, \lambda)$. Если для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся функция $\varphi_\varepsilon \in \mathscr{S}$ и константы $C(\varepsilon) > 0$ и $l_0(\varepsilon) \in \mathbb{T}$ такие, что для всех $t \in \mathbb{T}_{l_0(\varepsilon)}$ выполняется неравенство*

$$\mathrm{p}_t^\varepsilon(f) \leq C(\varepsilon)\varphi_\varepsilon(\nu(G_t)),$$

то для любого $d > 1$ найдется $l_1 \in \mathbb{T}_{l_0(\varepsilon)}$ такое, что при всех $t \in \mathbb{T}_{l_1}$ будет верно неравенство

$$\mathrm{P}_t^{d\varepsilon}(f) \leq C(\varepsilon)\left(\varphi_\varepsilon(\nu(G_t)) + \frac{1}{\ln r(\varepsilon, d)}\widehat{\varphi}_\varepsilon(\nu(G_t))\right).$$

Если при этом $\varphi \in \widetilde{\mathscr{S}}$, то

$$\mathrm{P}_t^{d\varepsilon}(f) \leq C(\varepsilon)\left(1 + \frac{M(\varphi_\varepsilon)}{\ln r(\varepsilon, d)}\right)\varphi_\varepsilon(\nu(G_t)).$$

Последняя оценка для дискретного времени получена в работе [92] и также описана в обзоре [93].

Если известна не только верхняя оценка, но и точная экспоненциальная асимптотическая формула для $\mathrm{p}_n^\varepsilon(f)$, то такая же формула верна и для скорости сходимости в теореме Биркгофа $\mathrm{P}_n^\varepsilon(f)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. А именно, справедлива следующая теорема [91].

Теорема 13. *Пусть ϕ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция такая, что $\exp(-\phi) \in \widetilde{\mathscr{S}}$. Предположим, что для $f \in L_\infty(\Omega, \mu)$ найдется непрерывная функция $\gamma_f(t) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ такая, что для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ в промежутке $[0, \varepsilon_0)$ единственным нулем функции $\gamma_f(t)$ может быть только $t = 0$.*

Если существует $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$ такое, что для каждого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\phi(\nu(G_t))} \ln \mathrm{p}_t^\varepsilon(\mu, f) = -\gamma_f(\varepsilon),$$

то при этих же $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\phi(\nu(G_t))} \ln \mathrm{P}_t^\varepsilon(\mu, f) = -\gamma_f(\varepsilon).$$

Полученные результаты могут быть применены к таким динамическим системам, как транзитивные системы Аносова, некоторые квадратичные отображения, неравномерно гиперболические системы, моделируемые башней Янг, многомерные сдвиги над конечным алфавитом, отображение типа Маннвилля — Помо и потоки Тейхмюллера; для таких систем в литературе имеются оценки больших уклонений или даже точные асимптотические формулы.

4.2. Важной является задача о получении оценок для $\mathrm{p}_n^\varepsilon(f)$ для f из достаточно широкого класса функций. В работах [94, 95] предложен подход с использованием специальной аппроксимации f гёльдеровскими функциями и использованием оценок больших уклонений для тех же гёльдеровских (часто встречающихся в приложениях) функций. Основными являются следующие утверждения.

Теорема 14. *Пусть T — эргодический эндоморфизм пространства с мерой (M, μ). Тогда для любой ограниченной непрерывной μ-п.в. функции $f : M \to \mathbb{R}$ и любых $\delta > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ найдутся гёльдеровские функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n \geq 1$*

$$\mathrm{p}_n^{\varepsilon+\tau_f(\delta)}(f) \leq \mathrm{p}_n^\varepsilon\big(g_1^\delta\big) + \mathrm{p}_n^\varepsilon\big(g_2^\delta\big),$$

где $\tau_f(\delta)$ — усредненный модуль непрерывности.

Аналогичное утверждение справедливо и для непрерывного времени.

Используя тот же метод, можно находить и нижние оценки больших уклонений, но только для ограниченных равномерно непрерывных усредняемых функций. При этом эргодичность эндоморфизма не требуется.

Теорема 15. *Пусть T — эндоморфизм пространства с мерой (M, μ). Тогда для любой ограниченной равномерно непрерывной на M функции $f : M \to \mathbb{R}$ и любых $\delta > 0$ и $\alpha \in (0, 1]$ найдутся гёльдеровские функции $g_1^\delta, g_2^\delta \in H_\alpha(M)$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$ при всех $n \geq 1$*

$$\mathrm{p}_n^{\varepsilon+\omega_f(\delta)}(f) \leq \mathrm{p}_n^\varepsilon\big(g_1^\delta\big) + \mathrm{p}_n^\varepsilon\big(g_2^\delta\big), \quad \max\big\{\mathrm{p}_n^{\varepsilon+\omega_f(\delta)}\big(g_1^\delta\big); \mathrm{p}_n^{\varepsilon+\omega_f(\delta)}\big(g_2^\delta\big)\big\} \leq \mathrm{p}_n^\varepsilon(f),$$

где $\omega_f(\delta)$ — модуль непрерывности.

Аналогичное утверждение справедливо и для непрерывного времени.

Отметим, что используемый метод перехода от оценок для ограниченных гёльдеровских функций приводит к оценкам больших уклонений только для ограниченных непрерывных п.в. функций.

В [95] для отображения Маннвилля — Помо получены оценки больших уклонений и скорости сходимости в эргодической теореме для ограниченных непрерывных п.в. функций. Сложность в доказательстве состоит в том, что теорема 14 не применима в этом случае, поскольку в ней большие уклонения оценивались одинаково для *всех* гёльдеровских функций, а для отображения Маннвилля — Помо класс гёльдеровских функций (в зависимости от значения в нейтральной точке) разделяется на два: со степенным и экспоненциальным убыванием больших уклонений.

Отметим также работу [96], в которой авторы использовали полученный результат о переносе оценок больших уклонений с гёльдеровских функций на ограниченные непрерывные для получения оценок скорости сходимости и других неравенств для сдвигов над бесконечным алфавитом.

4.3. Рассмотрим вопрос о нахождении оценок корреляций для общих наблюдаемых с помощью аппроксимации [97, 98].

Пусть $\mathfrak{F}_p \subseteq L_p(M)$ и $\mathfrak{G}_q \subseteq L_q(M)$ суть всюду плотные нормированные пространства комплекснозначных функций, определенных на M. Будем считать, что выполняется следующая оценка корреляций: для всех $f \in \mathfrak{F}_p$, $g \in \mathfrak{G}_q$ и $n \in \mathbb{N}$

$$|c_n(f,g)| \le A\|f\|_{\mathfrak{F}_p}\|g\|_{\mathfrak{G}_q}\Phi(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

О выполнении этого неравенства говорят как об *убывании со скоростью* Φ *корреляций* $\mathfrak{F}_p$*-наблюдаемых относительно* $\mathfrak{G}_q$*-наблюдаемых.* Имеется большое количество динамических систем с оценками корреляций такого типа (см., например, монографию [99]); к ним относятся классические транзитивные диффеоморфизмы Аносова (см. [37]), а также большой класс систем, допускающих структуру Гиббса — Маркова — Янг (см. [29, 30]), среди которых и некоторые популярные бильярды [100].

Рассмотрим функциональное пространство $\mathfrak{F}_p(\Theta), 1 \le p \le \infty$, состоящее из таких функций $f \in L_p(M)$, что для наилучшего $\mathfrak{F}_p$-приближения

$$\tau_f(t) := \inf\{\|f-h\|_p : h \in \mathfrak{F}_p,\ \|h\|_{\mathfrak{F}_p} \le t\}$$

справедливо неравенство

$$\tau_f(ct) \le c\,\Theta(t)$$

при всех $t \ge 0$ для некоторой константы $c \ge 0$. Здесь $\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — заданная убывающая к нулю функция, отвечающая за скорость приближения. На пространстве $\mathfrak{F}_p(\Theta)$ вводится банахова норма. Оказывается, оценки корреляций контролируемо переносятся на эти пространства. А именно, справедлива следующая

Теорема 16. *Предположим, что имеет место убывание со скоростью* Φ *корреляций* $\mathfrak{F}_p$*-наблюдаемых относительно* $\mathfrak{G}_q$*-наблюдаемых. Пусть* Θ_1, Θ_2 *— заданные убывающие к нулю функции, тогда для любых* $f \in \mathfrak{F}_p(\Theta_1)$, $g \in \mathfrak{G}_q(\Theta_2)$ *при всех* $n \ge n_0$ *справедливо неравенство*

$$|c_n(f,g)| \le A'\|f\|_{\mathfrak{F}_p(\Theta_1)}\|g\|_{\mathfrak{G}_q(\Theta_2)}\Phi'(n)$$

для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}$, *константы* $A' > 0$, *и* $\Phi' \searrow 0$ *при* $n \to \infty$.

В случае, если $\Theta_1 \vee \Theta_2$ *ненулевая с некоторого момента, то*

$$\Phi'(n) = \Phi(n)\upsilon(\Phi(n)),$$

где функция $\upsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *является обратной к* $\frac{1}{t}(\Theta_1 \vee \Theta_2)(\sqrt{t})$, $t > 0$, *и* $n_0 \in \mathbb{N}$ *— наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству*

$$\Phi(n_0)\upsilon(\Phi(n_0)) \le 1.$$

В случае, если $\Theta_1 \vee \Theta_2$ *зануляется, то* $\Phi'(n) = \Phi(n)$ *и* $n_0 = 1$.

Как упоминалось во введении, для некоторых динамических систем существует подход, позволяющий получать оценки больших уклонений для функции f по оценкам корреляций $c_n(f, g)$ относительно всех ограниченных наблюдаемых g. Точное утверждение содержится в следующей теореме.

Теорема 17 [32–35]. *Пусть* $\mathfrak{F} \subset L_\infty(M, \mu)$ *— банахово пространство,* $f \in \mathfrak{F}$ *и* $\int f\, d\mu = 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть* $\beta > 0$ *такое, что для всех* $g \in L_\infty(M, \mu)$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f, g)| \le C\|g\|_\infty n^{-\beta}, \quad n \ge 1,$$

для некоторой константы $C = C(f) > 0$. *Тогда найдется константа* $C' > 0$ *(зависящая только от* C*) такая, что для каждого* $q > \max\{1, \beta\}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *будет*

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) \le C'\|f\|_{\mathfrak{F}}\|f\|_\infty^{2q-1}\varepsilon^{-2q}n^{-\beta}, \quad n \ge 1.$$

(2) *Пусть* $\theta, \tau > 0$ *такие, что для всех* $g \in L_\infty(M, \mu)$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f, g)| \le C\|g\|_\infty e^{-\tau n^\theta}, \quad n \ge 1,$$

для некоторой константы $C = C(f) > 0$. *Тогда найдется константа* $c = c(\theta, \tau) > 0$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$ *и всех* $n \ge 1$ *будет*

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) \le 2e^{-\tau'\varepsilon^{2\theta/(\theta+1)}n^{\theta/(\theta+1)}},$$

где $\tau' = c(\max\{C, \|f\|_\infty\})^{-2\theta/(\theta+1)}$.

Первое утверждение о переходе от степенных оценок корреляций к степенным же оценкам (с тем же показателем степени) больших уклонений получено в [32], второе утверждение о переходе от растянутых экспоненциальных оценок корреляций к растянутым же экспоненциальным оценкам (с другим показателем) получено в [34] и улучшено в [35] (в оценке больших уклонений увеличена степень в экспоненте с $\theta/(\theta + 2)$ до $\theta/(\theta + 1)$).

Комбинируя теорему 17 с теоремой 16, можно получать оценки больших уклонений (и соответственно скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа) для функций $f \in \mathfrak{F}_1(\Theta) \cap L_\infty(M, \mu)$ для некоторых Θ. В качестве примера рассмотрим степенное приближение. Пусть $\alpha > 0$ и $\Theta_\alpha : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — убывающая к нулю функция такая, что

$$\Theta_\alpha(t) = \mathscr{O}(t^{-\alpha}) \quad \text{при } t \to +\infty.$$

Теорема 18. *Пусть* $\mathfrak{F} \subset L_\infty(M, \mu)$. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Пусть* $\beta, C > 0$ *такие, что для всех* $f \in \mathfrak{F}$ *и* $g \in L_\infty(M, \mu)$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f, g)| \le C\|f\|_{\mathfrak{F}}\|g\|_\infty n^{-\beta}, \quad n \ge 1.$$

Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\Theta_\alpha) \cap L_\infty(M, \mu)$ *найдется константа* $C' > 0$ *такая, что для каждого* $q > \max\{1, \gamma\}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *будет*

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) \le C'\|f\|_{\mathfrak{F}(\Theta_\alpha)}\|f\|_\infty^{2q-1}\varepsilon^{-2q}n^{-\gamma}, \quad n \ge 1,$$

где $\gamma = \frac{\alpha\beta}{2+\alpha}$.

(2) *Пусть* $\theta, \tau, C > 0$ *такие, что для всех* $f \in \mathfrak{F}$ *и* $g \in L_\infty(M, \mu)$ *имеет место оценка*

$$|c_n(f, g)| \le C\|f\|_{\mathfrak{F}}\|g\|_\infty e^{-\tau n^\theta}, \quad n \ge 1.$$

Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{F}(\Theta_\alpha) \cap L_\infty(M, \mu)$ *найдется константа* $\tau' > 0$ *такая, что для любого* $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{p}_n^\varepsilon(f) \le 2e^{-\tau'\varepsilon^{2\theta/(\theta+1)} n^{\theta/(\theta+1)}}, \quad n \ge 1.$$

В качестве примера, показывающего содержательность теоремы 16, в [97] приведено доказательство ЦПТ для диффеоморфизмов Аносова, основанное на идеях из работы Стенлунда [101].

5. Заключительные замечания

Настоящий обзор можно считать продолжением обзоров [13, 93] в части, касающейся эргодической теоремы Биркгофа. Приведенные результаты общего характера были получены с оглядкой на возможные приложения ко многим популярным хорошо изученным динамическим системам (таким как бильярды и системы Аносова, например). При этом приведенные результаты не зависят от специфики конкретной динамической системы. Отметим, что специфика конкретных динамических систем, конечно, влияет на получение более точных оценок. К примеру, в недавней работе [102] были получены более точные оценки скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа в рамках второго подхода для некоторых бильярдных систем, а в [103] использовалась функциональная специфика оператора сдвига.

Один из самых важных вопросов, поставленных в работе в рамках первого подхода, о существовании оптимальных оценок поточечной сходимости, остается открытым. Без его решения нет строгого понимания, что такое скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа в рамках первого подхода. Есть множества скоростей сходимости эргодических средних для каждой точки из множества полной меры. Для всех этих скоростей есть одинаковые оценки сверху. Самую лучшую из этих оценок (оптимальную в нашем определении) можно было бы и назвать скоростью сходимости в этом подходе.

Рассмотренные задачи (в рамках обоих подходов) могут быть адаптированы и для других различных средних, отличных от чезаровского усреднения (в частности, упоминались весовые средние), или с другим групповым временем. Постановку вопроса о нахождении подобных оценок скорости сходимости на примере средних Козлова — Трещева можно найти в работе В. И. Богачева [104], а в недавней работе [105] были получены степенные оценки скорости поточечной сходимости для неконвенциональных средних через оценки на множественные корреляции. Развитие исследований в этих направлениях представляет несомненный интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Krengel U.* On the speed of convergence in the ergodic theorem // Monatsh. Math. 1978. V. 86. P. 3–6.
2. *Kakutani S., Petersen K.* The speed of convergence in the ergodic theorem // Monatsh. Math. 1981. V. 91. P. 11–18.
3. *del Junco A., Rosenblatt J.* Counterexamples in ergodic theory and number theory // Math. Ann. 1979. V. 245. P. 185–197.

4. *Volny D.* On limit theorems and category for dynamical systems // Yokohama Math. J. 1990. V. 38. P. 29–35.

5. *Halasz G.* Remarks on the remainder in Birkhoff's ergodic theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1976. V. 28, N 3–4. P. 389–395.

6. *Marcus B., Petersen K.* Balancing ergodic averages // Ergodic theory (Proc. Conf., Math. Forschungsinst., Oberwolfach, Germany, 1978). Berlin: Springer-Verl., 1979. P. 126–143. (Lect. Notes Math.; V. 729).

7. *Atkinson G.* Recurrence of co-cycles and random walks // J. London Math. Soc. (2). 1976. V. 13, N 3. P. 486–488.

8. *Schmidt K.* On reccurence // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 1984. V. 68, N 1. P. 75–95.

9. *Шнейберг И. Я.* Нули интегралов вдоль траекторий эргодических систем // Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 19, № 2. С. 92–93.

10. *Крыгин А. Б.* Пример цилиндрического каскада с аномальными метрическими свойствами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 1975. № 5. С. 26–31.

11. *Рыжиков В. В.* Полиморфизмы, джойнинги и тензорная простота динамических систем // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 2. С. 45–57.

12. *Krengel U.* Ergodic theorems. Berlin; New York: de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math.; V. 6).

13. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

14. *Гапошкин В. Ф.* О зависимости скорости сходимости в усиленном законе больших чисел для стационарных процессов от скорости убывания корреляционной функции // Теория вероятностей и ее применения. 1981. Т. 26, № 4. С. 720–733.

15. *Cohen G., Lin M.* Laws of large numbers with rates and the one-sided ergodic Hilbert transform // Illinois J. Math. 2003. V. 47, N 4. P. 997–1031.

16. *Cuny C.* Pointwise ergodic theorems with rate with applications to limit theorems for stationary processes // Stoch. Dynam. 2011. V. 11, N 1. P. 135–155.

17. *Lin M, Sine R.* Ergodic theory and the functional equation $(I-T)x=y$ // J. Operator Theory. 1983. V. 10. P. 153–166.

18. *Woś J.* The filling scheme and the ergodic theorems of Kesten and Tanny // Colloq. Math. 1987. V. 52. P. 263–276.

19. *Derriennic Y., Lin M.* Fractional Poisson equations and ergodic theorems for fractional coboundaries // Israel J. Math. 2001. V. 123. P. 93–130.

20. *Fang L., Takahasi H., Zhang Y.* Precise asymptotics on the Birkhoff sums for dynamical systems // Nonlinearity. 2021. V. 34. P. 7095–7108.

21. *Гапошкин В.Ф.* О скорости убывания вероятностей ε-уклонений средних стационарных процессов // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 3. С. 366–372.

22. *Вершик А. М., Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах для локально конечных групп и обращенные мартингалы // Дифференц. уравнения и процессы управления. 1999. № 1. С. 19–26.

23. *Качуровский А. Г., Седалищев В. В.* О константах оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 4. С. 624–628.

24. *Седалищев В. В.* Константы оценок скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 5. С. 1102–1110.

25. *Седалищев В. В.* Связь скоростей сходимости в эргодических теоремах Биркгофа и фон Неймана в L_p // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 412–426.

26. *Chernov N. I.* Limit theorems and Markov approximations for chaotic dynamical systems // Probab. Theory Relat. Fields. 1995. V. 101, N 3. P. 321–362.

27. *Sarig O.* Decay of correlations // Handbook of dynamical systems. 2006. V. 1B. P. 244–263.

28. *Lesigne E., Volny D.* Large deviations for generic stationary processes // Colloq. Math. 2000. V. 84/85, N 1. P. 75–82.

29. *Young L.-S.* Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity // Ann. Math. 1998. V. 147, N 3. P. 585–650.

30. *Young L.-S.* Recurrence times and rates of mixing // Israel J. Math. 1999. V. 110. P. 153–188.

31. *Melbourne I., Nicol M.* Large deviations for nonuniformly hyperbolic systems // Trans. Am. Math. Soc. 2008. V. 360. P. 6661–6676.

32. *Melbourne I.* Large and moderate deviations for slowly mixing dynamical systems // Proc. Am. Math. Soc. 2009. V. 137, N 5. P. 1735–1741.

33. *Rey-Bellet L., Young L.-S.* Large deviations in non-uniformly hyperbolic dynamical systems // Ergodic Theory Dynam. Syst. 2008. V. 28, N 2. P. 587–612.

34. *Alves J. F., Freitas J. M., Luzzatto S., Vaienti S.* From rates of mixing to reccurence times via large deviations // Adv. Math. 2011. V. 228, N 2. P. 1203–1236.

35. *Aimino R., Freitas J. M.* Large deviations for dynamical systems with stretched exponential decay of correlations // Portugal Math. 2019. V. 76, N 2. P. 143–152.

36. *Боуэн Р.* Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.

37. *Bressaud X., Liverani C.* Anosov diffeomorphisms and coupling // Ergodic Theory Dynam. Syst. 2002. V. 22, N 1. P. 129–152.

38. *Chernov N. I.* Markov approximations and decay of correlations for Anosov flows // Ann. Math. 1998. V. 147, N 2. P. 269–324.

39. *Dolgopyat D.* On decay of correlations in Anosov flows // Ann. Math. 1998. V. 147, N 2. P. 357–390.

40. *Dolgopyat D.* Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1998. V. 18, N 5. P. 1097–1114.

41. *Dolgopyat D.* Prevalence of rapid mixing. II: Topological prevalence // Ergodic Theory Dynam. Syst. 2000. V. 20, N 4. P. 1045–1059.

42. *Liverani C.* On contact Anosov flows // Ann. Math. 2004. V. 159, N 3. P. 1275–1312.

43. *Stoyanov L.* Ruelle operators and decay of correlations for contact Anosov flows // Compt. Rend. Math. 2013. V. 351. P. 669–672.

44. *Chernov N., Markarian R.* Chaotic billiards. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2006. (Math. Surv. Monogr.; V. 127).

45. *Zhang H.-K.* Decay of correlations on non-Hölder observables // Int. J. Nonlinear Sci. 2010. V. 10, N 3. P. 359–369.

46. *Ruziboev M.* Decay of correlations for invertible maps with non-Hölder observables // Dynam. Syst. 2015. V. 30, N 3. P. 341–352.

47. *Кейперс Л., Нидеррейтер Г.* Равномерное распределение последовательностей. М.: Наука, 1985.

48. *Козлов В. В.* Об одной задаче Пуанкаре // Прикл. математика и механика. 1976. Т. 40, № 2. С. 352–355.

49. *Крыгин А. Б.* Об ω-предельных множествах гладких цилиндрических каскадов // Мат. заметки. 1978. Т. 23, № 6. С. 873–884.

50. *Сидоров Е. А.* Об условиях равномерной устойчивости по Пуассону цилиндрических систем // Успехи мат. наук. 1979. Т. 34, № 6. С. 184–188.

51. *Мощевитин Н. Г.* Сингулярные диофантовы системы А. Я. Хинчина и их применение // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 3. С. 43–126.

52. *Рождественский А. В.* Точная оценка скорости сходимости в среднем биркгофовых сумм для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Функцион. анализ и его прил. 2006. Т. 40, № 1. С. 43–51.

53. *Антоневич А. Б., Кочергин А. В., Шукур А. А.* О поведении сумм Биркгофа, порожденных поворотами окружности // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 7. С. 3–38.

54. *Klein S., Liu X.-C., Melo A.* Uniform convergence rate for Birkhoff means of certain uniquely ergodic toral maps // Ergod. Theory Dynam. Syst. 2021. V. 41, N 11. P. 3363–3388.

55. *Colzani L.* Speed of convergence of Weyl sums over Kronecker sequences // Monatsh. Math. 2023. V. 200, N 2. P. 209–228.

56. *Ratner M.* Rigidity of time changes for horocycle flows // Acta Math. 1986. V. 156. P. 1–32.

57. *Burger M.* Horocycle flow on geometrically finite surfaces // Duke Math. J. 1990. V. 61, N 3. P. 779–803.

58. *Flaminio L., Forni G.* Invariant distributions and time averages for horocycle flows // Duke Math. J. 2003. V. 119. P. 465–526.

59. *Strömbergsson A.* On the deviation of ergodic averages for horocycle flows // J. Mod. Dynam. 2013. V. 7, N 2. P. 291–328.

60. *Margulis G.* Problems and conjectures in rigidity theory // Mathematics: frontiers and perspectives. Eds. Arnold V., Atiyah M., Lax P., Masur B. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2000. P. 161–174.

61. *Athreya J. S., Forni G.* Deviation of ergodic averages for rational polygonal billiards // Duke Math. J. 2008. V. 144, N 2. P. 285–319.

62. *Bufetov A.* Limit theorems for translation flows // Ann. Math. 2014. V. 179. P. 431–499.

63. *Forni G.* Deviation of ergodic averages for area-preserving flows on surfaces of higher genus // Ann. Math. 2002. V. 155. P. 1–103.

64. *Бланк М. Л.* О теореме Биркгофа по неинвариантной мере // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 3. С. 199–200.

65. *Wiener N.* The ergodic theorem // Duke Math. J. 1939. V. 5, N 2. P. 1–18.

66. *Tempelman A.* Ergodic theorems for group actions. Informational and thermodynamical aspects. Dordrecht: Springer, 1992. (MAIA; V. 78).

67. *Nevo A.* Pointwise ergodic theorems for actions of groups // Handbook of Dynamical Systems. 2006. V. 1B. P. 871–982.

68. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А.* Максимальная поточечная скорость сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2020. Т. 498. С. 18–25.

69. *Das S., Yorke J. A.* Super convergence of ergodic averages for quasiperiodic orbits // Nonlinearity. 2018. V. 31. P. 491–501.

70. *Duignan N., Meiss J. D.* Distinguishing between regular and chaotic orbits of flows by the weighted Birkhoff average // Physica D. 2023. V. 449. Article ID 133749

71. *Tong Z., Li Y.* Exponential convergence of the weighted Birkhoff average // J. Math. Pures Appl. 2024. V. 188. P. 470–492.

72. *Colzani L., Gariboldi B., Monguzzi A.* Summability and speed of convergence in an ergodic theorem // J. Math. Anal. Appl. 2024. V. 536, N 1. Article ID 128190.

73. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Об измерении скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2019. Т. 106, № 1. С. 40–52.

74. *Подвигин И. В.* Lower bound of the supremum of ergodic averages for $\mathbb{Z}^d$ and $\mathbb{R}^d$-actions // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 626–636.

75. *Kwapien S.* Linear functionals invariant under measure preserving transformations // Math. Nachr. 1984. V. 119, N 1. P. 175–179.

76. *Adams T., Rosenblatt J.* Joint coboundaries // Dynamical systems, ergodic theory, and probability: in memory of Kolya Chernov. Contemp. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2017. V. 698. P. 5–33.

77. *Ber A. F., Borst M. J., Sukochev F. A.* Full proof of Kwapien's theorem on representing bounded mean zero functions on $[0,1]$ // Studia Math. 2021. V. 259, N 3. P. 241–270.

78. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Свищёв А. А.* Закон нуля или единицы для скоростей сходимости в эргодической теореме Биркгофа с непрерывным временем // Мат. тр. 2021. Т. 24, № 2. С. 65–80.

79. *Fan A. H., Schmeling J.* On fast Birkhoff averaging // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2003. V. 135. P. 443–467.

80. *Bayart F., Buczolich Z., Heurteaux Y.* Fast and slow points of Birkhoff sums // Ergodic Theory Dynam. Syst. 2020. V. 40, N 12. P. 3236–3256.

81. *Подвигин И. В.* Показатель сходимости последовательности эргодических средних // Мат. заметки. 2022. Т. 112, № 2. С. 251–262.

82. *Podvigin I. V.* On the pointwise rate of convergence in the Birkhoff ergodic theorem: recent results // Proceedings of the Workshops University of North Carolina at Chapel Hill 2021. Ergodic Theory and Dynamical Systems. DeGruyter, 2024. P. 117–125. (De Gruyter Proc. Math.).

83. *Tanny D.* A zero-one law for stationary sequences // Z. Wahrscheinlichkeitstheorie. 1974. V. 30. P. 139–148.

84. *Подвигин И. В.* О возможных оценках скорости поточечной сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 379–391.

85. *Blum J. R., Hanson D. L.* On the mean ergodic theorem for subsequences // Bull. Am. Math. Soc. 1960. V. 66, N 6. P. 308–311.

86. *Ryzhikov V. V.* Slow decay of correlations for generic mixing automorphisms. arXiv:2403.14585 [math.DS]. 2024.

87. *Yancey K. B.* On weakly mixing homeomorphisms of the two-torus that are uniformly rigid // J. Math. Anal. Appl. 2013. V. 399, N 2. P. 524–541.

88. *Kunde P.* Uniform rigidity sequences for weak mixing diffeomorphisms on $\mathbb{D}^2, \mathbb{A}$ and $\mathbb{T}^2$ // J. Math. Anal. Appl. 2015. V. 429, N 1. P. 111–130.

89. *Рыжиков В. В.* Медленные сходимости эргодических средних // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 742–746.

90. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
91. *Подвигин И. В.* О скорости сходимости в индивидуальной эргодической теореме для действий полугрупп // Мат. труды. 2015. Т. 18, № 2. С. 93–111.
92. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 569–577.
93. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Тр. Моск. мат. о-ва. 2016. Т. 76, № 1. С. 1–66.
94. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения и скорости сходимости в эргодической теореме Биркгофа: переход от гёльдеровости к непрерывности // Докл. АН. 2016. Т. 466, № 1. С. 12–15.
95. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Большие уклонения эргодических средних: переход от гёльдеровости к непрерывности почти всюду // Мат. тр. 2017. Т. 20, № 1. С. 97–120.
96. *Maldonado C., Muniz H., Nieto H.* Concentration inequalities and rates of convergence of the ergodic theorem for countable shifts with Gibbs measures // J. Differ. Equ. Appl. 2021. V. 27, N 11. P. 1594–1607.
97. *Подвигин И. В.* Оценки корреляций в динамических системах: переход от гёльдеровских функций к произвольным наблюдаемым // Мат. тр. 2017. Т. 20, № 2. С. 90–119.
98. *Podvigin I. V.* Large deviations of Birkhoff′s sums via the approximation of observables // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 4. P. 703–708.
99. *Baladi V.* Positive operators and decay of correlations. Singapore: World Sci., 2000. (Advanced series in nonlinear dynamics; V. 16).
100. *Chernov N.* Advanced statistical properties of dispersing billiards // J. Stat. Phys. 2006. V. 122, N 6. P. 1061–1094.
101. *Stenlund M.* A strong pair correlation bound implies the CLT for Sinai billiards // J. Stat. Phys. 2010. V. 140, N 1. P. 154–169.
102. *Bunimovich L., Su Y.* Maximal large deviations and slow recurrences in weakly chaotic systems // Adv. Math. 2023. V. 432. Article ID 109267.
103. *Chalmoukis N., Colzani L., Gariboldi B., Monguzzi A.* On the speed of convergence in the ergodic theorem for shift operators. arXiv:2312.08922 [math.CA]. 2023.
104. *Богачев В. И.* Неравномерные усреднения Козлова — Трещева в эргодической теореме // Успехи мат. наук. 2020. Т. 75, № 3. С. 3–36.
105. *Rühr R., Shi R.* Quantitative multiple pointwise convergence and effective multiple correlations // J. Differ. Equ. 2021. V. 285. P. 1–16.

Поступила в редакцию 9 августа 2024 г.
После доработки 9 августа 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Подвигин Иван Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
ipodvigin@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 512.542

СИЛЬНАЯ π–ТЕОРЕМА СИЛОВА ДЛЯ ГРУПП $\mathrm{PSL}_2(q)$

Д. О. Ревин, В. Д. Шепелев

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа называется *π-группой*, если все простые делители ее порядка принадлежат π. Следуя Виланду, говорят, что для конечной группы G верна π-теорема Силова, если в G сопряжены все максимальные π-подгруппы; если же π-теорема Силова верна для каждой подгруппы группы G, то говорят, что для G верна сильная π-теорема Силова. Известно, что сильная π-теорема Силова верна для группы тогда и только тогда, когда она верна для всякого неабелева композиционного фактора этой группы. Вопрос о том, для каких конечных простых неабелевых групп верна сильная π-теорема Силова, поставлен Виландом в 1979 г. К настоящему времени ответ известен для спорадических и знакопеременных групп. В статье дается арифметический критерий справедливости сильной π-теоремы Силова для групп $\mathrm{PSL}_2(q)$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.517

Ключевые слова: π-теорема Силова, сильная π-теорема Силова, проективная специальная линейная группа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и термин «группа» всюду означает «конечная группа». Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Для натурального числа n символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей n. Для группы G полагаем $\pi(G) = \pi(|G|)$. Группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется *π-группой*. Подгруппа H группы G называется *холловой π-подгруппой*, если H является π-группой и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.

Используя терминологию Ф. Холла [1], будем говорить, что конечная группа G *обладает свойством* D_π (пишем $G \in D_\pi$), если все ее максимальные π-подгруппы сопряжены. В терминологии Виланда [2] о группе со свойством D_π говорят также, что для нее *верна π-теорема Силова*. Из теоремы Силова легко вытекает, что $G \in D_\pi$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- группа G содержит холлову π-подгруппу;
- все холловы π-подгруппы группы G сопряжены;
- всякая π-подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π-подгруппе.

Таким образом, свойство D_π означает выполнение в группе полного аналога теоремы Силова для π-подгрупп, причем при $\pi = \{p\}$, где $p \in \mathbb{P}$, максимальные

Работа выполнена за счет РНФ, проект № 24-21-00163, https://rscf.ru/project/24-21-00163/.

© 2024 Ревин Д. О., Шепелев В. Д.

π-подгруппы и холловы π-подгруппы — это в точности силовские p-подгруппы, и π-теорема Силова верна для любой группы. В [3, 4] доказано, что группа одновременно для всех множеств π обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда она разрешима. В частности, для любой неразрешимой группы G найдется множество π такое, что $G \notin D_\pi$. Например, $A_5 \notin D_{\{3,5\}}$, поскольку в A_5 нет подгрупп порядка 15, а всякая холлова $\{3,5\}$-подгруппа в A_5 должна была бы иметь порядок 15. В общем случае свойство D_π не наследуется подгруппами, что подтверждает следующий

Пример. Рассмотрим группу $\mathrm{SL}_2(16)$, имеющую порядок, равный $4080 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17$. Подгруппа H всех диагональных матриц в ней имеет порядок 15 и является холловой $\{3,5\}$-подгруппой. Любая группа, порядок которой делит 15, как известно, должна быть циклической. Из очевидных соображений линейной алгебры подгруппа в $\mathrm{SL}_2(16)$, порядок которой делит 15, сопряжена с подгруппой из H. Тем самым $\mathrm{SL}_2(16)$ обладает свойством $D_{\{3,5\}}$. Однако в $\mathrm{SL}_2(16)$ есть подгруппа, изоморфная $\mathrm{SL}_2(4) \simeq A_5$, которая, как было показано ранее, не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$.

В 1979 г. Виланд на конференции по конечным группам в г. Санта-Круз поставил следующую проблему.

Проблема A [5, вопрос (h)]. *В каких простых конечных группах верна сильная π-теорема Силова: все подгруппы обладают свойством D_π?*

Следуя [6], через W_π будем обозначать класс всех конечных групп, для которых справедлива сильная π-теорема Силова. Если конечная группа G обладает свойством W_π, то для краткости будем писать $G \in W_\pi$. Проблема A может быть переформулирована эквивалентным образом: *какие простые конечные группы обладают свойством W_π?*

Для фиксированного множества π свойство W_π, как и свойство D_π, является обобщением свойства разрешимости группы, поскольку означает выполнение для π-подгрупп данной группы аналога теоремы Силова, который в случае разрешимых групп гарантируется теоремой Холла, а подгруппа разрешимой группы всегда разрешима. Более того, в отличие от свойства D_π свойство W_π наследуется подгруппами.

Известно [6, следствие 6.7], что группа обладает свойством W_π тогда и только тогда, когда любой ее композиционный фактор обладает данным свойством. Поэтому полное решение проблемы A позволило бы о любой конечной группе с известным композиционным строением сказать, обладает она свойством W_π или нет.

Проблема A к настоящему моменту решена для спорадических [7] и знакопеременных групп [8, теорема 3]. Ни одной серии групп лиева типа, для которой была бы решена проблема A, до настоящего момента не было известно. В данной статье будет предложено решение проблемы Виланда для серии групп $\mathrm{PSL}_2(q)$.

Всюду символом (a, b) будем обозначать наибольший общий делитель целых чисел a и b.

Пусть $m > 1$ и a — целые числа, причем $(a, m) = 1$. *Мультипликативным порядком числа a по модулю m* будем называть число

$$\operatorname{ord}_m a = \min\{d \in \mathbb{N} : a^d \equiv 1 \pmod{m}\}.$$

Для формулировки основного результата статьи понадобится следующее обозначение. Пусть r — простое число и a — целое число, взаимно простое с r. По определению полагаем

$$\operatorname{ord}_r^* a := \operatorname{ord}_{r\cdot(2,r)} a = \begin{cases} \operatorname{ord}_r a, & \text{если } r \text{ нечетно}, \\ \operatorname{ord}_4 a, & \text{если } r = 2. \end{cases}$$

Теорема. *Пусть p — простое число, $q = p^{2^k m}$ для некоторых нечетного числа m и неотрицательного целого числа k. Положим также $q_0 := p^m$ и $\tau := \pi \cap \pi(\mathrm{PSL}_2(q))$. Тогда $\mathrm{PSL}_2(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(W_1) $\pi(\mathrm{PSL}_2(q)) \subseteq \pi$;

(W_2) $p = 2$, $\tau = \{2\}$;

(W_3) $2 \notin \pi$, $p \in \pi$, $|\tau \cap \{3,5\}| \le 1$ *и* $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$;

(W_4) $p \notin \pi$, $|\tau \cap \{2,3,5\}| \le 1$ *и* $\operatorname{ord}_r^* q_0 = \operatorname{ord}_s^* q_0$ *для любых* $r, s \in \tau$.

Отметим, что за исключением группы ${}^2B_2(q)$ любая группа L лиева типа с базовым полем из q элементов содержит секцию[1)], изоморфную $\mathrm{PSL}_2(q)$. Поскольку свойство W_π наследуется секциями (см. лемму 2 ниже), выполнение одного из условий (W_1)–(W_4) является необходимым для того, чтобы L обладала свойством W_π.

Приведем примеры, показывающие, что условия (W_3) и (W_4) действительно могут выполняться для определенных множеств π и бесконечных серий q.

Пример. Пусть n — натуральное число. Тогда для группы $\mathrm{PSL}_2(7^n)$ и множества $\pi = \{3,7\}$ справедливо условие (W_3). Тем самым $\mathrm{PSL}_2(7^n) \in W_\pi$.

Пример. Пусть n — натуральное число. Тогда для группы $\mathrm{PSL}_2(3^n)$ и множества $\pi = \{2,7\}$ справедливо условие (W_4). Тем самым $\mathrm{PSL}_2(3^n) \in W_\pi$.

В самом деле, $7 \in \tau$, если и только если $3^{2n} \equiv 1 \pmod 7$, т. е. n кратно 3. Таким образом, если n не делится на 3, то $\tau = \{2\}$ и условие (W_4) выполнено. Если же n делится на 3, запишем n в виде $n = 2^k \cdot 3 \cdot (2s-1)$. Имеем

$$q_0 = 3^{3(2s-1)} = 27^{2s-1},$$

откуда q_0 сравнимо с -1 по модулям 4 и 7 и

$$\operatorname{ord}_2^* q_0 = \operatorname{ord}_7^* q_0 = 2.$$

Условие (W_4) снова выполнено.

Таким образом, существуют бесконечные серии проективных специальных групп степени 2, удовлетворяющие сильной π-теореме Силова, холловы π-подгруппы которых отличны от силовских подгрупп и самих групп.

Обозначения и предварительные результаты

Утверждения, использующие классификацию конечных простых групп, помечены символом (mod CFSG).

Через q всегда обозначается степень некоторого фиксированного простого числа p. В соответствии с обозначениями из Атласа [9] проективная специальная линейная группа $\mathrm{PSL}_2(q)$ над полем из q элементов будет также обозначаться символом $L_2(q)$.

[1)] Под секциями группы понимаются гомоморфные образы ее подгрупп.

Известно, что

$$|L_2(q)| = \frac{q(q-1)(q+1)}{(2, q-1)}.$$

Отсюда

$$\pi(L_2(q)) = \{p\} \cup \pi(q-1) \cup \pi(q+1).$$

Лемма 1. *Если G — разрешимая группа, то $G \in W_\pi$ для любого множества простых чисел π.*

Лемма 2 [10, лемма 2, (mod CFSG)]. *Класс W_π замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений.*

Из леммы 2, в частности, вытекает, что $\mathrm{PGL}_2(q) \in W_\pi$, если и только если $L_2(q) \in W_\pi$.

Лемма 3 [11, гл. II, теорема 8.27]. *Любая подгруппа группы $L_2(p^n)$, где p — простое число и n — натуральное число, принадлежит следующему списку:*

(1) *элементарная абелева p-группа;*
(2) *циклическая группа порядка z, где $z \mid \frac{p^n \pm 1}{e}$ и $e = (p^n - 1, 2)$;*
(3) *группа диэдра порядка $2z$, где z из (2);*
(4) *знакопеременная группа A_4 при условии $p > 2$ или $p = 2$ и $n \equiv 0 \pmod 2$;*
(5) *симметрическая группа S_4 при условии $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$;*
(6) *знакопеременная группа A_5 при условии $p = 5$ или $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 5$;*
(7) *полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^l и циклической группы порядка t при условии, что $l \leq n$, $t \mid p^l - 1$ и $t \mid p^n - 1$;*
(8) *группа $L_2(p^l)$, если $l \mid n$;*
(9) *группа $\mathrm{PGL}_2(p^l)$, если $2l \mid n$.*

В частности, группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5, если и только если $5 \in \pi(L_2(q))$.

Лемма 4 [8, теорема 3]. *Пусть π — некоторое множество простых чисел. Положим $\sigma := \pi \cap \pi(L_2(q))$. Группа $L_2(q)$, где $q = p^n$, p — простое число и n — натуральное число, обладает свойством D_π, если и только если выполнено одно из следующих условий:*

(D_1) *$\pi(L_2(q)) \subseteq \pi$ или $|\sigma| \leq 1$;*
(D_2) *$2 \notin \pi, p \in \pi$ и $\sigma \subseteq \{p\} \cup \pi(q-1)$;*
(D_3) *$2, p \notin \pi$ и $\sigma \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$;*
(D_4) *$2 \in \pi, 3, p \notin \pi$ и $\sigma \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, где $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $4 \mid q - \varepsilon$.*

В частности, если $2, 3 \in \pi$, то $L_2(q) \in D_\pi$ тогда и только тогда, когда $L_2(q)$ — π-группа.

Отметим, что неравенство $|\sigma| \leq 1$, фигурирующее в условии (D_1) леммы 4, не исключает выполнения одного из условий (D_2)–(D_4). Кроме того, поскольку $L_2(4) \simeq A_5$, из леммы 4 следует, что $A_5 \in D_\pi$, если и только если либо $|\pi \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$, либо $\{2, 3, 5\} \subseteq \pi$.

Доказательство теоремы

Группы $L_2(2)$ и $L_2(3)$ являются разрешимыми, а потому согласно лемме 1 обладают свойством W_π для любого множества простых чисел π. В табл. 1

указано, какое именно из условий (W_1)–(W_4) теоремы выполнено для каждой из групп $L_2(2)$ и $L_2(3)$ в зависимости от множества π. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $q > 3$.

Таблица 1. Выполнение условий (W_1)–(W_4) для групп $L_2(2)$ и $L_2(3)$

G	$\pi(G)$	(W_1)	(W_2)	(W_3)	(W_4)
$L_2(2)$	$\{2,3\}$	$2,3 \in \tau$	$2 \in \tau, 3 \notin \tau$	—	$2 \notin \tau$
$L_2(3)$	$\{2,3\}$	$2,3 \in \tau$	—	$3 \in \tau, 2 \notin \tau$	$3 \notin \tau$

Напомним, что $q = p^{2^k \cdot m}$, где p — простое число и m — нечетное число. Положим $n = 2^k \cdot m$. Докажем, что $L_2(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено условие $(*)$:

$(*_1)$ $L_2(q)$ — π-группа

или

$(*_2)$ $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ и $L_2(p^t) \in D_\pi$ для любого $t \mid n$.

Докажем необходимость условия $(*)$ для того, чтобы группа $L_2(q)$ обладала свойством W_π.

Согласно п. (8) леммы 3 для любого $t \mid n$ группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изомофную $L_2(p^t)$. Поэтому из условия $L_2(q) \in W_\pi$ следует, что $L_2(p^t) \in D_\pi$ для любого $t \mid n$.

Допустим, что $A_5 \leq L_2(q)$. Тогда из условия $L_2(q) \in W_\pi$ вытекает, что $A_5 \in D_\pi$. В силу замечания после леммы 4 это означает, что $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ или $\{2,3,5\} \subseteq \tau$. Последнее с учетом леммы 4 выполняется для $L_2(q) \in D_\pi$ в том и только том случае, когда $\pi(L_2(q)) \subseteq \pi$, т. е. выполнено $(*_1)$. Если же $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$, то с учетом сказанного в предыдущем абзаце выполнено $(*_2)$.

Допустим теперь, что $L_2(q)$ не содержит подгруппы, изоморфной A_5, т. е. $5 \notin \pi(L_2(q))$ (см. лемму 3). Тогда согласно лемме 4 условие $L_2(q) \in W_\pi$ влечет, что либо $\{2,3\} \subseteq \tau$ и тем самым выполнено условие $(*_1)$, либо $|\tau \cap \{2,3\}| = |\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ и с учетом сказанного выполнено $(*_2)$. Необходимость установлена. Докажем достаточность.

Условие $(*_1)$ очевидно достаточно. Кроме того, из леммы 1 следует, что $L_2(q) \in W_\pi$ тогда и только тогда, когда все неразрешимые подгруппы группы $L_2(q)$ обладают свойством D_π. В качестве таковых согласно лемме 3 могут возникнуть только A_5 и подполевые подгруппы (группы из пп. (8), (9) леммы 3). Требование $|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1$ в условии $(*_2)$ означает, что $A_5 \in D_\pi$, а из того, что $L_2(p^t) \in D_\pi$ для любого $t \mid n$, следует, что все неабелевы композиционные факторы подполевых подгрупп обладают свойством D_π и тем самым этим свойством обладают сами подполевые подгруппы (см. лемму 2). Достаточность условия $(*)$ установлена.

Таким образом, теорема будет доказана, если установим, что условие $(*)$ равносильно выполнению одного из условий (W_1)–(W_4). Поскольку $(*_1)$ — это в точности условие (W_1), будем доказывать эквивалентность

$$(*_2) \quad \Leftrightarrow \quad (W_2) \vee (W_3) \vee (W_4). \tag{1}$$

Оставшаяся часть доказательства разбита на две части, представляющие собой обоснование необходимости $(\Rightarrow)$ и достаточности $(\Leftarrow)$ дизъюнкции $(W_2) \vee (W_3) \vee (W_4)$ в эквивалентности (1).

В случае $|\tau| \le 1$, во-первых, выполнено одно из условий (W_2)–(W_4), а во-вторых, $L_2(q) \in W_\pi$, т. е. эквивалентность (1) имеет место. Поэтому в дальнейшем, если не оговорено особо, будем считать, что $|\tau| > 1$.

Необходимость. Случай 1: $p \in \pi$. Если $p = 2$, то в соответствии с леммой 4 и сделанными ранее предположениями группа $L_2(q)$ обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда $\tau = \{2\}$, вопреки предположению о том, что $|\tau| > 1$.

Допустим теперь, что $p \ne 2$. Тогда для $L_2(q)$ выполнено условие (D_2) в лемме 4 и множество τ состоит только из нечетных чисел. Покажем, что для справедливости условия $(*_2)$ необходимо, чтобы выполнялось (W_3). От противного: пусть утверждение (W_3) неверно. Тогда существует число $r \in \tau$ такое, что

$$r \notin \{p\} \cup \pi(q_0 - 1).$$

Ввиду условия (D_2) имеем $r \in \pi(q-1) \setminus \pi(q_0 - 1)$. Число $\operatorname{ord}_r q_0$ делит 2^k, так как $q_0^{2^k} = q$ сравнимо с 1 по модулю r. Значит, $\operatorname{ord}_r q_0 = 2^c$ для некоторого числа $c \ge 0$, причем $c \ne 0$, поскольку иначе $r \in \pi(q_0 - 1)$. Число r делит $q_0^{2^c} - 1$, откуда

$$r \in \pi \cap \pi\bigl(L_2\bigl(q_0^{2^{c-1}}\bigr)\bigr)$$

и r не делит $q_0^{2^{c-1}} - 1$ по определению $\operatorname{ord}_r q_0$. Но так как $p \in \pi$, для $L_2\bigl(q_0^{2^{c-1}}\bigr)$ справедливо условие (D_2) в лемме 4, означающее, что r делит $q_0^{2^{c-1}} - 1$; противоречие.

Случай 2: $p \notin \pi$. В рассматриваемом случае $L_2(q) \in D_\pi$ означает справедливость условия (D_3) леммы 4, т. е. $2, p \notin \pi$ и $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ для некоторого числа $\varepsilon = \pm 1$. Поскольку $L_2(p^t) \in D_\pi$ для любого $t \mid n$, из сказанного следует, что для такого t группа $L_2(p^t)$ также удовлетворяет условию (D_3) (даже если $|\pi \cap \pi(L_2(p^t))| \le 1$). Покажем, что выполняется условие (W_4).

Допустим, $\varepsilon = -1$. Заметим, что поскольку $2 \notin \pi$, любое число, принадлежащее τ, нечетно. Поэтому $\operatorname{ord}^*_r q_0 = \operatorname{ord}_r q_0$ для любого $r \in \tau$. Так как

$$\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon) = \pi(q+1) = \pi\bigl(q_0^{2^k} + 1\bigr) \subseteq \pi\bigl(q_0^{2^{k+1}} - 1\bigr),$$

можем заключить, что для любого числа $r \in \tau$ справедливо соотношение

$$\operatorname{ord}_r q_0 \mid 2^{k+1}.$$

Допустим, что существуют число $r \in \tau$ и неотрицательное число c такие, что

$$\operatorname{ord}_r q_0 = 2^c < 2^{k+1}.$$

Тогда, во-первых, r делит $q_0^{2^c} - 1$ и, во-вторых, $c < k+1$, т. е. $c \le k$. Отсюда следует, что r делит $q_0^{2^k} - 1 = q - 1$. Поскольку r нечетно, это противоречит тому, что $\tau \subseteq \pi(q+1)$. Значит, для любых $r, s \in \tau$ имеет место равенство $\operatorname{ord}^*_r q_0 = \operatorname{ord}^*_s q_0 = 2^{k+1}$ и условие (W_4) в случае $\varepsilon = -1$ выполнено.

Пусть теперь $\varepsilon = 1$. Предположим, что условие (W_4) неверно, т. е. существуют числа $r, s \in \tau$ такие, что $\operatorname{ord}^*_r q_0 \ne \operatorname{ord}^*_s q_0$. Так как $2 \notin \pi$, вновь заключаем, что $\operatorname{ord}^*_r q_0 = \operatorname{ord}_r q_0$ и $\operatorname{ord}^*_s q_0 = \operatorname{ord}_s q_0$. Числа $\operatorname{ord}_r q_0$ и $\operatorname{ord}_s q_0$ делят 2^k, так как число $q_0^{2^k} = q$ сравнимо с 1 по модулям r и s. Положим

$$\operatorname{ord}_r q_0 = 2^a \quad \text{и} \quad \operatorname{ord}_s q_0 = 2^b$$

для некоторых различных неотрицательных целых чисел a и b. Можем считать, что $a < b$, т. е. $a \le b-1$. Тогда $r \mid q_0^{2^a}-1$ и потому $r \mid q_0^{2^{b-1}}-1$. Кроме того, s делит число

$$q_0^{2^b}-1=\bigl(q_0^{2^{b-1}}-1\bigr)\bigl(q_0^{2^{b-1}}+1\bigr)$$

и не делит $q_0^{2^{b-1}}-1$ по определению $\operatorname{ord}_s q_0$. Следовательно, $s \mid q_0^{2^{b-1}}+1$. Тем самым $r,s \in \pi \cap \pi\bigl(L_2\bigl(q_0^{2^{b-1}}\bigr)\bigr)$. Теперь, с одной стороны, для $L_2\bigl(q_0^{2^{b-1}}\bigr)$ имеет место (D_3), а с другой стороны, $r \in \pi\bigl(q_0^{2^{b-1}}-1\bigr)$ и $s \in \pi\bigl(q_0^{2^{b-1}}+1\bigr)$ вопреки (D_3); противоречие.

Случай 3: $2 \in \pi$, $p \notin \pi$. В рассматриваемом случае выполнено условие (D_4): $2 \in \pi$, $3, p \notin \pi$ и $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $4 \mid q-\varepsilon$. Ясно также, что число p должно быть нечетным. Так как

$$2 \in \pi \cap \pi(L_2(p^t)) \quad \text{и} \quad L_2(p^t) \in D_\pi \quad \text{для любого } t \mid n,$$

заключаем, что для всех таких t группа $L_2(p^t)$ удовлетворяет условию (D_4) (даже если $\pi \cap \pi(L_2(p^t)) = \{2\}$). Покажем, что выполняется условие (W_4).

Если $\varepsilon = -1$, то из соотношения

$$4 \mid q-\varepsilon = q+1$$

следует, что число n нечетно и тем самым $q = q_0$. Включение $\tau \subseteq \pi(q+1)$ эквивалентно тому, что для любых чисел $r,s \in \tau$ выполнено соотношение $\operatorname{ord}_r^* q = \operatorname{ord}_s^* q = 2$, поэтому условие (W_4) в данном случае выполнено.

Пусть теперь $\varepsilon = 1$. Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве условия (W_4) в случае $2, p \notin \pi$, заключаем, что найдется неотрицательное целое число c с тем свойством, что $\operatorname{ord}_r q_0 = 2^c$ для всех $r \in \tau \setminus \{2\}$ (иначе найдутся $r,s \in \tau \setminus \{2\}$ и $t \mid n$ такие, что $r \in \pi(p^t-1)$ и $s \in \pi(p^t+1)$ вопреки условию (D_4) для группы $L_2(p^t)$). Предположим, что $c > 1$. Тогда, как легко видеть, $\tau \subseteq \pi\bigl(q_0^{2^{c-1}}+1\bigr)$. Из того, что $|\tau| > 1$, следует, что τ содержит по крайней мере одно нечетное число. Заметим, что при $c > 1$ число $q_0^{2^{c-1}}$ является полным квадратом нечетного числа и потому сравнимо с 1 по модулю 4. Получили противоречие с условием (D_4) для группы $L_2\bigl(q_0^{2^{c-1}}\bigr)$. Следовательно, $c \in \{0,1\}$.

Из того, что квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4, вытекает также включение $\operatorname{ord}_2^* q_0 \in \{1,2\}$. К тому же с учетом сказанного в предыдущем абзаце справедливо также соотношение $\operatorname{ord}_r^* q_0 \in \{1,2\}$ для любого $r \in \tau$. Докажем, что $\operatorname{ord}_r^* q_0 = \operatorname{ord}_s^* q_0$ для всех $r,s \in \tau$.

Заметим, что для любого простого числа $r \in \tau$ выполнены эквивалентности

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_r^* q_0 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad r(2,r) \mid q_0-1, \\ \operatorname{ord}_r^* q_0 = 2 \quad &\Leftrightarrow \quad r(2,r) \mid q_0+1. \end{aligned} \tag{2}$$

Из вышесказанного следует, что

$$\tau \subseteq \pi(q_0-1) \cup \pi(q_0+1) \subseteq \pi(L_2(q_0)).$$

В рассматриваемом случае $2 \in \pi$ и $p \notin \pi$. Из условия $L_2(q_0) \in D_\pi$ и условия (D_4) заключаем, что существует $\varepsilon_0 = \pm 1$ такое, что $r(2,r) \mid q_0-\varepsilon_0$ для всех $r \in \tau$. С учетом эквивалентностей (2) это означает, что

$$\operatorname{ord}_r^* q_0 = \operatorname{ord}_s^* q_0 \quad \text{для всех} \quad r,s \in \tau.$$

Учитывая условия $p \notin \pi$ и $|\{2,3,5\} \cap \tau| \leq 1$, заключаем, что справедливо утверждение (W_4).

Достаточность. Легко заметить, что любое из условий (W_2)–(W_4) влечет неравенство

$$|\tau \cap \{2,3,5\}| \leq 1.$$

Поэтому импликация «$\Leftarrow$» будет доказана, если докажем, что выполнения любого из условий (W_2)–(W_4) достаточно для того, чтобы утверждение

$$L_2(p^t) \in D_\pi \quad \text{для всех } t \mid n$$

оказалось верным.

Достаточность (W_2). Из условия (W_2) следует, что $L_2(p^t) \in D_\pi$ для всех $t \mid n$ по теореме Силова. Отметим, что из тех же соображений $L_2(p^t) \in D_\pi$ во всех случаях, когда $|\tau| \leq 1$. Поэтому, как и ранее, в дальнейшем предполагаем, что $|\tau| > 1$.

Достаточность (W_3). Из условия (W_3) следует, что $2 \notin \pi$ и $p \in \pi$. Допустим, что существует число $t \mid n$ такое, что $L_2(p^t) \notin D_\pi$. Тогда в силу того, что $p \in \pi$, для $L_2(p^t)$ не выполняется условие (D_2) леммы 4, т. е. существует число $r \in \pi \cap \pi(L_2(p^t))$ такое, что $r \notin \{p\} \cup \pi(p^t - 1)$. Ясно, что $r \in \pi(p^t + 1)$. Число t имеет вид $t = 2^a \cdot b$, где $0 \leq a \leq k$ и $b \mid m$. С одной стороны,

$$r \mid p^{2^a \cdot b} + 1,$$

откуда

$$r \mid p^{2^a \cdot m} + 1 = q_0^{2^a} + 1.$$

С другой стороны, $r \in \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_0 - 1)$ согласно условию (W_3), причем $r \neq p$ в силу выбора r. Тогда

$$r \mid q_0 - 1 \quad \text{и потому} \quad r \mid q_0^{2^a} - 1.$$

Значит, $r \mid (q_0^{2^a} + 1) - (q_0^{2^a} - 1) = 2$. Но тогда $r = 2 \notin \pi$; противоречие.

Достаточность (W_4). Из условия (W_4) следует, что $p \notin \pi$ и поэтому любое число из $\pi \cap \pi(L_2(p^t))$ будет принадлежать либо $\pi(p^t - 1)$, либо $\pi(p^t + 1)$, причем обоим множествам одновременно может принадлежать только 2. Кроме того, утверждается, что $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$. Чтобы показать это, достаточно установить, что любые два нечетных простых числа из τ одновременно делят число $q-1$ или одновременно делят число $q+1$. В силу того, что согласно условию (W_4) для любых двух нечетных чисел $r, s \in \tau$ мультипликативные порядки числа q_0 по модулям r и s равны, для каждого натурального i выполнено также равенство $\operatorname{ord}_r q_0^i = \operatorname{ord}_s q_0^i$. И если бы существовали нечетные числа $r, s \in \tau$ такие, что $r \in \pi(q-1)$ и $s \in \pi(q+1)$, то была бы верна следующая цепочка равенств:

$$1 = \operatorname{ord}_r q = \operatorname{ord}_r q_0^{2^k} = \operatorname{ord}_s q_0^{2^k} = \operatorname{ord}_s q = 2;$$

противоречие.

В дальнейшем всюду число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$.

Допустим сначала, что $2 \notin \pi$. Предположим, что существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $L_2(p^t) \notin D_\pi$. В частности, для $L_2(p^t)$ не выполняется

условие (D_3) леммы 4. Поэтому, так как $2, p \notin \pi$, найдутся (нечетные) числа $r, s \in \pi \cap \pi(L_2(p^t))$ такие, что $r \in \pi(p^t - 1)$ и $s \in \pi(p^t + 1)$. В силу условия (W_4) возможны два случая.

Первый случай: $\varepsilon = 1$. Тогда $r, s \in \tau \subseteq \pi(q-1)$. Из условия (W_4) и из нечетности чисел r и s следует, что $\operatorname{ord}_r q_0 = \operatorname{ord}_s q_0 = 2^c$ для некоторого $0 \le c \le k$. Имеем $t = 2^a \cdot b$, где $0 \le a \le k$ и $b \mid m$. Из того, что

$$s \mid p^{2^a \cdot b} + 1 \text{ и } r \mid p^{2^a \cdot b} - 1,$$

вытекают соотношения

$$s \mid p^{2^a \cdot m} + 1 = q_0^{2^a} + 1 \text{ и } r \mid p^{2^a \cdot m} - 1 = q_0^{2^a} - 1.$$

Из сказанного следует, что

$$2^c = \operatorname{ord}_r q_0 \le 2^a,$$

откуда $c \le a$. Поскольку $s \mid q_0^{2^c} - 1$, имеем $s \mid q_0^{2^a} - 1$. Значит, $s \mid (q_0^{2^a} + 1) - (q_0^{2^a} - 1) = 2$, следовательно, $s = 2 \notin \pi$; противоречие.

Второй случай: $\varepsilon = -1$. Тогда $r, s \in \tau \subseteq \pi(q+1)$. Так как число r делит $p^t - 1$, оно делит также $p^n - 1 = q - 1$. Но тогда r делит одновременно $q - 1$ и $q + 1$, что невозможно, так как $2 \notin \pi$; противоречие.

Тем самым доказано, что если $2 \notin \pi$, то из условия (W_4) следует $(*_2)$.

Теперь допустим, что $2 \in \pi$. Тогда с учетом условия (W_4) имеем $3, p \notin \pi$ и $p \ne 2$. Можно считать, что $\tau \setminus \{2\} \ne \varnothing$. Заметим также, что $\operatorname{ord}_2^* q_0 \in \{1, 2\}$, и с учетом эквивалентностей (2) условие (W_4) означает, что либо $\tau \subseteq \pi(q_0 - 1)$ и $4 \mid q_0 - 1$, либо $\tau \subseteq \pi(q_0 + 1)$ и $4 \mid q_0 + 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда $\varepsilon = 1$. В соответствии со сделанным замечанием разберем два возможных случая.

Первый случай: $\tau \subseteq \pi(q_0 - 1)$ и $4 \mid q_0 - 1$. С одной стороны, $4 \mid p^2 - 1$ в силу нечетности p и число $\operatorname{ord}_4 p$ делит 2. С другой стороны, число $\operatorname{ord}_4 p$ делит m, так как $p^m = q_0$ сравнимо с 1 по модулю 4. Поскольку m нечетно, заключаем, что $\operatorname{ord}_4 p = 1$. Значит, 4 делит число $p - 1$ и, следовательно, число $p^t - 1$ для любого $t \mid n$. Учитывая, что $\tau \subseteq \pi(q_0 - 1)$, и повторяя рассуждения, проделанные при доказательстве достаточности условия (W_3), получаем включение

$$\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1) \quad \text{для любого} \quad t \mid n.$$

Значит, для всех групп $L_2(p^t)$, где $t \mid n$, выполнено условие (D_4) леммы 4 и потому справедливо условие $(*_2)$.

Второй случай: $\tau \subseteq \pi(q_0 + 1)$ и $4 \mid q_0 + 1$. Очевидно, что тогда число n должно быть четным (иначе число ε было бы равно -1). Несложно понять также, что если $t \mid n$ и t нечетно, то $t \mid m$, откуда $\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t + 1)$ и $4 \mid p^t + 1$. Докажем, что если t четно и $t \mid n$, то $\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1)$ и $4 \mid p^t - 1$. Последнее верно в силу того, что квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4. Предположим, что существует некоторое число $t \mid n$, для которого $\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \not\subseteq \pi(p^t - 1)$. Тогда существует нечетное число $r \in \pi \cap \pi(L_2(p^t))$ такое, что $r \in \pi(p^t + 1)$. Число t запишем в виде $t = 2^a \cdot b$, где $1 \le a \le k$ и $b \mid m$. Из того, что r делит число $p^{2^a \cdot b} + 1$, следует, что r делит также

$$p^{2^a \cdot m} + 1 = q_0^{2^a} + 1.$$

Но в силу условий $a \geq 1$ и $r \in \pi(q_0+1)$ число r будет делителем числа $q_0^{2^a}-1$. Тем самым r делит одновременно числа $q_0^{2^a}-1$ и $q_0^{2^a}+1$, что невозможно, так как r нечетно; противоречие.

Из сказанного следует, что в рассматриваемом случае для любого $t \mid n$ выполнены соотношения

$$\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t-\varepsilon_t) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t-\varepsilon_t, \quad \text{где } \varepsilon_t = (-1)^t.$$

Поэтому для любой группы $L_2(p^t)$, где $t \mid n$, выполняется условие (D_4) леммы 4, откуда следует $(*_2)$.

Пусть, наконец, $\varepsilon = -1$. Ситуация, когда $\tau \subseteq \pi(q_0-1)$, невозможна, так как иначе множество τ содержалось бы в $\pi(q-1)$ вопреки тому, что $\varepsilon = -1$. Следовательно, $\tau \subseteq \pi(q_0+1)$ и 4 делит q_0+1. Отметим, что число n должно быть нечетным, т. е. $q = q_0$, поскольку в противном случае были бы справедливы соотношения

$$\tau \subseteq \pi(q_0+1) \subseteq \pi(q_0^2-1) \subseteq \pi(q-1).$$

Поэтому $\tau \subseteq \pi(q_0+1) = \pi(q+1)$. Отсюда и из нечетности n следует, что для любого $t \mid n$ никакое число из $\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \setminus \{2\}$ не делит p^t-1. Кроме того, $4 \mid p+1$, так как иначе число $\operatorname{ord}_4 p$ равнялось бы 1, откуда бы следовало, что 4 делит $q-1$, а это противоречило бы тому, что 4 делит число $q_0+1 = q+1$. Значит, для любого $t \mid n$ имеют место соотношения

$$\pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t+1) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t+1,$$

которые с учетом того, что $2 \in \pi$ и $3, p \notin \pi$, означают справедливость для $L_2(p^t)$ условия (D_4) в лемме 4. Значит, $L_2(p^t) \in D_\pi$ и выполнено условие $(*_2)$.

Теорема доказана. $\square$

Благодарности. Авторы благодарны А. А. Бутурлакину и рецензенту за внимательное чтение рукописи и замечания, позволившие улучшить ее первоначальный вариант.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 286–304.
2. *Wielandt H.* Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
3. *Hall P.* A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3. P. 98–105.
4. *Hall P.* A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12. P. 198–200.
5. *Wielandt H.* Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979. Proc. Sympos. Pure Math. Providence RI: Am. Math. Soc., 1980. V. 37. P. 161–173.
6. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
7. *Манзаева Н. Ч.* Решение проблемы Виланда для спорадических групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 294–305.
8. *Ревин Д. О.* Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
9. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
10. *Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О.* О наследуемости свойства D_π подгруппами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 44–52.

11. *Huppert B.* Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

Поступила в редакцию 10 апреля 2024 г.
После доработки 11 июня 2024 г.
Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Ревин Данила Олегович (ORCID 0000-0002-8601-0706)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
revin@math.nsc.ru

Шепелев Виталий Денисович (ORCID 0000-0002-8411-2805)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
v.shepelev@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.957

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение переноса, содержащее две нелинейности и коэффициент $q(\mathbf{x})$ при младшем нелинейном члене, зависящий от двух или трех пространственных переменных. Изучается прямая задача для этого уравнения с данными на части боковой поверхности цилиндрической области. Решение строится в явном виде. Доказывается единственность решения. Ставится задача нахождения коэффициента $q(\mathbf{x})$ по некоторой информации о решении прямой задачи. Показывается, что обратная задача редуцируется к задаче рентгеновской томографии. Это открывает путь ее эффективного численного решения.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.518

Ключевые слова: нелинейное уравнение переноса, обратная задача, томография, единственность.

1. Введение

Пусть

$$B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| \le R\},\ n = 2, 3,\ R > 0, \quad S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \,|\, |\mathbf{x}| = R\},$$

$$\nu = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ n = 2; \quad \nu = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0),\ n = 3,$$

где φ — некоторый фиксированный угол. Определим

$$S_-(\nu) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \cdot \nu \le 0\}, \quad S_+(\nu) = \{\mathbf{x} \in S \mid \mathbf{x} \cdot \nu > 0\}.$$

Рассмотрим уравнение

$$u_t + u\,\nu \cdot \nabla u + q(\mathbf{x}) u^m = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in B \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

в котором $q(\mathbf{x})$ — непрерывно дифференцируемая в области $\overline{B} = B \cup S$ функция, m — вещественное число. Присоединим к уравнению (1) условие

$$u|_{S_-(\nu)} = A, \quad (\mathbf{x}, t) \in S_-\ (\nu) \times [0, T]. \tag{2}$$

Здесь A и T — положительные постоянные.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

© 2024 Романов В. Г.

Прямая задача. *При заданных $q(\mathbf{x})$, ν, m и A найти функцию $u(\mathbf{x},t)$ как решение задачи* (1), (2) *в области $\overline{B}\times\mathbb{R}$ там, где это возможно.*

Наряду с этой задачей будет рассмотрена обратная задача, заключающаяся в построении функции $q(\mathbf{x})$ в области $\overline{B}$ по информации о решении прямой задачи для $\mathbf{x}\in S_+(\nu)$ и некоторого множества $\nu=\nu(\varphi)$. Более точная постановка задачи будет сформулирована в разд. 3.

Обратные задачи для нелинейных уравнений начали интенсивно изучаться в последнее время. В [1–5] были изучены задачи, в которых уравнения гиперболического типа рассматриваются на лоренцевом многообразии, а сами уравнения являются квазилинейными. При этом изучены задачи определения лоренцевой метрики либо коэффициентов при нелинейностях. В работе [5] рассмотрена задача для системы нелинейных уравнений теории упругости. В [6–11] изучены обратные задачи определения коэффициентов нелинейного волнового уравнения. В [12–15] исследованы задачи определения коэффициентов, входящих в волновое уравнение, содержащее одну или две нелинейности. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны. В статье [16] изучена одномерная обратная задача определения коэффициента, стоящего при нелинейности в системе уравнений электродинамики с нелинейным поглощением. Найдены условия, при выполнении которых имеет место теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. Получена также глобальная оценка устойчивости решений задачи.

В настоящей работе изучается обратная задача определения коэффициента $q(\mathbf{x})$, входящего в уравнение (1). В разд. 2 дается анализ решения прямой задачи (1), (2), выписывается явный вид решения. На его основе формулируется и исследуется обратная задача. Решение задачи определения искомой функции $q(\mathbf{x})$ сводится к классической задаче рентгеновской томографии об определении функции через интегралы от нее вдоль всевозможных прямых линий, лежащих в плоскостях ортогональных оси x_3. Насколько известно автору, все результаты статьи новые.

2. Анализ решения прямой задачи

Для задачи (1), (2) имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функция $q(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема в области $\overline{B}$ и для нее выполнено условие*

$$2|2-m|R\|q\|_{C(\overline{B})}<A^{2-m}. \tag{3}$$

Тогда существует единственное непрерывно дифференцируемое положительное решение задачи (1), (2) *и это решение дается формулой*

$$u(\mathbf{x},t)=\begin{cases} A\exp\Bigl(-\int\limits_0^{\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)} q(\mathbf{x}+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\Bigr), & m=2,\\ \Bigl(A^{2-m}-(2-m)\int\limits_0^{\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)} q(\mathbf{x}^0+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\Bigr)^{1/(2-m)}, & m\neq 2,\end{cases} \tag{4}$$

$$(\mathbf{x},t)\in D=\bigcup_{t^0\in[0,T]}\Sigma(t_0),\ \Sigma(t_0)=\{(\mathbf{x},t)\mid \mathbf{x}\in\overline{B},t\in[t^0,t^0+\omega(\mathbf{x},\nu)]\},\ t^0\in[0,T],$$

в которой

$$s(\mathbf{x},\nu) = (\mathbf{x}\cdot\nu) + \sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}, \tag{5}$$

функция $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$ *является обратной по первому аргументу к функции* $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$, *определяемой формулой*

$$\psi(s,\mathbf{x},\nu) = \begin{cases} \frac{1}{A}\int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\right)ds'', & m=2,\\ \int\limits_0^s \left(A^{2-m} - (2-m)\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0+(s'-s(\mathbf{x},\nu))\nu)\,ds'\right)^{1/(m-2)} ds'', & m\neq 2, \end{cases} \tag{6}$$

$\mathbf{x}\in\overline{B},\ s\in[0,2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2+R^2-|\mathbf{x}|^2}]$. $\omega(\mathbf{x},\nu) = \psi(2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2+R^2-|\mathbf{x}|^2},\mathbf{x},\nu)$.

Доказательство. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u(\mathbf{x},t)\nu, \quad \frac{du}{dt} = -q(\mathbf{x})u^m(\mathbf{x},t) \tag{7}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{x}|_{t=t^0} = \mathbf{x}^0 \in S_-(\nu), \quad u|_{t=t^0} = A, \quad t^0\in[0,T]. \tag{8}$$

Соотношения (7), (8) определяют интегральные линии уравнения (1), выходящие из точек $(\mathbf{x}^0,t^0)\in S_-(\nu)\times[0,T]$, и значения функции $u(\mathbf{x},t)$ вдоль этих линий. Проекции интегральных линий на пространство $\mathbb{R}^n$ представляют собой отрезки прямых линий

$$L(\mathbf{x}^0,\nu) = \{\mathbf{x}^0+s\nu,\ s=[0,-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu)]\},$$

содержащиеся в $\overline{B}$, выходящие из точек $\mathbf{x}^0\in S_-(\nu)$ в направлении ν. Вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$ параметр s является функцией t. В связи с этим уравнения (7) вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$ можно записать в виде

$$\frac{ds}{dt} = u(\mathbf{x}^0+s(t)\nu,t)\nu, \quad \frac{du}{dt} = -q(\mathbf{x}^0+s(t)\nu)u^m(\mathbf{x}^0+s(t)\nu,t). \tag{9}$$

К уравнениям (9) надо добавить начальные условия

$$s|_{t=t^0} = 0, \quad u|_{t=t^0} = A, \quad t^0\in[0,T]. \tag{10}$$

Чтобы проинтегрировать систему уравнений (9), (10) удобно рассматривать t как функцию s, т. е. $t=t(s)$, временно опуская зависимость этой функции от $\mathbf{x}^0$, t^0 и ν. Тогда уравнения (9) приводят к уравнениям

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{u(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s))}, \quad \frac{du}{ds} = -q(\mathbf{x}^0+s\nu)u^{m-1}(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s)). \tag{11}$$

Условия (10) можно записать в виде

$$t|_{s=0} = t^0, \quad u|_{s=0} = A. \tag{12}$$

Если $m=2$, то из второго уравнения (11) и начальных данных (12) следует формула для отыскания функции $u(x,t)$ вдоль $L(\mathbf{x}^0,\nu)$:

$$u(\mathbf{x}^0+s\nu,t(s)) = A\exp\left(-\int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0+s'\nu)\,ds'\right), \quad s\in[0,-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu)]. \tag{13}$$

Тогда

$$t(s) = t(s, \mathbf{x}^0, t^0, \nu) = t^0 + \frac{1}{A} \int\limits_0^s \exp\left(\int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds' \right) ds'', \quad s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]. \tag{14}$$

Если $m \neq 2$, то уравнение для $u(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s))$ запишем в виде

$$\frac{du}{u^{m-1}} = -q(\mathbf{x}^0 + s\nu).$$

Интегрируя его с учетом начальных данных, получаем уравнение

$$u^{2-m}(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s)) - A^{2-m} = -(2-m) \int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds',$$

из которого находим, что

$$u(\mathbf{x}^0 + s\nu, t(s)) = \left(A^{2-m} - (2-m) \int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds' \right)^{1/(2-m)}, \quad s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]. \tag{15}$$

Уравнение для отыскания функции $t(s)$ тогда принимает вид

$$\frac{dt}{ds} = \left(A^{2-m} - (2-m) \int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds' \right)^{1/(m-2)}.$$

Интегрируя его, приходим к формуле

$$t(s) = t(s, \mathbf{x}^0, t^0, \nu) = t^0 + \int\limits_0^s \left(A^{2-m} - (2-m) \int\limits_0^{s''} q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds' \right)^{1/(m-2)} ds'', \tag{16}$$

$s \in [0, -2(\mathbf{x}^0 \cdot \nu)]$. Заметим, что при выполнении условия (3) формулы (15) и (16) корректны, так как

$$A^{2-m} - (2-m) \int\limits_0^s q(\mathbf{x}^0 + s'\nu)\, ds' \geq A^{2-m} - |2-m| s \|q\|_{C(\overline{B})}$$
$$\geq A^{2-m} - 2|2-m| R \|q\|_{C(\overline{B})} > 0.$$

Формулы (13)–(16) определяют параметрическое задание функции $u(\mathbf{x}, t)$. Чтобы представить ее в виде (4)–(6) надо вначале выразить $\mathbf{x}^0$ через $\mathbf{x}$ и ν. Это делается с помощью формулы

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{x} - s(\mathbf{x}, \nu)\nu. \tag{17}$$

В этой формуле $s(\mathbf{x}, \nu)$ определяется равенством (5). После этого надо подставить выражение для $\mathbf{x}^0$ из формулы (17) в равенства (13)–(16). В результате равенства (14), (16) запишутся в виде

$$t = t^0 + \psi(s, \mathbf{x}, \nu),$$

в котором функция $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$ определена равенством (6). Эта функция монотонно растет с ростом s. При этом $s \in [0, 2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}]$, так как $-2(\mathbf{x}^0\cdot\nu) = 2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2}$. В силу монотонности функции $\psi(s,\mathbf{x},\nu)$ по первому аргументу она имеет обратную $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$ по этому аргументу для $t \in [t^0, t^0+\omega(\mathbf{x},\nu)]$, $\omega(\mathbf{x},\nu) = \psi(2\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\nu)^2 + R^2 - |\mathbf{x}|^2},\mathbf{x},\nu)$. Подставляя в формулы (13), (15) вместо s функцию $\psi^{-1}(t-t^0,\mathbf{x},\nu)$, получаем формулу (4). Непрерывная дифференцируемость функции $u(\mathbf{x},t)$ в области

$$D = \bigcup_{t^0\in[0,T]} \Sigma(t_0), \quad \Sigma(t_0) = \{(\mathbf{x},t) \mid \mathbf{x}\in\overline{B},\ t\in[t^0, t^0+\omega(\mathbf{x},\nu)]\},$$

достаточно очевидна.

Докажем единственность решения задачи (1), (2). Допустим, что существуют два ее решения $u_1(\mathbf{x},t)$ и $u_2(\mathbf{x},t)$. Обозначим

$$\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = u_1(\mathbf{x},t) - u_2(\mathbf{x},t).$$

Из уравнения (1) следует равенство

$$\widetilde{u}_t + u_1\nabla\widetilde{u}\cdot\nu + \widetilde{u}\,\nabla u_2\cdot\nu + q(\mathbf{x})\big(u_1^m - u_2^m\big) = 0. \tag{18}$$

Представим разность $u_1^m - u_2^m$ в виде

$$u_1^m - u_2^m = m\int\limits_{u_2}^{u_1} z^{m-1}\,dz = \widetilde{u}\,m\int\limits_0^1 [u_2(1-z') + u_1 z']^{m-1}\,dz' =: \widetilde{u}\rho(u_1,u_2).$$

Тогда равенство (18) можно переписать в виде

$$\widetilde{u}_t + u_1(\mathbf{x},t)\,\nabla\widetilde{u}\cdot\nu + \widetilde{u}\,\Phi(\mathbf{x},t) = 0, \tag{19}$$

в котором

$$\Phi(\mathbf{x},t) = \nabla u_2(\mathbf{x},t)\cdot\nu + q(\mathbf{x})\,\rho(u_1(\mathbf{x},t), u_2(\mathbf{x},t)).$$

Граничное условие (2) приводит к однородному условию

$$\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = 0, \quad (\mathbf{x},t)\in S_-(\nu)\times[0,T]. \tag{20}$$

Рассмотрим интегральные кривые уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = u_1(\mathbf{x},t)\nu, \tag{21}$$

выходящие из точек $(\mathbf{x},t)\in S_-(\nu)\times[0,T]$. Вдоль этих кривых уравнение (19) записывается в виде линейного однородного уравнения

$$\frac{d\widetilde{u}}{dt} = \widetilde{u}\,\Phi(\mathbf{x},t). \tag{22}$$

Из уравнения (22) и нулевого начального условия (20) следует, что $\widetilde{u}(\mathbf{x},t) = 0$ вдоль любой интегральной линии уравнения (21), т. е. $u_1(\mathbf{x},t) = u_2(\mathbf{x},t)$. Совокупность интегральных линий образует область D, определенную выше. Отсюда следует единственность решения прямой задачи во всей области D. $\square$

3. Постановка обратной задачи и ее анализ

В этом разделе будем предполагать, что вектор ν может меняться в зависимости от угла φ, который пробегает промежуток $[0,\pi)$. Таким образом, $\nu=\nu(\varphi)$. Как и в разд. 1, примем, что $\nu=\nu(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi)$, если $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$, и $\nu=\nu(\varphi)=(\cos\varphi,\sin\varphi,0)$, если $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$. Рассмотрим формулу (4). Положим в ней $t^0=0$ и $\mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi))$. Тогда

$$s(\mathbf{x},\nu)=2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)),\quad \psi^{-1}(t,\mathbf{x},\nu)=2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)).$$

Обозначим

$$\partial\Sigma(0,\varphi)=\{(\mathbf{x},t)\mid \mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi)),\ t=\omega(2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)),\mathbf{x},\nu(\varphi))\}.$$

Тогда формула (4) примет вид

$$u_0(\mathbf{x},t,\varphi)=\begin{cases} A\exp\Bigl(-\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}+(s'-2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)))\nu)\,ds'\Bigr), & m=2,\\ \Bigl(A^{2-m}-(2-m)\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}^0+(s'-2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi)))\nu)\,ds'\Bigr)^{1/(2-m)}, & m\neq 2,\end{cases}$$
$$(\mathbf{x},t)\in\partial\Sigma(0,\varphi). \tag{23}$$

Обратная задача. *Пусть для всех $\nu=\nu(\varphi)$, $\varphi\in[0,\pi)$, известны множества $\Sigma(0,\varphi)$ и функция*

$$u_0(\mathbf{x},t,\varphi),\quad (\mathbf{x},t)\in\Sigma(0,\varphi),\ \varphi\in[0,\pi).$$

Требуется найти $q(\mathbf{x})$ в области $\overline{B}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда функция $q(\mathbf{x})$ однозначно определяется в области $\overline{B}$ по заданной информации. Решение обратной задачи сводится при этом к обычной задаче рентгеновской томографии.*

Доказательство. Формула (23) позволяет вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{2(\mathbf{x}\cdot\nu(\varphi))} q(\mathbf{x}-s\nu(\varphi))\,ds=h(\mathbf{x},\varphi),\quad \mathbf{x}\in S_+(\nu(\varphi)),\ \varphi\in[0,\pi). \tag{24}$$

В случае двумерного пространства формула (24) определяет интегралы по прямым, соединяющим произвольную пару точек границы S области $\overline{B}$, а в случае трехмерного пространства по всевозможным прямым, лежащим в сечениях области $\overline{B}$ плоскостями, ортогональными оси x_3. И в том, и другом случаях обратная задача восстановления функции $q(\mathbf{x})$ по интегралам (24) является хорошо изученной задачей томографии, для решения которой существует большое число алгоритмов и программ. Впервые задача обращения интегрального преобразования типа (24) была решена австрийским математиком Иоганном Радоном (Johann Karl August Radon) в работе [17]. Он предложил явную формулу обращения, из которой следует и единственность решения уравнения (24) в классе непрерывных функций. Вычислительный алгоритм решения задачи рентгеновской томографии, отличный от алгоритма, следующего из формулы обращения Радона, был предложен Алланом Кормаком в статье [18] (см. также [19]). За разработку компьютерной томографии и создание первого компьютерного рентгеновского томографа А. Кормак и Г. Хаунсфилд (Godfrey Newbold Hounsfield) в 1979 г. были удостоены Нобелевской премии по физиологии и медицине. Различные алгоритмы и методы решения задач томографии изложены в книгах [20–22]. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G.* Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
2. *Lassas M., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.
3. *Lassas M.* Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Internat. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
4. *Hintz P., Uhlmann G.* Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.
5. *Hintz P., Uhlmann G., Zhai J.* An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Internat. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.
6. *Uhlmann G., Zhai J.* On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation // J. Math. Pures Appl. 2021. V. 153. P. 114–136.
7. *Wang Y., Zhou T.* Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
8. *Barreto A. S.* Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105.
9. *Barreto A. S., Stefanov P.* Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
10. *Lassas M., Liimatainen T., Potenciano-Machado L., Tyni T.* Uniqueness and stability of an inverse problem for a semi-linear wave equation // J. Differ. Equ. 2022. V. 337. P. 395–435.
11. *Barreto A.S., Uhlmann G., Wang Y.* Inverse scattering for critical semilinear wave equations // Pure Appl. Anal. 2022. V. 4, N 2. P. 191–223.
12. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 635–652.
13. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 560–576.
14. *Романов В. Г.* Обратная задача для волнового уравнения с двумя нелинейными членами // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 4. С. 508–520.
15. *Romanov V. G., Bugueva T. V.* An inverse problem for a nonlinear hyperbolic equation // Eurasian J. Math. Comp. Appl. 2024. V. 12, N 2. P. 134–154.
16. *Романов В. Г.* Одномерная обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 10. С. 1397–1411.
17. *Radon J.* Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten // Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften. 1917. Bd 29. S. 262–277.
18. *Cormack A. M.* Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications // J. Appl. Physics. 1963. V. 34. P. 2722–2727.
19. *Cormack A. M.* Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it // Nobel lectures in physiology or medicine 1971–1980. Singapore: World Sci. Publ. Co., 1992. P. 551–563.
20. *Deans S. R.* The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.
21. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я., Тимонов А. А.* Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987.
22. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии. М.: Мир, 1990.

Поступила в редакцию 29 июля 2024 г.
После доработки 30 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2024. Том 65, № 5

УДК 517.957

О ДИСКРЕТНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ, ОТВЕЧАЮЩИХ ПУЧКАМ БЕЗ КРУЧЕНИЯ НАД ПРИВОДИМЫМИ СПЕКТРАЛЬНЫМИ КРИВЫМИ

А. Сенинджер

Аннотация. Методами конечнозонного интегрирования построены решетки Дарбу — Егорова, отвечающие пучкам без кручения первого ранга над приводимыми сингулярными спектральными кривыми.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.519

Ключевые слова: метрика Дарбу — Егорова, решетка, Кричевер, система ортогональных координат.

1. Введение

В работах В. Е. Захарова [1] и И. М. Кричевера [2] методы теории интегрируемых систем были применены для построения ортогональных криволинейных координат к одной из классических задач дифференциальной геометрии [3]. Подход Кричевера позволяет с помощью функций Бейкера — Ахиезера строить системы координат, выраженные в терминах тэта-функций гладких спектральных кривых. В [4] метод Кричевера был расширен на приводимые сингулярные спектральные кривые, при этом было показано, как на этом пути получаются классические системы координат — полярная и сферическая. Недавно в [5] подход к исследованию [4] был расширен для случая пучков Бейкера — Ахиезера над сингулярными кривыми.

Предложенные методы были распространены на случай дискретных координат, удовлетворяющих условию Дарбу — Егорова. В [6] распространение было проведено для гладких спектральных кривых, а в [7] был получен дискретный аналог конструкции [4].

В данной статье методы работы [5] распространяются на случай дискретных координат путем расширения конструкции из [7] на случай, когда функция Бейкера — Ахиезера заменяется сечением Бейкера — Ахиезера некоторого пучка над сингулярной спектральной кривой.

Как показано в [8], метрики Дарбу — Егорова играют важную роль в теории фробениусовых многообразий.

Диагональная плоская метрика в $\mathbb{R}^n$

$$ds^2 = H_1^2(du^1)^2 + \cdots + H_n^2(du^n)^2$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00281, https://rscf.ru/project/24-11-00281/.

© 2024 Сенинджер А.

называется *метрикой Дарбу — Егорова*, если

$$\partial_{u^j} H_i^2 = \partial_{u^i} H_j^2, \quad i,j = 1,\dots,n. \tag{1}$$

Дискретные координаты задаются как решетки:

$$x : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R}^n.$$

В качестве дискретного аналога ортогональности координат было предложено рассматривать условие *циркулярности*: каждый элементарный четырехугольник с вершинами

$$x(u),\ T_i x(u),\ T_j x(u),\ T_i T_j x(u), \quad u \in \mathbb{Z}^n,\ i,j \in [\![1;n]\!],\ i \neq j,$$

где

$$T_i x(u^1,\dots,u^i,\dots,u^n) = x(u^1,\dots,u^i+1,\dots,u^n),$$

вписан в некоторую окружность.

В [6] показано, что дискретным аналогом условия (1) является условие ортогональности ребер:

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle = 0, \quad i,j \in [\![1;n]\!],\ i \neq j, \tag{2}$$

где

$$\Delta_i x(u) = T_i x(u) - x(u), \quad \Delta_j^- x(u) = T_j^{-1} x(u) - x(u)$$

и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — евклидово скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

Решетки, удовлетворяющие условиям циркулярности и (1), называются *решетками Дарбу — Егорова*

Решетка называется *планарной*, если четырехугольник с вершинами $x(u)$, $T_i x(u)$, $T_j x(u)$, $T_i T_j x(u)$ плоский для всех $i \neq j$. Заметим, что планарные решетки, удовлетворяющие (2), являются циркулярными.

2. Дискретные ортогональные координаты, отвечающие гладким спектральным кривым

Напомним конструкцию дискретных ортогональных координат по функции Бейкера — Ахиезера на гладкой спектральной кривой [6]. Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g с мероморфной функцией λ с простыми полюсами в точках $P_1,\dots,P_n$ и нулями в точках $Q_1,\dots,Q_n$. Обозначим через $P_1^\pm,\dots,P_n^\pm$ точки, удовлетворяющие условиям $\lambda(P) = \pm 1$. Рассмотрим также дивизоры

$$D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \dots + R_l.$$

Для дивизора D общего положения существует единственная функция $\psi(u,P)$ *Бейкера — Ахиезера*, удовлетворяющая условиям

(1) $\psi = (\lambda-1)^{-u^i}\big(\xi^i_{0,+} + \xi^i_{1,+}(\lambda-1) + \xi^i_{2,+}(\lambda-1)^2 + \dots\big)$ в окрестности P_i^+ и $\psi = (\lambda+1)^{u^i}\big(\xi^i_{0,-} + \xi^i_{1,-}(\lambda+1) + \xi^i_{2,-}(\lambda+1)^2 + \dots\big)$ в окрестности P_i^-;

(2) на $\Gamma \setminus \cup\{P_i^\pm\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами в γ_j, $j = 1,\dots,g+l-1$;

(3) $\psi(R_k) = d_k, k = 1,\dots,l$, и не все d_k равны 0[1)].

Функция ψ явно выражается в терминах тета-функции кривой Γ [6].

[1)] В [2] $d_k = 1$ с $k = 1,\dots,l$, однако в более общем случае, указанном здесь, все рассуждения остаются неизменными.

В [6] был получен следующий результат. *Пусть* Γ *— гладкая алгебраическая кривая рода* g *с голоморфной инволюцией* $\sigma : \Gamma \to \Gamma$ *такая, что* $\lambda \circ \sigma = -\lambda$. *Пусть дивизоры* D *и* R *не содержат фиксированных точек* σ, *и пусть существует дифференциал* Ω *на* Γ *такой, что*

$$(\Omega)_0 = P_1 + \cdots + P_n + D + \sigma(D), \quad (\Omega)_\infty = Q_1 + \cdots + Q_n + R + \sigma(R).$$

Тогда вектор-функция

$$x(u) = (\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\,\Omega}\ \psi(u, Q_1), \ldots, \sqrt{Res\,\mathrm{Q_n}\,\Omega}\ \psi(u, Q_n)), \quad u \in \mathbb{Z}^n, \tag{3}$$

определяет планарную решетку на $\mathbb{C}^n$, *т. е. четырехугольник с вершинами* $x(u)$, $T_i x(u)$, $T_j x(u)$, $T_i T_j x(u)$ *плоский для всех* $i \neq j$ *и удовлетворяет условию*

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad i, j \in [\![1; n]\!],\ i \neq j,$$

где $\langle (v^1, \ldots, v^n), (w^1, \ldots, w^n) \rangle_{\mathbb{C}} = v^1 w^1 + \cdots + v^n w^n$.

Решетка (3) в общем случае является комплексным числом. Если Γ допускает антиголоморфную инволюцию τ такую, что

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma,\ \tau(D) = D,\ \tau(R) = R,\ \tau(Q) = Q,\ \tau(P^{\pm}) = P^{\pm}, \quad i, j \in [\![1; n]\!],$$

и

$$\sqrt{\mathrm{Res}_{Q_1}\,\Omega}, \ldots, \sqrt{\mathrm{Res}_{Q_n}\,\Omega} \in \mathbb{R},$$

то решетка (3) вещественна и является решеткой Дарбу — Егорова.

3. Решетки Дарбу — Егорова и сечения Бейкера — Ахиезера

Пусть Γ — приводимая алгебраическая кривая, причем каждая компонента Γ_i изоморфна $\mathbb{C}P^1$, $i \in [\![1; n]\!]$. Для каждой компоненты Γ_i выберем комплексную координату $z_i \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Предположим, что точки пересечения компонент трансверсальны и значения функций z_i на пересекающихся компонентах в этих точках совпадают. Тогда функция

$$\lambda : z_i \to z_i$$

корректно определена на всей кривой Γ. Через

$$\sigma : z_i \to -z_i$$

обозначим голоморфную инволюцию, определенную на Γ.

Обозначим через P_i простые полюсы, а через Q_i — нули функции λ для $i \in [\![1; n]\!]$. Заметим, что в окрестности любой точки $s \in \Gamma \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ функция $\lambda - s$ является локальным параметром.

В нашем случае, как в [5], координаты задаются не функцией, а сечением Бейкера — Ахиезера ψ некоторого пучка, определенного условиями

$$\psi_i(a) = \eta \psi_j(a), \quad \psi_{\sigma(i)}(a) = \eta_\sigma \psi_{\sigma(j)}(a), \tag{4}$$

где параметры η, η_σ могут быть не равны единице. Здесь выражения вида ψ_k обозначают ограничения ψ на Γ_k.

Под дифференциалом Ω на Γ будем понимать множество мероморфных дифференциалов Ω_i на Γ_i, $i \in [\![1; n]\!]$, с полюсами во всех точках склеивания

$a \in \Gamma_i$ и $a \in \Gamma_j$ таким образом, что выполняются так называемые *условия регулярности*:

$$\eta\eta_\sigma \operatorname{Res}_a \Omega_i + \operatorname{Res}_a \Omega_j = 0, \quad \eta\eta_\sigma \operatorname{Res}_{\sigma(a)} \Omega_{\sigma(i)} + \operatorname{Res}_{\sigma(a)} \Omega_{\sigma(j)} = 0.$$

Далее воспользуемся конструкцией из [6]. Обозначим $P_i^\pm = \pm 1 \in \Gamma_i$. Определим

$$D = \gamma_1 + \dots + \gamma_{g+l-1}, \quad R = R_1 + \dots + R_l,$$

где g обозначает арифметический род.

Для дивизора D общего положения существует единственное сечение $\psi(u, P)$ пучка (4), удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $\psi = (\lambda - 1)^{-u^i}\big(\zeta_0^i + \zeta_1^i(\lambda - 1) + \zeta_2^i(\lambda - 1)^2 + \dots\big)$ в окрестности P_i^+ и $\psi = (\lambda + 1)^{u^i}\big(\xi_0^i + \xi_1^i(\lambda + 1) + \xi_2^i(\lambda + 1)^2 + \dots\big)$ в окрестности P_i^-;

(2) на $\Gamma \setminus \cup\{P_i^\pm\}$ функция ψ мероморфна с простыми полюсами в γ_j;

(3) $\psi(R_k) = d_k$ и не все d_k равны нулю одновременно.

Теорема 1. *Пусть существует дифференциал Ω на Γ такой, что*

$$(\Omega)_0 = P_1 + \dots + P_n + D + \sigma(D), \quad (\Omega)_\infty = Q_1 + \dots + Q_n + R + \sigma(R).$$

Тогда формула

$$x(u) = (\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega}\ \psi(u, Q_1), \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n} \Omega}\ \psi(u, Q_n)) \in \mathbb{C}^n, \quad u \in \mathbb{Z}^n, \tag{5}$$

определяет планарную решетку на $\mathbb{C}^n$ и удовлетворяет условию ортогональности:

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u) \rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad i, j \in [\![1; n]\!],\ i \neq j.$$

Если Γ допускает антиголоморфную инволюцию τ такую, что

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma,\ \tau(D) = D,\ \tau(R) = R,\ \tau(Q) = Q,\ \tau(P^\pm) = P^\pm, \quad i, j \in [\![1; n]\!],$$

и

$$\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1} \Omega}, \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n} \Omega} \in \mathbb{R},$$

то решетка (5) вещественна и является решеткой Дарбу — Егорова.

В условиях нормировки сечения Бейкера — Ахиезера можно выбрать любой набор $(d_1, \dots, d_l) \in \mathbb{R}^l$ такой, что $|d_1| + \dots + |d_l| \neq 0$.

Доказательство. Доказательство планарности (5) в случае гладкой алгебраической кривой [6] также работает в случае приводимой алгебраической кривой. Для произвольной пары $i, j \in [\![1; n]\!]$, $i \neq j$, рассмотрим разложение функции

$$y = \Delta_i \Delta_j \psi + \alpha_{ij} \Delta_i \psi + \beta_{ij} \Delta_j \psi \tag{6}$$

в точках P_k^+. Для i и j, не равных k, локальный параметр имеет следующее разложение по степеням $\lambda - 1$:

$$y = \big((\Delta_i \Delta_j + \alpha_{ij} \Delta_i + \beta_{ij} \Delta_j)\zeta_0^i\big)(\lambda - 1)^{-u^i} + \dots.$$

Имеем

$$\Delta_k \psi = T_k \zeta_0^k (\lambda - 1)^{-u^k - 1} + \big(-\zeta_0^k + T_k \zeta_1^k\big)(\lambda - 1)^{-u^k} + \dots.$$

Для $j \neq k$

$$\Delta_k \Delta_j \psi = T_k \Delta_j \zeta_0^k (\lambda - 1)^{-u^k - 1} + \big(-\Delta_j \zeta_0^k + T_k \Delta_j \zeta_1^k\big)(\lambda - 1)^{-u^k} + \dots.$$

Следовательно, когда

$$\alpha_{kj} = -\frac{T_k \Delta_j \zeta_0^k}{T_k \zeta_0^k}, \quad \beta_{ik} = -\frac{T_k \Delta_i \zeta_0^k}{T_k \zeta_0^k},$$

y удовлетворяет условию (1) из определения сечения Бейкера — Ахиезера в точках P^+ и то же самое относится к P^-.

Таким образом, y является сечением Бейкера — Ахиезера. Из ее свойства уникальности вытекает, что $y(u,P) = 0$ для всех $u \in \mathbb{Z}^n$, $P \in \Gamma$ и y равна нулю в точках нормировки. Следовательно, векторы $\Delta_i\psi$, $\Delta_j\psi$, $\Delta_i\Delta_j\psi$ линейно зависят от $\mathbb{C}$.

Докажем условие ортогональности (5) относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{C}}$. Покажем, что для $i \neq j$ дифференциал

$$\Omega_{ij} = (\lambda - 1)\Delta_i\psi(u,P)\Delta_j^-\psi(u,\sigma(P))\Omega$$

имеет полюсы только в точках из Q и точках склейки.

Полюсы функции $\lambda - 1$ в точках из P сокращаются с нулями дифференциала Ω. Полюсы дифференциала $\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi\Omega$ в точках $D + \sigma(D)$ и $R + \sigma(R)$ сокращаются с нулями самого дифференциала.

При $k \neq i,j$ в $P_k^{\pm}$ имеем

$$\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi = (\lambda-1)^{-u^k}(-\lambda+1)^{u^k}\big(\zeta_0^k\xi_0^k + O(\lambda-1) + \dots\big)$$

и полюсы этого дифференциала сокращаются.

В точках из $P_k^{\pm}$ сечения

$$\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi = (\lambda-1)^{-u^k}(-\lambda+1)^{u^k-1}\big(T_k\zeta_0^k\xi_0^k + O(\lambda-1) + \dots\big) \text{ при } k = i,$$

$$\Delta_i\psi\Delta_j^-\psi = (\lambda-1)^{-u^k-1}(-\lambda+1)^{u^k}\big(T_k^-\xi_0^k\zeta_0^k + O(\lambda-1) + \dots\big) \text{ при } k = j$$

имеют простой полюс, который сокращается с нулем функции $\lambda - 1$.

Так как дифференциалы Ω_{ij} регулярны в точках склейки и суммы их вычетов по Γ равны нулю, то

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{Q_k}\Omega_{ij} = -\sum_{k=1}^n \Delta_i\psi(u,Q_k)\Delta_j^-\psi(u,Q_k)\operatorname{Res}_{Q_k}\Omega$$
$$= -\sum_{k=1}^n \Delta_i x(u)\Delta_j^- x(u) = -\langle\Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}},$$

так что условие ортогональности выполнено.

Из определения λ, из того, что дивизоры D и R τ-инвариантны, и из единственности сечения Бейкера — Ахиезера следует, что

$$\psi(u,P) = \overline{\psi(u,\tau(P))},$$

и из

$$\sqrt{\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega}, \dots, \sqrt{\operatorname{Res}_{Q_n}\Omega} \in \mathbb{R}$$

вытекает равенство

$$x(u) = \overline{x(u)} \text{ при } u \in \mathbb{Z}^n.$$

Теорема доказана.

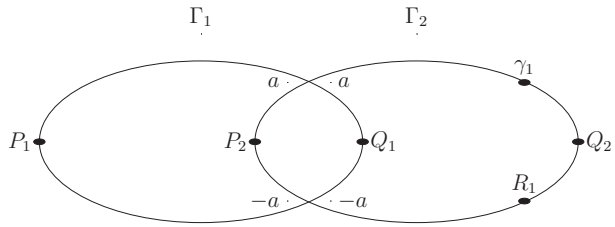


Рис. 1.

Пример 1. Пусть Γ состоит из компонент Γ_1 и Γ_2, изоморфных $\mathbb{C}P^1$, которые пересекаются, как показано на рис. 1.

Возьмем следующие спектральные данные:

$$P_1 = \infty,\ Q_1 = 0 \in \Gamma_1,\ P_2 = \infty,\ Q_2 = 0,\ R_1, \gamma_1 \in \Gamma_2.$$

Сечения Бейкера — Ахиезера задаются формулами

$$\psi_1(z_1) = \left(\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^{u^1} f_0, \quad \psi_2(z_2) = \left(\frac{z_2+1}{z_2-1}\right)^{u^2} \left(g_0 + \frac{g_1}{z_2-\gamma_1}\right).$$

Условия склейки и нормировки принимают вид

$$\psi_1(a) = \eta_1\psi_2(a), \quad \psi_1(-a) = \eta_2\psi_2(-a), \quad \psi_2(R_1) = \kappa.$$

из которого можно найти f_0, g_0, g_1.

Дифференциал Ω на Γ задается его ограничениями на компоненты:

$$\Omega_1 = -\frac{dz_1}{z_1\left(z_1^2-a^2\right)}, \quad \Omega_2 = -\frac{\left(z_2^2-\gamma_1^2\right)dz_2}{z_2\left(z_2^2-a^2\right)\left(z_2^2-R_1^2\right)}.$$

Коэффициенты, необходимые для получения координат (3), таковы:

$$\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega_1 = \frac{1}{a}, \quad \operatorname{Res}_{Q_2}\Omega_2 = \frac{\gamma_1}{aR_1}$$

Из условия регулярности Ω

$$\eta_1\eta_2 \operatorname{Res}_{\pm a}\Omega_1 + \operatorname{Res}_{\pm a}\Omega_2 = 0$$

следует, что

$$R_1 = \sqrt{a^2 + \frac{a^2-\gamma_1^2}{\xi}}, \quad \xi = \eta_1\eta_2.$$

Имеем координаты:

$$x_1 = \frac{\kappa\eta_2(1+\xi t^2)}{a}\frac{\mu^{u^1-u^2}\nu^{u^2}}{1+\eta_2^2t^2\mu^{2u^1-2u^2}}, \quad x_2 = \frac{\kappa\nu^{u^2}}{R_1}\frac{1+\xi t+\eta_2^2(t-t^2)\mu^{2u^1-2u^2}}{1+\eta_2^2t^2\mu^{2u^1-2u^2}},$$

где

$$\nu = \frac{1-R_1}{1+R_1}, \quad \mu = \frac{1+a}{1-a}, \quad t = \frac{a+R_1}{a+\gamma_1}.$$

Условие ортогональности принимает вид

$$\langle \Delta_i x(u), \Delta_j^- x(u)\rangle_{\mathbb{C}} = 0, \quad i \neq j,\ i,j \in \{1,2\}.$$

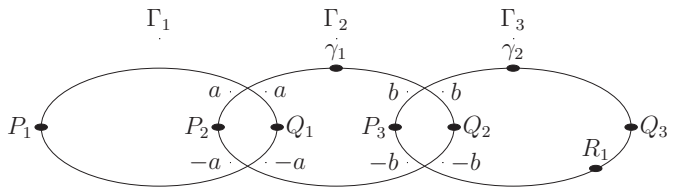


Рис. 2.

Пример 2. Пусть Γ состоит из компонент Γ_1, Γ_2 и Γ_3, изоморфных $\mathbb{C}P^1$, которые пересекаются, как показано на рис. 2.

Возьмем следующие спектральные данные:

$$P_1=\infty,\ Q_1=0\in\Gamma_1,\ P_2=\infty,\ Q_2=0,\ \gamma_1\in\Gamma_2,\ P_3=\infty,\ Q_3=0,\ \gamma_2,R_1\in\Gamma_3.$$

Сечения Бейкера — Ахиезера задаются формулами

$$\psi_1(z_1)=\left(\frac{z_1+1}{z_1-1}\right)^{u^1}f_0,\quad \psi_2(z_2)=\left(\frac{z_2+1}{z_2-1}\right)^{u^2}\left(g_0+\frac{g_1}{z_2-\gamma_1}\right),$$

$$\psi_3(z_3)=\left(\frac{z_3+1}{z_3-1}\right)^{u^3}\left(h_0+\frac{h_1}{z_3-\gamma_2}\right).$$

Условия склейки и нормировки принимают вид

$$\psi_1(a)=\eta_1\psi_2(a),\quad \psi_1(-a)=\eta_2\psi_2(-a),\quad \psi_2(b)=\eta_3\psi_3(b),$$

$$\psi_2(-b)=\eta_4\psi_3(-b),\quad \psi_3(R_1)=\kappa,$$

из которых находятся f_0, g_0, g_1, h_0, h_1.

Форма Ω на Γ задается следующими формами на Γ_1,Γ_2 и Γ_3:

$$\Omega_1=-\frac{dz_1}{z_1\bigl(z_1^2-a^2\bigr)},\ \Omega_2=-\frac{\bigl(z_2^2-\gamma_1^2\bigr)\,dz_2}{z_2\bigl(z_2^2-a^2\bigr)\bigl(z_2^2-b^2\bigr)},\ \Omega_3=-\frac{\bigl(z_3^2-\gamma_2^2\bigr)\,dz_3}{z_3\bigl(z_3^2-b^2\bigr)\bigl(z_3^2-R_1^2\bigr)}.$$

Вычеты Ω_j в Q_j, $j=1,\dots,3$, имеют вид

$$\operatorname{Res}_{Q_1}\Omega_1=\frac{1}{a},\quad \operatorname{Res}_{Q_2}\Omega_2=\frac{\gamma_1}{ab},\quad \operatorname{Res}_{Q_3}\Omega_3=\frac{\gamma_2}{bR_1}.$$

Из условия регулярности Ω:

$$\eta_1\eta_2\operatorname{Res}_{\pm a}\Omega_1+\operatorname{Res}_{\pm a}\Omega_2=0,\ \eta_3\eta_4\operatorname{Res}_{\pm b}\Omega_2+\operatorname{Res}_{\pm b}\Omega_3=0,$$

следует, что

$$\xi(a^2-b^2)=\gamma_1^2-a^2,\quad \xi=\eta_1\eta_2,\quad \zeta\bigl(b^2-R_1^2\bigr)=\gamma_2^2-b^2,\quad \zeta=\eta_3\eta_4(1+\xi).$$

Имеем координаты:

$$x_1=\frac{2\kappa(1+\xi rt)\nu^{u_3}}{a+\gamma_1}\,\frac{(1+\zeta s^2)\frac{\eta_2\eta_4}{1+\eta_2^2t^2r^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}\mu_a^{u_1-u_2}\mu_b^{u_2-u_3}}{1+\eta_4^2\frac{r(1-rt)}{1-t}(1+\xi)s^2\frac{1+\eta_2^2t^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}{1+\eta_2^2r^2t^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}\mu_b^{2u_2-2u_3}},$$

$$x_2=\frac{\kappa(1+\xi rt)\nu^{u_3}}{b}\,\frac{\eta_4(1+\zeta s^2)\frac{1+\eta_2^2rt^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}{1+\eta_2^2r^2t^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}\mu_b^{u_2-u_3}}{1+\eta_4^2\frac{r(1-rt)}{1-t}(1+\xi)s^2\frac{1+\eta_2^2t^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}{1+\eta_2^2r^2t^2\mu_a^{2u_1-2u_2}}\mu_b^{2u_2-2u_3}},$$

$$x_3 = \frac{\kappa(1+\zeta s)\nu^{u_3}}{R_1} \frac{1+\eta_4^2 \frac{r(1-rt)}{1-t}(1+\xi)qs^2 \frac{1+\eta_2^2 t^2 \mu_a^{2u_1-2u_2}}{1+\eta_2^2 r^2 t^2 \mu_a^{2u_1-2u_2}} \mu_b^{2u_2-2u_3}}{1+\eta_4^2 \frac{r(1-rt)}{1-t}(1+\xi)s^2 \frac{1+\eta_2^2 t^2 \mu_a^{2u_1-2u_2}}{1+\eta_2^2 r^2 t^2 \mu_a^{2u_1-2u_2}} \mu_b^{2u_2-2u_3}},$$

где

$$\nu = \frac{1-R_1}{1+R_1}, \quad \mu_a = \frac{1+a}{1-a}, \quad \mu_b = \frac{1+b}{1-b},$$

$$t = \frac{a+b}{a+\gamma_1}, \quad s = \frac{b+R_1}{b+\gamma_2}, \quad r = \frac{a-b}{a+b}, \quad q = \frac{b-R_1}{b+R_1}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zakharov V. E.* Description of the n-orthogonal curvilinear coordinate systems and Hamiltonian integrable systems of hydrodynamic type. I: Integration of the Lame equations // Duke Math. J. 1998. V. 94. P. 103–139.
2. *Кричевер И. М.* Алгебро-геометрические n-ортогональные криволинейные системы координат и решения уравнений ассоциативности // Функцион. анализ и его прил. 1997. Т. 31, № 1. С. 32–50.
3. *Darboux G.* Leçons sur les systemes orthogonaux et les coordonnees curvilignes. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
4. *Миронов А. Е., Тайманов И. А.* Ортогональные криволинейные системы координат, отвечающие сингулярным спектральным кривым // Тр. МИАН. 2006. Т. 255. С. 180–196.
5. *Миронов А. Е., Сенниндже́р А., Тайманов И. А.* Ортогональные криволинейные системы координат и пучки без кручения над приводимыми спектральными кривыми // Мат. заметки. 2023. Т. 114, № 4. С. 579–590.
6. *Ахметшин А. А., Вольвовский Ю. С., Кричевер И. М.* Дискретные аналоги метрик Дарбу — Егорова // Тр. МИАН. 1999. Т. 225. С. 21–45.
7. *Шамаев Э. И.* О решетках Дарбу — Егорова в $\mathbb{R}^n$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2013. Т. 10. С. 113–122.
8. *Dubrovin B.* Geometry of $2D$ topological field theories, integrable systems and quantum groups // CIME Summer School on Integrable Systems and Quantum Groups Montecatini Terme, 1994. Berlin: Springer, 1995. P. 120–348. (Lecture Notes Math.; V. 1620).

Поступила в редакцию 28 мая 2024 г.
После доработки 25 июля 2024 г.
Принята к публикации 20 августа 2024 г.

Сенниндже́р Александр
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.sennindzher@g.nsu.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 30.08.2024. Уч.-изд. л. 22. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.09.2024. Объем файла 2.67 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.