

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65

4

2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, С. С. Кутателадзе

Редакторы:

В. Л. Береснев,	А. А. Лаптев,
А. А. Боровков,	В. Д. Мазуров,
А. Ю. Веснин,	А. Е. Миронов,
А. Е. Гутман,	Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко,	А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов,	П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 65, № 4 (386) Июль—август, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Полунепрерывность операторной функции искажения при сходимости гомеоморфизмов в $L_{1,loc}$	605
Гаджимирзаев Р. М. Оценки скорости сходимости ряда Фурье по полиномам Лагерра — Соболева	622
Го Цз., Го В., Кондратьев А. С., Нирова М. С. Конечные группы без элементов порядка десять. Случай разрешимых или почти простых групп	636
Каморников С. Ф., Тютянов В. Н., Шеметкова О. Л. Конечные группы с G -перестановочными нормализаторами силовских подгрупп	645
Кудряшова М. И., Швидефски М. В. К теории H -собранных пространств	653
Лю А.-М., Ван С., Сафонов В. Г., Скиба А. Н. Конечные группы с системами обобщенно нормальных подгрупп	672
Лю А.-М., Го В. Б., Ли Б. Дж., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д. Теорема Альперина для периодических групп с конечной силовой 2-подгруппой	686
Малюгин С. А. Многомерный аналог окружности Конвея	693
Первухин М. А., Степанова А. А., Трикашная Н. В. Частично упорядоченные абелевы группоиды	702
Пятков С. Г., Солдатов О. А. Идентификация коэффициента теплопередачи по граничным интегральным данным	709
Романовский Н. С. Алгебраические замыкания в делимых жестких группах	727

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Хасанов А. Б., Хасанов Т. Г.	<i>Задача Коши для нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (кмКдФ) с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций</i>	735
Шлепкин А. А.	<i>О локально конечных группах, насыщенных полными и специальными линейными группами над конечными полями</i>	760

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

УДК 517.518+517.548

ПОЛУНЕПРЕРЫВНОСТЬ ОПЕРАТОРНОЙ
ФУНКЦИИ ИСКАЖЕНИЯ ПРИ СХОДИМОСТИ
ГОМЕОМОРФИЗМОВ В $L_{1,\text{loc}}$

С. К. Водопьянов, Д. А. Сбоев

Аннотация. Исследуется сходимость в $L_{1,\text{loc}}$ гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{q,p}$ к предельному отображению. При некоторых дополнительных условиях доказано, что норма операторной функции искажения полунепрерывна снизу. Получены оценки на операторную функцию искажения при $q < p$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.401

Ключевые слова: полунепрерывность снизу, гомеоморфизм класса $\mathcal{Q}_{q,p}$, группа Карно.

Основы теории отображений с ограниченным искажением были заложены в 60-е гг. прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка. Он заложил основы теории отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса Соболева $W_{n,\text{loc}}^1(\Omega)$ с ограниченным искажением, характеризующихся выполнением условия

$$|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x, \varphi) \quad \text{почти всюду в } \Omega$$

для некоторого числа $1 \leq K < \infty$, где $D\varphi(x)$ — матрица Якоби, а $J(x, \varphi) = \det D\varphi(x)$ — ее определитель. Наименьшая константа K в вышеприведенном неравенстве называется *коэффициентом внешнего искажения* и обозначается символом $K_O(\varphi)$. Описание свойств этого класса отображений и детальную библиографию можно найти в монографии [1] (см. также [2, 3]). Отображения с ограниченным искажением являются естественным обобщением аналитических функций. В частности, справедлив аналог классического результата теории функций о том, что предел равномерно сходящейся последовательности аналитических функций также будет аналитической функцией.

Теорема 1 [1, § 9.2]. Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\{\varphi_j\}_{j=1}^\infty$ сходится локально в $L_n(\Omega)$ к отображению φ_0 . Предположим также, что последовательность коэффициентов внешнего искажения $\{K_O(\varphi_j)\}_{j=1}^\infty$ ограничена. Тогда φ_0 является отображением с ограниченным искажением и

$$K_O(\varphi_0) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} K_O(\varphi_j). \quad (1)$$

В [2, гл. VI, § 8] теорема 1 доказана при более сильном предположении: вместо сходимости в $L_{n,\text{loc}}$ рассматривается локально равномерная сходимость. В статье [4] установлено обобщение теоремы 1 на группах Карно.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации No 075-15-2022-282.

© 2024 Водопьянов С. К., Сбоев Д. А.

Теорема 2 [4, теорема 1]. Пусть последовательность отображений с ограниченным искажением $\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, сходится локально равномерно к непостоянному отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ при $k \rightarrow \infty$ и последовательность $K_O(\varphi_k)$, $k \in \mathbb{N}$, коэффициентов искажения ограничена сверху. Тогда предел φ_0 является отображением с ограниченным искажением и справедливы неравенства

$$K_O(\varphi_0) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} K_O(\varphi_k), \quad K_I(\varphi_0) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} K_I(\varphi_k).$$

Здесь коэффициент внутреннего искажения $K_I(\varphi)$ — наименьшая постоянная K' , удовлетворяющая неравенству

$$J(x, \varphi) \leq K' \left(\inf_{\xi \in V_1, \rho(\xi)=1} \rho(D_h \varphi(x)(\xi)) \right)^\nu \quad \text{для п. вс. } x \in \Omega.$$

Обзор разного рода обобщений сформулированных теорем в евклидовом пространстве приведен в работе [5].

В настоящей статье мы распространяем сформулированные выше результаты на более широкий класс отображений и впервые вовлекаем в рассмотрение отображения, ассоциированные с весовыми классами Соболева на группах Карно.

Сформулированные результаты и их обобщения имеют применения в вариационных задачах, см., например, [6, 7].

1. Предварительные сведения

Группы Карно. Напомним, что *стратифицированной нильпотентной группой Ли* или *группой Карно* (см., например, [8–10]) называется связная односвязная группа Ли $\mathbb{G}$ такая, что ее алгебра Ли левоинвариантных векторных полей $\mathfrak{g}$ раскладывается в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$ подпространств $\mathfrak{g}_i$, удовлетворяющих условиям $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$, $i = 1, \dots, m-1$, и $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$.

Фиксируем левоинвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{g}$. Подпространство $\mathfrak{g}_1$ — *горизонтальное пространство* алгебры $\mathfrak{g}$, его элементы — *горизонтальные векторные поля*. Пусть $N = \dim \mathfrak{g}$, $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$, $i = 1, \dots, m$. Будем писать n вместо n_1 . Фиксируем ортонормированные базисы $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$ подпространств $\mathfrak{g}_i$. Поскольку экспоненциальное отображение

$$g = \exp \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij} \right) (e)$$

(где e — нейтральный элемент $\mathbb{G}$) есть глобальный диффеоморфизм, мы можем отождествить точку $g \in \mathbb{G}$ с точкой $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$. Тогда $e = 0$ и $x^{-1} = -x$. Растяжения δ_λ , заданные как $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$, суть автоморфизмы группы для всех $\lambda > 0$.

Однородной нормой на $\mathbb{G}$ называется непрерывная функция $\rho : \mathbb{G} \rightarrow [0, +\infty)$ такая, что

- (а) $\rho(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
- (б) $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$ и $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda \rho(x)$.

Более подробно об однородных нормах см., например, [9, 10].

Введем метрику Карно — Каратеодори на группе $\mathbb{G}$. Абсолютно непрерывная кривая $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{G}$ называется *горизонтальной*, если $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}_1$ для п. вс.

t . Длина горизонтальной кривой γ равна $l(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$.

Метрика Карно — Каратеодори — внутренняя метрика, определяемая следующим образом:

$$d_c(x, y) = \inf l(\gamma),$$

где инфимум берется по длинам всех горизонтальных кривых γ , соединяющих точки x, y .

Мера Лебега dx на $\mathbb{R}^N$ — биинвариантная мера Хаара на $\mathbb{G}$, и $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$, где $\nu = \sum_{i=1}^m i n_i$ — однородная размерность группы $\mathbb{G}$. Символом $|E|$ обозначается мера Лебега измеримого множества $E \subset \mathbb{G}$.

ПРИМЕР. Группа Гейзенберга $\mathbb{H}^n = (\mathbb{R}^{2n+1}, *)$ с групповой операцией $(x, y, t) * (x', y', t') = (x + x', y + y', t + t' + (x \cdot y' - x' \cdot y)/2)$, $x, x', y, y' \in \mathbb{R}^n$, $t, t' \in \mathbb{R}$, — классический пример неабелевой группы Карно. Ее алгебра Ли $\mathfrak{h}^n$ образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial t}, \quad i = 1, \dots, n, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Здесь $\mathfrak{h}_1^n = \text{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \dots, n\}$, $\mathfrak{h}_2^n = \text{span}\{T\}$, а нетривиальными скобками Ли являются $[X_i, Y_i] = T$, $i = 1, \dots, n$. Однородная размерность $\mathbb{H}^n$ равна $\nu = 2n + 2$.

Отображения класса Соболева. Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{G}$ — область: связное открытое множество в $\mathbb{G}$. Пространство $L_p(\Omega)$, $p \geq 1$, состоит из измеримых функций $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, интегрируемых в p -й степени. Норма в $L_p(\Omega)$ определяется как

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Функция u принадлежит $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$, если $u \in L_p(K)$ для всякого компакта $K \subset \Omega$.

Пусть левоинвариантные векторные поля $X_1, \dots, X_n$ образуют базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$, и пусть Π_j — гиперплоскость $\{x \in \mathbb{G} \mid x_j = 0\}$, $j = 1, \dots, n$. Мера $\mu_j = \iota(X_j)dx$ на Π_j задается внутренним произведением X_j с формой объема. Каждому $y \in \Pi_j$ соответствует интегральная линия $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$. Для кривой $\gamma_j : (a, b) \rightarrow \mathbb{G}$ образ $\gamma_j(a, b)$ обозначается символом γ_j . Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow M$ из области $\Omega \subset \mathbb{G}$ в метрическое пространство M абсолютно непрерывно на линиях, $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; M)$, если для каждого $j = 1, \dots, n$ оно абсолютно непрерывно на $\gamma_j \cap \Omega$ для μ_j -почти всех $y \in \Pi_j$.

Пространство Соболева $L_p^1(\Omega)$, $p \geq 1$, состоит из функций $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega) \cap \text{ACL}(\Omega; \mathbb{R})$ таких, что $X_j u \in L_p(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$. Здесь $X_j u$ — горизонтальные производные

$$X_j u(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} u(x \exp(tX_j)).$$

Если $X_j u$ существуют и непрерывны для $j = 1, \dots, n$, то функция u принадлежит классу C_h^1 . Полунорма функции $u \in L_p^1$ равна $\|u\| = \| |\nabla_h u| \|_{p,\Omega}$, где $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u)$ — горизонтальный градиент u . Пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ состоит из функций $u \in L_p(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$, имеющих конечную норму

$$\|u\|_{W_p^1(\Omega)} = \|u\|_{p,\Omega} + \|u\|_{L_p^1(\Omega)}.$$

Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — две группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — область. Рассмотрим $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$. Тогда $X_j \varphi(x) \in \tilde{\mathfrak{g}}_1$ для п. вс. $x \in \Omega$ (см. [11, предложение 4.1]). Матрица $D_h \varphi(x) = (X_i \varphi_j)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, \tilde{n}$, определяет линейный оператор $D_h \varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_1$, который называется *горизонтальным дифференциалом* φ . Известно (см. [12, теорема 1.2]), что для п. вс. $x \in \Omega$ отображение $D_h \varphi(x)$ определено и может быть продолжено до гомоморфизма алгебр Ли $\hat{D}\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$, который также можно рассматривать как линейный оператор $\hat{D}\varphi : T_x \mathbb{G} \rightarrow T_{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{G}}$. Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$|D_h \varphi(x)| \leq |\hat{D}\varphi(x)| \leq C |D_h \varphi(x)|,$$

где C зависит только от структур групп. Последнему гомоморфизму соответствует гомоморфизм групп $D_{\mathcal{D}}\varphi = \widetilde{\exp} \circ \hat{D}\varphi \circ \exp^{-1} : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом φ по отношению к структуре группы (см. [12]). Для п. вс. $x \in \Omega$ якобиан в точке равен следующей величине:

$$\lim_{B(y,r) \ni x, r \rightarrow 0} \frac{|\varphi(B(y,r))|}{|B(y,r)|} = |\det D_{\mathcal{D}}\varphi(x)| = |\det \hat{D}\varphi(x)|.$$

Класс Соболева $W_p^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ состоит из отображений $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ таких, что величина

$$\|\varphi\|_{W_p^1(\Omega)} = \|\rho \circ \varphi\|_{p,\Omega} + \|\hat{D}\varphi\|_{p,\Omega}$$

конечна. Отображение φ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \tilde{\mathbb{G}})$ для всякой компактно вложенной области $U \Subset \Omega$. Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [12, предложение 4.2]. Заметим, что если $\varphi \in W_p^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$, то все координатные функции φ_i , $i = 1, \dots, \tilde{N}$, принадлежат пространству $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$.

Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $E \subset \Omega$. Функция $N(y, \varphi, E) : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$, определенная по правилу

$$\mathbb{G} \ni y \mapsto N(y, \varphi, E) = \#(f^{-1}(y) \cap E),$$

называется *индикатрисой Банаха* отображения f . Здесь символ $\#(f^{-1}(y) \cap E)$ обозначает число точек в прообразе $f^{-1}(y) \cap E$ точки y (равен ∞ , если прообраз точки бесконечен, и 0, если прообраз пуст).

Для отображений класса Соболева (класса ACL) имеет место формула замены переменной (см. [12]).

Теорема 3 [12, теоремы 1.1, 5.3]. Пусть $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, а $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — отображение класса Соболева $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ или класса $\text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$. Тогда

1) существует борелевское множество сингулярности $\Sigma \subset \Omega$ отображения φ нулевой меры такое, что $\varphi : \Omega \setminus \Sigma \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ обладает $\mathcal{N}$ -свойством Лузина (т. е. образ множества нулевой меры — множество меры нуль);

2) функции

$$\Omega \setminus \Sigma \ni x \mapsto (u \circ \varphi)(x) |\det D_{\mathcal{D}}\varphi(x)| \quad \text{и} \quad \mathbb{G} \ni x \mapsto u(y) N(y, \varphi, \Omega \setminus \Sigma)$$

измеримы, если функция $u : \tilde{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{R}$ измерима и неотрицательна;

3) если $A \subset \Omega \setminus \Sigma$ — измеримое множество, то верна формула площади:

$$\int_A |\det D_{\mathcal{D}}\varphi(x)| dx = \int_{\tilde{\mathbb{G}}} N(y, \varphi, A) dy;$$

4) если измеримая функция u неотрицательна, то верна следующая формула замены переменной в интеграле Лебега:

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} u(\varphi(x)) |\det D_{\mathcal{D}} \varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{G}} u(y) N(y, \varphi, \Omega \setminus \Sigma) dy;$$

5) если одна из функций

$$\Omega \setminus \Sigma \ni x \mapsto (u \circ \varphi)(x) |\det D_{\mathcal{D}} \varphi(x)| \quad \text{или} \quad \mathbb{G} \ni y \mapsto u(y) N(y, \varphi, \Omega \setminus \Sigma)$$

интегрируема, то и другая интегрируема и верна формула

$$\int_{\Omega \setminus \Sigma} u(\varphi(x)) |\det D_{\mathcal{D}} \varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{G}} u(y) N(y, \varphi, \Omega \setminus \Sigma) dy.$$

Применения теоремы 3 можно найти в [13, § 3, теорема 2].

Некоторые факты функционального анализа. Напомним определение слабой сходимости в пространствах $L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Последовательность f_k слабо сходится к f_0 в $L_p(\Omega)$, если

$$\int_{\Omega} f_k w dx \rightarrow \int_{\Omega} f_0 w dx \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty$$

для произвольной функции $w \in L_q(\Omega)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Данную сходимость будем обозначать символом $f_k \xrightarrow{L_p(\Omega)} f_0$.

Отметим, что при слабой сходимости имеет место полунепрерывность нормы снизу: если f_k сходится слабо к f_0 , то $\|f_0\| \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|$.

Последовательность функций $f_k \in L_1(\Omega)$ называется *равномерно интегрируемой*, если

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{k=1,2,\dots} \int_{\{|f_k| > N\}} |f_k| dx = 0.$$

Последовательность функций $f_k \in L_1(\Omega)$ имеет *равномерно абсолютно непрерывные интегралы*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\int_A |f_k| dx < \varepsilon \quad \text{для всех } k = 1, 2, \dots, \quad \text{если } |A| < \delta.$$

Если $|\Omega| < \infty$, то понятие равномерной интегрируемости последовательности эквивалентно тому, что последовательность ограничена в $L_1(\Omega)$ и имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы.

Сформулируем следствие критерия слабой предкомпактности в L_1 (см., например, [14, теорема 4.7.18]).

Следствие 4 [14]. Пусть $|\Omega| < \infty$. Тогда любая равномерно интегрируемая последовательность $f_k \in L_1(\Omega)$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся в L_1 к некоторой функции $f \in L_1(\Omega)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть f_k — последовательность функций в пространстве $L_1(\Omega)$, а $f_0 \in L_1(\Omega)$. Последовательность f_k сходится к f_0 в *кусочном смысле*, если существует неубывающая последовательность измеримых множеств E_l , $l =$

$1, 2, \dots$, такая, что $\Omega = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_l$, и f_k сходится слабо к f_0 в пространстве $L_1(E_l)$ для всех $l = 1, 2, \dots$.

Будем обозначать данную сходимость символом $f_k \xrightarrow{b} f_0$.

Если $f_k \xrightarrow{b} f_1$ и $f_k \xrightarrow{b} f_2$, то f_1 и f_2 совпадают почти всюду в силу единственности слабого предела.

Основное свойство кусочной сходимости сформулировано в следующем утверждении (см. [15–17]).

Лемма 6 “Biting lemma”. Пусть $|\Omega| < \infty$. Тогда любая ограниченная в $L_1(\Omega)$ последовательность функций содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой функции $f_0 \in L_1(\Omega)$ в кусочном смысле.

При кусочной сходимости имеет место полунепрерывность нормы в пространстве L_1 :

$$\|f_0 \mid L_1(\Omega)\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k \mid L_1(\Omega)\|.$$

Действительно, так как f_k сходится к f_0 слабо в $L_1(E_l)$, то

$$\|f_0 \mid L_1(E_l)\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k \mid L_1(E_l)\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|f_k \mid L_1(\Omega)\|.$$

Учитывая, что $\bigcup_{l=1}^{\infty} E_l = \Omega$, получаем требуемое.

Отображения класса $\mathcal{Q}_{q,p}$. Локально суммируемая борелевская функция $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, называется *весовой функцией*, если соотношение $0 < \sigma(x) < \infty$ выполнено для п. вс. $x \in \Omega$. Для измеримого множества $U \subset \Omega$ положим $\sigma(U) = \int_U \sigma(x) dx$.

Напомним, что функция $u : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит *весовому классу Соболева* $L_p^1(\Omega', \sigma)$, $p \in [1, \infty)$, если $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega')$ и обобщенные производные вдоль горизонтальных векторных полей¹⁾ $X_j u$ принадлежат $L_p(\Omega', \sigma)$ для любого $j = 1, \dots, n$, где X_j — базис горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$. Полунорма функции $u \in L_p^1(\Omega', \sigma)$ определяется следующим образом:

$$\|u \mid L_p^1(\Omega', \sigma)\| = \left(\int_{\Omega'} |\nabla_h u|^p \sigma dx \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ в группе Карно принадлежит *классу $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$* , $1 < q \leq p < \infty$, если

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \Omega')$;
- 2) гомеоморфизм φ имеет *конечное искажение*: $D_h \varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D_{\mathcal{D}} \varphi(x) = 0\}$;
- 3) операторная функция искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K_{q,p}^{1,\sigma}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D_h \varphi(x)|}{\sigma(\varphi(x))^{1/p} |\det D_{\mathcal{D}} \varphi(x)|^{1/p}}, & \text{если } \det D_{\mathcal{D}} \varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит классу $L_{\varkappa}(\Omega)$, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$ при $p = q$).

¹⁾Определение обобщенных производных предполагает, что $X_j u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega')$.

Обозначим $K_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi, \Omega) = \|K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi) \mid L_{\mathcal{K}}(\Omega)\|$.

Отметим, что множество $Z_{\sigma} = \{x \in \Omega \mid \sigma(\varphi(x)) \det D_{\mathcal{D}}\varphi(x) = 0\}$ отличается от Z на множество меры нуль, поэтому определение операторной функции искажения корректно.

Класс $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов тесно связан с описанием операторов композиции однородных пространств Соболева (см. [13]).

Теорема 8 [13, теорема 2]. Гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ областей в произвольной группе Карно $\mathbb{G} \supset \Omega, \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega', \sigma) \cap W_{\infty, \text{loc}}^1(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leq p < \infty,$$

однородных весовых пространств Соболева по правилу $\varphi^*(g) = g \circ \varphi$ тогда и только тогда, когда φ — гомеоморфизм класса $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$.

При этом норма $\|\varphi^*\|$ эквивалентна величине $K_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi, \Omega)$, т. е. для некоторой константы $\alpha_{q,p} > 0$ справедливо неравенство

$$\alpha_{q,p} \|K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi) \mid L_{\mathcal{K}}(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi) \mid L_{\mathcal{K}}(\Omega)\|.$$

Далее в статье весовая функция σ предполагается суммируемой, т. е. $\sigma \in L_1(\Omega')$.

Пусть φ_k — последовательность гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$, для которых нормы операторных функций искажения $K_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega)$ ограничены в совокупности. Допустим также, что $\varphi_k \rightarrow \varphi_0$ в пространстве $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$, т. е.

$$\int_K \rho(\varphi_0(x)^{-1} \varphi_k(x)) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$. Здесь $\varphi_0(x)^{-1}$ — обратный элемент к $\varphi_0(x)$ в группе $\mathbb{G}$.

Обозначим символом $\tilde{\sigma}$ продолжение весовой функции σ , заданное по правилу

$$\tilde{\sigma}(y) = \begin{cases} \sigma(y), & y \in \Omega', \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В работе [7] были получены свойства предельного отображения φ_0 . Сформулируем данный результат в весовом случае.

Теорема 9 [7]. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно, $1 < q \leq p < \infty$, Ω и Ω' суть ограниченные области в группе Карно $\mathbb{G}$ и σ — весовая функция в Ω' , $\sigma \in L_1(\Omega')$.

Предположим, что $\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'$ — последовательность гомеоморфизмов класса $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$, сходящаяся к отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ в $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$. Допустим также, что последовательность $K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_k)$ ограничена в $L_{\mathcal{K}}(\Omega)$, где $\frac{1}{\mathcal{K}} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\mathcal{K} = \infty$ при $q = p$).

Тогда φ_0 обладает следующими свойствами:

- (а) принадлежит классу $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$,
- (б) имеет конечное искажение,
- (с) индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W, \tilde{\sigma}) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega),$$

где W — ограниченная область, содержащая $\overline{\Omega'}$, $\text{Lip}(W)$ — пространство липшицевых функций, заданных на W ,

$$(d) \|\varphi_0^*\| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\|.$$

Доказательство данной теоремы следует рассуждениям из [7, теорема 3.1] с учетом очевидных модификаций, связанных с появлением весовой функции в образе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 9 верна в случае, когда $\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'$ суть отображения класса Соболева $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, индуцирующие ограниченные операторы композиции, и нормы $\|\varphi_k^*\|$ ограничены в совокупности.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие суммируемости веса $\sigma \in L_1(\Omega')$ существенно. Это связано с тем, что образ φ_0 содержится в замыкании $\overline{\Omega'}$.

Для отображения φ , удовлетворяющего условиям (a), (b) из теоремы 9, введем операторную функцию искажения $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\cdot, \varphi)$, заданную в образе, по праву:

$$W \ni y \mapsto H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(y, \varphi) = \begin{cases} \tilde{\sigma}(y)^{-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\substack{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi, \\ \tilde{\sigma}(\varphi(x)) \det D_{\varphi} \varphi(x) \neq 0}} \frac{|D_{\varphi} \varphi(x)|^q}{|\det D_{\varphi} \varphi(x)|} \right)^{\frac{1}{q}}, \\ 0, \text{ если } \{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi \mid \tilde{\sigma}(\varphi(x)) \det D_{\varphi} \varphi(x) \neq 0\} = \emptyset. \end{cases}$$

От выбора продолжения $\tilde{\sigma}$ зависят значения операторной функции искажения $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(y, \varphi)$ лишь в точках $y \in W \setminus \Omega'$. Если $\sigma = 1$, то будем писать $H_{q,p}$ вместо $H_{q,p}^{1,1}$.

Пусть $V \subset W$ — открытое множество, $\mathring{\text{Lip}}(V)$ — пространство липшицевых функций, носители которых содержатся в V . Обозначим символом $\varphi_0^*|_V$ ограничение оператора композиции φ_0^* на подпространство $L_p^1(V, \tilde{\sigma}) \cap \mathring{\text{Lip}}(V)$, $\|\varphi_0^*|_V\|$ — его норма. Рассуждая аналогично [7, предложение 3.8], можно получить следующее утверждение.

Лемма 10 [7]. Пусть $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ — отображение из теоремы 9. Тогда

$$\beta_{q,p} \|H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\cdot, \varphi_0) \mid L_{\varkappa}(V)\| \leq \|\varphi_0^*|_V\| \leq \|H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\cdot, \varphi_0) \mid L_{\varkappa}(V)\|$$

для любого открытого множества $V \subset W$, где $\beta_{q,p}$ — некоторая постоянная, $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$, если $q = p$).

Отсюда, в частности, получаем, что $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}} \in L_{\varkappa}(W)$, где $\frac{1}{\varkappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\varkappa = \infty$, если $q = p$). Будем обозначать символом $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\varphi_0, V)$ следующую величину: $\|H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\cdot, \varphi_0) \mid L_{\varkappa}(V)\|$.

Для гомеоморфизма φ имеет место равенство норм операторных функций искажения, определенных в образе и прообразе,

$$\|K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi) \mid L_{\varkappa}(\Omega)\| = \|H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi) \mid L_{\varkappa}(\Omega')\|.$$

2. Основной результат

Здесь и далее Ω и Ω' — ограниченные области в группе Карно $\mathbb{G}$, весовая функция $\sigma \in L_1(\Omega')$.

Теорема 11. Пусть последовательность гомеоморфизмов $\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$, $1 < q \leq p < \infty$, сходится к отображению $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ в $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$. Предположим также, что последовательность $H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')$ ограничена.

Тогда при $q < p$ существуют подпоследовательность $H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_{k_j})$ и функция $H_0 \in L_{\mathcal{K}}(\Omega')$ такие, что

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_{k_j})^{\mathcal{K}} \xrightarrow{b} H_0(\cdot)^{\mathcal{K}},$$

и

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_0) \leq H_0(y) \quad \text{для п. вс. } y \in \Omega'.$$

Более того, выполнено

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_0, \Omega') \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')$$

для любых $1 < q < p < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательность φ_k удовлетворяет условиям теоремы 9. Следовательно, φ_0 индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W, \tilde{\sigma}) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega)$$

(здесь W — ограниченная область, содержащая $\overline{\Omega'}$), принадлежит классу $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$ и имеет конечное искажение. Значит, операторная функция искажения $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(\cdot, \varphi_0)$ корректно определена и принадлежит пространству $L_{\mathcal{K}}(W)$ (см. лемму 10). Так как мы работаем с точками $y \in \Omega'$, будем писать $H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_0)$ вместо $H_{q,p}^{1,\tilde{\sigma}}(y, \varphi_0)$.

Перейдем к получению оценок на операторную функцию искажения φ_0 .

Пусть E — измеримое множество в Ω' . Применяя формулу замены переменной (теорема 3), выводим следующие соотношения (ниже Z_k — множество нулей якобиана отображения φ_k , Σ_k — множество сингулярности отображения φ_k):

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_k^{-1}(E)} |D_h \varphi_k|^q dx &= \int_{\varphi_k^{-1}(E) \setminus Z_k} \frac{|D_h \varphi_k|^q}{|\det D_{\mathcal{D}} \varphi_k|} |\det D_{\mathcal{D}} \varphi_k| dx \\ &= \int_{E \setminus \varphi_k(Z_k \cup \Sigma_k)} \frac{|D_h \varphi_k(\varphi_k^{-1}(y))|^q}{|\det D_{\mathcal{D}} \varphi_k(\varphi_k^{-1}(y))|} dy \\ &= \int_E H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dy = \int_E \sigma(y)^{\frac{q}{p}} (\sigma^{-\frac{1}{p}} H_{q,p}(y, \varphi_k))^q dy \\ &= \int_E \sigma(y)^{\frac{q}{p}} H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^q dy \leq \left(\int_E H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^{\mathcal{K}} dy \right)^{\frac{q}{\mathcal{K}}} \sigma(E)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q < p. \end{aligned}$$

Аналогично выводим

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_k^{-1}(E)} |D_h \varphi_k|^q dx &= \int_E H_{q,q}(y, \varphi_k)^q dy \\ &= \int_E \sigma(y) H_{q,q}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^q dy \leq H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')^q \sigma(E), \quad \text{если } q = p. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к неравенствам

$$\int_E H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dy \leq \left(\int_E H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^{\mathcal{K}} dy \right)^{\frac{q}{\mathcal{K}}} \sigma(E)^{\frac{q}{p}}, \quad \text{если } q < p, \quad (2)$$

$$\int_E H_{q,q}(y, \varphi_k)^q dy \leq H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')^q \sigma(E), \quad \text{если } q = p. \quad (3)$$

Ниже, в лемме 14, будет доказано соотношение

$$\int_B H_{q,p}(y, \varphi_0)^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dx, \quad (4)$$

где $B \Subset \Omega'$ — произвольный компактно вложенный шар.

СЛУЧАЙ $q = p$. Подставляя вместо E произвольный шар $B = B(y_0, r) \Subset \Omega'$ в (3) и используя соотношение (4), приходим к неравенствам

$$\int_B H_{q,q}(y, \varphi_0)^q dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B H_{q,q}(y, \varphi_k)^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')^q \sigma(B).$$

Разделим полученное соотношение на $|B|$:

$$\frac{1}{|B|} \int_B H_{q,q}(y, \varphi_0)^q dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')^q \frac{\sigma(B)}{|B|}.$$

Устремив $r \rightarrow 0$, выводим неравенство

$$H_{q,q}(y_0, \varphi_0)^q \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')^q \sigma(y_0)$$

для п. вс. $y_0 \in \Omega'$. Таким образом, выполнена оценка

$$H_{q,q}^{1,\sigma}(y, \varphi_0) = \sigma(y)^{-\frac{1}{q}} H_{q,q}(y, \varphi_0) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega') \quad \text{для п. вс. } y \in \Omega'.$$

СЛУЧАЙ $q < p$. Выделим подпоследовательность отображений φ_{k_j} , для которой верны следующие свойства:

- (i) $\lim_{j \rightarrow \infty} H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_{k_j}, \Omega') = \lim_{k \rightarrow \infty} H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega')$,
- (ii) функции $H_{q,p}(\cdot, \varphi_{k_j})^q$ слабо сходятся к некоторой функции $G(\cdot)^q$ в $L_1(\Omega')$,
- (iii) функции $H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_{k_j})^\infty$ сходятся в кусочном смысле на Ω' к $H_0(\cdot)^\infty \in L_1(\Omega')$.

Докажем, что такая подпоследовательность существует. П. (i) очевиден.

Покажем, что выполнено (ii). Действительно, в силу (2) последовательность $H_{q,p}(\cdot, \varphi_k)^q$ ограничена в $L_1(\Omega')$ (см. (2) при $E = \Omega'$) и имеет равномерно абсолютно непрерывные интегралы. По следствию 4 существует слабо сходящаяся к некоторой функции $G(\cdot)^q$ подпоследовательность $H_{q,p}(\cdot, \varphi_{k_j})^q$.

Покажем, что выполнено также (iii). Последовательность $H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_{k_j})^\infty$ ограничена в $L_1(\Omega')$ и $|\Omega'| < \infty$. Применяя лемму 6 для подпоследовательности, удовлетворяющей (i) и (ii), получаем требуемую подпоследовательность, сходящуюся в кусочном смысле к некоторой функции $H_0(\cdot)^\infty \in L_1(\Omega')$.

Применяя соотношение (4) и п. (ii), выводим

$$\int_B H_{q,p}(y, \varphi_0)^q dy \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dy = \int_B G(y)^q dy,$$

где B — произвольный компактно вложенный шар в Ω' . Разделив на меру шара B и используя теорему Лебега, приходим к неравенству $H_{q,p}(y, \varphi_0)^q \leq G(y)^q$ для п. вс. $y \in \Omega'$.

Подставляя вместо E множество $B \cap E_l$, где E_l , $l = 1, 2, \dots$, — неубывающая последовательность множеств из кусочной сходимости на Ω' (см. п. (iii)), выводим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 \int_{B \cap E_l} H_{q,p}(y, \varphi_0)^q dy &\leq \int_{B \cap E_l} G(y)^q dy \quad (\text{п. вс. } H_{q,p}(\cdot, \varphi_0)^q \leq G(\cdot)^q) \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B \cap E_l} H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dy \quad (H_{q,p}(\cdot, \varphi_k)^q \xrightarrow{L_1} G(\cdot)^q) \\
 &\leq \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B \cap E_l} H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^{\chi} dy \right)^{\frac{q}{\chi}} \sigma(B \cap E_l)^{\frac{q}{p}} \quad (\text{см. (2)}) \\
 &= \left(\int_{B \cap E_l} H_0(y)^{\chi} dy \right)^{\frac{q}{\chi}} \sigma(B \cap E_l)^{\frac{q}{p}} \quad (H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_k)^{\chi} \xrightarrow{b} H_0(\cdot)^{\chi}) \\
 &\leq \left(\int_B H_0(y)^{\chi} dy \right)^{\frac{q}{\chi}} \sigma(B)^{\frac{q}{p}}.
 \end{aligned}$$

Так как имеет место равенство $\bigcup_{l=1}^{\infty} (B \cap E_l) = B$, приходим к оценке

$$\int_B H_{q,p}(y, \varphi_0)^q dy \leq \left(\int_B H_0(y)^{\chi} dy \right)^{\frac{q}{\chi}} \sigma(B)^{\frac{q}{p}}$$

для любого шара $B \Subset \Omega'$.

Аналогично случаю $q = p$ разделим на $|B|$ (напомним, что $q/\chi + q/p = 1$) и устремим радиус B к нулю. Таким образом, приходим к неравенству

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_0) \leq H_0(y) \quad \text{для п. вс. } y \in \Omega'.$$

Так как при сходимости в кусочном смысле имеет место полунепрерывность L_1 -нормы, заключаем, что выполнено соотношение

$$\begin{aligned}
 \|H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_0) \| L_{\chi}(\Omega') \| &\leq \varliminf_{j \rightarrow \infty} \|H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_{k_j}) \| L_{\chi}(\Omega') \| \\
 &= \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|H_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_k) \| L_{\chi}(\Omega') \|. \quad \square
 \end{aligned}$$

Ранее авторами было опубликовано краткое сообщение, где был сформулирован следующий результат.

Теорема 12 [18]. Пусть последовательность гомеоморфизмов $\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'$ класса $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$, $1 < q \leq p < \infty$, локально равномерно сходится к гомеоморфизму $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \Omega'$. Предположим также, что

- 1) существует ограниченная в $L_{\chi}(\Omega)$ последовательность функций $M_k \in L_{\chi}(\Omega)$, $\frac{1}{\chi} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, такая, что $K_{q,p}^{1,\sigma}(x, \varphi_k) \leq M_k(x)$ для п. вс. $x \in \Omega$, если $q < p$;
- 2) существует ограниченная последовательность $M_k > 0$ такая, что $K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \Omega) \leq M_k$, если $q = p$.

Тогда существует функция $M \in L_{\chi}(\Omega)$ такая, что некоторая подпоследовательность функций M_k^{χ} сходится в кусочном смысле к M^{χ} на каждой компактной подобласти, если $q < p$. Более того, предельный гомеоморфизм φ_0 принадлежит классу $\mathcal{Q}_{q,p}(\Omega; \Omega', \sigma)$, причем

- 1) $K_{q,p}^{1,\sigma}(x, \varphi_0) \leq M(x)$ для п. вс. $x \in \Omega$, если $q < p$,
и, кроме того,
- 2) $K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_0; \Omega) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} K_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k; \Omega)$, если $q = p$.

Покажем, как из теоремы 11 можно получить теорему 12.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим символами Σ_k и Z_k (Σ'_k и Z'_k) множества сингулярности и нулей якобиана гомеоморфизма φ_k (обратного гомеоморфизма φ_k^{-1}) соответственно. Эти множества можно выбрать так, что они будут борелевскими дизъюнктными и, более того, $Z'_k = \varphi_k(\Sigma_k)$, $\Sigma'_k = \varphi_k(Z_k)$.

Для гомеоморфизма φ_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, нетрудно проверить равенство

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^{\times} = \frac{K_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_k^{-1}(y), \varphi_k)^{\times}}{|\det D_{\varphi_0} \varphi_k(\varphi_k^{-1}(y))|} \quad (5)$$

для точек $y \notin \Sigma'_k \cup Z'_k$.

Перенесем функции $K_{q,p}^{1,\sigma}(x, \varphi_k)$, M_k в образ с помощью гомеоморфизма φ_k^{-1} . Так как $K_{q,p}^{1,\sigma}(\cdot, \varphi_k) = 0$ на множестве Z_k , то без ограничения общности можно считать, что $M_k(x) = 0$ на множестве Z_k .

Тогда придем к оценке

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_k)^{\times} \leq \frac{M_k(\varphi_k^{-1}(y))^{\times}}{|\det D_{\varphi_0} \varphi_k(\varphi_k^{-1}(y))|} = H_k(y) \quad \text{для п. вс. } y \notin \Sigma'_k \cup Z'_k.$$

В точках $y \in \Sigma'_k \cup Z'_k$ доопределим функцию $H_k(y)$ нулем, при этом неравенство выше сохранится. Воспользовавшись теоремой о замене переменной (теорема 3), нетрудно проверить, что $H_k \in L_{\times}(\Omega')$ и имеет место равенство $\|H_k\|_{L_{\times}(\varphi_k(E))} = \|M_k\|_{L_{\times}(E)}$ для любого измеримого множества $E \subset \Omega$.

Фиксируем компактно вложенную подобласть $D \Subset \Omega$. Тогда в силу локально равномерной сходимости образы $\varphi_k(D)$ содержатся в окрестности D' компакта $\varphi_0(\overline{D})$ при достаточно больших k . Эту окрестность можно выбрать так, что $D' \Subset \Omega'$, и в этом случае $\sigma \in L_1(D')$.

Таким образом, условия теоремы 11 выполнены для сужений $\varphi_k : D \rightarrow D'$ (в данном случае отображения φ_k будут гомеоморфизмами на образ $\varphi_k(D)$, см. замечание к теореме 9). Более того, так как последовательность $H_k^{\times}$ ограничена в $L_1(D')$ и $|D'| < \infty$, можно выделить подпоследовательность так, что $H_{k_j}^{\times} \xrightarrow{b} \tilde{H}^{\times}$ на D' (см. лемму 6).

Значит, верно следующее:

- (1) $H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_{k_j})^{\times} \xrightarrow{b} H_0(y)^{\times}$, $H_{k_j}(y)^{\times} \xrightarrow{b} \tilde{H}(y)^{\times}$, и справедливы неравенства

$$H_{q,p}^{1,\sigma}(y, \varphi_0) \leq H_0(y) \leq \tilde{H}(y) \quad \text{для п. вс. } y \in \varphi_0(D),$$

если $q < p$,

- (2) $H_{q,p}^{1,\sigma}(\varphi_0, \varphi_0(D)) \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} H_{q,q}^{1,\sigma}(\varphi_k, \varphi_k(D))$ для всех $1 < q \leq p < \infty$.

Переносом функций $H_{q,p}^{1,\sigma}$, $\tilde{H}$ в прообраз (см. (5)) с помощью гомеоморфизма φ_0 заключаем, что выполнено неравенство

$$K_{q,p}^{1,\sigma}(x, \varphi_0) \leq \frac{\tilde{H}(\varphi_0(x))}{|\det D_{\varphi_0} \varphi_0(x)|^{\frac{1}{p}}} = M(x)$$

для п. вс. $x \in D$. При этом функция $M(x)$ принадлежит пространству $L_{\times}(D)$.

Рассматривая неубывающую последовательность компактно вложенных подобластей и переходя к диагональной последовательности, получаем требуемое. $\square$

3. Доказательство соотношения (4)

Приведем доказательство следующего утверждения.

Лемма 13. Пусть отображение $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ принадлежит $W_{q,\text{loc}}^1(\mathbb{G}; \mathbb{G})$ и имеет конечное искажение, $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ — липшицева функция. Тогда для п. вс. точек $x \in \mathbb{G}$ имеет место равенство

$$\nabla_h(u \circ \varphi)(x) = \nabla_h u(\varphi(x)) D_h \varphi(x),$$

где левая часть равна нулю, если $D_h \varphi(x)$ равен нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство $\nabla_h(u \circ \varphi)(x) = \nabla_h u(\varphi(x)) D_h \varphi(x)$ понимается стандартным образом:

$$X(u \circ \varphi)(x) = \langle \nabla_h(u \circ \varphi)(x), X(x) \rangle = \langle \nabla_h u(\varphi(x)), D_h \varphi(x)(X) \rangle, \quad X \in \mathfrak{g}_1.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в горизонтальном пространстве $\mathfrak{g}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму для горизонтальных базисных полей. Фиксируем такое поле $X \in \mathfrak{g}_1$. Обозначим символом μ меру в гиперплоскости Π , соответствующей полю X .

Отметим следующие свойства:

- 1) $\varphi \in \text{ACL}(\mathbb{G}, \mathbb{G})$, т. е. для μ -п. вс. $p \in \Pi$ кривая $\Phi(\cdot) = \varphi(p \exp(\cdot X)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}$ абсолютно непрерывна;
- 2) касательный вектор $X\varphi(x)$ к кривой $\Phi(t) = \varphi(x \exp(tX))$ и действие горизонтального дифференциала $D_h \varphi(x)(X)$ на вектор $X(x)$ совпадают для п. вс. $x \in \mathbb{G}$,
- 3) $u \in \text{Lip}(\mathbb{G})$, следовательно, горизонтальный дифференциал $\nabla_h u(y)$ существует для п. вс. $y \in \mathbb{G}$,
- 4) функция $\mathbb{R} \ni t \mapsto u \circ \varphi(p \exp(tX))$ абсолютно непрерывна для μ -п. вс. $p \in \Pi$ и, следовательно, дифференцируема для п. вс. $t \in \mathbb{R}$.

Допустим, что $X\varphi(x) = 0$, тогда

$$\begin{aligned} & t^{-1} |u \circ \varphi(x \exp(tX)) - u \circ \varphi(x)| \\ & \leq \text{Lip}(u) t^{-1} d_c(\varphi(x \exp(tX)), \varphi(x)) \rightarrow \text{Lip}(u) |X\varphi(x)| = 0 \quad \text{при } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что $X(u \circ \varphi)(x) = 0$.

Обозначим символом S_u множество точек недифференцируемости функции u , $|S_u| = 0$ (см. п. (3)). Применяя формулу замены переменной (теорема 3), выводим

$$0 = \int_{S_u} N(y, \varphi, \varphi^{-1}(S_u) \setminus \Sigma_\varphi) dy = \int_{\varphi^{-1}(S_u)} |\det D_{\mathcal{D}} \varphi(x)| dx.$$

Значит, $|\det D_{\mathcal{D}} \varphi| = 0$ почти всюду на множестве $\varphi^{-1}(S_u)$. Так как φ имеет конечное искажение, то $D_h \varphi = 0$ почти всюду на $\varphi^{-1}(S_u)$. Следовательно, правило дифференцирования композиции выполнено.

Фиксируем точку x такую, что

- (i) $u \circ \varphi(x \exp(tX))$ дифференцируема при $t = 0$,
- (ii) кривая $\varphi(x \exp(tX))$ $\mathcal{P}$ -дифференцируема при $t = 0$, т. е.

$$d_c(\varphi(x \exp(tX)), \varphi(x) \exp(tX\varphi(x))) = o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0,$$

- (iii) $x \notin \varphi^{-1}(S_u)$.

Точки x , удовлетворяющие условиям (i) и (ii), суть почти все точки $\mathbb{G}$.

В точках x , удовлетворяющих условиям (i)–(iii), правило дифференцирования композиции следует из [19, § 2, теорема 2.1]. Действительно, рассмотрим сужение $\Phi(t) = \varphi(x \exp(tX))$. Тогда кривая Φ $\mathcal{P}$ -дифференцируема в точке $t = 0$ (см. п. (ii)), горизонтальный градиент $\nabla_h u$ существует в точке $\Phi(0) = \varphi(x)$ (см. п. (iii)). Следовательно, выполнены равенства

$$X(u \circ \varphi)(x) = D_{\mathcal{P}}(u \circ \Phi)(0) = D_{\mathcal{P}}u(\Phi(0)) \circ D_{\mathcal{P}}\Phi(0) = \nabla_h u(\varphi(x))X\varphi(x). \quad \square$$

Перейдем к доказательству соотношения (4).

Лемма 14. В условиях теоремы 11 выполнено неравенство

$$\int_B H_{q,p}(y, \varphi_0)^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_B H_{q,p}(y, \varphi_k)^q dx$$

для произвольного шара $B \in \Omega'$.

Доказательство. Используя формулу замены переменной в интеграле Лебега, нетрудно показать, что для произвольного отображения $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ с конечным искажением имеет место равенство

$$\int_{\varphi^{-1}(B)} |D_h \varphi|^q dx = \int_B H_{q,p}(y, \varphi)^q dy. \quad (6)$$

Следовательно, достаточно доказать следующее неравенство:

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h \varphi_0|^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx \quad (7)$$

для произвольного шара B .

Фиксируем шар $B = B(y_0, R)$. Символом z обозначим точку в шаре B . Введем функции $u_{z,r}(y) = \max\{r - d_c(y, z), 0\}$, где $r \in (0, \text{dist}(z, \partial B))$. Для таких функций z — центр, r — радиус. Функции $u_{z,r}$ обладают следующими свойствами:

- 1) $u_{z,r}$ — липшицева функция с константой Липшица 1,
- 2) носитель $u_{z,r}$ содержится в шаре B ,
- 3) горизонтальные градиенты $\nabla_h u_{z,r}(y)$ имеют единичную норму и плотны в единичной сфере горизонтального пространства $\mathfrak{g}_1$ для п. вс. $y \in B$.

Пусть $\{z_j\}$ — счетное всюду плотное множество в B . Обозначим символом $\mathcal{F}$ счетное семейство, состоящее из функций $u_{z,r}$ с центрами в точках $z = z_j$ и рациональными радиусами $r \in (0, \text{dist}(z_j, \partial B)) \cap \mathbb{Q}$.

Понятно, что функция $u \in \mathcal{F}$ принадлежит пространству $L_p^1(\Omega', \sigma)$.

Выделим подпоследовательность φ_{k_j} , на которой достигается нижний предел в соотношении (7). Мы будем обозначать эту подпоследовательность тем же символом φ_k .

Фиксируем функцию $u \in \mathcal{F}$. Рассмотрим функции $u \circ \varphi_0$ и $u \circ \varphi_k$. В силу условий леммы каждый гомеоморфизм φ_k индуцирует ограниченный оператор композиции. Следовательно, имеют место соотношения

$$\|\nabla_h(u \circ \varphi_k)\|_{L_q(\Omega)} \leq \|\varphi_k^*\| \|\nabla_h u\|_{L_p(\Omega', \sigma)} \leq \widetilde{M} \sigma(B)^{\frac{1}{p}},$$

где $\widetilde{M}$ — общая мажоранта норм операторов композиции φ_k . Значит, подпоследовательность $\|\nabla_h(u \circ \varphi_k)\|$ ограничена в $L_q(\Omega)$. В силу ограниченности областей

Ω , Ω' и липшицевости u заключаем, что $u \circ \varphi_k$ ограничены в $L_q(\Omega)$. Стало быть, последовательность $u \circ \varphi_k$ ограничена в $W_q^1(\Omega)$.

В силу рефлексивности пространства $W_q^1(\Omega)$ (напомним, что $q > 1$) существует подпоследовательность (обозначена тем же символом) $u \circ \varphi_k$, слабо сходящаяся к некоторой функции $g \in W_q^1(\Omega)$.

Так как гомеоморфизмы φ_k сходились к φ_0 в $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ и u — липшицева функция, то слабый предел g почти всюду совпадает с $u \circ \varphi_0$.

Используя полунепрерывность нормы при слабой сходимости, выводим

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0^{-1}(B)} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)|^q dx &= \int_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)|^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)|^q dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)|^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx. \end{aligned}$$

Напомним, что носитель функции u содержится в шаре, поэтому интегрирование фактически ведется по прообразу этого шара.

Неравенство

$$\int_{\varphi_k^{-1}(B)} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)|^q dx \leq \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx$$

следует из правила дифференцирования композиции (см. лемму 13):

$$\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x) = \nabla_h u(\varphi_k(x)) D_h \varphi_k(x)$$

для п. вс. $x \in \Omega$. Отсюда выводим

$$|\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)| \leq |\nabla_h u(\varphi_k(x))| |D_h \varphi_k(x)|,$$

при этом величина $|\nabla_h u(\varphi_k(x))|$ не больше 1 на множестве $\varphi_k^{-1}(B)$ и равна 0 в дополнении к $\varphi_k^{-1}(B)$.

Таким образом, приходим к неравенству

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B)} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)|^q dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx. \quad (8)$$

Аналогично соотношению (8) нетрудно получить оценку

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B)} \max\{|\nabla_h(u_1 \circ \varphi_0)|^q, \dots, |\nabla_h(u_m \circ \varphi_0)|^q\} dx \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx \quad (9)$$

для произвольного конечного набора функций $u_1, \dots, u_m \in \mathcal{F}$. Действительно, достаточно выделить подпоследовательность так, что $u_l \circ \varphi_k \rightharpoonup u_l \circ \varphi_0$ при $k \rightarrow \infty$ в $W_q^1(\Omega)$ для всех $l = 1, 2, \dots, m$.

Покажем, что из полученных соотношений (8), (9) следует неравенство (7).

Рассуждая аналогично доказательству леммы 3.1 из работы [7], нетрудно показать, что для п. вс. $x \in \Omega$ имеет место равенство

$$\sup\{|\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)| \mid u \in \mathcal{F}\} = \begin{cases} |D_h \varphi_0(x)|, & \text{если } x \in \varphi_0^{-1}(B), \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (10)$$

Теперь воспользуемся идеей из [20, теорема 4.2]. Занумеруем семейство $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, \dots\}$. Тогда монотонная последовательность

$$w_l(x) = \max\{|\nabla_h(u_k \circ \varphi_0)(x)| \mid k = 1, 2, \dots, l\}$$

сходится к $\sup\{|\nabla_h(u \circ \varphi_0)| \mid u \in \mathcal{F}\}$ п. вс. при $l \rightarrow \infty$ (см. (10)).

Применяя теорему Беппо Леви и неравенство (9), выводим

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0^{-1}(B)} |D_h \varphi_0(x)|^q dx &= \int_{\varphi_0^{-1}(B)} \lim_{l \rightarrow \infty} w_l^q dx \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\varphi_0^{-1}(B)} \max\{|\nabla_h(u_k \circ \varphi_0)(x)|^q \mid k = 1, 2, \dots, l\} dx \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\varphi_k^{-1}(B)} |D_h \varphi_k|^q dx. \quad \square \end{aligned}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
2. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993.
3. Iwaniec T., Martin G. Geometric function theory and non-linear analysis. Oxford: Clarendon Press, 2002.
4. Водопьянов С. К. О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно // Мат. тр. 2002. Т. 5, № 2. С. 92–137.
5. Водопьянов С. К., Молчанова А. О. Полунепрерывность снизу коэффициента искажения отображения с ограниченным $(\theta, 1)$ -весовым (p, q) -искажением // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 999–1011.
6. Vodopyanov S. K., Molchanova A. O. The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{p,q}$ -homeomorphisms // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. V. 87, N 4. P. 47–90.
7. Водопьянов С. К., Павлов С. В. Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением // Современная математика. Фундаментальные направления. 2024. Т. 70, № 2. 19 с.
8. Rothschild L. P., Stein E. M. Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.
9. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Princeton Math. Notes; V. 28).
10. Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzonni F. Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2007. (Springer Monogr. Math.).
11. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
12. Vodop'yanov S. K. $\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
13. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.
14. Богачев В. И. Основы теории меры. М.; Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2006. Т. 1.
15. Brooks J. K., Chacon R. V. Continuity and compactness of measures // Adv. Math. 1980. V. 37. P. 16–26.
16. Brooks J. K., Chacon R. V. Convergence theorems in the theory of diffusions // Measure theory and its applications. Berlin: Springer-Verl., 1983. P. 79–93. (Lecture Notes Math.; V. 1033).
17. Ball J. M., Murat F. Remarks on Chacon's biting lemma // Proc. Amer. Math. Soc. 1989. V. 107, N 3. P. 655–663.

-
18. Водопьянов С. К., Сбоев Д. А. Полунепрерывность снизу коэффициентов искажения гомеоморфизмов с ограниченным $(1, \sigma)$ -весовым (q, p) -искажением на группах Карно // Изв. вузов. Математика. 2024. № 3. С. 84–90.
 19. Vodopyanov S. K. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–302.
 20. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.

Поступила в редакцию 3 апреля 2024 г.

После доработки 3 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович,
Сбоев Данил Алексеевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, dnlsboev@gmail.com

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЯДА ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА — СОБОЛЕВА

Р. М. Гаджимирзаев

Аннотация. Рассмотрена задача о приближении функций $f(x)$ из пространства $W_{L_w^2}^r$, $w(x) = e^{-x}$, посредством частичных сумм $S_{r,n+r}(f, x)$ ряда Фурье по системе полиномов, ортогональной по Соболеву и порожденной системой классических полиномов Лагерра. Получены оценки скорости сходимости частичных сумм $S_{r,n+r}(f, x)$ к $f(x)$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.402

Ключевые слова: полином Лагерра, ряд Фурье, аппроксимативные свойства, скалярное произведение типа Соболева.

§ 1. Введение

На протяжении более трех десятилетий исследование систем полиномов, ортогональных относительно скалярного произведения Соболева, вызывает огромный интерес. Отчасти это связано с тем, что соболевские скалярные произведения и соответствующие им ортогональные системы (и их дифференциальные аналоги) играют важную роль во многих проблемах теории функций, квантовой механики, математической физики, вычислительной математики и т. д. [1–4]. Ряды Фурье по ним обладают важными для приложений свойствами, которые отсутствуют у рядов Фурье по классическим ортогональным системам. Например, ряды Фурье по соболевским полиномам оказываются более естественным, чем ряды Фурье по классическим ортогональным полиномам, аппаратом для приближенного решения краевых задач, в которых требуется контроль поведения приближенного решения в одной или нескольких точках [5–7]. При решении таких задач важную роль играют вопросы сходимости и скорости сходимости рядов Фурье в различных функциональных пространствах.

В работах [3, 6, 8–19] были исследованы сходимости и аппроксимативные свойства рядов Фурье по системам функций, ортогональным относительно различных скалярных произведений типа Соболева. В частности, в [17] была рассмотрена система полиномов

$$l_{r,r+n}^\alpha(x) = \frac{1}{(r-1)!\sqrt{h_n^\alpha}} \int_0^x (x-t)^{r-1} L_n^\alpha(t) dt, \quad n \geq 0.$$
$$l_{r,n}^\alpha(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq n \leq r-1,$$

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-00143).

ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения

$$\langle f, g \rangle = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int_0^{\infty} f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)e^{-x}x^{\alpha} dx$$

и порожденная системой классических полиномов Лагерра $L_n^{\alpha}(x)$. Было показано, что система $\{l_{r,n}^{\alpha}(x)\}$ полна в пространстве Соболева $W_{L_{\rho}^2}^r$, $\rho(x) = e^{-x}x^{\alpha}$, $\alpha > -1$. Здесь L_{ρ}^p — пространство измеримых функций f , определенных на полуоси $[0, \infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L_{\rho}^p} = \left(\int_0^{\infty} |f(x)|^p \rho(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$W_{L_{\rho}^p}^r$ — пространство функций f , непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a, b] \subset [0, \infty)$, а $f^{(r)} \in L_{\rho}^p$. В той же работе было показано, что ряд Фурье функции $f \in W_{L_{\rho}^2}^r$ по этой системе имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \hat{f}_{r,k}^{\alpha} l_{r,k}^{\alpha}(x), \quad (1)$$

где

$$\hat{f}_{r,k}^{\alpha} = \frac{\sqrt{\Gamma(k-r+1)}}{\sqrt{\Gamma(k-r+\alpha+1)}} \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) L_{k-r}^{\alpha}(t) \rho(t) dt, \quad k \geq r. \quad (2)$$

В [20] была доказана следующая теорема о сходимости ряда (1).

Теорема А. Пусть $-1 < \alpha < 1$. Тогда если $f \in W_{L_{\rho}^p}^r$, то при $p \geq 2$ ряд (1) сходится равномерно к f на любом отрезке $[0, A]$. Если $1 \leq p < 2$, то существует функция $f \in W_{L_{\rho}^p}^r$, ряд Фурье которой расходится в точке $x = \pi^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема А при $p = 2$ доказана в [17].

Далее, при $\alpha = 0$ для полиномов $l_{r,r+n}^0(x)$ имеет место равенство [17, следствие 3.1]

$$l_{r,r+n}^0(x) = \frac{x^r L_n^r(x)}{(n+r)^{[r]}},$$

где $(n+r)^{[r]} = (n+r)(n+r-1) \dots (n+1)$. Через $S_{r,n+r}(f, x)$ обозначим частичную сумму ряда (1) при $\alpha = 0$:

$$S_{r,n+r}(f, x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0) \frac{x^{\nu}}{\nu!} + x^r \sum_{k=0}^n \frac{\hat{f}_{r,k+r}^0}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(x). \quad (3)$$

Из (3) следует, что для $S_{n+r}(f, x)$ имеют место равенства

$$S_{r,n+r}^{(\nu)}(f, 0) = f^{(\nu)}(0), \quad 0 \leq \nu \leq r-1. \quad (4)$$

В [19] при $r = 1$ был исследован вопрос о скорости сходимости ряда (1) к функции $f \in W_{L_w^2}^1$, $w(x) = e^{-x}$. В частности, была доказана

Теорема В. Пусть $x \in [0, \infty)$, $f \in W_{L_w^2}^1$ такова, что $|f'(x)\sqrt{w(x)}| \leq 1$. Тогда имеет место оценка

$$\frac{x^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x+1}}|f(x) - S_{1,n+1}(f, x)| \leq c \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

где c — положительная константа.

Целью данной работы является обобщение теоремы В на случай произвольного r . При этом получены оценки, которые учитывают свойство (4). Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $w(x) = e^{-x}$, $\nu = 4n + 2r + 2$, $f \in W_{L_w^2}^r$ такова, что $|f^{(r)}(x)|\sqrt{w(x)} \leq 1$. Тогда имеют место оценки

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}}|f(x) - S_{r,n+r}(f, x)| \leq c(r) \begin{cases} \sqrt{n}x^r, & x \in [0, \frac{3}{\nu}]; \\ n^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}\ln(n+1), & x \in (\frac{3}{\nu}, \frac{\nu}{2}]; \\ n^{-\frac{r}{2}+\frac{1}{3}}\ln(n+1), & x \in (\frac{\nu}{2}, \frac{3\nu}{2}]; \\ n^{-r}x^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{4}}, & x > \frac{3\nu}{2}. \end{cases}$$

Эта теорема доказана в § 4.

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

Хорошо известно [21], что полиномы Лагерра $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha > -1$ ортогональны на полуоси относительно веса $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$:

$$\int_0^\infty L_n^\alpha(x)L_m^\alpha(x)\rho(x)dx = h_n^\alpha\delta_{n,m},$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $h_n^\alpha = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}$. Формула Кристоффеля — Дарбу для этих полиномов имеет вид

$$K_n^\alpha(x, t) = \sum_{k=0}^n \frac{L_k^\alpha(x)L_k^\alpha(t)}{h_k^\alpha} = \frac{n+1}{h_n^\alpha} \frac{L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(t) - L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(t)}{x-t}. \quad (5)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства этих полиномов: рекуррентная формула

$$L_0^\alpha(x) = 1, \quad L_1^\alpha(x) = -x + \alpha + 1,$$

$$nL_n^\alpha(x) = (-x + 2n + \alpha - 1)L_{n-1}^\alpha(x) - (n + \alpha - 1)L_{n-2}^\alpha(x), \quad n \geq 2; \quad (6)$$

равенства

$$L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x), \quad (7)$$

$$nL_n^\alpha(x) = (n + \alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(x). \quad (8)$$

В [22, 23] для $L_n^\alpha(x)$ при $\alpha > -1$ и $\theta = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$ получены весовые оценки вида

$$e^{-\frac{x}{2}}|L_n^\alpha(x)| \leq c(\alpha)A_n^\alpha(x), \quad (9)$$

где здесь и далее $c, c(\alpha)$ — положительные числа, зависящие от указанных параметров,

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \leq x \leq \frac{1}{\theta}; \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < x \leq \frac{\theta}{2}; \\ [\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |x - \theta|)]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < x \leq \frac{3\theta}{2}; \\ e^{-\frac{x}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < x. \end{cases}$$

Отсюда и из (9) следует, что при $\alpha = 0$ для $L_n^0(x) = L_n(x)$ справедлива оценка

$$e^{-\frac{x}{2}} |L_n(x)| \leq c. \quad (10)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathcal{K}_n^r(x, t) = \sum_{k=0}^n L_k^r(x) L_k(t)$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$(x-t)\mathcal{K}_n^r(x, t) = (n+1)(L_n^r(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}^r(x)L_n(t)) + r \sum_{k=0}^n L_k^{r-1}(x)L_k(t). \quad (11)$$

Доказательство. Из (6) при $\alpha = 0$ и $\alpha = r$ имеем

$$kL_k(t) + (k-1)L_{k-2}(t) = (2k+r-1)L_{k-1}(t) - rL_{k-1}(t) - tL_{k-1}(t), \quad (12)$$

$$kL_k^r(x) + (k-1)L_{k-2}^r(x) = (2k+r-1)L_{k-1}^r(x) - rL_{k-2}^r(x) - xL_{k-1}^r(x). \quad (13)$$

Умножим (12) на $L_{k-1}^r(x)$, (13) на $L_{k-1}(t)$ и вычтем из первого полученного равенства второе (попутно воспользуемся равенством (7)):

$$\begin{aligned} (x-t)L_{k-1}^r(x)L_{k-1}(t) &= k[L_{k-1}^r(x)L_k(t) - L_k^r(x)L_{k-1}(t)] \\ &\quad - (k-1)[L_{k-2}^r(x)L_{k-1}(t) - L_{k-1}^r(x)L_{k-2}(t)] + rL_{k-1}^{r-1}(x)L_{k-1}(t). \end{aligned}$$

Суммируя это равенство по k от 1 до $n+1$ и полагая $L_{-1}^r(x) = L_{-1}(t) = 0$, получим равенство (11). $\square$

Лемма 2. *Для величины $\mathcal{K}_n^r(x, t)$ справедливо равенство*

$$\begin{aligned} (x-t)\mathcal{K}_n^r(x, t) &= xL_n^{r+1}(x)L_n(t) - tL_n^r(x)L_n^1(t) - rL_n^r(x)L_n(t) \\ &\quad + r \sum_{k=0}^n L_k^{r-1}(x)L_k(t). \end{aligned}$$

Доказательство. Из (8) при $\alpha = 0$ и $\alpha = r$ имеем

$$L_{n+1}(t) = L_n(t) - \frac{t}{n+1}L_n^1(t),$$

$$L_{n+1}^r(x) = \frac{n+r+1}{n+1}L_n^r(x) - \frac{x}{n+1}L_n^{r+1}(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} L_n^r(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}^r(x)L_n(t) &= \frac{x}{n+1}L_n^{r+1}(x)L_n(t) - \frac{t}{n+1}L_n^r(x)L_n^1(t) - \frac{r}{n+1}L_n^r(x)L_n(t). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение леммы 2. $\square$

Лемма 3. Пусть $x \in [0, \infty)$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{|r|}} \right)^2 \leq c(r) e^{2x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из равенства [24, с. 623, формула 6]

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! L_k^\alpha(x) L_k^\alpha(y)}{(\alpha+1)_k (k+1)} = \frac{\alpha}{(xy)^\alpha} e^{x+y} \gamma(\alpha, x) \Gamma(\alpha, y), \quad 0 < x \leq y,$$

где $\gamma(\alpha, x)$ и $\Gamma(\alpha, y)$ — неполные гамма-функции, определяемые равенствами

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \Gamma(\alpha, x) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt,$$

при $\alpha = r$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{|r|}} \right)^2 &\leq r! x^{2r} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(L_k^r(x))^2}{(k+r)^{|r|} (k+1)} \\ &= r! e^{2x} \gamma(r, x) \Gamma(r, x) \leq r! (\Gamma(r))^2 e^{2x} = r! ((r-1)!)^2 e^{2x}. \quad \square \end{aligned}$$

Нам также понадобится следующая лемма, доказанная в [25, лемма 1].

Лемма 4. Пусть $\alpha > -1$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, \infty)$. Тогда имеют место следующие оценки:

$$e^{-x} K_n^\alpha(x, x) \leq c(\alpha) \begin{cases} n^{-\alpha}, & x \in [\theta_n/2, 3\theta_n/2], \\ n^{1-\alpha} (A_n^\alpha(x))^2, & x \in [0, \theta_n/2] \cup [3\theta_n/2, \infty). \end{cases}$$

Рассмотрим величину

$$I = \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt$$

и оценим ее поведение при $x \in [0, \infty)$.

Лемма 5. Пусть $\nu = \nu_n = 4n + 2r + 2$, $x \in [0, \frac{3}{\nu}]$. Тогда имеет место оценка

$$I \leq c(r) \nu^{r+\frac{1}{2}} x^r.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем представление

$$I = \left(\int_0^{4/\nu} + \int_{4/\nu}^{\nu/2} + \int_{\nu/2}^{3\nu/2} + \int_{3\nu/2}^\infty \right) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Из (9) получаем

$$I_1 \leq c(r) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{4/\nu} \sum_{k=0}^n \nu_k^r dt \leq c(r) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+1} \frac{4}{\nu} = c(r) \nu^r x^r. \quad (14)$$

Для оценки величины I_2 воспользуемся леммой 2 и запишем неравенство

$$I_2 \leq I_2^1 + I_2^2 + I_2^3 + I_2^4.$$

Из (9) получаем оценки для I_2^1 , I_2^2 , I_2^3 :

$$\begin{aligned} I_2^1 &\leq \frac{c(r)x^{r+1}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+1} \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}}}{t-x} dt \leq \frac{c(r)x^{r+1}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+\frac{3}{4}} \int_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{5}{4}} dt \leq \frac{c(r)x^{r+1}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+1}, \\ I_2^2 &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^r \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{t\nu^{\frac{1}{4}} t^{-\frac{3}{4}}}{t-x} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+\frac{1}{4}} \int_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{3}{4}} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r+\frac{1}{2}}, \\ I_2^3 &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^r \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}}}{t-x} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{r-\frac{1}{4}} \int_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{5}{4}} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^r. \end{aligned}$$

Величину I_2^4 оценим с помощью (9) и (10):

$$\begin{aligned} I_2^4 &= \frac{rx^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{e^{-\frac{x+t}{2}}}{t-x} \left| \sum_{k=0}^n L_k^{r-1}(x) L_k(t) \right| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{1}{t} \sum_{k=0}^n \nu_k^{r-1} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^r \int_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^r \ln(n+1). \end{aligned}$$

Таким образом, из оценок для I_2^i выводим

$$I_2 \leq c(r) \nu^{r+\frac{1}{2}} x^r. \quad (15)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для I_3 и I_4 справедливы оценки

$$I_3 \leq c(r) \nu^{r+\frac{1}{2}} x^r, \quad I_4 \leq c(r) \nu^{r+1} e^{-\frac{3n}{4}} x^r.$$

Отсюда и из (14), (15) получаем

$$I \leq c(r) \nu^{r+\frac{1}{2}} x^r. \quad \square$$

Лемма 6. Пусть $x \in (\frac{3}{\nu}, \frac{\nu}{2}]$. Тогда имеет место оценка

$$I \leq c(r) \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1).$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$D_1 = [0, x - \sqrt{x/\nu}], \quad D_2 = (x - \sqrt{x/\nu}, x + \sqrt{x/\nu}), \quad D_3 = [x + \sqrt{x/\nu}, \infty). \quad (16)$$

Тогда величину I можно записать в виде

$$I = \left(\int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3} \right) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

С помощью неравенства Коши — Буняковского и леммы 4 оценим J_2 :

$$J_2 = \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{D_2} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \left(e^{-x} \sum_{k=0}^n (L_k^r(x))^2 \right)^{1/2} \int_{D_2} (e^{-t} K_n^0(t, t))^{1/2} dt \\
&\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} ((n+r)^{|r|} e^{-x} K_n^r(x, x))^{1/2} \int_{D_2} (n\nu^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}})^{1/2} dt \\
&\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r n^{1-r} \nu^{r-\frac{1}{2}} x^{-r-\frac{1}{2}})^{1/2} \nu^{\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{\nu}} \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}}. \quad (17)
\end{aligned}$$

Перейдем к оценке J_1 . Пусть $D_1^1 = [0, \frac{1}{\nu}]$, $D_1^2 = (\frac{1}{\nu}, x - \sqrt{\frac{x}{\nu}}]$. Тогда

$$J_1 = \left(\int_{D_1^1} + \int_{D_1^2} \right) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt = J_1^1 + J_1^2.$$

Из леммы 4 имеем

$$J_1^1 \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r n^{1-r} \nu^{r-\frac{1}{2}} x^{-r-\frac{1}{2}})^{1/2} \int_{D_1^1} n^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}}. \quad (18)$$

Для оценки величины J_1^2 воспользуемся леммой 2 и запишем

$$J_1^2 \leq J_1^{21} + J_1^{22} + J_1^{23} + J_1^{24}.$$

Из весовой оценки (9) имеем

$$\begin{aligned}
J_1^{21} &= \frac{x^{r+1}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} |L_n^{r+1}(x)| \int_{D_1^2} \frac{e^{-\frac{t}{2}} |L_n(t)|}{x-t} dt \\
&\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_{D_1^2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} dt = \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \int_{1/\nu x}^{1-\sqrt{1/\nu x}} \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{1-y} dy \\
&\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \left(\int_{1/\nu x}^{1/3} y^{-\frac{1}{4}} dy + \int_{1/3}^{1-\sqrt{1/\nu x}} \frac{1}{1-y} dy \right) \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \sqrt{\nu x}.
\end{aligned}$$

Аналогично можно оценить величины J_1^{22} и J_1^{23} :

$$J_1^{22} \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \sqrt{\nu x}, \quad J_1^{23} \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}-\frac{1}{2}} \ln \sqrt{\nu x}.$$

Оценим J_1^{24} . Для этого воспользуемся неравенством Коши — Буняковского и леммой 4:

$$\begin{aligned}
J_1^{24} &\leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (e^{-x} n^{r-1} K_n^{r-1}(x, x))^{1/2} \int_{D_1^2} \frac{1}{x-t} (e^{-t} K_n^0(t, t))^{1/2} dt \\
&\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \int_{D_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} dt \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \sqrt{\nu x}.
\end{aligned}$$

Из оценок для J_1^{2i} получаем

$$J_1^2 \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \sqrt{\nu x}.$$

Отсюда и из (18) выводим

$$J_1 \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \sqrt{\nu x}. \quad (19)$$

Перейдем к оценке величины J_3 . Обозначим

$$D_3^1 = [x + \sqrt{x/\nu}, \nu/2 + \sqrt{x/\nu}], \quad D_3^2 = (\nu/2 + \sqrt{x/\nu}, 3\nu/2], \quad D_3^3 = (3\nu/2, \infty).$$

С учетом этих обозначений можно записать

$$J_3 = \left(\int_{D_3^1} + \int_{D_3^2} + \int_{D_3^3} \right) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt = J_3^1 + J_3^2 + J_3^3. \quad (20)$$

Величина J_3^3 оценивается аналогично величине J_2 :

$$\begin{aligned} J_3^3 &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r e^{-x} K_n^r(x, x))^{1/2} \int_{D_3^3} (e^{-t} K_n^0(t, t))^{1/2} dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r n^{1-r} \nu^{r-\frac{1}{2}} x^{-r-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \int_{D_3^3} (ne^{-\frac{t}{2}})^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{3}{4}} e^{-\frac{3\nu}{8}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Величины J_3^1 и J_3^2 оцениваются по той же схеме, что и J_1^2 . Поэтому ограничимся оценкой величины J_3^2 . Для этого воспользуемся леммой 2 и запишем неравенство

$$J_3^2 \leq J_3^{21} + J_3^{22} + J_3^{23} + J_3^{24}.$$

Далее, из (9) имеем

$$\begin{aligned} J_3^{21} &\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \int_{D_3^2} \frac{dt}{(t-x)\nu^{\frac{1}{4}}(\nu^{\frac{1}{3}}+|\nu-t|)^{1/4}} \\ &= \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \left(\int_{\nu/2+\sqrt{x/\nu}}^{3\nu/4} + \int_{3\nu/4}^{3\nu/2} \right) \frac{dt}{(t-x)(\nu^{\frac{1}{3}}+|\nu-t|)^{1/4}} \\ &\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \left(\frac{1}{\nu^{\frac{1}{4}}} \ln \frac{\frac{3\nu}{4}-x}{\frac{\nu}{2}+\sqrt{\frac{x}{\nu}}-x} + \frac{1}{\nu^{\frac{3}{4}}} \right) \\ &\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \left(\ln \frac{\frac{3\nu}{4}-x}{\frac{\nu}{2}+\sqrt{\frac{x}{\nu}}-x} + 1 \right). \end{aligned}$$

Аналогичные оценки имеют место для J_3^{22} и J_3^{23} :

$$\begin{aligned} J_3^{22} &\leq c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}(x+1)^{\frac{r}{2}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \left(\ln \frac{\frac{3\nu}{4}-x}{\frac{\nu}{2}+\sqrt{\frac{x}{\nu}}-x} + 1 \right), \\ J_3^{23} &\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}-\frac{3}{4}} \left(\ln \frac{\frac{3\nu}{4}-x}{\frac{\nu}{2}+\sqrt{\frac{x}{\nu}}-x} + 1 \right). \end{aligned}$$

Величину J_3^{24} оценим так же, как и J_1^{24} :

$$\begin{aligned} J_3^{24} &\leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (e^{-x} n^{r-1} K_n^{r-1}(x, x))^{1/2} \int_{D_3^2} \frac{1}{t-x} (e^{-t} K_n^0(t, t))^{1/2} dt \\ &\leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \int_{D_3^2} \frac{dt}{t-x} dt \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}} \ln \frac{\frac{3\nu}{2} - x}{\frac{\nu}{2} + \sqrt{\frac{x}{\nu}} - x}. \end{aligned}$$

Из оценок для J_3^{2i} выводим

$$J_3^2 \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1). \quad (22)$$

Такая же оценка имеет место для J_3^1 :

$$J_3^1 \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1). \quad (23)$$

Из равенства (20) и оценок (21)–(23) находим

$$J_3 \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1), \quad (24)$$

а из (17), (19) и (24), в свою очередь, получаем

$$I \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1) \leq c(r) \nu^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(n+1). \quad \square$$

Лемма 7. Пусть $x \in (\frac{\nu}{2}, \frac{3\nu}{2}]$. Тогда имеет место оценка

$$I \leq c(r) n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(n+1). \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь обозначениями (16), можно записать равенство

$$I = \left(\int_{D_1} + \int_{D_2} + \int_{D_3} \right) \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt = H_1 + H_2 + H_3.$$

Величину H_2 оценим с помощью леммы 4:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{D_2} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^r(x, t)| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r e^{-x} K_n^r(x, x))^{1/2} \int_{D_2} (e^{-t} K_n^0(t, t))^{1/2} dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r n^{-r})^{1/2} \sqrt{\frac{x}{\nu}} \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}}. \quad (26) \end{aligned}$$

Чтобы оценить H_1 , разобьем D_1 на промежутки

$$\mathcal{D}_1^1 = [0, 1/\nu], \quad \mathcal{D}_1^2 = (1/\nu, \nu/2 - \sqrt{x/\nu}], \quad \mathcal{D}_1^3 = (\nu/2 - \sqrt{x/\nu}, x - \sqrt{x/\nu}]$$

Тогда

$$H_1 = H_1^1 + H_1^2 + H_1^3.$$

Величину H_1^1 оценим так же, как и H_2 :

$$H_1^1 \leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{\mathcal{D}_1^1} n^{\frac{1}{2}} dt \leq \frac{c(r)x^{\frac{r}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{1}{2}}. \quad (27)$$

Перейдем к оценке H_1^2 . Для этого обратимся к лемме 2 и запишем неравенство

$$H_1^2 \leq H_1^{21} + H_1^{22} + H_1^{23} + H_1^{24},$$

в котором

$$\begin{aligned} H_1^{21} &= \frac{x^{r+1}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} |L_n^{r+1}(x)| \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{1}{x-t} e^{-\frac{t}{2}} |L_n(t)| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^{r+\frac{3}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{7}{12}} \int_{1/\nu x}^{\nu/2x - \sqrt{1/\nu x}} \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{1-y} dy \leq \frac{c(r)x^{r+\frac{3}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{7}{12}} \ln(n+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1^{22} &= \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} |L_n^r(x)| \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{t}{x-t} e^{-\frac{t}{2}} |L_n^1(t)| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \frac{1}{(\nu^{\frac{1}{3}} + |\nu - x|)^{\frac{1}{4}}} \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{x-t} dt \leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{1}{6}} \ln(n+1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_1^{23} &= \frac{rx^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{2}} |L_n^r(x)| \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{1}{x-t} e^{-\frac{t}{2}} |L_n(t)| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{7}{12}} \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} dt \leq \frac{c(r)x^{r-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{7}{12}} \ln(n+1). \end{aligned}$$

Чтобы оценить H_1^{24} , воспользуемся леммой 4:

$$\begin{aligned} H_1^{24} &= \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_{\mathcal{D}_1^2} e^{-\frac{x+t}{2}} |\mathcal{K}_n^{r-1}(x, t)| dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^{r-1} e^{-x} K_n^{r-1}(x, x))^{1/2} \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{1}{x-t} (e^{-t} K_n^0(t, t) 1)^{1/2} dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{1}{4}} \int_{\mathcal{D}_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} dt \frac{c(r)x^{r-\frac{1}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{\frac{1}{4}} \ln(n+1). \end{aligned}$$

Собирая оценки для H_1^{2i} , получаем

$$H_1^2 \leq \frac{c(r)x^{r+\frac{3}{4}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \nu^{-\frac{7}{12}} \ln(n+1) \leq c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{6}} \ln(n+1). \quad (28)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что для H_1^3 имеет место оценка

$$H_1^3 \leq c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(n+1). \quad (29)$$

Из (27)–(29) выводим

$$H_1 \leq c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(n+1). \quad (30)$$

Величина H_3 оценивается по той же схеме, что и H_1 . Поэтому для нее справедлива оценка

$$H_3 \leq c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(n+1). \quad (31)$$

Таким образом, из (26), (30) и (31) следует оценка (25). $\square$

Лемма 8. Пусть $x \in (\frac{3\nu}{2}, \infty)$. Тогда имеет место оценка

$$I \leq c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{4}}.$$

Доказательство. Из неравенства Коши — Буняковского, леммы 4 и оценки (9) имеем

$$\begin{aligned} I &\leq \frac{c(r)x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (n^r e^{-x} K_n^r(x, x))^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty (e^{-t} K_n^0(t, t))^{\frac{1}{2}} dt \\ &\leq \frac{c(r)x^r n^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{4}} \left(n^{\frac{1}{2}} \int_0^{1/\nu} dt + \nu^{\frac{1}{4}} \int_{1/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{1}{4}} dt + c \int_{\nu/2}^{3\nu/2} dt + n^{\frac{1}{2}} \int_{3\nu/2}^\infty e^{-\frac{t}{4}} dt \right) \\ &\leq \frac{c(r)x^r n^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{4}} (\nu^{-\frac{1}{2}} + c\nu + n^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{3\nu}{8}}) \leq \frac{c(r)n^{\frac{3}{2}}x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} e^{-\frac{x}{4}} \leq c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{4}}. \quad \square \end{aligned}$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Пусть $x \in [0, \frac{3}{\nu}]$. Из формулы Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} f^{(r)}(t) dt$$

и равенств (2), (3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} |f(x) - S_{r,n+r}(f, x)| &\leq \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t)| dt \\ &\quad + \frac{e^{-\frac{x}{2}} x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^\infty |f^{(r)}(t)| e^{-t} \left| \sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} \right| dt = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2. \end{aligned}$$

Поскольку $|f^{(r)}(t)| \sqrt{w(t)} \leq 1$, то

$$\mathcal{S}_1 = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \frac{1}{(r-1)!} \int_0^x (x-t)^{r-1} |f^{(r)}(t)| dt \leq \frac{x^r}{r!(x+1)^{\frac{r}{2}}} \leq \frac{x^r}{r!}.$$

Для оценки второго слагаемого применим к сумме $\sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k(x)}{(k+r)^{[r]}}$ преобразование Абеля:

$$\sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x) L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} = \frac{\mathcal{K}_n^r(x, t)}{(n+r)^{[r]}} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{(k+r)^{[r]}} - \frac{1}{(k+r+1)^{[r]}} \right) \mathcal{K}_k^r(x, t).$$

Так как

$$\frac{1}{(k+r)^{[r]}} - \frac{1}{(k+r+1)^{[r]}} = \frac{r}{(k+r+1)(k+r)^{[r]}},$$

то

$$\sum_{k=0}^n \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} = \frac{\mathcal{K}_n^r(x,t)}{(n+r)^{[r]}} + r \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathcal{K}_k^r(x,t)}{(k+r+1)(k+r)^{[r]}}.$$

Отсюда и из леммы 5 получаем

$$\mathcal{S}_2 \leq c(r)\sqrt{n}x^r.$$

Тогда

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} |f(x) - S_{r,n+r}(f, x)| \leq \frac{x^r}{r!} + c(r)\sqrt{n}x^r \leq c(r)\sqrt{n}x^r.$$

Перейдем теперь к случаю, когда $x \in (\frac{3}{\nu}, \infty)$. Из (2) и (3) имеем

$$\begin{aligned} R_n(f, x) &= \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} (f(x) - S_{r,n+r}(f, x)) \\ &= \frac{x^r e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}} \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-t} L_k(t) dt \\ &= \frac{x^r e^{-\frac{x}{2}}}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) e^{-t} \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} dt. \quad (32) \end{aligned}$$

Почленное интегрирование в правой части равенства (32) можно обосновать следующим образом. Пусть

$$A_{r,n,m} = x^r e^{-\frac{x}{2}} \sum_{k=n+r+1}^m \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}}, \quad A_{r,n} = \lim_{m \rightarrow \infty} A_{r,n,m}.$$

Тогда

$$\int_0^{\infty} f^{(r)}(t) A_{r,n} e^{-t} dt - \int_0^{\infty} f^{(r)}(t) A_{r,n,m} e^{-t} dt \leq \|f^{(r)}\|_{L_w^2} \|A_{r,n} - A_{r,n,m}\|_{L_w^2}.$$

Докажем, что $\|A_{r,n} - A_{r,n,m}\|_{L_w^2} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. С этой целью покажем фундаментальность последовательности $A_{r,n,m}$:

$$\begin{aligned} \|A_{r,n,m+p} - A_{r,n,m}\|_{L_w^2}^2 &= \int_0^{\infty} \left(x^r e^{-\frac{x}{2}} \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} \right)^2 e^{-t} dt \\ &= e^{-x} \sum_{k=m+1}^{m+p} \left(\frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}} \right)^2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

так как ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^r L_k^r(x)}{(k+r)^{[r]}} \right)^2$ сходится (см. лемму 3).

Далее, из (32) имеем

$$\begin{aligned} |R_n(f, x)| &\leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \sum_{k=n+r+1}^{\infty} \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} \right| dt \\ &= \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x+t}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=n+r+1}^m \frac{L_k^r(x)L_k(t)}{(k+r)^{[r]}} \right| dt. \end{aligned}$$

В правой части этого неравенства произведем преобразование Абеля:

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{\mathcal{K}_m^r(x, t)}{(m+r)^{[r]}} - \frac{\mathcal{K}_{n+r}^r(x, t)}{(n+r+1)^{[r]}} \right| + \sum_{k=n+r+1}^{m-1} \frac{r \mathcal{K}_k^r(x, t)}{(k+r+1)(k+r)^{[r]}} \Big| dt.$$

Отсюда

$$|R_n(f, x)| \leq \frac{x^r}{(x+1)^{\frac{r}{2}}} \int_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\mathcal{K}_m^r(x, t)|}{(m+r)^{[r]}} + \frac{|\mathcal{K}_{n+r}^r(x, t)|}{(n+r+1)^{[r]}} + \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{r |\mathcal{K}_k^r(x, t)|}{(k+r+1)(k+r)^{[r]}} \right) dt = \mathcal{J}_1 + \frac{1}{(n+r+1)^{[r]}} \mathcal{J}_2 + \mathcal{J}_3.$$

Из леммы Фату [26, с. 170] и оценок, полученных в леммах 5–8, следует, что

$$\mathcal{J}_1 = 0.$$

Для величины $\mathcal{J}_2$ справедливы оценки, полученные в леммах 5–8. Оценим теперь $\mathcal{J}_3$ при $x > 3/\nu$. При этом рассмотрим три случая: 1) $x \in (3/\nu, \nu/2]$, 2) $(\nu/2, 3\nu/2]$, 3) $x \in (3\nu/2, \infty)$. Для $x \in (3/\nu, \nu/2]$ из леммы 6 получаем

$$\mathcal{J}_3 \leq c(r) \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{k^{\frac{r}{2}+\frac{1}{4}} \ln(k+1)}{k^{r+1}} = c(r) \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{\ln(k+1)}{k^{\frac{r}{2}+\frac{3}{4}}} \leq c(r) \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{4}}}.$$

Заметим, что $I \leq c(r)n^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(n+1)$ при $x \in [0, \infty)$. Воспользуемся этим фактом для оценки $\mathcal{J}_3$ во втором случае:

$$\mathcal{J}_3 \leq c(r) \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{k^{\frac{r}{2}+\frac{1}{3}} \ln(k+1)}{k^{r+1}} = c(r) \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{\ln(k+1)}{k^{\frac{r}{2}+\frac{2}{3}}} \leq c(r) \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{r}{2}-\frac{1}{3}}}.$$

В третьем случае воспользуемся леммой 8:

$$\mathcal{J}_3 \leq c(r)x^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{4}} \sum_{k=n+r+1}^\infty \frac{1}{k^{r+1}} \leq c(r)n^{-r}x^{\frac{r}{2}+\frac{3}{2}}e^{-\frac{x}{4}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Barry P., Rajković P. M., Petković M. D. An application of Sobolev orthogonal polynomials to the computation of a special Hankel determinant // Approximation and Computation (Chapter 4). 2011. V. 42. P. 53–60.
2. Осиленкер В. П. О рядах Фурье по обобщенным собственным функциям дискретного оператора Штурма — Лиувилля // Функц. анализ и его прил. 2018. Т. 52, № 2. С. 90–93.
3. Шарапуудинов И. И. Ортогональные по Соболеву системы функций и задача Коши для ОДУ // Изв. РАН. Сер. мат. 2019. Т. 83, № 2. С. 204–226.
4. Kilpeläinen T. Weighted Sobolev spaces and capacity // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. Math. 1994. V. 19, N 1. P. 95–113.
5. Marcellán F., Xu Y. On Sobolev orthogonal polynomials // Expo Math. 2015. V. 33. P. 308–352.
6. Шарапуудинов И. И. Ортогональные по Соболеву системы функций и некоторые их приложения // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 4. С. 87–164.

7. Fernández L., Marcellán F., Teresa E., Pérez M., Pinar A. Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods in boundary value problems // Appl. Numer. Math. 2024. V. 200. P. 254–272.
8. Marcellán F., Quintana Y., Urieles A. On the Pollard decomposition method applied to some Jacobi — Sobolev expansions // Turk. J. Math. 2013. V. 37, N 6. P. 934–948.
9. Ciaurri Ó., Mínguez J. Fourier series of Jacobi–Sobolev polynomials // Integral Transf. Spec. Funct. 2019. V. 30. P. 334–346.
10. Fejzullahu B. Xh. Asymptotic properties and Fourier expansions of orthogonal polynomials with a non-discrete Gegenbauer–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2010. V. 162, N 2. P. 397–406.
11. Fejzullahu B. Xh., Marcellán F., Moreno-Balcázar J. J. Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials: Asymptotics and a Cohen type inequality // J. Approx. Theory. 2013. V. 170. P. 78–93.
12. Marcellán F., Osilenker B. P., Rocha I. A. On Fourier series of a discrete Jacobi–Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2002. V. 117, N 1. P. 1–22.
13. Rocha I. A., Marcellán F., Salto L. Relative asymptotics and Fourier series of orthogonal polynomials with a discrete Sobolev inner product // J. Approx. Theory. 2003. V. 121, N 2. P. 336–356.
14. Marcellán F., Fejzullahu B. Xh. On convergence and divergence of Fourier expansions with respect to some Gegenbauer–Sobolev type inner product // Commun. Anal. Theory of Continued Fractions. 2009. N 16. P. 1–11.
15. Осиленкер Б. П. О линейных методах суммирования рядов Фурье по многочленам, ортогональным в дискретных пространствах Соболева // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 420–435.
16. Ciaurri Ó., Mínguez J. Fourier series of Gegenbauer–Sobolev polynomials // SIGMA Symm. Integr. Geom. Methods Appl. 2018. V. 14. P. 1–11.
17. Шарпудинов И. И., Магомед-Касумов М. Г. О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68.
18. Осиленкер Б. П. О мультипликаторах рядов Фурье по ортогональным многочленам Соболева // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 8. С. 44–82.
19. Гаджимирзаев Р. М. Об аппроксимативных свойствах рядов Фурье по полиномам Лагерра — Соболева // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 38–51.
20. Гаджимирзаев Р. М. О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 4. С. 416–423.
21. Cere G. Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.
22. Askey R., Wainger S. Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Am. J. Math. 1965. V. 87, N 3. P. 695–708.
23. Muckenhoupt B. Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II // Trans. Am. Math. Soc. 1970. V. 147, N 2. P. 433–460.
24. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2003. Т. 2.
25. Гаджимирзаев Р. М., Шах-Эмиров Т. Н. Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 4. С. 483–497.
26. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 1 марта 2024 г.

После доработки 2 апреля 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Гаджимирзаев Рамис Махмудович
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
ул. М. Гаджиева, 45, Махачкала 367032
ramis3004@gmail.com

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ БЕЗ ЭЛЕМЕНТОВ
ПОРЯДКА ДЕСЯТЬ. СЛУЧАЙ РАЗРЕШИМЫХ
ИЛИ ПОЧТИ ПРОСТЫХ ГРУПП

Цз. Го, В. Го, А. С. Кондратьев,
М. С. Нирова

Аннотация. В качестве основного результата статьи определены все конечные почти простые группы без элементов порядка 10. Кроме того, получено описание конечных разрешимых групп без элементов порядка $2p$ для любого нечетного простого числа p .

DOI 10.33048/smzh.2024.65.403

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, почти простая группа, граф Грюнберга — Кегеля (граф простых чисел).

1. Введение

Пусть G — конечная группа. Через $\pi(G)$ обозначается множество простых делителей ее порядка, а через $\omega(G)$ — множество порядков ее элементов. Графом Грюнберга — Кегеля (или графом простых чисел) группы G называется граф $\Gamma(G)$ с множеством вершин $\pi(G)$, в котором вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $p \neq q$ и $pq \in \omega(G)$.

Элементы небольших простых порядков p играют важную роль при изучении строения конечных групп. Если $p \in \{2, 3, 5\}$, то элементы порядка p встречаются в подавляющем большинстве конечных простых неабелевых групп. Так, если S — конечная простая неабелева группа, то $2 \in \pi(S)$ для всех S , $3 \in \pi(S)$ для всех S , кроме $S \cong Sz(q)$, $5 \in \pi(S)$ для всех S , кроме групп из небольшого списка (см. лемму 1 ниже). Если G — конечная группа четного порядка и $2 \neq p \in \pi(G)$, то важно знать, смежны или нет вершины 2 и p в графе $\Gamma(G)$ (см., например, [1]). Поэтому естественно возникает

Проблема 1. Описать конечные группы без элементов порядка $2p$ для (хотя бы небольшого) нечетного простого числа p .

Заметим, что по теореме Лагранжа при решении проблемы 1 можно считать, что $2p$ делит порядок группы.

Конечные простые неабелевы группы без элементов порядка 6 были определены еще в 1977 г. в трех независимых работах Н. Д. Подуфалова [2], Флетчера, Штельмахера и Стюарта [3] и Гордона [4]. Проблема описания общих конечных

Исследование выполнено при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (NSFC), проекты 11961017 и 12171126, и министерства науки и высшего образования Российской Федерации, проект «Уральский математический центр» (соглашение № 075-02-2024-1428).

групп без элементов порядка 6 была открыта более 40 лет. А. С. Кондратьев и Н. А. Минигулов [5] решили эту проблему без использования классификации конечных простых групп. Полученные ими результаты уже нашли применения при изучении конечных групп с заданными свойствами их графов Грюнберга — Кегеля (см., например, [6–8]).

Конечная группа порядка, делящегося на 5, в которой централизаторы элементов порядка 5 являются 5-группами, называется C_{55} -группой. Конечные простые неабелевы C_{55} -группы были определены в [9–11]. В работах [12, 13] было получено описание общих C_{55} -групп.

В нашей работе как частный случай проблемы 1 при $p = 5$ ставится следующая проблема, решение которой существенно обобщит описание C_{55} -групп.

Проблема 2. Описать конечные группы без элементов порядка 10.

Конечные неабелевы простые группы без элементов порядка 10 были определены недавно в [14, теорема 1.5]. Используя этот результат (см. лемму 2 ниже), мы существенно обобщаем его, определяя все конечные почти простые группы без элементов порядка 10 (см. теорему 1 ниже). Напомним, что конечная группа X называется почти простой, если $S \leq X \leq \text{Aut}(S)$ для некоторой конечной неабелевой простой группы S ; равносильно, если цокль группы X является конечной неабелевой простой группой.

Теорема 1. Пусть G — конечная почти простая группа с цоклем L и 5 делит $|G|$. Тогда G не содержит элементов порядка 10 в том и только том случае, если выполняется одно из следующих утверждений:

(1) группа $O^{\{2,5\}'}(G)$ изоморфна $L_2(5^f)$ для $f > 1$, $PGL_2(5^f)$ для $f > 1$ или $PGL_2^*(5^f)$ для четного f ;

(2) $L \cong L_2(q)$, $q \equiv \epsilon 1 \pmod{5}$ для $\epsilon \in \{+, -\}$, $(q - \epsilon 1)_2 \leq 2$ и либо $O^{\{2,5\}'}(G) = L$, либо $O^{\{2,5\}'}(G) \cong PGL_2^*(q)$, где q — квадрат нечетного числа, либо $O^{\{2,5\}'}(G) = L \rtimes \langle t \rangle$, где q — квадрат, $\epsilon = -$ и t — полевой автоморфизм порядка 2 группы L ;

(3) $L \cong L_3^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv -\epsilon 1 \pmod{5}$, q четно и либо $O^{\{2,5\}'}(G) = L$, либо q — квадрат, $\epsilon = +$ и $L \rtimes \langle d^{-1}td \rangle \leq O^{\{2,5\}'}(G) \leq PGL_3(q) \rtimes \langle d^{-1}td \rangle$ или $O^{\{2,5\}'}(G) = L \rtimes \langle t \rangle$, где t — соответственно полевой или граф-полевой автоморфизм порядка 2 группы L , а d — некоторый элемент из $\text{Inndiag}(L)$;

(4) $L \cong L_4^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $(q + \epsilon 1)_2 \leq 2$, $O^{\{2,5\}'}(G) = L$;

(5) $L \cong L_5^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, q четно, $O^{\{2,5\}'}(G) = L$;

(6) $L \cong S_4(q)$, $2 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $O^{\{2,5\}'}(G) = L$;

(7) $L \cong Sz(q)$, $q > 2$, $O^{\{2,5\}'}(G) = L$;

(8) $G = L \cong A_7$, M_{11} , M_{22} или M_{23} .

Другим результатом настоящей статьи является решение проблемы 1 для разрешимых групп. Доказана следующая

Теорема 2. Пусть p — простое число, $p > 3$, G — конечная разрешимая группа без элементов порядка $2p$ и $2p$ делит $|G|$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:

(1) группа $G/O(G)$ изоморфна циклической или (обобщенной) кватернионной 2-группе, $SL_2(3)$ или $SL_2(3) \cdot 2$, силовская p -подгруппа в $O(G)$ абелева и $O(G)$ имеет p -длину 1;

(2) $G/O_{p'}(G)$ — циклическая p -группа или группа Фробениуса с циклическим ядром порядка $|G|_p$ и циклическим дополнением порядка, делящего

$p - 1$, степень нильпотентности силовской 2-подгруппы из $O_{p'}(G)$ не превосходит $(p^2 - 1)/4$ (и эта оценка точна при $p = 5$) и $O_{p'}(G)$ имеет 2-длину, не превосходящую 1.

Как следствие теоремы 2 при $p = 5$ получается описание конечных разрешимых групп без элементов порядка 10. Заметим, что описание конечных разрешимых групп без элементов порядка 6 (случай $p = 3$) было получено ранее в [5, теорема 1]. Ключевыми результатами для доказательства теоремы 2 служат описание конечных групп с (обобщенной) кватернионной силовской 2-подгруппой (см. лемму 3 ниже) и описание Хигмана [15, теорема 1] (см. лемму 4 ниже) конечных разрешимых непримарных групп, порядки элементов которых являются степенями простых чисел.

В последующей статье предполагается исследовать случай конечных неразрешимых групп без элементов порядка 10 с нетривиальным разрешимым радикалом. При этом будут существенно использованы результаты настоящей статьи.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [16–18].

Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p обозначается p -часть числа n , т. е. наибольшая степень числа p , делящая n .

Полупрямое произведение группы A на группу B обозначается через $A \rtimes B$, а нерасщепляемое расширение группы A посредством группы B — через $A : B$.

Для конечной группы G и некоторого множества π простых чисел через $O_\pi(G)$ обозначается наибольшая нормальная π -подгруппа в G , а через $O^\pi(G)$ — наименьшая нормальная подгруппа в G , фактор-группа группы G по которой является π -группой. Полагаем для краткости $O(G) = O_2(G)$.

Используются также обозначения $L_n^\epsilon(q)$, $PGL_n^\epsilon(q)$ и $S_{2n}(q)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$ и $L_n^+(q) = L_n(q) = PSL_n(q)$, $L_n^-(q) = U_n(q) = PSU_n(q)$, $PGL_n^+(q) = PGL_n(q)$, $PGU_n^-(q) = PGU_n(q)$ и $S_{2n}(q) = Sp_{2n}(q)$.

Пусть $S = L_2(q)$, где $q = p^{2k}$, p — нечетное простое число и $k \in \mathbb{N}$. Положим $PGL_2^*(q) = S \langle \delta \varphi \rangle$, где $PGL_2(q) = S \langle \delta \rangle$ и φ — полевой автоморфизм порядка 2 группы S . Хорошо известно, что $PGL_2^*(q) \setminus S$ не содержит инволюций.

Рассмотрим некоторые результаты, используемые в доказательстве теорем.

Лемма 1 [19, лемма 1]. Конечная неабелева простая группа порядка, взаимно простого с 5, изоморфна одной из групп $L_2(q)$ ($3 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$), $L_3^\epsilon(q)$ ($\epsilon \in \{+, -\}$, $2 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$), $G_2(q)$ ($2 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$), ${}^2G_2(q)$ ($3 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$), ${}^3D_4(q)$ ($q \equiv \pm 2 \pmod{5}$).

Лемма 2 [14, теорема 1.5]. Пусть G — конечная неабелева простая группа. Тогда G не содержит элементов порядка 10 в том и только том случае, если G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(q)$, где либо $3 < q \equiv 0, \pm 2 \pmod{5}$, либо $q \equiv \epsilon 1 \pmod{5}$ для $\epsilon \in \{+, -\}$ и $(q - \epsilon 1)_2 \leq 2$; $L_3^\epsilon(q)$, где $\epsilon \in \{+, -\}$ и либо $2 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, либо $q \equiv -\epsilon 1 \pmod{5}$ и q четно; $L_4^\pm(q)$, где $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $\epsilon \in \{+, -\}$ и $(q + \epsilon 1)_2 \leq 2$; $L_5^\pm(q)$, где q четно или $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$; $S_4(q)$, где $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$; $G_2(q)$, где $2 < q \equiv \pm 2 \pmod{5}$; ${}^2G_2(q)$, где $q > 3$; ${}^3D_4(q)$, где $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$; $Sz(q)$, где $q > 2$; A_7 ; M_{11} ; M_{22} ; M_{23} .

Лемма 3 [15, теорема 1]. Пусть G — конечная разрешимая непримарная группа, порядки элементов которой являются степенями простых чисел. Тогда G бипримарна и верно одно из следующих утверждений:

- (a) G — группа Фробениуса;
- (b) G — 2-фробениусова группа, т. е. $G = ABC$, где A, AB — нормальные подгруппы группы G , а AB, BC — группы Фробениуса с ядрами A, B и дополнениями B, C соответственно.

Лемма 4 [16, замечание на с. 377]. Пусть G — конечная группа, силовская 2-подгруппа которой изоморфна (обобщенной) группе кватернионов, и $\overline{G} = G/O(G)$. Тогда верно одно из следующих утверждений:

- (a) $\overline{G}$ изоморфна силовской 2-подгруппе группы G ;
- (b) $\overline{G}$ изоморфна группе $2 \cdot A_7$;
- (c) $\overline{G}$ является расширением группы $SL_2(q)$, где q нечетно, посредством циклической группы нечетного или удвоенного нечетного порядка.

Лемма 5 [20, теорема 1]. Если G — конечная примарная группа, имеющая автоморфизм α простого порядка $p \geq 5$, и $C_G(\alpha) = 1$, то ступень нильпотентности группы G не превосходит $(p^2 - 1)/4$ и эта оценка точна при $p = 5$.

Лемма 6 [6, лемма 11]. Пусть p, q, r — попарно различные простые числа и G — конечная группа вида $G = P \rtimes (T \rtimes \langle x \rangle)$, где P — нетривиальная p -группа, T — q -группа, $|x| = r$ и $C_G(P) = Z(P)$. Пусть C — критическая подгруппа (см. [16, 5.3.11]) в T и $[T, \langle x \rangle] \neq 1$. Тогда либо $C_P(x) \neq 1$, либо $Z(T) \leq Z(C) \leq C_T(x)$, $q = 2$, $r = 1 + 2^n$ — простое число Ферма и $[C, \langle x \rangle]$ — экстраспециальная группа порядка 2^{2n+1} .

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — конечная почти простая группа с цоколем L и 5 делит $|G|$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть G не содержит элементов порядка 10. Покажем, что выполняется заключение теоремы 1. По лемме 2 группа L изоморфна одной из групп из заключения этой леммы.

Если группа L изоморфна спорадической группе, то $G = L$, так как ввиду [17] имеем $\text{Out}(M_{11}) = \text{Out}(M_{23}) = 1$, и группа $\text{Aut}(M_{22}) \cong M_{22}.2$ содержит элемент порядка 10.

Если $L \cong A_7$, то $G = L$, так как группа $\text{Aut}(A_7) \cong S_7$ содержит элемент порядка 10, а именно произведение независимых 5-цикла и транспозиции. Поэтому в рассмотренных случаях выполняется утверждение (8) теоремы 1.

Таким образом, в дальнейшем будем считать, что $L = \Phi(q)$ — простая группа лиева типа Φ над полем порядка $q = p^f$, где p — простое число и $f \in \mathbb{N}$. Ввиду [18, теорема 2.5.12] имеем $\text{Aut}(L) = \text{Inndiag}(L) \rtimes (\Phi_L \Gamma_L)$, где $\text{Inndiag}(L)$, Φ_L и Γ_L — группы внутренне-диагональных, стандартных полевых и стандартных графовых автоморфизмов группы L соответственно, причем Φ_L — циклическая группа порядка f или $2f$, $|\Gamma_L| \leq 6$ и $\Phi_L \Gamma_L$ — абелева группа.

Предположим, что 5 делит $|G : L|$. Тогда ввиду [18, теорема 2.5.12] число 5 делит $|\text{Outdiag}(L)|$ или $|\Phi_L|$. Если 5 делит $|\text{Outdiag}(L)|$, то $L \cong L_5^\pm(q)$, где $5 = (q \pm 1, 5)$ и $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, что противоречиво. Поэтому 5 делит $|\Phi_L|$ и, следовательно, $G \setminus L$ содержит элемент x порядка 5, индуцирующий на L полевой автоморфизм. Ввиду [18, предложение 4.9.1] централизатор $C_L(x)$ содержит подгруппу, изоморфную $\Phi(q_0)$, где q — квадрат и $q = q_0^2$. Но группа $\Phi(q_0)$ имеет четный порядок, поэтому G содержит элемент порядка 10; противоречие.

Итак, 5 не делит $|G : L|$ и тем самым 5 делит $|L|$.

Предположим, что $p = 5$. Тогда ввиду леммы 2 имеем $L \cong L_2(5^f)$ и, следовательно, $G \leq \text{Inndiag}(L) \rtimes \Phi_L$. Если $G \cap O_2(\Phi_L) \neq 1$, то ввиду [18, предложение 4.9.1] для инволюции $x \in G \cap O_2(\Phi_L)$ централизатор $C_L(x)$ содержит подгруппу, изоморфную $\Phi(q_0)$, где q — квадрат и $q = q_0^2$. Но $|\Phi(q_0)|$ делится на 5, поэтому G содержит элемент порядка 10; противоречие. Таким образом, $G \cap O_2(\Phi_L) = 1$ и, следовательно, группа $O^{\{2,5\}'}(G)$ изоморфна $PGL_2(5^f)$ или $PGL_2^*(5^f)$ для четного f . Если $f = 1$, то $L \cong L_2(5) \cong L_2(4)$. Поэтому можно считать, что $f > 1$, т. е. выполняется утверждение (1) теоремы 1.

Далее будем считать, что $p \neq 5$ и $L < G$.

Предположим сначала, что $G \cap \text{Inndiag}(L) \neq L$.

Пусть $L \cong L_3^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv -\epsilon 1 \pmod{5}$ и q четно. Тогда $G \cap \text{Inndiag}(L) \cong PGL_3^\epsilon(q)$ для $(q - \epsilon 1, 3) = 3$ и $G = PGL_3^\epsilon(q) \rtimes (G \cap (\Phi_L \Gamma_L))$. Напомним, что $G \cap (\Phi_L \Gamma_L)$ есть абелева 5'-группа. Поскольку $O^{\{2,5\}'}(G) = G$, группа G/L неабелева и $G \cap (\Phi_L \Gamma_L)$ есть нетривиальная абелева 2-группа. Поэтому $G \cap (\Phi_L \Gamma_L)$ содержит некоторую инволюцию t , которая является полевым, графовым или граф-полевым автоморфизмом группы L .

Пусть t — графовый автоморфизм группы L . Тогда ввиду [18, предложение 4.9.2] централизатор $C_L(t)$ изоморфен $L_2(q)$. Поскольку $q + \epsilon 1$ делится на 5, а подгруппа $L_2(q)$ содержит циклическую подгруппу порядка $q + \epsilon 1$, группа G содержит элемент порядка 10; противоречие. Отсюда следует, что группа $G \cap (\Phi_L \Gamma_L)$ циклическая.

Пусть t — граф-полевой автоморфизм группы L . Тогда $G \cap (\Phi_L \Gamma_L) = \langle t \rangle$ и, следовательно, ввиду [18, теорема 2.5.12] группа G/L абелева; противоречие.

Пусть t — полевой автоморфизм группы L . Тогда ввиду [18, предложение 4.9.1] имеем $O^{2'}(C_L(t)) \cong L_3^\epsilon(q_0)$, где $q = q_0^2$. Если $q_0 \equiv \pm 1 \pmod{5}$, то $q \equiv 1 \pmod{5}$ и тем самым $\epsilon = -$ и $O^{2'}(C_L(t)) \cong U_3(q_0)$. Но тогда ввиду леммы 1 группа $L\langle t \rangle$ содержит элемент порядка 10; противоречие. Поэтому $q_0 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, откуда $\epsilon = +$ и, следовательно, ввиду леммы 1 группа $G = PGL_3(q)\langle t \rangle$ не содержит элементов порядка 10, т. е. выполняется утверждение (3) теоремы 1.

Покажем, что другие возможности для L не встречаются.

Пусть $L \cong L_2(q)$, $q \equiv \epsilon 1 \pmod{5}$ для $\epsilon \in \{+, -\}$ и $(q - \epsilon 1)_2 \leq 2$. Тогда $G = \text{Inndiag}(L) \cong PGL_2(q)$ и $(q - \epsilon 1)_2 = 2$. Ввиду [21, предложение 7] группа G имеет абелевы подгруппы (максимальные торы) порядков $q - 1$ и $q + 1$. Но одна из этих подгрупп содержит элемент порядка 10; противоречие.

Пусть $L \cong L_4^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и $(q + \epsilon 1)_2 \leq 2$. Тогда

$$L < G \cap \text{Inndiag}(L) \leq \text{Inndiag}(L) \cong PGL_4^\epsilon(q)$$

и $(q + \epsilon 1)_2 = 2$. Отсюда $(q - \epsilon 1, 4) = 4$, т. е. $\text{Outdiag}(L) \cong \mathbb{Z}_4$. Ввиду [21, предложения 7, 8] группа $PGL_4^\epsilon(q)$ имеет абелеву подгруппу (максимальный тор) порядка $(q^2 + 1)(q + \epsilon 1)$, делящегося на 20. Поэтому подгруппа $G \cap \text{Inndiag}(L)$ индекса, не превосходящего 2, в группе $PGL_4^\epsilon(q)$ содержит элемент порядка 10; противоречие.

Возможность $L \cong L_5^\epsilon(q)$ не появляется, так как 5 не делит $|G : L|$.

Пусть $L \cong S_4(q)$, $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Тогда q нечетно и $G = \text{Inndiag}(L)$. Ввиду [21, предложение 9] группа G имеет абелеву подгруппу (максимальный тор) порядка $q^2 + 1$, делящегося на 10, поэтому G содержит элемент порядка 10; противоречие.

Таким образом, далее можно считать, что $G \not\leq \text{Inndiag}(L)$, причем $G \cap \text{Inndiag}(L) = L$. Положим $\overline{G} = G/L$. Поскольку $G \cap \text{Inndiag}(L) = L$, имеем

$$\begin{aligned} \overline{G} &= G/(G \cap \text{Inndiag}(L)) \cong \text{Inndiag}(L)G/\text{Inndiag}(L) \\ &\leq (\text{Inndiag}(L) \rtimes \Phi_L \Gamma_L)/\text{Inndiag}(L) \cong \Phi_L \Gamma_L. \end{aligned}$$

Поэтому группа $\overline{G}$ изоморфна подгруппе абелевой группы $\Phi_L \Gamma_L$ и, следовательно, $\overline{G} = O^{\{2,5\}'}(G) = O^{\{2,5\}'}(\overline{G}) = O_2(\overline{G}) \neq 1$. Рассмотрим все возможности для L , возникающие в заключении леммы 2.

Пусть $L \cong L_2(q)$, где $q = p^f \equiv \epsilon 1 \pmod{5}$ для $\epsilon \in \{+, -\}$ и $(q - \epsilon 1)_2 \leq 2$. Тогда группа $\overline{G}$ изоморфна подгруппе четного порядка из циклической группы Φ_L порядка f . Поэтому f четно и, стало быть, q — квадрат числа $q_0 = p^{f/2}$. Если $G \cap \Phi_L = 1$, то q нечетно и группа G изоморфна $PGL_2^*(q)$, следовательно, выполняется утверждение (2) теоремы 1. Пусть $G \cap \Phi_L \neq 1$ и t — инволюция из $G \cap \Phi_L$. Тогда ввиду [18, предложение 4.9.1] имеем $O^{2'}(C_L(t)) \cong L_2(q_0)$. Поскольку в группе $L_2(q_0)$ нет элементов порядка 5, ввиду леммы 1 получаем, что $q_0 \equiv \pm 2 \pmod{5}$, $\epsilon = -$ и число $f/2$ нечетно. Поэтому группа $G = L \rtimes \langle t \rangle$ не содержит элементов порядка 10, т. е. выполняется утверждение (2) теоремы 1.

Пусть $L \cong L_3^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$, $q \equiv -\epsilon 1 \pmod{5}$ и q четно.

Предположим, что $(q - \epsilon 1, 3) = 3$. Тогда $|\text{Outdiag}(L)| = 3$ и $\text{Inndiag}(L)G$ не имеет элементов порядка 10. По доказанному выше $G < \text{Inndiag}(L) \rtimes \langle t \rangle$, где t — полевой автоморфизм порядка 2 группы L . Поэтому $\text{Inndiag}(L)\langle t \rangle/L \cong S_3$ и тем самым $G = L \rtimes \langle d^{-1}td \rangle$ для некоторого $d \in \text{Inndiag}(L)$, т. е. выполняется утверждение (3) теоремы 1.

Пусть теперь $(q - \epsilon 1, 3) = 1$. Тогда $\text{Outdiag}(L) = 1$ и, следовательно, $G = L \rtimes (G \cap (\Phi_L \Gamma_L))$. Рассуждая, как выше, получим, что $G = L \rtimes \langle t \rangle$, где q — квадрат, $\epsilon = +$ и t — полевой или граф-полевой автоморфизм порядка 2 группы L . Если t — полевой автоморфизм, мы показали выше, что группа $L \rtimes \langle t \rangle$ не имеет элементов порядка 10. Пусть t — граф-полевой автоморфизм. Тогда ввиду [18, предложение 4.9.1] имеем $\epsilon = +$ и $O^{2'}(C_L(t)) \cong U_3(q_0)$, где $q = q_0^2$. Поскольку $q \equiv -1 \pmod{5}$, имеем $q_0 \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и, стало быть, ввиду леммы 1 группа $L\langle t \rangle$ не содержит элементов порядка 10. Таким образом, в обоих случаях выполняется утверждение (3) теоремы 1.

Ввиду леммы 2 далее можно считать, что $q = p^f \equiv \pm 2 \pmod{5}$ и, следовательно, f нечетно. Тогда поскольку $G \cap \text{Inndiag}(L) = L$ и $\overline{G} = O_2(\overline{G}) \neq 1$, получаем, что $G = L\langle t \rangle$, где t — некоторая инволюция из $\text{Aut}(L) \setminus \text{Inndiag}(L)$.

Пусть $L \cong S_4(q)$. Тогда q четно, $\text{Inndiag}(L) = L$ и можно считать, что t — инволюция из циклической группы $\Phi_L \Gamma_L$. Ввиду [22, (19.5)] централизатор $C_L(t)$ изоморфен группе $Sz(q)$. Поскольку $5 \in \pi(Sz(q))$ ввиду леммы 1, группа G содержит элемент порядка 10; противоречие.

Пусть $L \cong L_5^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$ и q четно. Тогда $\text{Inndiag}(L) = 1$ и можно считать, что t — инволюция из циклической группы $\Phi_L \Gamma_L$. Ввиду [18, предложение 4.9.2] централизатор $C_L(t)$ изоморфен группе $S_4(q)$. Поскольку $5 \in \pi(S_4(q))$ ввиду леммы 1, группа G содержит элемент порядка 10; противоречие.

Итак, $L \cong L_4^\epsilon(q)$, $\epsilon \in \{+, -\}$ и $(q + \epsilon 1)_2 \leq 2$. Если q четно, то приходим к противоречию, как в предыдущем абзаце. Поэтому q нечетно и, следовательно, $(q + \epsilon 1)_2 = 2$, откуда $(q - \epsilon 1)_2 \geq 4$. Таким образом, $\text{Outdiag}(L) \cong \mathbb{Z}_4$. Ввиду [18, теорема 2.5.12] имеем $\text{Outdiag}(L)\langle t \rangle \cong D_8$. Поскольку $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, известная формула для порядка группы L (см. [17]) показывает, что $|L|_5 = (q^2 + 1)_5 > 1$. Ввиду [23, табл. 8.8, 8.10] в L есть максимальная

подгруппа M , изоморфная расширению группы $L_2(q^2)$ посредством циклической группы порядка $q + \epsilon 1$. Цоколь $Soc(M)$ группы M изоморфен $L_2(q^2)$ и, следовательно, содержит максимальную диэдральную подгруппу D порядка $q^2 + 1$. Пусть T — произвольная силовская 5-подгруппа в D . Поскольку $(q^2 + 1)_5 = |L|_5 = |D|_5$, подгруппа T является циклической силовской 5-подгруппой в G . По лемме Фраттини $M = Soc(M)N_M(T) = Soc(M)N_M(\Omega_1(T))$. Отсюда $M/Soc(M) \cong N_M(\Omega_1(T))/N_{Soc(M)}(\Omega_1(T)) \cong N_M(\Omega_1(T))/D$ и тем самым силовская 2-подгруппа в $N_M(\Omega_1(T))$ имеет порядок 4. Поскольку $C_M(\Omega_1(T))$ имеет нечетный порядок и группа $N_M(\Omega_1(T))/C_M(\Omega_1(T))$ изоморфна подгруппе из $Aut(\mathbb{Z}_5) \cong \mathbb{Z}_4$, получаем, что $N_M(\Omega_1(T)) = C_M(\Omega_1(T))Z$, где $C_M(\Omega_1(T)) = O(N_M(\Omega_1(T)))$ и $Z \cong \mathbb{Z}_4$. Далее, по лемме Фраттини $G = LN_G(\Omega_1(T)) = LZC_G(\Omega_1(T))$. Но $Z < L$, поэтому $G = LC_G(\Omega_1(T))$. Поскольку группа G не содержит элементов порядка 10, подгруппа $C_G(\Omega_1(T))$ имеет нечетный порядок. Но это противоречит четности индекса $|G : L|$.

Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ следует из лемм 1, 2 и рассуждений при доказательстве необходимости.

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы 2, $S \in Syl_2(G)$ и $T \in Syl_p(G)$. По теореме Холла — Чунихина [16, теорема 6.4.1] в G существует бипримарная $\{2, p\}$ -холлова подгруппа U , причем можно считать, что $U = ST$. Все элементы в U имеют примарные порядки, поэтому ввиду леммы 3 U — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа. Ясно, что либо $O_p(U) \neq 1$, либо $O_2(U) \neq 1$.

Предположим, что $O_p(U) \neq 1$. Тогда ввиду [16, теорема 10.3.1] подгруппа S — либо циклическая группа, либо (обобщенная) группа кватернионов. Из теоремы Бернсайда (см. [16, теорема 7.4.3]) и леммы 4 получаем, что $U = O(U)S$. Поэтому U — группа Фробениуса с ядром T и дополнением S . Поскольку $C_T(s) = 1$ для (единственной) инволюции s из S , эта инволюция инвертирует T и, следовательно, T абелева. Поэтому ввиду леммы 4 и [16, теорема 6.3.2] выполняется утверждение (1) теоремы 2.

Предположим теперь, что $O_2(U) \neq 1$. Тогда подгруппа T циклическая. Ввиду [16, теорема 6.3.2] централизатор $C_G(T)$ содержится в $O_{p',p}(G)$. Поэтому $O_{p',p}(G) = O_{p'}(G)T$ и тем самым по лемме Фраттини $G = O_{p'}(G)N_G(T)$. Ввиду [16, теорема 5.2.4] имеем $C_{N_G(T)}(\Omega_1(T)) = C_G(T)$. Поскольку $Aut(\Omega_1(T))$ — циклическая группа порядка $p - 1$, отсюда следует, что $G/O_{5'}(G)$ — либо циклическая p -группа, либо группа Фробениуса с циклическим ядром порядка $|G|_p$ и циклическим дополнением порядка, делящего $p - 1$. Положим $K = O_{p'}(G)$. Поскольку $O_2(U) \neq 1$, подгруппа K имеет четный порядок. Без ограничения общности можно считать, что $O_{\{2,p\}'}(G) = O(K) = 1$. Но тогда $O_2(K) = O_2(G) \neq 1$ и $C_G(O_2(K)) \leq O_2(G)$ (ввиду [16, теорема 6.3.2]). Если $K = O_2(K)$, то ввиду леммы 5 утверждение (2) теоремы 2 верно. Пусть $O_2(K) < K$. Тогда $O_2(K) < O_{\{2,2'\}}(K)$. Пусть R — 2-дополнение в $O_{\{2,2'\}}(K)$. Ввиду [16, теорема 6.3.2] имеем $C_K(R) \leq O_2(K)R$. В силу леммы Фраттини $G = O_2(K)N_G(R)$, поэтому можно считать, что T нормализует подгруппу R . Рассмотрим подгруппу $O_2(K) \rtimes (R \rtimes \langle t \rangle)$, где t — элемент порядка p из T . Ввиду равенства $C_{O_2(K)}(t) = 1$ и леммы 6 имеем $[R, \langle t \rangle] = 1$. Поскольку t принадлежит нор-

мальной в $N_G(R)$ подгруппе $C_G(R)$, имеем $[K, \langle t \rangle] \leq C_K(R) \leq O_2(K)R$, откуда легко видеть, что $K = O_2(K)R$ и, стало быть, $O_{p'}(G)$ имеет 2-длину 1. Поскольку $C_{O_2(K)}(t) = 1$, из леммы 5 следует, что выполняется утверждение (2) теоремы 2.

Теорема 2 доказана.

Благодарность. Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные замечания, позволившие улучшить статью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Chigira N. N., Iiyori N., Yamaki H. Non-Abelian Sylow subgroups of finite groups of even order // *Invent. math.* 2000. V. 22, N 1. P. 525–539.
2. Подуфалов Н. Д. Конечные простые группы без элементов порядка 6 // *Алгебра и логика*. 1977. Т. 16, № 2. С. 200–203.
3. Fletcher L. F., Stellmacher B., Stewart W. B. Endliche Gruppen, die kein Element der Ordnung 6 enthalte // *Quart. J. Math. Oxford. Ser. (2)*. 1977. V. 28. P. 143–154.
4. Gordon L. M. Finite simple groups with no elements of order six // *Bull. Austral. Math. Soc.* 1977. V. 17, N 2. P. 235–246.
5. Кондратьев А. С., Минигулов Н. А. Конечные группы без элементов порядка 6 // *Мат. заметки*. 2018. Т. 104, № 5. С. 717–724.
6. Kondrat'ev A. S., Minigulov N. A. On finite non-solvable groups whose Gruenberg–Kegel graphs are isomorphic to the paw // *Commun. Math. Stat.* 2022. V. 10, N 4. P. 653–667.
7. Го В., Зиновьева М. Р., Кондратьев А. С. Конечные группы, графы простых чисел которых не содержат треугольников. III // *Сиб. мат. журн.* 2023. Т. 64, № 1. С. 66–71.
8. Кондратьев А. С., Нирова М. С. Одно следствие описания конечных групп без элементов порядка 6 // *Сиб. электрон. мат. изв.* 2023. Т. 20, № 2. С. 854–858.
9. Williams J. S. Prime graph components of finite groups // *J. Algebra*. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
10. Кондратьев А. С. О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // *Мат. сб.* 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
11. Chen Z. M., Shi W. J. On simple C_{pp} -groups // *J. Southwest China Normal Univ.* 1993. V. 18, N 3. P. 249–256.
12. Дольфи С., Джабара Э., Лючидо М. С. $C55$ -группы // *Сиб. мат. журн.* 2004. Т. 45, № 6. С. 1285–1298.
13. Астилл С., Паркер К., Вальдекер Р. О группах, в которых централизаторы элементов порядка 5 являются 5-группами // *Сиб. мат. журн.* 2012. Т. 53, № 5. С. 967–977.
14. He H., Shi W. The recognition of finite simple groups with no elements of order 10 by their element orders // *Int. J. Group Theory*. 2022. V. 11, N 1. P. 17–22.
15. Higman G. Finite groups in which every element has prime power order // *J. London Math. Soc. (2)*. 1957. V. 32. P. 335–342.
16. Gorenstein D. Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
17. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
18. Gorenstein D., Lyons R., Solomon R. The classification of the finite simple groups. Number 3. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1998.
19. Заварницин А. В. О распознавании конечных групп по графу простых чисел // *Алгебра и логика*. 2006. Т. 45, № 4. С. 390–408.
20. Higman G. Groups and rings which have automorphisms without nontrivial fixed elements // *J. London Math. Soc. (2)*. 1957. V. 32. P. 321–334.
21. Carter R. W. Centralizers of semisimple elements in the classical groups // *Proc. London Math. Soc. Ser. III*. 1981. V. 42, N 1. P. 1–41.
22. Aschbacher M., Seitz G. M. Involutions in Chevalley groups over fields of even order // *Nagoya Math. J.* 1976. V. 63. P. 1–91.

- 23.** Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013.

Поступила в редакцию 30 ноября 2023 г.

После доработки 15 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Го Цзинь (ORCID 0009-0003-5974-0484)

Хайнаньский университет, Школа математики и статистики,

г. Хайкоу, Хайнань, 570228, Китай

`jguo@hainanu.edu.cn`

Го Вэньбинь (ORCID 0000-0002-6934-363X)

Хайнаньский университет, Школа математики и статистики,

г. Хайкоу, Хайнань, 570228, Китай

`wbguo@ustc.edu.cn`

Кондратьев Анатолий Семенович (ORCID 0000-0003-3073-3064)

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620108;

Уральский федеральный университет,

ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002

`a.s.kondratiev@imm.uran.ru`

Нирова Марина Сефовна (ORCID 0009-0008-7388-0922)

Кабардино-Балкарский университет им. Х. М. Бербекова,

ул. Чернышевского, 175, Нальчик, 360004

`nirova_m@mail.ru`

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С G -ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ НОРМАЛИЗАТОРАМИ СИЛОВСКИХ ПОДГРУПП

С. Ф. Каморников,
В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Пусть A, B — подгруппы конечной группы G . Тогда A называется (наследственно) G -перестановочной с B , если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$ (для некоторого элемента $x \in \langle A, B \rangle$). Подгруппа A группы G называется (наследственно) G -перестановочной в G , если A (наследственно) G -перестановочна со всеми подгруппами из G . В работе исследуется строение конечной группы G , все нормализаторы силовских подгрупп которой являются (наследственно) G -перестановочными.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.404

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, нормализатор силовской подгруппы, G -перестановочная подгруппа, наследственно G -перестановочная подгруппа, $\mathbb{P}$ -субнормальная подгруппа.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Следующая концепция, развивающая понятие квазиперестановочной подгруппы (см. [1]), предложена в работе [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть A, B — подгруппы группы G . Тогда A называется:

- (1) G -перестановочной с B , если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$;
- (2) наследственно G -перестановочной с B , если $AB^x = B^xA$ для некоторого элемента $x \in \langle A, B \rangle$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Подгруппа A группы G называется (наследственно) G -перестановочной в G , если A (наследственно) G -перестановочна со всеми подгруппами из G .

G -перестановочные и наследственно G -перестановочные подгруппы в последнее время нашли ряд интересных приложений, связанных с изучением нормальной структуры конечной группы и установлением условий ее не простоты [3–6]. Например, в [3] доказана разрешимость группы, у которой все минимальные подгруппы являются наследственно G -перестановочными (под минимальной подгруппой группы G понимается любая ее подгруппа простого порядка). В [4] доказано, что если S — силовская 2-подгруппа группы G и каждая максимальная подгруппа из S является наследственно G -перестановочной в G , то G разрешима. В работах [5, 6] исследовано нормальное и формационное строение группы, у которой любая подгруппа Шмидта является наследственно

Исследования первого и второго авторов выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23РНФ-237).

© 2024 Каморников С. Ф., Тютянов В. Н., Шеметкова О. Л.

G -перестановочной (*подгруппой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны).

В данной работе исследуется строение группы G , все нормализаторы силовских подгрупп которой являются (наследственно) G -перестановочными.

Наша главная цель — доказательство следующих двух теорем.

Теорема 1. Если нормализатор каждой силовской подгруппы группы G является G -перестановочным в G , то группа G разрешима.

Теорема 2. Если нормализатор каждой силовской подгруппы группы G является наследственно G -перестановочным в G , то группа G сверхразрешима.

2. Используемая терминология и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения (см., например, [7]). Напомним лишь некоторые из них:

- $\pi(G)$ — множество простых делителей порядка группы G ;
- если p — некоторое простое число, то G_p — силовская p -подгруппа группы G , а $Syl_p(G)$ — множество всех ее силовских p -подгрупп;
- $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини группы G ;
- $\mathcal{U}$ — класс всех сверхразрешимых групп;
- $G^{\mathcal{U}}$ — $\mathcal{U}$ -корадикал группы G , т. е. наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой сверхразрешима.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения:

- $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B ;
- $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B .

Отметим следующее свойство G -перестановочных подгрупп, доказательство которого осуществляется простой проверкой.

Лемма 1. Пусть G — группа, H , T и K — ее подгруппы, причем подгруппа K нормальна в G . Если $K \subseteq T$ и H G -перестановочна с T , то HK/K G/K -перестановочна с T/K . В частности, если подгруппа H наследственно G -перестановочна в G , то подгруппа HK/K наследственно G/K -перестановочна в G/K .

При доказательстве теоремы 1 будем опираться на следующие результаты о строении некоторых простых групп.

Лемма 2 [8, лемма 1.6]. Пусть G — простая группа лиева типа и L — максимальная подгруппа группы G . Если унипотентная подгруппа U содержится в L , то L — параболическая подгруппа G .

Лемма 3 [9, лемма 3]. Пусть G — простая группа лиева типа и

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G , который не делит порядок ни одной собственной параболической подгруппы группы G .

Лемма 4 [10, следствие 5]. Пусть $G \in \{A_n, S_n\}$, где $n \geq 5$. Предположим, что $G = AB$, где A и B — максимальные подгруппы группы G , не содержащие A_n . Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

- (i) $A = (S_{n-k} \times S_k) \cap G$ для некоторого k такого, что $1 \leq k \leq 5$, а B является k -однородной;
- (ii) $n = 6$, $A = PGL_2(5) \cap G$ и $B = (S_3 \wr S_2) \cap G$.

Понадобятся также следующие два результата теории чисел.

Лемма 5 [11, лемма 1.1]. Пусть n — целое число и $n \geq 9$. Тогда существуют по меньшей мере три таких простых числа r , что $n < r < 2n$.

Лемма 6 [12]. Пусть p и q — простые числа, m и n — натуральные числа, причем $p^m = q^n + 1$. Тогда выполняется одно из следующих условий:

- (1) $q = 2$, $p = 3$, $n = 3$ и $m = 2$;
- (2) $q = 2$, $m = 1$, n является степенью числа 2, а $p = q^n + 1$ — простое число Ферма;
- (3) $p = 2$, $n = 1$ и $q = p^m - 1$ — простое число Мерсенна, в частности, m является простым числом.

Следуя [13], подгруппу H группы G будем называть $\mathbb{P}$ -субнормальной в G , если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{n-1} \subset H_n = G$$

такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ — простое число для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Отметим следующее свойство наследственно G -перестановочных подгрупп, устанавливающее их связь с $\mathbb{P}$ -субнормальными подгруппами.

Лемма 7 [6, лемма 2.8]. Любая наследственно G -перестановочная подгруппа разрешимой группы G является $\mathbb{P}$ -субнормальной.

Требование разрешимости группы G в лемме 7 существенно и в общем случае его отбросить нельзя. Пусть, например, $G = A \times B$, где A — абелева группа, B — простая неабелева группа, не содержащая максимальных подгрупп простого индекса. Очевидно, подгруппа A наследственно G -перестановочна в G , но не $\mathbb{P}$ -субнормальна.

В [13] введен и исследован класс групп $\mathcal{WM}$, все силовские подгруппы которых $\mathbb{P}$ -субнормальны. Одно из свойств этого класса мы приведем в виде леммы. Напомним только, что если $\mathfrak{F}$ — класс групп, то группа G называется $\mathfrak{F}$ -критической, если она не принадлежит $\mathfrak{F}$, но все ее собственные подгруппы принадлежат $\mathfrak{F}$. В частности, $\mathcal{M}$ -критическая группа — это минимальная несверхразрешимая группа.

Лемма 8 [13, теорема 2.9]. Любая $\mathcal{WM}$ -критическая группа является би-примарной минимальной несверхразрешимой группой.

Основные свойства минимальных несверхразрешимых групп приведены в работах [14, 15]. Одна из полных классификаций минимальных несверхразрешимых групп содержится в [16].

Лемма 9 [14, 15]. Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие утверждения:

- 1) G разрешима и $|\pi(G)| \leq 3$;
- 2) $G^{\mathcal{M}}$ — силовская p -подгруппа группы G для некоторого простого p ;
- 3) $G^{\mathcal{M}}/\Phi(G^{\mathcal{M}})$ — главный фактор группы G ;
- 4) $|G^{\mathcal{M}}/\Phi(G^{\mathcal{M}})| = p^n$, где $n > 1$;
- 5) $\Phi(G^{\mathcal{M}}) = G^{\mathcal{M}} \cap \Phi(G)$.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Предположим сначала, что группа G простая. Опираясь на классификацию простых неабелевых групп, исключим каждый из возможных случаев.

(a) G — простая спорадическая группа.

В работе [23] доказано, что если G — простая спорадическая группа, содержащая собственную G -перестановочную подгруппу F , то $G = J_1$ и $|F| = 2$. Отсюда имеем противоречие с условием теоремы.

(b) $G \cong A_n$, где $n \geq 5$.

Сначала рассмотрим случаи, когда $n \leq 16$. При этом для $n \leq 13$ укажем в группе G силовскую p -подгруппу P , нормализатор которой не перестановочен ни с одной силовской q -подгруппой группы G :

- если $G \in \{A_5, A_6\}$, то $P \in Syl_5(G)$ и $q = 2$;
- если $G \cong A_7$, то $P \in Syl_7(G)$ и $q = 2$ [17, с. 10];
- если $G \in \{A_8, A_9, A_{10}\}$, то $P \in Syl_7(G)$ и $q = 5$ [17, с. 22, 37, 48];
- если $G \in \{A_{11}, A_{12}\}$, то $P \in Syl_{11}(G)$ и $q = 7$ [17, с. 75, 91];
- если $G \cong A_{13}$, то $P \in Syl_{13}(G)$ и $q = 11$ [17, с. 91].

В оставшихся случаях $n = 14, 15, 16$ в группе $G \cong A_n$ укажем максимальную подгруппу M , которая согласно лемме 4 не является сомножителем ни в одной факторизации, и силовскую подгруппу P , нормализатор которой не содержится ни в одной подгруппе, сопряженной с M (отсюда сразу же следует противоречие с условием теоремы):

- если $n = 14$, то $M = (A_6 \times A_8).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$;
- если $n = 15$, то $M = (A_7 \times A_8).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$;
- если $n = 16$, то $M = (A_7 \times A_9).2$ и $P \in Syl_{13}(G)$.

Пусть далее $n = 2k + 1 \geq 17$. В качестве максимальной подгруппы рассмотрим подгруппу $M = (A_{(n-1)/2} \times A_{(n+1)/2}).2$. В этом случае $(n+1)/2 \geq 9$. По лемме 5 существуют три различных простых числа $r_1 < r_2 < r_3$ таких, что $(n+1)/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n+1$. Отсюда следует, что $(n+1)/2 < r_1 < r_2 < n$. При этом $(|M|, r_1) = (|M|, r_2) = 1$. Следовательно, $G = MN_G(R_1)$ для $R_1 \in Syl_{r_1}(G)$. Так как $(n-1)/2 \geq 8$, последнее невозможно ввиду леммы 4.

Пусть $n = 2k \geq 18$. В качестве максимальной подгруппы рассмотрим подгруппу $M = (A_{n/2-1} \times A_{n/2+1}).2$. В этом случае $n/2 \geq 9$. По лемме 5 существуют три различных простых числа $r_1 < r_2 < r_3$ таких, что $n/2 < r_1 < r_2 < r_3 < n$. Отсюда следует, что $n/2 + 1 < r_2 < r_3 < n$. При этом $(|M|, r_2) = (|M|, r_3) = 1$. Следовательно, $G = MN_G(R_2)$ для $R_2 \in Syl_{r_2}(G)$. Так как $n/2 - 1 \geq 8$, последнее невозможно ввиду леммы 4.

(c) G — простая группа лиева типа над полем характеристики p .

Пусть U — унитарная подгруппа группы G . Тогда $N_G(U) = UH = B$ — подгруппа Бореля, где H — подгруппа Картана. Пусть сначала

$$G \notin \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Согласно лемме 3 найдется простое число $r \in \pi(G)$ такое, что r не делит порядок ни одной собственной параболической подгруппы группы G . Рассмотрим подгруппу $R \in Syl_r(G)$. По условию можно считать, что существует подгруппа BR . Из леммы 2 следует, что $BR = G$. Таким образом, группа G является произведением двух разрешимых групп. Список простых неабелевых групп, являющихся произведением двух своих разрешимых подгрупп, приведен в [18]. Группами лиева типа в данном списке являются

$$L_2(q), q > 3; \quad L_3(q), q < 9; \quad U_3(8); \quad L_4(2) \cong A_8; \quad Sp_4(3) \cong U_4(2).$$

Случай $L_4(2) \cong A_8$ рассмотрен выше. Отметим, что $|G : B| = r^t$ для некоторого $t \geq 1$. Из [19] следует, что группа $U_3(8)$ не имеет подгрупп примарного индекса. Рассмотрим оставшиеся случаи.

$G \cong L_2(q)$, где $q > 3$. Все сведения о строении подгрупп группы $L_2(q)$ можно найти в [20, теорема II.8.27]. Далее будем ссылаться на эту теорему без дополнительных оговорок. Согласно [19] в этом случае $q + 1 = r^t$. Пусть сначала $q = p^n$ — нечетное число. Тогда $q + 1$ является степенью числа 2, силовская 2-подгруппа группы G имеет порядок $q + 1$ и совпадает со своим нормализатором. Ясно, что она не перестановочна ни с одной подгруппой, сопряженной с силовской p -подгруппой группы G , что противоречит условию теоремы. Пусть $q = 2^n$. Из леммы 6 следует, что $q + 1$ либо простое число, либо равно 9. В обоих случаях максимальная подгруппа порядка $2(q + 1)$, являющаяся нормализатором силовской r -подгруппы группы G , не перестановочна ни с одной силовской 2-подгруппой группы G . Снова приходим к противоречию с условием теоремы.

$G \cong L_3(q)$, где $q < 9$. Из [19] следует, что в этом случае $q^2 + q + 1$ — степень простого числа. Для $q = 2$ имеем $L_3(2) \cong L_2(7)$. Данный случай рассмотрен выше. Проанализируем оставшиеся случаи.

$G \cong L_3(3)$. Из [17, с. 13] следует, что нормализатор в G силовской 13-подгруппы изоморфен $13 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G , а значит, группа G не удовлетворяет условию теоремы.

$G \cong L_3(5)$. Из [17, с. 38] следует, что нормализатор в G силовской 31-подгруппы изоморфен $31 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G , снова приходим к противоречию.

$G \cong L_3(8)$. Из [17, с. 74] следует, что нормализатор в G силовской 73-подгруппы изоморфен $73 : 3$. Эта подгруппа не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G , а значит, G не удовлетворяет условию теоремы.

$G \cong Sp_4(3) \cong U_4(2)$. Пусть $T \in Syl_2(G)$. Из [17, с. 26] следует, что $N_G(T) = T : \langle a \rangle$, где $|a| = 3$, и подгруппа $N_G(T)$ не перестановочна ни с одной силовской 3-подгруппой группы G , что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Пусть сначала $G \cong L_6(2)$. В группе $L_6(2)$ подгруппа Картана H единична, поэтому силовская 2-подгруппа группы G , являющаяся унипотентной подгруппой, самонормализуема. По условию теоремы группа G обладает свойством $E_{\{2,r\}}$ для всякого $r \in \pi(G) \setminus \{2\}$. Из [21] следует, что в этом случае группа G разрешима. Последнее невозможно. Если G изоморфна одной из групп $Sp_6(2)$ или $\Omega_8^+(2)$, то подгруппа Картана H также единична и данные случаи рассматриваются аналогично случаю $G \cong L_6(2)$. Случай $G \cong Sp_4(3) \cong U_4(2)$ был рассмотрен выше. Снова пришли к противоречию, которое окончательно устанавливает, что группа G не проста.

Пусть N — ее минимальная нормальная подгруппа. Рассмотрим факторгруппу G/N . Пусть P/N — ее силовская p -подгруппа для некоторого простого $p \in \pi(G/N)$. Тогда найдется такая подгруппа $P_1 \in Syl_p(G)$, что $P/N = P_1N/N$. Так как подгруппа P_1 пронормальна в G , по лемме 17.5 из [22] имеем

$$N_{G/N}(P/N) = N_{G/N}(P_1N/N) = N_G(P_1N)/N = N_G(P_1)N/N.$$

Отсюда ввиду леммы 1 нормализатор любой силовской подгруппы группы G/N является G/N -перестановочной подгруппой в G/N . Ввиду выбора группы G из $|G/N| < |G|$ имеем, что G/N — разрешимая группа. Кроме того, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G .

Если N — элементарная абелева p -подгруппа для некоторого $p \in \pi(G)$, то группа G разрешима, что противоречит ее выбору. Следовательно, N является прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп. Пусть

$$N = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_t,$$

где $t \geq 1$ и $N_1, N_2, \dots, N_t$ — изоморфные простые группы.

Пусть $p \in \pi(N)$, $P \in Syl_p(G)$ и A — произвольная подгруппа в N . Ввиду условия теоремы для некоторого $x \in G$ существует подгруппа $F = A^x N_G(P)$. Тогда ввиду тождества Дедекинда имеем

$$F \cap N = A^x N_G(P) \cap N = A^x (N_G(P) \cap N).$$

Если $y \in N_G(P) \cap N$, то из $N \trianglelefteq G$ следует, что $y \in N_N(P \cap N)$. Поэтому

$$N_G(P) \cap N \subseteq N_N(P \cap N).$$

Из теоремы Силова следует, что $P \cap N \in Syl_p(N)$. Кроме того, подгруппа $P \cap N$ содержится в $N_G(P) \cap N$. Таким образом, подгруппа $F \cap N$ представима в виде $F \cap N = A^x L$, где

$$P \cap N \subseteq L = N_G(P) \cap N \subseteq N_N(P \cap N)$$

и $P \cap N \in Syl_p(N)$.

Предположим далее, что $A \subseteq N_1$. Так как группа G действует транзитивно на множестве $\Sigma = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, то $N_1^x = N_k$ и $A^x \subseteq N_k$ для некоторого $k \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Ввиду тождества Дедекинда имеем

$$F \cap N_k = (F \cap N) \cap N_k = A^x (N_G(P) \cap N) \cap N_k = A^x (N_G(P) \cap N_k).$$

При этом $P \cap N_k \subseteq N_G(P) \cap N_k \subseteq N_{N_k}(P \cap N_k)$ и $P \cap N_k \in Syl_p(N_k)$. Отсюда следует, что

$$(A^x (N_G(P) \cap N_k))^{x^{-1}} = A(N_G(P^{x^{-1}}) \cap N_1) \subseteq N_1.$$

По теореме Силова $P^{x^{-1}} \cap N_1 = (P \cap N_1)^y$ для некоторого $y \in N_1$, а значит, $A^{y^{-1}}(N_G(P) \cap N_1)$ — подгруппа группы N_1 , причем $N_G(P) \cap N_1 \subseteq N_{N_1}(P \cap N_1)$ и $P \cap N_1 \in Syl_p(N_1)$.

Итак, для любого простого $p \in \pi(N_1)$, каждой силовской p -подгруппы $\tilde{P}$ простой неабелевой группы N_1 и любой ее подгруппы A найдется такой элемент $z \in N_1$, что подгруппа A^z перестановочна с некоторой подгруппой L из N_1 , содержащей $\tilde{P}$ и содержащейся в $N_{N_1}(\tilde{P})$.

Таким образом, некоторая подгруппа $L \subset N_1$ такая, что $\tilde{P} \subseteq L \subseteq N_{N_1}(\tilde{P})$, является N_1 -перестановочной с любой подгруппой $A \subseteq N_1$ (в частности, она является N_1 -перестановочной с любой силовской и любой максимальной подгруппами из N_1). Анализ доказательства теоремы в случае, когда G — простая неабелева группа, показывает, что нормализатор $N_G(P)$ не перестановочен либо с некоторой силовской подгруппой группы G , либо с некоторой максимальной подгруппой группы G . Легко заметить, что если для $\tilde{P} \in Syl(N_1)$ заменить $N_{N_1}(\tilde{P})$ подгруппой L с условием $\tilde{P} \subseteq L \subseteq N_{N_1}(\tilde{P})$, то соответствующие противоречия получаются в точности так же.

3. Доказательство теоремы 2

Ввиду теоремы 1 группа G разрешима. Поэтому по лемме 7 нормализатор каждой силовской подгруппы из G является $\mathbb{P}$ -субнормальной подгруппой. Отсюда, очевидно, следует, что любая силовская подгруппа группы G $\mathbb{P}$ -субнормальна в G , а значит, $G \in \mathcal{W}$.

Предположим, что группа G не является сверхразрешимой. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что G — минимальная несверхразрешимая группа. Так как $G \in \mathcal{W}$, ввиду леммы 8 G — трипримарная минимальная несверхразрешимая группа. Пусть $\pi(G) = \{p, q, r\}$, где $p > q > r$, и пусть $P \in \text{Syl}_p(G)$, $Q \in \text{Syl}_q(G)$, $R \in \text{Syl}_r(G)$. Из теорем 9 и 10 работы [16] следует, что G — группа одного из двух следующих типов:

(1) $G = P : (QR)$, где R — циклическая подгруппа порядка r^{s+t} ($s \geq 1$, $t \geq 0$), нормализующая подгруппу Q ; $Q/\Phi(Q)$ — неприводимый R -модуль над полем из q элементов с ядром D порядка r^t ; P — неприводимый QR -модуль над полем из p элементов; q и r делят $p - 1$;

(2) $G = P : (QR)$, где R — циклическая подгруппа порядка 2^{s+t} ($s \geq 1$, $t \geq 0$), нормализующая подгруппу Q ; $Q/\Phi(Q)$ — неприводимый R -модуль над полем из q элементов с ядром D порядка 2^t ; P — экстраспециальная группа порядка p^3 экспоненты p ; $P/\Phi(P)$ — неприводимый QR -модуль над полем из p элементов; q и 2^s делят $p - 1$.

Простая проверка показывает, что $\Phi(P) = 1$ в первом случае и $|\Phi(P)| = p$ во втором. Кроме того, $N_G(Q)\Phi(P)$ — максимальная подгруппа группы G , дополняющая главный фактор $P/\Phi(P)$ группы G , который ввиду леммы 9 не является циклической группой.

С другой стороны, ввиду условия теоремы для максимальной подгруппы A группы P найдется элемент $x \in G$ такой, что $A^x N_G(Q)$ — подгруппа группы G . Так как $A^x N_G(Q) \neq G$ и $\Phi(P) \subseteq A^x$, то

$$A^x N_G(Q) = A^x (N_G(Q)\Phi(P)).$$

Теперь из максимальнойности $N_G(Q)\Phi(P)$ в G следует, что $A^x \subseteq N_G(Q)\Phi(P)$, а значит, $A^x \subseteq \Phi(P)$. Отсюда P — циклическая группа. Пришли к противоречию, которое завершает доказательство теоремы 2.

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за полезные замечания и советы, которые позволили значительно улучшить работу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ore O. Contributions in the theory of groups of finite order // Duke Math. J. 1939. V. 5. P. 431–460.
2. Го В., Скиба А. Н., Шам К. П. X -перестановочные подгруппы // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 742–759.
3. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. Конечные группы с наследственно G -перестановочными минимальными подгруппами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2023. Т. 29, № 1. С. 102–110.
4. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. О разрешимости и сверхразрешимости конечных групп // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 312–320.
5. Ballester-Bolínches A., Kamornikov S. F., Pérez-Calabuig V., Tyutyaynov V. N. Finite groups with G -permutable Schmidt subgroups // Mediterranean J. Math. 2023. V. 20, N 3. Article 174. P. 1–12.
6. Ballester-Bolínches A., Kamornikov S. F., Pérez-Calabuig V., Tyutyaynov V. N. Finite groups with hereditarily G -permutable Schmidt subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2024. V. 109, N 3. P. 522–528.

7. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
8. Seitz G. M. Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. V. 97, N 1. P. 27–56.
9. Тютянов В. Н., Шеметков Л. А. Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 52–55.
10. Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups // Mem. Am. Math. Soc. 1990. V. 86, N 432. P. 1–151.
11. Wiegold J., Williamson A. G. The factorisation of the alternating and symmetric groups // Math. Z. 1980. V. 175, N . P. 171–179.
12. Zsigmondy K. Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. V. 3, N 1. P. 265–284.
13. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. О конечных группах сверхразрешимого типа // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
14. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. V. 60. P. 409–434.
15. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen // Math. Z. 1966. V. 91. P. 198–205.
16. Ballester-Bolínches A., Esteban-Romero R. On minimal non-supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2007. V. 23, N 1. P. 127–142.
17. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
18. Kazarin L. S. Product of two solvable subgroups // Commun. Algebra. 1986. V. 14, N 6. P. 1001–1066.
19. Guralnick R. M. Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, N 2. P. 304–311.
20. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
21. Тютянов В. Н. К гипотезе Холла // Укр. мат. журн. 2002. Т. 54, № 7. С. 981–990.
22. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
23. Гальт А. А., Тютянов В. Н. О существовании G -перестановочных подгрупп в простых спорадических группах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 831–841.

Поступила в редакцию 4 января 2024 г.

После доработки 27 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета “МИТСО”,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Шеметкова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru

УДК 515.122.22

К ТЕОРИИ H -СОБРАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

М. И. Кудряшова, М. В. Швидефски

Аннотация. Предлагается систематическое изучение обобщенно собранных пространств.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.405

Ключевые слова: c -компактное пространство, собранное пространство, T_0 -пространство.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению общей теории собранных пространств. Свойство собранности играет центральную роль в изучении топологических T_0 -пространств, в частности, в теории дуальности для дистрибутивных частично упорядоченных множеств (см. например [1]). Собранность является одним из характеристических свойств так называемых спектральных пространств и пространств, близких к ним (другими словами, дуальных объектов для дистрибутивных частично упорядоченных множеств). Более точно, T_0 -пространство спектрально тогда и только тогда, когда оно является компактным собранным пространством, в котором все открытые компактные множества образуют мультипликативную базу топологии (см., например, [2, разд. 3], а также [3, разд. 13.2] и [1]).

В [4] Сю предложил определение обобщенно собранного пространства (или H -сбранного пространства), см. определения 1 и 2 ниже. Это определение включает в себя (вместе с понятием собранности) много хорошо известных свойств T_0 -пространств, в частности, свойство вполне фильтрованности, которое изучалось, к примеру, в работах китайских математиков [5–7], а также свойство направленной полноты (см. например работы Ю. Л. Ершова [3, 8–11] и Каймея и Лосоа [12]).

В работе Ю. Л. Ершова [13] было установлено, что для определенных категорий $\mathbf{K}$ T_0 -пространств любое T_0 -пространство обладает $\mathbf{K}$ -пополнением. Этот результат обобщает результат, установленный Сю в [4], который говорит о том, что каждое T_0 -пространство обладает H -собрификацией. Более того, оказалось, что многие результаты, установленные для пространств непрерывных функций, имеют естественное обобщение в рамках понятия H -сбранности. Протицируем, например, такой результат.

Работа выполнена в рамках проекта Российского научного фонда по. 24-21-00075, <https://rscf.ru/project/24-21-00075/>.

Теорема 1 [14, теорема 14]. Пусть $\mathbf{H}$ является I -системой. Для T_0 -пространства $\mathbb{Y}$ эквивалентны следующие условия.

- (i) Пространство $\mathbb{Y}$ $\mathbf{H}$ -собранно.
- (ii) Пространство $\mathbb{C}_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ $\mathbf{H}$ -собранно для каждого c -компактного пространства $\mathbb{X}$.
- (iii) Пространство $\mathbb{C}_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ $\mathbf{H}$ -собранно для некоторого [c -компактного] пространства $\mathbb{X}$.
- (iv) Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ $\mathbf{H}$ -собранно для каждого T_0 -пространства $\mathbb{X}$.
- (v) Пространство $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ $\mathbf{H}$ -собранно для некоторого T_0 -пространства $\mathbb{X}$.
- (vi) Пространство $\mathbb{C}_{\mathcal{S}}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ $\mathbf{H}$ -собранно для некоторого T_0 -пространства $\mathbb{X}$ и топологии $\mathcal{T}$ на $\mathbb{C}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ такой, что $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_A(\subseteq)^{\sharp}$.

Ввиду следствия 2 теорема 1 может быть применена к любой из I -систем, перечисленных в начале разд. 2 ниже. Таким образом, теорема 1 обобщает, в частности, теоремы 9 и 12 из [15], а также некоторые результаты из [16]. Более того, из теоремы 1 и леммы 15(i) ниже вытекает, что категория $\mathbf{H}$ $\mathbf{H}$ -собранных пространств является декартово замкнутой полной подкатегорией категории $\mathbf{Top}_0$ топологических T_0 -пространств.

Как следует из результатов настоящей статьи, многие свойства собранных пространств имеют свое естественное обобщение на $\mathbf{H}$ -собранные пространства. Нашими основными результатами являются теоремы 11 и 20, которые характеризуют $\mathbf{H}$ -собранные пространства в терминах расширений, и теорема 23, которая описывает $\mathbf{H}$ -собрификации T_0 -пространств. Эта статья является первой в цикле статей об обобщенно собранных пространствах. Во второй части этого цикла бы обсудим $\mathbf{H}$ -собрификации аппроксимационных пространств.

Терминология, касающаяся T_0 -пространств, соответствует монографиям [3, 17, 18].

2. $\mathbf{H}$ -собранные пространства

2.1. I -системы и $\mathbf{H}$ -собранность Для топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующие подмножества его носителя X :

- $I(\mathbb{X})$, множество всех непустых неприводимых подмножеств в X ;
- $S(\mathbb{X})$, множество всех одноэлементных подмножеств в X ;
- $D(\mathbb{X})$, множество всех непустых направленных вверх подмножеств в X ;
- $WF(\mathbb{X})$, множество всех непустых вполне фильтрованных подмножеств в X ;
- $R(\mathbb{X})$, множество всех непустых подмножеств Рудина в X ;
- $I^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных неприводимых подмножеств в X ;
- $D^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных направленных вверх подмножеств в X ;
- $WF^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных вполне фильтрованных подмножеств в X ;
- $R^b(\mathbb{X})$, множество всех непустых ограниченных подмножеств Рудина в X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [4]. Системой подмножеств называется ковариантный функтор $\mathbf{H}: \mathbf{Top}_0 \rightarrow \mathbf{Set}$ такой, что $S(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq 2^X$, и для каждого $\mathbb{Y} \in \mathbf{Top}_0$ и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ имеем $\mathbf{H}(f)(A) = f(A) \in \mathbf{H}(\mathbb{Y})$ для всех $A \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$.

Система подмножеств $\mathbf{H}$ называется *неприводимой системой* или просто *I -системой*, если $\mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq I(\mathbb{X})$ для всех $\mathbb{X} \in \mathbf{Top}_0$.

Следствие ниже вытекает непосредственно из определения 1.

Следствие 2. Если $X \in \{D, D^b, WF, WF^b, R, R^b, I, I^b\}$, то X является I -системой.

Для системы подмножеств H полагаем $H_c(X) = \{cl_X A \mid A \in H(X)\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [4]. Пусть H — система подмножеств. T_0 -пространство X называется H -собранным, если $H_c(X) = S_c(X)$.

Очевидно, что класс всех S -собранных пространств совпадает с классом всех T_0 -пространств, а класс всех I -собранных пространств — с классом всех собранных пространств.

2.2. H-собранным определенными множества.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [4, определение 4.17]. Пусть X — T_0 -пространство, и пусть H — I -система. Подмножество $A \subseteq X$ называется H -собранным определенным, если для каждого H -собранного пространства Y и каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ существует [единственный] элемент $y_A \in Y$ такой, что $cl_Y f(A) = \downarrow y_A$.

Через $H^d(X)$ обозначаем множество всех H -собранным определенных подмножеств в X .

Непосредственным образом можно установить следующее утверждение.

Лемма 3 [4, лемма 4.20]. Пусть H — I -система, пусть X, Y — T_0 -пространства, пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, и пусть $A \in H^d(X)$. Тогда $f(A) \in H^d(Y)$.

Лемма 4 [4, лемма 4.19]. Если H — I -система, то $H \subseteq H^d \subseteq I$. В частности, $H^d(X)$ является I -системой, а $I^d = I$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X — T_0 -пространство и $A \in H(X)$. Пусть также Y является H -собранным пространством, и пусть отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно. Тогда $f(A) \in H(Y)$ по определению 1. Поскольку Y является H -собранным, найдется $y \in Y$ такой, что $cl_Y f(A) = \downarrow y$, откуда следует, что $A \in H^d(X)$ и $H(X) \subseteq H^d(X)$.

Пусть теперь $A \in H^d(X)$ и $A \subseteq F_0 \cup F_1$ для некоторых замкнутых подмножеств $F_0, F_1 \subseteq X$. Если $A \not\subseteq F_i$ для всех $i < 2$, то для любого $i < 2$ найдется $a_i \in A \setminus F_i$, т. е. $a_i \in A \cap U_i$, где $U_i = X \setminus F_i \in \mathcal{T}(X)$ для всех $i < 2$. Отметим, что $S \times S$ является собранным пространством, поэтому оно H -собранным (см. лемму 15(i) ниже). Рассмотрим отображение

$$f: X \rightarrow S \times S; \quad f: x \mapsto \begin{cases} (0, 0), & \text{если } x \notin U_0 \cup U_1, \\ (1, 0), & \text{если } x \in U_0 \setminus U_1, \\ (0, 1), & \text{если } x \in U_1 \setminus U_0, \\ (1, 1), & \text{если } x \in U_0 \cap U_1. \end{cases}$$

Легко видеть, что f непрерывно. По предположению существует $b \in S^2$ такой, что $cl f(A) = \downarrow b$. Так как $A \subseteq F_0 \cup F_1$, делаем вывод, что $f(a_0) = (1, 0) \in \downarrow b$ и $f(a_1) = (0, 1) \in \downarrow b$. Отсюда следует, что $b = (1, 1) \in cl f(A)$. Так как $(1, 1) \in \{(1, 1)\} \in \mathcal{T}(S \times S)$, получаем равенство $f(a) = (1, 1)$ для некоторого $a \in A$. Но тогда по определению f имеем $a \in U_0 \cap U_1 \cap (F_0 \cup F_1) = \emptyset$; противоречие. Это противоречие показывает, что $A \subseteq F_i$ для некоторого $i < 2$. Таким образом, $A \in I(X)$ и $H^d(X) \subseteq I(X)$.

Последнее утверждение вытекает непосредственно из леммы 3. $\square$

Лемма 5. Пусть $\mathbf{H}$ — I -система, пусть $\mathbb{X}$ — T_0 -пространство, и пусть $A \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$. Если $B \subseteq X$ таково, что $\text{cl}_{\mathbb{X}} B = \text{cl}_{\mathbb{X}} A$, то $B \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$. В частности, если $A \subseteq B \subseteq \text{cl}_{\mathbb{X}} A$, то $B \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{Y}$ — $\mathbf{H}$ -собранный пространство и отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно. Докажем сначала, что $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$ для всех $C \subseteq X$. Действительно, $f(C) \subseteq f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C)$, откуда $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C)$. Пусть $x \in \text{cl}_{\mathbb{X}} C$ и $f(x) \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$. Тогда $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и найдется $c \in C$ такой, что $c \in f^{-1}(U)$. Отсюда следует, что $f(c) \in U$ и поэтому $f(x) \in \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$. Таким образом, $f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$, откуда следует включение $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$, и получаем искомое равенство $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} C) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(C)$.

Далее, равенство $\text{cl}_{\mathbb{X}} B = \text{cl}_{\mathbb{X}} A$ влечет, что

$$\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} A) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\text{cl}_{\mathbb{X}} B) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(B).$$

Так как $A \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, существует $y \in Y$ такой, что $\downarrow y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(A) = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(B)$. Следовательно, $B \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$, что и требовалось.

Наконец, если $A \subseteq B \subseteq \text{cl}_{\mathbb{X}} A$, то $\text{cl}_{\mathbb{X}} B = \text{cl}_{\mathbb{X}} A$, а последнее утверждение леммы 5 вытекает из первого. $\square$

3. $\mathbf{H}$ -базисы и $\mathbf{H}^*$ -базисы

Согласно работе Ю. Л. Ершова [10] (см. также [3, разд. 5.2]) расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ топологических пространств называется *$\mathbf{u}$ -расширением*, если для каждого топологического пространства $\mathbb{Z}$ и любых непрерывных отображений $f, g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ имеем $f = g$, как только $f|_{\mathbb{X}} = g|_{\mathbb{X}}$. Следующее определение является обобщением [3, определение 8.2.1] (см. также работу Ю. Л. Ершова [8]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0 -пространств, и пусть $\mathbf{H}$ является I -системой. Тогда $\mathbb{X}$ называется $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Y}$, если для любого $y \in Y$ существует $Z \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$ такой, что $\text{cl}_{\mathbb{Y}} Z = \downarrow y$. (Отсюда следует, что в этом случае $y \in \text{sob}_{\mathbb{Y}} Z$ и $y = \sup_{\mathbb{Y}} Z$.)

Пространство $\mathbb{X}$ называется $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, если для любого $\mathbf{H}$ -сбранного пространства $\mathbb{Z}$ и любого непрерывного отображения $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ существует единственное непрерывное отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $f = g|_{\mathbb{X}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, то тождественное отображение $\iota_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ является гомеоморфным вложением. Поэтому в определении $\mathbf{H}$ -базиса (см. определение 4) имеем включение $F \in \mathbf{H}(\mathbb{Y})$.

Следующее утверждение имеет довольно простое доказательство.

Лемма 6. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0 -пространств и $f: \mathbb{Y} \rightarrow f(\mathbb{Y})$ — гомеоморфизм. Тогда $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, если и только если $f(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $f(\mathbb{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{Z}$ — $\mathbf{H}$ -собранный пространство, и пусть отображение $g: f(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Так как f — гомеоморфизм, отображение $h' = gf|_{\mathbb{X}}$ непрерывно. Следовательно, существует единственное непрерывное отображение $h: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $h|_{\mathbb{X}} = h'$. Рассмотрим непрерывное отображение $g' = hf^{-1}$. Для всех $y \in f(\mathbb{X})$ имеем

$$g'(y) = hf^{-1}(y) = h'f^{-1}(y) = gff^{-1}(y) = g(y).$$

Таким образом, $f(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $f(\mathbb{Y})$. Обратное утверждение может быть доказано симметричным образом. $\square$

В этом разделе обобщим некоторые результаты из [3, разд. 8.2] на H -собранные пространства. Следующее утверждение является обобщением [3, предложение 8.2.5].

Предложение 7. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0 -пространств, и пусть H — I -система. Если $\mathbb{X}$ является H^d -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X}$ является H^* -базисом для $\mathbb{Y}$. В частности, если $\mathbb{X}$ является H -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X}$ — H^* -базис для $\mathbb{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{Z}$ — H -собранный пространство, и пусть отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ непрерывно. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \mathbb{Y}$. Так как $\mathbb{X}$ является H^d -базисом для $\mathbb{Y}$, существует $F \in H^d(\mathbb{X})$ такое, что $F \subseteq \downarrow y$ и $y \in \text{cl}_{\mathbb{Y}} F$; следовательно, $\text{cl}_{\mathbb{Y}} F = \downarrow y$. По определению H^d существует $z \in \mathbb{Z}$ такой, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) = \downarrow z$ поскольку $\mathbb{Z}$ является H -собранным пространством. Рассмотрим отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $g(y) = z$. Покажем, что g является единственным непрерывным отображением из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Z}$ с условием $f = g|_{\mathbb{X}}$.

Утверждение 1. Отображение g определено корректно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим другое множество $G \in H^d(\mathbb{X})$ такое, что $G \subseteq \downarrow y$ и $y \in \text{cl}_{\mathbb{Y}} G$. Достаточно показать, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) = \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(G)$. Пусть $z_0 \in \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(G)$ и $U \in \mathcal{T}(z_0)$; тогда существует $x \in G$ такой, что $f(x) \in U$. Так как $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, существует $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ такое, что $V \cap X = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(X)$. Поскольку $x \in G$ и $G \subseteq \downarrow y$, имеем $x \leq y$, следовательно, $y \in V$. Так как $y \in \text{cl}_{\mathbb{Y}} F$, существует $x_0 \in V \cap F \subseteq f^{-1}(U) \cap F$. Отсюда получаем, что $f(x_0) \in U \cap f(F)$, поэтому $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(G) \subseteq \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(F)$. Обратное утверждение может быть доказано симметричным образом. $\square$

Так как $\{x\} \in H(\mathbb{X}) \subseteq H^d(\mathbb{X})$ и $\downarrow_{\mathbb{Z}} f(x) = \text{cl}_{\mathbb{Z}}\{f(x)\}$, заключаем в силу (доказательства) утверждения 1, что $g(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, т. е. $g|_{\mathbb{X}} = f$.

Утверждение 2. Отображение g непрерывно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное множество $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$. Покажем сначала, что $y \in Y$, $y \in g^{-1}(U)$ тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U) \cap \downarrow y \neq \emptyset$.

Действительно, пусть $y \in g^{-1}(U)$; тогда $g(y) \in U$. По определению отображения g найдется подмножество $F \in H^d(\mathbb{X})$ такое, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} f(F) = \downarrow_{\mathbb{Z}} g(y)$, в частности, $g(y) \in \text{cl}_{\mathbb{Z}} f(F)$. Таким образом, существует $x \in F$ такой, что $f(x) \in U$; т. е. $f^{-1}(U) \cap \downarrow y \neq \emptyset$. Обратно, предположим, что $f^{-1}(U) \cap \downarrow y \neq \emptyset$. Тогда поскольку $\mathbb{X}$ является H^d -базисом для $\mathbb{Y}$, существует $G \in H^d(\mathbb{X})$ такой, что $\downarrow y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} G$. Следовательно, $f^{-1}(U) \cap \text{cl}_{\mathbb{Y}} G = f^{-1}(U) \cap \downarrow y \neq \emptyset$, откуда $f^{-1}(U) \cap G \neq \emptyset$. Таким образом, $f(x) \in U$ для некоторого $x \in G$. По определению g имеем $f(x) \leq g(y)$, поэтому $g(y) \in U$ и $y \in g^{-1}(U)$. Следовательно,

$$g^{-1}(U) = \{y \in Y \mid f^{-1}(U) \cap \downarrow y \neq \emptyset\} = \uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U).$$

Пусть $W \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ таково, что $W \cap X = f^{-1}(U) \in \mathcal{T}(X)$. Покажем, что $\uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U) = W$. Действительно, если $y \in W$, то поскольку $\mathbb{X}$ является H^d -базисом для $\mathbb{Y}$, существует $H \in H^d(\mathbb{X})$ такое, что $\downarrow y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} H$. Отсюда следует, что $x \in H \cap W \subseteq X \cap W = f^{-1}(U)$. Вспомогая, что $H \subseteq \downarrow y$, имеем $x \leq y$ и $y \in \uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U)$. Следовательно, $W \subseteq \uparrow_{\mathbb{Y}} f^{-1}(U)$. Обратное включение очевидно. Таким образом, $f^{-1}(U) = W \in \mathcal{T}(Y)$. $\square$

Утверждение 3. Отображение g единственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть непрерывные отображения g_0 и g_1 из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Z}$ таковы, что $g_0|_{\mathbb{X}} = f = g_1|_{\mathbb{X}}$. Достаточно установить, что $g_i(y) \leq g_{1-i}(y)$ для всех

$y \in Y$ и всех $i < 2$. Действительно, пусть $i < 2$ и пусть $g_i(y) \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{Z})$ для некоторого $y \in Y$; тогда $y \in g_i^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{X}$ — $\mathbf{H}^d$ -базис для $\mathbb{Y}$, существует $F \in \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$ такое, что $\downarrow y = \text{cl}_{\mathbb{Y}} F$. Следовательно, найдется $x \in g_i^{-1}(U) \cap F$; поэтому $f(x) = g_i(x) \in U$. Так как g_{1-i} непрерывно и $x \leq y$, имеем $f(x) = g_{1-i}(x) \leq g_{1-i}(y)$, т. е. $g_{1-i}(y) \in U$, что и требовалось. $\square$

Первое утверждение предложения вытекает из утверждений 1–3. Последнее утверждение предложения вытекает из первого и включения $\mathbf{H}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}^d(\mathbb{X})$ (см. лемму 4). $\square$

Лемма 8. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0 -пространств и $\mathbf{H}$ — I -система. Если $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ и $V_0, V_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ таковы, что $V_0 \cap X = V_1 \cap X = U$. Рассмотрим отображения $f_i: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{S}$, $i < 2$, определенные по правилу:

$$f_i = \begin{cases} \top, & \text{если } y \in V_i, \\ \perp, & \text{если } y \notin V_i. \end{cases}$$

Здесь $\mathbb{S}$ обозначает, как обычно, пространство Серпинского. Очевидно, что отображения f_0 и f_1 непрерывны и $f_0|_X = f_1|_X$. Так как $\mathbb{S}$ является очевидным образом собранным, $\mathbb{S}$ является также $\mathbf{H}$ -собранным. Таким образом, $f_0 = f_1$ и $V_0 = V_1$. Требуемое утверждение вытекает из [3, теорема 5.2.2]. $\square$

Лемма 9. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является расширением топологических T_0 -пространств и $\mathbf{H}$ — I -система. Справедливы следующие утверждения.

(i) Если $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Z}$.

(ii) $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ — $\mathbf{H}^*$ -базис для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ — $\mathbf{H}^*$ -базис для $\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, что $\mathbb{X}$ — $\mathbf{H}$ -базис для $\mathbb{Z}$. Это означает, что для произвольного $y \in Y \subseteq Z$ существует подмножество $F \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$ такое, что $\text{cl}_{\mathbb{Z}} F = \downarrow_{\mathbb{Z}} y$. Тогда $\text{cl}_{\mathbb{Y}} F = \text{cl}_{\mathbb{Z}} F \cap Y = \downarrow_{\mathbb{Z}} y \cap Y = \downarrow_{\mathbb{Y}} y$, т. е. $\mathbb{X}$ — $\mathbf{H}$ -базис для $\mathbb{Y}$.

Если $z \in Z$, то существует $G \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$ такое, что $\text{cl}_{\mathbb{Y}} G = \downarrow_{\mathbb{Z}} z$. Так как $G = g(G) \in \mathbf{H}(\mathbb{Y})$, где $g: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, $g = \text{id}_{\mathbb{X}}$, является гомеоморфным вложением, заключаем, что $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Z}$ по определению.

(ii) Предположим сначала, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$. Пусть $\mathbb{W}$ — произвольное $\mathbf{H}$ -собранный пространство и отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{W}$ непрерывно. Существует единственное непрерывное отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{W}$ такое, что $f = g|_X$. Поскольку g непрерывно, а $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$, существует единственное непрерывное отображение $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}$ такое, что $g = h|_Y$. Имеем $f = h|_X$. Единственность f следует из леммы 8 и [3, следствие 5.2.3]. Таким образом, $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$.

Пусть теперь $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$. Вновь рассмотрим $\mathbf{H}$ -собранный пространство $\mathbb{W}$ и непрерывное отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{W}$. Существует единственное непрерывное отображение $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}$ такое, что $f = h|_X$. Рассмотрим отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{W}$, определенное по правилу $g = h|_Y$; очевидно, что $f = g|_X$. Единственность g вытекает вновь из леммы 8 и [3, следствие 5.2.3]. Таким образом, $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$.

Наконец, докажем, что $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$. Для этого рассмотрим произвольное непрерывное отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{W}$. Тогда $f = g|_{\mathbb{X}}$ является непрерывным отображением из $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Z}$. Так как $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$, существует единственное непрерывное отображение $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{W}$ такое, что $h|_{\mathbb{X}} = f$. Снова в силу леммы 8 и [3, следствие 5.2.3] получаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением. Таким образом, $h|_{\mathbb{Y}} = g$, и h — единственное непрерывное отображением с этим свойством. $\square$

4. Характеризация Н-собранных пространств

Лемма 10. Пусть $\mathbb{X}$ — топологическое T_0 -пространство и $\mathbf{H}$ — I -система. Пусть также $S \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$ таково, что множество $\text{cl}_{\mathbb{X}} S$ не имеет наибольшего элемента. Тогда существует одноэлементное расширение $\mathbb{Y} \geq \mathbb{X}$ такое, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $Y = X \cup \{y\}$, где $y \notin X$. Для открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ пусть

$$U' = \begin{cases} U, & \text{если } U \cap S = \emptyset, \\ U \cup \{y\}, & \text{если } U \cap S \neq \emptyset. \end{cases}$$

Так как $\mathbf{H}$ является I -системой, множество S неприводимо. Поэтому множество $\text{cl}_{\mathbb{X}} S$ также неприводимо. Согласно [3, лемма 5.1.5] имеем $Y = X \cup \{y\}$, $S = \downarrow y \cap X$ и $Y = \text{sob}_{\mathbb{Y}} X$. Отсюда следует требуемое заключение. $\square$

Следующий результат обобщает [3, теорема 5.3.2] на произвольную I -систему $\mathbf{H}$ (см. также работу Ю. Л. Ершова [10]).

Теорема 11. Пусть $\mathbf{H}$ — I -система. Для T_0 -пространства $\mathbb{X}$ равносильны следующие условия.

- (i) $\mathbb{X}$ $\mathbf{H}$ -собранным.
- (ii) Если $\mathbb{Y}_0$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то каждое непрерывное отображение $f_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}$ имеет [единственное] продолжение до непрерывного отображения $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$.
- (iii) Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.
- (iv) Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^d$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.
- (v) Если $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ и $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$.
- (vi) $\mathbb{X}$ $\mathbf{H}^d$ -собранным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тот факт, что (i) влечет (ii), вытекает непосредственно из определения 4.

Предположим, что выполнено (ii); пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, а $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$. По предположению существует непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Без ограничения общности можно считать, что f действует из $\mathbb{Y}$ в $\mathbb{Y}$. Так как $f|_{\mathbb{X}} = \text{id}_{\mathbb{X}}$, заключаем по определению 4, что $f = \text{id}_{\mathbb{Y}}$. Отсюда следует, что $Y = f(Y) = X$, поэтому выполнено (iii).

Далее, (iii) влечет (iv) по предложению 7, а (iv) влечет (v) по лемме 4. Предположим, что выполнено (v). Если $\mathbb{X}$ не $\mathbf{H}$ -собранным пространством, то существует множество $S \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$ такое, что множество $\text{cl}_{\mathbb{X}} S$ не имеет наибольшего элемента. В этом случае по лемме 10 существует собственное расширение $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ такое, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -базисом для $\mathbb{Y}$, что противоречит (v). Это противоречие показывает, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством, поэтому (v) влечет (i).

Таким образом, утверждения (i)–(v) эквивалентны для произвольной I -системы. По лемме 4 H^d является I -системой. Следовательно, утверждения (iv) и (vi) эквивалентны в силу только что установленного. Доказательство завершено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Эквивалентность условий (i) и (vi) теоремы 11 была установлена Сю в [4, предложение 4.23].

5. Основные свойства H -собранных пространств

Следующее утверждение имеет довольно простое доказательство (см. [4, предложение 4.26], а также [14, лемма 11]).

Лемма 12. Пусть H является системой подмножеств [I -системой соответственно]. Если X является ретрактом H -собранного пространства Y , то X также H -собранный.

Лемма 13. Пусть $X \leq Y$ — расширение топологических T_0 -пространств и H — I -система. Если Y является H -собранным и $X = \text{sob}_Y X$, то X также H -собранный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Z_0 — H^* -базис для Z и отображение $f_0: Z_0 \rightarrow X$ непрерывно. Можно предполагать, что f_0 действует из Z_0 в Y . Поскольку Y является H -собранным пространством, существует единственное непрерывное отображение $f: Z \rightarrow Y$ такое, что $f|_{Z_0} = f_0$. В силу леммы 8 и [3, лемма 5.2.2(iii)] имеем $Z = \text{sob}_Z Z_0$, откуда получаем

$$f(Z) = f(\text{sob}_Z Z_0) \subseteq \text{sob}_Y f(Z_0) = \text{sob}_Y f_0(Z_0) \subseteq \text{sob}_Y X = X.$$

Требуемое утверждение следует из теоремы 11(ii). $\square$

Лемма 14. Пусть X_i , $i \in I$, являются T_0 -пространствами и $X = \prod_{i \in I} X_i$. Зафиксируем $i \in I$ и $a \in X$ и рассмотрим отображение $\rho_i: X \rightarrow X$, определенное по правилу

$$\pi_j \rho_i(x) = \begin{cases} \pi_i(x), & \text{если } j = i, \\ \pi_j(a), & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Тогда

- (i) ρ_i является ретракцией;
- (ii) $X_i \cong \rho_i(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Непосредственно видно, что $\rho_i^2 = \rho_i$. Более того, для каждого $j \in I$ и каждого $U \in \mathcal{T}(X_j)$ имеем

$$\rho_i^{-1}(V_{U,j}) = \begin{cases} V_{U,j} \in \mathcal{T}(X), & \text{если } j = i, \\ \emptyset \in \mathcal{T}(X), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \notin U, \\ X \in \mathcal{T}(X), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \in U, \end{cases}$$

где $V_{U,j} = \{y \in X \mid \pi_j(y) \in U\}$ является предбазисным открытым множеством топологии $\mathcal{T}(X)$, определенным по j и U . Следовательно, ρ_i непрерывно.

- (ii) Рассмотрим отображение

$$g: \rho_i(X) \rightarrow X_i; \quad g: \rho_i(x) \mapsto \pi_i(x).$$

Очевидно, что g взаимно однозначно и «на». Более того, для любого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_i)$ имеем $g^{-1}(U) = V_{U,i} \cap \rho_i(\mathbb{X})$, поэтому g непрерывно. Далее, для каждого $j \in I$ и каждого $W \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_j)$ имеем

$$g(V_{W,j} \cap \rho_i(\mathbb{X})) = \begin{cases} W \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j = i, \\ \emptyset \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \notin W, \\ X_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_i), & \text{если } j \neq i \text{ и } \pi_j(a) \in W, \end{cases}$$

поэтому g открыто, т. е. является гомеоморфизмом. $\square$

Лемма 15. Пусть $\mathbf{H}$ является I -системой, и пусть $\mathbb{X}_i$, $i \in I$, являются T_0 -пространствами. Справедливы следующие утверждения.

(i) $\mathbb{X} = \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ $\mathbf{H}$ -собранным тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}_i$ $\mathbf{H}$ -собранным для всех $i \in I$.

(ii) Если $\Lambda = \langle I, \mathbb{X}_i, f_{ij} \rangle$ — обратный спектр $\mathbf{H}$ -собранных пространств и $\mathbb{X} = \varprojlim \Lambda$, то $\mathbb{X}$ $\mathbf{H}$ -собранным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством. Для каждого $i \in I$ пространство $\mathbb{X}_i$ гомеоморфно ретракту пространства $\mathbb{X}$ по лемме 14, поэтому $\mathbb{X}_i$ $\mathbf{H}$ -собранным по лемме 12. Предположим, что $\mathbb{X}_i$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством для всех $i \in I$. Пусть $\mathbb{Y}_0$ — $\mathbf{H}^*$ -базис для $\mathbb{Y}$, а отображение $f_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ непрерывно. Тогда $\pi_i f_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}_i$ непрерывно для каждого $i \in I$, где π_i обозначает каноническую проекцию. Так как $\mathbb{X}_i$ $\mathbf{H}$ -собранным для каждого $i \in I$, для любого $i \in I$ существует единственное непрерывное отображение $f_i: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}_i$ такое, что $f_i|_{\mathbb{Y}_0} = \pi_i f_0$. Далее, согласно [3, лемма 1.6.1] существует непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ такое, что $\pi_i f = f_i$. Очевидно, что $\pi_i f(y) = f_i(y) = \pi_i f_0(y)$ для каждого $y \in \mathbb{Y}_0$, $i \in I$, откуда $f|_{\mathbb{Y}_0} = f_0$. Таким образом, $\prod_{i \in I} \mathbb{X}_i$ является $\mathbf{H}$ -собранным по теореме 11.

(ii) Пусть $\mathbb{Y}_0$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$ и отображение $g_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}$ непрерывно. Согласно [3, лемма 2.1.1(i)] получаем, что $\pi_i g_0: \mathbb{Y}_0 \rightarrow \mathbb{X}_i$ непрерывно для каждого $i \in I$. Более того, $\pi_i g_0 = \pi_{ij} \pi_j g_0$, как только $i \leq j$ в I . Поскольку $\mathbb{X}_i$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством для всех $i \in I$, заключаем, что для каждого $i \in I$ существует единственное непрерывное отображение $f_i: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}_i$ такое, что $f_i|_{\mathbb{Y}_0} = \pi_i g_0 = \pi_{ij} \pi_j g_0 = \pi_{ij} f_j|_{\mathbb{Y}_0}$. По лемме 8 $\mathbb{Y}_0 \leq \mathbb{Y}$ является u -расширением. Таким образом, $f_i = \pi_{ij} f_j$, как только $i \leq j$ в I . Применяя [3, лемма 2.1.1(ii)], получаем, что существует (единственное) непрерывное отображение $g: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{X}$ такое, что $\pi_i g = f_i$ для всех $i \in I$. Тогда $\pi_i g(y) = f_i(y) = \pi_i g_0(y)$ для каждого $y \in \mathbb{Y}_0$, поэтому $g|_{\mathbb{Y}_0} = g_0$ и $\mathbb{X}$ $\mathbf{H}$ -собранным по теореме 11. $\square$

6. Н-собрификации и Н-пополнения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. T_0 -пространство $\mathbb{Z}$ называется $\mathbf{H}$ -собрификацией T_0 -пространства $\mathbb{X}$, если $\mathbb{Z}$ $\mathbf{H}$ -собранным и существует гомеоморфное вложение $\lambda_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$.

Непосредственно из определения 5 вытекает

Лемма 16. $\mathbf{H}$ -собрификация топологического T_0 -пространства $\mathbb{X}$ единственна с точностью до гомеоморфизма.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathbb{Y}_0$ и $\mathbb{Y}_1$ — две $\mathbf{H}$ -собрификации пространства $\mathbb{X}$, и пусть $\lambda_i: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}_i$, где $i < 2$, — два соответствующих гомеоморфных вложения,

удовлетворяющих условиям определения 5. Так как $\lambda_i(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}_i$, а пространство $\mathbb{Y}_{i-1}$ $\mathbf{H}$ -собранным для каждого $i < 2$, существует единственное непрерывное отображение $f_i: \mathbb{Y}_i \rightarrow \mathbb{Y}_{i-1}$ такое, что $f_i|_{\lambda_i(\mathbb{X})} = \lambda_{i-1}\lambda_i^{-1}$. Таким образом, $\lambda_i = f_{i-1}\lambda_{i-1} = f_{i-1}f_i\lambda_i$, откуда $\text{id}_{\mathbb{Y}_i}|_{\lambda_i(\mathbb{X})} = f_{1-i}f_i|_{\lambda_i(\mathbb{X})}$. Поскольку $\lambda_i(\mathbb{X}) \leq \mathbb{Y}_i$ является u -расширением по лемме 8, получаем, что $f_{i-1}f_i = \text{id}_{\mathbb{Y}_i}$ для всех $i < 2$. Таким образом, f_i является гомеоморфизмом для каждого $i < 2$. $\square$

Для топологического пространства $\mathbb{X}$ обозначим через $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ его (единственную с точностью до гомеоморфизма) $\mathbf{H}$ -собрификацию. Как показывает следующая теорема, $\mathbf{H}$ -собрификации существуют для произвольных I -систем $\mathbf{H}$.

Теорема 17. Пусть $\mathbf{H}$ является I -системой. Для каждого T_0 -пространства $\mathbb{X}$ существует его $\mathbf{H}$ -собрификация $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отношение эквивалентности $\sim$ на $\mathbf{H}(\mathbb{X})$ следующим образом. Полагаем для всех $F_0, F_1 \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$:

$F_0 \sim F_1$ тогда и только тогда, когда

$$F_0 \cap U \neq \emptyset \text{ равносильно } F_1 \cap U \neq \emptyset \text{ для всех } U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}).$$

Полагаем также

$$[F] = \{F' \in \mathbf{H}(\mathbb{X}) \mid F' \sim F\}, \text{ где } F \in \mathbf{H}(\mathbb{X}); \quad H(\mathbb{X}) = \{[F] \mid F \in \mathbf{H}(\mathbb{X})\};$$

$$U^* = \{[F] \in H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \emptyset\}, \text{ где } U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}); \quad \mathcal{T}_{\mathbb{X}}^* = \{U^* \mid U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})\}.$$

В дальнейшем будем писать для краткости $\mathcal{T}^*$ вместо $\mathcal{T}_{\mathbb{X}}^*$, если это не вызывает недоразумений.

Утверждение 1. $\mathbb{H}(\mathbb{X}) = \langle H(\mathbb{X}), \mathcal{T}_{\mathbb{X}}^* \rangle$ является топологическим T_0 -пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что

$$\emptyset = \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset^* \in \mathcal{T}^*,$$

$$H(\mathbb{X}) = \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap X \neq \emptyset\} = X^* \in \mathcal{T}^*.$$

Пусть $U_0, U_1 \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$; имеем

$$\begin{aligned} U_0^* \cap U_1^* &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_0 \neq \emptyset \text{ и } H \cap U_1 \neq \emptyset\} \\ &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap (U_0 \cap U_1) \neq \emptyset\} = (U_0 \cap U_1)^* \in \mathcal{T}^*, \end{aligned}$$

так как $H \in \mathbf{H}(\mathbb{X})$, а $\mathbf{H}$ является I -системой. Далее, пусть $U_i \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ для всех $i \in I$; тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i^* &= \left\{ [H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap \bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset \right\} \\ &= \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_i \neq \emptyset \text{ для некоторого } i \in I\} \\ &= \bigcup_{i \in I} \{[H] \in H(\mathbb{X}) \mid H \cap U_i \neq \emptyset\} = \left(\bigcup_{i \in I} U_i \right)^* \in \mathcal{T}^*. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{T}^*$ является топологией на $H(\mathbb{X})$. Более того, $\mathcal{T}^*$ T_0 -отделимо по определению, а также в силу того, что $\mathbf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}(\mathbb{X})$. $\square$

Рассмотрим следующее отображение:

$$\lambda_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{X}), \quad \lambda: x \mapsto [\{x\}].$$

Поскольку $x \in \mathbf{S}(\mathbb{X}) \subseteq \mathbf{H}(\mathbb{X})$ для всех $x \in X$, отображение $\lambda_{\mathbb{X}}$ определено корректно. Пишем далее для краткости λ вместо $\lambda_{\mathbb{X}}$, когда не возникает путаницы.

Утверждение 2. λ является гомеоморфным вложением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathbb{X}$ является T_0 -пространством, равенство $[\{x_0\}] = [\{x_1\}]$ влечет равенство $x_0 = x_1$ для всех $x_0, x_1 \in X$. Таким образом, λ разностнозначно. Более того, для произвольного $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$ имеем

$$\lambda(U) = \{[\{x\}] \mid x \in U\} = U^* \cap \lambda(X) \in \mathcal{T}^*,$$

$$\lambda^{-1}(U^*) = \{x \in X \mid [\{x\}] \in U^*\} = U \in \mathcal{T},$$

откуда следует, что λ открыто и непрерывно. $\square$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda(\mathbb{X})$ является подпространством в $\mathbb{H}(\mathbb{X})$.

Утверждение 3. $\lambda(\mathbb{X})$ является Н-базисом для $\mathbb{H}(\mathbb{X})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольное множество $F \in \mathbb{H}(\mathbb{X})$. По утверждению 2 $\lambda(F) = \{[\{x\}] \mid x \in F\} \in \mathbb{H}(\mathbb{H}(\mathbb{X}))$. Поэтому достаточно показать, что $\text{cl } \lambda(F) = \downarrow [F]$. Если $[F] \in U^*$ для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, то существует $x \in F \cap U$, откуда $[\{x\}] \in U^* \cap \lambda(F)$. Это означает, что $[F] \in \text{cl } \lambda(F)$ и $\downarrow [F] \subseteq \text{cl } \lambda(F)$. С другой стороны, если $[\{x\}] \in U^*$ для некоторых $x \in F$ и $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, то $x \in F \cap U \neq \emptyset$. Таким образом, $[F] \in U^*$ и $[\{x\}] \leq [F]$, откуда следуют включения $\lambda(F) \subseteq \downarrow [F]$ и $\text{cl } \lambda(F) \subseteq \downarrow [F]$. $\square$

Построим трансфинитную последовательность расширений $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$, где α пробегает все ординалы, следующим образом. Полагаем

$$\mathbb{X}_0 = \mathbb{X},$$

$$\mathbb{X}_{\alpha+1} = \mathbb{H}(\mathbb{X}_\alpha) \text{ для всех ординалов } \alpha,$$

$$\mathbb{X}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{X}_\beta \text{ } \alpha \text{ является предельным ординалом.}$$

Для всех $\beta \leq \alpha$ пространство $\mathbb{X}_\beta$ является таким образом подпространством в $\mathbb{X}_\alpha$; пусть $e_{\beta\alpha}: \mathbb{X}_\beta \rightarrow \mathbb{X}_\alpha$ обозначает соответствующее вложение, которое является, конечно, гомеоморфным вложением.

Утверждение 4. Для всех $\beta \leq \gamma$ пространство $\mathbb{X}_\beta$ является Н*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$. В частности, $\mathbb{X}_\beta \leq \mathbb{X}_\gamma$ является u -расширением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала индукцией по γ , что $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0$ — Н*-базис для $\mathbb{X}_\gamma$. Действительно, если $\gamma = 0$, то требуемое утверждение тривиально. Предположим поэтому, что $\gamma > 0$ и $\mathbb{X}$ — Н*-базис для $\mathbb{X}_\alpha$ при всех $\alpha < \gamma$. По лемме 8 отсюда следует, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$ — u -расширение для всех $\alpha < \gamma$.

Если $\gamma = \alpha + 1$ для некоторого α , то $\mathbb{X}_\gamma = \mathbb{H}(\mathbb{X}_\alpha)$. По индукционному предположению получаем, что $\mathbb{X}$ является Н*-базисом для $\mathbb{X}_\alpha$. Из утверждения 3 и предложения 7 следует, что $\mathbb{X}_\alpha$ является Н*-базисом для $\mathbb{X}_\gamma$. Таким образом, $\mathbb{X}$ — Н*-базис для $\mathbb{X}_\gamma$ по лемме 9(ii).

Предположим теперь, что γ является предельным ординалом; в этом случае $\mathbb{X}_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} \mathbb{X}_\alpha$. Пусть $\mathbb{Y}$ — Н-собранный пространство и отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно. Применяя индукционное предположение, получаем, что для любого $\alpha < \gamma$ существует непрерывное отображение $f_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $f_\alpha|_{\mathbb{X}} = f$. Так как $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\delta$ является u -расширением для всех $\delta < \gamma$, а $(f_\alpha|_{\mathbb{X}_\delta})|_{\mathbb{X}} = f_\alpha|_{\mathbb{X}} = f = f_\delta|_{\mathbb{X}}$ для всех $\delta \leq \alpha < \gamma$, заключаем, что $f_\alpha|_{\mathbb{X}_\delta} = f_\delta$ для всех

$\delta \leq \alpha < \gamma$. Таким образом, корректно определение следующего отображения. Для всех $x \in X_\gamma$ полагаем:

$$g(x) = f_\alpha(x), \quad \text{как только } x \in X_\alpha.$$

Для каждого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ имеем $g^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha < \gamma} f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_\gamma)$, поскольку отображение $f_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно для всех $\alpha < \gamma$. Таким образом, отображение $g: \mathbb{X}_\gamma \rightarrow \mathbb{Y}$ также непрерывно. Более того, $g|_{\mathbb{X}} = f$. Пусть $h: \mathbb{X}_\gamma \rightarrow \mathbb{Y}$ — такое непрерывное отображение, что $h|_{\mathbb{X}} = f$. Для $\alpha < \gamma$ полагаем $h_\alpha = h|_{\mathbb{X}_\alpha}$. Тогда для любого $\alpha < \gamma$ отображение $h_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно и $h_\alpha|_{\mathbb{X}} = h|_{\mathbb{X}} = f$. Так как $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{X}_\alpha$, заключаем, что $h_\alpha = f_\alpha = g|_{\mathbb{X}_\alpha}$ для всех $\alpha < \gamma$. Поскольку $X_\gamma = \bigcup_{\alpha < \gamma} X_\alpha$, получаем, что $h = g$, а $\mathbb{X} = \mathbb{X}_0$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ в этом случае.

Таким образом, $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ для всех ординалов γ . Применяя лемму 9(ii), получаем, что $\mathbb{X}_\beta$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{X}_\gamma$ для всех ординалов $\beta \leq \gamma$. Второе утверждение следует таким образом из леммы 8. $\square$

Очевидно, что пространство Серпинского $\mathbb{S}$ собранно, поэтому $\mathbb{S}$ $\mathbf{H}$ -собранно. Таким образом, любая декартова степень пространства $\mathbb{S}$ $\mathbf{H}$ -собрана по лемме 15(i). Следовательно, ввиду [3, предложение 1.6.2] существует $\mathbf{H}$ -собранное пространство $\mathbb{Y}$ такое, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$. Согласно утверждению 4 для каждого ординала α существует непрерывное отображение $f_\alpha: \mathbb{X}_\alpha \rightarrow \mathbb{Y}$ такое, что $f_\alpha|_{\mathbb{X}} = \text{id}_{\mathbb{X}}$. Согласно утверждению 4 $\mathbb{X} \leq \mathbb{X}_\alpha$ является u -расширением, а потому и существенным расширением ввиду [3, следствие 10.2.7]. Поскольку $\text{id}_{\mathbb{X}}$ является гомеоморфным вложением $\mathbb{X}$ в $\mathbb{Y}$, делаем вывод, что f_α является гомеоморфным вложением для всех α . Отсюда, в частности, вытекает, что $|X_\alpha| \leq |Y|$ для всех α .

Выберем произвольный ординал $\kappa > |Y|$. Если $X_\alpha \subset X_{\alpha+1}$ для всех $\alpha < \kappa$, то для любого $\alpha < \kappa$ существует элемент $g(\alpha) \in X_{\alpha+1} \setminus X_\alpha$. Поэтому отображение $g: \kappa \rightarrow X_\kappa$ разнозначно, что противоречит неравенству $\kappa > |Y| \geq |X_\kappa|$. Это противоречие показывает, что существует ординал $\alpha < \kappa$ такой, что $X_{\alpha+1} = X_\alpha$. Согласно построению для любого $G \in \mathbf{H}(\mathbb{X}_\alpha)$ существует $x \in X_\alpha$ такой, что $[G] = \{\{x\}\}$.

Докажем, что $\text{cl } G = \downarrow x$ в $\mathbb{X}_\alpha$. Действительно, поскольку $G \sim \{x\}$, делаем вывод, что $x \in \text{cl } G$ и $\downarrow x \subseteq \text{cl } G$. Предположим, что $y \in \text{cl } G$ и $y \in U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}_\alpha)$. Это означает, что $G \cap U \neq \emptyset$, поэтому $x \in U$ в силу того, что $G \sim \{x\}$. Следовательно, $y \leq x$ и $\text{cl } G \subseteq \downarrow x$, откуда вытекает требуемое равенство $\text{cl } G = \downarrow x$. Это равенство означает, что $\mathbb{X}_\alpha$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством. Поскольку $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{X}_\alpha$ по утверждению 4, из леммы 16 получаем, что $\mathbb{X}_\alpha \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, что и требовалось показать. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В доказательстве теоремы 17 была использована конструкция из работы Ю. Л. Ершова [8], которая позволила установить существование d -пополнений топологических T_0 -пространств (см. также [3, теорема 8.2.6]). Позже похожая конструкция была использована Ю. Л. Ершовым в [13, теорема 4.3] при нахождении достаточных условий существования $\mathbf{K}$ -пополнений T_0 -пространств для широких категорий $\mathbf{K}$.

Альтернативным образом наша теорема 17 может быть получена из этого результата Ю. Л. Ершова (см. [13, теорема 4.3]). Не давая точных определений, отметим следующее. Пусть $\mathbf{H}$ является I -системой и $\mathbf{H}$ — полная

подкатегория категории **Тор**₀ топологических T_0 -пространств с непрерывными отображениями, объектами которой являются в точности все H-собранные пространства. Ясно, что **H** является широкой категорией. Тогда ковариантный функтор $F: \mathbf{Тор}_0 \rightarrow \mathbf{Тор}_0$ такой, что $F(X) = H(X)$ для каждого T_0 -пространства X и

$$F(f): H(X) \rightarrow H(Y); \quad F(f): [G] \rightarrow [f(G)]$$

для каждого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$, где $H(X)$ определено в доказательстве теоремы 17, вместе с естественным преобразованием λ образует обильное **H**-предпополнение (F, λ) (см. следствие 19 ниже). Доказательство этого факта вытекает из доказательства теоремы 17. По теореме 4.3 из [13] существуют **K**-пополнения T_0 -пространств, которые и являются их H-собрификациями.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть **H** — *I*-система. Следуя Ю. Л. Ершову [11], **H**-рангом топологического пространства X будем называть наименьший ординал κ такой, что пространство X_κ , построенное в доказательстве теоремы 17, H-собранным.

Из следствия 2 и теоремы 17 получаем

Следствие 18. Пусть **H** является одной из *I*-систем из множества

$$\{D, D^b, WF, WF^b, R, R^b, I, I^b\}.$$

Тогда каждое T_0 -пространство обладает H-собрификацией.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для **H** = **I** утверждение следствия 18 является классическим результатом (см. например [3, теорема 5.5.1]). Для **H** = **D** утверждение следствия 18 установлено в [8] (см. также [3, теорема 8.2.6]). Для **H** = **D**^{*b*} утверждение следствия 18 установлено в [12, теорема 8.4]. Для **H** = **WF** утверждение следствия 18 установлено в [5, теорема 3.5].

Следующее утверждение обобщает [3, следствие 8.1.8].

Следствие 19. Если X и Y являются T_0 -пространствами, а отображение $f: X \rightarrow Y$ непрерывно, то существует единственное непрерывное отображение $H(f): H(X) \rightarrow H(Y)$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \lambda_X \downarrow & & \downarrow \lambda_Y \\ H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) \end{array}$$

коммутативна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в доказательстве [3, следствие 8.1.8], полагаем

$$H(f): H(X) \rightarrow H(Y); \quad H(f): [S] \mapsto [f(S)].$$

Видно, что отображение $H(f)$ определено корректно. Далее, для каждого $U \in \mathcal{T}(Y)$ имеем

$$\begin{aligned} H(f)^{-1}(U^*) &= \{[S] \in H(X) \mid f(S) \cap U \neq \emptyset\} = \{[S] \in H(X) \mid S \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\} \\ &= f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X^*, \end{aligned}$$

т. е. отображение $H(f)$ непрерывно. Более того, для всех $x \in X$

$$\lambda_Y f(x) = [\{f(x)\}] = H(f)([x]) = H(f)\lambda_X(x),$$

т. е. диаграмма коммутативна. Наконец, пусть непрерывное отображение $f': \mathbb{H}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}(\mathbb{Y})$ таково, что $f'\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}}f(x) = \mathbb{H}(f)\lambda_{\mathbb{X}}(x)$ для всех $x \in X$. Тогда f' и $\mathbb{H}(f)$ совпадают на множестве $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$. По утверждению 3 из доказательства теоремы 17 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}$ -базисом для $\mathbb{H}(\mathbb{X})$. По предложению 7 и лемме 8 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}(\mathbb{X})$ является u -расширением. Таким образом, $f' = \mathbb{H}(f)$, и доказательство завершено. $\square$

Следующий результат обобщает [3, теорема 5.6.3] на произвольную I -систему $\mathbb{H}$.

Теорема 20. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ — расширение топологических T_0 -пространств и $\mathbb{H}$ — I -система. Тогда $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$ тогда и только тогда, когда существует гомеоморфное вложение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является гомеоморфным вложением с условием $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$. Так как $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, по лемме 9 $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $f(\mathbb{Y})$. Тогда $\mathbb{X}$ — $\mathbb{H}^*$ -базис для $\mathbb{Y}$ по лемме 6.

Предположим теперь, что $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$. Так как $\lambda_{\mathbb{X}}$ вкладывает $\mathbb{X}$ в $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, существует непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $f|_{\mathbb{X}} = \lambda_{\mathbb{X}}$. Поскольку $\lambda_{\mathbb{Y}}: \mathbb{Y} \rightarrow \lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является гомеоморфизмом, отображение $f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}: \lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ непрерывно. Так как $\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$, существует непрерывное отображение $g: \mathbb{H}_S(\mathbb{Y}) \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ такое, что $g|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})} = f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}$.

Далее, поскольку $\lambda_{\mathbb{Y}}|_{\mathbb{X}}: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ является гомеоморфным вложением, получаем, что отображение $\lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}: \lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ непрерывно. Поскольку $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, существует непрерывное отображение $h: \mathbb{H}_S(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ такое, что $h|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}$.

Покажем, что g и h являются гомеоморфизмами. Достаточно установить, что они взаимно обратны. Для этого рассмотрим произвольный элемент $x \in X$. Тогда

$$gh\lambda_{\mathbb{X}}(x) = g\lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}\lambda_{\mathbb{X}}(x) = g\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = f\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = f(x) = \lambda_{\mathbb{X}}(x),$$

что означает, что $gh|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \text{id}_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})} = \text{id}_{\mathbb{H}_S(\mathbb{X})}|_{\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})}$. Поскольку $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, по лемме 8 получаем, что $\lambda_{\mathbb{X}}(\mathbb{X}) \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является u -расширением, откуда следует равенство $gh = \text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{X})}$. С другой стороны,

$$hg\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = hf\lambda_{\mathbb{Y}}^{-1}\lambda_{\mathbb{Y}}(x) = hf(x) = h\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}}\lambda_{\mathbb{X}}^{-1}\lambda_{\mathbb{X}}(x) = \lambda_{\mathbb{Y}}(x),$$

откуда следуют равенства $hg|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})} = \text{id}_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})} = \text{id}_{\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})}|_{\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})}$. Принимая во внимание, что $\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$, по лемме 8 получаем, что $\lambda_{\mathbb{Y}}(\mathbb{Y}) \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{Y})$ является u -расширением и, таким образом, $hg = \text{id}_{\mathbb{H}(\mathbb{Y})}$. Следовательно, f и g являются гомеоморфизмами, т. е. $f = g\lambda_{\mathbb{Y}}$ является гомеоморфным вложением. $\square$

Из доказательства теоремы 20 вытекает

Следствие 21. Если $\mathbb{X}$ — $\mathbb{H}^*$ -базис для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{H}(\mathbb{X}) \cong \mathbb{H}(\mathbb{Y})$.

Для T_0 -пространства $\mathbb{X}$ рассмотрим следующую конструкцию из работы Сю [4].

$$\begin{aligned} S_H(\mathbb{X}) &= \{F \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X}) \mid \text{cl}_{\mathbb{X}} F = F \neq \emptyset\}, \\ U^* &= \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \emptyset\}, \quad \text{где } U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}), \\ \mathcal{T}_H^*(\mathbb{X}) &= \{U^* \mid U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})\}, \quad S_H(\mathbb{X}) = \langle S_H(\mathbb{X}), \mathcal{T}_H^*(\mathbb{X}) \rangle. \end{aligned}$$

Следующая теорема была установлена Сю [4]. Мы дадим здесь независимое доказательство этого утверждения, поскольку в дальнейшем будем делать ссылки на ту или иную часть нашего доказательства. Доказательство, представленное здесь, обобщает доказательство для [3, теорема 5.5.1] (см. также [17]).

Теорема 22 [4, теорема 7.14]. Пусть H является I -системой. Для любого T_0 -пространства X пространство $S_H(X)$ является H -собранием для X ; другими словами, $S_H(X) \cong H_S(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуемое утверждение будет следовать из утверждений, доказанных ниже.

Утверждение 1. $S_H(X)$ является T_0 -пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим, что $\mathcal{T}_H^*(X)$ является T_0 -отделимой топологией. Действительно,

$$\emptyset = \{F \in S_H(X) \mid F \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset^* \in \mathcal{T}_H^*(X),$$

$$S_H(X) = \{F \in S_H(X) \mid F \cap X \neq \emptyset\} = X^* \in \mathcal{T}_H^*(X).$$

Пусть теперь $U_0, U_1 \in \mathcal{T}(X)$; тогда

$$\begin{aligned} U_0^* \cap U_1^* &= \{F \in S_H(X) \mid F \cap U_0 \neq \emptyset \text{ и } F \cap U_1 \neq \emptyset\} \\ &= \{F \in S_H(X) \mid F \cap (U_0 \cap U_1) \neq \emptyset\} = (U_0 \cap U_1)^* \in \mathcal{T}_H^*(X), \end{aligned}$$

поскольку $F \in S_H(X) \subseteq H^d(X) \subseteq I(X)$ по лемме 4. Далее, пусть $U_i \in \mathcal{T}(X)$ для всех $i \in I$; тогда

$$\begin{aligned} \bigcup_{i \in I} U_i^* &= \bigcup_{i \in I} \{F \in S_H(X) \mid F \cap U_i \neq \emptyset\} \\ &= \{F \in S_H(X) \mid F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для некоторого } i \in I\} \\ &= \left\{F \in S_H(X) \mid F \cap \bigcup_{i \in I} U_i \neq \emptyset\right\} = \left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^* \in \mathcal{T}_H^*(X). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathcal{T}_H^*(X)$ является топологией на $S_H(X)$. Если $F_0, F_1 \in S_H(X)$ таковы, что $F_0 \not\subseteq F_1$, то $F_0 \cap (X \setminus F_1) \neq \emptyset$. Поскольку множество F_1 замкнуто, заключаем, что $X \setminus F_1 \in \mathcal{T}(X)$, откуда $F_0 \in (X \setminus F_1)^* \in \mathcal{T}_H^*(X)$. С другой стороны, поскольку $F_1 \cap (X \setminus F_1) = \emptyset$, получаем, что $F_1 \notin (X \setminus F_1)^*$. Таким образом, топология $\mathcal{T}_H(X)$ T_0 -отделима. $\square$

Утверждение 2. Для произвольных $F_0, F_1 \in S_H(X)$ имеем $F_0 \leq_{\mathcal{T}_H^*(X)} F_1$ в том и только том случае, когда $F_0 \subseteq F_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, предположим, что $F_0 \leq_{\mathcal{T}_H^*(X)} F_1$ и $x \in F_0$. Если $x \notin F_1$, то $x \in X \setminus F_1 \in \mathcal{T}(X)$, так как множество F замкнуто в X . Отсюда следует, что $F_0 \cap (X \setminus F_1) \neq \emptyset$, поэтому $F_0 \in (X \setminus F_1)^* \in \mathcal{T}_H^*(X)$. По определению порядка специализации получаем, что $F_1 \in (X \setminus F_1)^*$, поэтому $\emptyset \neq F_1 \cap (X \setminus F_1) = \emptyset$; противоречие. Это противоречие показывает, что $x \in F_1$ и, следовательно, $F_0 \subseteq F_1$. Обратная импликация очевидна. $\square$

Рассмотрим отображение

$$\iota_H: X \rightarrow S_H(X); \quad \iota_H: x \mapsto \downarrow x.$$

Утверждение 3. ι_H является гомеоморфным вложением.

Доказательство. Покажем сначала, что ι_H определено корректно. Для этого нам требуется проверить, что $\downarrow x \in H^d(\mathbb{X})$ для всех $x \in X$. Действительно, пусть $\mathbb{Y}$ является H -собранным пространством и отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно. Так как f сохраняет порядок специализации, имеем $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) \subseteq \downarrow f(x)$. С другой стороны, если $f(x) \in f(\downarrow x)$, то $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) = \downarrow f(x)$ и $\iota_H(x) \in S_H(\mathbb{X})$.

Очевидно, что отображение ι_H разностно. Пусть $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$; тогда

$$\iota_H(U) = \{\downarrow x \mid x \in U\} = \{F \in S_H(\mathbb{X}) \mid F \cap U \neq \emptyset\} \cap \iota_H(X) = U^* \cap \iota_H(X),$$

$$\iota_H^{-1}(U^*) = \{x \in X \mid \downarrow x \cap U \neq \emptyset\} = X \cap U = U \in \mathcal{T}(\mathbb{X}).$$

Это означает, что отображение ι_H открыто и непрерывно. $\square$

Утверждение 4. $\iota_H(\mathbb{X})$ является H^d -базисом для $S_H(\mathbb{X})$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество $F \in S_H(\mathbb{X})$; тогда $\iota_H(F) \in H^d(\iota_H(\mathbb{X}))$. Для всех $x \in F$ имеем $\iota_H(x) = \downarrow x \subseteq F$, откуда $\iota_H(x) \leq F$ в $S_H(\mathbb{X})$ по утверждению 2. Таким образом, $\iota_H(x) \subseteq_{S_H(\mathbb{X})} F$. С другой стороны, если $F \in U^*$ для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$, то найдется элемент $x \in F \cap U$. Отсюда следует, что $\iota_H(x) = \downarrow x \in U^*$. Поэтому $F \in \text{cl}_{S_H(\mathbb{X})} \iota_H(F)$. $\square$

Утверждение 5. $S_H(\mathbb{X})$ является H^d -собранным пространством.

Доказательство. Рассмотрим произвольное множество G в $H^d(S_H(\mathbb{X}))$. По лемме 5 $H = \text{cl}_{S_H(\mathbb{X})} G$ также принадлежит $H^d(H_S(\mathbb{X}))$. Так как множество H замкнуто в $S_H(\mathbb{X})$, то $H = S_H(X) \setminus U^*$ для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Таким образом,

$$H = \text{cl}_{S_H(\mathbb{X})} G = \{A \in S_H(\mathbb{X}) \mid A \cap U = \emptyset\} = \{A \in S_H(\mathbb{X}) \mid A \subseteq X \setminus U = F\}.$$

Очевидно, множество F замкнуто в $\mathbb{X}$. Для доказательства включения $F \in S_H(\mathbb{X})$ остается установить, что $F \in H^d(\mathbb{X})$.

Действительно, пусть $\mathbb{Y}$ является H -собранным пространством и отображение $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ непрерывно. Рассмотрим следующее отображение:

$$f^*: S_H(\mathbb{X}) \rightarrow \mathbb{Y}; \quad f^*(A) = y_A,$$

где $\downarrow y_A = \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(A)$. Отметим, что элемент y_A существует, поскольку $A \in H^d(\mathbb{X})$. Тот факт, что $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(\downarrow x) = \downarrow f(x)$, влечет равенство $f^*(\iota_H(x)) = f^*(\downarrow x) = f(x)$. Более того, для произвольного открытого множества $U \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ имеем

$$\begin{aligned} (f^*)^{-1}(U) &= \{A \in S_H(X) \mid f^*(A) \in U\} \\ &= \{A \in S_H(X) \mid y_A \in U\} = \{A \in S_H(X) \mid f(A) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{A \in S_H(X) \mid A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\} = f^{-1}(U)^* \in \mathcal{T}_H^*(\mathbb{X}). \end{aligned}$$

Следовательно, отображение f^* непрерывно. Таким образом, $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f^*(G) = \downarrow y$ для некоторого $y \in Y$.

Покажем, что $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) = \downarrow y$. Пусть $a \in F$. Так как множество F замкнуто в $\mathbb{X}$, имеем $\downarrow a \subseteq F$, откуда $\downarrow a \in G$. Тогда

$$f(a) = f^*(\iota_H(a)) = f^*(\downarrow a) \in f^*(G) \subseteq \downarrow y.$$

Следовательно, $f(F) \subseteq \downarrow y$ и $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) \subseteq \downarrow y$. Для доказательства обратного включения нужно доказать, что y является предельной точкой множества $f(F)$

в $\mathbb{Y}$. Действительно, пусть $V \in \mathcal{T}(\mathbb{Y})$ таково, что $y \in V$. Так как $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f^*(G) = \downarrow y$, то y является предельной точкой для множества $f^*(G)$. Поэтому существует $A \in G$ такое, что $f^*(A) \in V$. Отсюда следует, что $A \in (f^*)^{-1}(V) = U^*$ для некоторого $U \in \mathcal{T}(\mathbb{X})$. Это означает, что $A \cap U \neq \emptyset$; пусть $a \in A \cap U$. Тогда $\downarrow a \cap U \neq \emptyset$, откуда вытекают равенства

$$\downarrow a \in U^* = (f^*)^{-1}(V), \quad f(a) = f^*(\downarrow a) \in V \cap f(F).$$

Таким образом, $y \in \text{cl}_{\mathbb{Y}} f(F)$, что и требовалось. Подводя итог, имеем $\text{cl}_{\mathbb{Y}} f(F) = \downarrow y$, т. е. $F \in \mathbb{H}^d(\mathbb{X})$ и $F \in S_H(\mathbb{X})$. $\square$

Из утверждения 4 и предложения 7 вытекает, что $\iota_H(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $S_H(\mathbb{X})$. Из утверждения 5 и теоремы 11 следует, что $S_H(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством. Это означает, что $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ является $\mathbf{H}$ -собрификацией для $\mathbb{X}$. $\square$

7. Характеризация $\mathbf{H}$ -собрификаций

Следующий результат обобщает [3, следствие 5.6.4] на произвольную I -систему $\mathbf{H}$ (см. также [10]).

Теорема 23. Следующие утверждения равносильны для T_0 -пространств $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$ и для I -системы $\mathbf{H}$.

- (i) $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}$ -собрификацией для $\mathbb{X}$, т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$.
- (ii) $\mathbb{Y} \cong S_H(\mathbb{X})$.
- (iii) $\mathbb{Y}$ является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$.
- (iv) $\mathbb{Y}$ является наименьшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}$ -собранным.
- (v) $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}^d$ -собрификацией для $\mathbb{X}$; т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S^d(\mathbb{X})$.
- (vi) $\mathbb{Y}$ является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $(\mathbf{H}^d)^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$.
- (vii) $\mathbb{Y}$ является наименьшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^d$ -собранным.
- (viii) $\mathbb{Y}$ является наибольшим (с точностью до гомеоморфизма) расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^d$ -базисом для $\mathbb{Y}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равносильность утверждений (i) и (ii) следует из леммы 16 и теоремы 22. Утверждение (i) влечет утверждение (iii) по теореме 20.

Если $\mathbb{Y}$ является наибольшим расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, то $\mathbb{Y}$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством по лемме 9(ii) и теореме 11 (см. утверждения (i) и (iii) там). Следовательно, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ по определению 5 и лемме 16. Таким образом, утверждения (i) и (iii) также равносильны.

Предположим, что (i) выполняется, т. е. $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является подпространством в $\mathbb{Y}$. Пусть $\mathbb{X} \leq \mathbb{Z}$ такое расширение, что $\mathbb{Z}$ является $\mathbf{H}$ -собранным пространством. Так как $\mathbb{X}$ является $\mathbf{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, существует непрерывное отображение $f: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Z}$ такое, что отображение $f_{\mathbb{X}}$ тождественно. В силу леммы 8 $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является $\mathbf{u}$ -расширением. Следовательно, $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$ является существенным расширением ввиду [3, следствие 10.2.7]. Поскольку $f_{\mathbb{X}}$ — гомеоморфное вложение, f также гомеоморфное вложение. Поэтому $\mathbb{Y}$ гомеоморфно подпространству каждого $\mathbf{H}$ -собранного расширения пространства $\mathbb{X}$ и (iv) выполняется.

Предположим, что (iv) выполнено для $\mathbb{Y}$. Вновь без ограничения общности можно считать, что $\mathbb{X}$ является подпространством в $\mathbb{Y}$. По теореме 17 (альтернативно, по теореме 22) $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ существует; без ограничения общности считаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Поскольку $\mathbb{Y}$ является наименьшим $\mathbb{H}$ -собранным расширением пространства $\mathbb{X}$, заключаем, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y} \leq \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$. Так как $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{H}_S(\mathbb{X})$, в силу леммы 9(ii) получаем, что $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$. Так как $\mathbb{Y}$ $\mathbb{H}$ -собранный, $\mathbb{Y}$ является $\mathbb{H}$ -собрификацией для $\mathbb{X}$ по определению 5. Таким образом, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{H}_S(\mathbb{X})$ по лемме 16, и (iv) влечет (i). Поэтому утверждения (i)–(iv) равносильны.

Предположим, что выполнено (ii), другими словами, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Из утверждения 4 в доказательстве теоремы 22 и предложения 7 следует, что $\iota_H(\mathbb{X})$ является $(\mathbb{H}^d)^*$ -базисом для $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$. Следовательно, $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^d$ -собрификацией для $\mathbb{X}$ по утверждению 5 из доказательства теоремы 22. Поэтому (ii) влечет (v). Обратно, если $\mathbb{Y}$ является $\mathbb{H}^d$ -собрификацией для $\mathbb{X}$, то пространство $\mathbb{Y}$ $\mathbb{H}^d$ -собранный и поэтому $\mathbb{H}$ -собранный по теореме 11. Более того, предполагая без ограничения общности, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{Y}$, получаем, что $\mathbb{X}$ является $(\mathbb{H}^d)^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$, а потому и $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$ по определению 4 и теореме 11. Таким образом, $\mathbb{Y}$ является $\mathbb{H}$ -собрификацией для $\mathbb{X}$, и (v) влечет (i). Тем самым утверждения (i)–(v) равносильны.

По лемме 4 $\mathbb{H}^d$ является I -системой. Следовательно, равносильность утверждений (v)–(vii) следует из эквивалентности утверждений (i)–(iv) для I -системы $\mathbb{H}^d$. Если $\mathbb{Y}$ является $\mathbb{H}$ -собрификацией для $\mathbb{X}$, то $\mathbb{Y} \cong \mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ в силу (ii), т. е. без ограничения общности $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для $\mathbb{Y}$ по утверждению 4 из доказательства теоремы 22. Если $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для некоторого T_0 -пространства $\mathbb{Z}$, то $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Z}$ по предложению 7. По теореме 20 $\mathbb{Z}$ гомеоморфно некоторому подпространству в $\mathbb{Y}$, и (viii) выполнено. Таким образом, (i) влечет (viii). Предположим наконец, что (viii) выполняется; другими словами, $\mathbb{Y}$ является наибольшим расширением пространства $\mathbb{X}$ таким, что $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для $\mathbb{Y}$. По утверждению 4 из доказательства теоремы 22 $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^d$ -базисом для $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$, поэтому можно предполагать, что $\mathbb{X} \leq \mathbb{S}_H(\mathbb{X}) \leq \mathbb{Y}$. Из предложения 7 получаем, что $\mathbb{X}$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$. Следовательно, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^*$ -базисом для $\mathbb{Y}$ по лемме 9(ii). Пространство $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}^d$ -собранным по утверждению 5 из доказательства теоремы 22. Таким образом, $\mathbb{S}_H(\mathbb{X})$ является $\mathbb{H}$ -собранным по теореме 11. Вновь применяя теорему 11, получаем, что $\mathbb{S}_H(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$, и (ii) выполнено. Следовательно, (viii) влечет (ii).

Доказательство завершено. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Швидефски М. В. Дуальность Стоуна для дистрибутивных ч.у. множеств // Алгебра и логика, принято к печати.
2. Ершов Ю. Л., Швидефски М. В. К спектральной теории частично упорядоченных множеств. II // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 572–586.
3. Ершов Ю. Л. Топология для дискретной математики. Новосибирск: Издательство СО РАН, 2020.
4. Xu X. On H -sober spaces and H -sobrifications of T_0 -spaces // Topol. Appl. 2021. V. 289. article no. 107548.
5. Liu B., Li Q., Wu G. Well-filterifications of topological spaces // Topol. Appl. 2020. V. 279. article no. 107245.
6. Chen C., Xi X., Xu X., Zhao D. On well-filtered reflections of T_0 -spaces // Topol. Appl. 2019. V. 267. article no. 106869.

7. Xu X., Chen C., Xi X., Zhao D. On T_0 -spaces determined by well-filtered spaces // Topol. Appl. 2020. V. 282. P. article no. 107323.
8. Ershov Yu. L. On d -spaces // Theoret. Comput. Sci. 1999. V. 224, N 1–2. P. 59–72.
9. Ершов Ю. Л. О d -ранге топологического пространства // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 2. С. 150–163.
10. Ершов Ю. Л. Сопредельные точки и u -расширения // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 4. С. 443–452.
11. Ершов Ю. Л. d -Ранг α -пространства не превосходит 1 // Алгебра и логика. 2020. Т. 58, № 6. С. 706–713.
12. Keimel K., Lawson J. D. D -completions and the d -topology // Ann. Pure Appl. Logic. 2009. V. 159, N 3. P. 292–306.
13. Ершов Ю. Л. K -пополнения T_0 -пространств // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 3. С. 263–279.
14. Ershov Yu. L., Schwedfsky M. V. On function spaces. III // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 4. P. 1493–1498.
15. Ershov Yu. L., Schwedfsky M. V. On function spaces. II // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 815–834.
16. Ershov Yu. L., Schwedfsky M. V. On function spaces // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 999–1008.
17. Gierz G., Hofmann K. H., Keimel K., Lawson J. D., Mislove M. W., Scott D. S. Continuous lattices and domains. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications; V. 93).
18. Goubault-Larrecq J. Non-Hausdorff topology and domain theory: Selected topics in point-set topology. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. (New Math. Monogr.; V. 22).

Поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.

После доработки 15 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Кудряшова Мария Игоревна
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
m.kudryashova@g.nsu.ru

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга 4, Новосибирск 630090
m.schwedfsky@g.nsu.ru

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ ОБОБЩЕННО НОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП

А.-М. Лю, С. Ван,
В. Г. Сафонов, А. Н. Скиба

Аннотация. Пусть G — конечная группа и $\mathcal{L}_{sn}(G)$ — решетка всех ее субнормальных подгрупп. Пусть A и N — подгруппы группы G и $1, G \in \mathcal{L}$ — подрешетка в $\mathcal{L}_{sn}(G)$, т. е. $B \cap C, \langle B, C \rangle \in \mathcal{L}$ для всех $B, C \in \mathcal{L}$. Тогда: $A^{\mathcal{L}}$ — $\mathcal{L}$ -замыкание A в G , т. е. пересечение всех подгрупп из $\mathcal{L}$, содержащих A , и $A_{\mathcal{L}}$ — $\mathcal{L}$ -ядро подгруппы A в G , т. е. подгруппа из A , порожденная всеми теми ее подгруппами, которые принадлежат $\mathcal{L}$. Говорят, что A является N - $\mathcal{L}$ -подгруппой группы G , если либо $A \in \mathcal{L}$, либо $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ и N изолирует каждый композиционный фактор H/K группы G между $A_{\mathcal{L}}$ и $A^{\mathcal{L}}$, т. е. $N \cap H = N \cap K$. С использованием этих понятий даны новые характеристики разрешимых и сверхразрешимых конечных групп. Обобщены некоторые известные результаты.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.406

Ключевые слова: конечная группа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа, N -субнормальная подгруппа, N -нормальная подгруппа, N - S -перестановочная подгруппа.

Введение

На протяжении всей статьи все группы конечны и G всегда обозначает конечную группу; $\mathcal{L}(G)$ — решетка всех подгрупп группы G ; $\mathcal{L}_{sn}(G)$ — решетка всех субнормальных подгрупп G и $1, G \in \mathcal{L}$ — подрешетка в $\mathcal{L}_{sn}(G)$, т. е. $B \cap C, \langle B, C \rangle \in \mathcal{L}$ для всех $B, C \in \mathcal{L}$.

Напомним, что подгруппа A группы G *покрывает* (соответственно *изолирует*) главный (композиционный) фактор H/K группы G , если $AN = AK$ (если соответственно $A \cap H = A \cap K$). Эти понятия восходят к классической работе Ф. Холла [1], где было доказано, что каждый системный нормализатор разрешимой группы G покрывает все центральные главные факторы и изолирует все ее эксцентральные главные факторы.

Подгруппа, которая либо покрывает, либо изолирует каждый главный фактор группы G , называется *SAP-подгруппой* в G [2, с. 37]. Нетрудно показать, что каждая подгруппа сверхразрешимой группы и каждая максимальная подгруппа разрешимой группы являются *SAP-подгруппами*. Более того, Эскерро доказал [3], что если каждая максимальная подгруппа произвольной силовой

Исследование выполнено при поддержке Национального фонда естественных наук Китая (No. 12101165, No. 12171126) и НФЕНК-БРФФИ (No. 12311530761). Исследования третьего и четвертого авторов выполнены при поддержке Министерства образования Республики Беларусь (No. 20211328, No. 20211778) и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (No. Ф24КИ-021).

подгруппы из подгруппы Фиттинга $F(G)$ разрешимой группы G является CA -подгруппой в G , то G сверхразрешима. Этот результат дал толчок большому числу публикаций (см., в частности, недавние статьи [4–9]), связанных с изучением групп, в которых некоторые подгруппы являются либо CA -подгруппами, либо обобщенными CA -подгруппами.

В данной статье мы рассматриваем восходящий к работе [10] подход к применению идеи изолирования для нахождения новых характеристик разрешимых и сверхразрешимых групп.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть A — подгруппа G . Тогда: $A^{\mathcal{L}}$ — $\mathcal{L}$ -замыкание A в G , т. е. пересечение всех подгрупп в $\mathcal{L}$, содержащих A , и $A_{\mathcal{L}}$ — $\mathcal{L}$ -ядро A в G , т. е. подгруппа A , порожденная всеми теми ее подгруппами, которые принадлежат $\mathcal{L}$.

ПРИМЕР 1.2. (i) A^G — нормальное замыкание A в G и A_G — ядро A в G .

(ii) A^{snG} — субнормальное замыкание A в G и A_{snG} — субнормальное ядро A в G .

(iii) Подгруппа A группы G называется *силовски перестановочной* или *S -перестановочной* в G [11, 12], если A перестановочна с каждой силовской подгруппой P группы G , т. е. $AP = PA$. S -перестановочные подгруппы группы G образуют подрешетку в решетке всех субнормальных подгрупп группы G (Кегель [13]) и этот важный результат позволяет сопоставить с каждой подгруппой A группы G две S -перестановочные подгруппы G : S -ядро A_{sG} подгруппы A в G [14], т. е. подгруппу A , порожденную всеми S -перестановочными подгруппами группы G , содержащимися в A ; S -перестановочное замыкание A^{sG} A в G [15], т. е. пересечение всех S -перестановочных подгрупп группы G , содержащих A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Пусть A, N — подгруппы G , и предположим, что $1, G \in \mathcal{L}$ — подрешетка решетки $\mathcal{L}_{sn}(G)$. Тогда будем говорить, что A является N - $\mathcal{L}$ -подгруппой группы G , если либо $A \in \mathcal{L}$, либо $A_{\mathcal{L}} < A < A^{\mathcal{L}}$ и N изолирует каждый композиционный фактор группы G между $A_{\mathcal{L}}$ и $A^{\mathcal{L}}$.

В частности, говорят, что A является:

(i) N -нормальной в G , если либо A нормальна в G , либо $A_G < A < A^G$ и N изолирует каждый композиционный фактор группы G между A_G и A^G ;

(ii) N -субнормальной в G , если либо A субнормальна в G , либо $A_{snG} < A < A^{snG}$ и N изолирует каждый композиционный фактор группы G между A_{snG} и A^{snG} ;

(iii) N - S -перестановочной в G , если либо A является S -перестановочной в G , либо $A_{sG} < A < A^{sG}$ и N изолирует каждый композиционный фактор группы G между A_{sG} и A^{sG} .

ПРИМЕР 1.4. (i) Пусть $K < H < L < T$ — субнормальные подгруппы группы G , и предположим, что N изолирует каждый композиционный фактор группы G между K и T . Тогда N изолирует каждый композиционный фактор группы G между H и L . С другой стороны, каждая S -перестановочная подгруппа субнормальна в группе [13] и поэтому

$$A_{sG} \leq A_{snG} \leq A \leq A^{snG} \leq A^{sG}.$$

Следовательно, каждая N -нормальная подгруппа N - S -перестановочна, а каждая N - S -перестановочная подгруппа N -субнормальна в группе.

Пусть p, q, r, t — попарно различные простые числа, где q делит $p - 1$ и t делит $r - 1$. Пусть $H = C_p \rtimes C_q$ — неабелева группа порядка pq и $L = C_r \rtimes C_t$ — неабелева группа порядка rt .

(ii) Пусть $N = Q \rtimes H$, где Q — простой $\mathbb{F}_q H$ -модуль, точный для H . Тогда H — максимальная подгруппа в N . Пусть $G = N \times L$, S — подгруппа порядка q в Q и $A = SC_t$. Тогда $S < Q$ и A не субнормальна в G ввиду [2, гл. А, 14.2], поскольку $C_t = A \cap L$ не субнормальна в L . Следовательно, $A_{snG} = S$. Кроме того, имеет место $A^{snG} = S^{snG} C_t^{snG} = SL$. Стало быть,

$$N \cap A^{snG} = N \cap SL = S(N \cap L) = S = N \cap S = N \cap A_{snG}$$

и поэтому A N -субнормальна в G .

Покажем, что A не является N - S -перестановочной в G . Предположим, что S является S -перестановочной в G . Тогда $SC_p = C_p S$ — сверхразрешимая подгруппа G , поэтому $C_p S = C_p \times S$, так как $p > q$. С другой стороны, $Q \cap SC_p = S(Q \cap C_p) = S$ нормальна в SC_p , поэтому $C_p S = C_p \times S$. Значит, $N = \langle S, C_p \rtimes C_q \rangle \leq N_G(C_p)$, поэтому C_p нормальна в N и тем самым Q не является простым $\mathbb{F}_q H$ -модулем. Это противоречие показывает, что S не S -перестановочна в G . Следовательно, $A_{sG} = 1$.

Наконец, заметим, что $A^{sG} = S^{sG} C_t^{sG} = S^{sG} L$. Значит, $S \leq N \cap A^{sG} \neq N \cap A_{sG} = 1$. Поэтому A не является N - S -перестановочной в G и, следовательно, N -нормальной в G .

(iii) Пусть $N = Q \rtimes P$, где P — неабелева группа порядка p^3 экспоненты p и Q — простой $\mathbb{F}_q P$ -модуль, точный для P . Пусть $H = QV$, где V — некоторая ненормальная подгруппа группы P . Пусть $G = N \times L = N \times (C_r \rtimes C_t)$ и $A = HC_t$. Ясно, что H S -перестановочна в G , поэтому $A^{sG} = HL$ и $A_{sG} = H$. Следовательно, $N \cap A^{sG} = H = N \cap A_{sG}$, поэтому A N - S -перестановочна в G и A не является S -перестановочной в G .

Наконец, покажем, что A не является N -нормальной в G . Действительно, $A^G = (SC_t)^G = S^G C_t^G = S^G L$ и $A_G = S_G < S$, поэтому

$$S \leq N \cap A^G = N \cap S^G L \neq N \cap A_G < S.$$

Напомним, что G называется PST -группой [11, 12], если S -перестановочность является транзитивным отношением в G , т. е. если K — S -перестановочная подгруппа в H и H — S -перестановочная подгруппа в G , то K S -перестановочна в G .

Описание разрешимых PST -групп впервые получено Агравалом [16], который доказал, что разрешимая группа G является PST -группой в том и только в том случае, когда нильпотентный корадикал $N = G^{\mathfrak{N}}$ [17] группы G является абелевой холловой подгруппой в G и каждый элемент G индуцирует степенной автоморфизм в N .

В дальнейших публикациях авторы (см., например, гл. 2 в [12]) обнаружили и описали многие другие интересные характеристики разрешимых PST -групп. В частности, было доказано [18], что разрешимая группа G является PST -группой тогда и только тогда, когда каждый главный фактор G между A^G и A_G централен в G для любой подгруппы A группы G такой, что A^G/A_G нильпотентна. В работе [19] было установлено, что разрешимая группа G является PST -группой тогда и только тогда, когда для каждой максимальной подгруппы V произвольной силовой подгруппы группы в G существует PST -подгруппа T такая, что $G = VT$.

Отметим, наконец, что из результатов недавних работ [20, 21] вытекает, что если $N = G^{\mathfrak{N}}$ — нильпотентный корадикал разрешимой группы G и G является PST -группой, то каждая ее субнормальная подгруппа N -нормальна в G [20], а

если каждая субнормальная подгруппа G является N - S -перестановочной в G , то G является PST -группой [21].

Фактически результаты работ [20, 21] стали первой и основной мотивацией для введения наших общих определений и наблюдения данной статьи указывают на их полезность и перспективность для дальнейших применений.

Основной целью данной работы является доказательство следующих теорем.

Теорема А. Группа G разрешима (соответственно сверхразрешима) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

- (i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым (соответственно сверхразрешимым) фактором G/N ,
- (ii) каждая вторая максимальная подгруппа G N -субнормальна (соответственно N - S -перестановочна) в G .

Следствие 1.5 (Агравал [16; 22, гл. 1, теорема 6.5]). Если каждая вторая максимальная подгруппа группы G S -перестановочна в G , то G сверхразрешима.

Напомним, что если

$$M_n < M_{n-1} < \dots < M_1 < M_0 = G, \quad (*)$$

где M_i — максимальная подгруппа в M_{i-1} для всех $i = 1, \dots, n$, то цепь $(*)$ называется максимальной цепью группы G длины n .

При доказательстве теоремы А используется следующее наблюдение.

Теорема В. Группа G разрешима тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

- (i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым фактором G/N ,
- (ii) в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 или M_1 N -субнормальна в G .

Следствие 1.6 (Спенсер [23]). Если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 или M_1 субнормальна в G , то G разрешима.

Теорема С. Группа G разрешима (соответственно сверхразрешима) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

- (i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым (соответственно сверхразрешимым) фактором G/N ,
- (ii) все максимальные подгруппы каждой нециклической силовской подгруппы группы G являются N -субнормальными (соответственно N - S -перестановочными) в G .

Следствие 1.7 (Сринивазан [24]). Если каждая максимальная подгруппа каждой силовской подгруппы группы G нормальна в G , то G сверхразрешима.

Теорема D. Группа G разрешима (соответственно сверхразрешима) в том и только в том случае, когда выполняются следующие два условия:

- (i) G имеет нормальную подгруппу N с разрешимым (соответственно сверхразрешимым) фактором G/N ,
- (ii) все максимальные подгруппы обобщенной подгруппы Фиттинга $F^*(G)$ группы G являются N - S -перестановочными в G .

Доказательство теорем А и В

В доказательствах будем базироваться на следующем наблюдении.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $K < H$ — субнормальные подгруппы группы G , то подгруппа N группы G изолирует каждый композиционный фактор G между K и H тогда и только тогда, когда N изолирует пару (H, K) , т. е. $N \cap H = N \cap K$.

Следующая лемма является следствием леммы 2.8 работы [14] и леммы 2.5 работы [15].

Лемма 2.2. Пусть $R \leq A \leq E \leq G$ и $R \trianglelefteq G$. Тогда справедливы следующие утверждения:

- (1) $A_{sG} \leq E_{sE}$,
- (2) $(A/R)_{s(G/R)} = A_{sG}/R$,
- (3) $A^{sE} \leq A^{sG}$,
- (4) $(A/R)^{s(G/R)} = A^{sG}/R$.

Лемма 2.3. Пусть A и N — подгруппы G и для минимальной нормальной подгруппы R группы G либо $R \leq N$, либо $R \leq A$. Если A N - S -перестановочна (соответственно N -нормальна, N -субнормальна) в G , то AR/R является (NR/R) - S -перестановочной (соответственно NR/R -нормальной, NR/R -субнормальной) в G/R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде покажем, что если A N - S -перестановочна в G , то AR/R является (NR/R) - S -перестановочной в G/R . Предположим, что $R \leq N$. Тогда

$$\begin{aligned} (NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} &= (N/R) \cap (A^{sG}R/R) \\ &= (N \cap A^{sG}R)/R = R(N \cap A^{sG})/R = R(N \cap A_{sG})/R \end{aligned}$$

по лемме 2.2. С другой стороны,

$$R(N \cap A_{sG})/R \leq (N \cap (AR)_{sG})/R = (N/R) \cap (AR)_{sG}/R = (NR/R) \cap (AR/R)_{s(G/R)}.$$

Следовательно,

$$(NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} = (NR/R) \cap (AR/R)_{s(G/R)}.$$

Если $R \leq A$, то аналогично показывается, что

$$(NR/R) \cap (AR/R)^{s(G/R)} = (NR/R) \cap (A/R)_{s(G/R)}.$$

Следовательно, AR/R является (NR/R) - S -перестановочной в G/R .

Аналогично проверяется, что если A N -нормальна (соответственно N -субнормальна) в G , то AR/R является NR/R -нормальной (соответственно NR/R -субнормальной) в G/R . Лемма доказана.

Лемма 2.4. Пусть $A \leq E$ и N — подгруппы G . Если A N - S -перестановочна (соответственно N -нормальна, N -субнормальна) в G , то A является $(N \cap E)$ - S -перестановочной (соответственно $(N \cap E)$ -нормальной, $(N \cap E)$ -субнормальной) в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде покажем, что если A является N - S -перестановочной в G , то A является $(N \cap E)$ - S -перестановочной в E .

Имеем $A_{sG} \leq A_{sE} \leq A \leq A^{sE} \leq A^{sG}$ по лемме 2.2 и тем самым из $A^{sG} \cap N = A_{sG} \cap N$ следует, что

$$N \cap E \cap A^{sG} \leq N \cap E \cap A_{sG},$$

где $N \cap E \cap A^{sE} \leq N \cap E \cap A^{sG}$ и $N \cap E \cap A_{sG} \leq N \cap E \cap A_{sE}$.

Следовательно,

$$N \cap E \cap A^{sE} \leq N \cap E \cap A_{sE} \leq N \cap E \cap A^{sE}$$

и потому $(N \cap E) \cap A^{sE} = (N \cap E) \cap A_{sE}$. Значит, A является $(N \cap E)$ - S -перестановочной в E .

Аналогично доказывается, что если A N -нормальна (соответственно N -субнормальна) в G , то A является $(N \cap E)$ -нормальной (соответственно $(N \cap E)$ -субнормальной) в E . Лемма доказана.

Лемма 2.5 (см. [25, лемма 2.8]). Если $G = R \rtimes M$, где M — разрешимая максимальная подгруппа группы G , то G разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ В. Достаточно показать, что если в каждой максимальной цепи $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ группы G длины 3 хотя бы одна из подгрупп M_3 , M_2 или M_1 N -субнормальна в G , то G разрешима. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$.

(1) G/R разрешима для любой минимальной нормальной подгруппы R группы G . Следовательно, R является единственной минимальной нормальной подгруппой в G , R — неабелева группа и $R \leq N$.

Понятно, что если в G/R нет максимальных цепей длины 3, то G/R разрешима. Пусть теперь $M_3/R < M_2/R < M_1/R < M_0/R = G/R$ — произвольная максимальная цепь длины 3 в G/R . Тогда $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ — максимальная цепь длины 3 в G и поэтому для некоторого $i > 0$ подгруппа M_i N -субнормальна в G . Тогда M_i/R NR/R -субнормальна в G/R по лемме 2.3, где

$$(G/R)/(NR/R) \simeq G/NR \simeq (G/N)/(NR/R)$$

разрешима. Следовательно, гипотеза справедлива для G/R . Таким образом, имеем (1) по выбору G .

Пусть R_q — силовская q -подгруппа R , где q — наименьшее простое число, делящее $|R|$, R_p — силовская p -подгруппа R , где p — наибольшее простое число, делящее $|R|$.

Лемма Фраттини подразумевает, что существуют максимальные подгруппы L и M в группе G такие, что $R_q \leq G_q \leq N_G(R_q) \leq L$, $R_p \leq G_p \leq N_G(R_p) \leq M$ и $G = RL = RM$ для некоторой силовской q -подгруппы G_q и силовской p -подгруппы G_p из G . Более того, $q < p$ и $L_G = 1 = M_G$ по утверждению (1).

(2) L и M не являются N -субнормальными в G и $L_{snG} = 1 = M_{snG}$.

Предположим, например, что L N -субнормальна в G . Прежде заметим, что L не является субнормальной в G , что влечет $L^{snG} = G$. С другой стороны, L_{snG} — субнормальная подгруппа в G и поэтому

$$(L_{snG})^G = (L_{snG})^{RL} = (L_{snG})^L \leq L_G = 1$$

согласно [2, гл. А, 14.3]. Значит,

$$R \cap G = R \cap L^{snG} = R \cap L_{snG} = R \cap L_G = R \cap 1 = 1;$$

противоречие. Следовательно, L и M не являются N -субнормальными в G и $L_{snG} = 1 = M_{snG}$.

(3) $R < G$ и $|G : R|$ не является простым числом.

Предположим, что либо $R = G$ — простая неабелева группа, либо $|G : R|$ является простым числом. Тогда $R = N$ и ввиду [26, IV, 2.8] будет $|R_q| > q$, поскольку R неабелева по утверждению (1). Следовательно, для максимальной подгруппы V группы R_q имеем $V \neq 1$.

Покажем, что G имеет максимальную цепь $M_3 < M_2 < M_1 < M_0 = G$ длины 3, где $M_1 = L$ и $W \leq M_3$ для некоторой неединичной подгруппы W группы V . Действительно, если $R_q < L$, то это очевидно. С другой стороны, если $R_q = L$, то $|R_q| > q^2$ по [26, V, 7.4], поэтому для любой максимальной подгруппы W группы V имеем $1 < W < V < R_q = L < G$.

По условию существует $i > 0$ такое, что M_i N -субнормальна в G , поэтому M_i R -субнормальна в G . Следовательно,

$$1 < W \leq R \cap M_i^{snG} = R \cap (M_i)_{snG} = R \cap 1 = 1$$

по утверждению (2), противоречие. Стало быть, имеет место (3).

(4) $D := R \cap M$ ненильпотентна.

Предположим, что D нильпотентна. Тогда R_p нормальна в M . Следовательно, $Z(J(R_p))$ нормален в M . Поскольку $M_G = 1$, то $N_G(Z(J(R_p))) = M$ и поэтому $N_R(Z(J(R_p))) = D$ нильпотентен. Отсюда следует, что R p -нильпотентна по теореме Глаубермана — Томпсона о нормальных p -дополнениях. Но тогда R — p -группа; противоречие. Значит, имеет место (4).

(5) $D < T$ для некоторой максимальной подгруппы T группы M (поскольку D нормальна в M , это следует из утверждения (3)).

(6) T не N -субнормальна в G .

Предположим, что T N -субнормальна в G . Поскольку $T_{snG} = 1$ ввиду (2), то

$$1 < D \leq R \cap T^{snG} = N \cap T^{snG} = N \cap T_{snG} = R \cap T_{snG} = R \cap 1 = 1;$$

противоречие. Следовательно, имеет место (6).

(7) $D \not\leq \Phi(T)$. Тогда для некоторой максимальной подгруппы S группы T имеем $T = DS$ (это следует из утверждения (4)).

(8) $S \cap D = 1$, поэтому D — минимальная нормальная подгруппа в T и $T = D \rtimes S$.

Пусть $A = S \cap D$. Ясно, что $A < R$. Предположим, что $A \neq 1$. В силу утверждений (2) и (6) S R -субнормальна в G , т. е.

$$1 < A \leq R \cap S^{snG} = R \cap S_{snG} \leq R \cap M_{snG} = R \cap 1 = 1;$$

противоречие. Значит, $S \cap D = 1$, поэтому $T = D \rtimes S$, где S — максимальная подгруппа в T . Следовательно, D — минимальная нормальная подгруппа в M .

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ. Из утверждений (1) и (8) следует, что

$$DS/D \simeq S/(D \cap S) = S/1 \simeq S,$$

где DS/D разрешима, поскольку

$$DS/D \simeq (R \cap M)S/(R \cap M) \leq M/(R \cap M) \simeq RM/R = G/R.$$

Поэтому T разрешима по лемме 2.5. Отсюда следует, что $|T : S| = |D| = r^n$ для некоторого простого r . Следовательно, D нильпотентна вопреки утверждению (4). Теорема доказана.

В следующей лемме $l(A)$ обозначает нильпотентную длину разрешимой группы A .

Лемма 2.6 [27, утверждение 4.2]. Если A — субнормальная разрешимая подгруппа группы G и $l(A) \leq r$, то A^G разрешима и $l(A^G) \leq r$.

Доказательство теоремы А. Предположим, что эта теорема неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда $N \neq 1$.

Поскольку каждая N - S -перестановочная подгруппа N -субнормальна, группа G разрешима по теореме В. Более того, гипотеза сохраняется на G/R для любой минимальной нормальной подгруппы R в G по лемме 2.3, поэтому G/R сверхразрешима ввиду выбора G . Следовательно, R — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , $R \leq N$ и $R \not\leq \Phi(G)$. Понятно также, что $|R| > p$. Значит, $G = R \rtimes M$ для некоторой максимальной подгруппы M группы G с $M_G = 1$. Тем самым $C_G(R) \cap M = 1$, поскольку подгруппа $C_G(R)$ нормальна в G . Поэтому $R = C_G(R) = F(G) = O_p(G)$ для некоторого простого p ввиду [2, гл. А, 10.6].

Пусть теперь L — произвольная максимальная подгруппа в M . Тогда

$$R \cap L^{sG} = R \cap N \cap L^{sG} = R \cap N \cap L_{sG} = R \cap L_{sG} \leq R \cap L = 1,$$

поэтому $R \cap L^{sG} = 1$ и, следовательно, $(L^{sG})_G = 1$. Значит, L^{sG} — нильпотентная субнормальная подгруппа в G ввиду [12, 1.2.14]. Тем самым $L^{sG} \leq F(G) = R$ по лемме 2.6. Отсюда $L = 1$ и потому $|M| = q$ для некоторого простого q .

Пусть V — такая максимальная подгруппа группы R , что V нормальна в силовой p -подгруппе G_p группы G . Тогда V — вторая максимальная подгруппа группы G , стало быть,

$$V^{sG} = R \cap V^{sG} = R \cap V_{sG} = V_{sG},$$

т. е. V S -перестановочна в G . Следовательно, $G = G_p O^p(G) \leq N_G(V)$ по [12, 1.2.16], поэтому $V = 1$ ввиду минимальности R . Значит, $|R| = p$; противоречие. Теорема доказана.

Доказательство теоремы С

Следующая лемма очевидна.

Лемма 3.1. Пусть A и $R \leq N$ — подгруппы группы G . Если A N -субнормальна (соответственно N -нормальна, N - S -перестановочна) в G , то A R -субнормальна (соответственно R -нормальна, R - S -перестановочна) в G .

Лемма 3.2. Пусть p — наименьший простой делитель порядка $|G|$ группы G и G_p — силовая p -подгруппа G . Если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N p -разрешима и каждая максимальная подгруппа G_p N -субнормальна в G , то G p -разрешима.

Доказательство. Предположим, что лемма неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Пусть V — максимальная подгруппа в G_p . Группа G_p не является циклической ввиду [26, IV, 2.8]. Следовательно, $V \neq 1$.

Предположим, что $V_{snG} \neq 1$. Тогда $V_{snG} \leq O_p(G)$ по лемме 2.6, поэтому $1 < O_p(G) \leq G_p$. Если $O_p(G) = G_p$, то группа G p -разрешима. Значит, $O_p(G) < G_p$, так что условие леммы выполняется для $G/O_p(G)$ согласно лемме 2.3. Следовательно, $G/O_p(G)$ — p -разрешимая группа по выбору G и это влечет p -разрешимость группы G . Полученное противоречие показывает, что $V_{snG} = 1$. Тогда $N \cap V^{snG} = N \cap V_{snG} = 1$ и ввиду изоморфизма

$$V^{snG}/1 = V^{snG}/(N \cap V^{snG}) \simeq V^{snG}N/N$$

подгруппа V^{snG} p -разрешима.

Пусть теперь W — максимальная подгруппа в G_p , отличная от V . Тогда

$$G_p \leq G_p^{snG} = V^{snG}W^{snG},$$

где $V^{snG}W^{snG}$ p -разрешима, что влечет p -разрешимость группы G . Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. Пусть $p \in \pi(G)$ и группа G p -разрешима. Пусть G_p — силовская p -подгруппа G . Если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N p -сверхразрешима и каждая максимальная подгруппа G_p N - S -перестановочна в G , то G p -сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что лемма неверна, и пусть G — контрпример минимального порядка. Тогда N не является p' -группой и N не является циклической группой. Пусть R — минимальная нормальная подгруппа в G .

(1) Если $R \leq N$ или $R < G_p$, то G/R является p -сверхразрешимой группой. Следовательно, R является p -группой.

Предположим, $p \in \pi(G/R)$, и пусть V/R — произвольная максимальная подгруппа силовской p -подгруппы $G_p R/R$ группы G/R . Тогда $V/R = R(V \cap G_p)/R$, где $V \cap G_p$ — максимальная подгруппа в G_p . Следовательно, $V \cap G_p$ N - S -перестановочна в G и потому подгруппа V/R (NR/R) - S -перестановочна в G/R ввиду леммы 2.3. Кроме того, факторгруппа

$$(G/R)/(RN/R) \simeq (G/N)/(RN/N)$$

p -сверхразрешима. Таким образом, условия выполняются для G/R и тем самым группа G/R p -сверхразрешима и R не является p' -группой ввиду выбора G . Следовательно, R — p -группа поскольку G p -разрешима по лемме 3.2.

Ввиду утверждения (1) и леммы 3.1 можно считать, что N — минимальная нормальная подгруппа G и N является p -группой, т. е. $N \leq G_p$.

(2) $N < G_p$.

Допустим, что $N = G_p$ — минимальная нормальная подгруппа G , и пусть V — максимальная в G_p подгруппа. Тогда каждая S -перестановочная в G подгруппа L , содержащаяся в G_p , является нормальной в G_p и поэтому нормальной в G , поскольку в этом случае $G = G_p O^p(G) \leq N_G(L)$ ввиду [12, 1.16]. Таким образом, $V_G = 1$ и потому $V^G = N \cap V^G = N \cap V_G = 1$, что влечет $V = 1$ и $|N| = p$. Следовательно, N циклическа; противоречие. Значит, $N < G_p$.

(3) Если L — минимальная нормальная подгруппа G и $L \leq G_p$, то $L = N$.

Из утверждений (1) и (2) следует, что G/L p -сверхразрешима, поэтому $L = N$, так как в противном случае $G/1 = G/(L \cap N)$ p -сверхразрешима.

Заключительное противоречие. Предположим, что для некоторой максимальной подгруппы V группы G_p имеет место $N \not\leq V$. Заметим, что для любого $x \in G_p$ имеет место $V_{sG}^x \leq V$, где подгруппа V_{sG}^x является S -перестановочной в G поскольку V_{sG} является S -перестановочной в G и поэтому $V_{sG}^x \leq V_{sG}$, что влечет $V_{sG}^x = V_{sG}$. Следовательно, эта подгруппа нормальна в G_p и тогда $G = G_p O^p(G) \leq N_G(V_{sG})$, т. е. $V_{sG} = V_G = 1$ ввиду утверждения (3). Поэтому $N \cap V^{sG} = N \cap V_{sG} = 1$, что влечет $N \cap V = 1$ и $p = |G_p : V| = |NV : V| = |N : N \cap V|$, поэтому N — циклическая группа порядка p ; противоречие. Значит, $N \leq \Phi(G_p) \leq \Phi(G)$, так что группы $G/\Phi(G)$ и G p -сверхразрешимы; противоречие. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ С. Прежде докажем, что если в G имеется нормальная подгруппа N такая, что G/N разрешима и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовой подгруппы группы G N -субнормальна в G , то G разрешима.

Ввиду теоремы Томпсона — Фейта о разрешимости групп нечетного порядка достаточно показать, что G p -разрешима, где p — наименьшее простое число, делящее $|G|$. Пусть G_p — силовая p -подгруппа группы G . Если G_p является циклической группой, то G p -разрешима ввиду [26, IV, 2.8], а если G_p не является циклической группой, то G p -разрешима по лемме 3.2.

Теперь докажем, что если в G существует нормальная подгруппа N такая, что G/N сверхразрешима и каждая максимальная подгруппа любой нециклической силовой подгруппы группы G N - S -перестановочна в G , то G сверхразрешима. Прежде заметим, что группа G разрешима ввиду показанного выше, поскольку всякая N - S -перестановочная подгруппа N -субнормальна. Таким образом, если для некоторого p силовая p -подгруппа G_p группы G циклическа, то G p -сверхразрешима. Но, с другой стороны, если G_p нециклическа, то G p -сверхразрешима по лемме 3.3. Теорема доказана.

Доказательство теоремы D

Лемма 4.1 (см. [28, с. 97]). Если $G/\Phi(N)$ квазинильпотентна для некоторой разрешимой нормальной подгруппы N группы G , то G квазинильпотентна.

Лемма 4.2. Пусть $N_1, \dots, N_t \leq E$ — нормальные неединичные подгруппы группы G , $t > 1$. Если $N_1 \cap \dots \cap N_t = 1$, то для каждого главного фактора H/K группы G ниже E существует i такое, что H/K G -изоморфен некоторому главному фактору G между N_i и E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму индукцией по t . Сначала предположим, что $t = 2$. Если $N_1H \neq N_1K$, то из G -изоморфизма

$$N_1H/N_1K \simeq H/(H \cap N_1K) = H/K(H \cap N_1) = H/K$$

получаем, что H/K G -изоморфен главному фактору N_1H/N_1K между N_1 и E . Теперь предположим, что $N_1H = N_1K$. Тогда $H = K(H \cap N_1)$, поэтому из G -изоморфизмов

$$(H \cap N_1)/(K \cap N_1) \simeq K(H \cap N_1)/K = H/K,$$

$$(H \cap N_1)N_2/(K \cap N_1)N_2 \simeq (H \cap N_1)/(K \cap N_1)$$

следует, что H/K G -изоморфен главному фактору $(H \cap N_1)N_2/(K \cap N_1)N_2$ G между N_2 и E .

Теперь предположим, что $t > 2$. Без ограничения общности можно предположить, что $N_1 \cap \dots \cap N_{i-1} \cap N_{i+1} \cap \dots \cap N_t \neq 1$ для всех i . Пусть $N = N_2 \cap \dots \cap N_t$. Тогда каждый главный фактор H/K группы G ниже E G -изоморфен некоторому главному фактору T/L группы G ниже E такому, что либо $N_1 \leq L < T$, либо $N \leq L < T$.

Предположим, что $N \leq L < T$. Тогда по индукции существует $i > 1$ такое, что $(T/N)/(L/N)$ G/N -изоморфен некоторому главному фактору $(V/N)/(W/N)$ группы G/N между N_i/N и E/N . Следовательно, H/K G -изоморфен главному фактору V/W группы G между N_i и E . Лемма доказана.

Лемма 4.3. Если N — нормальная p -подгруппа группы G для некоторого простого числа p и $G/C_G(H/K)$ разрешима (соответственно $|H/K| = p$) для каждого главного фактора H/K группы G ниже N , то $G/C_G(N)$ разрешима (соответственно сверхразрешима).

Доказательство. Пусть $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_t = N$ — главный ряд G ниже N и $C_i = C_G(Z_i/Z_{i-1})$. Пусть $C = C_1 \cap \dots \cap C_t$. Тогда G/C разрешима (соответственно абелева группа экспоненты, делящей $p-1$). С другой стороны, $C/C_G(N) \simeq A \leq \text{Aut}(N)$ стабилизирует ряд $1 = Z_0 < Z_1 < \dots < Z_t = N$, поэтому $C/C_G(N)$ является p -группой ввиду [2, гл. А, 12.4(а)]. Следовательно, $G/C_G(N)$ разрешима (соответственно сверхразрешима ввиду [22, гл. 1, 1.9]). Лемма доказана.

Доказательство теоремы D. Пусть $F^* = F^*(G)$ и $F = F(G)$. С учетом [29, X, 13.6, 13.12] $F^*/Z_\infty(F^*)$ полупроста и $C_G(F^*) \leq F$.

Прежде докажем, что если G имеет нормальную подгруппу N такую, что G/N разрешима и каждая максимальная подгруппа группы $F^*(G)$ является N - S -перестановочной в G , то G разрешима. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка.

(1) Условие выполняется для F^* .

Действительно, $NF^*/N \simeq F^*/(F^* \cap N)$ разрешима и каждая максимальная подгруппа A группы F^* является $(F^* \cap N)$ - S -перестановочной в F^* по лемме 2.4.

(2) Если A — ненормальная максимальная подгруппа группы F^* , то фактор H/K абелев и группа $G/C_G(H/K)$ разрешима для любого главного фактора H/K группы G между $A^G = F^*$ и A_G .

Понятно, что $A^{sG} = A^G = F^*$. Тогда

$$N \cap A^G = N \cap A^{sG} = N \cap A_{sG} \leq N \cap A_G \leq N \cap A_{sG},$$

поэтому $N \cap A^G = N \cap A_G$. Значит, имеет место G -изоморфизм

$$NA^G/N \simeq A^G/(A^G \cap N) = F^*/(A_G \cap N),$$

где $A_G \cap N \leq A_G$, поэтому H/K абелев и $G/C_G(H/K)$ разрешима для любого главного фактора H/K группы G между $A^G = F^*$ и A_G .

(3) $F^* \neq G$.

Предположим, что $F^* = G$. Тогда $F^* \neq F$ по выбору G и

$$G/Z_\infty(G) = A_1/Z_\infty(G) \times \dots \times A_t/Z_\infty(G),$$

где $A_i/Z_\infty(G)$ — неабелева простая группа для всех i согласно [29, X, 13.6]. В G имеется максимальная подгруппа A такая, что $A_2 \dots A_t \leq A$ и $A/A_2 \dots A_t$ — максимальная подгруппа в $G/A_2 \dots A_t \simeq A_1/Z_\infty(G)$. Тогда A не является нормальной в G , поэтому каждый главный фактор H/K группы G между $A^G = F^* = G$ и A_G абелев по утверждению (2). Однако $A_G = Z_\infty(G)$, поэтому каждый главный фактор G между G и $Z_\infty(G)$ абелев; противоречие. Следовательно, $F^* \neq G$.

(4) $F^* = F$ (это следует из утверждений (1), (3) и выбора G).

(5) $\Phi(F) = 1$.

Предположим, что $\Phi(F) \neq 1$, и пусть $A/\Phi(F)$ — максимальная подгруппа группы $F/\Phi(F)$. Тогда A — максимальная подгруппа в F , поэтому A N - S -перестановочна в G и, следовательно, $A/\Phi(F)$ является $(\Phi(F)N/\Phi(F))$ - S -перестановочной в $G/\Phi(F)$ по лемме 2.4, где

$$(G/\Phi(F))/(\Phi(F)N/\Phi(F)) \simeq G/\Phi(F)N \simeq (G/N)/(\Phi(F)N/N)$$

разрешима. Наконец, $F/\Phi(F) = F^*/\Phi(F) = F^*(G/\Phi(F))$ по лемме 4.1. Следовательно, гипотеза справедлива для $G/\Phi(F)$, поэтому $G/\Phi(F)$ является разрешимой группой по выбору G . Следовательно, G разрешима. Противоречие. Таким образом, имеем (5).

(6) Если p делит $|F|$ и F_p — силовская p -подгруппа в F , то $G/C_G(H/K)$ разрешима для каждого главного фактора H/K группы G ниже F_p .

Поскольку $\Phi(F_p) \leq \Phi(F) = 1$ по утверждению (5), F_p — элементарная абелева p -группа и $F = F_p \times V$, где V — холлова p' -подгруппа группы F . Пусть S — максимальная подгруппа F_p и $A = SV$. Тогда A — максимальная подгруппа в F . Предположим, что S не является нормальной в G . Тогда A не нормальна в G . Следовательно, факторгруппа $G/C_G(H/K)$ разрешима для каждого главного фактора G между $A^G = F^* = F$ и A_G по утверждениям (2) и (4). Ясно, что $A_G \cap F_p = S_G$ и $A_G = S_G V$, поэтому из G -изоморфизма

$$F/A_G = F_p V/S_G V \simeq F_p/(F_p \cap S_G V) = F_p/S_G(F_p \cap V) = F_p/S_G$$

получаем, что $G/C_G(H/K)$ разрешима для каждого главного фактора H/K группы G между F_p и S_G . Поэтому для всякой максимальной подгруппы S группы F_p фактор $G/C_G(H/K)$ разрешим для каждого главного фактора H/K группы G между F_p и S_G . Поскольку $\Phi(F_p) = 1$, пересечение всех подгрупп S_G , где S пробегает все максимальные подгруппы F_p , является единичной подгруппой G . Поэтому имеем (6) по лемме 4.2.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ПРОТИВОРЕЧИЕ. Пусть $F = F_1 \times \cdots \times F_t$, где F_i — силовская p_i -подгруппа группы F для всех i . Тогда факторгруппа $G/C_G(H/K)$ разрешима для каждого главного фактора H/K группы G ниже F_i по утверждению (6). Поэтому $G/C_G(F_i)$ разрешима по лемме 4.3. Но $C_G(F) \leq F$ по утверждению (4) и $C_G(F) = C_G(F_1) \cap \cdots \cap C_G(F_t)$, поэтому G/F разрешима и, значит, G разрешима вопреки выбору G . Следовательно, группа G разрешима.

Теперь докажем, что если G имеет такую нормальную подгруппу N , что G/D сверхразрешима и каждая максимальная подгруппа группы $F^*(G)$ является N - S -перестановочной в G , то G сверхразрешима. Предположим, что это неверно, и пусть G — контрпример минимального порядка. Из доказанного выше следует, что G разрешима, поэтому $F^* = F$. Более того, рассуждая, как и при доказательстве утверждений (5) и (6), можно показать, что $\Phi(F) = 1$ и если p делит $|F|$ и F_p — силовская p -подгруппа группы F , то каждый главный фактор G ниже F_p циклический.

Следовательно, $F = F_1 \times \cdots \times F_t$, где F_i — силовская p_i -подгруппа группы F для всех i и каждый главный фактор G ниже F_i циклический, поэтому $G/C_G(F_i)$ сверхразрешима по лемме 4.3 и $C_G(F) = C_G(F_1) \cap \cdots \cap C_G(F_t)$. Тем самым G/F сверхразрешима и, значит, G сверхразрешима, поскольку каждый главный фактор G ниже F циклический, что противоречит выбору G . Теорема доказана.

Благодарность. Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту за полезные замечания и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. On the system normalizers of a soluble group // Proc. London Math. Soc. 1937. V. 43. P. 507–528.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. Ezquerro L.M. A contribution to the theory of finite supersolvable groups // Rend. Sem. Math. Univ. Padova. 1993. V. 89. P. 161–170.
4. Liu J., Li S., Shen Z., Liu X. Finite groups with some CAP -subgroups // Indian J. Pure Appl. Math. 2011. V. 42. P. 145–156.
5. Tang X., Guo W. On partial CAP^* -subgroups of finite groups // J. Algebra Appl. 2017. V. 16, N 1. 1750009.
6. Guo W., Skiba A. N., Yang N. A generalized CAP -subgroup of a finite group // Science China. Mathematics. 2015. V. 58, N 10. P. 1–12.
7. Qian G., Zeng Yu On partial CAP -subgroups of finite groups // J. Algebra. 2020. V. 546, N 1. P. 553–565.
8. Li X., Lei D. The semi p -cover-avoidance properties of p -sylowizers in finite groups // Commun. Algebra. 2023. V. 52, N 2. P. 367–373.
9. Wang Y., Miao L., Liu W. On some second maximal subgroups of non-solvable groups // Hacettepe J. Math. Statistics. 2021. V. 49, N 11. P. 4588–4599.
10. Skiba A. N. On sublattices of the subgroup lattice defined by formation Fitting sets // J. Algebra. 2020. V. 550. P. 69–85.
11. Ballester-Bolínches A., Beidleman J. C., Heineken H. Groups in which Sylow subgroups and subnormal subgroups permute // Illinois J. Math. Special issue in honor of Reinhold Baer (1902–1979). 2003. V. 47, N 1-2. P. 63–69.
12. Ballester-Bolínches A., Esteban-Romero R., Asaad M. Products of finite groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 2010.
13. Kegel O. H. Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.
14. Skiba A. N. On weakly s -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2007. V. 315, N 1. P. 192–209.
15. Guo W., Skiba A. N. Finite groups with given s -embedded and n -embedded subgroups // J. Algebra. 2009. V. 321. P. 2843–2860.
16. Agrawal R.K. Generalized center and hypercenter of a finite group // Proc. Am. Math. Soc. 1976. V. 58, N 1. P. 13–21.
17. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
18. Chi Z., Skiba A.N. On a lattice characterization of finite soluble PST -groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2020. V. 101, N 2. P. 247–254.
19. Guo J., Guo W., Safonova I. N., Skiba A. N. G -covering subgroup systems for the classes of finite soluble PST -groups // Commun. Algebra. 2021. V. 49, N 9. P. 1–9.
20. Liu A.-M., Wang Z., Safonov V. G., Skiba A. N. A characterization of σ -soluble $P\sigma T$ -groups // J. Group Theory. 2024. Article in press.
21. Wang Z., Liu A.-M., Safonov V. G., Skiba A. N. A characterisation of soluble PST -groups // Bull. Austral. Math. Soc. 2024. <https://doi.org/10.1017/S0004972724000157>.
22. Weinstein M. Between nilpotent and solvable. Passaic, NJ: Polygonal Publ. House, 1982.
23. Spencer A.E. Maximal nonnormal chains in finite groups // Pacific J. Math. 1968. V. 27, N 1. P. 167–173.
24. Srinivasan S. Two sufficient conditions for supersolvability of finite groups // Israel J. Math. 1980. V. 35. P. 210–214.
25. Guo X., Shum K. P. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups // J. Pure Appl. Algebra. 2003. V. 181. P. 297–308.
26. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1967.
27. Ballester-Bolínches A., Ezquerro L. M. Classes of finite groups. Dordrecht: Springer, 2006.
28. Huppert B., Blackburn N. Finite groups. III. Berlin; New York: Springer-Verl., 1982.
29. Al-Sharo K., Skiba A. N. On finite groups with σ -subnormal Schmidt subgroups // Commun.

Algebra. 2017. V. 45. P. 4158–4165.

Поступила в редакцию 17 марта 2024 г.

После доработки 29 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

А-Мин Лю (<https://orcid.org/0000-0002-2247-5547>)
Хайнаньский университет, Школа математики и статистики,
Хайкоу, Хайнань, 570228, КНР
amlu@hainanu.edu.cn

Сичэ Ван (Sizhe Wang)
Хайнаньский университет, Школа математики и статистики,
Хайкоу, Хайнань, 570228, КНР;
Тяньцзиньский университет, Школа математики,
Тяньцзинь, 300072, КНР
169518909@qq.com

Сафонов Василий Григорьевич (<https://orcid.org/0000-0003-0682-3107>)
Институт математики Национальной академии наук Беларуси,
Минск 220072, Беларусь;
Белорусский государственный университет,
механико-математический факультет,
Минск 220030, Беларусь
vg safonov@im.bas-net.by, vg safonov@bsu.by

Скиба Александр Николаевич (<https://orcid.org/0000-0002-6521-2712>)
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
факультет математики и технологий программирования,
Гомель 246019, Беларусь
alexander.skiba49@gmail.com

УДК 512.542

ТЕОРЕМА АЛЬПЕРИНА
ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП
С КОНЕЧНОЙ СИЛОВСКОЙ 2-ПОДГРУППОЙ

А.-М. Лю, В. Б. Го, Б. Дж. Ли,
Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров

Аннотация. Известная теорема Альперина о слиянии p -элементов в силовских p -подгруппах конечных групп переносится на периодические группы с конечной силовской 2-подгруппой для случая $p = 2$. Основой для такого переноса служит знаменитая теорема В. П. Шункова о локальной конечности периодической группы G , содержащей инволюцию, централизатор в G которой конечен.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.407

Ключевые слова: периодическая группа, локально конечная группа, инволюция, силовская подгруппа, тривиальное пересечение.

Введение

Группа G называется *периодической*, если порядок любого элемента из G конечен. Группа G называется *локально конечной* группой, если любое конечное подмножество элементов из G порождает конечную подгруппу. Понятно, что любая конечная группа локально конечна, а любая локально конечная группа является периодической. Если p — простое число, то *силовской p -подгруппой* произвольной группы G называется любая ее p -подгруппа, максимальная по включению среди всех p -подгрупп группы G . Иными словами, P — силовская p -подгруппа в G , если любая p -подгруппа из G , содержащая P , совпадает с P .

Поскольку объединение возрастающей цепи p -подгрупп является p -группой, легко показать, используя аксиому выбора, что любая группа для произвольного простого числа p обладает хотя бы одной силовской p -подгруппой.

Элемент порядка 2 из группы G называется *инволюцией*.

Цель настоящей работы — перенести известную теорему Альперина (см. [1, теорема 7.2.6]) о слиянии p -элементов в силовских p -подгруппах конечных групп на периодические группы с конечной силовской 2-подгруппой для случая $p = 2$. Основой для такого переноса служит знаменитая теорема В. П. Шункова [2] о локальной конечности периодической группы G , содержащей инволюцию, централизатор в G которой конечен.

Работа первого, второго и третьего авторов выполнена при поддержке Национального фонда естественных наук Китая, проекты No. 12101165, 12171126, 12371021; работа четвертого автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-41-10003; работа пятого автора выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований РАН, проект № FWNF-2022-0002.

© 2024 Лю А.-М., Го В. Б., Ли Б. Дж., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.

Теорема 1. Пусть периодическая группа G содержит нетривиальную конечную силовскую 2-подгруппу P , и пусть A и B — подмножества в P , сопряженные в G , т. е. $B = A^x$ для некоторого $x \in G$.

Тогда существуют 2-элементы $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$, конечные силовские 2-подгруппы $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ из G и элемент $y \in N_G(P)$ со следующими условиями:

- (a) $x = x_1 x_2 \dots x_n y$;
- (b) $N_P(P \cap Q_i)$ и $N_{Q_i}(P \cap Q_i)$ — силовские 2-подгруппы в $N_G(P \cap Q_i)$, $1 \leq i \leq n$;
- (c) $x_i \in N_G(P \cap Q_i)$, $1 \leq i \leq n$;
- (d) $A \subseteq P \cap Q_1$, $A^{x_1 x_2 \dots x_i} \subseteq P \cap Q_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Теорема Шункова. Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию t , централизатор которой в G конечен. Тогда G локально конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [2].

Следствие 1 (В. П. Шунков). Если E — конечная подгруппа бесконечной 2-группы G , то $N_G(E) \neq E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по порядку E . Можно считать, что $E \neq 1$. Пусть t — инволюция из центра E . Тогда $C_G(t) \geq E$, и если $C_G(t)$ — конечная подгруппа, то по теореме Шункова G локально конечна и существует $n \in G \setminus E$. Подгруппа $E_1 = \langle n, E \rangle$ является конечной 2-группой, поэтому $N_{E_1}(E) \neq E$ и утверждение следствия справедливо. Таким образом, можно считать, что $G_1 = C_G(t)$ — бесконечная группа. Теперь по индукции $N_{G_1/\langle t \rangle}(E/\langle t \rangle) \neq E/\langle t \rangle$, откуда $N_{G_1}(E) \neq E$.

Теорема 2. Пусть S — силовская 2-подгруппа периодической группы G и T — силовская 2-подгруппа из G , не сопряженная с S . Тогда для любого натурального числа d найдется сопряженная с T силовская 2-подгруппа T_1 из G , для которой $|S \cap T_1| > d$.

В частности, если S конечна, то все силовские 2-подгруппы из G сопряжены с S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$S^G = \{S^x \mid x \in G\}, \quad T^G = \{T^x \mid x \in G\}.$$

Достаточно доказать, что существуют $S_1 \in S^G$ и $T_1 \in T^G$ такие, что $|S_1 \cap T_1| > d$. Предположим противное. Пусть $S^* \in S^G$ и $T^* \in T^G$ таковы, что число $|S^* \cap T^*|$ максимальное из возможных. Пусть $|S^* \cap T^*| = d$. Можно считать, что $S^* = S$, $T^* = T$. Пусть $D = S \cap T$. Если $D = S$ или $D = T$, то $S \leq T$ или $T \leq S$ соответственно, откуда по определению силовской подгруппы $T = S$, что противоречит несопряженности S и T . По следствию 1 $S_0 = N_S(D) \neq D \neq N_T(D) = T_0$.

Пусть sD — инволюция в S_0/D , tD — инволюция в T_0/D . Поскольку любые две инволюции в периодической группе порождают конечную подгруппу, $K = \langle s, t, D \rangle$ — конечная группа. Пусть K_s — силовская 2-подгруппа из K , содержащая $\langle D, s \rangle$, K_t — силовская 2-подгруппа из K , содержащая $\langle D, t \rangle$. Поскольку K конечна, найдется $x \in K$ такое, что $K_t^x = K_s$.

Пусть S_1 — силовская 2-подгруппа из G , содержащая K_s . Так как $S \cap S_1 \geq \langle D, s \rangle$, то $S_1 = S^y \in S^G$ для некоторого $y \in G$ и $S^y \geq K_s = K_t^x \geq \langle D, t^x \rangle \leq T^x$,

т. е. $\langle D, t^x \rangle \leq S^y \cap T^x$. Так как $|\langle D, t^x \rangle| > d$, то $|S^y \cap T^x| > d$, откуда по условию S^y сопряжена с T^x ; противоречие. Теорема доказана.

Отметим работу [3], в которой вторая часть теоремы 2 (о сопряженности силовских подгрупп) доказана при более слабых предположениях.

ЗАМЕЧАНИЕ. А. И. Созутов обратил внимание авторов на тот известный в литературе факт, что даже в локально конечной группе G могут существовать несопряженные силовские 2-подгруппы. Таким примером может служить объединение возрастающей последовательности конечных симметрических групп с естественным вложением $\text{Sym}(n)$ в $\text{Sym}(n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

§ 2. Доказательство теоремы 1

По теореме 2 все силовские 2-подгруппы группы G конечны и сопряжены. Если P и Q — силовские 2-подгруппы в G , то будем называть пересечение $D = P \cap Q$ *правильным*, если $N_P(D)$ и $N_Q(D)$ являются силовскими 2-подгруппами в $N_G(D)$. Зафиксируем силовскую 2-подгруппу P в G . Если Q и R — две силовские 2-подгруппы из G , будем говорить, что R *связана с Q посредством P* , если найдутся силовские 2-подгруппы Q_i , $1 \leq i \leq n$, такие, что

(а) $P \cap Q_i$ — правильное пересечение, $1 \leq i \leq n$;

(б) существуют 2-элементы $x_i \in N_G(P \cap Q_i)$, $1 \leq i \leq n$, такие, что $R^x = Q$ для $x = x_1 x_2 \dots x_n$;

(с) $P \cap R \leq P \cap Q_1$ и $(P \cap R)^{x_1 x_2 \dots x_i} \leq P \cap Q_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$.

Если эти условия выполнены, будем писать $R \sim_P Q$, если нет опасности заблуждения, будем писать $R \sim Q$, если важен элемент x , будем писать $R \sim Q$ посредством x .

Отметим, что

$$(P \cap R)^x = ((P \cap R)^{x_1 \dots x_{n-1}})^{x_n} \leq (P \cap Q_n)^{x_n} \leq P \cap Q_n,$$

так как $x_n \in N_G(P \cap Q_n)$.

Зафиксируем для дальнейшего силовскую 2-подгруппу P в G и будем писать $R \sim Q$ вместо $R \sim_P Q$.

Лемма 1. Если Q, R, S — силовские 2-подгруппы в G , для которых $S \sim R$ и $R \sim Q$, то $S \sim Q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y_i, T_i , $1 \leq i \leq m$, и z_i, U_i , $1 \leq i \leq r$, — элементы и силовские 2-подгруппы в G , реализующие отношения $S \sim R$ и $R \sim Q$ относительно P соответственно. Положим $n = m + r$ и определим

$$x_i = \begin{cases} y_i \\ z_{i-m} \end{cases} \text{ и } Q_i = \begin{cases} T_i, & 1 \leq i \leq m, \\ U_{i-m}, & m+1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (2.1)$$

Утверждается, что элементы x_i и силовские 2-подгруппы Q_i , $1 \leq i \leq n$, осуществляют справедливость $S \sim Q$.

Положим $x = yz = x_1 x_2 \dots x_n$, где $y = y_1 \dots y_m$, $z = z_1 \dots z_r$. Тогда $S^x = Q$ и условия (а) и (б) для $S \sim Q$ выполнены. Далее, $(P \cap S)^{x_1 x_2 \dots x_m} = (P \cap S)^y \leq P \cap R$. Теперь $(P \cap S)^{x_1 x_2 \dots x_m} \leq (P \cap U_1) = P \cap Q_{m+1}$, так как $P \cap R \leq P \cap U_1$.

Наконец, для $m+1 \leq i \leq n-1$ выполнено

$$(P \cap S)^{x_1 \dots x_i} = ((P \cap S)^y)^{x_{m+1} \dots x_i} \leq (P \cap R)^{z_1 \dots z_{m-1}} \leq P \cap U_{i-m} = P \cap Q_{i+1},$$

поэтому выполнено и условие (с), откуда $S \sim Q$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть Q, R — силовские 2-подгруппы из G , для которых $P \cap R \geq P \cap Q$, $R \sim P$ посредством x и $Q^x \sim P$. Тогда $Q \sim P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 1 достаточно показать, что $Q \sim Q^x$. Пусть даны $x = x_1 \dots x_n$ и Q_i , $1 \leq i \leq n$, в соответствии с определением $R \sim P$ посредством x . Утверждается, что $Q \sim Q^x$ для тех же элементов x_i и силовских 2-подгрупп Q_i .

Действительно, условия (а) и (б) очевидно выполнены, поскольку Q сопряжена с Q^x элементом x . Что касается (с), то $P \cap Q \leq P \cap R$ по предположению, поэтому $P \cap Q \leq P \cap Q_1$. Но теперь

$$(P \cap Q)^{x_1 \dots x_i} \leq (P \cap R)^{x_1 \dots x_i} \leq P \cap Q_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

как и нужно.

Лемма 3. Пусть Q, R — силовские 2-подгруппы в G , для которых $R \cap Q > P \cap Q$ и $R \sim P$. Предположим, что $S \sim P$ для всех силовских 2-подгрупп S из G со свойством $|S \cap P| > |Q \cap P|$. Тогда $Q \sim P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $R \sim P$ посредством x , так что $R^x = P$. Тогда

$$P \cap Q^x = R^x \cap Q^x = (R \cap Q)^x.$$

По предположению $|R \cap Q| > |P \cap Q|$, поэтому $|P \cap Q^x| > |P \cap Q|$. Отсюда по условию $Q^x \sim P$. Так как $R \sim P$, требуемое заключение будет следовать из леммы 2, если покажем, что $P \cap R \geq P \cap Q$. Но

$$P \cap R \geq P \cap (R \cap Q) \geq P \cap (P \cap Q) = P \cap Q,$$

что и требовалось.

Лемма 4. Пусть Q — силовская 2-подгруппа из G , для которой $P \cap Q$ — правильное пересечение. Если $S \sim P$ для всех силовских 2-подгрупп S из G со свойством $|S \cap P| > |Q \cap P|$, то $Q \sim P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что $Q \neq P$, т. е. $P \cap Q \neq P$. Положим

$$P_0 = N_P(P \cap Q), \quad Q_0 = N_Q(P \cap Q).$$

По определению правильного пересечения P_0 и Q_0 — силовские 2-подгруппы в $N = N_G(P \cap Q)$. Пусть K — подгруппа в N , порожденная всеми 2-элементами из N . Ясно, что Q_0 и P_0 — силовские 2-подгруппы в K и $Q_0^x = P_0$ для некоторого $x \in K$. Ясно, что $x = x_1 x_2 \dots x_n$, где каждый x_i — 2-элемент из K . Положим $Q_i = Q$ для $1 \leq i \leq n$. Очевидно, что $P \cap Q_i$ — правильное пересечение для всех i и $Q \sim Q^x$.

С другой стороны,

$$P \cap Q^x \geq P \cap Q_0^x = P \cap P_0 = P_0.$$

Поскольку $P_0 \neq P \cap Q$, $|P \cap Q^x| > |P \cap Q|$, то по предположению $Q^x \sim P$. Итак, $Q \sim Q^x$ и $Q^x \sim P$, откуда $Q \sim P$ по лемме 1.

Лемма 5. Для любых силовских 2-подгрупп P и Q из G справедливо $Q \sim_P P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО индукцией по $|P : P \cap Q|$. Если $|P : P \cap Q| = 1$, то $P = Q$ и утверждение леммы справедливо, поэтому можно считать, что $P \cap Q \neq P$. Пусть D — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap Q)$, содержащая $N_P(P \cap Q)$, и пусть S — силовская 2-подгруппа в G , содержащая D .

Поскольку P конечна,

$$P \cap S \geq P \cap D = N_P(P \cap Q) > P \cap Q,$$

поэтому $P \cap S > P \cap Q$. По индукции $S \sim P$. Пусть $S \sim P$ посредством x . Достаточно показать, что $Q^x \sim P$, и тогда лемма 2 с S вместо R даст требуемое заключение $Q \sim P$.

Поскольку $S \cap Q \leq P \cap Q$, имеем

$$P \cap Q^x \geq (P \cap Q)^x. \quad (*)$$

Если $P \cap Q^x > (P \cap Q)^x$, то $|P : P \cap Q^x| < |P : P \cap Q|$, поскольку $(P \cap Q)^x$ и $P \cap Q$ одного порядка. Но тогда $Q^x \sim P$ по индукции. Поэтому можно считать, что $(*)$ — равенство.

Поскольку D — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap Q)$, то D^x — силовская 2-подгруппа в $N_G((P \cap Q)^x) = N_G(P \cap Q^x)$. Теперь пусть E — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap Q^x)$, содержащая $N_{Q^x}(P \cap Q^x)$, и пусть T — силовская 2-подгруппа в G , содержащая E . Тогда

$$T \cap Q^x \geq N_{Q^x}(P \cap Q^x) > P \cap Q^x.$$

Если здесь последнее неравенство является равенством, т. е. $P \cap Q^x = Q^x$, то $Q^x \leq P$, и так как $|Q^x| = |P|$, то $Q^x = P$, $Q^x \sim P$, что и требовалось. Поэтому $N_{Q^x}(P \cap Q^x) \neq P \cap Q^x$. Если $T \sim P$, то первое условие леммы 3 выполнено с T , Q^x вместо R , Q соответственно.

Поскольку второе условие леммы выполнено по индукционному предположению, то $Q^x \sim P$, как и требовалось. Поэтому достаточно показать, что в действительности $T \sim P$. Но $P \cap T \geq P \cap Q^x$, так что если $P \cap T > P \cap Q^x$, утверждаемое будет следовать по индукционному предположению. Поэтому можно также считать, что $P \cap T = P \cap Q^x$.

При этих условиях покажем, что $P \cap T$ — правильное пересечение, и в этом случае заключение, что $T \sim P$, будет следовать из леммы 4 ввиду индукционного предположения. Прежде всего, $D^x \leq P$, и поэтому D^x — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap Q^x) = N_G(P \cap T)$. Далее, поскольку $E \leq T$ и E — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap Q^x)$, то $N_T(P \cap T)$ — силовская 2-подгруппа в $N_G(P \cap T)$. Поэтому $P \cap T$ — правильное пересечение, и лемма доказана.

Закончим доказательство теоремы 1.

По лемме 5 $P^{x^{-1}} \sim P$ посредством некоторого элемента u . Пусть Q_i и x_i , $1 \leq i \leq n$, дают это условие, так что, в частности, $u = x_1 \dots x_n$ и $(P^{x^{-1}})^u = P$. Положив $y = u^{-1}x$, получим, что $y \in N_G(P)$ и $x = uy$. Поскольку $B = A^x \leq P$, то $A \leq P \cap P^{x^{-1}}$. Следовательно, $A^{x_1 x_2 \dots x_i} \subseteq (P \cap P^{x^{-1}})^{x_1 \dots x_i} \leq P \cap Q_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$, по определению $P^{x^{-1}} \sim P$ посредством u по нашему выбору Q_i и x_i . По той же причине $P \cap Q_i$ — правильное пересечение и $x_i \in N_G(P \cap Q_i)$, $1 \leq i \leq n$, и теорема доказана.

§ 3. Следствия

В этом параграфе приводятся некоторые следствия теоремы 1, аналоги которых в той или иной мере известны для конечных групп.

Следствие. Пусть G — периодическая группа с конечной силовской 2-подгруппой P . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если A и B — нормальные подмножества в P , сопряженные в G , то A и B сопряжены в $N_G(P)$.

2. Если K — нормальная подгруппа в P и существует силовская 2-подгруппа Q группы G , которая содержит K и в которой K не инвариантна, то существует содержащая K подгруппа H в P , для которой K не инвариантна в $N_G(H)$ и число подгрупп, сопряженных с K в $N_G(H)$, нечетно.

3. Если P имеет тривиальное пересечение с любой отличной от P силовской 2-подгруппой группы G , то любые два элемента из P , сопряженные в G , сопряжены в $N_G(P)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. По условию существует $g \in G$ такой, что $B = A^g$. Поскольку $A \trianglelefteq P$, то $B \trianglelefteq P^g$. Очевидно, $B \trianglelefteq \langle P, P^g \rangle$, при этом P и P^g — силовские 2-подгруппы в $N_G(B)$. Так как P и P^g сопряжены в $N_G(B)$, то $P = P^{g^x}$ для некоторого $x \in N_G(B)$. Теперь $gx \in N_G(P)$ и $A^{gx} = B^x = B$.

2. По условию существует силовская 2-подгруппа Q из G , которая содержит K и в которой K не инвариантна. Поэтому $Q^g = P$ для некоторого $g \in G$ и K, K^g — подгруппы P , сопряженные в G . Теперь можно выбрать элементы $x_1, \dots, x_n, y$ и силовские 2-подгруппы $Q_1, \dots, Q_n$ в соответствии с теоремой 1 с $A = K$ и $B = K^g$ такие, что $g = x_1 \dots x_n y$. Поскольку B не инвариантна в P , то $B^{x_1 \dots x_n} = B^{gy^{-1}}$ не инвариантна в P . Поэтому если положим $K_0 = K$ и $K_j = K^{x_1 \dots x_j}$, $1 \leq j \leq n$, то найдется такой i , $1 \leq i < n$, что $K_i \trianglelefteq P$, а $K_{i+1} \not\trianglelefteq P$.

Положим $H_i = P \cap Q_i$. Тогда H_i — правильное пересечение, $x_{i+1} \in N_G(H_i)$ и $K_i^{x_{i+1}} = K_{i+1}$. Поскольку K_i нормальна в P , а K_{i+1} — нет, то $K_i \neq K_{i+1}$ и K_i не является нормальной в $N_G(H_i)$. Далее, K_i нормальна в P , поэтому K_i нормальна в $N_P(H_i)$. Отсюда следует, что индекс в $N_G(H_i)$ нормализатора K_i в $N_G(H_i)$ нечетен.

Наконец, K и K_i — нормальные подгруппы в P , и по п. 1 найдется $u \in N_G(P)$, для которого $K_i^u = K$. Пусть $H = H_i^u$. Тогда $K \leq H \leq P$, K не инвариантна в $N_G(H)$ и число сопряженных с K подгрупп в $N_G(H)$ нечетно.

3. Пусть $1 \neq a, b \in P$ и $b = a^g$ для $g \in G$. Положим $A = \{a\}$, $B = \{b\}$. Выберем элементы $x_1, \dots, x_n, y$ и силовские подгруппы $Q_1, \dots, Q_n$ в соответствии с теоремой 1, так что $g = x_1 \dots x_n y$. Поскольку $a \neq 1$, каждое пересечение $P \cap Q_i$ нетривиально. Поэтому $P = Q_i$ для всех i , $x_1, \dots, x_n, y \in N_G(P)$. Таким образом, $g \in N_G(P)$, и все доказано.

Благодарность. Авторы благодарны рецензенту за многочисленные замечания, способствовавшие улучшению содержания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gorenstein D. Finite groups. New York: Chelsea Publishing Company, 1980.
2. Шунков В. П. О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–493.
3. Остылевский А. Н., Шунков В. П. О q -бипримарно конечных группах с условием мини-

мальности для q -подгрупп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 1. С. 61–78.

Поступила в редакцию 12 января 2024 г.

После доработки 27 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Лю А-Минг

Школа математики и статистики, Хайнаньский университет,
570228, Хайкоу, Хайнань, КНР
amliu@hainanu.edu.cn

Го Вэньбинь

Школа математики и статистики,
Хайнаньский университет, 570228,
Хайкоу, Хайнань, КНР
wbguo@ustc.edu.cn

Ли Баоджун

Школа математики и статистики, Наньтунский университет,
226019, Наньтун, КНР
libj@ntu.edu.cn

Лыткина Дарья Викторовна

Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com

Мазуров Виктор Данилович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Колтунга, 4, Новосибирск 630090;
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102
vic.mazurov@gmail.com

МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ ОКРУЖНОСТИ КОНВЕЯ

С. А. Малюгин

Аннотация. Дж. Конвеем был установлен следующий геометрический факт: если в треугольнике ABC стороны AB и AC продолжить за точку A на расстояние, равное длине противоположной стороны BC , и то же самое проделать с вершинами B и C , то построенные таким способом 6 точек будут лежать на одной окружности, центр которой совпадает с центром вписанной окружности. В. А. Александровым найден пространственный аналог окружности Конвея. Именно, если в тетраэдре $ABCD$ на продолжениях ребер AB , AC , AD за вершину A отметим три точки, находящиеся от A на расстоянии, равном полупериметру противоположной грани BCD , и то же самое проделать с остальными вершинами B , C , D , то построенные 12 точек лежат на одной сфере тогда и только тогда, когда тетраэдр $ABCD$ является каркасным. В настоящей работе рассмотрен многомерный вариант этой задачи для симплекса в евклидовом пространстве E_n .

DOI 10.33048/smzh.2024.65.408

Ключевые слова: окружность Конвея, сфера Конвея, каркасный тетраэдр, евклидово пространство, треугольник, тетраэдр, симплекс.

1. Введение

Дж. Конвеем получен следующий факт из элементарной геометрии: если в треугольнике ABC стороны AB и AC продолжить за точку A на расстояние, равное длине противоположной стороны BC , и то же самое проделать с вершинами B и C , то построенные таким способом 6 точек будут лежать на одной окружности, центр которой совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC (см. [1; 2, задача 4.8.10]). Такая окружность называется *окружностью Конвея*. В [1] рассматривается более общая задача о делении сторон (Side Divider Theorem): в треугольнике ABC на стороне AB (или на ее продолжении) берем произвольную точку P , на стороне BC (или на ее продолжении) берем точку Q такую, что $|BQ| = |BP|$, далее на стороне AC берем точку R , для которой $|CR| = |CQ|$, и, продолжая далее этот процесс, построим 6 точек P , Q , R , S , T , U . Утверждается, что они лежат на одной окружности. В частности, окружность Конвея получится, если начинать построение с точки P , находящейся на продолжении стороны AB на расстоянии $|BC|$ от точки A . В [3] решается задача о построении окружности Конвея для многоугольников, имеющих вписанную окружность. В [4] строятся коники Конвея с центром в точке пересечения чевиан треугольника ABC . В [5, 6] предложена следующая конструкция сферы Конвея для тетраэдра в 3-мерном евклидовом

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0017.

пространстве: для тетраэдра $ABCD$ на продолжениях ребер AB , AC , AD за вершину A отметим три точки, находящиеся от A на расстоянии, равном полупериметру противоположащей грани BCD . То же самое сделаем с остальными вершинами B , C , D и прилежащими к ним ребрами. Утверждается, что построенные 12 точек лежат на одной сфере тогда и только тогда, когда существует сфера, касающаяся всех ребер тетраэдра $ABCD$ (полувписанная сфера). Эту сферу с полным правом можно называть *сферой Конвея* — двумерным аналогом окружности Конвея. Мы видим, что сфера Конвея существует не для произвольных тетраэдров, а только для тех, которые имеют полувписанную сферу. Возникает естественный вопрос: насколько много таких тетраэдров? Критерий существования полувписанной сферы для заданного тетраэдра звучит следующим образом: сумма длин у трех пар противоположащих ребер должна быть одинаковой, т. е. $|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |BC| + |AD|$ [7, задача 37]. Такие тетраэдры обычно называются *каркасными*. Если считать тетраэдр заданным набором длин всех своих ребер, то каркасные тетраэдры образуют 4-мерное подмногообразие в 6-мерном многообразии всех тетраэдров.

В настоящей работе рассматривается многомерный аналог предыдущей задачи о сфере Конвея. Именно, для симплекса в n -мерном евклидовом пространстве на продолжениях ребер, имеющих общую вершину, отмечаются n точек, находящихся от этой вершины на расстоянии, равном сумме длин всех ребер, не смежных с этой вершиной, деленной на $n - 1$. Доказывается, что существует $(n - 1)$ -мерная сфера, проходящая через все $n(n + 1)$ построенные точки (сфера Конвея) тогда и только тогда, когда существует $(n - 1)$ -мерная сфера, касающаяся всех ребер этого симплекса (полувписанная в симплекс сфера). Решен также вопрос о характеристизации всех таких симплексов, имеющих полувписанную сферу. Оказывается, для этого необходимо и достаточно, чтобы каждая трехмерная грань симплекса была каркасным тетраэдром. Если считать симплекс заданным длинами всех его ребер, то симплексы, имеющие полувписанную сферу, образуют $(n + 1)$ -мерное подмногообразие в $[n(n + 1)/2]$ -мерном многообразии всех n -мерных симплексов.

2. Основной результат

Рассмотрим в n -мерном евклидовом пространстве E_n n -мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ с вершинами в точках $A_1, \dots, A_{n+1}$ ($n \geq 2$). Зафиксируем $n + 1$ положительных чисел $h_1, \dots, h_{n+1}$. Каждое ребро $[A_k, A_l]$ продолжим вдоль прямой, его содержащей, за точку A_l до точки $A_{k,l}$, находящейся от A_l на расстоянии h_l . Обозначим через

$$a_{k,l} = |A_{k,l}A_{l,k}| = h_k + h_l + |A_kA_l| \quad (k, l = 1, \dots, n + 1, k \neq l) \quad (1)$$

расстояние между точками $A_{k,l}$ и $A_{l,k}$.

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (α) все расстояния $a_{k,l}$, определяемые формулой (1), равны между собой;
- (β) существует $(n - 1)$ -мерная сфера, касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ (полувписанная сфера);
- (γ) для любой четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ выполняются равенства

$$|A_{i_1}A_{i_2}| + |A_{i_3}A_{i_4}| = |A_{i_1}A_{i_3}| + |A_{i_2}A_{i_4}| = |A_{i_2}A_{i_3}| + |A_{i_1}A_{i_4}|;$$

- (δ) существует набор положительных чисел $(a_1, \dots, a_{n+1})$ такой, что

$$|A_kA_l| = a_k + a_l \quad (k, l = 1, \dots, n + 1, k \neq l); \quad (2)$$

$$h_k = \lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j \neq k; i < j}^{n+1} |A_i A_j| \quad (k = 1, \dots, n+1, \lambda \in \mathbb{R});$$

3. Доказательство теоремы 1

Рис. 1.

Допустим, что утверждения (β) и (ζ) установлены для размерности $\leq n-1$, и рассмотрим в пространстве E_n n -мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$, для которого существуют положительные числа $h_1, \dots, h_{n+1}$ такие, что выполняется условие (α) . В симплексе $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ рассмотрим две $(n-1)$ -мерные грани. Без ограничения общности можно считать, что это грани $[A_1, \dots, A_n]$ и $[A_2, \dots, A_{n+1}]$. По предположению индукции существует $(n-2)$ -мерная сфера, содержащая все отмеченные точки $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n; k \neq l$), и существует $(n-2)$ -мерная сфера S , касающаяся всех ребер $[A_k, A_l]$ ($k, l = 1, \dots, n, k \neq l$). По

предположению индукции они имеют общий центр C . Аналогично существует $(n-2)$ -мерная сфера с центром в другой точке C' , содержащая все точки $A_{k,l}$ ($k, l = 2, \dots, n+1; k \neq l$) и $(n-2)$ -мерная сфера S' с тем же центром C' , касающаяся всех ребер $A_{k,l}$ ($k, l = 2, \dots, n+1, k \neq l$). Через точку C проведем прямую L , ортогональную $(n-1)$ -мерной плоскости Π , содержащей грань $[A_1, \dots, A_n]$. Аналогично проведем через точку C' прямую L' , ортогональную $(n-1)$ -мерной плоскости Π' , содержащей грань $[A_2, \dots, A_{n+1}]$. Любая точка D прямой L находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n; k \neq l$) и на одинаковом расстоянии от всех точек касания сферы S с ребрами грани $[A_1, \dots, A_n]$. Докажем, что прямые L и L' пересекаются. Для этого рассмотрим общую $(n-2)$ -мерную грань $[A_2, \dots, A_n]$ граней $[A_1, \dots, A_n]$ и $[A_2, \dots, A_{n+1}]$. Она лежит в $(n-2)$ -мерной плоскости Π'' , являющейся пересечением $(n-1)$ -мерных плоскостей Π и Π' . Сечением сферы S плоскостью Π'' будет $(n-3)$ -мерная сфера S'' , касающаяся всех ребер $(n-2)$ -мерной грани $[A_2, \dots, A_n]$ (в случае $n = 3$ эта 0-мерная сфера вырождается в точку). Пусть C'' — центр этой сферы. Аналогичное сечение сферы S' плоскостью Π'' — та же самая сфера S'' с тем же центром C'' , так как сфера, касающаяся всех ребер грани $[A_2, \dots, A_n]$, единственна. (В случае $n = 3$ C'' является точкой касания окружности S с ребром $[A_2, A_3]$ и эта точка лежит на середине отрезка $[A_{2,3}, A_{3,2}]$ как для треугольника $[A_1, A_2, A_3]$, так и для треугольника $[A_2, A_3, A_4]$.) Очевидно, отрезок $[C, C'']$ ортогонален Π'' и $[C', C'']$ тоже ортогонален Π'' . Через C'' проведем двумерную плоскость Π_2 , ортогональную $(n-2)$ -мерной плоскости Π'' . Эта плоскость содержит точки C и C' . Рассмотрим любую точку $X \in L$. Так как $[C, X]$ перпендикулярно гиперплоскости Π и $[C, C'']$ перпендикулярно $(n-2)$ -мерной плоскости Π'' , то $[X, C'']$ перпендикулярно Π'' (по теореме о трех перпендикулярах в n -мерном пространстве E_n). Следовательно, вся прямая L лежит в плоскости Π_2 . Аналогичным образом вся прямая L' тоже лежит в Π_2 . Так как для невырожденного симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ гиперплоскости Π и Π' не параллельны, то ортогональные к ним прямые L и L' тоже не параллельны. Поэтому внутри двумерной плоскости Π_2 прямые L и L' пересекаются в некоторой точке D .

Рассмотрим еще одну $(n-1)$ -мерную грань симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ и проведем через нее $(n-1)$ -мерную плоскость Π''' . По предположению индукции существует $(n-2)$ -мерная сфера с центром в точке C''' , содержащая все отмеченные точки $A_{k,l}$, которые лежат на продолжениях ребер этой грани, и существует $(n-2)$ -мерная сфера S''' с тем же центром C''' , которая касается всех ребер этой же грани. Проведем через C''' прямую L''' , ортогональную гиперплоскости Π''' . Из предыдущего следует, что прямые L и L''' , а также L' и L''' тоже должны пересекаться в некоторых точках D' и D'' соответственно. Докажем, что $D = D' = D''$. Если это неверно, то существует двумерная плоскость Π'_2 , проходящая через эти три прямые L, L', L''' . Рассмотрим $(n-2)$ -мерную плоскость Π'_{n-2} , ортогональную плоскости Π'_2 . Так как L перпендикулярна Π , то Π'_{n-2} после переноса на некоторый вектор вкладывается в Π . По той же самой причине Π'_{n-2} после переноса на подходящий вектор вкладывается в Π' и в Π''' . Поэтому Π'_{n-2} после переноса на некоторый вектор должна вкладываться в пересечение $\Pi \cap \Pi' \cap \Pi'''$, размерность которого равна $n-3$. Полученное противоречие доказывает, что $D = D' = D''$.

Итак, доказано, что существует точка D , которая находится на одинаковом расстоянии от всех ребер любой $(n-1)$ -мерной грани симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$.

Так как любая пара $(n-1)$ -мерных граней имеет общие ребра, то D находится на одинаковом расстоянии от всех ребер симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Следовательно, существует сфера, касающаяся всех ребер симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Аналогичным образом доказывается, что D находится на одинаковом расстоянии от всех точек $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$). Утверждения (β) и (ζ) доказаны и доказано, что сферы в этих утверждениях имеют общий центр.

Докажем, что $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$. Обозначим точки касания полувписанной сферы и ребра $[A_k, A_l]$ через $B_{k,l}$. Из условия касания следует, что для каждого фиксированного k все длины $|A_k B_{k,l}|$ ($l = 1, \dots, n+1$, $l \neq k$) равны между собой и равны a_k . Из определения чисел a_k следуют равенства $|A_k A_l| = a_k + a_l$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$). Следовательно, для любой четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ выполняются равенства

$$a_{i_1} + a_{i_2} + a_{i_3} + a_{i_4} = |A_{i_1} A_{i_2}| + |A_{i_3} A_{i_4}| = |A_{i_1} A_{i_3}| + |A_{i_2} A_{i_4}| = |A_{i_1} A_{i_4}| + |A_{i_2} A_{i_3}|.$$

Значит, импликация $(\beta) \Rightarrow (\gamma)$ доказана.

Следующая лемма формулируется в гораздо более общем виде, чем это требуется для дальнейшего. Рассмотрим полный граф K_m с m вершинами $1, 2, \dots, m$. Рассмотрим также абелеву группу $(G, +)$, в которой для любого элемента $a \in G$ уравнение $2x := x + x = a$ имеет единственное решение, которое будем обозначать через $x/2$. Такому условию удовлетворяет аддитивная группа поля с нулевой или нечетной характеристикой, а также любая конечная группа нечетного порядка. Задача о делении весов будет формулироваться следующим образом. Каждому ребру графа K_m , соединяющему вершины i и j , сопоставим вес $w_{i,j} \in G$. Нужно найти условия, при которых существует последовательность $a_1, \dots, a_m \in G$, для которой $w_{i,j} = a_i + a_j$ ($i, j = 1, \dots, m; i < j$).

Лемма 1. При $m \geq 4$ задача о делении весов разрешима единственным образом тогда и только тогда, когда для любой четверки $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ выполняются равенства

$$w_{i_1, i_2} + w_{i_3, i_4} = w_{i_1, i_3} + w_{i_2, i_4} = w_{i_1, i_4} + w_{i_2, i_3}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия (3) очевидна. Докажем достаточность. Для четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ обозначим $b = w_{i_1, i_2} + w_{i_3, i_4}$ и положим

$$x_1 = b - (w_{i_2, i_3} + w_{i_2, i_4} + w_{i_3, i_4})/2; \quad x_2 = b - (w_{i_1, i_3} + w_{i_1, i_4} + w_{i_3, i_4})/2;$$

$$x_3 = b - (w_{i_1, i_2} + w_{i_2, i_4} + w_{i_1, i_4})/2; \quad x_4 = b - (w_{i_1, i_2} + w_{i_2, i_3} + w_{i_1, i_3})/2.$$

Непосредственно проверяется, что $w_{i_k, i_l} = x_k + x_l$ ($k, l = 1, 2, 3, 4; k < l$). Мы решили эту задачу для любого полного подграфа $K_4 \subset K_m$. Теперь необходимо согласовать все эти решения между собой. Будем действовать по индукции. В качестве базы индукции рассмотрим четверку индексов $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 3$, $i_4 = 4$ и положим $a_i = x_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), где $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$ — полученное выше решение. Допустим, что для некоторого $4 \leq p < m$ уже найдены элементы $a_1, \dots, a_p \in G$, для которых $w_{i,j} = a_i + a_j$ ($i, j = 1, \dots, p; i < j$). Положим $a_{p+1} = w_{1,p+1} - a_1$. Необходимо проверить, что для любого $1 < i \leq p$ выполняется $w_{i,p+1} = a_i + a_{p+1}$. Для этого рассмотрим четверку индексов $1, i, j, p+1$, где $1 < j \leq p; j \neq i$. По предыдущему условию для этой четверки тоже существует решение x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 , т. е. $w_{1,i} = x'_1 + x'_2$, $w_{1,j} = x'_1 + x'_3$, $w_{i,j} = x'_2 + x'_3$, $w_{1,p+1} = x'_1 + x'_4$. Вычитая из первого равенства третье и сложив со вторым,

получим $2x'_1 = w_{1,i} - w_{i,j} + w_{1,j} = 2a_1$, что означает $x'_1 = a_1$. Аналогично получаем $x'_2 = a_i$, $x'_3 = a_j$ и $x'_4 = w_{1,p+1} - x'_1 = a_{p+1}$. Поэтому $w_{i,p+1} = x'_2 + x'_4 = a_i + a_{p+1}$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 1. Пусть выполнено условие (γ) , т. е. для симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ с вершинами $A_1, \dots, A_{n+1}$ для любой четверки индексов $i_1 < i_2 < i_3 < i_4$ выполняются равенства

$$|A_{i_1}A_{i_2}| + |A_{i_3}A_{i_4}| = |A_{i_1}A_{i_3}| + |A_{i_2}A_{i_4}| = |A_{i_2}A_{i_3}| + |A_{i_1}A_{i_4}|. \quad (4)$$

Докажем, что $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$. Для этого рассмотрим полный граф с вершинами $A_1, \dots, A_{n+1}$, ребрами которого являются все ребра симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Применим лемму 1, положив $G = \mathbb{R}$ и выбрав веса $w_{i,j} = |A_iA_j|$ ($i, j = 1, \dots, n+1$, $i \neq j$). В этом случае условия (4) совпадают с условиями (3), т. е. найдено единственное решение $(a_1, \dots, a_{n+1})$ задачи о делении весов. Нужно только проверить условие положительности $a_i > 0$ ($i = 1, \dots, n+1$). Это сразу следует из того, что для любых трех различных индексов i, j, k имеем $a_i = \frac{1}{2}(|A_iA_j| + |A_iAk| - |A_jAk|) > 0$ в силу неравенства треугольника. Импликация $(\gamma) \Rightarrow (\delta)$ доказана.

Докажем импликацию $(\delta) \Rightarrow (\varepsilon)$. Если выполнено утверждение (δ) , то для симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ существует набор положительных чисел $(a_1, \dots, a_{n+1})$, для которого выполняются равенства (2). Для фиксированного параметра λ полагаем

$$h_k = \lambda + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j \neq k; i < j}^{n+1} |A_iA_j| \quad (k = 1, \dots, n+1). \quad (5)$$

Тогда все числа

$$\begin{aligned} a_{k,l} &= h_k + h_l + |A_kA_l| \\ &= 2\lambda + a_k + a_l + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j \neq k; i < j}^{n+1} (a_i + a_j) + \frac{1}{n-1} \sum_{i,j \neq l; i < j}^{n+1} (a_i + a_j) \\ &= 2\lambda + 2(a_1 + \dots + a_{n+1}) \quad (k, l = 1, \dots, n+1, k \neq l) \end{aligned}$$

равны между собой. Следовательно, выполнено условие (α) . Ранее было доказано, что выполнение условия (α) влечет выполнение свойств (β) и (ζ) , а утверждение (ζ) для набора $(h_1, \dots, h_{n+1})$ вида (5) это в точности утверждение (ε) .

Импликация $(\varepsilon) \Rightarrow (\zeta)$ очевидна.

Пусть для симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ и $n(n+1)$ точек $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), построенных на продолжениях ребер этого симплекса по некоторому набору $(h_1, \dots, h_{n+1})$, выполняется свойство (ζ) . Докажем импликацию $(\zeta) \Rightarrow (\alpha)$. Рассмотрим двумерную грань $[A_1, A_2, A_3]$ и проведем через нее двумерную плоскость Π . Сечением сферы, содержащей все точки $A_{k,l}$, плоскостью Π будет окружность S (рис. 2).

Так как $|A_{2,1}A_1| = |A_{3,1}A_1| = h_1$, хорды $[A_{2,1}, A_{1,2}]$ и $[A_{3,1}, A_{1,3}]$ имеют с окружностью S (в точках $A_{2,1}$ и $A_{3,1}$ соответственно) один и тот же угол φ . Поэтому эти две хорды имеют одинаковую длину, т. е. $|A_{2,1}A_{1,2}| = |A_{3,1}A_{1,3}|$. Аналогично из равенства $|A_{3,2}A_2| = |A_{1,2}A_2| = h_2$ следует, что и третья хорда $[A_{3,2}, A_{2,3}]$ имеет с окружностью S в точке $A_{3,2}$ такой же угол φ , поэтому $|A_{2,3}A_{3,2}| = |A_{1,2}A_{2,1}| = |A_{1,3}A_{3,1}|$. То же самое можно сказать и о любой другой тройке отрезков $[A_{i_1,i_2}, A_{i_2,i_1}]$, $[A_{i_1,i_3}, A_{i_3,i_1}]$, $[A_{i_2,i_3}, A_{i_3,i_2}]$, лежащих в двумерной

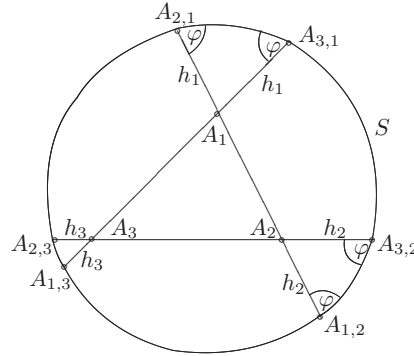


Рис. 2.

плоскости, которая проходит через двумерную грань $[A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}]$. Поэтому в симплексе $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ все числа $a_{k,l} = |A_{k,l} A_{l,k}|$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$) равны между собой. Значит, импликация $(\zeta) \Rightarrow (\alpha)$ доказана. $\square$

4. Следствия и комментарии

Пусть для симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ числа $h_1, \dots, h_{n+1}$ определяются по формуле (5), в которой λ считается равным нулю. Если на продолжениях ребер $[A_k, A_l]$ точки $A_{k,l}$ строятся по такому набору $(h_1, \dots, h_{n+1})$, то $(n-1)$ -мерную сферу, содержащую все такие точки $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), будем называть *сферой Конвея*. Как видно из теоремы 1, сфера Конвея существует не для каждого симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$. Сформулируем основной критерий существования.

Следствие 1. Если набор положительных чисел $(h_1, \dots, h_{n+1})$ задается по формуле

$$h_k = \frac{1}{n-1} \sum_{i,j \neq k; i < j}^{n+1} |A_i A_j| \quad (k = 1, \dots, n+1)$$

и на продолжениях ребер $[A_k, A_l]$ отмечаются точки $A_{k,l}$ так, что $|A_l A_{k,l}| = h_l$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), то $(n-1)$ -мерная сфера Конвея, содержащая все $n(n+1)$ отмеченные точки $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), существует тогда и только тогда, когда существует $(n-1)$ -мерная сфера, касающаяся всех ребер симплекса $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ (полувыписанная сфера).

Поясним роль параметра λ в формуле (5). Эквивалентность утверждений (ε) и (ζ) в теореме 1 означает следующее.

Следствие 2. Если для некоторого набора чисел $(h_1, \dots, h_{n+1})$ на продолжениях ребер $[A_k, A_l]$ отмечаются точки $A_{k,l}$ так, что $|A_l A_{k,l}| = h_l$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), и при этом существует $(n-1)$ -мерная сфера, содержащая все $n(n+1)$ отмеченные точки $A_{k,l}$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k \neq l$), то существует $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что все h_k ($k = 1, \dots, n+1$) вычисляются по формуле (5). При этом центр сферы S_λ , содержащей все точки $A_{k,l}$, является одновременно и центром полувыписанной сферы.

Тем самым в однопараметрическом семействе сфер $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ есть и сфера Конвея, соответствующая значению параметра $\lambda = 0$, и полувыписанная сфера,

соответствующая значению

$$\lambda = -\frac{1}{n} \sum_{i < j}^{n+1} |A_i A_j|.$$

В этом случае будет $A_{i,j} = A_{j,i}$ и все $a_{i,j} = |A_{i,j} A_{j,i}| = 0$ ($i, j = 1, \dots, n+1$, $i < j$). При отрицательных λ некоторые из чисел h_k , вычисляемых по формулам (5), тоже могут стать отрицательными. В этом случае точку $A_{l,k}$ на ребре $[A_k, A_l]$ ($l = 1, \dots, n+1$) следует откладывать на расстоянии $|h_k|$ от A_k в противоположном направлении.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для размерности $n = 2$ утверждения (β) , (γ) , (δ) теоремы 1 становятся тавтологиями, поэтому лучше ее формулировать в таком виде.

Следствие 3. Для любого треугольника $[A_1, A_2, A_3]$ в плоскости E_2 эквивалентны утверждения (α) , (ε) и (ζ) из теоремы 1.

Рассмотрим вопрос о разнообразии симплексов, имеющих сферу Конвея и соответственно полувписанную сферу. Множество последовательностей положительных чисел $(l_k)_{k=1}^{n(n+1)/2}$, для которых существует n -мерный симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}] \subset \mathbb{R}^n$, длины ребер которого равны l_k ($k = 1, 2, \dots, n(n+1)/2$), является открытым подмножеством в $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$. В такой параметризации два различных набора координат $(l_k)_{k=1}^{n(n+1)/2}$ и $(l'_k)_{k=1}^{n(n+1)/2}$ могут параметризовать конгруэнтные симплексы, если $l'_k = l_{i_k}$ для некоторой перестановки индексов $(i_k)_{k=1}^{n(n+1)/2}$. Чтобы исключить это, рассмотрим строго монотонно возрастающие последовательности $(l_k)_{k=1}^{n(n+1)/2}$ и введем другую систему координат $y_1 = l_1$, $y_2 = l_2 - l_1, \dots, y_{n(n+1)/2} = l_{n(n+1)/2} - l_{[n(n+1)/2]-1}$. Такие координаты параметризуют все попарно неконгруэнтные симплексы с различными длинами ребер. Размерность такого многообразия, очевидно, равна $n(n+1)/2$. Симплексы, имеющие ребра одинаковой длины, будут составлять край этого многообразия. Рассмотрим в этом многообразии симплексы, имеющие полувписанную сферу. Из формулы (2) следует, что $l_i = |A_k A_l| = a_k + a_l$ ($k, l = 1, \dots, n+1$, $k < l$) для некоторого набора положительных чисел $(a_k)_{k=1}^{n+1}$ и некоторой взаимно однозначной нумерации $i = i(k, l)$ пар (k, l) , для которой последовательность $(l_i)_{i=1}^{n(n+1)/2}$ становится монотонно возрастающей. Обратно, a_k для любого $k = 1, \dots, n+1$ можно выразить через длины ребер $|A_1 A_2|, |A_1 A_3|, |A_2 A_3|, |A_2 A_4|, \dots, |A_2 A_{n+1}|$ по формулам

$$\begin{aligned} a_1 &= (|A_1 A_2| + |A_1 A_3| - |A_2 A_3|)/2, & a_2 &= (|A_2 A_3| + |A_1 A_2| - |A_1 A_3|)/2, \\ a_3 &= (|A_1 A_3| + |A_2 A_3| - |A_1 A_2|)/2, \\ a_k &= (2|A_2 A_k| + |A_1 A_3| - |A_1 A_2| - |A_2 A_3|)/2 \quad (4 \leq k \leq n+1). \end{aligned}$$

Следовательно, все координаты $(l_i)_{i=1}^{n(n+1)/2}$ симплекса, имеющего полувписанную сферу, однозначно выражаются через $n+1$ координат $l_{i(1,2)}, l_{i(1,3)}, l_{i(2,3)}, l_{i(2,4)}, \dots, l_{i(2,n+1)}$. Поэтому имеет место

Следствие 4. Множество попарно неконгруэнтных n -мерных симплексов ($n \geq 3$), имеющих полувписанную сферу, является $(n+1)$ -мерным подмногообразием в $[n(n+1)/2]$ -мерном многообразии всех n -мерных симплексов.

В заключение приведем чисто геометрическую характеристику симплексов, имеющих полувписанную сферу.

Следствие 5. Симплекс $[A_1, \dots, A_{n+1}]$ ($n \geq 3$) имеет полувписанную $(n-1)$ -мерную сферу тогда и только тогда, когда любая его трехмерная грань является каркасным тетраэдром.

Благодарность. Автор выражает благодарность В. А. Александрову и В. Н. Потапову за обсуждения, которые стимулировали данное исследование.

ЛИТЕРАТУРА

1. De Villiers M. Conway's circle theorem as a special case of a more general side divider theorem // Learning and Teaching Mathematics. 2023. N 34. P. 37–42.
2. Акоюн А. В. Геометрия в картинках. М.: МЦНМО, 2011.
3. Braude E. Conway's circle theorem: A short proof enabling generalization to polygons // 2021. arXiv:2111.01835 [math.GM].
4. García Capitán F. J. A generalization of the Conway circle // Forum Geom. 2013. V. 13. P. 191–195.
5. Александров В. А. Задача M2747 из Задачника «Кванта» // Квант. 2023. № 5. С. 28.
6. Александров В. А. Решение задачи M2747 из Задачника «Кванта» // Квант. 2023. № 8. С. 17–18.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия. Стереометрия. 3-е изд.. М.: Физматлит, 2015.

Поступила в редакцию 16 января 2024 г.

После доработки 17 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Малюгин Сергей Артемьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mal@math.nsc.ru

УДК 512.548

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ ГРУППОИДЫ

М. А. Первухин, А. А. Степанова,
Н. В. Трикашная

Аннотация. Вводится понятие частично упорядоченной абелевой алгебры, которое является естественным обобщением понятия абелевой алгебры. Приводится описание частично упорядоченных абелевых группоидов с единицей, конечных квазигрупп, регулярных полугрупп, полупростых полугрупп и полугрупп, в которых существуют минимальные левый и правый идеалы.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.409

Ключевые слова: частично упорядоченная абелева алгебра, группоид, квазигруппа, полугруппа.

Введение

Алгебра называется *абелевой*, если она удовлетворяет так называемому термальному условию. Легко понять, что группа является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда она коммутативна. Также нетрудно показать, что унарные алгебры и модули являются абелевыми алгебрами. Абелевы группоиды изучались в [1–6]. Более точно, абелевы полугруппы впервые исследовались в [1, 2]. В [3] дано полное описание структуры абелевых полугрупп; более детальные структурные теоремы для абелевых регулярных и периодических полугрупп приведены в [3]; для абелевых полупростых полугрупп — в [4]; для абелевых полугрупп с условием минимальности односторонних главных идеалов — в [5]. В [5], кроме того, приведено описание конечных абелевых квазигрупп и абелевых группоидов с единицей. В [6] описаны абелевы группоиды $\langle A, \cdot \rangle$, для которых $|A \cdot A| \leq 3$.

В данной работе вводится понятие частично упорядоченной абелевой алгебры, которое является естественным обобщением понятия абелевой алгебры. Приводится описание частично упорядоченных абелевых группоидов с единицей, конечных квазигрупп, регулярных полугрупп, полупростых полугрупп и полугрупп, в которых существуют минимальный левый и правый идеалы.

1. Предварительные сведения

Алгебра $\mathcal{A} = \langle A, \Sigma \rangle$ называется *абелевой*, если она удовлетворяет термальному условию, т. е. для любого терма $t(x, y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры Σ и любых

Работа выполнена в Дальневосточном центре математических исследований при финансовой поддержке Минобрнауки России, соглашение № 075-02-2024-1440 от 28 февраля 2024 года по реализации программ развития региональных научно-образовательных математических центров.

$u, v, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in A$ из равенства $t(u, c_1, \dots, c_n) = t(u, d_1, \dots, d_n)$ следует $t(v, c_1, \dots, c_n) = t(v, d_1, \dots, d_n)$.

Алгебра $\langle A, \cdot \rangle$ где $\cdot$ — бинарная операция, называется *группоидом*. В выражениях вида $a \cdot b$, где $a, b \in A$, знак операции $\cdot$, как правило, будет опускаться. Элемент $e \in A$ называется *единицей* группоида $\langle A, \cdot \rangle$, если $ae = ea = a$ для любого $a \in A$. Группоид с ассоциативной бинарной операцией называется *полугруппой*.

Факт 1 [5]. Группоид с единицей $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ является абелевой алгеброй тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — коммутативная полугруппа такая, что для любых $a, b \in A$ уравнение $ax = b$ имеет не более одного решения в $\langle A, \cdot \rangle$.

Группоид $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ называется *квазигруппой*, если для любых $a, b \in A$ существуют единственные элементы $x, y \in A$, такие что $x \cdot a = b$, $a \cdot y = b$. Для квазигруппы $\mathcal{A}$ введем обозначения [7]:

$$R_a(x) = xa, \quad L_a(x) = ax, \quad x + y = R_a^{-1}(x) \cdot L_a^{-1}(x), \\ r_a(x) + a = R_a^{-1}(x), \quad l_a(x) + a = L_a^{-1}(x).$$

Факт 2 [5]. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ — конечная квазигруппа и $a \in A$. Алгебра $\mathcal{A}$ является абелевой тогда и только тогда, когда

- 1) $\langle A, + \rangle$ — абелева группа;
- 2) $r_a(x)$ и $l_a(x)$ — автоморфизмы $\langle A, + \rangle$.

Следующие определения можно найти в [8]. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ — полугруппа. Подполугруппа $\mathcal{B} = \langle B, \cdot \rangle$ полугруппы $\mathcal{A}$ называется *правым (левым) идеалом* $\langle A, \cdot \rangle$, если $ba \in B$ ($ab \in B$) для любых $a \in A$, $b \in B$. Правый или левый идеал полугруппы $\mathcal{A}$ называется *односторонним*. Правый и левый идеал полугруппы $\mathcal{A}$ называется *идеалом*. Идеал $\langle aA, \cdot \rangle$ ($\langle Aa, \cdot \rangle$) полугруппы $\mathcal{A}$ называется *главным правым (левым) идеалом* $\mathcal{A}$. Правый (левый) идеал полугруппы $\mathcal{A}$ называется *минимальным*, если он минимален относительно $\subseteq$ на множестве всех правых (левых) идеалов полугруппы $\mathcal{A}$. Элемент $a \in A$ называется *идемпотентом* полугруппы $\mathcal{A}$, если $a^2 = a \cdot a = a$. Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *прямоугольной связкой полугрупп*, если существует семейство $\{A_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$, являющееся разбиением множества A , причем $\langle A_{i\lambda}, \cdot \rangle$ — подполугруппы полугруппы $\mathcal{A}$ и для любых $i \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ выполняется включение $A_{i\lambda} \cdot A_{j\mu} \subseteq A_{i\mu}$. Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *раздуванием* полугруппы $\mathcal{B} = \langle B, \cdot \rangle$, если существует разбиение $\{X_a \mid a \in B\}$ множества A такое, что $a \in X_a$ и $xu = ab$ для любых $a, b \in B$, $x \in X_a$, $y \in X_b$.

Факт 3 [5]. Если полугруппа $\mathcal{A}$ является раздуванием прямоугольной связки абелевых групп и произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ — абелева алгебра.

Факт 4 [5]. Пусть все односторонние главные идеалы полугруппы $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ минимальны. Тогда полугруппа $\mathcal{A}$ является абелевой алгеброй в том и только в том случае, когда $\mathcal{A}$ — раздувание прямоугольной связки абелевых групп и произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$.

Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *полугруппой правых (левых) нулей*, если $ab = b$ ($ab = a$) для любых $a, b \in A$. Элемент $a \in A$ называется *регулярным*, если для любого $a \in A$ найдется $b \in A$ такой, что $a = aba$. Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *регулярной*, если все элементы $\mathcal{A}$ регулярны. Полугруппа $\mathcal{A}$ называется *полупростой*, если $B^2 = B$ для любого идеала $\mathcal{B} = \langle B, \cdot \rangle$ полугруппы $\mathcal{A}$.

Факт 5 [4]. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ — регулярная или полупростая полугруппа. Тогда $\mathcal{A}$ является абелевой алгеброй в том и только в том случае, когда $\langle A, \cdot \rangle \cong \langle G, \cdot \rangle \times \langle I, \cdot \rangle \times \langle \Lambda, \cdot \rangle$, где $\langle G, \cdot \rangle$ — абелева группа, $\langle I, \cdot \rangle$ — полугруппа левых нулей, $\langle \Lambda, \cdot \rangle$ — полугруппа правых нулей.

Пусть $\langle A; \Sigma \rangle$ — алгебра. Алгебраическая система $\langle A; \Sigma, \leq \rangle$, где $\langle A; \leq \rangle$ — частично упорядоченное множество, называется *частично упорядоченной алгеброй* [9], если для любого функционального символа $F^{(n)} \in \Sigma$ и любых $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in A$ неравенства $a_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq b_n$ влекут неравенство

$$F(a_1, \dots, a_n) \leq F(b_1, \dots, b_n).$$

Частично упорядоченная алгебра $\mathcal{A} = \langle A; \Sigma, \leq \rangle$ называется *частично упорядоченной абелевой алгеброй*, если для любого термина $t(x, y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры Σ и любых $u, v, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in A$ из неравенства $t(u, c_1, \dots, c_n) \leq t(u, d_1, \dots, d_n)$ следует неравенство $t(v, c_1, \dots, c_n) \leq t(v, d_1, \dots, d_n)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\langle A; \Sigma, \leq \rangle$ — частично упорядоченная абелева алгебра, то $\langle A; \Sigma \rangle$ — абелева алгебра.

2. Частично упорядоченные абелевы группоиды с единицей и конечные квазигруппы

Теорема 1. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченный группоид с единицей. Тогда $\mathcal{A}$ — частично упорядоченный абелев группоид в том и только в том случае, когда $\langle A, \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа и из $ac_1 \leq ac_2$ следует $c_1 \leq c_2$ для любых $a, c_1, c_2 \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathcal{A}$ — частично упорядоченный абелев группоид, e — единица $\mathcal{A}$. По замечанию 1 $\langle A, \cdot \rangle$ — абелев группоид. По факту 1 $\langle A, \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа. Предположим, что $ac_1 \leq ac_2$, где $a, c_1, c_2 \in A$. Тогда по определению частично упорядоченной абелевой алгебры $ec_1 \leq ec_2$, т. е. $c_1 \leq c_2$.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Покажем, что уравнение $ax = b$, где $a, b \in A$, имеет не более одного решения. Пусть $ax_1 = ax_2$. Тогда $ax_1 \leq ax_2$ и $ax_1 \geq ax_2$. Следовательно, по условию $x_1 \leq x_2$ и $x_1 \geq x_2$, т. е. $x_1 = x_2$. Так как $\langle A, \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа и для любых $a, b \in A$ уравнение $ax = b$ имеет не более одного решения в $\langle A, \cdot \rangle$, то по факту 1 $\langle A, \cdot \rangle$ — абелев группоид. Пусть $t(x, \bar{y})$ — терм сигнатуры $\{\cdot\}$, $\bar{y} = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$. Поскольку $\langle A, \cdot \rangle$ — коммутативная полугруппа, в теории $Th(\langle A, \cdot \rangle)$ терм $t(x, \bar{y})$ эквивалентен терму $x^k y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_n^{k_n}$ для некоторых $k, k_1, \dots, k_n \in \omega$. Предположим, что $t(u, \bar{c}) \leq t(u, \bar{d})$, где $u, \bar{c}, \bar{d} \in A$, $\bar{c} = \langle c_1, \dots, c_n \rangle, \bar{d} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle$, т. е. $u^k c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} \leq u^k d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_n^{k_n}$. Тогда по условию $c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} \leq d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_n^{k_n}$. Следовательно, $v^k c_1^{k_1} c_2^{k_2} \dots c_n^{k_n} \leq v^k d_1^{k_1} d_2^{k_2} \dots d_n^{k_n}$, т. е. $t(v, \bar{c}) \leq t(v, \bar{d})$ для любых $v \in A$. Таким образом, $\mathcal{A}$ — частично упорядоченный абелев группоид.

Лемма 1. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — конечная частично упорядоченная квазигруппа. Тогда порядок $\leq$ на A тривиальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют элементы $a_1, a_2 \in A$ такие, что $a_1 < a_2$. Так как $\langle A, \cdot \rangle$ — квазигруппа, существует $b \in A$ такой, что $a_2 = a_1 \cdot b$. Из $a_1 < a_2$ следует $a_1 \cdot b \leq a_2 \cdot b$. Если $a_1 \cdot b = a_2 \cdot b$, то по определению квазигруппы $a_1 = a_2$; противоречие. Следовательно, $a_1 \cdot b < a_2 \cdot b$. Пусть $a_3 = a_2 \cdot b$. Тогда $a_2 = a_1 b < a_2 b = a_3$, т. е. $a_1 < a_2 < a_3$. Неравенство $a_2 b \leq$

a_3b строгое, что доказывается так же, как строгость неравенства $a_1b \leq a_2b$. Полагаем $a_4 = a_3b$. Продолжая этот процесс, можно построить бесконечную цепь $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$, что противоречит конечности A .

Из факта 2 и леммы 1 следует

Теорема 2. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченная конечная квазигруппа, $a \in A$. Тогда $\mathcal{A}$ — частично упорядоченная абелева квазигруппа в том и только в том случае, когда

- (1) $\langle A, + \rangle$ — абелева группа;
- (2) $r_a(x)$ и $l_a(x)$ — автоморфизмы $\langle A, + \rangle$;
- (3) порядок на $\leq$ на A тривиален.

3. Частично упорядоченные абелевы полугруппы

Лемма 2. Пусть $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева полугруппа, $a \in A$. Если Aa (aA) — минимальный левый (правый) идеал, то Ab (bA) — минимальный левый (правый) идеал для любого элемента $b \in A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия леммы выполняются, Aa — минимальный левый идеал и $b \in A$. Покажем, что $Ab = Acb$ для любого $c \in A$. Включение $Acb \subseteq Ab$ очевидно. Покажем, что $Ab \subseteq Acb$. Предположим, что $a_1b \in Ab$. Так как Aa — минимальный левый идеал, то $Aa = Aca$. Так как $a_1a \in Aa$, то $a_1a = d(ca) = (dc)a$ для некоторого $d \in A$. Так как $\langle A, \cdot \rangle$ — абелев группоид, имеем $a_1b = dc b$. Следовательно, $a_1b \in Acb$ и включение $Ab \subseteq Acb$ доказано. Таким образом, $Ab = Acb$ и Ab — минимальный левый идеал.

Аналогично доказывается, что если aA — минимальный правый идеал, то bA — минимальный правый идеал для любого $b \in A$.

Лемма 3. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ — абелева полугруппа. Тогда для любого идемпотента $f \in A$ и любых элементов a, b из A выполняется равенство $ab = afb$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a, b \in A$ и $f \in A$ — идемпотент. Тогда $af = aff$. Так как полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ абелева, то $ab = afb$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченная полугруппа и полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием прямоугольной связки абелевых групп;
- 2) произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$;
- 3) для любых идемпотентов $e, f, g \in A$ и любых элементов $u, v, a \in A$ из $gue \leq auf$ следует $gve \leq avf$. Тогда $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — абелева алгебра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия леммы выполнены, полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием полугруппы $\langle B, \cdot \rangle$, $\langle B, \cdot \rangle$ — прямоугольная связка абелевых групп $\langle B_{i\lambda}, \cdot \rangle$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, $e_{i\lambda}$ — единица $\langle B_{i\lambda}, \cdot \rangle$. По факту 3 $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева алгебра. Покажем, что $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ также является абелевой алгеброй. Пусть $u, v, b, b_1, b_2, c, c_1, c_2 \in A$.

Покажем, что

$$ub \leq uc \Rightarrow vb \leq vc. \quad (1)$$

Пусть $ub \leq uc$. Поскольку $\langle A, \cdot \rangle$ — раздувание $\langle B, \cdot \rangle$, существуют $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ и $u' \in B_{i\lambda}$ такие, что $ub = u'b$ и $uc = u'c$. Тогда $u'b \leq u'c$. Поскольку $\langle B_{i\lambda}, \cdot \rangle$ — абелева группа, $(u')^{-1}u'b \leq (u')^{-1}u'c$, т. е. $e_{i\lambda}b \leq e_{i\lambda}c$, где $(u')^{-1}$ — элемент, обратный к u' в группе $\langle B_{i\lambda}, \cdot \rangle$. Следовательно, $ve_{i\lambda}b \leq ve_{i\lambda}c$. По лемме 3 $vb \leq vc$.

Аналогично доказывается, что

$$bu \leq cu \Rightarrow bv \leq cv. \quad (2)$$

Покажем, что

$$b_1ub_2 \leq c_1uc_2 \Rightarrow b_1vb_2 \leq c_1vc_2. \quad (3)$$

Предположим, что $b_1ub_2 \leq c_1uc_2$. Поскольку $\langle A, \cdot \rangle$ — раздувание $\langle B, \cdot \rangle$, существуют $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ и $b'_2 \in B_{i\lambda}$ такие, что $ub_2 = ub'_2$. Тогда по лемме 3 $b_1ub_2 = b_1ub'_2 = b_1e_{i\lambda}ue_{i\lambda}e_{i\lambda}b'_2e_{i\lambda}e_{i\lambda}$. По определению прямоугольной связки $e_{i\lambda}ae_{i\lambda} \in B_{i\lambda}$ для любого $a \in A$. Поскольку $\langle B_{i\lambda}, \cdot \rangle$ — абелева группа, имеем

$$b_1(e_{i\lambda}ue_{i\lambda})(e_{i\lambda}b'_2e_{i\lambda})e_{i\lambda} = b_1(e_{i\lambda}b'_2e_{i\lambda})(e_{i\lambda}ue_{i\lambda})e_{i\lambda}.$$

По лемме 3

$$b_1(e_{i\lambda}b'_2e_{i\lambda})(e_{i\lambda}ue_{i\lambda})e_{i\lambda} = b_1b'_2ue_{i\lambda},$$

т. е. $b_1ub_2 = bue_{i\lambda}$ для некоторого $b \in B$. Аналогично $b_1vb_2 = bve_{i\lambda}$ и $c_1uc_2 = cve_{j\mu}$, $c_1vc_2 = cve_{j\mu}$ для некоторых $c \in B$, $j \in I$, $\mu \in \Lambda$. Следовательно, $bue_{i\lambda} \leq cve_{j\mu}$. Осталось доказать, что $bve_{i\lambda} \leq cve_{j\mu}$. Так как $b \in B$, существуют $k \in I$, $\nu \in \Lambda$ такие, что $b \in B_{k\nu}$. Пусть b^{-1} — элемент, обратный к b в группе $\langle B_{k\nu}, \cdot \rangle$. Тогда

$$e_{k\nu}bue_{i\lambda} = bue_{i\lambda} \leq cve_{j\mu} = ce_{k\nu}ue_{j\mu} = cb^{-1}bue_{j\mu},$$

т. е.

$$e_{k\nu}(bu)e_{i\lambda} \leq cb^{-1}(bu)e_{j\mu}.$$

По условию 3 теоремы получаем

$$e_{k\nu}(bv)e_{i\lambda} \leq cb^{-1}(bv)e_{j\mu}.$$

Следовательно,

$$bve_{i\lambda} \leq ce_{i\lambda}ve_{j\mu}.$$

Тогда по лемме 3 $bve_{i\lambda} \leq cve_{j\mu}$.

Из (1)–(3) следует, что для любого терма $t(x, y_1, \dots, y_n)$ сигнатуры $\{\cdot\}$ и любых $u, v, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in A$ из неравенства $t(v, c_1, \dots, c_n) \leq t(v, d_1, \dots, d_n)$ следует неравенство $t(u, c_1, \dots, c_n) \leq t(u, d_1, \dots, d_n)$, т. е. $\mathcal{A}$ — частично упорядоченная абелева группа.

Теорема 4. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченная полугруппа, в которой существуют минимальные левый и правый идеалы. Тогда $\mathcal{A}$ — частично упорядоченная абелева алгебра в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

- 1) полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием прямоугольной связки абелевых групп,
- 2) произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$,
- 3) для любых идемпотентов $e, f, g \in A$ и любых элементов $u, v, a \in A$ из $gue \leq aue$ следует $gve \leq ave$.

Доказательство. Пусть условия теоремы выполняются.

Необходимость. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченная абелева алгебра. Тогда по замечанию 1 $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева полугруппа. По лемме 2 все односторонние главные идеалы полугруппы $\langle A, \cdot \rangle$ минимальны. Следовательно, по факту 4 полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является раздуванием прямоугольной связки абелевых групп и произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$. Из определения частично упорядоченной абелевой алгебры следует выполнение условия 3.

Достаточность следует из теоремы 3.

Лемма 4. Полугруппа $\mathcal{A} = \langle A, \cdot \rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп, причем произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \cong G \times I \times \Lambda$, где G — абелева группа, I — полугруппа левых нулей, Λ — полугруппа правых нулей.

Доказательство. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть полугруппа $\mathcal{A}$ — прямоугольная связка абелевых групп $\mathcal{A}_{i\lambda} = \langle A_{i\lambda}, \cdot \rangle$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, и произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$. Единицу группы $\mathcal{A}_{i\lambda}$ обозначим через $e_{i\lambda}$ для всех $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Поскольку $\mathcal{A}$ — прямоугольная связка абелевых групп и произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$, то $e_{i\lambda}e_{j\mu} = e_{i\mu}$ для всех $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$.

Для произвольных $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ покажем, что отображение $\alpha_{i\lambda}^{j\mu} : A_{i\lambda} \rightarrow A_{j\mu}$ такое, что $\alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a) = e_{j\mu}ae_{j\mu}$, где $a \in A_{i\lambda}$, является изоморфизмом из абелевой группы $\mathcal{A}_{i\lambda}$ в абелеву группу $\mathcal{A}_{j\mu}$. Пусть $a_1, a_2 \in A_{i\lambda}$. Из равенства $\alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a_1) = \alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a_2)$ следуют равенства $e_{j\mu}a_1e_{j\mu} = e_{j\mu}a_2e_{j\mu}$ и

$$e_{i\lambda}e_{j\mu}e_{i\lambda}a_1e_{i\lambda}e_{j\mu}e_{i\lambda} = e_{i\lambda}e_{j\mu}e_{i\lambda}a_2e_{i\lambda}e_{j\mu}e_{i\lambda},$$

т. е. $e_{i\lambda}a_1e_{i\lambda} = e_{i\lambda}a_2e_{i\lambda}$. Так как $a_1, a_2 \in A_{i\lambda}$, то $a_1 = a_2$. Значит, α — инъекция. Сюръективность отображения α следует из равенства $\alpha_{i\lambda}^{j\mu}(e_{i\lambda}e_{j\mu}a'e_{j\mu}e_{i\lambda}) = a'$, где $a' \in A_{j\mu}$. Из равенств

$$\begin{aligned} \alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a_1a_2) &= e_{j\mu}a_1a_2e_{j\mu} = e_{j\mu}e_{i\lambda}a_1e_{i\lambda}e_{j\mu}e_{j\mu}e_{i\lambda}a_2e_{i\lambda}e_{j\mu} \\ &= \alpha_{i\lambda}^{j\mu}(e_{i\lambda}a_1e_{i\lambda})\alpha_{i\lambda}^{j\mu}(e_{i\lambda}a_2e_{i\lambda}) = \alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a_1)\alpha_{i\lambda}^{j\mu}(a_2), \end{aligned}$$

где $a_1, a_2 \in A_{i\lambda}$, следует, что $\alpha_{i\lambda}^{j\mu}$ — гомоморфизм. Таким образом, $\mathcal{A}_{i\lambda} \cong \mathcal{A}_{j\mu}$.

Зафиксируем $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Через $\mathbf{G} = \langle G, \cdot \rangle$ обозначим группу $\mathcal{A}_{i\lambda}$, через $\mathbf{I} = \langle I, \cdot \rangle$ — полугруппу левых нулей, через $\mathbf{\Lambda} = \langle \Lambda, \cdot \rangle$ — полугруппу правых нулей. Покажем, что отображение $\beta : A \rightarrow G \times I \times \Lambda$ такое, что $\beta(a) = (\alpha_{j\mu}^{i\lambda}(a), j, \mu)$ для любого $a \in A_{j\mu}$, определяет изоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathbf{G} \times \mathbf{I} \times \mathbf{\Lambda}$. Ясно, что β — биекция. Пусть $a \in A_{j\mu}$, $b \in A_{k\nu}$. Тогда $ab \in A_{j\nu}$ и выполняются равенства

$$\begin{aligned} \beta(ab) &= (\alpha_{j\nu}^{i\lambda}(ab), j, \nu) = (e_{i\lambda}abe_{i\lambda}, j, \nu) = (e_{i\lambda}ae_{i\lambda}e_{i\lambda}be_{i\lambda}, j, \nu) \\ &= (\alpha_{j\mu}^{i\lambda}(a)\alpha_{k\nu}^{i\lambda}(b), j, \nu) = (\alpha_{j\mu}^{i\lambda}(a), j, \mu)(\alpha_{k\nu}^{i\lambda}(b), k, \nu) = \beta(a)\beta(b). \end{aligned}$$

Следовательно, β — гомоморфизм. Таким образом, β — изоморфизм.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A} \cong \mathbf{G} \times \mathbf{I} \times \mathbf{\Lambda}$, где $\mathbf{G}$ — абелева группа, $\mathbf{I}$ — полугруппа левых нулей, $\mathbf{\Lambda}$ — полугруппа правых нулей. Для любых $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$ через $\mathcal{A}_{i\lambda}$ обозначим группу $\mathbf{G} \times \langle \{i\}, \cdot \rangle \times \langle \{\lambda\}, \cdot \rangle$. Тогда полугруппа $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I, \lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_{i\lambda}$ — прямоугольная связка абелевых групп $\mathcal{A}_{i\lambda}$. Идемпотентами полугруппы $\mathcal{A}$ являются элементы (e, i, λ) , где e — единица группы $\mathbf{G}$.

Поскольку $(e, i, \lambda)(e, j, \mu) = (e, i, \mu)$, произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$.

Следствие 1. Пусть $\mathcal{A} = \langle A, \cdot, \leq \rangle$ — частично упорядоченная полугруппа и $\langle A, \cdot \rangle$ — регулярная или полупростая полугруппа. Тогда $\mathcal{A}$ — частично упорядоченная абелева алгебра в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:

- 1) полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ является прямоугольной связкой абелевых групп,
- 2) произведение идемпотентов из $\mathcal{A}$ является идемпотентом $\mathcal{A}$,

3) для любых идемпотентов $e, f, g \in A$ и любых элементов $u, v, a \in A$ из $gue \leq auf$ следует $gve \leq avf$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия следствия выполняются.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\mathcal{A}$ — частично упорядоченная абелева алгебра. По замечанию 1 $\langle A, \cdot \rangle$ — абелева алгебра. Из факта 5 и леммы 4 следует, что полугруппа $\langle A, \cdot \rangle$ удовлетворяет условиям 1 и 2 следствия. Из определения частично упорядоченной абелевой алгебры следует выполнение условия 3 следствия.

ДОСТАТОЧНОСТЬ следует из теоремы 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor W. Some applications of the term condition // Algebra Univers. 1982. V. 14. P. 11–24.
2. McKenzie R. The number of non-isomorphic models in quasi-varieties of semigroups // Algebra Univers. 1983. V. 16. P. 195–203.
3. Warne R. J. Semigroups obeying the term conditions // Algebra Univers. 1994. V. 31. P. 113–123.
4. Warne R. J. TC semigroups inflations // Semigroup forum. 1997. V. 54, N 3. P. 271–277.
5. Степанова А. А., Трикашная Н. В. Абелевы и гамильтоновы группоиды // Фундам. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 7. С. 165–177.
6. Овчинникова Е. В. Об абелевых группоидах с образами малой мощности // Алгебра и теория моделей. Сб. статей. НГТУ. 2005. С. 125–131.
7. Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.
8. Клиффорд А. Х., Престон Г. Б. Алгебраическая теория полугрупп. М.: Мир, 1972.
9. Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию 19 февраля 2024 г.

После доработки 19 февраля 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Первухин Михаил Александрович, (ORCID 0000-0003-2991-1214)

Степанова Алена Андреевна (ORCID 0000-0001-7484-4108),

Трикашная Наталия Вячеславовна

Дальневосточный федеральный университет,

Институт математики и компьютерных технологий,

п. Аякс, 10, о. Русский, Владивосток 690922

pervukhin.ma@dvfu.ru, stepltd@mail.ru, trikashnaya.nvy@dvfu.ru

УДК 517.95

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПО ГРАНИЧНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ДАННЫМ

С. Г. Пятков, О. А. Солдатов

Аннотация. Рассматривается параболическое уравнение второго порядка и вопросы о корректности в пространствах Соболева обратных задач определения коэффициента теплопередачи по набору интегралов по части границы этой области. Показано, что при определенных условиях на данные решение задачи существует локально по времени, единственно и непрерывно зависит от данных задачи. Метод является конструктивным и на основе предложенного подхода возможно построение численных методов решения задачи. Доказательство использует априорные оценки и теорему о неподвижной точке.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.410

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

1. Введение

Рассмотрим параболическое уравнение второго порядка вида

$$Mu = u_t - Lu = f(x, t), \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (1)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - a_0 u,$$

$G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂G . Пусть граница области разделена на две открытые (в относительной топологии на G) части Γ_0, Γ_1 такие, что $\overline{\Gamma_0} \cup \overline{\Gamma_1} = \partial G$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями

$$R_i u|_{S_i} = g_i \quad (i = 0, 1), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (2)$$

где

$$R_1 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma_1(x, t) u, \quad R_0 u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, t) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma_0(x, t) u$$

и $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали. Коэффициент σ_0 в (2) имеет вид

$$\sigma_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \Phi(t, x),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 22-11-20031).

© 2024 Пятков С. Г., Солдатов О. А.

где функции α_i подлежат определению, а функции $\{\Phi_i\}$ известны и по сути это некоторый базис. Условия на них будут сформулированы ниже. Условия для определения функций $\{\alpha_i\}$ имеют вид

$$\int_{\Gamma_0} u(t, x) \varphi_i(x) d\Gamma_0 = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (3)$$

Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), (3), и функций $\{\alpha_i(t)\}$.

Обратные задачи об определении граничных режимов возникают в самых различных областях математической физики, в частности, при моделировании процессов теплопередачи и конструировании теплозащитных материалов, моделировании свойств и тепловых режимов композитных материалов, моделировании тепловых режимов почв в криолитозоне, в задачах экологии (см. [1–3]). Основное внимание уделено численным методам решения конкретных прикладных задач. Главное дополнительное условие состоит в замерах температур в некотором наборе точек, лежащем внутри области или на ее границе. Эти задачи по определению коэффициента теплопередачи корректны, как правило, только в случаях, если точки замеров лежат на границе области (см. [4]). Отметим также работы [5, 6], где в модельном случае получена теорема единственности классических решений об определении коэффициента теплопередачи вида $\sigma(t)$ как по точечному условию вида $u(t, x_0) = \alpha(t)$, так и по интегральному условию вида (3). Точечное условие переопределения также использовалось в [7] в случае $n = 1$ в задаче определения коэффициента $\sigma(t)$ в граничном условии вида

$$-u_x + \sigma(t)u(t, 0) = f_1, \quad -u_x + \sigma(t)u(t, 1) = f_2, \quad x \in (0, 1), \quad t \geq 0. \quad (4)$$

Интегральные условия переопределения вида (3) часто используются как некоторые приближения точечных условий переопределения. В частности, в таком качестве они используются в работах [8, 9] уже в многомерном случае, в том числе и при построении численного решения задачи. В одномерном случае интегральные условия вида (3) заменялись другими условиями, в частности, в [10] (граничные условия имеют вид (4)) условием вида $\gamma_0 u(t, 0) + \gamma_1 u(1, t) = \beta(t)$, а в [11] — условием вида $u^2(t, 0) + u^2(1, t) = \beta(t)$. В литературе также возникали задачи с нелинейными условиями вида

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \sigma(t)g(u),$$

где определению подлежит функция $\sigma(t)$ и часто условия переопределения вида (3) заменялись на нелинейные вида

$$\int_{\Gamma} F(u) d\Gamma = \psi(t), \quad F(u) = \int_0^u g(\xi) d\xi$$

(см. [12]) или вида $F(u)(0, t) + F(u)(1, t) = E(t)$ в случае $n = 1$ (см. [13]). По-видимому, такие постановки связаны с тем, что в этом случае для решения обратной задачи имеют место априорные оценки при условии, что функция $\sigma(t)$ имеет подходящий знак. Однако даже это не позволяет исследовать вопросы разрешимости аналогов задачи (1)–(3) в нелинейном случае (равно как и в линейном). Отметим серию работ [9, 7, 14–16], где граничное условие имеет вид

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + g(u),$$

условие переопределения представимо в виде

$$F(u) = \int_0^u g(\xi) d\xi = \psi(t),$$

а определению подлежит функция g . Довольно полную библиографию можно найти в работе [9]. Стандартный подход к исследованию задачи (1)–(3) состоит в том, что задача сводится к задаче управления [8] и минимизация соответствующего функционала осуществляется в классе знакоопределенных функций σ_0 . В этом случае полученные оценки позволяют осуществить предельный переход и показать разрешимость этой задачи управления. Однако она далеко не эквивалентна исходной обратной задаче. Единственная работа, где в случае интегральных условий переопределения вида (3) (линейных или нелинейных) есть эквивалентность и разрешимость обратной задачи показана, это [13], где $n = 1$ и интеграл по границе заменяется суммой $F(u(0, t)) + F(u(l, t)) = E(t)$ ($x \in (0, l)$, $t > 0$). Насколько нам известно, теорем существования и единственности решений задачи (1)–(3) ранее не было, в отличие от соответствующих задач управления. Вопросы корректности задачи определения коэффициента σ_0 по данным вида (3), но где интеграл берется не по части границы, а по области G в отличие от нашего случая, были рассмотрены в работе [17]. Интегралы по области G в виде дополнительных условий рассматривались также в работах [18, 19], но здесь восстанавливались функции g_i ($i = 1, 2$) а не коэффициент теплопередачи σ_0 . В данной работе рассмотрена задача вида (1)–(3) в цилиндрической пространственной области G и при определенных условиях показана корректность задачи в пространствах Соболева. Области такого типа наиболее часто возникают в приложениях и при численном моделировании.

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Через $L_p(G; E)$ (G — область в $\mathbb{R}^n$) обозначается пространство измеримых функций, определенных на G со значениями в E , снабженное конечной нормой $\|u(x)\|_E \|_{L_p(G)}$ [20]. Также используются пространства $C^k(\overline{G})$, состоящие из функций, имеющих в G все производные до порядка k включительно, непрерывные в G и допускающие непрерывное продолжение на замыкание $\overline{G}$. Обозначения для пространств Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и т. д. стандартные (см. [20, 21]). Если $E = \mathbb{C}$ или $E = \mathbb{C}^n$, то последнее пространство обозначаем просто через $W_p^s(Q)$. Аналогично вместо $W_p^s(G; E)$ или $C^k(\overline{G}; E)$ используем обозначение $W_p^s(G)$ или $C^k(\overline{G})$. Таким образом, включение $u \in W_p^s(G)$ (или $u \in C^k(\overline{G})$) для данной вектор-функции $u = (u_1, u_2, \dots, u_k)$ означает, что каждая из компонент u_i принадлежит пространству $W_p^s(G)$ (или $C^k(\overline{G})$). В этом случае под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Пусть Γ — гладкая поверхность размерности $n-1$ и $S = (0, T) \times \Gamma$. Тогда соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Определения пространств Гёльдера $C^{\alpha,\beta}(\overline{Q})$, $C^{\alpha,\beta}(\overline{S})$ могут быть найдены, например, в [22]. Пусть

$$(u, v) = \int_G u(x) \overline{v(x)} dx.$$

Все пространства и коэффициенты уравнений предполагаются вещественными. Через $\rho(N, M)$ обозначаем расстояние между множествами $N, M \subset \mathbb{R}^n$.

Пусть $G = \Omega \times (0, l)$ — ограниченная цилиндрическая область с границей Γ , $S = (0, T) \times \Gamma$, $Q_\gamma = (0, \gamma) \times G$, $S_\gamma = (0, \gamma) \times \partial G$. Здесь Ω — ограниченная область с границей класса C^2 . Выбор цилиндрической области связан с тем фактом, что такая постановка часто встречается в практических задачах. Пусть $S_0 = (0, T) \times \Omega$, $\Gamma_1 = \partial\Omega \times (0, l)$, $S_1 = (0, T) \times \Gamma_1$, $S_1^\phi = (0, \phi) \times \Gamma_1$, $S_0^\phi = (0, \phi) \times \Omega$.

Говорят, что v принадлежит классу $W_p^{s, 2s}(S)$, если

$$v|_{S_1} \in W_p^{s, 2s}(S_1), \quad v(t, x', 0), v(t, x', l) \in W_p^{s, 2s}(S_0) \quad (x' = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})).$$

Под нормой в пространстве $W_p^{s, 2s}(S)$ понимаем соответствующую сумму норм.

В пространстве $W_p^s(\alpha, \beta; E)$ ($s \in (0, 1)$, E — банахово пространство) будем использовать норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(\alpha, \beta; E)} = (\|q\|_{L_p(\alpha, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, p}^p)^{1/p}, \quad \langle q \rangle_{s, p}^p = \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2.$$

Если $E = \mathbb{C}$, то получим обычное пространство $W_p^s(\alpha, \beta)$. При $s \in (0, 1)$ положим

$$\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E) = \{q \in W_p^s(\alpha, \beta; E) : (t - \alpha)^{-s} q(t) \in L_p(\alpha, \beta; E)\}.$$

Это банахово пространство с нормой

$$\|q(t)\|_{\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E)}^p = \left\| \frac{q}{(t - \alpha)^s} \right\|_{L_p(\alpha, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, p}^p.$$

Если $s > 1/p$, то все функции q из этого пространства обладают тем свойством, что $q(\alpha) = 0$ и при $s \neq 1/p$ эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(\alpha, \beta; E)}$ эквивалентны для функций $q(t)$ таких, что $q(\alpha) = 0$, если $s > 1/p$. Эквивалентность вытекает, например, из леммы 1 п. 3.2.6 в [20]. Пространства $\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))$, $\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_{\alpha, \beta}) = \widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G)) \cap L_p(\alpha, \beta; W_p^{2s}(G))$ при $s \neq 1/p$ состоят из функций $v(t, x)$ из $W_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))$ и $W_p^{s, 2s}(Q_{\alpha, \beta})$ соответственно таких, что $v(\alpha, x) = 0$, если $s > 1/p$. Нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_{\alpha, \beta})}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(G))}$ определяются естественным образом с использованием вышеприведенной нормы в $\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; E)$. Имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_{\alpha, \beta})}^p &= \left(\int_G \int_\alpha^\beta \frac{|u(x, t)|^p}{(t - \alpha)^{sp}} dt dx \right. \\ &\quad \left. + \int_G \int_\alpha^\beta \int_\alpha^\beta \frac{|u(x, t) - u(x, \tau)|^p}{|t - \tau|^{1+sp}} dt d\tau dx + \|u\|_{L_p(\alpha, \beta; W_p^{2s}(G))}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^s(\alpha, \beta; L_p(\Gamma))$, $\widetilde{W}_p^{s, 2s}(S_{\alpha, \beta})$. Далее во всем тексте, если не оговорено противное, считаем, что $p > n + 2$. Такой выбор параметра p связан с тем, что все формулировки и доказательства значительно упрощаются, другие значения параметра $p \in (1, \infty)$ вполне допустимы и результаты имеют место.

Лемма 1 [23, лемма 2]. Существует постоянная C , не зависящая от $\phi \in (0, T]$, такая, что

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\phi)} &\leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad s_1 = 1 - \frac{1}{2p}, \\ \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\phi)} &\leq C\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \end{aligned} \quad (5)$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(0, x) = 0$. Здесь $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали к S_ϕ .

Лемма 2. Пусть $u \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ и $u(0, x) = 0$. Если $b \in L_p(Q_\phi)$, то найдется постоянная $c > 0$ такая, что

$$\|bu\|_{L_p(Q_\phi)} \leq c\phi^{\beta_1}\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad \|b\nabla u\|_{L_p(Q_\phi)} \leq c\phi^{\beta_2}\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad (6)$$

где

$$\beta_1 = 1 - \frac{n+2}{2p}, \quad \beta_2 = \frac{1}{2} - \frac{(n+2)}{2p}.$$

Постоянная $c > 0$ не зависит от $\phi \leq T$ и $u \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$.

Первое и второе неравенства доказываются аналогично. Рассмотрим, например, первое. Чтобы получить его, оцениваем интеграл через произведение норм $\|b\|_{L_p(Q_\phi)}\|u\|_{L_\infty(Q_\phi)}$ и используем неравенства из леммы 3.3 гл. 2 в [22], где берем $\delta = \sqrt{\tau}$ и используем оценку $\|u\|_{L_p(Q_\phi)} \leq \phi\|u_t\|_{L_p(Q_\phi)}$. Отметим, что неравенства вида (5) и более общие доказываются и используются в гл. 5 из [24].

Лемма 3 [25, лемма 2]. Пусть $s \in ((n+2)/2p, 1)$. Тогда справедливы следующие утверждения. Произведение $q \cdot v$ функций класса $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ ($\tau \in (0, T]$) снова принадлежит $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$, а если $q \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ и $v \in W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$, то $qv \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ и справедлива оценка

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_0\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}(\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q_\phi)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\phi)}).$$

Если $v \in W_p^{s, 2s}(Q)$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_1\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q)},$$

а если $v \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$, то — в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_2\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}.$$

где постоянные c_i , $i = 0, 1, 2$, не зависят от q, v и $\phi \in (0, T]$. Если функция $v(t)$ строго отделена от нуля в Q_ϕ , т. е. $\delta_0 = \inf_{(t,x) \in Q_\phi} |v(t, x)| > 0$, то отношение q/v

функций класса $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ ($\tau \in (0, T]$) снова принадлежит $W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$, а если $q \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ и $v \in W_p^{s, 2s}(Q_\phi)$, то $q/v \in \widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)$ и

$$\|q/v\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(0, \phi)} \leq c_0\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}(\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q_\phi)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\phi)}),$$

$$\|q/v\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)} \leq c_0\|q\|_{\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\phi)}\|v\|_{W_p^{s, 2s}(Q)},$$

где постоянная c_0 не зависит от функции q и τ . Множество Q_ϕ в этих утверждениях может быть заменено на S_ϕ или на S_0^ϕ (в этом случае считаем, что

$1 > s > (n+1)/2p$). Если q зависит только от одной переменной t , то норма q в $\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\phi)$ в этих неравенствах заменяется нормой q в $\widetilde{W}_p^s(0, \phi)$. Если обе функции не зависят от переменной x , то утверждение остается справедливым, но нормы $\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\phi)$ или $W_p^{s,2s}(Q_\phi)$ в неравенствах заменяются нормами $\widetilde{W}_p^s(0, \phi)$ или $W_p^s(0, \phi)$ соответственно.

Рассмотрим задачу

$$Mu = u_t - Lu = f, \quad Lu = a_{nn}u_{x_n x_n} + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}u_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^n a_i u_{x_i} - a_0 u, \quad (7)$$

$$Ru|_{S_1} = g, \quad R_i u(t, x', r_i) = g_i(t, x'), \quad i = 0, 1, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (8)$$

где $r_0 = 0$, $r_1 = l$,

$$Ru = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij}(t, x) \nu_i \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sigma(x, t)u, \quad R_0 u = -u_{x_n} + \sigma_0(u - \bar{u}), \quad R_1 u = u_{x_n} + \sigma_1 u,$$

$\bar{u}(t, x')$ — некоторая заданная функция;

$$\int_{\Omega} u(t, x', 0) \varphi_i(x') dx' = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (9)$$

Обозначим $s_1 = 1 - 1/2p$, $s_0 = 1/2 - 1/2p$. Предположим, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad \sigma \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad \sigma_1, \bar{u} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad i = 0, \dots, n, \quad (10)$$

$$a_{ij} \in C(\overline{G}), \quad a_{ij}|_{S_1} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Будем искать решение задачи (7)–(9), т. е. функцию u и коэффициенты $\{\alpha_i\}$ $\left(\sigma_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(t) \Phi(t, x)\right)$, в классе $u \in W_p^{1,2}(Q)$, $\alpha_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)$. Оператор L предполагается эллиптическим, т. е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad (t, x) \in Q. \quad (12)$$

В нашем случае $a_{ni} = a_{in} = 0$. Запишем условия согласования:

$$R_1 u_0(x', r_1) = g_1(0, x'); \quad R(0, x) u_0(x)|_{\Gamma_1} = g(0, x); \quad (13)$$

$$R_0 u_0(x', 0) = g_0(0, x'). \quad (14)$$

Далее, предполагаем, что

$$u_0(x) \in W_p^{2-2/p}(G), \quad g \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad f \in L_p(Q), \quad g_1, g_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0). \quad (15)$$

Лемма 4. Предположим, что условия (10), (11), $\sigma_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\phi)$ выполнены. Тогда существуют постоянные C_0, C_1, C_2 , не зависящие от $\phi \in (0, T]$, такие, что

$$\|\sigma_0 v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\phi)} \leq C_0 \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\phi)} \quad (16)$$

для всех $v \in \widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\phi)$;

$$\|Rv\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\phi)} \leq C_1 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)}, \quad \|Mv\|_{L_p(Q_\phi)} \leq C_2 \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\phi)} \quad (17)$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\phi)$ таких, что $v(x, 0) = 0$.

Доказательство вытекает из лемм 3, 2.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (10)–(15) и $\sigma_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\phi)$. Тогда существует единственное решение u задачи (7), (8) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q)$. Решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1)} + \|g_0\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|\bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|g_1\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)}).$$

Если $u_0 = 0$, $\bar{u} = 0$, то на любом промежутке $(0, \tau)$ ($\tau \leq T$) решение удовлетворяет оценке

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)} \leq c(\|f\|_{L_p(Q_\tau)} + \|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\tau)} + \|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\tau)} + \|g_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\tau)}),$$

где постоянная c не зависит от $\tau \in (0, T]$ и f, g, g_1 .

Утверждение теоремы 1 вытекает из теорем 1, 2 работы [4]. Однако у нас есть некоторые отличия в условиях на коэффициенты a_{ij} , σ , σ_i . В этой работе на границе они принадлежат некоторым классам Гёльдера, но никаких изменений в доказательстве этих теорем не произойдет, если использовать вместо классических результатов о разрешимости параболических задач в [22] те, которые имеются в [26, теорема 2.1], где как раз используются условия на коэффициенты граничных операторов в терминах пространств Соболева, записанные выше.

3. Основные результаты

Прежде чем формулировать основной результат, приведем дополнительные условия на данные. Будем предполагать, что

$$\int_{\Omega} u_0 \varphi_j dx' = \psi_j(0), \quad \psi_i(t) \in W_p^{s_1}(0, T) \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (18)$$

Пусть B_0 — матрица с элементами

$$\phi_{ij} = \int_{\Omega} \Phi_j(0, x')(u_0 - \bar{u})(0, x', 0) \varphi_i(x') \sqrt{a_{nn}(0, x', 0)} dx' \quad (i, j = 1, 2, \dots, r).$$

Считаем, что выполнены условия

$$\Phi_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0) \quad (i = 1, 2, \dots, r), \quad |\det B_0| > 0. \quad (19)$$

Рассмотрим граничное условие $R_0 u|_{x_n=0} = g_0(t, x')$. Умножим это равенство, взятое в точке $t = 0$, на $\sqrt{a_{nn}(0, x', 0)} \varphi_j(x')$ и проинтегрируем по Ω . Получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \alpha_i(0) \int_{\Omega} \Phi_i(0, x')(u_0 - \bar{u})(0, x', 0) \sqrt{a_{nn}(0, x', 0)} \varphi_j(x') dx' \\ = \int_{\Omega} u_{0x_n}(x', 0) \sqrt{a_{nn}(0, x', 0)} \varphi_j(x') dx' \\ + \int_{\Omega} g(0, x', 0) \sqrt{a_{nn}(0, x', 0)} \varphi_j(x') dx', \quad j \leq r. \end{aligned}$$

В силу условия (19) система имеет единственное решение и можно записать $\vec{\alpha}(0) = B_0^{-1} \vec{F}_0$, где $\vec{F}_0 = (F_{01}, \dots, F_{0r})^T$, $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_r(t))^T$ и

$$F_{0j} = \int_{\Omega} g \sqrt{a_{nn}} \varphi_j dx' + \int_{\Omega} u_{0x_n} \sqrt{a_{nn}} \varphi_j dx'.$$

Таким образом, если решается обратная задача (7)–(9), то данные задачи позволяют однозначно определить $\vec{\alpha}(0)$. Тогда условия согласования при $t = 0$, $x_n = 0$ записываются в виде

$$-u_{0x_n} + \sigma_0(0, x')(u_0 - \bar{u})(x', 0) = g(0, x'), \quad \sigma_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(0)\Phi(0, x'). \quad (20)$$

Дополнительные условия гладкости на данные имеют вид

$$a_{nn} \in W_p^{1,2}(Q), \quad a_{ij} \in L_\infty((0, T) \times (0, l); W_{n/s}^{s_1}(\Omega)), \quad \varphi_k \in W_q^s(\Omega) \quad (s \in (0, 1/q)), \quad (21)$$

где $s_1 > s$ произвольно (оно может быть как угодно близко к s), $q = p/(p-1)$, $i, j = 1, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, r$. Основной результат имеет следующий вид.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (10)–(13), (15), (18)–(21). Тогда найдется число γ_0 такое, что на промежутке $[0, \gamma_0]$ существует единственное решение задачи (7)–(9) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q_{\gamma_0})$, $\alpha_i \in W_p^{s_0, 2s_0}(0, \gamma_0)$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем задачу к более простому виду. Положим

$$\beta = \sigma_0 - \tilde{\sigma}_0, \quad \tilde{\sigma}_0 = \sum_{i=1}^r \alpha_i(0)\Phi_i(t, x'), \quad \beta_i = \alpha_i(t) - \alpha_i(0).$$

Используя теорему 1, построим решение v задачи (7), (8), где возьмем в качестве функции σ_0 функцию $\tilde{\sigma}_0$. Тогда функция $w = u - v$ есть решение задачи

$$Mv = w_t - Lw = 0, \quad Rv|_{S_1} = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad R_1w|_{x_n=l} = 0, \quad (22)$$

$$-w_{x_n} + \tilde{\sigma}_0w|_{x_n=0} = -\beta w - \beta(v(t, x', 0) - \bar{u})|_{x_n=0}. \quad (23)$$

$$\int_{\Omega} w(t, x', 0)\varphi_i(x') dx' = \psi_i(t) - \int_{\Omega} v(t, x', 0)\varphi_i(x') dx' = \tilde{\psi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (24)$$

Сведем нашу обратную задачу к некоторому (фактически интегральному) уравнению. Пусть w — решение задачи (22)–(24). Умножим равенство (23) на $\sqrt{a_{nn}}(t, x', 0)\varphi_j(x')$ и проинтегрируем по Ω . Получим, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \beta_i(t) \int_{\Omega} \Phi_i(v - \bar{u})\sqrt{a_{nn}}\varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0} &= \int_{\Omega} w_{x_n}\sqrt{a_{nn}}\varphi_j(x') dx' \\ &- \sum_{i=1}^r (\beta_i + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w \sqrt{a_{nn}}\varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0}, \quad j \leq r. \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $B(t)$ — матрица с элементами

$$b_{ij}(t) = \int_{\Omega} \Phi_i(v - \bar{u})\sqrt{a_{nn}}\varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0}.$$

При $t = 0$ она совпадает с матрицей B_0 . Если $v \in W_p^{1,2}(Q)$, то в силу теорем вложения $v \in C^{1-(n+2)/2p, 2-(n+2)/p}(\bar{Q})$. Тогда в силу условий на другие функции в матрице $B(t)$ элементы $B(t)$ непрерывны по t и можем сказать, что найдутся

параметры $\gamma_1 > 0$ и $\delta_1 > 0$ такие, что $|\det B(t)| \geq \delta_1 > 0$ для всех $t \in [0, \gamma_1]$. В этом случае равенство (25) можно записать в виде

$$\vec{\beta} = B^{-1} \vec{S}(\vec{\beta}), \quad (26)$$

где вектор $\vec{S}$ имеет координаты

$$S_j = \int_{\Omega} w_{x_n} \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' - \sum_{i=1}^r (\beta_i + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0},$$

а w — решение прямой задачи (22), (23). Преобразуем это равенство. Сделаем в (22) замену переменных

$$\eta = t, \quad y_i = x_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \quad y_n = \varphi(t, x) = \int_0^{x_n} \frac{1}{\sqrt{a_{nn}(t, x', \xi)}} d\xi.$$

Якобиан преобразования равен $1/\sqrt{a_{nn}}$, а для производных имеем равенства

$$w_{x_i} = w_{y_i} + u_{y_n} \varphi_{x_i}, \quad w_t = u_{\eta} + w_{y_n} \varphi_t, \quad w_{x_n} = u_{y_n}.$$

Для вторых производных имеем равенства

$$w_{x_i x_j} = w_{y_i y_j} + w_{y_i y_n} \varphi_{x_j} + w_{y_j y_n} \varphi_{x_i} + w_{y_n y_n} \varphi_{x_j} \varphi_{x_i} + w_{y_n} \varphi_{x_i x_j} \quad (i, j \leq n-1),$$

$$w_{x_n x_n} = \frac{1}{a_{nn}} w_{y_n y_n} + w_{y_n} \varphi_{x_n x_n}.$$

Тогда уравнение (22) запишется в виде

$$w_{\eta} - \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} w_{y_i y_j} + \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j w_{y_j} + \tilde{a}_0 w = 0, \quad (27)$$

где

$$\tilde{a}_{nn} = 1 + \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} \varphi_{x_i} \varphi_{x_j}, \quad \tilde{a}_{in} = \tilde{a}_{ni} = \sum_{j=1}^{n-1} \varphi_{x_j} a_{ij} \quad (i < n), \quad \tilde{a}_{ij} = a_{ij} \quad (i, j \leq n-1).$$

Пусть $m_0 = \inf_{x' \in \Omega, t \in (0, T)} \varphi(t, x', l) > 0$. Интегрируем уравнение (27), умноженное на $\varphi_j(x')$, по области Ω . Имеем

$$\begin{aligned} & \partial_{\eta} \int_{\Omega} w(\eta, y', y_n) \varphi_j(y') dy' - \partial_{y_n}^2 \int_{\Omega} w(\eta, y', y_n) \varphi_j(y') dy' \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} w_{y_i y_j} - \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j w_{y_j} - \tilde{a}_0 w - w_{y_n y_n} \right) \varphi_j dx' = \Psi_j(t, y_n). \end{aligned} \quad (28)$$

Пусть $\varphi_0(y_n) \in C^{\infty}([0, m_0])$, $\varphi_0(y_n) = 1$ при $y_n \leq m_0/2$, $\varphi_0(y_n) = 0$ при $y_n \geq 3m_0/4$. Тогда функция

$$v_j = \varphi_0 \int_{\Omega} w(\eta, y', y_n) \varphi_j(x') dy'$$

есть решение уравнения

$$v_{j\eta} - v_{jy_n y_n} = \Psi_j - 2\varphi_{0y_n} \int_{\Omega} w_{y_n}(\eta, y', y_n) \varphi_j(y') dy' - \varphi_{0y_n y_n} \int_{\Omega} \varphi_j(y') w(\eta, y', y_n) dy' = \tilde{\Psi}_j. \quad (29)$$

Если функция w есть решение задачи (22)–(24), то

$$v_j(0, y_n) = 0, \quad v_j(t, m_0) = 0, \quad v_j(t, 0) = \tilde{\psi}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (30)$$

Вернемся к уравнению (26). Отметим, что

$$\int_{\Omega} w_{y_n}(\eta, y', y_n) \varphi_j dy' \Big|_{y_n=\varphi(x), \eta=t} = \int_{\Omega} w_{x_n}(t, x', x_n) \sqrt{a_{nn}} \varphi_j dx'. \quad (31)$$

Здесь под функцией $w(\eta, y', y_n)$ понимаем функцию $w(t, x', x_n)$, записанную в системе координат (η, y) , т. е. $w(\eta, y', y_n) = w(t, x', x_n)|_{x=x(y), t=\eta}$. Построим функцию w как решение прямой задачи (23), (24). Далее находим функции v_j как решение прямой задачи (29), (30) и заменяем равенство (26) равенством

$$\vec{\beta} = B^{-1} \vec{S}_0(\vec{\beta}), \quad (32)$$

где вектор $\vec{S}_0$ имеет координаты

$$S_{0j}(\vec{\beta}) = v_{jy_n}(t, 0) - \sum_{i=1}^r (\beta_i + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0}, \quad j = 1, \dots, r,$$

а w — решение прямой задачи (22), (23). Используя теорему о неподвижной точке, покажем, что уравнение (32) разрешимо на малом промежутке времени. Для этого покажем, что оператор $B^{-1} \vec{S}_0(\vec{\beta})$ сжимающий и переводит некоторый шар в себя. Вначале найдем функцию $\vec{S}_0(0)$. Если $\vec{\beta} = 0$, то $w \equiv 0$ в силу единственности решений параболических задач. Тогда $S_{0j}(0) = v_{0jy_n}(t, 0)$, где v_{0j} — решение задачи

$$v_{0j\eta} - v_{0jy_n y_n} = 0, \quad v_{0j}(0, y_n) = 0, \quad v_{0j}(t, m_0) = 0, \quad v_{0j}(t, 0) = \tilde{\psi}_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (33)$$

Таким образом определен вектор $\vec{v}_0 = (v_{01}, v_{02}, \dots, v_{0r})^T$. Положим

$$R_0 = 2\|B^{-1} \vec{v}_{0y_n}(t, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, T)}, \quad B_{R_0, \gamma} = \{\vec{\beta} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma) : \|\vec{\beta}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq R_0\}.$$

Каждый вектор $\vec{\beta}$ естественным образом отождествляется с функцией

$$\beta = \sum_{i=1}^r \beta_i \Phi_i.$$

Получим необходимые оценки. Прежде всего, рассмотрим задачу (22), (23). Ее решение в силу теоремы 1 и леммы 3 удовлетворяет оценке

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq c\|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} (\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} + \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)}), \quad (34)$$

где постоянная c не зависит от $\gamma \in (0, T]$. Непосредственно из определения нормы и леммы 1 вытекает, что

$$\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma; L_p(\Omega))} \leq c_1 \gamma^{1/2} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_1}(0, \gamma; L_p(\Omega))} \leq c_2 \gamma^{1/2} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (35)$$

Далее, используя интерполяционное неравенство [20]

$$\|w\|_{W_p^s(G)} \leq c_0 \|w\|_{W_p^{s_1}(G)}^\theta \|w\|_{W_p^{s_2}(G)}^{1-\theta}, \quad s_1 \theta + s_2 (1 - \theta) = s, \quad s_2 < s < s_1, \quad (36)$$

и теоремы вложения имеем

$$\|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^{2s_0}(\Omega))} \leq c_3 \|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^1(G))} \leq c_4 \|w\|_{L_p(0, \gamma; W_p^2(G))}^{1/2} \|w\|_{L_p(Q_\gamma)}^{1/2}. \quad (37)$$

Из неравенств (35), (37) и очевидного неравенства

$$\|w\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))} \leq \gamma \|w_t\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))}, \quad w(0, x) = 0, \quad (38)$$

вытекающего из формулы Ньютона — Лейбница, имеем

$$\|w\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} \leq c_5 \gamma^{1/2} \|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (39)$$

Тогда неравенство (34) и лемма 1 влекут, что

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq c_6 \gamma^{1/2} \|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} \|w\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(Q_\gamma)} + c_7 \|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)}. \quad (40)$$

Отметим, что в силу леммы 4

$$\|\beta\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} \leq c_8 \|\vec{\beta}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq c_8 R_0, \quad (41)$$

где постоянная c_8 не зависит от γ . Далее во всех оценках считаем, что $\vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma}$ для подходящего γ . Выберем $\gamma_2 \leq \gamma_1$ такое, что $c_6 c_8 \gamma^{1/2} R_0 \leq 1/2$ при всех $\gamma \leq \gamma_2$. Тогда неравенство (40) запишется в виде

$$\|w\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq 2c_7 c_8 \|\vec{\beta}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)}, \quad \vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma}, \quad \gamma \leq \gamma_2. \quad (42)$$

Пусть $\vec{\beta}^i \in B_{R_0, \gamma}$ ($\gamma \leq \gamma_2$), $\vec{\beta}^i = (\beta_1^i, \dots, \beta_r^i)^T$ ($i = 1, 2$). Обозначим соответствующие им функции через β_1, β_2 , а решения задачи (22), (23) — через w_1, w_2 . Получим оценки нормы разности $S_0(\vec{\beta}^1) - S_0(\vec{\beta}^2)$. Вычитая равенства (22), (23) для w_1, w_2 , получим, что $w_0 = w_1 - w_2$ есть решение задачи

$$Mv = w_{0t} - Lw_0 = 0, \quad R w_0|_{S_1} = 0, \quad w_0|_{t=0} = 0, \quad R_1 w_0|_{x_n=l} = 0, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & -w_{0x_n} + \tilde{\sigma}_0 w_0|_{x_n=0} \\ & = - \left[(\beta_1 - \beta_2) \frac{(w_1 + w_2)}{2} + \frac{(\beta_1 + \beta_2)}{2} (w_1 - w_2) - (\beta_1 - \beta_2)(v - \bar{u}) \right] \Big|_{x_n=0}. \end{aligned} \quad (44)$$

Повторяя рассуждения из вывода оценки (42), при всех $\gamma \leq \gamma_2$ получим аналог этой оценки, но для функции w_0 , т. е. оценку

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} & \leq \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} (2c_7 c_8 \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} \\ & \quad + c_9 \|w_1 + w_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)}), \quad \vec{\beta} \in B_{R_0, \gamma}, \quad \gamma \leq \gamma_2, \end{aligned} \quad (45)$$

где постоянные c_i не зависят от γ . Для оценки последнего слагаемого используем оценки (42), записанные для функций w_i . Получим оценку

$$\|w_1 - w_2\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq \|\vec{\beta}_1 - \vec{\beta}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_0^\gamma)} (2c_7 c_8 \|v - \bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + c_{10} R_0), \quad (46)$$

где $\vec{\beta}^i \in B_{R_0, \gamma}$, $\gamma \leq \gamma_2$. Обозначим решения v_j задач (29), (30) с соответствующими правыми частями $\tilde{\Psi}_j^i(t, y_n)$ ($i = 1, 2$) (зависящими соответственно от w_1, w_2) через v_j^i ($i = 1, 2$). Запишем еще раз равенства (29), (30). Имеем

$$v_{j\eta}^i - v_{jy_n y_n}^i = \tilde{\Psi}_j^i, \quad v_j^i(0, y_n) = 0, \quad v_j^i(t, m_0) = 0, \quad v_j^i(t, 0) = \tilde{\psi}_j(t, y_n), \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (47)$$

Пусть $\tilde{v}_j = v_{j\eta}^1 - v_{j\eta}^2$. Построим функцию $\psi_h(y_n) \in C^\infty([0, m_0])$ такую, что $\psi_h = 1$ при $y_n \in [0, h/4]$, $\psi_h = 0$ при $y_n > [0, 3h/4]$, $|\psi_h^{(k)}| \leq c/h^k = 0$, $k = 1, 2$. Далее, возьмем $h = \gamma^{1/4}$. Такую функцию легко построить, например, усредняя характеристическую функцию интервала $(-h/2, h/2)$. Тогда функция $v_{0j} = (\tilde{v}_j^1 - \tilde{v}_j^2)\psi_h$ есть решение задачи

$$\begin{aligned} v_{0j\eta} - v_{0jy_n y_n} &= \psi_h(\tilde{\Psi}_j^1 - \tilde{\Psi}_j^2) - 2\psi_{hy_n}\tilde{v}_{jy_n} - \psi_{hy_n y_n}\tilde{v}_j = \Psi_{0j}, \\ v_{0j}(0, y_n) &= 0, \quad v_{0j}(t, m_0) = 0, \quad v_{0j}(t, 0) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (48)$$

В силу теоремы 1 и леммы 1 имеем оценку

$$\|v_{0jy_n}(\eta, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} \leq c\|v_0\|_{W_p^{1,2}((0, \gamma) \times (0, m_0))} \leq c_1\|\Psi_{0j}\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))}. \quad (49)$$

Отметим, что $v_{0jy_n}(\eta, 0) = v_{jy_n}^1(\eta, 0) - v_{jy_n}^2(\eta, 0)$. В силу известных оценок решений параболических задач (см. теорему 1 при $n = 1$) имеем оценку

$$\|v_j^1 - v_j^2\|_{\widetilde{W}_p^{1,2}(0, \gamma) \times (0, m_0)} \leq C\|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))}, \quad (50)$$

где, как и ранее, постоянная C не зависит от γ . Оценим два последних слагаемых в правой части уравнения в (48) (как и выше, используем неравенства (36), (38), (50)):

$$\begin{aligned} &c(\|\tilde{v}_{jy_n}\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))}/\gamma^{1/4} + \|\tilde{v}_j\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))}/\gamma^{1/2}) \\ &\leq c_1\gamma^{1/4}\|\tilde{v}_j\|_{W_p^{1,2}((0, \gamma) \times (0, m_0))} \leq c_2\gamma^{1/4}\|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))}. \end{aligned}$$

В силу определения функции Ψ_{0j} неравенство (49) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \|v_{0jy_n}(\eta, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \gamma)} &\leq c_3\|v_{0j}\|_{W_p^{1,2}((0, \gamma) \times (0, m_0))} \\ &\leq c_4\gamma^{1/4}\|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, m_0))} \\ &\quad + c_5\|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, h))}. \end{aligned} \quad (51)$$

Оценим правую часть с использованием оценок (42), (46). Вначале рассмотрим последнее слагаемое в (51). По определению имеем

$$\begin{aligned} &\tilde{\Psi}_j^1(\eta, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(\eta, y_n) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} w_{0y_i y_k} \right) \varphi_j dy' + \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k} w_{0y_n y_n} \right) \varphi_j dy' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \left(2 \sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \varphi_{x_k} w_{0y_n y_i} \right) \varphi_j dy' - 2 \varphi_{0y_n} \int_{\Omega} w_{0y_n}(\eta, y', y_n) \varphi_j(y') dy' \\
& - \varphi_{0y_n y_n} \int_{\Omega} \varphi_j(y') w_0(\eta, y', y_n) dy' + \int_{\Omega} \left(- \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k w_{0y_k} - \tilde{a}_0 w_0 \right) \varphi_j dy'. \quad (52)
\end{aligned}$$

Нормы последних трех слагаемых правой части в $L_p((0, \gamma) \times (0, h))$ с использованием условий на коэффициенты оцениваются через $J = C \|w_0\|_{L_{\infty}(0, \gamma; W_{\infty}^1(G))}$, где постоянная C зависит от норм коэффициентов уравнения в $L_p(Q)$ и норм функций φ_j в $L_q(\Omega)$ ($1/p + 1/q = 1$). Далее, имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned}
J &= C \|w_0\|_{L_{\infty}(0, \gamma; W_{\infty}^1(G))} \leq c_1 \|w_0\|_{L_{\infty}(0, \gamma; W_p^s(G))} \\
&\leq c_2 \|w_0\|_{L_{\infty}(0, \gamma; W_p^{2-2/p}(G))}^{\theta} \|w_0\|_{L_{\infty}(0, \gamma; L_p(G))}^{1-\theta} \leq \gamma^{(1-\theta)/q} c_2 \|w_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\gamma})}, \quad (53)
\end{aligned}$$

где $\theta(2 - 2/p) = s \in (1 + n/p, 2 - 2/p)$. Здесь использованы вложение $W_p^s(G) \subset W_{\infty}^1(G)$, интерполяционное неравенство (36), очевидное неравенство

$$\|w\|_{L_{\infty}(0, \gamma; L_p(G))} \leq \gamma^{(p-1)/p} \|w_t\|_{L_p(0, \gamma; L_p(G))}, \quad w(0, x) = 0, \quad (54)$$

и вложение $W_p^{1,2}(Q_{\gamma}) \subset C([0, \gamma]; W_p^{2-2/p}(G))$ [27, теорема III 4.10.2]. Постоянная вложения здесь не зависит от γ , что вытекает из возможности продолжения функции $w_1 - w_2$ нулем при $t < 0$ с сохранением класса. Оценим первое слагаемое

$$J_1 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} w_{0y_i y_k} \right) \varphi_j dy'.$$

Для этого используем неравенство Шварца

$$\left| \int_{\Omega} u(x') v(x') dx' \right| \leq \|v\|_{\dot{W}_q^s(\Omega)} \|u\|_{W_p^{-s}(\Omega)} \quad (1/q + 1/p = 1).$$

Как обычно, под $W_p^{-s}(\Omega)$ понимаем двойственное к $\dot{W}_q^s(\Omega)$. При п.в. η, y_n имеем

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} a_{ik} w_{0y_i y_k} \varphi_j dx' &\leq \|w_{0y_i y_k}\|_{W_p^{-s}(\Omega)} \|a_{ik} \varphi_j\|_{W_q^s(\Omega)} \\
&\leq \|w_0\|_{W_p^{2-s}(\Omega)} \|a_{ik} \varphi_j\|_{W_q^s(\Omega)} \leq c \|w_0\|_{W_p^{2-s}(\Omega)} \|a_{ik}\|_{W_{n/s}^{s_1}(\Omega)} \|\varphi_j\|_{W_q^s(\Omega)}, \quad (55)
\end{aligned}$$

где $p_1 = n/s, s_1 > s$. Здесь использовано интерполяционное свойство: поскольку $D^{\alpha} \in L(W_p^{|\alpha|}(\Omega), L_p(\Omega)) \cap L(L_p(\Omega), W_p^{-|\alpha|}(\Omega))$, то для промежуточных пространств это включение тоже верно, т. е. $D^{\alpha} \in L(W_p^s(\Omega), W_p^{s-|\alpha|}(\Omega))$. Далее, мы использовали равенство $\dot{W}_q^s(\Omega) = W_q^s(\Omega)$ при $s < 1/q$ и неравенство

$$\|a_{ik} \varphi_j\|_{W_q^s(\Omega)} \leq c \|a_{ik}\|_{W_{n/s}^{s_1}(\Omega)} \|\varphi_j\|_{W_q^s(\Omega)}, \quad s_1 > s, \quad (56)$$

где число $s_1 > s$ произвольно, $s \in (0, 1)$. Это неравенство требует некоторого доказательства с использованием определения нормы в пространстве $W_p^s(\Omega)$. Однако оно не слишком сложное и мы его опустим. Неравенства (55), (36) и условия на данные гарантируют, что имеет место оценка

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, h))} &\leq c \|w_0\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, l); W_p^{2-s}(\Omega))} \\
&\leq c_1 \|w_0\|_{L_p((0, \gamma) \times (0, l); W_p^2(\Omega))}^{\theta} \|w_0\|_{L_p(Q_{\gamma})}^{1-\theta} \\
&\leq c_2 \gamma^{1-\theta} \|w_0\|_{W_p^{1,2}(Q_{\gamma})}, \quad \theta = (2 - s)/2. \quad (57)
\end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в (52)

$$J_2 = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k=1}^{n-1} a_{ik} \varphi_{x_i} \varphi_{x_k} w_0 y_n y_n \right) \varphi_j dy'.$$

Отметим, что

$$\varphi_{x_i} = \int_0^{x_n} (a_{nn})^{-3/2} a_{nnx_i}(t, x', \xi) d\xi$$

и тем самым имеет место оценка $|\varphi_{x_i}| \leq ch$. Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\|J_2\|_{L_p((0,\gamma) \times (0,h))} \leq c\gamma^{1/2} \|w_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (58)$$

Аналогично оценивается третье слагаемое J_3 в (52):

$$\|J_3\|_{L_p((0,\gamma) \times (0,h))} \leq c\gamma^{1/4} \|w_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)}. \quad (59)$$

Окончательно, используя оценки для J , J_1 , J_2 , J_3 и оценку (46), приходим к оценке

$$\|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0,\gamma) \times (0,h))} \leq C(R_0)\gamma^{s_0} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}, \quad (60)$$

где $s_0 > 0$ — минимальная из степеней, полученных в доказательстве, и постоянная C не зависит от γ . Аналогично для первого слагаемого в (51) получим

$$c_4\gamma^{1/4} \|\tilde{\Psi}_j^1(t, y_n) - \tilde{\Psi}_j^2(t, y_n)\|_{L_p((0,\gamma) \times (0,m_0))} \leq c\gamma^{1/4} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}. \quad (61)$$

Оценки (60), (61), (51) влекут оценку

$$\|v_{jy_n}^1(t, 0) - v_{jy_n}^2(t, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \leq C(R_0)\gamma^{s_0} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}, \quad (62)$$

где постоянная $C(R_0)$ не зависит от γ и s_0 — некоторая положительная постоянная. Таким образом, оценена норма первого слагаемого в выражениях $S_{0j}(\vec{\beta}^1) - S_{0j}(\vec{\beta}^2)$. Оценим норму оставшегося слагаемого

$$J_0 = \sum_{i=1}^r (\beta_i^1 + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w_1 \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' - \sum_{i=1}^r (\beta_i^2 + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w_2 \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx',$$

которое можно записать в виде

$$J_0 = \sum_{i=1}^r \left[(\beta_i^1 - \beta_i^2) \int_{\Omega} \Phi_i \frac{(w_1 + w_2)}{2} \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' - \left(\frac{(\beta_i^1 + \beta_i^2)}{2} + \alpha_i(0) \right) \int_{\Omega} \Phi_i w_0 \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \right] = J_{01} + J_{02}. \quad (63)$$

Используя леммы 1, 3, 4, неравенство Гёльдера и (42) (для функций w_i), можем записать

$$\|J_{01}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}$$

$$\begin{aligned}
&\leq c \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \int_{\Omega} \left\| \Phi_i(t, x', 0) \frac{(w_1 + w_2)(t, x', 0)}{2} \sqrt{a_{nn}(t, x', 0)} \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} |\varphi_j| dx' \\
&\leq c_1 \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \|w_1 + w_2\|_{L_p(\Omega; \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma))} \|\varphi_j\|_{L_q(\Omega)} \\
&\leq c_2 \gamma^{1/2} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \|w_1 + w_2\|_{L_p(\Omega; \widetilde{W}_p^{s_1}(0,\gamma))} \\
&\leq c_3 \gamma^{1/2} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{W_p^{s_0}(0,\gamma)}, \quad (64)
\end{aligned}$$

где постоянная c_3 зависит от R_0 , но не зависит от γ . Аналогично можем оценить (используем также (46))

$$\begin{aligned}
&\|J_{02}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \\
&\leq c R_0 \int_{\Omega} \left\| \Phi_i(t, x', 0) \frac{(w_1 - w_2)(t, x', 0)}{2} \sqrt{a_{nn}(t, x', 0)} \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} |\varphi_j| dx' \\
&\leq c_1 R_0 \|w_1 - w_2\|_{L_p(\Omega; \widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma))} \leq c_2 \gamma^{1/2} \|w_1 - w_2\|_{L_p(\Omega; \widetilde{W}_p^{s_1}(0,\gamma))} \\
&\leq c_3 \gamma^{1/2} \|w_1 - w_2\|_{W_p^{1,2}(Q_\gamma)} \leq c_4 \gamma^{1/2} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}. \quad (65)
\end{aligned}$$

Соотношения (63)–(65) влекут, что

$$\|J_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \leq c \gamma^{1/2} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}, \quad (66)$$

где постоянная c не зависит от γ . Оценки (62), (66) гарантируют оценку

$$\|S_{0j}(\vec{\beta}^1) - S_{0j}(\vec{\beta}^2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \leq c \gamma^{s_1} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)},$$

где $s_1 = \max(s_0, 1/2)$. Используя лемму 3, приходим к оценке

$$\|B^{-1}R_0(\vec{\beta}^1) - B^{-1}R_0(\vec{\beta}^2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)} \leq c_1 \gamma^{s_1} \|\vec{\beta}^1 - \vec{\beta}^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\gamma)}. \quad (67)$$

Выберем $\gamma_3 \leq \gamma_2$ таким образом, чтобы $c_1 \gamma^{s_1} \leq 1/2$ при $\gamma \leq \gamma_3$. Тогда уравнение (32) удовлетворяет всем условиям теоремы о неподвижной точке и тем самым имеет единственное решение в шаре B_{R_0, γ_3} . Найдя вектор-функцию $\vec{\beta}$ и решив задачу (22), (23), найдем решение w вспомогательной задачи. Покажем, что условия (24) выполнены. По условию вектор-функция $\vec{\beta}$ есть решение уравнения (32), откуда вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^r \beta_i(t) \int_{\Omega} \Phi_i(v - \bar{u}) \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \\
&= v_{jy_n}(t, 0) - \sum_{i=1}^r (\beta_i + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx',
\end{aligned}$$

где $j = 1, \dots, r$, $x_n = 0$. С другой стороны, функция w удовлетворяет граничному условию (23), интегрируя которое с весом $\sqrt{a_{nn}} \varphi_j$ по Ω , получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^r \beta_i(t) \int_{\Omega} \Phi_i(v - \bar{u}) \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0} = \int_{\Omega} w_{x_n}(t, x', 0) \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \\
&- \sum_{i=1}^r (\beta_i + \alpha_i(0)) \int_{\Omega} \Phi_i w \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' \Big|_{x_n=0}, \quad j = 1, \dots, r. \quad (68)
\end{aligned}$$

Сравнивая эти два равенства, получим

$$v_{jy_n}(t, 0) = \int_{\Omega} w_{x_n}(t, x', 0) \sqrt{a_{nn}} \varphi_j(x') dx' = \int_{\Omega} w_{y_n}(t, y', 0) \varphi_j(y') dy' \quad \forall j. \quad (69)$$

Воспользуемся тем, что функция

$$\tilde{v}_j = \varphi_0 \int_{\Omega} w(t, y', 0) \varphi_j(y') dy'$$

есть решение уравнения (29), удовлетворяющее первым двум условиям в (30). Сама функция v_j является решением задачи (29), (30). Используя теорему 1 (которая в случае $n = 1$ и смешанных граничных условий также справедлива) и равенство (69), получим $v_j = \tilde{v}_j$ и тогда в силу (30)

$$\tilde{\psi}_j = \int_{\Omega} w(t, y', 0) \varphi_j(y') dy' = \int_{\Omega} w(t, x', 0) \varphi_j(x') dx'.$$

Единственность решений задачи вытекает из оценок, построенных в процессе доказательства.

Следствие 1. Пусть выполнены условия (10)–(12), (19), (21). Положим

$$\begin{aligned} J(f, u_0, g, g_1, g_0, \bar{u}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r) = & \|f\|_{L_p(Q)} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1)} \\ & + \|g_0\|_{W_p^{s_0, 2s_2}(S_0)} + \|\bar{u}\|_{W_p^{s_0, 2s_2}(S_0)} + \|g_1\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G)} \\ & + \sum_{j=1}^r \|\psi_j\|_{W_p^{s_1}(0, T)}. \end{aligned}$$

Фиксируем величину R_0 . Найдется параметр $\gamma_0 > 0$ такой, что для каждого набора данных, удовлетворяющих условиям (13), (15), (18), (20) и таких, что

$$J(f, u_0, g, g_1, g_0, \bar{u}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_r) \leq R_0,$$

существует единственное решение u задачи (7), (8) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q_{\gamma_0})$, $\bar{\alpha} \in W_p^{s_0}(0, \gamma_0)$ и для любых двух таких наборов данных $f_i, u_{0i}, g_i, g_{1i}, g_{0i}, \bar{u}_i, \psi_1^i, \dots, \psi_r^i$ ($i = 1, 2$) и соответствующих им решений справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{W_p^{1,2}(Q_{\gamma_0})} + \|\bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2\|_{W_p^{s_0}(0, \gamma_0)} \leq c \Big(& \|f_1 - f_2\|_{L_p(Q_{\gamma_0})} \\ & + \|g_1^1 - g_1^2\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1^{\gamma_0})} + \|g_{01} - g_{02}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0^{\gamma_0})} + \|\bar{u}_1 - \bar{u}_2\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0^{\gamma_0})} \\ & + \|g_{11} - g_{12}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_0^{\gamma_0})} + \|u_{01} - u_{02}\|_{W_p^{2-2/p}(G)} + \sum_{j=1}^r \|\psi_j^1 - \psi_j^2\|_{W_p^{s_1}(0, \gamma_0)} \Big), \end{aligned}$$

где постоянная c зависит от величины R_0, T, γ_0 и норм коэффициентов.

Оценку необходимо доказывать отдельно, однако идея доказательства оценки содержится в доказательстве теоремы, поэтому на нем не останавливаемся.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус и К, 2009.
2. Пермяков П. П., Афанасьева Т. А., Варламов С. П., Скрябин П. Н. Восстановление граничных условий для моделирования теплообмена на поверхности грунта // АРКТИКА XXI век. Гуманитарные науки. 2019. Т. 17, № 1. С. 27–35.
3. Пермяков П. П. Идентификация параметров математической модели тепловлагопереноса в мерзлых грунтах. Новосибирск: Наука, 1989.
4. Pyatkov S. G., Baranchuk V. A. Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer // Math. Notes. 2023. V. 113, N 1. P. 93–108.
5. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation, II // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 11. P. 1515–1525.
6. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // Differ. Equ. 1996. V. 32, N 1. P. 113–122.
7. Pilant M., Rundell W. An iteration method for the determination of an unknown boundary condition in a parabolic initial-boundary value problem // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1989. V. 32. P. 59–71.
8. Dihn N., Hao D. N., Thanh P. X., Lesnik D. Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // Inverse Probl. 2013. V. 29. 095020.
9. Hao D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnik D. Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // Appl. Anal. 2014. V. 94, N 9. P. 1784–1799.
10. Slodicka M., Van Keer R. Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // Inverse Probl. 2002. V. 18, N 1. P. 139–152.
11. Onyango T. T. M., Ingham D. B., Lesnic D., Slodicka M. Determination of a time-dependent heat transfer coefficient from non-standard boundary measurements // Math. Comput. Simulation. 2009. V. 79, N 5. P. 1577–1584.
12. Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimdt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G. Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // Appl. Math. Modelling. 2021. V. 89 (Part 1), N 5. P. 654–668.
13. Slodicka M., Lesnic D., Onyango T. T. M. Determination of a time-dependent heat transfer coefficient in a nonlinear inverse heat conduction problem // Inverse Probl. Sci. Engin. 2010. V. 18, N 1. P. 65–81.
14. Rundell W., Yin H.-M. A parabolic inverse problem with an unknown boundary condition // J. Diff. Equ. 1990. V. 86, N 2. P. 234–242.
15. Rösch A. Second order optimality conditions and stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws // Control and Estimation of Distributed Parameter Systems (Vorau, 1996). Basel: Birkhäuser, 1998. V. 126. P. 237–246.
16. Rösch A. A Gauss–Newton method for the identification of nonlinear heat transfer laws // Optimal Control of Complex Structures (Oberwolfach, 2000). Basel: Birkhäuser, 2002. V. 139. P. 217–230.
17. Pyatkov S., Soldatov O., Fayazov K. Inverse problems of recovering the heat transfer coefficient with integral data // J. Math. Sci. 2023. V. 274, N 2. P. 255–268.
18. Kozhanov A. I. Linear inverse problems for some classes of nonlinear nonstationary equations // Sib. Electron. Math. Rep. 2015. V. 12. P. 264–275.
19. Вержбицкий М. А., Пятков С. Г. О некоторых обратных задачах определения граничных режимов // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 3–18.
20. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978.
21. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // Glasnik Mat. 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.
22. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1968. V. 23.
23. Belonogov V. A., Pyatkov S. G. On solvability of some classes of transmission problems in a cylindrical space domain // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. V. 18, N 1. P. 176–206.
24. Solonnikov V. A. On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of general form // Proc. Steklov Inst. Math. 1965. V. 83. P. 3–163.
25. Белоногов В. А., Пятков С. Г. О некоторых классах обратных задач определения коэффициента теплообмена в слоистых средах // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 252–271.

26. Denk R., Hieber M., Prüss J. Optimal $L_p - L_q$ -estimates for parabolic boundary value problems with inhomogeneous data // Math. Z. 2007. V. 257, N 1. P. 193–224.
27. Amann H. Linear and quasilinear parabolic problems. I. Basel: Birkhäuser-Verl., 1995. V. 89.

Поступила в редакцию 5 марта 2024 г.

После доработки 17 марта 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Пятков Сергей Григорьевич, Солдатов Олег Альбертович
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
pyatkov@math.nsc.ru, oleg.soldatov.97@bk.ru

УДК 512.5+510.6

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЗАМЫКАНИЯ В ДЕЛИМЫХ ЖЕСТКИХ ГРУППАХ

Н. С. Романовский

Аннотация. Доказывается, что в делимой m -жесткой группе алгебраическое замыкание множества, порождающего подгруппу ступени разрешимости m , совпадает с элементарным замыканием этого множества.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.411

Ключевые слова: группа, разрешимая, элементарная теория, алгебраическое замыкание.

1. Введение

В статье речь идет о теоретико-модельном понятии алгебраического замыкания множества, которое мы напомним позже, а сначала дадим определения, связанные с рассматриваемыми группами.

Группа G называется m -жесткой, если в ней существует нормальный ряд (он называется жестким)

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \dots > \rho_m(G) > \rho_{m+1}(G) = 1,$$

факторы которого $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ абелевы и рассматриваемые как (правые) $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$ -модули не имеют модульного кручения. Кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$ являются правыми (и левыми) областями Оре, поэтому вкладываются в соответствующие тела частных $Q(G/\rho_i(G))$. Жесткий ряд, если существует, определяется однозначно группой, для его членов используется обозначение $\rho_i(G)$. Ступень разрешимости m -жесткой группы в точности равна m . Жесткая группа G (т. е. m -жесткая для некоторого m) называется *делимой*, если элементы каждого фактора $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ делятся на ненулевые элементы кольца $\mathbb{Z}[G/\rho_i(G)]$, тогда $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$ может рассматриваться как векторное пространство над телом $Q(G/\rho_i(G))$. Пересечение любого множества делимых подгрупп в жесткой группе само является делимой подгруппой. Делимая m -жесткая группа определяется однозначно с точностью до изоморфизма мощностями α_i баз соответствующих векторных пространств $\rho_i(G)/\rho_{i+1}(G)$, она обозначается через $M(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$. Эта группа расщепляется в полупрямое произведение абелевых подгрупп $G_1 G_2 \dots G_m$ (G_i нормализует G_j при $i < j$), причем члены жесткого ряда имеют вид $\rho_i(G) = G_i \dots G_m$. В работах автора и совместных работах с А. Г. Мясниковым изучалась алгебраическая геометрия над жесткими группами, а затем и теория моделей таких групп (см. обзор автора, содержащийся в

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00214, <https://rscf.ru/project/24-21-00214/>.

© 2024 Романовский Н. С.

монографии [1]). Оказалось, что теория делимых m -жестких групп во многом похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей. В [2–5] доказано, что она полна, разрешима, ω -стабильна, описаны насыщенные модели, описаны определимые подгруппы, описаны элементарные подмодели и установлено, что пересечение произвольного множества элементарных подмоделей снова является элементарной подмоделью в том и только том случае, когда оно имеет ступень разрешимости m . Из последнего вытекает, что если подмножество делимой m -жесткой группы порождает подгруппу ступени разрешимости m , то можно говорить об элементарном замыкании этого подмножества, т. е. наименьшей элементарной подгруппе, содержащей его.

Приведем теоретико-модельные понятия, связанные с алгебраичностью (см. [6, 7]), для простоты речь будем вести о группах. Пусть A — непустое подмножество в группе G . Элемент $g \in G$ называется *определимым* (алгебраическим) над A , если найдется *определяющая* (почти определяющая) формула $\varphi(x)$ от одной несвязанной переменной x с параметрами из A , множество решений которой равно $\{g\}$ (конечно и содержит g). Множество всех определимых (алгебраических) над A элементов из G называется *определимым* (алгебраическим) *замыканием* A и обозначается через $\text{dcl}(A)$ ($\text{acl}(A)$). Выполняются обычные для замыканий свойства. Очевидно, что то и другое замыкания являются подгруппами в G . Удобно будет говорить также об алгебраичности наборов элементов. Назовем набор $(g_1, \dots, g_n)$ элементов из G *алгебраическим над A* , если для него существует почти определяющая формула $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ с параметрами из A , т. е. имеющая конечное число решений, среди которых есть $(g_1, \dots, g_n)$. Легко понять, что набор $(g_1, \dots, g_n)$ будет алгебраическим над A тогда и только тогда, когда все g_i принадлежат $\text{acl}(A)$. Назовем почти определяющую формулу для $(g_1, \dots, g_n)$ *неприводимой*, если никакое непустое собственное подмножество решений не является множеством решений какой-то другой почти определяющей для $(g_1, \dots, g_n)$ формулы. Несложно заметить, что неприводимая почти определяющая формула для любого алгебраического набора $(g_1, \dots, g_n)$ существует. Если $(g'_1, \dots, g'_n)$ — произвольное решение неприводимой почти определяющей для $(g_1, \dots, g_n)$ формулы, то имеется совпадение типов $\text{tp}_A(g_1, \dots, g_n) = \text{tp}_A(g'_1, \dots, g'_n)$, т. е. наборы решений неприводимой почти определяющей формулы удовлетворяют одним и тем же формулам с параметрами из A .

Сформулируем основной результат.

Теорема. Пусть A — подмножество делимой m -жесткой группы G такое, что подгруппа $\langle A \rangle$ имеет ступень разрешимости m . Тогда $\text{dcl}(A)$ является делимой подгруппой (она может оказаться больше делимого замыкания A), а $\text{acl}(A)$ совпадает с элементарным замыканием A в G .

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Пусть G — группа, $u = \alpha_1 g_1 + \dots + \alpha_n g_n$ — нетривиальный элемент группового кольца $\mathbb{Z}G$, представленный в виде целочисленной линейной комбинации с ненулевыми коэффициентами α_i различных элементов g_i группы G . Множество $\{g_1, \dots, g_n\}$ называется *носителем u* . Длина u определяется как число $|u| = \sum |\alpha_i|$. Пусть L — подмножество из G , пересекающееся с носителем u , тогда *ограничением u на L* назовем элемент $\sum_{g_i \in L} \alpha_i g_i$. Если L не пересекается с носителем u , то считаем, что ограничение равно 0.

Предположим, что $\mathbb{Z}G$ является областью Оре и $Q(G)$ — соответствующее тело частных. Рассмотрим набор $(f_1, \dots, f_s)$ нетривиальных элементов из $Q(G)$ и соответствующее (правое) представление $f_1 = u_1 u^{-1}, \dots, f_s = u_s u^{-1}$ этих элементов в виде правых дробей над $\mathbb{Z}G$ с общим знаменателем u . *Носителем представления* назовем объединение носителей $u_1, \dots, u_s, u$, а *длиной представления* сумму $|u_1| + \dots + |u_s| + |u|$. Данное представление называется *минимальным*, если его длина минимальна среди всех правых представлений набора. Назовем представление *приведенным*, если носитель u содержит 1. Из любого минимального представления легко получается минимальное приведенное.

Лемма 1 (см. лемму 7 из [3]). Пусть A, B — подгруппы из G и $C = A \cap B$. Тогда $Q(A) \cap Q(B) = Q(C)$. Более того, если $0 \neq f_1, \dots, f_s \in Q(A) \cap Q(B)$ и $f_i = u_i u^{-1}$ ($1 \leq i \leq s$) — представление выбранных элементов в виде правых дробей от элементов из $\mathbb{Z}B$ с общим знаменателем u , то существует другое представление f_i в виде аналогичных дробей от элементов из $\mathbb{Z}C$ такое, что каждая пара длин $(|u_i|, |u|)$ элементов старого представления покомпонентно $\geq$ соответствующей пары длин элементов нового представления, причем равенство возможно только в том случае, когда второе представление имеет вид $(u_i b)(ub)^{-1}$, где $b \in B$.

Следствие. Носители любых минимальных приведенных представлений данного набора $(f_1, \dots, f_s)$ порождают одну и ту же подгруппу H в G , она является пересечением всех подгрупп $H_i \leq G$, для которых $f_1, \dots, f_s \in Q(H_i)$.

Следующая лемма играет принципиальную роль в доказательстве основной теоремы и несомненно будет использоваться в других исследованиях по жестким группам.

Лемма 2. Пусть дополнительно группа G упорядочена. Тогда для данного набора $(f_1, \dots, f_s)$ нетривиальных элементов из $Q(G)$ существует лишь конечное число правых (левых) минимальных приведенных представлений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем какое-то левое минимальное приведенное представление нашего набора $f_1 = w^{-1}w_1, \dots, f_s = w^{-1}w_s$ через левые дроби с общим знаменателем w . Его носитель порождает ту же подгруппу H в G , что и носители правых минимальных приведенных представлений. Для нетривиальных элементов $u_1, \dots, u_s, u \in \mathbb{Z}G$ имеем

$$f_1 = u_1 u^{-1}, \dots, f_s = u_s u^{-1} \Leftrightarrow w_1 u = w u_1, \dots, w_s u = w u_s.$$

Пусть $f_1 = u_1 u^{-1}, \dots, f_s = u_s u^{-1}$ — правое минимальное приведенное представление нашего набора. Введем для носителей указанных ниже множеств соответствующие обозначения:

$$\{w_1, \dots, w_s\} = A, \{w\} = B, \{u_1, \dots, u_s\} = C, \{u\} = D.$$

Очевидно, носитель $\{w_1 u, \dots, w_s u\}$ равняется носителю $\{w u_1, \dots, w u_s\}$, пусть это будет E . Тогда $E \subseteq AD \cap BC$. По условию множества B и D содержат 1, можно предполагать, что 1 — минимальный элемент в B и D . Отметим, что множество $A \cap E$ содержит хотя бы один (например, минимальный) элемент каждого носителя $w_1, \dots, w_s$.

Пусть M — подмножество из BC . Назовем *проекцией M на C* множество всех таких элементов $c \in C$, для которых найдется $b \in B$ с условием $bc \in$

M . Аналогично определяется проекция подмножества из AD на D . Заметим, что проекция одноэлементного множества может содержать больше, чем один элемент.

Для произвольного подмножества $L \subseteq C$ (аналогично $L \subseteq D$) определим его *проективное замыкание* $\overline{L}$. Если найдутся $b', b \in B, c' \in L, c \in C \setminus L$ (аналогично $a', a \in A, d' \in L, d \in D \setminus L$), для которых $b'c' = bc$ (аналогично $a'd' = ad$), то присоединяем c к L (аналогично d к L). Отметим, что присоединяемый элемент равен $b^{-1}b'c'$ (аналогично $a^{-1}a'd'$). Затем процедуру повторяем для множества $L \cup \{c\}$ ($L \cup \{d\}$) и так далее до получения замкнутого множества $\overline{L}$, т. е. когда присоединение нового элемента невозможно. Очевидно, выполняются свойства $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$, $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow \overline{L}_1 \subseteq \overline{L}_2$. Построение замыкания $L \subseteq C$ можно истолковать по другому: заменяем L проекцией BL на C и так далее. Замкнутость L означает, что проекция BL на C равна L .

Обозначим через C_1 проекцию множества $A \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_1$. Обозначим через D_1 проекцию множества $AD \cap B\overline{C}_1$ на D и возьмем замыкание $\overline{D}_1$. Множество D_1 содержит 1, так как пересечение $A \cap BC_1$ непусто. Обозначим через C_2 проекцию множества $A\overline{D}_1 \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_2$. Из включения $1 \in \overline{D}_1$ выводится $C_1 \subseteq C_2$.

Пусть по индукции построены $C_1 \subseteq \dots \subseteq C_k \subseteq C$, $D_1 \subseteq \dots \subseteq D_{k-1} \subseteq D$. Обозначим через D_k проекцию множества $AD \cap B\overline{C}_k$ на D и возьмем замыкание $\overline{D}_k$. Обозначим через C_{k+1} проекцию множества $A\overline{D}_k \cap BC$ на C и возьмем замыкание $\overline{C}_{k+1}$. Из включения $\overline{C}_{k-1} \subseteq \overline{C}_k$ выводится $D_{k-1} \subseteq D_k$, а из включения $\overline{D}_{k-1} \subseteq \overline{D}_k$ выводится $C_k \subseteq C_{k+1}$.

Пусть на $k+1$ -м шаге происходит стабилизация (а она произойдет не некотором шаге, так как множества C и D конечны), полагаем тогда $C' = C_{k+1} = \overline{C}_k$, $D' = D_{k+1} = \overline{D}_k$. Имеем следующие свойства.

(1) Если какой-то элемент из AD' представляется в виде bc ($b \in B, c \in C$), то $c \in C'$. Если какой-то элемент из BC' представляется в виде ad ($a \in A, d \in D$), то $d \in D'$. В частности, $AD \cap BC' = AD' \cap BC = AD' \cap BC'$.

(2) Проекция BC' на C равна C' , а проекция AD' на D равна D' .

Пусть $u'_1, \dots, u'_s$ обозначают ограничения элементов $u_1, \dots, u_s$ на C' , а u' обозначает ограничение элемента u на D' . Так как 1 лежит в пересечении D' и носителя u , то $u' \neq 0$. Заметим, что каждое $u'_i \neq 0$. У нас есть равенство $w_i u = w u_i$. Так как 1 — минимальный элемент носителя w , то минимальный элемент носителя u_i является минимальным элементом носителя правой части равенства. А минимальный элемент носителя левой части совпадает с минимальным элементом носителя w_i . По построению последний лежит в C' , следовательно, C' пересекается с носителем u_i и тогда $u'_i \neq 0$.

Докажем равенства $w_i u' = w u'_i$. Полагаем $D'' = D \setminus D'$. Представим u в виде $u' + u''$, где u'' — ограничение u на D'' . Из условия (2) следует, что множество AD разбивается в объединение непересекающихся подмножеств AD' и AD'' . Так как носитель $w_i u'$ содержится в AD' , а носитель $w_i u''$ содержится в AD'' , то $w_i u'$ является ограничением $w_i u$ на AD' . Вспомним, что носитель $w_i u$ содержится еще в BC . Тогда $w_i u'$ будет ограничением $w_i u$ на $AD' \cap BC = AD' \cap BC'$. Аналогично устанавливается, что $w u'_i$ будет ограничением $w u_i$ на $BC' \cap AD = AD' \cap BC'$. Тогда из равенства $w_i u = w u_i$ вытекает $w_i u' = w u'_i$.

На основании доказанного можно утверждать, что $f_1 = u'_1 u'^{-1}, \dots, f_s = u'_s u'^{-1}$ также является правым приведенным представлением выбранного набора. Из условия минимальности представления $f_1 = u_1 u^{-1}, \dots, f_s = u_s u^{-1}$

вытекает, что оба представления должны совпадать. Тогда $C = C'$ и $D = D'$. Вспомним теперь процесс построения множеств C' и D' . Мы, исходя из подмножества $A \cap BC$ множества A , на каждом шаге добавляли элементы, которые получались из построенных ранее умножением слева на элементы одного из множеств $A^{-1}A$, $B^{-1}B$, $A^{-1}B$, $B^{-1}A$. Число добавляемых элементов не выше $|C| + |D|$. Поэтому, если взять $l = 2(|C| + |D|) + 1$, то $C \cup D$ содержится в l -й степени множества $A \cup A^{-1} \cup B \cup B^{-1}$. Число элементов этой степени зависит только от $|A|, |B|, |C|, |D|$. Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

2.2. Приведем некоторые известные факты о жестких группах, их можно найти в [2, 3].

Предложение 1. Пусть G — жесткая группа. Тогда условие $x \in \rho_i(G)$ записывается как $\exists$ -формулой (в сигнатуре теории групп), так и $\forall$ -формулой.

Предложение 2. Пусть G — делимая m -жесткая группа и $G = G_1 G_2 \dots G_m$ — ее расщепление.

(1) Всякая подгруппа G_i совпадает с централизатором любого своего нетривиального элемента.

(2) Любой элемент из $\rho_i(G) \setminus \rho_{i+1}(G)$ сопряжен с некоторым элементом из G_i .

(3) Любое другое расщепление группы G сопряжено с данным с помощью некоторого элемента из G .

(4) Если G — подгруппа делимой m -жесткой группы H и H_i обозначает централизатор в H нетривиального элемента $g_i \in G_i$, то $H = H_1 H_2 \dots H_m$ — расщепление группы H , согласованное с данным расщеплением G , т. е. $G_i = G \cap H_i$.

(5) С помощью произвольного элемента $a \in G \setminus \rho_2(G)$ можно построить расщепление $G = G'_1 G'_2 \dots G'_m$, если положить G'_1 равным централизатору элемента a , а далее при $i > 1$ множество $G'_i \setminus \{1\}$ полагается равным $\{x \in \rho_i(G) \setminus \rho_{i+1}(G) \mid [x, x^a] = 1\}$.

Предложение 3. Пусть G, G' — делимые m -жесткие группы и

$$G = G_1 G_2 \dots G_m, \quad G' = G'_1 G'_2 \dots G'_m$$

— их расщепления. Выберем для каждого i какую-то базу E_i пространства G_i над телом $Q(G_1 \dots G_{i-1})$, затем базу E'_i пространства G'_i над телом $Q(G'_1 \dots G'_{i-1})$. Пусть $|E_i| = |E'_i|$ для всех i . Тогда любой набор биекций $E_i \rightarrow E'_i$ определяет изоморфизм $G \rightarrow G'$.

Пусть $G \leq H$ — делимые m -жесткие группы и

$$G = G_1 G_2 \dots G_m, \quad H = H_1 H_2 \dots H_m$$

— их согласованные расщепления. Говорят, что G — независимая подгруппа в H (или группа G независимо вложена в H), если для всякого i любая система элементов из G_i , линейно независимая над кольцом $\mathbb{Z}[G_1 \dots G_{i-1}]$ (равносильно телом $Q(G_1 \dots G_{i-1})$), остается линейно независимой над кольцом $\mathbb{Z}[H_1 \dots H_{i-1}]$ (телом $Q(H_1 \dots H_{i-1})$).

Предложение 4. Элементарные подмодели делимой m -жесткой группы — это в точности независимые m -ступенно разрешимые делимые подгруппы.

Следующий факт хорошо известен.

Предложение 5. Жесткие группы упорядочиваемы.

3. Доказательство теоремы

По условию найдется элемент $a \in A \setminus \rho_2(G)$. Согласно утверждению (5) из предложения 2 через этот элемент строим расщепление $G = G_1 G_2 \dots G_m$. Подгруппы G_i с учетом предложения 1 определяются формулами с параметром a . Пусть $g = g_1 \dots g_m$ — соответствующее расщепление элемента $g \in G$. Можно утверждать, что

$$g \in \text{dcl}(A) \Leftrightarrow g_1, \dots, g_m \in \text{dcl}(A).$$

Аналогично

$$g \in \text{acl}(A) \Leftrightarrow g_1, \dots, g_m \in \text{acl}(A).$$

Поэтому имеется расщепление $D_1 \dots D_m$ подгруппы $D = \text{dcl}(A)$, согласованное с выбранным расщеплением G . Докажем, что D — делимая подгруппа. Для этого достаточно установить: если $d \in D_k$, $0 \neq u \in \mathbb{Z}[D_1 \dots D_{k-1}]$, то на модульном языке $du^{-1} \in D_k$. Пусть $u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$, где $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{Z}$, b_i — различные элементы из $D_1 \dots D_{k-1}$. По условию имеются формулы $\varphi(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ с параметрами из A , множествами решений которых являются соответственно $\{d\}, \{b_1\}, \dots, \{b_n\}$. Тогда формула

$$\exists y \exists y_1 \dots \exists y_n (\varphi(y) \wedge \varphi_1(y_1) \wedge \dots \wedge \varphi_n(y_n) \wedge (x \in G_k) \wedge (y = x(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n)))$$

определяет элемент du^{-1} . Следовательно, D — делимая подгруппа и первое утверждение теоремы доказано.

Так как множество $\text{acl}(A)$ алгебраически замкнуто, оно определимо замкнуто и тогда по предыдущему является делимой подгруппой, содержащей делимое замыкание A . Элементарное замыкание множества A также содержит его делимое замыкание. Поэтому для наших целей можно предполагать, что само множество A является делимой подгруппой. После этого второе утверждение теоремы, очевидно, будет вытекать из следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $H \leq G$ — делимые m -жесткие группы. Тогда алгебраическая замкнутость подгруппы H в G равносильна элементарности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем согласованные расщепления

$$H = H_1 H_2 \dots H_m, \quad G = G_1 G_2 \dots G_m.$$

Покажем, что из элементарности H следует алгебраическая замкнутость. Для этого в предположении элементарности H достаточно установить: если $g \in G_k \setminus H_k$, то $g \notin \text{acl}(H)$. Покажем это. В каждом из векторных пространств $H_1, H_2, \dots, H_m$ над соответствующими телами $\mathbb{Q}, Q(H_1), \dots, Q(H_1 \dots H_{m-1})$ выберем базы $E_1, E_2, \dots, E_m$. Дополним их множествами $E'_1, E'_2, \dots, E'_m$ до баз пространств $G_1, G_2, \dots, G_m$ над телами $\mathbb{Q}, Q(G_1), \dots, Q(G_1 \dots G_{m-1})$ так, что $g \in E'_k$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ отображение множества

$$E_1 \cup E'_1 \cup E_2 \cup E'_2 \cup \dots \cup E_m \cup E'_m$$

в G , которое тождественно на всех элементах кроме g и переводит g в g^n (на модульном языке в gn), в силу предложения 3 продолжается до автоморфизма группы G , который тождествен на H . Следовательно, $\text{tr}_H(g) = \text{tr}_H(g^n)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $g \notin \text{acl}(H)$.

Пусть теперь H не является элементарной подгруппой, докажем, что она не алгебраически замкнута. По предложению 3 в каком-то пространстве H_k , оно рассматривается над телом $Q(H_1 \dots H_{k-1})$, найдется линейно независимый набор элементов $(e_1, \dots, e_n, e)$, который, однако, зависим на телом $Q(G_1 \dots G_{k-1})$.

Можно дополнительно предполагать, что любой собственный поднабор набора $(e_1, \dots, e_n, e)$ линейно независим над $Q(G_1 \dots G_{k-1})$. Пусть $e = e_1 f_1 + \dots + e_n f_n$, где $(f_1, \dots, f_n)$ — набор элементов из $Q(G_1 \dots G_{k-1})$, он состоит из ненулевых элементов и определяется однозначно. Зафиксируем правое минимальное приведенное представление

$$f_1 = u_1 u^{-1}, \dots, f_n = u_n u^{-1}$$

рассматриваемого набора дробей. Пусть $\{b_1, \dots, b_s\}$ — носитель представления и

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_s b_s, \quad u_1 = \alpha_{11} b_1 + \dots + \alpha_{1s} b_s, \dots, u_n = \alpha_{n1} b_1 + \dots + \alpha_{ns} b_s,$$

где $\alpha_i, \alpha_{ij} \in \mathbb{Z}$. По условию $\{b_1, \dots, b_s\} \not\subseteq H$, для определенности $b_1 \notin H$. Выберем для набора $(e_1, \dots, e_n, e)$ неприводимую почти определяющую формулу $\varphi(x_1, \dots, x_n, x)$ с параметрами из H . Отметим, что любой набор, являющийся решением формулы φ , обязан содержаться в H_k . Далее рассмотрим формулу

$$\begin{aligned} & \psi(x_1, \dots, x_n, x, y_1, \dots, y_s) \\ &= \varphi(x_1, \dots, x_n, x) \wedge (y_1 \in G_1 \dots G_{k-1}) \wedge \dots \wedge (y_s \in G_1 \dots G_{k-1}) \wedge \bigwedge_{i \neq j} (y_i \neq y_j) \\ & \wedge (x(\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_s y_s) = x_1(\alpha_{11} y_1 + \dots + \alpha_{1s} y_s) + \dots + x_n(\alpha_{n1} y_1 + \dots + \alpha_{ns} y_s)). \end{aligned}$$

По построению набор $(e_1, \dots, e_n, e, b_1, \dots, b_s)$ является решением формулы ψ . Утверждается, что эта формула будет почти определяющей для указанного набора, а тогда $b_1 \in \text{acl}(H) \Rightarrow \text{acl}(H) > H$.

Итак, необходимо доказать конечность множества всех решений ψ . Пусть $(e'_1, \dots, e'_n, e', b'_1, \dots, b'_s)$ — произвольное решение формулы ψ . Так как набор $(e'_1, \dots, e'_n, e')$ является решением формулы φ , для него имеется лишь конечное число возможностей. Из условия $\text{tr}_H(e_1, \dots, e_n, e) = \text{tr}_H(e'_1, \dots, e'_n, e')$ вытекают следующие факты: набор $(e'_1, \dots, e'_n)$ линейно независим над $Q(G_1 \dots G_{k-1})$; имеется однозначное разложение e' в виде линейной комбинации $e' = e'_1 f'_1 + \dots + e'_n f'_n$, где дроби $f'_i \in Q(G_1 \dots G_{k-1})$ могут быть представлены в виде

$$u'_i u'^{-1}, \quad u' = \alpha_1 b'_1 + \dots + \alpha_s b'_s, \quad u'_i = \alpha_{i1} b'_1 + \dots + \alpha_{is} b'_s;$$

указанное представление набора дробей $(f'_1, \dots, f'_n)$ является минимальным приведенным. По лемме 2 число приведенных минимальных представлений набора дробей $(f'_1, \dots, f'_n)$ конечно, а тогда и число возможностей для набора элементов $(b'_1, \dots, b'_s)$ также конечно. Это и требовалось доказать. Лемма, а вместе с ней и теорема, доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Покажем на примере, что $\text{dcl}(A)$ может быть больше делимого замыкания множества A .

Пусть $G = M(2, 1)$, $G_1 G_2$ — расщепление группы G , $\{a, b\}$ — база G_1 над $\mathbb{Q}$, $1 \neq c \in G_2$, $A = \{a, c, c^{1+b}\}$. Делимое замыкание множества A будет равно произведению группы $a^{\mathbb{Q}}$ и аддитивной группы векторного пространства над полем $Q(a^{\mathbb{Q}})$ с базой $\{c, c^{1+b}\}$. Оно изоморфно $M(1, 2)$. В то время как определяемое замыкание содержит элемент b , он определяется формулой $\varphi(x) = ([x, a] = 1) \wedge (c^{1+x} = c^{1+b})$ с параметрами из A , и тогда $\text{dcl}(A) = G$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Groups and model theory. GAGTA book 2. Berlin; Boston: De Gruyter, 2021.
2. Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 5. С. 593–612.
3. Мясников А. Г., Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. II. Стабильность, насыщенность и элементарные подмодели // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 43–56.
4. Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. III. Однородность и элиминация кванторов // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 733–748.
5. Романовский Н. С. Делимые жесткие группы. IV. Определимые подгруппы // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 3. С. 344–366.
6. Marker D. Model theory: An introduction. New York: Springer-Verl., 2002.
7. Hodges W. Model theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1993.

Поступила в редакцию 1 февраля 2024 г.

После доработки 1 февраля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Романовский Николай Семенович (ORCID 0000-0002-0755-2057)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`rmnvski@math.nsc.ru`

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО
КОМПЛЕКСНОГО МОДИФИЦИРОВАННОГО
УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ФРИЗА
(КМКДФ) С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ
ЧЛЕНАМИ В КЛАССЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
БЕСКОНЕЧНОЗОННЫХ ФУНКЦИЙ

А. Б. Хасанов, Т. Г. Хасанов

Аннотация. Метод обратной спектральной задачи применяется для интегрирования нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (кМКДФ) с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций. Выводится эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением уравнения кМКДФ. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе шестикратно непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Кроме того, установлена разрешимость задачи Коши для уравнения кМКДФ с дополнительными членами в классе шестикратно непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.412

Ключевые слова: комплексное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза, оператор Дирака, спектральные данные, система дифференциальных уравнений Дубровина, формулы следов.

1. Введение

Обратные спектральные задачи играют значительную роль при интегрировании некоторых важных эволюционных уравнений математической физики и составляют одно из важнейших достижений прошлого века. В этом направлении прорыв был сделан в статье Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1]. Им удалось найти глобальное решение задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза (КДФ) сведением ее к обратной задаче рассеяния для самосопряженного оператора Штурма — Лиувилля. Обратная задача рассеяния для оператора Штурма — Лиувилля впервые была решена в работе Л. Д. Фаддеева [2], затем В. А. Марченко [3], Б. М. Левитаном [4]. Лакс [5] показал универсальность метода обратной задачи рассеяния (МОЗР) и обобщил уравнение КДФ, вводя понятие высшего уравнения КДФ. В этом направлении следующий важный результат был получен В. Е. Захаровым и А. Б. Шабатом [6], им удалось проинтегрировать нелинейное уравнение Шредингера (НУШ). Вскоре Вадати [7], опираясь на идеи работы [6], предложил метод решения задачи Коши для модифицированного уравнения КДФ (мКДФ). Комбинируя фокусирующее

нелинейное уравнение Шредингера и комплексное модифицированное уравнение КдФ, Хирота [8] предложил метод решения так называемого уравнения Хироты (ФНУШ-кмКдФ). В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев [9], а также Абловиц, Кауп, Ньюэлл и Сигур [10] показали, что МОЗР также можно применить и к решению уравнения синус-Гордона (sГ). Следует отметить, что в работах [11–17] прямым методом было проинтегрировано модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза-синус Гордона (мКдФ-sГ) вида

$$u_{xt} + a \left(\frac{3}{2} u_x^2 u_{xx} + u_{xxxx} \right) = b \sin u$$

в классе быстро убывающих функций, здесь $a, b = \text{const}$. Уравнение мКдФ-sГ было предложено в [11] в качестве модельного для описания нелинейных колебаний в решетке атомов. Наряду с уравнениями КдФ и sГ уравнение мКдФ-sГ имеет многочисленные приложения. С помощью его решений можно построить двумерные поверхности с заданными условиями, накладываемыми на кривизну. Важным достижением в теории уравнения мКдФ-sГ явилось определение аналитических солитонных и многосолитонных решений. Применение МОЗР к уравнениям НУШ, мКдФ, sГ, ФНУШ-кмКдФ и мКдФ-sГ опирается на задачу рассеяния для оператора Дирака на всей оси:

$$L = i \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} & -q(x) \\ r(x) & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Обратная задача рассеяния для оператора Дирака на всей оси изучалась в работах [18–21]. Известно, что оператор L не является самосопряженным, в быстро убывающем случае имеет конечное число кратных комплексных собственных значений и может иметь спектральные особенности, которые лежат в непрерывном спектре. Данные рассеяния несамосопряженного оператора Дирака, кроме характеристик непрерывного спектра, включают в себя дискретный спектр и спектральные особенности. В работах [6–17] в случае, когда все собственные значения соответствующего оператора Дирака простые, а спектральные особенности отсутствуют, были проинтегрированы такие нелинейные эволюционные уравнения, как НУШ, мКдФ, sГ, ФНУШ-кмКдФ и мКдФ-sГ. В связи с этим актуальным является поиск решения нелинейных эволюционных уравнений без источника и с источником, соответствующим кратным собственным значениям оператора Дирака. Этим задачам посвящены статьи [22–25].

С помощью метода обратной задачи для оператора Штурма — Лиувилля с периодическим потенциалом, когда в спектре имеется только конечное число нетривиальных лакун, в работах Итса, В. Б. Матвеева [26] и Б. А. Дубровина, С. П. Новикова [27] была доказана полная интегрируемость уравнения КдФ в классе конечнозонных периодических и квазипериодических функций. Замечательная часть этих работ заключается в том, что решение обратной задачи для случаев конечнозонных потенциалов было сведено в них к проблеме обращения Якоби абелевых интегралов на двулистной компактной римановой поверхности с конечным числом действительных точек ветвления. Кроме того, для конечнозонных потенциалов (т. е. для решения уравнения КдФ) была выведена явная формула через тета-функцию Римана. Следует отметить, что в работах [28–34] с помощью МОЗР для периодического оператора Дирака была установлена полная интегрируемость нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных функций, а

также для конечнозонных решений была выведена явная формула через тета-функции Римана. Таким образом, в этих работах была доказана разрешимость задачи Коши для нелинейных эволюционных уравнений при любых конечнозонных начальных данных. Более подробно эта теория изложена в монографиях [3, 4] и [35–37], а также в [38, 39].

Известно, что в построении и исследовании так называемых решений Йоста в теории рассеяния для возмущенного конечнозонного оператора Штурма — Лиувилля важную роль сыграла функция Коши невозмущенного конечнозонного оператора Штурма — Лиувилля. В этом случае Б. М. Левитан и А. Б. Хасанов [40] получили равномерную оценку для функции Коши. Эта оценка позволила А. Б. Хасанову [41] решить прямую и обратную задачи для возмущенного конечнозонного оператора Штурма — Лиувилля. В работах [42, 43] найдена асимптотика решения задачи Коши для уравнения КдФ и НУШ в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$. Кроме того, решения нелинейных уравнений с источниками, а также с дополнительным членом в классе периодических функций для различных задач изучались в [44–50].

Хорошо известно, что нахождение явной формулы для решения нелинейного эволюционного уравнения КдФ, мКдФ, НУШ, sГ, ФНУШ-кмКдФ и мКдФ-sГ в классе периодических функций существенно зависит от количества нетривиальных лакун в спектре периодического оператора Штурма — Лиувилля и оператора Дирака.

В связи с этим класс периодических функции удобно разбить на два множества:

- 1) класс периодических конечнозонных функций;
- 2) класс периодических бесконечнозонных функций.

Известно [51], что если $q(x) = 2a \cos 2x$, $a \neq 0$, то в спектре оператора Штурма — Лиувилля $Ly \equiv -y'' + q(x)y$, $x \in \mathbb{R}$, открыты все лакуны, иначе говоря, $q(x)$ — периодический бесконечнозонный потенциал. Аналогичные примеры имеются для периодического оператора Дирака [52].

Следует отметить, что за счет комбинации дефокусирующего нелинейного уравнения Шредингера и комплексного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза (ДНУШ-кмКдФ) в работе [53] предложен метод построения точных решений уравнений типа Хироты

$$iq_t + b(t)(q_{xx} - 2|q|^2q) - ia(t)(q_{xxx} - 6|q|^2q_x) = 0, \\ a(t), b(t) \in C([0, \infty)), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

в классе π -периодических бесконечнозонных функций. На основе идей работы [53] в [54] была установлена разрешимость задачи Коши для уравнения мКдФ-chГ вида

$$q_{xt} = a(t) \left[q_{xxxx} - \frac{3}{2} q_x^2 q_{xx} \right] + b(t) \operatorname{ch} q, \quad q = q(x, t), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций. Здесь $a(t), b(t) \in C([0; \infty))$ — заданные непрерывные ограниченные функции. Однако, несмотря на значительное число работ в этом направлении, многие задачи остаются недостаточно исследованными либо не решены. В частности, сюда относится комплексное модифицированное уравнение Кортевега — де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций. В статье представлен алгоритм нахождения решения задачи Коши для уравнения кмКдФ и установлена разрешимость в классе шестикратно непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения кмКдФ с дополнительными членами вида

$$\begin{aligned} p_t &= a(t)[p_{xxx} - 6(p^2 + q^2)p_x] + b(t)p_x + c(t)q, \\ q_t &= a(t)[q_{xxx} - 6(p^2 + q^2)q_x] + b(t)q_x - c(t)p \end{aligned} \quad (1)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= p_0(x), \quad q(x, t)|_{t=0} = q_0(x), \\ p_0(x + \pi) &= p_0(x), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2)$$

в классе действительных бесконечнозонных π -периодических по x функций:

$$\begin{aligned} p(x + \pi, t) &= p(x, t), \quad q(x + \pi, t) = q(x, t), \\ p(x, t), q(x, t) &\in C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $a(t), b(t) \in C([0; \infty))$ — заданные непрерывные ограниченные функции.

В работе предлагается алгоритм построения бесконечнозонных решений $p(x, t), q(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0$, задачи (1)–(3) сведением ее к обратной спектральной задаче для самосопряженного оператора Дирака:

$$L(t)y \equiv B \frac{dy}{dx} + \Omega(x, t)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (4)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x, t) = \begin{pmatrix} p(x, t) & q(x, t) \\ q(x, t) & -p(x, t) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Такая постановка задачи для уравнения (1) ранее не исследовалась.

Если запишем уравнения кмКдФ с дополнительными членами вида

$$u_t = a(t)(u_{xxx} - 6|u|^2 u_x) + b(t)u_x - ic(t)u, \quad i = \sqrt{-1},$$

эквивалентными ему уравнениями на вещественную и мнимую части функции $u(x, t) = p(x, t) + iq(x, t)$, то получим систему уравнений (1). Отметим, что если в уравнении (1) коэффициенты $a(t) = 1, b(t) = 0, c(t) = 0$, то уравнение (1) принимает классический вид уравнения кмКдФ:

$$p_t = p_{xxx} - 6(p^2 + q^2)p_x, \quad q_t = q_{xxx} - 6(p^2 + q^2)q_x,$$

т. е.

$$u_t = u_{xxx} - 6|u|^2 u_x.$$

3. Необходимые сведения о периодической обратной спектральной задаче

В этом разделе для полноты изложения приведем некоторые основные факты, касающиеся обратной спектральной задачи для оператора Дирака с периодическими коэффициентами (см. [55–59]).

Рассмотрим систему уравнений Дирака на всей прямой

$$Ly \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — действительные π -периодические функции из класса $C^1(\mathbb{R})$, а λ — комплексный параметр.

Обозначим через $c(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^T$ и $s(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^T$ решения уравнения (5) с начальными условиями $c(0, \lambda) = (1, 0)^T$ и $s(0, \lambda) = (0, 1)^T$ соответственно. Функция $\Delta(\lambda) = c_1(\pi, \lambda) + s_2(\pi, \lambda)$ называется *функцией Ляпунова* для уравнения (5). Кроме того, для решений $c(x, \lambda)$ и $s(x, \lambda)$ при больших $|\lambda|$ имеют место следующие асимптотические формулы:

$$c(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \lambda x \\ \sin \lambda x \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} [p(x) - p(0)] \cos \lambda x \\ -[p(x) + p(0)] \sin \lambda x \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} [q(x) + q(0)] \sin \lambda x + a(x) \sin \lambda x \\ [q(x) - q(0)] \cos \lambda x - a(x) \cos \lambda x \end{pmatrix} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$s(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda x \\ \cos \lambda x \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} -[p(x) + p(0)] \sin \lambda x \\ -[p(x) - p(0)] \cos \lambda x \end{pmatrix} + \frac{1}{2\lambda} \begin{pmatrix} [q(x) - q(0)] \cos \lambda x + a(x) \cos \lambda x \\ -[q(x) + q(0)] \sin \lambda x - a(x) \sin \lambda x \end{pmatrix} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \lambda| x}}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

где

$$a(x) = \int_0^x (p^2(s) + q^2(s)) ds.$$

Из этих асимптотик при действительных λ получим

$$\Delta(\lambda) = 2 \cos \lambda \pi + \frac{1}{\lambda} a(\pi) \sin \lambda \pi + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty,$$

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4 \sin^2 \lambda \pi + \frac{4a(\pi)}{\lambda} \sin \lambda \pi \cos \lambda \pi + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \quad |\lambda| \rightarrow \infty.$$

Вектор-функции

$$\psi^\pm(x, \lambda) = (\psi_1^\pm(x, \lambda), \psi_2^\pm(x, \lambda))^T = c(x, \lambda) + m^\pm(\lambda) s(x, \lambda)$$

называются *решениями Флоке уравнения* (5). Функции Вейля — Титчмарша определяются следующими формулами [67]:

$$m^\pm(\lambda) = \frac{s_2(\pi, \lambda) - c_1(\pi, \lambda) \mp \sqrt{\Delta^2(\lambda) - 4}}{2s_1(\pi, \lambda)}.$$

Спектр оператора L чисто непрерывен и состоит из множества

$$\sigma(L) \equiv \{\lambda \in \mathbb{R} : |\Delta(\lambda)| \leq 2\} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}) \right).$$

Интервалы $(\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n})$, $n \in \mathbb{Z}$, называются *лакунами*, где λ_{4k-1} , λ_{4k} — собственные значения периодической задачи ($y(0) = y(\pi)$), а λ_{4k+1} , λ_{4k+2} — собственные значения антипериодической задачи ($y(0) = -y(\pi)$) для уравнения (5).

Корни уравнения $s_1(\pi, \lambda) = 0$ обозначим через ξ_n , $n \in \mathbb{Z}$. Они совпадают с собственными значениями задачи Дирихле для системы (5) с граничными условиями $y_1(0) = 0$, $y_1(\pi) = 0$ и при этом $\xi_n \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Числа ξ_n , $n \in \mathbb{Z}$, и знаки $\sigma_n = \operatorname{sgn}\{s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n)\}$, $n \in \mathbb{Z}$, называются *спектральными параметрами оператора L* . Если $\xi_n = \lambda_{2n-1}$ или $\xi_n = \lambda_{2n}$, то $s_2(\pi, \xi_n) - c_1(\pi, \xi_n) = 0$. В этом случае для определенности примем $\sigma_n = 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Спектральные параметры ξ_n , $\sigma_n = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, и границы спектра λ_n ,

$n \in \mathbb{Z}$, называются *спектральными данными оператора Дирака L* . Задача нахождения спектральных данных оператора L называется *прямой задачей*, а восстановление коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ по спектральным данным — *обратной задачей*. Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ оператора L определяются однозначно по спектральным данным $\{\lambda_n, \xi_n, \sigma_n = \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$ (см. [56–59, 65]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ периодического оператора Дирака L называются *бесконечнозонными функциями*, если границы лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют условиям

$$\dots < \lambda_{-3} < \xi_{-1} < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \xi_0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \xi_1 < \lambda_2 < \dots$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ периодического оператора Дирака L называются *конечнозонными функциями*, если существует такое конечное число N , что для всех $|n| > N$ выполняются равенства $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = \xi_n$, $n = N+1, N+2, \dots$.

Если в (5) вместо $p(x)$ и $q(x)$ рассмотреть $p(x+\tau)$ и $q(x+\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, то увидим, что границы спектра $\lambda_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, полученной задачи не зависят от параметра τ , т. е. $\lambda_n(\tau) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры зависят от параметра τ , $\xi_n = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n = \sigma_n(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, и являются периодическими функциями, т. е. $\xi_n(\tau+\pi) = \xi_n(\tau)$, $\sigma_n(\tau+\pi) = \sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$. Эти спектральные параметры удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина (см. [65]):

$$\frac{\partial \xi_n(\tau)}{\partial \tau} = 2(-1)^{n-1} \sigma_n(\tau) \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} f_n(\xi(\tau)) g_n(\xi(\tau)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6)$$

и начальным условиям

$$\xi_n(\tau)|_{\tau=0} = \xi_n(0), \quad \sigma_n(\tau)|_{\tau=0} = \sigma_n(0), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (7)$$

где

$$f_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau))}{(\xi_k(\tau) - \xi_n(\tau))^2}}, \quad (8)$$

$$g_n(\xi) = \xi_n(\tau) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau) \right),$$

$$\xi \equiv \xi(\tau) = (\dots, \xi_{-1}(\tau), \xi_0(\tau), \xi_1(\tau), \dots),$$

$$\sigma \equiv \sigma(\tau) = (\dots, \sigma_{-1}(\tau), \sigma_0(\tau), \sigma_1(\tau), \dots).$$

Знаки $\sigma_n(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, меняются на противоположный при каждом столкновении значения $\xi_n(\tau)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, $n \in \mathbb{Z}$.

В целях дальнейшего исследования задачи Коши (6), (7) сделаем замену переменных

$$\xi_n(\tau) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда система (6), (7) примет вид

$$\frac{dx_n(\tau)}{d\tau} = H_n(\dots, x_{-1}(\tau), x_0(\tau), x_1(\tau), \dots), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (9)$$

$$x_n(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n(0) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (10)$$

Здесь

$$H_n(x(\tau)) = (-1)^{n-1} \sigma_n(0) f_n(\dots, \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 x_0(\tau), \dots) \\ \times g_n(\dots, \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 x_0(\tau), \dots), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Положим $H(x) = (\dots, H_{-1}(x), H_0(x), H_1(x), \dots)$. Для исследования разрешимости системы (9), (10) введем в рассмотрение банахово пространство $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K} = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{2n-1} - \lambda_{2n}) |x_n| < \infty \right\}.$$

Систему уравнений (9), (10) можно записать в виде одного уравнения в банаховом пространстве $\mathbb{K}$:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = H(x(\tau)), \quad x(\tau)|_{\tau=0} = x^0 \in \mathbb{K}.$$

В работе [58] показано, что при всех $x, y \in \mathbb{K}$ выполняется неравенство

$$\|H(x) - H(y)\| \leq C \|x - y\|,$$

где

$$C = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) < \infty. \quad (11)$$

Ряд (11) сходится, если коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ оператора Дирака удовлетворяют условиям

$$p(x + \pi) = p(x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad q(x + \pi) = q(x) \in C^2(\mathbb{R}).$$

Поэтому бесконечная система (6), (7) дифференциальных уравнений Дубровина имеет единственное решение при любых начальных данных. Следовательно, система уравнений Дубровина, а также формулы следов

$$p(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau) \right), \quad (12)$$

$$q(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau) h_k(\xi(\tau)) \quad (13)$$

дают решение обратной задачи. Здесь

$$h_n(\xi(\tau)) = \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} f_n(\xi(\tau)), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (14)$$

Для доказательства формул (12), (13) воспользуемся теоремой Миттаг-Леффлера. Имеем

$$\frac{s_2(\pi, \lambda, \tau) - c_1(\pi, \lambda, \tau)}{s_1(\pi, \lambda, \tau)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_k(\tau) \sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau)) - 4}}{(\lambda - \xi_k(\tau)) \frac{\partial s_1(\pi, \xi_k(\tau), \tau)}{\partial \lambda}} \\ = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_k(\tau) \sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau)) - 4}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_k(\tau), \tau)}{\partial \lambda}} \frac{1}{(1 - \frac{\xi_k(\tau)}{\lambda})} \right\} \\ = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\sigma_k(\tau) \sqrt{\Delta^2(\xi_k(\tau)) - 4}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_k(\tau), \tau)}{\partial \lambda}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{\xi_k(\tau)}{\lambda} \right)^n \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2(-1)^{k-1} \sigma_k(\tau) h_k(\xi(\tau)) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

С другой стороны, используя асимптотики для решений $c(x, \lambda, \tau)$ и $s(x, \lambda, \tau)$ при больших $|\lambda|$, имеем

$$\frac{s_2(\pi, \lambda, \tau) - c_1(\pi, \lambda, \tau)}{s_1(\pi, \lambda, \tau)} = \frac{2}{\lambda} q(\tau) + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Сравнивая эти асимптотики, получаем формулу (13).

Если использовать вышеуказанный метод для функции

$$\frac{\Delta^2(\lambda) - 4}{4s_1^2(\pi, \lambda, \tau)},$$

то получим формулу (12).

В работе [58] с использованием системы уравнений Дубровина и формул следов доказаны следующие теоремы, которые связывают убывание длин лакун с аналитичностью коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений Дирака. Связь гладкости потенциалов и убывания длин лакун для различных пространств изучена в работе [50].

Теорема 3.1. Если $p(x)$ и $q(x)$ являются периодическими действительными функциями из класса $C^2(R)$ и длины лакун $\gamma_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, экспоненциально убывают, то $p(x)$ и $q(x)$ — действительные аналитические функции на всей прямой.

Теорема 3.2. Если $p(x)$, $q(x)$ — действительные аналитические π -периодические функции, то длины лакуны $\gamma_n \equiv \lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, убывают экспоненциально.

Отметим, что эти теоремы в случае оператора Хилла впервые доказаны в [61].

В работе [57], а также в [59] для оператора Дирака доказан следующий аналог обратной теоремы Борга [63].

Теорема 3.3. Для того чтобы число $\frac{\pi}{2}$ являлось периодом (антипериодом) коэффициентов $p(x)$ и $q(x)$ системы уравнений (5) необходима и достаточна двукратность всех собственных значений антипериодической (периодической) задачи.

4. Эволюция спектральных данных

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 4.1. Пусть $p(x, t)$ и $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, является решением задачи (1)–(3). Тогда границы спектра $\lambda_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора $L(t)$ не зависят от параметра t , т. е. $\lambda_n(t) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{Z}$, а спектральные параметры $\xi_n(t)$, $\sigma_n(t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина

$$\frac{d\xi_n(t)}{dt} = 2(-1)^n \sigma_n(t) h_n(\xi(t)) g_n(\xi(t)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (15)$$

где

$$g_n(\xi(t)) = a(t) [4\xi_n^3(t) + 4p(0, t)\xi_n^2(t) + 2(p^2(0, t) + q^2(0, t) + q_x(0, t))\xi_n(t)]$$

$$\begin{aligned}
 &+ 2(p(0, t)q_x(0, t) - p_x(0, t)q(0, t)) + 2p(0, t)(p^2(0, t) + q^2(0, t)) - p_{xx}(0, t)] \\
 &+ b(t)[- \xi_n(t) - p(0, t)] + \frac{1}{2}c(t), \quad n \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Здесь знаки $\sigma_n(t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, меняются на противоположный при каждом столкновении точки $\xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$, с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(t)|_{t=0} = \xi_n^0, \quad \sigma_n(t)|_{t=0} = \sigma_n^0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где ξ_n^0 , $\sigma_n^0 = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, — спектральные параметры оператора Дирака $L(0)$ с коэффициентами $p_0(x)$, $q_0(x)$. Последовательности $h_n(\xi(t))$, $n \in \mathbb{Z}$, в уравнении (15) определяются формулой (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть π -периодические по x функции $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, удовлетворяют уравнению (1). Пусть $y_n = (y_{n,1}(x, t), y_{n,2}(x, t))^T$, $n \in \mathbb{Z}$, — ортонормированные собственные вектор-функции оператора $L(t)$, рассматриваемого на отрезке $[0, \pi]$ с граничными условиями Дирихле

$$y_1(0, t) = 0, \quad y_1(\pi, t) = 0,$$

соответствующие собственным значениям $\xi_n = \xi_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}$. Дифференцируя по переменной t тождество

$$\xi_n(t) = (L(t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и используя симметричность оператора $L(t)$, имеем

$$\dot{\xi}_n(t) = (\dot{\Omega}(x, t)y_n, y_n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (16)$$

где $\dot{\xi}_n(t) = \frac{\partial \xi_n(t)}{\partial t}$. Используя явный вид скалярного произведения

$$(y, z) = \int_0^\pi [y_1(x)\overline{z_1(x)} + y_2(x)\overline{z_2(x)}] dx, \quad y = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix},$$

запишем равенство (16) в виде

$$\dot{\xi}_n(t) = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)p_t + 2y_{n,1}y_{n,2}q_t] dx. \quad (17)$$

Подставив (1) в (17), получаем равенство

$$\dot{\xi}_n(t) = a(t)I_1(t) + b(t)I_2(t) + c(t)I_3(t), \quad (18)$$

где

$$I_1(t) = 2 \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(p_{xxx} - 6(p^2 + q^2)p_x) + 2y_{n,1}y_{n,2}(q_{xxx} - 6(p^2 + q^2)q_x)] dx,$$

$$I_2(t) = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)p_x + 2y_{n,1}y_{n,2}q_x] dx,$$

$$I_3(t) = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)q - 2y_{n,1}y_{n,2}p] dx.$$

Учитывая следующие рекуррентные соотношения (см. [66, с. 158, 159]):

$$r_k(x, t) = -2 \int_0^x (p(s, t)a_k(s, t) + q(s, t)b_k(s, t))ds + d_k(t), \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

$$a_{k+1}(x, t) = \frac{1}{2}b'_k(x, t) + q(x, t)r_k(x, t), \quad a_0 = 0,$$

$$b_{k+1}(x, t) = -\frac{1}{2}a'_k(x, t) - p(x, t)r_k(x, t), \quad b_0 = 0,$$

и используя обозначения

$$\begin{aligned} a(x, t, \xi_n) &= \sum_{k=0}^3 a_k(x, t)\xi_n^{3-k}(t), & b(x, t, \xi_n) &= \sum_{k=0}^3 b_k(x, t)\xi_n^{3-k}(t), \\ r(x, t, \xi_n) &= \sum_{k=0}^3 r_k(x, t)\xi_n^{3-k}(t), & d(t, \xi_n) &= \sum_{k=0}^3 d_k(t)\xi_n^{3-k}(t), \end{aligned} \quad (19)$$

а также выбирая

$$\begin{aligned} r_0 = d_0 &= 4, & r_1 = d_1 &= 0, & r_2 = d_2 &= 2(p^2 + q^2), & r_3 = d_3 &= 2(pq_x - p_xq), \\ a_0 &= 0, & a_1 &= 4q, & a_2 &= -2p_x, & a_3 &= -q_{xx} + 2q(p^2 + q^2), \\ b_0 &= 0, & b_1 &= -4p, & b_2 &= -2q_x, & b_3 &= p_{xx} - 2p(p^2 + q^2), \end{aligned} \quad (20)$$

получим

$$\begin{aligned} a &= 4q\xi_n^2 - 2p_x\xi_n - q_{xx} + 2q(p^2 + q^2), & b &= -4p\xi_n^2 - 2q_x\xi_n + p_{xx} - 2p(p^2 + q^2), \\ r &= d = 4\xi_n^3 + 2(p^2 + q^2)\xi_n + 2(pq_x - p_xq). \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить первый интеграл:

$$I_1(t) = \int_0^\pi [(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(b' + 2qr - 2\xi_n a) - 2y_{n,1}y_{n,2}(a' + 2pr + 2\xi_n b)] dx.$$

Применяя тождества

$$y'_{n,1} = qy_{n,1} - py_{n,2} - \xi_n y_{n,2}, \quad y'_{n,2} = \xi_n y_{n,1} - py_{n,1} - qy_{n,2},$$

а также (19), нетрудно проверить, что

$$\begin{aligned} (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2)(b' + 2qr - 2\xi_n a) - 2y_{n,1}y_{n,2}(a' + 2pr + 2\xi_n b) \\ = \{[r + b]y_{n,1}^2 - 2ay_{n,1}y_{n,2} + [r - b]y_{n,2}^2\}'. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая π -периодичность функций $b(x, t, \xi_n)$ и $r(x, t, \xi_n)$, находим

$$I_1(t) = (r(0, t, \xi_n) - b(0, t, \xi_n))[y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)]. \quad (21)$$

Используя формулы

$$r(0, t, \xi_n) - b(0, t, \xi_n) = \sum_{k=0}^3 (d_k(t) - b_k(0, t))\xi_n^{3-k}(t),$$

запишем равенство (21) в виде

$$I_1(t) = \sum_{k=0}^3 (d_k(t) - b_k(0, t)) \xi_n^{3-k}(t) [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)]. \quad (22)$$

Учитывая (20), равенство (22) перепишем в виде

$$I_1(t) = [4\xi_n^3(t) + 4p(0, t)\xi_n^2(t) + 2(p^2(0, t) + q^2(0, t) + q_x(0, t))\xi_n(t) - p_{xx}(0, t) + 2(p(0, t)q_x(0, t) - p_x(0, t)q(0, t)) + 2p(0, t)(p^2(0, t) + q^2(0, t))] [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)]. \quad (23)$$

Вычислим интегралы $I_2(t)$ и $I_3(t)$:

$$I_2(t) = \int_0^\pi (y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) dp + \int_0^\pi 2y_{n,1}y_{n,2}dq = \{-p - \xi_n\} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)], \quad (24)$$

$$I_3(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi [2q(y_{n,1}^2 - y_{n,2}^2) - 4py_{n,1}y_{n,2}] dx = \frac{1}{2} [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)]. \quad (25)$$

Подставив (23)–(25) в тождество (18), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_n(t)}{dt} = & [y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t)] \{a(t) [4\xi_n^3 + 4p(0, t)\xi_n^2 \\ & + 2\xi_n(p^2(0, t) + q^2(0, t) + q_x(0, t)) \\ & + 2(p(0, t)q_x(0, t) - p_x(0, t)q(0, t)) + 2p(0, t)(p^2(0, t) + q^2(0, t)) - p_{xx}(0, t)] \\ & + b(t)[- \xi_n(t) - p(0, t)] + (1/2)c(t)\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $s(x, \lambda, t) = (s_1(x, \lambda, t), s_2(x, \lambda, t))^T$ решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям $s_1(0, \lambda, t) = 0$, $s_2(0, \lambda, t) = 1$. Так как собственные значения $\xi_n(t)$ задачи Дирихле для уравнения (4) простые, справедливо равенство

$$y_n(x, t) = \frac{1}{c_n(t)} s(x, \xi_n(t), t),$$

где

$$c_n^2(t) = \int_0^\pi [s_1^2(x, \xi_n, t) + s_2^2(x, \xi_n, t)] dx = -\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, t)}{\partial \lambda} \cdot s_2(\pi, \xi_n, t).$$

Используя это равенство, найдем

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = -\frac{s_2(\pi, \xi_n, t) - \frac{1}{s_2(\pi, \xi_n, t)}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, t)}{\partial \lambda}}.$$

Подставив в это соотношение равенство

$$s_2(\pi, \xi_n, t) - \frac{1}{s_2(\pi, \xi_n, t)} = \sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4},$$

получим

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = -\frac{\sigma_n(t) \sqrt{\Delta^2(\xi_n) - 4}}{\frac{\partial s_1(\pi, \xi_n, t)}{\partial \lambda}}. \quad (26)$$

С учетом разложений

$$\Delta^2(\lambda) - 4 = -4\pi^2 \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_{2k-1})(\lambda - \lambda_{2k})}{a_k^2}, \quad s_1(\pi, \lambda, t) = \pi \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\xi_k(t) - \lambda}{a_k},$$

где $a_0 = 1$ и $a_k = k$ при $k \neq 0$, запишем равенство (26) в виде

$$y_{n,2}^2(\pi, t) - y_{n,2}^2(0, t) = 2(-1)^n \sigma_n(t) \sqrt{(\xi_n(\tau) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau))} f_n(\xi(t)).$$

Здесь последовательность $f_n(\xi(t))$, $n \in \mathbb{Z}$, определяется формулой (8). Используя равенства (18) и (23)–(25), получим (15).

Если заменить граничные условия Дирихле на периодические ($y(0, t) = y(\pi, t)$) или на антипериодические ($y(0, t) = -y(\pi, t)$) граничные условия, то вместо уравнения (15) получим уравнение

$$\frac{d\lambda_n(t)}{dt} = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

которое означает независимость границы спектра оператора $L(t)$ от параметра t . Теорема доказана.

Обозначим через λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau)$, $n \in \mathbb{Z}$, спектральные данные оператора

$$L(\tau, 0)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, 0)y = \lambda y, \quad x, \tau \in \mathbb{R}.$$

Следствие 4.1. Пусть $p(x, t)$, $q(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, — решение задачи (1)–(3). Тогда спектральные данные $\lambda_n(\tau, t)$, $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора

$$L(\tau, t)y \equiv By' + \Omega(x + \tau, t)y = \lambda y, \quad x, \tau \in \mathbb{R},$$

удовлетворяют аналогу системы уравнений Дубровина:

$$\lambda_n(\tau, t) = \lambda_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) h_n(\xi(\tau, t)) g_n(\xi(\tau, t)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} g_n(\xi(\tau, t)) &= a(t) [4\xi_n^3(\tau, t) + 4p(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t) + 2(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t))\xi_n(\tau, t) \\ &\quad + 2(p(\tau, t)q_\tau(\tau, t) - p_\tau(\tau, t)q(\tau, t)) + 2p(\tau, t)(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t)) - p_{\tau\tau}(\tau, t)] \\ &\quad + b(t)[- \xi_n(\tau, t) - p(\tau, t)] + \frac{1}{2}c(t), \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_n(\xi(\tau, t)) &= \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} f_n(\xi(\tau, t)), \\ f_n(\xi(\tau, t)) &= \sqrt{\prod_{k=-\infty, k \neq n}^{\infty} \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \xi(\tau, t) &= (\dots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_0(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \dots), \\ \sigma(\tau, t) &= (\dots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_0(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \dots). \end{aligned}$$

При этом знаки $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, меняются на противоположные при каждом столкновении точки $\xi_n(\tau, t)$ с границами своей лакуны $[\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$. Кроме того, выполняются следующие начальные условия:

$$\xi_n(\tau, t)|_{t=0} = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, t)|_{t=0} = \sigma_n^0(\tau), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (28)$$

Воспользуемся формулами следов

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right), \quad (29)$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)), \quad (30)$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\lambda_{2k-1}^2 + \lambda_{2k}^2}{2} - \xi_k^2(\tau, t) \right) \quad (31)$$

и заменой переменных

$$\xi_n(\tau, t) = \lambda_{2n-1} + (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}) \sin^2 x_n(\tau, t), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (32)$$

Тогда система уравнений Дубровина (27), (28) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_n(\tau, t)}{dt} &= H_n(\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots), \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x_n(\tau, t)|_{t=0} &= x_n^0(\tau) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_n^0(\tau) - \lambda_{2n-1}}{\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1}}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} H_n(x(\tau, t)) &= (-1)^n \sigma_n^0(\tau) f_n(\dots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), \dots) \\ &\quad \times g_n(\dots, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1(\tau, t), \dots), \\ \sigma_n^0(\tau) &= \sigma_n(\tau, t) \operatorname{sgn}\{\sin x_n(\tau, t) \cos x_n(\tau, t)\}. \end{aligned}$$

Для изучения задачи Коши (33) введем банахово пространство

$$\mathbb{K} = \left\{ x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) : \|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_{2n} - \lambda_{2n-1})(1 + |n|^2)|x_n| < \infty \right\}.$$

Перепишем систему (33) в виде одного уравнения в банаховом пространстве $\mathbb{K}$:

$$\frac{dx(\tau, t)}{dt} = H(x(\tau, t)), \quad x(\tau, t)|_{t=0} = x^0(\tau), \quad x^0(\tau) \in \mathbb{K}. \quad (34)$$

Из условий

$$p_0(x + \pi) = p_0(x), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x), \quad p_0(x), q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R},$$

и асимптотики собственных значений периодической и антипериодической задач для системы уравнений Дирака получим следующие оценки (см. [56, с. 98]):

$$\begin{aligned} \lambda_{2k} &= k + \sum_{j=1}^7 c_j k^{-j} + 2^{-6} |k|^{-6} |q_{2k}^6| + |k|^{-7} \varepsilon_k^+, \\ \lambda_{2k-1} &= k + \sum_{j=1}^7 c_j k^{-j} - 2^{-6} |k|^{-6} |q_{2k}^6| + |k|^{-7} \varepsilon_k^-, \\ \gamma_k &\equiv \lambda_{2k} - \lambda_{2k-1} = \frac{|q_{2k}^6|}{2^5 |k|^6} + \frac{\delta_k}{|k|^7}, \quad \delta_k = \varepsilon_k^+ - \varepsilon_k^-, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$q_{2k}^6 \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi Q_0^{(6)}(t) e^{-2ikt} dt, \quad Q_0(t) = q_0(t) - ip_0(t), \quad \sum_{k=-\infty}^\infty (\varepsilon_k^\pm)^2 < \infty, \quad \sum_{k=-\infty}^\infty \delta_k^2 < \infty.$$

Отсюда, учитывая $\xi_n(\tau, t) \in [\lambda_{2n-1}, \lambda_{2n}]$, получим

$$\inf_{k \neq n} |\xi_n(\tau, t) - \xi_k(\tau, t)| \geq a > 0. \quad (36)$$

Пользуясь равенствами (35) и неравенством (36), оценим функции

$$|f_n(x(\tau, t))|, \quad \left| \frac{\partial f_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right| \quad \text{и} \quad |g_n(x(\tau, t))|, \quad \left| \frac{\partial g_n(x(\tau, t))}{\partial x_m} \right|.$$

Лемма 4.1. *Справедливы следующие оценки:*

$$C_1 \leq |f_n(x)| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| \leq C_3 \gamma_m, \quad (37)$$

$$|g_n(x)| \leq C_4 |n|^3, \quad \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| \leq C_5 \gamma_m |n|^2 (|m|^2 + 1), \quad (38)$$

где $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$, $C_j = \text{const}$, $j = 1, 2, 3, 4, 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [48] были доказаны следующие неравенства:

$$c_1 \leq |f_n(\xi)| \leq c_2, \quad \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \leq c_3, \quad (39)$$

где

$$\xi = (\dots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots) = (\dots, \lambda_{-3} + (\lambda_{-2} - \lambda_{-3}) \sin^2 x_{-1}, \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 x_0, \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) \sin^2 x_1).$$

Используя неравенства (39) и замены переменных (32), можно доказать (37):

$$C_1 \leq |f_n(x)| \leq C_2, \quad \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| = \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \cdot \left| \frac{\partial \xi_m}{\partial x_m} \right| = \left| \frac{\partial f_n(\xi)}{\partial \xi_m} \right| \cdot |\gamma_m \sin 2x_m| \leq C_3 \gamma_m.$$

Докажем (38). Используя замены переменных (32), формулы (29)–(31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} p(\tau, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k), \quad p_\tau(\tau, t) = - \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau}, \\ p_{\tau\tau}(\tau, t) &= -2 \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_k \cos 2x_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right)^2 + \sum_{k=-\infty}^\infty \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial^2 x_k}{\partial \tau^2}, \\ q(\tau, t) &= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k f_k(x), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} q_\tau(\tau, t) &= \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \cos 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau} f_k(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^\infty (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial f_k(x)}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

$$q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\lambda_{2k}^2 - \lambda_{2k-1}^2}{2} + \gamma_k \sin^2 x_k (2\lambda_{2k-1} - \gamma_k \sin^2 x_k) \right\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\tau, t)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Учитывая оценки (35)–(37), можно доказать равномерную сходимость функциональных рядов (40). Поскольку функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $t \in [0; \infty)$, ограничены, существуют числа $M_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, такие, что выполняются неравенства $|a(t)| \leq M_1$, $|b(t)| \leq M_2$, $|c(t)| \leq M_3$, пользуясь которыми и (35), получим оценки

$$g_n(x) \leq C_4 |n|^3, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Вычислим первую и вторую производные функции $x_k = x_k(\tau, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \tau} &= \frac{1}{\gamma_k \sin 2x_k} \cdot \frac{\partial \xi_k}{\partial \tau} \\ &= (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) f_k(x) \left\{ \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} \frac{\gamma_j (1 - 2 \sin^2 x_j)}{2} + \frac{\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1}}{2} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \tau^2} &= (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \\ &\times \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \right\} \left\{ \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} \frac{\gamma_j (1 - 2 \sin^2 x_j)}{2} + \frac{\lambda_{2k} + \lambda_{2k-1}}{2} \right\} \\ &\quad + (-1)^k \sigma_k^0(\tau) f_k(x) \sum_{j=-\infty, j \neq k}^{\infty} \gamma_j \sin 2x_j \frac{\partial x_j}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Оценим производную функции $g_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} &= a(t) \left[4(\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n)^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} + 2(\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n) \right. \\ &\times \left(2p \frac{\partial p}{\partial x_m} + 2q \frac{\partial q}{\partial x_m} + \frac{\partial q_\tau}{\partial x_m} \right) + 2 \left(q_\tau \frac{\partial p}{\partial x_m} + p \frac{\partial q_\tau}{\partial x_m} - q \frac{\partial p_\tau}{\partial x_m} - p_\tau \frac{\partial q}{\partial x_m} \right) \\ &\quad \left. + 3p^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} + q^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} + 2pq \frac{\partial q}{\partial x_m} - \frac{\partial p_\tau}{\partial x_m} \right] - b(t) \frac{\partial p}{\partial x_m}. \end{aligned}$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых, участвующих в этом равенстве:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right| &\leq A_1 |k|, \quad \left| \frac{\partial f_k(x)}{\partial \tau} \right| = \left| \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_k} \right| \left| \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right| \leq A_2 |k|, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right) \right| &\leq A_4 |k| \gamma_m, \quad \left| \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial \tau^2} \right) \right| \leq A_5 \gamma_m, \quad \left| \frac{\partial^2 x_k}{\partial \tau^2} \right| \leq A_3 |k|; \\ \left| 4(\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n)^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} \right| &= \left| 4(\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n)^2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k) \right\} \right| \\ &= 2|(\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n)^2 \{-\gamma_m \sin 2x_m\}| \leq B_1 \gamma_m |n|^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| (\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n) \left(2p \frac{\partial p}{\partial x_m} + 2q \frac{\partial q}{\partial x_m} + \frac{\partial q_\tau}{\partial x_m} \right) \right| \\
& \left| (\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n) \left(2p \frac{\partial p}{\partial x_m} + \frac{\partial}{\partial x_m} \{q^2 + q_\tau\} \right) \right| = |\lambda_{2n-1} + \gamma_n \sin^2 x_n| \\
& \times \left| \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k) \right\} \{-\gamma_m \sin 2x_m\} \right. \\
& \left. + \{2\gamma_m \lambda_{2m-1} \sin 2x_m - 4\gamma_m^2 \sin^3 x_m \cos x_m\} \right| \leq B_2 \gamma_m |n|(|m+1|); \\
\\
& \left| q_\tau \frac{\partial p}{\partial x_m} + p \frac{\partial q_\tau}{\partial x_m} - q \frac{\partial p_\tau}{\partial x_m} - p_\tau \frac{\partial q}{\partial x_m} \right| \\
& \leq \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \cos 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau} f_k(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial f_k(x)}{\partial \tau} \right| \\
& \times |-\gamma_m \sin 2x_m| + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k)| \cdot \left| 2(-1)^m \sigma^0(\tau) \gamma_m \sin 2x_m \frac{\partial x_m}{\partial \tau} f_m(x) \right| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \cos 2x_k \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right) f_k(x) \right| \\
& + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \cos 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \left(\frac{\partial f_k(x)}{\partial x_m} \right) \right| \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |(-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k f_k(x)| \\
& \times \left| 2\gamma_m \cos 2x_m \frac{\partial x_m}{\partial \tau} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right) \right| + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right| \\
& \times \left| (-1)^{m-1} \sigma_m^0(\tau) \gamma_m \cos 2x_m f_m(x) + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_m} \right| \\
& \leq B_3 \gamma_m (|m| + 1); \\
\\
& \left| 3p^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} + q^2 \frac{\partial p}{\partial x_m} + 2pq \frac{\partial q}{\partial x_m} \right| \\
& \leq \left| \frac{\gamma_m \sin 2x_m}{4} \left[3 \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k) \right\}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k f_k(x) \right\}^2 \right] \right| \\
& + \frac{1}{4} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \gamma_k (1 - 2 \sin^2 x_k) \} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k f_k(x) \} \right| \\
& \times \left| 2(-1)^{m-1} \sigma_m^0(\tau) \gamma_m \cos 2x_m f_m(x) \right|
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k-1} \sigma_k^0(\tau) \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_m} \Big| \leq B_4 \gamma_m;$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial p_{\tau\tau}}{\partial x_m} \right| &\leq 4 \left| \gamma_m \sin 2x_m \left(\frac{\partial x_m}{\partial \tau} \right)^2 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cos 2x_k \frac{\partial x_k}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial x_k}{\partial \tau} \right) \right| \\ &+ \left| 2\gamma_m \cos 2x_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial \tau^2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \sin 2x_k \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\frac{\partial^2 x_k}{\partial \tau^2} \right) \right| \leq B_5 \gamma_m |m|(|m| + 1). \end{aligned}$$

Здесь $p = p(\tau, t)$, $q = q(\tau, t)$, $x_m = x_m(\tau, t)$, $A_j = \text{const}$, $B_j = \text{const}$, $j = \overline{1, 5}$.

Учитывая эти оценки, можно получить следующее неравенство:

$$\left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| = C_5 \gamma_m |n|^2 (|m|^2 + 1).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.2. Если начальные функции $p_0(x)$, $q_0(x)$ удовлетворяют условиям

$$p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^6(R), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}),$$

то вектор-функция $H(x)$ удовлетворяет условию Липшица в банаховом пространстве K , т. е. существует константа $L = \text{const} > 0$ такая, что для произвольных элементов $x, y \in \mathbb{K}$ выполняется следующее неравенство:

$$\|H(x) - H(y)\| \leq L \|x - y\|,$$

где

$$L = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n (1 + |n|^2) |n|^3 < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя лемму 4.1, оценим производную функции $F_n(x) = f_n(x) \cdot g_n(x)$, где $x \equiv x(\tau, t) = (\dots, x_{-1}(\tau, t), x_0(\tau, t), x_1(\tau, t), \dots)$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_m} \right| &\leq \left| \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_m} \right| \cdot |g_n(x)| + |f_n(x)| \cdot \left| \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_m} \right| \\ &\leq C_3 C_4 \gamma_m |n|^3 + C_2 C_5 \gamma_m |n|^2 (|m|^2 + 1) \\ &\leq C_3 C_4 \gamma_m |n|^3 (|m|^2 + 1) + C_2 C_5 \gamma_m |n|^2 (|m|^2 + 1) \leq \gamma_m |n|^3 (|m|^2 + 1) \left\{ C_3 C_4 + \frac{C_2 C_5}{|n|} \right\} \\ &\leq \gamma_m |n|^3 (|m|^2 + 1) \{ C_3 C_4 + 1 \} = A \gamma_m |n|^3 (|m|^2 + 1). \end{aligned}$$

Здесь $A = C_3 C_4 + 1$ не зависит от параметров m и n .

Далее, используя выражение $H_n(x) = (-1)^n \sigma_n^0(\tau) F_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}$, получаем равенство

$$|H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| = |F_n(x(\tau, t)) - F_n(y(\tau, t))|.$$

Применим теорему Лагранжа о конечном приращении к функции $\varphi(t) = F_n(x + t(y - x))$, $t \in [0; 1]$. Тогда получим равенство $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi(t^*)$, т. е.

$$F_n(x) - F_n(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_k} \cdot (x_k - y_k).$$

Здесь $\theta = x + t^*(y - x)$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} |H_n(x(\tau, t)) - H_n(y(\tau, t))| &= |F_n(x(\tau, t)) - F_n(y(\tau, t))| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial F_n(\theta)}{\partial x_k} \right| \cdot |x_k(\tau, t) - y_k(\tau, t)| \\ &\leq A|n|^3 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k(1 + |k|^2) |x_k(\tau, t) - y_k(\tau, t)| \leq A|n|^3 \|x - y\|. \end{aligned}$$

Оценим норму

$$\begin{aligned} \|H(x) - H(y)\| &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(1 + |n|^2) |H_n(x) - H_n(y)| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(1 + |n|^2) A|n|^3 \|x - y\| = \|x - y\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} A\gamma_n |n|^3(1 + |n|^2) = L\|x - y\|. \end{aligned}$$

Здесь

$$L = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n |n|^3(1 + |n|^2) < \infty.$$

Таким образом, условие Липшица выполняется. Поэтому решение задачи Коши (6), (7) для всех $t > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ существует и единственно.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Равномерная сходимость рядов в указанных выше формулах (29)–(31) и (40) следует из равенства (35) и оценки (37).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Теорема 4.1 и лемма 4.2 дают алгоритм нахождения решения задачи (1)–(3).

1. Сначала найдем спектральные данные λ_n , $\xi_n^0(\tau)$, $\sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$, оператора Дирака $L(\tau, 0)$.

2. Обозначим спектральные данные оператора $L(\tau, t)$ через λ_n , $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее, решив задачу Коши (27), (28) при произвольном значении τ , найдем $\xi_n(\tau, t)$, $\sigma_n(\tau, t) = \pm 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

3. Из формулы следов (29) и (30) определим функции $p(\tau, t)$ и $q(\tau, t)$, т. е. найдем решение задачи (1)–(3).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 4.2. Пусть начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ удовлетворяют условиям

$$p_0(x + \pi) = p_0(x) \in C^6(\mathbb{R}), \quad q_0(x + \pi) = q_0(x) \in C^6(\mathbb{R}).$$

Тогда существует принадлежащее классу $C_x^3(t > 0) \cap C_t^1(t > 0) \cap C(t \geq 0)$ однозначно определяемое решение $p(x, t)$, $q(x, t)$ задачи (1)–(3), которое определяется соответственно суммой рядов (29) и (30).

Тем самым в классе периодических бесконечнозонных функций из $C^n(\mathbb{R})$, $n \geq 6$, установлена разрешимость задачи (1)–(3).

Следствие 4.2. Используя теоремы 3.1 и 3.2, выводим, что если начальные функции $p_0(x)$ и $q_0(x)$ являются действительными аналитическими π -периодическими функциями, то решение $p(x, t)$, $q(x, t)$ задачи (1)–(3) является действительной аналитической функцией по переменной x .

Следствие 4.3. Если число $\frac{\pi}{2}$ является периодом (антипериодом) для начальных функций $p_0(x)$ и $q_0(x)$, то все корни уравнения $\Delta(\lambda) + 2 = 0$ ($\Delta(\lambda) - 2 = 0$) двукратные. Так как функция Ляпунова, соответствующая коэффициентам $p(x, t)$, $q(x, t)$, совпадает с $\Delta(\lambda)$, согласно теореме 3.3 число $\frac{\pi}{2}$ является также периодом (антипериодом) для решения $p(x, t), q(x, t)$ по переменной x .

Рассмотрим конечнозонный случай. Здесь решение $p(\tau, t)$, $q(\tau, t)$, $\tau \in \mathbb{R}$, $t > 0$, задачи (1)–(3) определяется по формулам

$$p(\tau, t) = \sum_{k=-N}^N \left(\frac{\lambda_{2k-1} + \lambda_{2k}}{2} - \xi_k(\tau, t) \right),$$

$$q(\tau, t) = \sum_{k=-N}^N (-1)^{k-1} \sigma_k(\tau, t) h_k(\xi(\tau, t)),$$

при этом

$$\xi \equiv \xi(\tau, t) = (\xi_{-N}(\tau, t), \dots, \xi_{-1}(\tau, t), \xi_0(\tau, t), \xi_1(\tau, t), \dots, \xi_N(\tau, t)),$$

$$\sigma \equiv \sigma(\tau, t) = (\sigma_{-N}(\tau, t), \dots, \sigma_{-1}(\tau, t), \sigma_0(\tau, t), \sigma_1(\tau, t), \dots, \sigma_N(\tau, t))$$

удовлетворяют системе уравнений Дубровина

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 2(-1)^n \sigma_n(\tau, t) \times \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \cdot \bar{f}_n(\xi(\tau, t)) \bar{g}_n(\xi(\tau, t)), \quad |n| \leq N,$$

$$\frac{\partial \xi_n(\tau, t)}{\partial t} = 0, \quad |n| \geq N + 1,$$

с начальными условиями

$$\xi_n(\tau, 0) = \xi_n^0(\tau), \quad \sigma_n(\tau, 0) = \sigma_n^0(\tau), \quad n = 0, \pm 1, \dots, \pm N,$$

где $\xi_n^0(\tau), \sigma_n^0(\tau) = \pm 1$, $n = 0, \pm 1, \dots, \pm N$, — спектральные параметры конечнозонного оператора Дирака вида

$$L(\tau, 0)y \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_0(x + \tau) & q_0(x + \tau) \\ q_0(x + \tau) & -p_0(x + \tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Здесь

$$\bar{h}_n(\xi) = \begin{cases} \sqrt{(\xi_n(\tau, t) - \lambda_{2n-1})(\lambda_{2n} - \xi_n(\tau, t))} \cdot \bar{f}_n(\xi(\tau, t)), & |n| \leq N, \\ 0, & |n| \geq N + 1, \end{cases}$$

$$\bar{f}_n(\xi) = \sqrt{\prod_{k=-N, k \neq n}^N \frac{(\lambda_{2k-1} - \xi_n(\tau, t))(\lambda_{2k} - \xi_n(\tau, t))}{(\xi_k(\tau, t) - \xi_n(\tau, t))^2}},$$

$$\bar{g}_n(\xi) = a(t) [4\xi_n^3(\tau, t) + 4p(\tau, t)\xi_n^2(\tau, t) + 2(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t))\xi_n(\tau, t) + 2(p(\tau, t)q_\tau(\tau, t) - p_\tau(\tau, t)q(\tau, t)) + 2p(\tau, t)(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t)) - p_{\tau\tau}(\tau, t)] + b(t)[- \xi_n(\tau, t) - p(\tau, t)] + \frac{1}{2}c(t), \quad |n| \leq N.$$

Нетрудно заметить, что задача (1)–(3) разрешима при всех конечнозонных начальных данных, так как

$$L = A \sum_{n=-N}^N \gamma_n |n|^3 (1 + |n|^2), \quad \gamma_n \equiv 0, \quad |n| \geq N + 1.$$

Приведем примеры, иллюстрирующие изложенный алгоритм.

ПРИМЕР 4.1. Рассмотрим однозонный потенциал $u_0(x) = q_0(x) - ip_0(x)$ оператора Дирака $L(\tau, 0)$, задаваемый спектром $E = \mathbb{R} \setminus (\lambda_{-1}, \lambda_0)$ и спектральными параметрами $\xi_0(0) \in [\lambda_{-1}, \lambda_0]$, $\sigma_0(0) = \pm 1$.

В этом случае система уравнений Дубровина для оператора Дирака $L(\tau, 0)$ состоит из одного уравнения

$$\frac{d\xi_0(\tau)}{d\tau} = -(\lambda_{-1} + \lambda_0)\sigma_0(\tau)\sqrt{(\xi_0(\tau) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau))}.$$

В результате замены переменной $\xi_0(\tau) = \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 \varphi(\tau)$ имеем

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2}\sigma_0(0), \quad \varphi(0) = \arcsin \sqrt{\frac{\xi_0(0) - \lambda_{-1}}{\lambda_0 - \lambda_{-1}}}.$$

Отсюда находим

$$\xi_0(\tau) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}.$$

Из формулы следов

$$p_0(\tau) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau),$$

$$q_0(\tau) = -\sigma_0(\tau)\sqrt{(\xi_0(\tau) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau))} = \frac{\dot{\xi}_0(\tau)}{\lambda_{-1} + \lambda_0}$$

получим

$$p_0(\tau) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\},$$

$$q_0(\tau) = -\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}.$$

ПРИМЕР 4.2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} p_t &= a(t)[p_{xxx} - 6(p^2 + q^2)p_x] + b(t)p_x + c(t)q, \\ q_t &= a(t)[q_{xxx} - 6(p^2 + q^2)q_x] + b(t)q_x - c(t)p \end{aligned} \quad (41)$$

при начальных условиях

$$\begin{aligned} p(x, t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}, \\ q(x, t)|_{t=0} &= -\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}. \end{aligned} \quad (42)$$

В этом однозонном случае система уравнения Дубровина (27) принимает вид

$$\frac{\partial \xi_0(\tau, t)}{\partial t} = 2\sigma_0(\tau, t)\sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))}$$

$$\begin{aligned} & \times \left\{ a(t) [4\xi_0^3(\tau, t) + 4p(\tau, t)\xi_0^2(\tau, t) + 2(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t))\xi_0(\tau, t) \right. \\ & + 2(p(\tau, t)q_\tau(\tau, t) - p_\tau(\tau, t)q(\tau, t)) + 2p(\tau, t)(p^2(\tau, t) + q^2(\tau, t)) - p_{\tau\tau}(\tau, t)] \\ & \left. + b(t)[\xi_0(\tau, t) + p(\tau, t)] + \frac{1}{2}c(t) \right\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (43) \end{aligned}$$

Далее, используя формулу следов в однозонном случае

$$\begin{aligned} p(\tau, t) &= \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau, t), \\ q(\tau, t) &= -\sigma_0(\tau, t)\sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))}, \\ q^2(\tau, t) + q_\tau(\tau, t) &= \frac{\lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2}{2} - \xi_0^2(\tau, t) \end{aligned} \quad (44)$$

и производные

$$\begin{aligned} p_\tau(\tau, t) &= \sigma_0(\tau, t)(\lambda_{-1} + \lambda_0)\sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))}, \\ q_\tau(\tau, t) &= (\lambda_{-1} + \lambda_0) \left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau, t) \right), \\ p_{\tau\tau}(\tau, t) &= -(\lambda_{-1} + \lambda_0)^2 \left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0(\tau, t) \right), \end{aligned}$$

запишем систему (43) в замкнутой форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0(\tau, t)}{\partial t} &= 2\sigma_0\sqrt{(\xi_0 - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0)} \left\{ a(t) \left[4\xi_0^3 + 4\xi_0^2 \left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right) \right. \right. \\ &+ 2\xi_0 \left(\left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right)^2 + \frac{\lambda_{-1}^2 + \lambda_0^2}{2} - \xi_0^2 \right) + (\lambda_{-1} + \lambda_0)^2 \left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right) \\ &+ 2 \left(\left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right)^2 (\lambda_{-1} + \lambda_0) - (\lambda_{-1} + \lambda_0)(\xi_0 - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0) \right) \\ &+ 2 \left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right) \left(\left(\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} - \xi_0 \right)^2 + (\xi_0 - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0) \right) \left. \right] \\ &\quad \left. + b(t) \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} + \frac{1}{2}c(t) \right\} \\ &= 2\sigma_0(\tau, t)\sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))} \left\{ M \cdot a(t) + K \cdot b(t) + \frac{1}{2}c(t) \right\}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_0(\tau, t)}{\partial t} &= 2\sigma_0(\tau, t)\sqrt{(\xi_0(\tau, t) - \lambda_{-1})(\lambda_0 - \xi_0(\tau, t))} \left\{ M \cdot a(t) + K \cdot b(t) + \frac{1}{2}c(t) \right\}, \\ \xi_0(\tau, t)|_{t=0} &= \frac{\lambda_0 + \lambda_{-1}}{2} - \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos\{-(\lambda_{-1} + \lambda_0)\tau + 2\sigma_0(0)\varphi(0)\}, \\ \sigma_0(\tau, t)|_{t=0} &= \sigma_0(\tau). \end{aligned}$$

Здесь

$$M = \frac{5}{4}(\lambda_{-1} + \lambda_0)^3 - 3\lambda_{-1}\lambda_0(\lambda_{-1} + \lambda_0), \quad K = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2}.$$

Для нахождения решения $\xi_0(\tau, t)$, $\sigma_0(\tau, t)$ воспользуемся заменой переменных

$$\xi_0(\tau, t) = \lambda_{-1} + (\lambda_0 - \lambda_{-1}) \sin^2 \psi(\tau, t). \quad (45)$$

Тогда относительно $\psi(\tau, t)$ получим уравнение

$$\frac{\partial \psi(\tau, t)}{\partial t} = \sigma_0(\tau) \left\{ M \cdot a(t) + K \cdot b(t) + \frac{1}{2} c(t) \right\}.$$

Отсюда находим

$$\psi(\tau, t) = \sigma_0(\tau) \left\{ M \int_0^t a(s) ds + K \int_0^t b(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t c(s) ds \right\} + \sigma_0(\tau) C(\tau).$$

Подставляя это выражение в (45), имеем

$$\xi(\tau, t) = \frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} + \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ \int_0^t [2Ma(s) + 2Kb(s) + c(s)] ds + 2C(\tau) \right\},$$

где

$$C(\tau) = -\frac{\lambda_{-1} + \lambda_0}{2} \tau - \sigma_0(0) \psi_0(0).$$

Используя формулу следов (44), получим решение задачи Коши (41), (42):

$$p(\tau, t) = \frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \cos \left\{ \int_0^t [2Ma(s) + 2Kb(s) + c(s)] ds - (\lambda_{-1} + \lambda_0) \tau + 2\sigma_0(0) \psi_0(0) \right\},$$

$$q(\tau, t) = -\frac{\lambda_0 - \lambda_{-1}}{2} \sin \left\{ \int_0^t [2Ma(s) + 2Kb(s) + c(s)] ds - (\lambda_{-1} + \lambda_0) \tau + 2\sigma_0(0) \psi_0(0) \right\}.$$

5. Заключительные замечания

Для интегрирования нелинейного комплексного модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза с дополнительными членами в классе периодических бесконечнозонных функций применен метод обратной спектральной задачи. Введена эволюция спектральных данных периодического оператора Дирака, коэффициент которого является решением нелинейного уравнения кмКдФ. Доказана разрешимость задачи Коши для бесконечной системы дифференциальных уравнений Дубровина в классе шестикратно непрерывно дифференцируемых периодических бесконечнозонных функций. Показано, что для достаточно гладких начальных условий существует глобальное решение задачи Коши для уравнения кмКдФ с дополнительными членами. Получены важные следствия об аналитичности и периоде решения по пространственной переменной.

Следует отметить, что при наличии дополнительного члена уравнения кмКдФ скорость распространения периодической бегущей волны в зависимости от коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ увеличится или уменьшится, а амплитуда не меняется. Это вытекает из сравнения примеров $a(t) = 1$, $b(t) = 0$, $c(t) = 0$ и $a(t) = 1$, $b(t) \neq 0$, $c(t) \neq 0$.

Вопрос о разрешимости задачи (1)–(3) в классе $C^n(\mathbb{R})$, $0 \leq n \leq 5$, периодических бесконечнозонных функции пока остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C., Green I., Kruskal M., Miura R. A method for solving the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Rev. Let.* 1967. V. 19. P. 1095–1098.
2. Фаддеев Л. Д. Свойства S -матрицы одномерного уравнения Шредингера // *Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова*. 1964. Т. 73. С. 314–336.
3. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наукова думка, 1977.
4. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
5. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // *Commun. Pure Appl. Math.* 1968. V. 21. P. 467–490.
6. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки в одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // *Журн. эксперимент. и теор. физики*. 1971. Т. 61, № 1. С. 118–134.
7. Wadati M. The exact solution of the modified Korteweg–de Vries equation // *J. Phys. Soc. Japan*. 1972. V. 32, N 6. P. 44–47.
8. Hirota R. Exact envelop-soliton solutions of a nonlinear wave equation // *J. Math. Phys.* 1973. V. 14. P. 805–809.
9. Захаров В. Е., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Полное описание решений Sine-Gordon уравнения // *Докл. АН СССР*. 1974. Т. 219, № 6. С. 1334–1337.
10. Ablowitz M. J., Kaup D. J., Newell A. C., Segur H. Method for solving the sine-Gordon equation // *Phys. Rev. Let.* 1973. V. 30, N 25. P. 1262–1264.
11. Konno K., Kameyama W., Sanuki H. Effect of weak dislocation potential on nonlinear wave propagation in anharmonic cristal // *J. Phys. Soc. Japan*. 1974. V. 37, N 1. P. 171–176.
12. Deng-yuan Chen, Da-un Zhang, Shu-fang Deng. The novel multi-soliton solutions of the mKdV-Sine Gordon equations // *J. Phys. Soc. Japan*. 2002. V. 71, N 2. P. 658–659.
13. Abdul -Majid Wazwaz. N -soliton solutions for the integrable modified KdV-sine-Gordon equation // *Phys. Scripta*. 2014. V. 89, N 6. P. 5–15.
14. Popov S. P. Scattering of solitons by dislocations in the modified Korteweg–de Vries-sine-Gordon equation // *Comput. Mathematics Math. Phys.* 2015. V. 55, N 12. P. 2014–2024.
15. Popov S. P. Numerical analysis of soliton solutions of the modified Korteweg–de Vries-sine-Gordon equation // *Comput. Mathematics Math. Phys.* 2015. V. 55, N 3. P. 437–446.
16. Popov S. P. Nonautonomous soliton solutions of the modified Korteweg–de Vries-sine-Gordon equation // *Comput. Mathematics Math. Phys.* 2016. V. 56, N 11. P. 1929–1937.
17. Man Jia, Ji Lin, Sen Yue Lou. Soliton and breather molecules in few-cycle-pulse optical model // *Nonlinear Dynamics*. 2020. V. 100. P. 3745–3757.
18. Фролов И. С. Обратная задача рассеяния для системы Дирака на всей оси // *Докл. АН СССР*. 1972. Т. 207, № 1. С. 44–47.
19. Нижник Л. П., Фам Лой Ву. Обратная задача рассеяния на полуоси с несамосопряженной потенциальной матрицей // *Укр. мат. журн.* 1974. Т. 26, № 4. С. 469–485.
20. Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
21. Хасанов А. Б. Обратная задача теории рассеяния для системы двух несамосопряженных дифференциальных уравнений первого порядка // *Докл. АН СССР*. 1984. Т. 277, № 3. С. 559–562.
22. Khasanov A. B., Urazboev G. U. On the sine-Gordon equation with a self-consistent source corresponding to multiple eigenvalues // *Differ. Equ.* 2007. V. 43. P. 567–570.
23. Khasanov A. B., Khoitmetov U. A. On integration of Korteweg–de Vries equation in a class of rapidly decreasing complex-valued functions // *Russian Math.* 2018. V. 62. P. 68–78.
24. Khasanov A. B., Khoitmetov U. A. Integration of the general loaded Korteweg–de Vries equation with an integral type source in the class of rapidly decreasing complex-valued functions // *Russian Math.* 2021. V. 65. P. 43–57.
25. Khasanov A. B., Hoitmetov U. A. On integration of the loaded mKdV equation in the class of rapidly decreasing functions // *Bull. Irkutsk State University. Ser. Math.* 2021. V. 38. P. 19–35.
26. Итс А. Р., Матвеев В. Б. Операторы Шредингера с конечнозонным спектром и N -солитонные решения уравнения Кортевега — де Фриза // *Теор. и мат. физика*. 1975. Т. 23, № 1. С. 51–68.

27. Дубровин Б. А., Новиков С. П. Периодический и условно периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кортевега — де Фриза // Журн. эксперимент. и теор. физики. 1974. Т. 67, № 12. С. 2131–2143.
28. Дубровин Б. А. Периодическая задача для уравнения Кортевега — де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функцион. анализ и его прил. 1975. Т. 9, № 3. С. 41–51.
29. Дубровин Б. А., Натанзон И. И. Вещественные двухзонные решения уравнения sine-Gordon // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 1. С. 27–43.
30. Итс А. Р. Обращение гиперэллиптических интегралов и интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений // Вестн. Ленингр. ун-та. Математика. Механика. Астрономия. 1976. Т. 7, № 2. С. 39–46.
31. Kotlyarov V. P., Its A. R. Periodic problem for the nonlinear Schrödinger equation. 2014. 14 p. arXiv.1401.4445
32. Смирнов А. О. Эллиптические решения нелинейного уравнения Шредингера и модифицированного уравнения Кортевега — де Фриза // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 8. С. 103–114.
33. Матвеев В. Б., Смирнов А. О. Решения типа волн убийц уравнений иерархии Абловица — Каупа — Ньюэлла — Сигура: единый подход // Теор. и мат. физика. 2016. Т. 186, № 2. С. 191–220.
34. Matveev V. B., Smirnov A. O. Multiphase solutions of nonlocal symmetric reductions of equations of the AKNS hierarchy: general analysis and simplest examples // Theor. Math. Phys. 2020. V. 204, N 3. P. 1154–1165.
35. Митропольский Ю. А., Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г. Интегрируемые динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты. Киев: Наукова думка, 1987.
36. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
37. Gesztesy F., Holden H. Soliton equations and their algebro-geometric solutions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.
38. Babadzhanov B. A., Khasanov A. B., Yakhshimuratov A. B. On the inverse problem for a quadratic pencil of Sturm–Liouville operators with periodic potential // Differ. Equ. 2005. V. 41, N 3. P. 310–318.
39. Matveev V. B. 30 years of finite-gap integration theory // Philos. Trans. Royal Soc. A. 2008. V. 366. P. 837–875.
40. Левитан Б. М., Хасанов А. Б. Оценка функции Коши в случае конечнозонных непериодических потенциалов // Функцион. анализ и его прил. 1992. Т. 26, № 2. С. 18–28.
41. Хасанов А. Б. Обратная задача рассеяния для возмущенного конечнозонного оператора Штурма — Лиувилля // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318, № 5. С. 1095–1098.
42. Бикбаев Р. Ф. Временная асимптотика решения нелинейного уравнения Шредингера с граничными условиями типа «ступеньки» // Теор. и мат. физика. 1989. Т. 81, № 1. С. 3–11.
43. Бикбаев Р. Ф., Шарипов Р. А. Асимптотика при $t \rightarrow \infty$ решения задачи Коши для уравнения Кортевега — де Фриза в классе потенциалов с конечнозонным поведением при $x \rightarrow \pm\infty$ // Теор. и мат. физика. 1989. Т. 78, № 3. С. 345–356.
44. Grinevich P. G., Taimanov I. A. Spectral conservation laws for periodic nonlinear equations of the Melnikov type // Geometry, Topology and Math. Physics. Am. Math. Soc. 2008. V. 2, N 224. P. 125–138.
45. Hasanov A. B., Hasanov M. M. Integration of the nonlinear Schrödinger equation with an additional term in the class of periodic functions // Theor. Math. Phys. 2019. V. 199. P. 525–532.
46. Khasanov A. B., Matyakubov M. M. Integration of the nonlinear Korteweg–de Vries equation with an additional term // Theor. Math. Phys. 2020. V. 203. P. 596–607.
47. Хасанов А. Б., Хасанов Т. Г. Задача Коши для уравнения Кортевега — де Фриза в классе периодических бесконечнозонных функций // Зап. науч. семин. ПОМИ. 2021. Т. 506. С. 258–278.
48. Khasanov A. B., Allanazarova T. Z. On the modified Korteweg–de Vries equation with loaded term // Ukr. Math. J. 2022. V. 73. P. 1783–1809.
49. Домрин А. В. Замечания о локальном варианте метода обратной задачи рассеяния // Тр. МИРАН. 2006. Т. 253. С. 46–60.
50. Djakov P., Mityagin B. Instability zones of a periodic 1D Dirac operator and smoothness of its potential // Commun. Math. Phys. 2005. V. 259. P. 139–183.

51. Ince E. L. A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathien functions // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1922. V. 21. P. 117–120.
52. Джаков П. Б., Митягин Б. С. Зоны неустойчивости одномерных периодических операторов Шредингера и Дирака // Успехи мат. наук. 2006. Т. 61, № 4. С. 77–82.
53. Маннонов Г. А., Хасанов А. Б. Задача Коши для нелинейного уравнения Хироты в классе периодических бесконечнозонных функций // Алгебра и анализ. 2022. Т. 34, № 5. С. 139–172.
54. Khasanov A. B., Normurodov K. N., Khudaerov U. O. Integrating the modified Korteweg–de Vries sine-Gordon equation in the class of periodic infinite-gap functions // Theor. Math. Phys. 2023. V. 214. P. 170–182.
55. Левитан Б. М., Саргисян И. С. Операторы Штурма — Лиувилля и Дирака. М.: Наука, 1988.
56. Мисюра Т. В. Характеристика спектров периодических краевых задач, порождаемых операцией Дирака. I // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1978. Т. 30. С. 90–101.
57. Хасанов А. Б., Яхшимуратов А. Б. Аналог обратной теоремы Г. Борга для оператора Дирака // Узб. мат. журн. 2000. Т. 3–4. С. 40–46.
58. Хасанов А. Б., Ибрагимов А. М. Об обратной задаче для оператора Дирака с периодическим потенциалом // Узб. мат. журн. 2001. Т. 3–4. С. 48–55.
59. Currie S., Roth T. T., Watson B. A. Borg's periodicity theorems for first-order self-adjoint systems with complex potentials // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2017. V. 60, N 3. P. 615–633.
60. Станкевич И. В. Об одной задаче спектрального анализа для уравнения Хилла // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192, № 1. С. 34–37.
61. Trubowitz E. The inverse problem for periodic potentials // Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30, N 3. P. 321–337.
62. Khasanov A. B., Yakhsimuratov A. B. Inverse problem on the half-line for the Sturm–Liouville operator with periodic potential // Differ. Equ. 2015. V. 51, N 1. P. 23–32.
63. Borg G. Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwertaufgabe // Acta Math. 1946. V. 78. P. 1–96.
64. Ахиезер Н. И. Континуальный аналог ортогональных многочленов на системе интервалов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 144, № 2. С. 262–266.
65. Korotyaev E., Mokeev D. Dubrovin equation for periodic Dirac operator on the half line // Appl. Anal. 2020. V. 101, N 1. P. 337–365.
66. Яхшимуратов А. Б. Интегрирование нелинейной системы Шредингера высшего порядка с самосогласованным источником в классе периодических функций // Теор. и мат. физика. 2020. Т. 202, № 2. С. 157–169.
67. Даниелян А. А., Левитан Б. М., Хасанов А. Б., Асимптотика m -функции Вейля — Титчмарша в случае системы Дирака // Мат. заметки. 1991. Т. 50, № 2. С. 67–76.

Поступила в редакцию 12 октября 2023 г.

После доработки 25 апреля 2024 г.

Принята к публикации 20 июня 2024 г.

Хасанов Акназар Бекдурдиевич (ORCID 0000-0003-2571-5179)

Самаркандский государственный университет,

Самарканд, 140104, Узбекистан;

Самаркандский филиал Математического института имени В. И. Романовского

Академии наук Республики Узбекистан, Самарканд, 140104, Узбекистан

ahasanov2002@mail.ru

Хасанов Темур Гафуржонович (ORCID 0000-0001-7321-5764)

Ургенчский государственный университет,

Ургенч, 220100, Узбекистан

temur.xasanov.2018@mail.ru

УДК 512.542

О ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ,
НАСЫЩЕННЫХ ПОЛНЫМИ
И СПЕЦИАЛЬНЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ
ГРУППАМИ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

А. А. Шлепкин

Аннотация. Известно, что произвольная локально конечная группа, насыщенная группами из множества проективных специальных линейных групп фиксированной степени над конечными полями, изоморфна проективной специальной линейной группе данной фиксированной степени над подходящим локально конечным полем. Получено описание локально конечных групп, насыщенных группами из множества полных линейных групп и специальных линейных групп фиксированной степени над конечными полями. Это либо полные линейные группы, либо специальные линейные группы заданной фиксированной степени над подходящим локально конечным полем.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.413

Ключевые слова: группа, локально конечная группа, насыщенность заданным множеством групп.

Введение

По определению группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа K из G содержится в подгруппе группы G , изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$ (множество $\mathfrak{X}$ называется насыщающим множеством для группы G). Пусть K — подгруппа G , $\mathfrak{X}$ — множество групп. Через $\mathfrak{X}_G(K)$ будем обозначать множество всех подгрупп группы G , содержащих K и изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. В частности, если 1 — единичная подгруппа группы G , то $\mathfrak{X}_G(1)$ обозначает множество всех подгрупп группы G , изоморфных группам из $\mathfrak{X}$. Если из контекста ясно, о какой группе идет речь, то вместо $\mathfrak{X}_G(K)$ будем писать $\mathfrak{X}(K)$ [1].

Понятие насыщенности позволяет исследовать периодические группы, локально конечные группы, группы Шункова [1–3]. Из результатов работы [4] вытекает, что произвольная локально конечная группа, насыщенная группами из множества конечных простых групп $\{L_k(p^n)\}$ (где k фиксировано, p принимает всевозможные значения из некоторого множества простых чисел, n принимает всевозможные значения из некоторого множества натуральных чисел), изоморфна $L_k(Q)$, где Q — подходящее локально конечное поле. Естественно рассмотреть случай, когда локально конечная группа насыщена конечными группами, содержащими секции, изоморфные группам из множества групп

Работа автора выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 19-71-10017-П.

© 2024 Шлепкин А. А.

$\{L_k(p^n)\}$. Наиболее естественным в этой ситуации является изучение локально конечных групп, насыщенных следующими множествами групп: $\{GL_k(p^n)\}$, $\{SL_k(p^n)\}$.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, Π — множество всех простых чисел. В [2] были доказаны следующие две теоремы.

Теорема 1. Пусть локально конечная группа G , насыщенная группами из множества групп $\{GL_m(p^n)\}$, где m — фиксированное отличное от 1 число из $\mathbb{N}$, $p \in \Pi$ и $n \in \mathbb{N}$. Тогда G изоморфна $GL_m(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q .

Теорема 2. Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества групп

$$\mathfrak{S} = \{GL_m(F_1), PSL_k(F_2), PGL_d(F_3), PSU_3(F_4), Sz(F_5)\},$$

где m, k, d — фиксированные отличные от 1 числа из $\mathbb{N}$, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 независимо пробегают некоторое множество конечных полей. Тогда группа G изоморфна одной из групп $GL_m(F)$, $PSL_k(F)$, $PGL_d(F)$, $PSU_3(F)$, $Sz(F)$ для подходящего локально конечного поля F .

Вопрос об истинности утверждения теоремы 1 для $m = 1$ в [2] не рассматривался. Доказываемая в данной работе теорема 3 показывает, что утверждение теоремы 1 для $m = 1$ в общем случае неверно.

Теорема 3. Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{N} = \{GL_1(p^n) \mid p \in \Pi, n \in \mathbb{N}\}$. Тогда

1. Если $\mathfrak{N}(1)$ — конечное множество, то группа G конечна и изоморфна $GL_1(Q)$ для подходящего конечного поля Q .

2. Пусть U — группа комплексных корней n -й степени из 1, где n пробегает $\mathbb{N}$. Тогда группа U насыщена группами из множества $\mathfrak{M} = \{GL_1(p) \mid p \in \Pi\}$ и U не изоморфна $GL_1(P)$ ни для какого локально конечного поля P .

Используя технику доказательств из [2], удалось обобщить результаты теорем 1, 2.

Теорема 4. Локально конечная группа G , насыщенная группами из множества групп $\{SL_m(p^n)\}$, где m — фиксированное число из $\mathbb{N}$, $p \in \Pi$ и $n \in \mathbb{N}$, изоморфна $SL_m(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q .

Теорема 5. Локально конечная группа G , насыщенная группами из множества групп $\{GL_k(q^l), SL_m(p^n)\}$, где m, k — фиксированные отличные от 1 числа из $\mathbb{N}$, $p, q \in \Pi$ и $n, l \in \mathbb{N}$, изоморфна $GL_k(Q)$ либо изоморфна $SL_m(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q .

Теорема 6. Пусть локально конечная группа G насыщена группами из множества групп

$$\mathfrak{S} = \{GL_k(F_1), SL_m(F_2), PSL_m(F_3), PGL_k(F_4), PSU_3(F_5), Sz(F_6)\},$$

где $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ независимо пробегают некоторое множество конечных полей. Тогда группа G изоморфна одной из групп

$$\{GL_n(F), SL_n(F), PSL_n(F), PGL_n(F), PSU_3(F), Sz(F)\}$$

для подходящего локально конечного поля F .

1. Доказательство теоремы 3

Приведем два известных утверждения о простых числах.

Лемма 1 (теорема Дирихле). Пусть $l, k > 0$ — целые числа и $(l, k) = 1$. Тогда существует бесконечно много чисел $p \in \Pi$ таких, что $p \equiv l \pmod{k}$.

Лемма 2. Пусть $a \in \mathbb{N}$. Тогда существует бесконечно много чисел $q \in \Pi$ таких, что $a \mid q - 1$.

Так как $(1, a) = 1$, по лемме 1 существует бесконечно много чисел $q \in \Pi$ таких, что $q = 1 + ma$, где $m \in \mathbb{N}$. Следовательно, $q - 1 = ma$.

Докажем утверждение 1 теоремы 3. Пусть G — контрпример к теореме 3,

$$\mathfrak{N} = \{GL_1(p^n) \mid p \in \Pi, n \in \mathbb{N}\}$$

— насыщающее множество для группы G из условия теоремы. Если $\mathfrak{N}(1)$ — конечное множество, то группа G конечна и изоморфна по условию насыщенности некоторой группе $GL_1(p^n)$. Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2 теоремы 3. Любая группа $GL_1(p)$ циклическая порядка $p - 1$, поэтому она изоморфна группе U_{p-1} корней степени $p - 1$ из 1 в поле комплексных чисел C и, следовательно, является подгруппой группы U корней степени n из 1, где n пробегает $\mathbb{N}$. Рассмотрим бесконечное множество

$$\mathfrak{M} = \{GL_1(p) \mid p \in \Pi\}.$$

Покажем, что группа U насыщена группами из множества $\mathfrak{M}$. Пусть M — конечная подгруппа из U и $|M| = m$ — ее порядок. По лемме 2 существует такое простое число q , что $q - 1 = ml$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Следовательно, $U_m < U_{q-1}$. Группы $U_{q-1}, GL_1(q-1)$ циклические и имеют одинаковый порядок $q - 1$. В силу произвольности выбора M как конечной подгруппы группы U насыщенность последней группами из множества $\mathfrak{M}$ доказана.

Предположим, что группа U изоморфна полной линейной группе $GL_1(P)$ для некоторого бесконечного локально конечного поля P , и пусть p — характеристика поля P . Тогда, как легко видеть, группа $GL_1(P)$ не содержит элементов порядка p . Следовательно, и группа U не содержит элементов порядка p в силу изоморфизма групп U и $GL_1(P)$. Но это не так, поскольку группа U_p — группа корней степени p из 1 в поле комплексных чисел является циклической группой порядка p и $U_p < U$, но тогда группа U содержит элементы порядка p , что невозможно в силу изоморфизма $U \simeq GL_1(P)$. Утверждение 2 доказано.

Теорема доказана.

2. Доказательство теоремы 4

Пусть G — контрпример к теореме 4, $\mathfrak{M} = \{SL_m(p^n)\}$ — насыщающее множество для группы G , где m, n, p из условия теоремы 4, и $\mathfrak{M}(1) = \mathfrak{M}_G(1)$. Если $m = 1$, то $\mathfrak{M}(1)$ состоит из единственной группы, имеющей порядок 1. Следовательно, G — группа порядка 1. Противоречие с выбором G как контрпримера. В дальнейшем $m \geq 2$.

Лемма 3. G — бесконечная локально конечная группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное: G — конечная группа. По условию теоремы G изоморфна конечной группе $SL_m(p^n)$ для некоторых n, p . Противоречие с тем, что G — контрпример.

Лемма доказана.

Лемма 4. Без ограничения общности можно считать, что G — подгруппа группы $GL_m(F)$, где F — алгебраически замкнутое поле положительной характеристики p_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K = \langle x_1, x_2, \dots, x_l \rangle$ — конечно порожденная подгруппа группы G ($x_1, x_2, \dots, x_l$ — элементы группы G). Ввиду леммы 3 G — бесконечная локально конечная группа. Следовательно, K — локальная часть группы G [5]. Так как K — конечная подгруппа группы G , по условию теоремы $K \leq H \in \mathfrak{M}(1)$ и $H \simeq SL_m(p^n)$ для некоторых p, n . Следовательно, K имеет матричное представление степени m над некоторым конечным полем. Ввиду произвольности выбора K как локальной части группы G , получаем [5, теорема 4], что группа G имеет матричное представление степени m над некоторым полем F , т. е. G — подгруппа группы $GL_m(F)$. Осталось показать, что характеристика поля F ненулевая. Предположим обратное. Тогда в группе G есть нормальная абелева подгруппа N конечного индекса $r = |G : N|$ [5, теорема 2]. Из леммы 3 вытекает, что в группе G можно выбрать конечную подгруппу X , порядок которой будет больше, чем любое наперед заданное число. Кроме того, условие насыщенности позволяет так выбрать X , что $X \simeq SL_m(p^n)$ для некоторых p, n . Возьмем p, n такие, что $p^n > r$. Тогда $X \cap N$ — абелева нормальная подгруппа группы X и $|X : X \cap N| \leq r$. Отсюда вытекает, что простая группа $L_m(p^n)$, имеющая, очевидно, порядок больший чем r , обладает абелевой нормальной подгруппой S индекса $|L_m(p^n) : S| \leq p^n$. В этом случае для группы S имеется единственная возможность: $S = 1$ — единичная подгруппа группы $L_m(p^n)$. Тогда $p^n \geq |L_m(p^n) : S| = |L_m(p^n)| > p^n$; противоречие. Следовательно, F — поле положительной характеристики. Пусть $\bar{F}$ — алгебраическое замыкание поля F . Ясно, что поле $\bar{F}$ имеет характеристику p_0 . Возьмем в качестве F поле $\bar{F}$.

Лемма доказана.

Лемма 5. G — неприводимая подгруппа в $GL_m(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим обратное. Пусть V_m — линейное пространство размерности m над полем F , а V_k — подпространство V_m , где $1 \leq k < m$, инвариантное относительно действия группы G . Возьмем $H \in \mathfrak{M}(1)$. Согласно условию теоремы $H \simeq SL_m(p^n)$, где $SL_m(p^n) \in \mathfrak{M}$. Будучи подгруппой группы G , H действует инвариантно на V_k . Следовательно, H — приводимая подгруппа в $GL_m(F)$, где поле F имеет характеристику p_0 (лемма 4).

1. Без ограничения общности можно считать, что $m > 2$.

Пусть $m = 2$. В этом случае $k = 1$, V_1 — инвариантное относительно действия группы G подпространство размерности 1 в пространстве V_2 и H изоморфна подгруппе треугольных матриц из $GL_2(F)$, следовательно, H всегда разрешима. С другой стороны, ввиду леммы 3 и условия насыщенности можно выбрать H неразрешимой группой; противоречие.

2. Без ограничения общности можно считать, что найдется $H \in \mathfrak{M}(1)$ с условием, что $H \simeq SL_m(p^n)$, где $p \neq p_0$.

Предположим обратное, и пусть всегда $p = p_0$. Обозначим через S_p силовскую p -подгруппу из H . Если любой элемент из S_p действует нетривиально на V_k , то S_p лежит в некоторой силовой p -подгруппе M_p группы $SL_k(F)$. Следовательно, ступень нильпотентности группы S_p не превосходит ступени нильпотентности группы M_p , т. е. $m - 1 \leq k - 1$ [6, с. 274]. Тогда $m \leq k$. Противоречие с тем, что $k < m$. Таким образом, некоторый неединичный элемент x из S_p дей-

ствует тривиально на V_k . Тогда для любого $g \in G$ элемент x^g также действует тривиально на V_k . Следовательно, $N = \langle x^G \rangle$ — нормальная подгруппа в H и N действует тривиально на V_k . Поскольку N порождается p -элементами, то $N = H$. Рассмотрим фактор-пространство $\overline{V_m} = V_m/V_k$. Ясно, что размерность $\overline{V_m}$ равна $m-k \geq 1$. Если любой элемент из S_p действует нетривиально на $\overline{V_m}$, то S_p лежит в некоторой силовой p -подгруппе M_p группы $SL_{m-k}(F)$ (подгруппе унитарных матриц). Следовательно, ступень nilпотентности группы S_p не превосходит ступени nilпотентности группы M_p , т. е. $m-1 \leq m-k-1$ [6, с. 274]. Тогда $k \leq 0$. Противоречие с тем, что $k \geq 1$. Таким образом, некоторый неединичный элемент x из S_p действует тривиально на $\overline{V_m}$. Тогда для любого $g \in G$ элемент x^g также действует тривиально на $\overline{V_m}$, $N = \langle x^G \rangle$ — нормальная подгруппа в H и N действует тривиально на $\overline{V_m}$. Поскольку N порождается p -элементами, то $N = H$.

Итак, группа H действует тривиально на пространствах V_k и $\overline{V_m} = V_m/V_k$. Рассмотрим действие группы H на всем пространстве V_m . Возьмем вектор $v \in V_m \setminus V_k$. Возьмем неединичный элемент $h \in H$ и подействуем им на вектор v . Поскольку H_1 действует тривиально на V_k и $\overline{V_m} = V_m/V_k$, то $h(v) = v + v_1$, где $v_1 \in V_k$, $h^2(v) = h(h(v)) = h(v + v_1) = h(v) + h(v_1) = v + v_1 + v_1 = v + 2v_1, \dots, h^p(v) = v + pv_1 = v$ ($p = p_0$ — характеристика поля F). Таким образом, p -я степень любого элемента из H действует тривиально на V_m . Поскольку H порождается всеми элементами, порядки которых взаимно просты с p , то H действует тривиально на V_m . Противоречию с тем, что группа H имеет точное представление на V_m .

Завершим доказательство леммы. Пусть H из п. 2, рассмотренного выше. Поскольку $p_0 \neq p$, согласно [7, предложение, с. 235]

$$m \geq ((p^n)^m - 1)/(p^n - 1) - m).$$

Тогда имеем следующую последовательность эквивалентных неравенств:

$$\begin{aligned} 2m &\geq (p^n)^m - 1)/(p^n - 1), \\ 2m &\geq (p^n - 1)((p^n)^{m-1} + (p^n)^{m-2} + \dots + p^n + 1)/(p^n - 1), \\ 2m &\geq ((p^n)^{m-1} + (p^n)^{m-2} + \dots + p^n + 1), \\ 2m &\geq (p^{m-1} + p^{m-2} + \dots + p + 1), \\ 2m &\geq (2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2 + 1). \end{aligned}$$

Покажем, что последнее неравенство противоречиво при $m \geq 3$. Воспользуемся индукцией. При $m = 3$ имеем

$$6 > (2^2 + 2 + 1) = 7.$$

Противоречие. Пусть теперь $m \geq 3$. Тогда

$$2m \geq (2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2 + 1) = 2(2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1) + 1.$$

Ввиду индуктивного предположения

$$2(m-1) < (2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1).$$

Следовательно,

$$2m \geq (2^{m-1} + 2^{m-2} + \dots + 2 + 1) = 2(2^{m-2} + 2^{m-3} + \dots + 2 + 1) + 1 > 2(2(m-1)) + 1$$

и

$$2m > 2(2(m-1)) + 1 = 4m - 1 \Rightarrow 0 > 2m - 1 \Rightarrow 1 > 2m \Rightarrow 1 > 2m > 6.$$

Противоречие. Оно завершает доказательство неприводимости G в $GL_m(F)$. Лемма доказана.

Лемма 6. Без ограничения общности можно считать, что F — бесконечное локально конечное поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку F имеет положительную характеристику p_0 (лемма 4), то F обладает простым подполем P порядка p_0 . По лемме 5 G — вполне приводимая подгруппа в $GL_m(F)$. По [8, теорема 52.2.1] G имеет матричное представление над полем $\overline{P}$ — алгебраическим замыканием поля P в поле F . Очевидно, $\overline{P}$ — локально конечное поле. Положим $F = \overline{P}$.

Лемма доказана.

Лемма 7. В G существует бесконечная цепочка вложенных друг в друга конечных подгрупп $G_1 < G_2 < \dots < G_k < \dots$ со следующими свойствами:

1. $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$.
2. $G_k \simeq SL_m(R_k)$, где R_k — конечное поле.
3. G_k — неприводимая подгруппа в $GL_m(F)$.
4. $Z(G_1) \leq Z(G_2) \leq \dots < Z(G_k) \leq Z(G_{k+1}) \leq \dots$.
5. $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z(G_k) = Z(G)$ — центр группы G , который является циклической группой, порядок которой делит m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Так как F — локально конечное поле (лемма 6), оно счетно. Следовательно, $GL_m(F)$ — счетная группа. Ввиду того, что G — подгруппа группы $GL_m(F)$, группа G также счетна. Занумеруем элементы этой группы $G = \{g_1, g_2, \dots\}$. По условию насыщенности $\langle g_1 \rangle < G_1 \in \mathfrak{M}(1)$. Предположим, что построена цепочка групп $G_1 < G_2 < \dots < G_k$. Пусть l — минимальное значение индекса, при котором $g_l \notin G_k$. По условию насыщенности $\langle g_l, G_k \rangle < G_{k+1} \in \mathfrak{M}(1)$. Действуя подобным образом, строим цепочку $G_1 < G_2 < \dots < G_k < \dots$, обладающую свойством 1.

2. По построению $G_k \in \mathfrak{M}(1)$ для любого k . Следовательно, $G_k \simeq SL_m(R_k)$, где R_k — подходящее конечное поле (условие насыщенности), и свойство 2 доказано.

3. Если G_k для любого k — приводимая группа, то любая конечная подгруппа H из G приводима, поскольку лежит в некоторой подгруппе G_k (п. 1). Так как любая локальная часть группы G является конечной подгруппой группы G , то в силу произвольности выбора H как конечной подгруппы группы G получаем, что любая локальная часть группы G приводима. Следовательно, по [5, теорема 5] будет приводимой и группа G . Противоречие с утверждением леммы 5. Пусть l — минимально возможное значение индекса k , при котором G_l — неприводимая подгруппа. Положим $G_1 = G_l$, $G_2 = G_{l+1}$ и $G_k = G_{l+(k-1)}$. Ясно, что все G_k — неприводимые подгруппы группы G , поскольку каждая из них содержит G_1 . Свойство 3 доказано.

4. По [5, теорема 3] и п. 3, доказанному выше, начиная с некоторого l будут выполняться включения $Z(G_l) \leq Z(G_{l+1}) \leq Z(G_{l+2}) < \dots$. Положим $G_1 = G_l$, $G_2 = G_{l+1}$ и $G_k = G_{l+(k-1)}$. Тогда $Z(G_1) \leq Z(G_2) \leq \dots \leq Z(G_k) \leq Z(G_{k+1}) < \dots$, что и требовалось в утверждении свойства 4.

5. Пусть $g \in Z(G)$. Тогда $g \in G_k$ для некоторого k (свойство 1). Следовательно, $g \in Z(G_k)$. В силу произвольности выбора g как элемента группы $Z(G)$ получаем, что $Z(G) \leq \bigcup_{k=1}^{\infty} Z(G_k)$. Пусть теперь g — произвольный элемент группы $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z(G_k)$, а x — произвольный элемент группы G . По свойству 1

$\langle x, g \rangle \leq G_k$ для некоторого k . Следовательно, $g \in Z(G_k)$ (свойство 4), $xg = gx$ и $\bigcup_{k=1}^{\infty} Z(G_k) \leq Z(G)$. Так как для любого $Z(G_k)$, $|Z(G_k)|$ делит m , то все доказано. Свойство 5 доказано.

Лемма доказана.

Зафиксируем конечные группы G_k и конечные поля R_k из утверждения леммы 7.

Лемма 8. *Без ограничения общности можно считать, что*

$$R_1 < R_2 < \dots < R_k < \dots, \quad R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$$

— бесконечное локально конечное поле и $G/Z(G) \simeq PSL_m(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\overline{G} = G/Z(G)$, $\overline{G}_k = G_k Z(G)/Z(G)$. По лемме 7

$$\overline{G}_k \simeq G_k/(G_k \cap Z(G)) = G_k/Z(G_k) \simeq PSL_m(R_k), \\ \overline{G}_1 < \overline{G}_2 < \dots < \overline{G}_k < \dots,$$

$\{\overline{G}_1, \overline{G}_2, \dots, \overline{G}_k, \dots\}$ — локальная система для группы $\overline{G}$. По [9, теорема 4.18] $\overline{G} = G/Z(G) \simeq PSL_m(R)$ для подходящего локально конечного поля R такого, что $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k^{(1)}$, где $R_k^{(1)} \in \{R_1, R_2, \dots, R_k, \dots\}$, и $R_1^{(1)} < R_2^{(1)} < \dots < R_k^{(1)} < \dots$.

Возьмем в качестве поля R_k поле $R_k^{(1)}$. Несложно видеть, что все утверждения леммы 7 имеют место.

Лемма доказана.

Зафиксируем поле R из утверждения леммы 8 и группу $\overline{G}_k$ из доказательства леммы 8.

Лемма 9. $SL_m(R_1) < SL_m(R_2) < \dots < SL_m(R_k) < \dots, SL_m(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} SL_m(R_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простое следствие предыдущей леммы.

Зафиксируем группу $SL_m(R)$ из утверждения леммы 9.

Лемма 10. *Группа G изоморфно вкладывается в группу $SL_m(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $G_k \simeq SL_m(R_k)$ (лемма 7, п. 2), существует изоморфизм $\psi_k(G_k) = SL_m(R_k) < SL_m(R)$ (лемма 9). Понятно, что ψ_k являются точными неприводимыми представлениями групп G_k (лемма 7, п. 3). Через ψ_{kl} для $k > l$ обозначим ограничение представления ψ_k на G_l . Так как $G_1 < G_l$, то все ψ_{kl} — абсолютно неприводимые представления. Рассмотрим семейство $\psi_{k1} : G_1 \rightarrow SL_m(R)$. Так как у конечной группы число неэквивалентных точных представлений конечно [8, теорема 43.2.1], найдется такое бесконечное множество индексов I_1 , что ψ_{kl} — эквивалентные представления для всех $k \in I_1$. Зафиксируем одно из них и обозначим его через $\varphi_1 : G_1 \rightarrow GL_m(R)$.

Рассмотрим множество $\{\psi_{k2} \mid k \geq 2 \text{ и } k \in I_1\}$ представлений группы G_2 . Снова воспользовавшись бесконечностью I_1 и конечностью множества неэквивалентных абсолютно неприводимых полных представлений конечной группы, получим такое бесконечное подмножество I_2 из I_1 , что ψ_{k2} эквивалентны для всех $k \in I_2$. Следовательно, найдется такое представление φ_2 группы G_2 ,

что φ_2 эквивалентно ψ_{k2} , $k \in I_2$, и ограничение φ_2 на G_1 совпадает с φ_1 . Продолжая этот процесс дальше, построим последовательность представлений $\varphi_k : G_k \rightarrow GL_m(R)$, причем ограничение φ_k на G_l совпадает с φ_l для всех $l < k$. Очевидно, предел этой последовательности даст изоморфизм группы G в группу $SL_m(R)$.

Лемма доказана.

Ввиду леммы 10 будем рассматривать группу G как подгруппу группы $SL_m(R)$. Если $G = SL_m(R)$, то приходим к противоречию с тем, что G — контрпример. В дальнейшем будем считать, что G — собственная подгруппа группы $SL_m(R)$.

Лемма 11. $Z(G) = Z(SL_m(R)) = Z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По леммам 7 (п. 3), 8, 10 G_k — неприводимая матричная подгруппа группы $SL_m(R)$. Следовательно, $Z(G_k)$ состоит из скалярных матриц степени m . В силу изоморфизма $G_k \simeq SL_m(R_k)$, упомянутого выше, имеем $Z(G_k) = Z(SL_m(R_k))$.

Отсюда получаем в связи с утверждением лемм 7 (п. 4, 5), 9, что

$$Z(SL_m(R)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z(SL_m(R_k)) = \bigcup_{k=1}^{\infty} Z(G_k) = Z(G).$$

Лемма доказана.

Зафиксируем группу $Z = Z(G) = Z(SL_m(R))$ из условия леммы 11.

Лемма 12. $\overline{G} = G/Z \simeq PSL_m(R)$ и $\overline{G}$ — собственная подгруппа группы $\overline{SL_m(R)} = SL_m(R)/Z = PSL_m(R)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изоморфизм $\overline{G} = G/Z \simeq PSL_m(R)$ доказан (с учетом утверждения леммы 11) в лемме 8. Так как G — собственная подгруппа группы $SL_m(R)$, то понятно, что $\overline{G}$ — собственная подгруппа группы $\overline{SL_m(R)}$.

Лемма доказана.

Группы X и Y назовем *локально эквивалентными*, если для любой конечно порожденной подгруппы X_1 из X в Y найдется подгруппа, изоморфная X_1 , и наоборот, для любой конечно порожденной подгруппы Y_1 из Y в X найдется подгруппа, изоморфная Y_1 [4, определение 1.2].

Группу X назовем *локально замкнутой*, если для любой группы Y , локально эквивалентной группе X , найдется подгруппа в X , изоморфная Y [4, определение 2.4].

Пусть A и B — некоторые подгруппы группы C . Будем говорить, что подгруппа A локально вложима в подгруппу B относительно группы C , если для любой конечно-порожденной подгруппы A_1 из A найдется такой элемент $c \in C$, что $c^{-1}A_1c \leq B$ [4, определение 2.2].

Лемма 13. Локально замкнутая группа не имеет изоморфных себе собственных подгрупп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная лемма доказана в [4, лемма 2.5].

Лемма 14. Пусть X — неприводимая периодическая подгруппа в $PGL_n(F)$, где F — некоторое поле, и X не имеет нетривиальных проективных представлений степени $< n$. Тогда для любой группы Y , локально эквивалентной группе

X , найдется такое точное представление φ группы Y в $PGL_n(F)$, что $\varphi(Y)$ локально вложима в X относительно $PGL_n(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данная лемма доказана в [4, лемма 2.3].

Лемма 15. Группа $PSL_m(R)$ локально замкнута.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условии леммы 14 в качестве поля F возьмем поле R из условия леммы 8, в качестве группы $PGL_m(F)$ возьмем группу $PGL_m(R)$. Покажем, что в качестве X можно взять $PSL_m(R)$. Так как $PSL_m(R)$ — неприводимая локально конечная подгруппа, достаточно показать, что она не имеет нетривиальных неприводимых проективных представлений степени k , где $k < m$. Действительно, в противном случае $PSL_m(R) \simeq M$, где $M \leq PSL_k(F)$ и F — поле положительной характеристики $p_1 \neq p$. Возьмем в $PSL_m(R)$ конечную подгруппу $PSL_m(p^l)$. Поскольку $p_1 \neq p$, то $PSL_m(p^l)$ имеет нетривиальное проективное представление степени k и согласно [7, предложение, с. 235]

$$m > k \geq ((p^l)^m - 1)/(p^l - 1) - m.$$

Так как $k \geq 2$, $m \geq 3$, а l можно взять сколь угодно большим, то данное неравенство противоречиво. Таким образом, $PSL_m(R)$ не имеет нетривиальных неприводимых проективных представлений степени меньше m . Пусть Y — группа, локально эквивалентная группе $PSL_m(R)$. По условию леммы Y — локально конечная группа. По лемме 14 существует точное проективное представление φ группы Y в $PGL_n(F)$ такое, что $\varphi(Y)$ локально вложима в $PSL_m(R)$ относительно $PGL_n(R)$. Следовательно, для любой конечно-порожденной подгруппы $N = \langle y_1, \dots, y_n \rangle$ группы $\varphi(Y)$ существует элемент $c \in PGL_m(R)$ такой, что $N^c < PSL_m(R)$. Так как $PSL_m(R)$ — нормальная подгруппа в $PGL_m(R)$, то

$$N = (N^c)^{c^{-1}} < PSL_m(R)^{c^{-1}} = PSL_m(R) \leq PGL_m(R).$$

В силу локальной конечности группы $\varphi(Y)$ последняя является подгруппой $PSL_m(R)$. Ввиду произвольности выбора Y как группы, локально эквивалентной группе $PSL_m(R)$, последняя локально замкнута.

Лемма доказана.

Завершим доказательство теоремы 4. По лемме 15 $PSL_m(R)$ локально замкнута. По лемме 12 $PSL_m(R)$ содержит собственную подгруппу $\overline{G}$, изоморфную $PSL_m(R)$. По лемме 13 $PSL_n(R)$ не может содержать подгрупп, изоморфных самой себе. Противоречие с утверждением леммы 12.

4. Доказательство теорем 5 и 6

Пусть G — контрпример к утверждению теоремы 5,

$$\mathfrak{S} = \{GL_k(q^l), SL_m(p^n)\}$$

— насыщающее множество для группы G из условия теоремы. Несложно видеть, что множество $\mathfrak{S}(1)$ образует локальную систему для G .

Предположим, что для любой группы $H \in \mathfrak{S}(1)$ такой, что $H \simeq GL_k(q^l)$, найдется подгруппа $K \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $H < K$, и K изоморфна некоторой группе из множества $\mathfrak{S}^* = \{SL_m(p^n)\}$. Тогда $\mathfrak{S}^*(1)$ — локальная система для G и по теореме 4 G изоморфна группе $\{SL_m(F)\}$ для подходящего локально конечного поля F из заключения теоремы. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Таким образом, найдется подгруппа $H \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $H \simeq GL_k(q^l)$, и для нее не найдется подгруппы $K \in \mathfrak{S}^*(1)$ такой, что $H < K$. Зафиксируем группу H . По условию насыщенности для любой группы $X \in \mathfrak{S}(1)$ конечная группа $\langle H, X \rangle < H_X$ — некоторая группа из $\mathfrak{S}(1)$. В силу того, что H_X содержит H , H_X не может быть одной из групп множества $\mathfrak{S}^*(1)$. Следовательно, H_X всегда изоморфна некоторой группе из множества $\mathfrak{S}^{**} = \{GL_k(q^l)\}$. В силу того, что X пробегает все множество $\mathfrak{S}(1)$, множество $\{H_X \mid X \in \mathfrak{S}(1)\}$ — локальная система для группы G , являющаяся подмножеством множества $\mathfrak{S}^{**}(1)$, каждый элемент которого является некоторой группой $GL_k(q^l)$. По теореме 1 $G \simeq GL_k(F)$ для подходящего локально конечного поля F из заключения теоремы. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема 5 доказана.

Пусть G — контрпример к утверждению теоремы 6,

$$\mathfrak{S} = \{GL_k(F_1), SL_m(F_2), PSL_d(F_3), PGL_r(F_4), PSU_3(F_5), Sz(F_6)\}$$

— насыщающее множество для группы G из условия теоремы. Несложно видеть, что множество $\mathfrak{S}(1)$ образует локальную систему для G .

Предположим, что для любой группы $H \in \mathfrak{S}(1)$ такой, что $H \simeq SL_m(F_2)$, найдется подгруппа $K \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $H < K$, и K изоморфна некоторой группе из множества

$$\mathfrak{S}^* = \{PSL_d(F_3), PGL_r(F_4), PSU_3(F_5), Sz(F_6)\}.$$

Тогда $\mathfrak{S}^*(1)$ — локальная система для G и по [9, теорема 4.18] G изоморфна одной из групп множества

$$\{PSL_d(F), PGL_r(F), PSU_3(F), Sz(F)\}$$

для подходящего локально конечного поля F из заключения теоремы. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Таким образом, найдется подгруппа $H \in \mathfrak{S}(1)$ такая, что $H \simeq SL_m(F_2)$, и для нее не найдется подгруппы $K \in \mathfrak{S}(1)$ такой, что $H < K$, и K изоморфна некоторой группе из множества

$$\mathfrak{S}^* = \{PSL_d(F_3), PGL_r(F_4), PSU_3(F_5), Sz(F_6)\}.$$

Зафиксируем группу H . По условию насыщенности для любой группы $X \in \mathfrak{S}(1)$ конечная группа $\langle H, X \rangle < H_X$ — некоторая группа из $\mathfrak{S}(1)$. В силу того, что H_X содержит H , H_X не может быть изоморфной одной из групп множества $\mathfrak{S}^*$.

Следовательно, H_X всегда изоморфна $SL_m(F_2)$ для некоторого конечного поля F_2 . В силу того, что X пробегает все множество $\mathfrak{S}(1)$, множество $\{H_X \mid X \in \mathfrak{S}(1)\}$ — локальная система для группы G , каждый элемент которой изоморфен $SL_m(F_2)$ для некоторого конечного поля F_2 (для каждой группы H_X поле F_2 выбирается отдельно). По теореме 4 $G \simeq SL_m(F)$ для подходящего локально конечного поля F из заключения теоремы. Противоречие с тем, что G — контрпример.

Теорема 6 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлепки́н А. К. О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми группами // Мат. тр. 1998. Т. 1, № 1. С. 129–138.
2. Шлепки́н А. А. О локально конечных группах с заданной структурой конечных подгрупп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 226–234.
3. Шлепки́н А. А., Сабодас И. В. О двух свойствах группы Шункова // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2021. Т. 35. С. 103–119.
4. Беляев В. В. Локально-конечные группы Шевалле. Исследования по теории групп. Свердловск: Изд-во УНЦ АН СССР, 1984.
5. Мальцев А. И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Мат. сб. 1940. Т. 50, № 3. С. 405–422.
6. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
7. Seitz G. M., Sallesskii A. E. On the minimal degrees of projective representations of the finite Chevalley groups. II // J. Algebra. 1993. V. 158, N 1. P. 233–243.
8. Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. М.: Наука, 1980.
9. Kegel O. N., Wehrfritz B. A. F. Locally finite groups. Amsterdam: North-Holland, 1973.

Поступила в редакцию 5 февраля 2024 г.

После доработки 9 марта 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Шлепки́н Алексей Анатольевич,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
shlyopkin@mail.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
the American Mathematical Society's $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 28.06.2024. Уч.-изд. л. 14. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 26.07.2024. Объем файла 1.65 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.