

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65

3

2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, С. С. Кутателадзе

Редакторы:

В. Л. Береснев,	А. А. Лаптев,
А. А. Боровков,	В. Д. Мазуров,
А. Ю. Веснин,	А. Е. Миронов,
А. Е. Гутман,	Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко,	А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов,	П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 65, № 3 (385) Май—июнь, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Асташкин С. В. Об изоморфных вложениях в классе дизъюнктно однородных перестановочно инвариантных пространств	435
Башеева А. О., Швидефски М. В. Квазимногообразие $SP(L_6)$. II. Результат о дуальности	446
Бикчентаев А. М. След и интегрируемые коммутаторы измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана	455
Веснин А. Ю., Егоров А. А. Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений	469
Водопьянов С. К., Павлов С. В. О граничных значениях в геометрической теории функций в областях с подвижными границами	489
Иванов А. А. О размерности квантования максимальных сцепленных систем	517
Малютин А. В. Обобщение теоремы Артина об изотопности замкнутых кос. I	524
Морозов А. С. ИТВМ-конструктивные пополнения алгебр	533
Пожидаев А. П. Об обобщенной конструкции Мицухары	545
Романов В. Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче для нелинейного гиперболического уравнения	560
Симонов А. А., Нецадим М. В., Бородин А. Н. Конструкции квандлов над группами и кольцами	577
Сучков Н. М, Шлепкии А. А. О регулярных подгруппах группы $\text{Lim}(N)$	591

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Чжан С., Су Л., Ревин Д. О. Пример относительно максимальной непронормальной подгруппы нечетного порядка в конечной простой группе	596
--	-----

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

УДК 517.982.22

ОБ ИЗОМОРФНЫХ ВЛОЖЕНИЯХ
В КЛАССЕ ДИЗЪЮНКТНО
ОДНОРОДНЫХ ПЕРЕСТАНОВОЧНО
ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВ
С. В. Асташкин

Аннотация. Как известно, из эквивалентности системы Хаара в перестановочно инвариантном пространстве X на $[0, 1]$ и последовательности попарно дизъюнктных функций в некотором пространстве Лоренца следует, что $X = L_2[0, 1]$ с эквивалентностью норм. Показано, что аналогичный результат верен в классе равномерных дизъюнктно однородных перестановочно инвариантных пространств. Получены следствия, относящиеся к свойствам изоморфных вложений таких пространств. В частности, для каждого $1 < p < \infty$ пространство $L_p[0, 1]$ оказывается единственным равномерным p -дизъюнктно однородным перестановочно инвариантным пространством на $[0, 1]$ с нетривиальными индексами Бойда, имеющим два перестановочно инвариантных представления на полуоси $(0, \infty)$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.301

Ключевые слова: изоморфизм, перестановочно инвариантное пространство, пространство Орлича, пространство Лоренца, дизъюнктные функции, дизъюнктно однородное пространство, p -дизъюнктно однородное пространство.

1. Введение

Фундаментальный труд [1], опубликованный в 1979 г., содержит целый ряд глубоких результатов об изоморфных вложениях перестановочно инвариантных (r.i.) функциональных пространств. В частности, там доказано следующее классификационное утверждение [1, теорема 6.1] (определения см. в следующем разделе).

Теорема 1. Пусть X и Y — r.i. пространства на $[0, 1]$ такие, что индексы Бойда пространства X нетривиальны (т. е. $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$) и Y не содержит равномерно изоморфных копий l_∞^n для всех $n \in \mathbb{N}$. Если X вложено изоморфно в Y , то выполнено по крайней мере одно из следующих условий:

(i) существует константа $C > 0$ такая, что

$$\|x\|_Y \leq C\|x\|_X \quad \text{для всех } x \in X;$$

(ii) X изоморфно пространству $L_2[0, 1]$;

(iii) система Хаара в X эквивалентна некоторой последовательности попарно дизъюнктных функций в Y .

Из трех условий, перечисленных в этой теореме, наиболее сложным для проверки является условие (iii) эквивалентности системы Хаара в X некоторой

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-71-30001) в МГУ им. М. В. Ломоносова.

© 2024 Асташкин С. В.

последовательности попарно дизъюнктных функций в Y . С одной стороны, оно в самом деле необходимо: известны примеры, когда условие (iii) выполнено, а (i) и (ii) — нет (см. [1, пример 10.4]). С другой стороны, для некоторых классов г.и. пространств из (iii) вытекает одно из более простых условий (i) или (ii). Например, хорошо известно [1, с. 168], что в случае, когда Y — пространство Орлича, (iii) имеет место, лишь если X изоморфно $L_2[0, 1]$. Действительно, всякая последовательность попарно дизъюнктных функций порождает в пространстве Орлича модулярное пространство последовательностей, которое вложено в некоторое пространство Орлича последовательностей l_ψ [2]. Так как по условию теоремы X сепарабельно, система Хаара является базисом в X [3, предложение 2.с.1]. Поэтому если выполнено (iii), то все пространство X также изоморфно вложено в l_ψ . Но, как доказано в теореме 3 работы [4] (см. там также следующее непосредственно после этой теоремы замечание), при выполнении условия $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ единственное г.и. пространство на $[0, 1]$, обладающее подобным свойством, это пространство $L_2[0, 1]$. Благодаря этому обстоятельству ряд общих утверждений об изоморфных вложениях г.и. пространств в случае пространств Орлича может быть уточнен [1]. Подобный факт был получен также и для пространств Лоренца (см. [5, 6]).

Главная цель настоящей работы состоит в доказательстве того, что аналогичный результат справедлив в более общей ситуации, когда Y в теореме 1 является равномерным дизъюнктно однородным (DH) г.и. пространством (см. теорему 2). Заметим, что класс DH пространств достаточно обширен и, в частности, содержит все пространства Лоренца и часть пространств Орлича (см. §2.1).

Применяя теорему 2, а также результаты фундаментальных работ [1] и [7], получим следствия, показывающие весьма специфические свойства перестановочно инвариантных (г.и.) представлений DH г.и. пространств на $[0, 1]$ и $(0, \infty)$.

Говорят, что г.и. пространство X на $[0, 1]$ имеет единственное г.и. представление на $[0, 1]$, если из того, что оно изоморфно некоторому г.и. пространству Y на $[0, 1]$, следует равенство $X = Y$ (с эквивалентностью норм). В [1] доказан ряд глубоких результатов, содержащих условия, при которых г.и. пространство обладает этим свойством. В частности, единственное г.и. представление на $[0, 1]$ имеет пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$ [1, теорема 7.1(b)] (см. также [8, теорема 5.4]). В этой работе последнее утверждение будет распространено на класс равномерных DH г.и. пространств (см. следствие 3). Кроме того, при дополнительном условии равномерности следствия 2 и 3 уточняют утверждения теоремы 5 и следствия 2 недавней работы [9] об инвариантности DH свойства при изоморфных вложениях г.и. пространств.

В заключительной части работы на основе применения предложения 8.12 из [1] показано, что для каждого $1 < p < \infty$ пространство $L_p[0, 1]$ — единственное равномерное p - DH г.и. пространство на $[0, 1]$ с нетривиальными индексами Бойда, имеющее два г.и. представления на $(0, \infty)$ (см. предложение 1 и следствие 4).

2. Определения и предварительные сведения

2.1. Перестановочно инвариантные пространства. Напомним некоторые определения из теории перестановочно инвариантных (или симметричных) пространств (более полную информацию см. в [10] или [3]).

Пусть $J = [0, 1]$ или $(0, \infty)$. Банахово пространство X измеримых на J функций называется *перестановочно-инвариантным* (г.и.) пространством, если

1) из неравенства $|x(t)| \leq |y(t)|$ для п. в. $t \in J$, где функция x измерима по Лебегу, а $y \in X$, следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \|y\|_X$; 2) из *равноизмеримости* функций x и y , где $y \in X$, т. е. равенства

$$\mu(\{t \in J : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in J : |x(t)| > u\}), \quad u > 0,$$

где $\mu(E)$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$, вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0, 1]$ функция x равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geq 0 : \mu(\{s \in J : |x(s)| > u\}) < t\}, \quad t \in J.$$

г.и. пространство X на J называется *максимальным*, если из того, что $x_n \in X$, $n = 1, 2, \dots$, $\sup_{n=1,2,\dots} \|x_n\|_X < \infty$ и $x_n \rightarrow x$ п. в. на J , следует: $x \in X$ и $\|x\|_X \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X$. Всюду далее предполагаем, что любое г.и. пространство X сепарабельно или максимально, а также удовлетворяет условию нормировки: $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$.

Для каждого г.и. пространства X на $[0, 1]$ справедливы непрерывные вложения: $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Определим для любого $s > 0$ оператор растяжения σ_s , полагая $\sigma_s x(t) := x(t/s)\chi_{(0, \min(1,s))}(t)$ (всюду далее χ_E — характеристическая функция множества E). Он ограничен в каждом г.и. пространстве X на $[0, 1]$ и $\|\sigma_s\|_{X \rightarrow X} \leq \max(1, s)$, $s > 0$ (см., например, [10, теорема II.4.4]). Так как функция $s \mapsto \|\sigma_s\|_{X \rightarrow X}$ субмультипликативна при $s > 0$, то определены числа

$$\alpha_X = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \|\sigma_{2^{-n}}\|_{X \rightarrow X} \quad \text{и} \quad \beta_X = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log_2 \|\sigma_{2^n}\|_{X \rightarrow X},$$

которые называются *индексами Бойда* пространства X . Всегда имеют место неравенства $0 \leq \alpha_X \leq \beta_X \leq 1$ [10, § II.4.4]. Будем говорить, что эти индексы *нетривиальны*, если $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$.

Важный и наиболее известный пример г.и. пространств — L_p -пространства, $1 \leq p \leq \infty$, с обычной нормой. Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть $M(t)$ — непрерывная возрастающая выпуклая функция на $[0, \infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича $L_M = L_M[0, 1]$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций x таких, что норма Люксембурга

$$\|x\|_{L_M} := \inf \left\{ u > 0 : \int_0^1 M\left(\frac{|x(s)|}{u}\right) ds \leq 1 \right\}$$

конечна. В частности, если $M(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, получаем пространство L_p .

Пусть $1 \leq p < \infty$ и W — положительная убывающая функция на $[0, 1]$ такая, что $\int_0^1 W(t) dt = 1$. Пространство Лоренца $\Lambda(W, p)$ состоит из всех измеримых на $[0, 1]$ функций x , таких, что

$$\|x\|_{\Lambda(W,p)} := \left(\int_0^1 x^*(t)^p W(t) dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Следующая полезная конструкция была введена в [1] (см. также [3, 2.f]). Если X — г.и. пространство на $[0, 1]$, то множество Z_X^2 состоит из всех измеримых на $(0, \infty)$ функций f , для которых

$$\|f\|_{Z_X^2} := \|f^* \chi_{[0,1]}\|_X + \|f^* \chi_{[1,\infty)}\|_{L_2(0,\infty)} < \infty.$$

Функционал $\|\cdot\|_{Z_X^2}$ является лишь квазинормой (так как неравенство треугольника выполняется, вообще говоря, с константой, большей 1). Тем не менее, как нетрудно показать (см., например, [3, 2.f]), для любого г.и. пространства X на $[0, 1]$ он эквивалентен подходящей г.и. норме и тем самым Z_X^2 становится г.и. пространством на $(0, \infty)$.

2.2. Дизъюнктно однородные г.и. пространства. Напомним (см. [11]), что г.и. пространство X называется *дизъюнктно однородным* (или имеет *DH* свойство), если всякие две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ попарно дизъюнктных нормированных элементов в X содержат подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$, C -эквивалентные в X для некоторого $C > 0$. Последнее означает, что для всех $c_k \in \mathbb{R}$ выполнено

$$C^{-1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{n_k} \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_{n_k} \right\|_X \leq C \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{n_k} \right\|_X. \quad (1)$$

В частности, если для некоторого $1 \leq p \leq \infty$ из любой последовательности $\{x_n\}$ попарно дизъюнктных нормированных элементов в X можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что для некоторого $C > 0$

$$C^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{n_k} \right\|_X \leq C \left(\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^p \right)^{1/p}$$

(с естественной модификацией при $p = \infty$), то X называют *p -дизъюнктно однородным* (*p -DH*) пространством.

Если дополнительно существует такое C , для которого неравенство (1) выполняется для подходящих подпоследовательностей произвольной пары последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ попарно дизъюнктных нормированных элементов в X , то говорят, что X имеет *равномерное DH свойство* [12]. Аналогичный смысл имеет понятие *равномерного p -DH свойства*.

Очевидно, что каждое равномерное *DH* (соответственно *p -DH*) г.и. пространство имеет *DH* (соответственно *p -DH*) свойство. В работе [12] приведен пример, показывающий, что обратное неверно для дискретных банаховых решеток, порядок в которых порожден базисом. Позднее, в [13], были получены необходимые и достаточные условия, при которых пространство Орлича на $[0, 1]$ имеет равномерное *DH*- свойство, откуда, в частности, следует, что пространство Орлича, являющееся *p -DH* пространством при некотором $1 \leq p < \infty$, может не иметь равномерного *p -DH* свойства.

Сравнительно с пространствами Орлича *DH* свойства пространств Лоренца являются гораздо более простыми. Согласно [14, предложение 5.1] для любого $\varepsilon > 0$ всякая последовательность $\{x_n\}$ попарно дизъюнктных нормированных функций в $\Lambda(W, p)$ содержит подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, $(1 + \varepsilon)$ -эквивалентную в $\Lambda(W, p)$ каноническому базису в l_p . Таким образом, каждое пространство $\Lambda(W, p)$ имеет равномерное *p -DH* свойство.

Более подробную информацию о *DH* свойствах г.и. пространств и, в частности, многочисленные примеры *DH* пространств см. в работах [9, 11–13] и [15–17].

2.3. Функции Хаара. Функции Хаара определяются для $t \in [0, 1]$ следующим образом: $h_1(t) = 1$ и, если $n = 2^m + k$, $m = 0, 1, \dots$, $k = 1, 2, \dots, 2^m$,

то

$$h_n(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)2^{-m} < t < (2k-1)2^{-m-1}, \\ -1, & (2k-1)2^{-m-1} < t < k2^{-m}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0, 1]. \end{cases}$$

Система $\{h_n\}_{n=1}^\infty$ является монотонным базисом в любом сепарабельном г.и. пространстве. Для того чтобы она была безусловна в сепарабельном г.и. пространстве X , необходимо и достаточно, чтобы $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ (см. [3, 2.с.6] или [10, § П.9.6]). Напомним, что базис $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ банахова пространства X называется *безусловным*, если последовательность $\{x_{\pi(n)}\}_{n=1}^\infty$ является базисом в X для любой перестановки π натурального ряда.

Функции f_n , $n = 1, 2, \dots$, имеющие такое же распределение, как некоторая измеримая на $[0, 1]$ функция f , будем называть *копиями* f . Определение независимых функций см., например, в [18, гл. 2]. Наконец, будем писать $X \approx Y$, если банаховы пространства X и Y изоморфны.

3. Об эквивалентности системы Хаара последовательностям дизъюнктивных функций в классе DH пространств

Покажем, что свойство изоморфных вложений г.и. пространств в пространства Лоренца, доказанное в [5] (см. § 1), распространяется на более общий случай вложений в равномерные DH пространства.

Теорема 2. Пусть X и Y — г.и. пространства на $[0, 1]$ такие, что X сепарабельно, а Y имеет равномерное DH свойство. Если система Хаара эквивалентна в X некоторой последовательности попарно дизъюнктивных функций в Y , то $X = L_2[0, 1]$ (с эквивалентностью норм).

Доказательство. Прежде всего, так как всякая последовательность попарно дизъюнктивных функций в любом г.и. пространстве безусловна, из условия теоремы вытекает безусловность системы Хаара в пространстве X . Как отмечено выше (см. п. 2.3), это эквивалентно нетривиальности индексов Бойда пространства X , т. е. выполнению неравенства $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$.

Пусть функция $f \in X$ удовлетворяет условиям: $\|f\|_X = 1$, $\int_0^1 f(t) dt = 0$, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых копий f . Покажем, что для каждой функции $g \in L_\infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t)g(t) dt = 0. \quad (2)$$

Обозначим через h^m «срезку» функции h числом $m \in \mathbb{N}$, т. е. $h^m(t) = h(t)$, если $|h(t)| \leq m$, и $h^m(t) = 0$, если $|h(t)| > m$. Тогда, во-первых, так как f_n , $n = 1, 2, \dots$, имеют такое же распределение, как и f , то для всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - \int_0^1 f_n^m(t)g(t) dt \right| &= \left| \int_0^1 (f_n(t) - f_n^m(t))g(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\{|f_n| > m\}} |f_n(t)| dt \cdot \|g\|_\infty = \int_{\{|f| > m\}} |f(t)| dt \cdot \|g\|_\infty. \end{aligned}$$

Так как $f \in L_1$, отсюда для любого $\varepsilon > 0$, всех $n \in \mathbb{N}$ и достаточно больших m справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - \int_0^1 f_n^m(t)g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Аналогично, учитывая, что

$$\int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\left| \int_0^1 f_n^m(t) dt \right| = \left| \int_0^1 f_n(t) dt - \int_0^1 f_n^m(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3\|g\|_\infty},$$

если $m \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Пусть m_0 выбрано так, что для $m \geq m_0$ выполнены оба последних неравенства.

Так как функции f_n^m , $n = 1, 2, \dots$, независимы для каждого $m \in \mathbb{N}$, то последовательность $\left\{ f_n^m - \int_0^1 f_n^m(s) ds \right\}_{n=1}^\infty$ является равномерно ограниченной ортогональной системой на $[0, 1]$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(f_n^m(t) - \int_0^1 f_n^m(s) ds \right) \cdot g(t) dt = 0$$

для любых $m \in \mathbb{N}$ и $g \in L_\infty$. В частности, для ранее выбранного m_0 найдется такое n_0 , что для всех $n \geq n_0$

$$\left| \int_0^1 \left(f_n^{m_0}(t) - \int_0^1 f_n^{m_0}(s) ds \right) \cdot g(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

В итоге из предыдущих неравенств вытекает, что для всех $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt \right| &\leq \left| \int_0^1 f_n(t)g(t) dt - \int_0^1 f_n^{m_0}(t)g(t) dt \right| \\ &+ \left| \int_0^1 \left(f_n^{m_0}(t) - \int_0^1 f_n^{m_0}(s) ds \right) \cdot g(t) dt \right| + \left| \int_0^1 f_n^{m_0}(t) dt \right| \cdot \|g\|_\infty \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (2) доказано.

В частности, (2) выполнено, если в качестве g взять произвольную функцию Хаара. Тем самым, так как эти функции образуют базис пространства X , можно применить принцип выбора Бессаги — Пелчинского (см., например, [19, предложение 1.а.12]), согласно которому найдутся подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \subset \{f_n\}$ и блок-базис $x_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i h_i$ системы Хаара, где $p_1 = 0 < p_2 < \dots$, $a_i \in \mathbb{R}$, такие, что для всех $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, выполнено

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k x_k \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k f_{n_k} \right\|_X \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^\infty c_k x_k \right\|_X. \quad (3)$$

Далее, по условию существует изоморфное вложение $T : X \rightarrow Y$ такое, что функции $u_k := Th_k$, $k = 1, 2, \dots$, из Y попарно дизъюнкты. Тогда $y_k := Tx_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} a_i u_i$ также попарно дизъюнкты функции и, кроме того,

$$\|T^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \right\|_Y \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k \right\|_X \leq \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k \right\|_Y. \quad (4)$$

Отсюда в силу (3) и того, что $\|f_n\|_X = \|f\|_X = 1$, $n = 1, 2, \dots$, получаем

$$\frac{1}{2\|T^{-1}\|} \leq \|y_k\|_Y \leq 2\|T\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

В частности, если положить $f = \chi_{[0,1/2)} - \chi_{[1/2,1]}$, то в качестве последовательности независимых копий f можно взять систему функций Радемахера $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ (см., например, [19, с. 86]). Как и ранее, тогда существуют подпоследовательность $\{r_{n'_k}\}$ и блок-базис x'_k , $k = 1, 2, \dots$, системы Хаара такие, что попарно дизъюнкты функции $y'_k := Tx'_k$ удовлетворяют для всех $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots$, соотношениям

$$\frac{1}{2} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x'_k \right\|_X \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r_{n'_k} \right\|_X \leq 2 \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x'_k \right\|_X, \quad (6)$$

$$\|T^{-1}\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y'_k \right\|_Y \leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k x'_k \right\|_X \leq \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k y'_k \right\|_Y, \quad (7)$$

$$\frac{1}{2\|T^{-1}\|} \leq \|y'_k\|_Y \leq 2\|T\|, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Следовательно, так как Y — равномерное DH г.и. пространство, в силу (5) и (8) существуют подпоследовательности $\{y_{k_j}\}$ и $\{y'_{k_j}\}$ такие, что с некоторой универсальной константой $C_1 > 0$ выполнено

$$C_1^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j y'_{k_j} \right\|_Y \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j y_{k_j} \right\|_Y \leq C_1 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j y'_{k_j} \right\|_Y. \quad (9)$$

В результате из соотношений (3), (4), (6), (7) и (9) следует, что

$$C_2^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_{n'_{k_j}} \right\|_X \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_{n_{k_j}} \right\|_X \leq C_2 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_{n'_{k_j}} \right\|_X,$$

или, так как последовательности $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{f_{n_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$ (соответственно $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{r_{n'_{k_j}}\}_{j=1}^{\infty}$) одинаково распределены и, значит, изометрически эквивалентны в X ,

$$C_2^{-1} \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_X \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j f_j \right\|_X \leq C_2 \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_X,$$

где константа C_2 не зависит от функции f и $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. В то же время, учитывая, что $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, имеем

$$C_3^{-1} \|(c_j)\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{j=1}^{\infty} c_j r_j \right\|_X \leq C_3 \|(c_j)\|_{l_2}$$

(см., например, [3, теорема 2.b.4]). Поэтому в силу предыдущего соотношения существует такое $C > 0$, что для любой функции $f \in X$, $\|f\|_X = 1$, $\int_0^1 f(t) dt = 0$, и произвольных $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$, последовательность $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset X$ независимых копий функции f удовлетворяет следующим неравенствам:

$$C^{-1}\|(c_j)\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j f_j \right\|_X \leq C\|(c_j)\|_{l_2}. \quad (10)$$

С другой стороны, так как $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то для той же последовательности $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ с некоторой константой D , зависящей только от пространства X , выполнено неравенство Джонсона — Шехтмана:

$$D^{-1} \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \bar{f}_j \right\|_{Z_X^2} \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j f_j \right\|_X \leq D \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \bar{f}_j \right\|_{Z_X^2}, \quad (11)$$

где Z_X^2 — г.и. пространство на $(0, \infty)$, определенное в п. 2.1, а

$$\bar{f}_j(t) := f(t + j - 1)\chi_{[j-1, j)}(t), \quad t > 0.$$

(см. [20, теорема 1] или [21, теорема 9]). Из (10) и (11) следуют неравенства

$$(CD)^{-1}\|(c_j)\|_{l_2} \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \bar{f}_j \right\|_{Z_X^2} \leq CD\|(c_j)\|_{l_2}. \quad (12)$$

При этом, так как для каждой функции $f \in X$, $\|f\|_X = 1$, существует равноизмеримая с ней функция $f' \in X$ такая, что $\int_0^1 f'(t) dt = 0$, последнее соотношение распространяется на все функции $f \in X$, $\|f\|_X = 1$.

Из определения нормы в пространстве Z_X^2 , а также равенства $\|\chi_{[0,1]}\|_X = 1$ вытекает, что

$$\left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \chi_{[j-1, j)} \right\|_{Z_X^2} = c_1^* + \left(\sum_{j=2}^\infty (c_j^*)^2 \right)^{1/2},$$

где $(c_j^*)_{j=1}^\infty$ — невозрастающая перестановка последовательности $(|c_j|)_{j=1}^\infty$. Отсюда в силу (12) получаем

$$(2CD)^{-1} \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \chi_{[j-1, j)} \right\|_{Z_X^2} \leq \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \bar{f}_j \right\|_{Z_X^2} \leq CD \left\| \sum_{j=1}^\infty c_j \chi_{[j-1, j)} \right\|_{Z_X^2}$$

для всех $f \in X$, $\|f\|_X = 1$, и $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots$. Таким образом, последовательность целочисленных сдвигов любой нормированной функции f из г.и. пространства Z_X^2 эквивалентна в Z_X^2 последовательности сдвигов функции $\chi_{[0,1]}$ с константами, не зависящими от f . Ввиду известной характеристики L_p -пространств, полученной Е. М. Семеновым и Ф. Л. Эрнандесом (см. [22, теорема 5.4]), отсюда следует, что $Z_X^2 = L_p(0, \infty)$ для некоторого $p \in (1, \infty)$. Учитывая определение пространства Z_X^2 , заключаем, что $p = 2$ и $X = L_2[0, 1]$. Теорема доказана. $\square$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1. Пусть X и Y — г.и. пространства на $[0, 1]$ такие, что $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$. Предположим, что X не совпадает с $L_2[0, 1]$ ни при какой эквивалентной перенормировке, а Y не содержит равномерно изоморфных копий l_∞^n для всех $n \in \mathbb{N}$ и имеет равномерное ДН свойство. Тогда если X вложено изоморфно в Y , то существует такое $\delta > 0$, что $\|f\|_X \geq \delta\|f\|_Y$ для всех $f \in X$.

4. R.i. представления DH пространств на $[0, 1]$

Напомним следующую известную теорему Калтона о дополняемых вложениях одного г.и. пространства в другое [7, теорема 7.4].

Теорема 3. Пусть X и Y — сепарабельные г.и. пространства на $[0, 1]$. Предположим, что X не совпадает с $L_2[0, 1]$ ни при какой эквивалентной перенормировке и изоморфно дополняемому подпространству пространства Y . Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий: (а) $\alpha_X = 0$; (б) $\beta_X = 1$; (с) в Y не существует последовательности $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ попарно дизъюнктивных функций, которая бы порождала в Y дополняемое подпространство и была бы эквивалентна в Y системе Хаара в X . Тогда $X = Y$ (с эквивалентностью норм).

В том случае, когда Y имеет равномерное DH свойство, этот результат приобретает гораздо более простую форму.

Следствие 2. Если Y — сепарабельное равномерное DH г.и. пространство, а г.и. пространство X не совпадает с $L_2[0, 1]$ и изоморфно дополняемому подпространству пространства Y , то $X = Y$ (с эквивалентностью норм).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 3 достаточно проверить, что в Y не существует последовательности попарно дизъюнктивных функций, эквивалентной в Y системе Хаара в X . Но это вытекает из теоремы 2 и условия, что X не совпадает с $L_2[0, 1]$. $\square$

Из последнего утверждения, в свою очередь, следует, что свойство единственности г.и. представления на $[0, 1]$, справедливое для пространств Лоренца [5], распространяется на класс сепарабельных равномерных DH г.и. пространств.

Следствие 3. Всякое сепарабельное равномерное DH г.и. пространство Y на $[0, 1]$ имеет единственное г.и. представление на $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X и Y — г.и. пространства на $[0, 1]$, $X \approx Y$. Если X не совпадает с $L_2[0, 1]$, то $X = Y$ (с эквивалентностью норм) в силу следствия 2. Предположим, что $X = L_2[0, 1]$. Тогда, так как пространство $L_2[0, 1]$ имеет единственное г.и. представление на $[0, 1]$ [1, теорема 7.1(b)] (см. также [8, теорема 5.4]), а X и Y изоморфны, то отсюда $X = Y = L_2[0, 1]$ (с эквивалентностью норм). Таким образом, следствие доказано. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Утверждения следствий 2 и 3 уточняют (при дополнительном условии равномерности DH свойства) результаты работы [9] о том, что всякое г.и. пространство, изоморфное некоторому p - DH г.и. пространству, также обладает p - DH свойством.

5. R.i. представления DH пространств на $(0, \infty)$

В заключение рассмотрим изоморфные вложения p - DH г.и. пространств на $[0, 1]$ в г.и. пространства на $(0, \infty)$.

Предложение 1. Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что X — равномерное p - DH г.и. пространство на $[0, 1]$, $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$ и $X \neq L_p[0, 1]$ ни при какой эквивалентной перенормировке.

Тогда Z_X^2 — единственное г.и. пространство на $(0, \infty)$ такое, что $X \approx Z_X^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, так как $0 < \alpha_X \leq \beta_X < 1$, то $X \approx Z_X^2$ в силу теоремы 8.6 из [1].

Обратно, пусть $X \approx Y$ для некоторого г.и. пространства Y на $(0, \infty)$. Применим предложение 8.12 из [1], согласно которому либо $Y \approx Z_X^2$, либо существует константа $D > 0$ такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\kappa_{n,i}\}_{i=1}^\infty$, где $\kappa_{n,i} = \chi_{(2^{-n}(i-1), 2^{-n}i)}$, D -эквивалентна в Y некоторой последовательности попарно дизъюнктивных функций в X . Осталось показать, что во втором случае $Y = L_p(0, \infty)$ (с эквивалентностью норм). Действительно, тогда $X \approx L_p(0, \infty) \approx L_p[0, 1]$ и, так как пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, имеет единственное г.и. представление на $[0, 1]$ (см., например, [1, теорема 7.1(b)]), получаем, что $X = L_p[0, 1]$ (с эквивалентностью норм). Поскольку это противоречит условию, в этом случае предложение будет доказано.

Итак, пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\kappa_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ D -эквивалентна в Y некоторой последовательности попарно дизъюнктивных функций в X . Так как X — равномерное p - DH г.и. пространство, отсюда вытекает существование константы $C_X > 0$ такой, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ последовательность $\{\|\kappa_{n,i}\|_Y^{-1} \kappa_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ $C_X D$ -эквивалентна каноническому базису в l_p . Напомним также, что всякое несепарабельное г.и. пространство содержит последовательность попарно дизъюнктивных функций, эквивалентную каноническому базису в l_∞ [3, предложение 1.а.7]. Ясно, что последнее невозможно в случае, когда г.и. пространство имеет p - DH свойство при $1 \leq p < \infty$. Значит, как пространство X , так и изоморфное ему Y сепарабельны. Поэтому из эквивалентности последовательностей $\{\|\kappa_{n,i}\|_Y^{-1} \kappa_{n,i}\}_{i=1}^\infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$ каноническому базису в l_p с одной и той же константой следует, что $X = L_p[0, 1]$ (с эквивалентностью норм). $\square$

Хорошо известен тот факт (который, в частности, вытекает из только что доказанного предложения), что пространство $L_p[0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, изоморфно в точности двум г.и. пространствам на $(0, \infty)$: $L_p(0, \infty)$ и $Z_{L_p}^2$. Поэтому из предложения 1 вытекает следующий результат.

Следствие 4. Пусть $1 < p < \infty$. Пространство $L_p[0, 1]$ — единственное равномерное p - DH г.и. пространство на $[0, 1]$ с нетривиальными индексами Бойда, имеющее два г.и. представления на $(0, \infty)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Среди г.и. пространств на $[0, 1]$, хотя бы один индекс Бойда которых тривиален, существуют равномерные p - DH г.и. пространства на $[0, 1]$, которые не изоморфны ни одному из г.и. пространств на $(0, \infty)$. К ним относятся, например, пространства Лоренца $\Lambda(W_\alpha, 2)$, где $W_\alpha(t) = \alpha t^{-1} \ln^{-\alpha-1}(e/t)$, $0 < \alpha \leq 1$ (см. [23, следствие 3]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson W. B., Maurey B., Schechtman G., Tzafriri L. Symmetric structures in Banach spaces. Mem. Am. Math. Soc., 1979. V. 217.
2. Woo J. Y. T. On a class of universal modular sequence spaces // Israel J. Math. 1975. V. 20. P. 193–215.
3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces II. Function spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
4. Lindenstrauss J., Tzafriri L. On Orlicz sequence spaces III // Israel J. Math. 1973. V. 14. P. 368–389.
5. Carothers N. L. Rearrangement invariant subspaces of Lorentz function spaces // Israel J. Math. 1981. V. 40, N 3–4. P. 217–228.
6. Carothers N. L. Rearrangement invariant subspaces of Lorentz function spaces II // Rocky Mountain J. Math. 1987. V. 17, N 3. P. 607–616.
7. Kalton N. J. Lattice structures on Banach spaces // Mem. Am. Math. Soc. 1993. V. 103. P. 1–92.

8. Tzafriri L. Uniqueness of structure in Banach spaces // Handbook of the geometry of Banach spaces. Ed. by W.B. Johnson and J. Lindenstrauss. Elsevier Sci.B.V., 2003. V. 2. P. 1635–1670.
9. Astashkin S. V. Some remarks about disjointly homogeneous symmetric spaces // Rev. Mat. Complut. 2019. V. 32, N 3. P. 823–835.
10. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
11. Flores J., Tradacete P., Troitsky V. G. Disjointly homogeneous Banach lattices and compact products of operators // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 354. P. 657–663.
12. Flores J., Hernández F. L., Spinu E., Tradacete P., Troitsky V. G. Disjointly homogeneous Banach lattices: Duality and complementation // J. Funct. Anal. 2014. V. 266, N 9. P. 5858–5885.
13. Astashkin S. V. Disjointly homogeneous Orlicz spaces revisited // Ann. Mat. Pura Appl. 2021. V. 200. P. 2689–2713.
14. Figiel T., Johnson W. B., Tzafriri L. On Banach lattices and spaces having local unconditional structure with applications to Lorentz function spaces // J. Approx. Theor. 1975. V. 13. P. 395–412.
15. Flores J., Hernández F. L., Semenov E. M., Tradacete P. Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices // Israel J. Math. 2012. V. 188, N 9. P. 323–352.
16. Flores J., Hernández F. L., Tradacete P. Disjointly homogeneous Banach lattices and applications // Positivity VII. Trends in Mathematics. Switzerland: Springer, 2016. P. 179–201.
17. Astashkin S. V. Duality problem for disjointly homogeneous rearrangement invariant spaces // J. Funct. Anal. 2019. V. 276. P. 3205–3225.
18. Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Изд-во АФЦ, 1999.
19. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces I. Sequence spaces. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1977.
20. Johnson W. B., Schechtman G. Sums of independent random variables in rearrangement invariant function spaces // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 789–808.
21. Асташкин С. В., Сукочев Ф. А. Независимые функции и геометрия банаховых пространств // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65, № 6. С. 3–86.
22. Hernández F. L., Semenov E. M. Subspaces generated by translations in rearrangement invariant spaces // J. Funct. Anal. 1999. V. 169. P. 52–80.
23. Astashkin S. V., Curbera G. P. Rosenthal's space revisited // Studia Math. 2022. V. 262, N 2. P. 197–224.

Поступила в редакцию 9 декабря 2023 г.

После доработки 9 декабря 2023 г.

Принята к публикации 25 января 2024 г.

Асташкин Сергей Владимирович (ORCID 0000-0002-8239-5661)
Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С. П. Королёва,
Московское шоссе, 34, Самара 443086;
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey.
astash@ssau.ru

КВАЗИМНОГООБРАЗИЕ $\mathbf{SP}(L_6)$.

II. РЕЗУЛЬТАТ О ДУАЛЬНОСТИ

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

Аннотация. Показано, что категория полных биалгебраических $(0, 1)$ -решеток, принадлежащих квазимногообразию, порожденному конкретной конечной решеткой, с полными гомоморфизмами решеток, рассматриваемая как конкретная категория, дуально эквивалентна категории специальных пространств с дополнительной структурой.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.302

Ключевые слова: дуальность, биалгебраическая решетка, квазимногообразие.

1. Введение

Настоящая работа продолжает работу [1]. Рассматривается категория $\mathbb{B}_6$ полных биалгебраических $(0, 1)$ -решеток, принадлежащих квазимногообразию $\mathbf{SP}(L_6)$, порожденному конечной решеткой L_6 (рис. 1) с полными гомоморфизмами $(0, 1)$ -решеток в качестве морфизмов. (Отметим, что решетка L_6 изоморфна решетке подпорядков трехэлементной цепи.) Далее определяется категория $\mathbb{L}_6$ так называемых L_6 -пространств с L_6 -морфизмами (см. определение 2 в разд. 3).

В [1] установлено, что квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$ образует (конечно базисруемое) многообразие. Более того, был найден конкретный конечный базис тождеств для $\mathbf{SP}(L_6)$. Используя этот конечный базис тождеств, мы доказываем, что категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ дуально эквивалентны (см. теорему 15). Для доказательства теоремы 15 существенно используются методы и идеи работ [2–5].

Отметим, что категория $\mathbb{N}_5$ из [4, 5] является полной подкатегорией в $\mathbb{L}_6$. Рассматривая ограничение дуальности, представленной здесь, на $\mathbb{N}_5$, получаем дуальность из работ [4, 5]. В частности, рассматривая ограничение нашей дуальности на категорию конечных дистрибутивных решеток, получаем известную дуальность Биркгофа.

Все понятия и обозначения, не определенные здесь, соответствуют [1, 4–6].

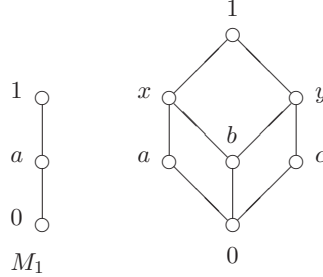
2. Основные понятия и вспомогательные результаты

Следующее определение использует некоторые понятия из [6, 3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Рассмотрим J -решетку L , где $J \subseteq J(L)$. Для элемента $x \in J$ полагаем

$$\mathfrak{M}(x) = \left\{ A \subseteq J \mid 1 < |A| < \omega, x \leq \bigvee A \right\},$$

Работа выполнена в рамках госзадания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2022-0012. Первый автор поддержан Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, проект AP13268735.


 Рис. 1. Ч.у. множество M_1 и решетка $L_6 \cong O(M_1)$.

где $\bigvee A$ — минимальное нетривиальное покрытие x . Для множества $S \subseteq J$ полагаем

$$S^{[0]} = S; \quad S^{[n+1]} = \bigcup \{A \in \mathfrak{M}(x) \mid x \in S^{[n]}\}, \quad n < \omega; \quad \langle S \rangle_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{i < \omega} S^{[i]}.$$

Для элемента $x \in J$ будем писать $\langle x \rangle_{\mathfrak{M}}$ вместо $\langle \{x\} \rangle_{\mathfrak{M}}$. Непосредственно видно, что

$$\langle S \rangle_{\mathfrak{M}} = \bigcup_{x \in S} \langle x \rangle_{\mathfrak{M}} \subseteq J,$$

поэтому $\langle \rangle_{\mathfrak{M}}$ является алгебраическим оператором замыкания на J . Множество $S \subseteq J$ называется $\mathfrak{M}$ -замкнутым, если $S = \langle S \rangle_{\mathfrak{M}}$.

Ясно, что $\mathfrak{M}(x) = \emptyset$, поэтому $\langle x \rangle_{\mathfrak{M}} = \{x\}$ для каждого элемента $x \in J$, который является простым. Более того, если L является биалгебраической решеткой, то для любого $x \in \text{CJ}(L)$ множество $\langle x \rangle_{\mathfrak{M}} = \{x\}$ состоит из вполне неразложимых элементов.

Полагаем $\Sigma_6 = \{(C), (D_2), (N_5^1)\}$, где рассматриваемые тождества (C) , (D_2) , и (N_5^1) определены в [1]. Согласно [1, теорема 12], $\mathbf{SP}(L_6)$ является многообразием, а Σ_6 образует его базис тождеств.

Предложение 1 [1, предложение 10]. Пусть решетка L коалгебраическая, причем $L \models \Sigma_6$. Тогда для каждого элемента $x \in J(L)$, который не является простым, имеем

$$\langle x \rangle_{\mathfrak{M}} = \{x, a, b\} \text{ для некоторых } a, b \in J_P(L).$$

Более того, $L \in \mathbf{SP}(L_6)$.

Следствие 2 [1, следствие 11]. Пусть решетка L коалгебраическая, причем $L \models \Sigma_6$. Тогда для каждого элемента $x \in \text{CJ}(L)$, который не является простым, имеем

$$\langle x \rangle_{\mathfrak{M}} = \{x, a, b\} \text{ для некоторых } a, b \in \text{CJ}_P(L).$$

В частности, $L \in \mathbf{SP}(L_6)$.

3. Категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$

Следующее определение является аналогом определения N_5 -пространства из [5, определение 2.1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Система $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_6 -пространством, если

- (s1) $X \cup Y \neq \emptyset$ и $X \cap Y = \emptyset$;
 (s2) $\leq$ является частичным порядком на $X \cup Y$;
 (s3) $f: Y \rightarrow X^2$ — функция и для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$,
 выполнены следующие условия:

- (a) $y \not\leq a, b$ и $\{a, b\}$ — антицепь;
 (b) если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $y \leq z$;
 (c) если $z \leq y$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то либо $z \leq a$, либо $z \leq b$, либо $z \in Y$ и $\{u, v\} \ll \{a, b\}$, где $f(z) = (u, v)$.

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f \rangle$ являются L_6 -пространствами. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется L_6 -морфизмом, если выполняются следующие условия:

- (m1) φ отображает $X \cup Y$ в $X' \cup Y' \cup \{(a, b) \mid a, b \in X'\}$;
 (m2) если $u, v \in X \cup Y$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in X' \cup Y'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;
 (m3) $\varphi(x) \in X'$ для всех $x \in X$;
 (m4) для $y \in Y$ с условием $f(y) = (a, b)$ выполнено следующее:
 (a) если $\varphi(y) \in X'$, то $\varphi(y) \leq \varphi(a)$ или $\varphi(y) \leq \varphi(b)$;
 (b) если $\varphi(y) \in Y'$, то $f(\varphi(y)) = (\varphi(a), \varphi(b))$;
 (c) если $\varphi(y) \notin X' \cup Y'$, то $\varphi(y) = \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ является антицепью, а $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \varphi(z)$ для всех $z \in X \cup Y$ таких, что $y \leq z$.

Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ являются L_6 -пространствами с носителями $X_0; Y_0, X_1; Y_1$ и $X_2; Y_2$ соответственно, и пусть $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1, \varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_6 -морфизмы. Определим композицию $\varphi_0 \circ \varphi_1: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_2$ морфизмов φ_0 и φ_1 следующим образом. Пусть $u \in X_0 \cup Y_0$.

- (c1) Если $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$, то $\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \varphi_1 \varphi_0(u)$.
 (c2) Если $\varphi_0(u) \notin X_1 \cup Y_1$ и $\varphi(u) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(a), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(b) \leq \varphi_1 \varphi_0(a), \\ \varphi_1 \varphi_0(b), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(a) \leq \varphi_1 \varphi_0(b), \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \text{если } \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \text{ — антицепь.} \end{cases}$$

Лемма 3. Если $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ — L_6 -пространства, а $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$ и $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_6 -морфизмы, то $\varphi_0 \circ \varphi_1$ является L_6 -морфизмом.

Объектами категории $\mathbb{L}_6$ являются L_6 -пространства; морфизмами этой категории являются L_6 -морфизмы. Объектами категории $\mathbb{B}_6$ являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(L_6)$; морфизмами этой категории являются полные гомоморфизмы $(0, 1)$ -решеток. Основная цель данной работы — установить, что категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ дуально эквивалентны.

4. Контравариантный функтор из $\mathbb{L}_6$ в $\mathbb{B}_6$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [5, определение 3.1]. Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — L_6 -пространство. Подмножество $I \subseteq X \cup Y$ называется идеалом L_6 -пространства $\mathbb{S}$, если I — нижний конус в $\langle X \cup Y, \leq \rangle$, причем выполняется следующее свойство для всех $y \in Y$:

$$\text{если } f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in I, \text{ то } y \in I.$$

Ясно, что множество $F(\mathbb{S})$ всех идеалов в $\mathbb{S}$ частично упорядочено относительно $\subseteq$. Для подмножества $Z \subseteq X \cup Y$ пусть $\overline{Z}$ — наименьший идеал в $\mathbb{S}$, который содержит Z ; другими словами,

$$\overline{Z} = \bigcap \{I \in F(\mathbb{S}) \mid Z \subseteq I\}.$$

Доказательство следующего утверждения вытекает из доказательства [7, предложение 3.2].

Предложение 4. Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — L_6 -пространство, а $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ — семейство идеалов в $\mathbb{S}$. Справедливы следующие утверждения.

(i) Если множество $Z \subseteq X \cup Y$ таково, что $Z = \downarrow Z$, то $\overline{Z} = Z \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in Z\}$.

(ii) $\bigvee_{i \in I} Z_i = \overline{\bigcup_{i \in I} Z_i} = \bigcup_{i \in I} Z_i \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in \bigcup_{i \in I} Z_i\}$.

(iii) Если семейство $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ направлено вверх относительно $\subseteq$, то $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i$.

(iv) Z является вполне неразложимым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X \cup Y$.

(v) Z является вполне простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X$.

(vi) Если $z \in X \cup Y$, то $\downarrow z$ является простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $z \in X$.

(vii) $F(\mathbb{S})$ является полной биалгебраической решеткой.

Теорема 5. Если $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ является L_6 -пространством, то $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_6)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $F(\mathbb{S})$ — биалгебраическая решетка по предложению 3(vii), 2-дистрибутивная в силу предложения 3(ii), $F(\mathbb{S})$ является CJ -решеткой в силу [5, предложение 1.2]. По следствию 2 $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_6)$. $\square$

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f \rangle$ — L_6 -пространства и $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ — L_6 -морфизм. Для $Z' \subseteq X' \cup Y'$ полагаем

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in X \cup Y \mid \varphi(x) \in Z'\} \cup \{z \in Y \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}.$$

Рассмотрим следующее отображение:

$$F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S}), \quad F(\varphi): Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z').$$

Предложение 6. Если $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ — L_6 -пространства, а $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ — L_6 -морфизм, то $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$ — полный гомоморфизм $(0, 1)$ -решеток.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Несложные вычисления доказывают

Утверждение 1. $F(\varphi)(Z') \in F(\mathbb{S})$ для каждого $Z' \in F(\mathbb{S}')$.

Из утверждения выше следует, что $F(\varphi)$ определено корректно. Очевидно, что $F(\varphi)(\emptyset) = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ и $F(\varphi)(X' \cup Y') = \varphi^{-1}(X' \cup Y') = X \cup Y$. Следовательно, $F(\varphi)$ сохраняет наибольший и наименьший элементы. Остается установить, что $F(\varphi)$ сохраняет произвольные непустые решеточные объединения и пересечения.

Утверждение 2. $F(\varphi)$ является полным решеточным гомоморфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Рассмотрим семейство $\{Z'_i \mid i \in I\} \subseteq F(\mathbb{S}')$ идеалов в $\mathbb{S}'$. Ясно, что

$$\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} Z'_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i),$$

поэтому $F(\varphi)$ сохраняет все непустые пересечения. В частности, $F(\varphi)$ сохраняет порядок. Таким образом,

$$\bigvee_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i) \subseteq \varphi^{-1}\left(\bigvee_{i \in I} Z'_i\right).$$

Для доказательства того, что $F(\varphi)$ сохраняет произвольные решеточные объединения, мы должны установить обратное включение. Действительно, пусть

$$z \in \varphi^{-1}\left(\bigvee_{i \in I} Z'_i\right) = \varphi^{-1}\left(\overline{\bigcup_{i \in I} Z'_i}\right).$$

Рассмотрим два возможных случая.

СЛУЧАЙ 1: $\varphi(z) \in X' \cup Y'$. В этом случае $\varphi(z) \in \overline{\bigcup_{i \in I} Z'_i}$. Если $\varphi(z) \in \bigcup_{i \in I} Z'_i$, то $\varphi(z) \in Z'_j$ для некоторого $j \in I$ и $z \in \varphi^{-1}(Z'_j) \subseteq \bigvee_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i)$. Иначе получаем по предложению 4(ii), что $\varphi(z) \in Y'$ и $\varphi(f(z)) = (a', b')$ для некоторых $a', b' \in \bigcup_{i \in I} Z'_i$. Из включения $\varphi(z) \in Y'$ в силу (m4-b) следует, что $z \in Y$ и $\varphi(f(z)) = (\varphi(a), \varphi(b))$, где $f(z) = (a, b)$. Следовательно, $\varphi(a) = a' \in \bigcup_{i \in I} Z'_i$ и $\varphi(b) = b' \in \bigcup_{i \in I} Z'_i$. Последнее включение влечет включение $a, b \in \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i)$. Поскольку $f(z) = (a, b)$, получаем, что $z \in \bigvee_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i)$.

СЛУЧАЙ 2: $\varphi(z) \notin X' \cup Y'$. В этом случае $z \in Y$, $f(z) = (a, b)$ в $\mathbb{S}$ и $\varphi(z) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} Z'_i}$. Поскольку $a, b \subseteq X$, заключаем в силу (m3) определения 2, что $\varphi(a), \varphi(b) \subseteq X'$. Стало быть, $\varphi(a), \varphi(b) \in \bigcup_{i \in I} Z'_i$ по предложению 4(ii), т. е. $a, b \in \bigcup_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i)$ и $z \in \bigvee_{i \in I} \varphi^{-1}(Z'_i)$. $\square$

Таким образом, $F(\varphi)$ — полный гомоморфизм $(0, 1)$ -решеток, и доказательство предложения 6 завершено. $\square$

Следствие 7. $F: \mathbb{L}_6 \rightarrow \mathbb{B}_6$ является контравариантным функтором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 4, 6 и теоремы 5 следует, что функтор F определен корректно. Ясно, что если $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ — L_6 -пространства, а $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_6 -морфизмы, то

$$F(\varphi_0 \circ \varphi_1)(Z) = \varphi_0^{-1} \varphi_1^{-1}(Z) = F(\varphi_1) \circ F(\varphi_0)(Z)$$

для всех $Z \in F(\mathbb{S}_2)$, поэтому F сохраняет композиции морфизмов. $\square$

5. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_6$ в $\mathbb{L}_6$

Для решетки $L \in \mathbb{B}_6$ полагаем

$$G(L) = \langle X, Y, \leq, f \rangle,$$

где $X = CJ_P(L)$ — множество всех вполне неразложимых элементов решетки L , которые являются простыми, $Y = CJ_{NP}(L)$ — множество всех вполне неразложимых элементов решетки L , которые не являются простыми, $\leq$ — порядок в L , а $f(y) = (a, b)$ для элемента $y \in CJ_{NP}(L)$ в том случае, когда $\langle y \rangle \mathfrak{M} = \{y, a, b\}$.

Из этого определения и определения 2, получаем

Предложение 8. Если $L \in \mathbb{B}_6$, то $G(L) \in \mathbb{L}_6$.

Доказательство. Единственное нетривиальное свойство в определении 2, которое требует доказательства, это (s3-c). Пусть $y \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$, а элемент $z \in \mathbf{CJ}_P(L) \cup \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $f(y) = (a, b)$ и $z \leq y$. Если $z \not\leq a$ и $z \not\leq b$, то $z \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ и $z \leq y \leq a \vee b$ в L . Согласно следствию 2 $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in \mathbf{CJ}_P(L)$. Поскольку $z \leq a \vee b$ является нетривиальным покрытием, получаем, что $\{c, d\} \ll \{a, b\}$. $\square$

Для решеток $L, M \in \mathbb{B}_6$ и полного гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: M \rightarrow L$ рассмотрим следующее отображение:

$$\beta_g: L \rightarrow M, \quad \beta_g: a \mapsto \bigwedge \{b \in M \mid a \leq g(b)\}.$$

Заметим, что $1_M \in \{b \in M \mid a \leq g(b)\}$ для всех $a \in L$. Следующие три утверждения установлены в [5].

Лемма 9 [5, лемма 4.2]. Пусть L, M — полные биалгебраические $(0, 1)$ -решетки и $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм $(0, 1)$ -решеток. Справедливы следующие утверждения.

- (i) $a \leq g\beta_g(a)$ для всех $a \in L$ и $\beta_g g(b) \leq b$ для всех $b \in M$.
- (ii) $g\beta_g g(b) = g(b)$ для всех $b \in M$.
- (iii) $\beta_g g\beta_g(a) = \beta_g(a)$ для всех $a \in L$.
- (iv) $\beta_g(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \beta_g(a_i)$ для всех $a_i \in L, i \in I$.
- (v) Если $x \in \mathbf{CJ}_P(L)$, то $\beta_g(x) \in \mathbf{CJ}_P(M)$.
- (vi) Для каждого $b \in L$ с условием $\beta_g(b) \in \mathbf{CJ}(M)$ найдется $y \in \mathbf{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(b) = \beta_g(y)$. Более того, $y \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$, если $\beta_g(b) \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$.
- (vi) Если g разнозначен, то для каждого $b \in \mathbf{CJ}(M)$ существует $a \in \mathbf{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(a) = b$.
- (vii) Если g является отображением «на», то $\beta_g: \mathbf{CJ}(L) \rightarrow \mathbf{CJ}(M)$ разнозначно.

Лемма 10 [5, лемма 4.3]. Пусть L, M — полные биалгебраические $(0, 1)$ -решетки, и пусть $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм $(0, 1)$ -решеток. Если $y \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\beta_g(y) \in \mathbf{CJ}_{NP}(M)$, то

$$\langle \beta_g(y) \rangle_{\mathfrak{M}} = \{\beta_g(y), \beta_g(a), \beta_g(b)\},$$

где $\langle y \rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$.

Лемма 11 [5, лемма 4.4]. Пусть L, M — полные биалгебраические $(0, 1)$ -решетки и $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм $(0, 1)$ -решеток. Если $y \in \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\beta_g(y) \notin \mathbf{CJ}_P(M) \cup \mathbf{CJ}_{NP}(M)$, то $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}$ является антицепью и $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$, где $\langle y \rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$.

Для решеток $L, M \in \mathbb{B}_6$ и полного гомоморфизма $(0, 1)$ -решеток $g: M \rightarrow L$ определим отображение $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ следующим образом. Для $z \in \mathbf{CJ}_P(L) \cup \mathbf{CJ}_{NP}(L)$ полагаем

$$G(g)(z) = \begin{cases} \beta_g(z), & \text{если } \beta_g(z) \in \mathbf{CJ}_P(M) \cup \mathbf{CJ}_{NP}(M); \\ \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, & \text{если } \beta_g(z) \notin \mathbf{CJ}_P(M) \cup \mathbf{CJ}_{NP}(M), \langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, a, b\}. \end{cases}$$

Предложение 12. Пусть $L, M \in \mathbb{B}_6$ и $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом $(0, 1)$ -решеток. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ является L_6 -морфизмом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Требуется установить, что $G(g)$ обладает свойствами (m1)–(m4) из определения 2. Свойство (m1) следует непосредственно из определения $G(g)$. Свойство (m2) следует из леммы 9(iv), в то время как (m3) следует из леммы 9(v). Установим, что свойство (m4) также имеет место.

Действительно, пусть $y \in CJ_{NP}(L)$ таков, что $\langle y \rangle_{\mathfrak{M}} = \{y, a, b\}$, т. е. $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$. Если $G(g)(y) \in CJ_P(M)$, то $G(g)(y) = \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ влечет неравенство $G(g)(y) \leq \beta_g(a)$ или неравенство $G(g)(y) \leq \beta_g(b)$. Таким образом, (m4-a) выполнено. Свойство (m4-b) следует из леммы 10.

Наконец, если $G(g)(y) \notin CJ_P(M) \cup CJ_{NP}(M)$, то

$$G(g)(y) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\}.$$

Более того, $G(g)(y)$ является антицепью, так как в этом случае $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ по лемме 11. Итак, пусть $z \in CJ_P(L) \cup CJ_{NP}(L)$ таков, что $y \leq z$. Тогда

$$G(g)(a) \vee G(g)(b) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(z).$$

Если $\beta_g(z) \in CJ_P(M) \cup CJ_{NP}(M)$, то

$$G(g)(a), G(g)(b) \leq \beta_g(z) = G(g)(z).$$

Если $\beta_g(z) \notin CJ_P(M) \cup CJ_{NP}(M)$, то

$$G(g)(z) = \{\beta_g(c), \beta_g(d)\},$$

где $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ в L . Имеем $y \leq z \leq c \vee d$. Если $y \leq c$, то

$$\beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(c).$$

Если $y \leq d$, то

$$\beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(d).$$

Если $y \leq c \vee d$ является нетривиальным покрытием, то $\{a, b\} \ll \{c, d\}$, откуда $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \ll \{\beta_g(c), \beta_g(d)\}$ по лемме 9. Таким образом, $\{G(g)(a), G(g)(b)\} \ll G(g)(z)$, и свойство (m4-c) выполнено. $\square$

Предложение 13. $G: \mathbb{B}_6 \rightarrow \mathbb{L}_6$ является контравариантным функтором.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложений 8 и 12 вытекает, что функтор G определен корректно. Пусть $L_0, L_1, L_2 \in \mathbb{B}_6$ и $g_0: L_0 \rightarrow L_1$, $g_1: L_1 \rightarrow L_2$ являются полными гомоморфизмами $(0, 1)$ -решеток. Тогда $\beta_{g_1 g_0} = \beta_{g_0} \beta_{g_1}$ в силу доказательства предложения 5.6 из [5]. Нужно показать, что $G(g_0 \circ g_1)(z) = G(g_1) \circ G(g_0)(z)$ для всех $z \in CJ_P(L_2) \cup CJ_{NP}(L_2)$. Для краткости полагаем

$$X_0 = CJ_P(L_0), \quad Y_0 = CJ_{NP}(L_0);$$

$$X_1 = CJ_P(L_1), \quad Y_1 = CJ_{NP}(L_1);$$

$$X_2 = CJ_P(L_2), \quad Y_2 = CJ_{NP}(L_2).$$

Согласно лемме 9(v), (vi) возможен один из следующих случаев.

СЛУЧАЙ 1: $G(g_1)(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. В этом случае

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \beta_{g_0} \beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1 g_0}(z) = G(g_0 \circ g_1)(z).$$

СЛУЧАЙ 2: $G(g_1)(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. В силу того, что $G(g_0)G(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, по лемме 9(v) заключаем, что $z \in Y_2$ и $G(g_1)(z) \in Y_1$. Тогда $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. По лемме 10 получаем

$$\langle G(g_1)(z) \rangle_{\mathfrak{M}} = \{\beta_{g_1}(z), \beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\},$$

откуда

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\},$$

поэтому $\beta_{g_1g_0}(y) \notin X_0 \cup Y_0$. Отсюда следует, что $G(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. Таким образом,

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\} = G(g_0 \circ g_1)(z).$$

СЛУЧАЙ 3: $G(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$. В этом случае $z \in Y_2$ по лемме 9(v). Тогда $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. Так как $G(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, заключаем, что $G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\}$, а $\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_1}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. Так как $G(g_0)G(g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, заключаем, что

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}.$$

Тогда $\{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}$ является антицепью в силу (с2) из определения 2. Если $\beta_{g_1g_0}(z) \in X_0 \cup Y_0$, то равенство

$$\beta_{g_1g_0}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d) = \beta_{g_1g_0}(c) \vee \beta_{g_1g_0}(d)$$

влекло бы включение $\beta_{g_1g_0}(z) \in \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}$, а последнее множество не было бы антицепью; противоречие. Таким образом, $\beta_{g_1g_0}(z) \notin X_0 \cup Y_0$. Отсюда следует, что $G(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, поэтому

$$G(g_0)G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\} = G(g_0 \circ g_1)(z).$$

СЛУЧАЙ 4: $G(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$ и $G(g_0)G(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Так как $G(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, получаем по лемме 9(v), что $z \in Y_2$ и $\langle z \rangle_{\mathfrak{M}} = \{z, c, d\}$ для некоторых $c, d \in X_2$. Так как $G(g_1)(z) \notin X_1 \cup Y_1$, имеем также $G(g_1)(z) = \{\beta_{g_1}(c), \beta_{g_1}(d)\}$, а $\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_1}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. Вновь

$$\beta_{g_1g_0}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(z) = \beta_{g_0}\beta_{g_1}(c) \vee \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d) = \beta_{g_1g_0}(c) \vee \beta_{g_1g_0}(d).$$

Если $G(g_0 \circ g_1)(z) \notin X_0 \cup Y_0$, то $\beta_{g_1g_0}(z) = \beta_{g_1g_0}(c) \vee \beta_{g_1g_0}(d)$ является нетривиальной суммой по лемме 11. В частности, $\{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}$ является антицепью. С другой стороны, $G(g_0)G(g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Это влечет в силу (с2) из определения 2, что

$$G(g_0)G(g_1)(z) \in \{\beta_{g_0}\beta_{g_1}(c), \beta_{g_0}\beta_{g_1}(d)\} = \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}$$

и что множество $\{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}$ является цепью. Получили противоречие, которое означает, что $G(g_0 \circ g_1)(z) \in X_0 \cup Y_0$. Таким образом, $G(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1g_0}(z)$ является вполне неразложимым элементом. Отсюда вытекает, что

$$G(g_0 \circ g_1)(z) \in \{\beta_{g_1g_0}(c), \beta_{g_1g_0}(d)\}.$$

Возможны два случая.

СЛУЧАЙ 4.1: $G(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1g_0}(c)$. В этом случае $\beta_{g_1g_0}(d) \leq \beta_{g_1g_0}(c)$, поэтому $G(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1g_0}(c)$ в силу (с2) из определения 2.

СЛУЧАЙ 4.2: $G(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1g_0}(d)$. В этом случае $\beta_{g_1g_0}(c) \leq \beta_{g_1g_0}(d)$, поэтому $G(g_0 \circ g_1)(z) = \beta_{g_1g_0}(d)$ в силу (с2) из определения 2.

Таким образом, доказано, что

$$G(g_0 \circ g_1)(z) = G(g_0)(z)G(g_1)$$

в каждом из возможных случаев. Отсюда следует, что

$$G(g_0 \circ g_1) = G(g_1) \circ G(g_0),$$

поэтому G сохраняет композиции морфизмов. $\square$

6. Основные результаты

Для категории $\mathbb{C}$ пусть $1_{\mathbb{C}}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначает функтор такой, что $1_{\mathbb{C}}(a) = a$ для каждого $\mathbb{C}$ -объекта a и $1_{\mathbb{C}}(f) = f$ для каждого $\mathbb{C}$ -морфизма f .

Доказательство следующего предложения повторяет доказательство соответствующих утверждений из [5] (см. [5, предложения 5.1, 5.3]).

Предложение 14. *Имеют место следующие утверждения.*

- (i) *Функторы $GF: \mathbb{L}_6 \rightarrow \mathbb{L}_6$ и $1_{\mathbb{L}_6}$ изоморфны.*
- (ii) *Функторы $FG: \mathbb{B}_6 \rightarrow \mathbb{B}_6$ и $1_{\mathbb{B}_6}$ изоморфны.*

Из предложения 14 получаем

Предложение 15. *Категории $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ дуально эквивалентны.*

Пусть $(\mathbb{L}_6)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_6)_{fin}$ обозначают полные подкатегории в $\mathbb{L}_6$ и $\mathbb{B}_6$ соответственно, объекты которых конечны. Из нашего определения функторов F и G и теоремы 15 получаем

Следствие 16. *Категории $(\mathbb{L}_6)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_6)_{fin}$ дуально эквивалентны.*

В точности так же, как и в [5, следствие 5.5], из леммы 9 и теоремы 15 получаем

Следствие 17. *Имеют место следующие утверждения.*

- (i) *$\mathbb{L}_6$ -морфизмы, которые сюръективны, соответствуют в силу дуальности разноточным гомоморфизмам в $\mathbb{B}_6$ и наоборот.*
- (ii) *$\mathbb{L}_6$ -морфизмы, которые являются вложениями, соответствуют в силу дуальности сюръективным гомоморфизмам в $\mathbb{B}_6$ и наоборот.*
- (iii) *Раздельные объединения пространств в $\mathbb{L}_6$ соответствуют в силу дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_6$ и наоборот.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V., Sultankulov K. D. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 902–911.
2. Adams M. E., Dziobiak W. Q -universal quasivarieties of algebras // Proc. Am. Math. Soc. 1994. V. 120, N 4. P. 1053–1059.
3. Adams M. E., Dziobiak W., Kravchenko A. V., Schwidefsky M. V. Complete homomorphic images of the quasivariety lattices of locally finite quasivarieties. Manuscript, 2024.
4. Dziobiak W., Schwidefsky M. V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // Bull. Sec. Logic. 2022. V. 51, N 3. P. 329–344.
5. Dziobiak W., Schwidefsky M. V. Duality for bi-algebraic lattices belonging to the variety of $(0,1)$ -lattices generated by the pentagon // Algebra and Logic, accepted for publication in 2023.
6. Freese R., Ježek J., Nation J. B. Free lattices. New York, 1995. (Math. Surv. Monogr.; V. 42).

Поступила в редакцию 7 апреля 2023 г.

После доработки 26 февраля 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Башеева Айну́р Орынбасаровна (ORCID 0000-0002-9124-0055)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Казымукан 13, Астана 010008, Казахстан
basheeva@mail.ru

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
m.schwidefsky@g.nsu.ru

УДК 517.983:517.986

СЛЕД И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ КОММУТАТОРЫ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К ПОЛУКОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

А. М. Бикчентаев

Аннотация. Пусть τ — точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$, I — единица $\mathcal{M}$, $S(\mathcal{M}, \tau)$ — $*$ -алгебра τ -измеримых операторов, $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ — банахово пространство τ -интегрируемых операторов. Получено новое доказательство следующего обобщения теоремы Путнама (1951): положительный самокоммутирующий $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не может иметь обратного в $\mathcal{M}$. Если след τ бесконечен, то положительный самокоммутирующий $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где λ — ненулевое комплексное число и оператор K τ -компактен. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $[A, B] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Вопрос: при каких условиях $\tau([A, B]) = 0$? Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $Y = Y^3 \in \mathcal{M}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$. Если $A^2 = A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $[A^*, A] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([A^*, A]) = 0$. Если частичная изометрия U принадлежит $\mathcal{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутирующим, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.303

Ключевые слова: гильбертово пространство, алгебра фон Неймана, нормальный след, измеримый оператор, коммутатор, самокоммутирующий, идемпотент.

Посвящается Анатолию Николаевичу Шерстневу
(27.01.1938–25.05.2023)

1. Введение

Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$, I — тождественный оператор в $\mathcal{H}$, $\mathfrak{S}_p$ ($0 < p < +\infty$) — идеал Шаттена — фон Неймана в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ называется *коммутирующим*, если $X = [A, B] = AB - BA$ для некоторых $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Если $\dim \mathcal{H} < +\infty$, то для $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ следующие условия эквивалентны:

- (i) X имеет нулевую диагональ в некотором базисе в $\mathcal{H}$;
- (ii) $\text{tr}(X) = 0$;
- (iii) X — коммутирующий.

Доказательство эквивалентности (i) $\Leftrightarrow$ (ii) см. в [1, гл. I, задача 209], эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) — в [2] или [3, задача 182]. Дальнейшие исследования в направлении эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) см. в [4, 5]. Интересные приложения матриц с нулевым следом см. в [6, 7]. В [8] показано, что в эквивалентности (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) в матрицы A и B в представлении $X = [A, B]$ можно выбрать нильпотентными.

Работа выполнена в рамках реализации Программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-994).

Если пространство $\mathcal{H}$ сепарабельно и $\dim \mathcal{H} = +\infty$, то оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является коммутатором тогда и только тогда, когда X не представляется в виде суммы $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ компактен [9, теорема 3; 3, следствие из задачи 182] (похожая картина и в несепарабельном случае, только вместо компактных операторов используется максимальный по включению идеал $\mathbb{J}$ в $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, см. [9] и [10]). Поэтому каждый компактный оператор $K \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет вид $K = [A, B]$ с некоторыми $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Выбрав подходящий оператор K из класса $\mathfrak{S}_1$ операторов со следом, получаем $[A, B] \in \mathfrak{S}_1$ с $\text{tr}([A, B]) \neq 0$. Любопытно, что для $X \in \mathfrak{S}_1$ по-прежнему имеем (i) $\Leftrightarrow$ (ii), см. [11, следствие 1]. В [12] показано, что эрмитов компактный оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ является самокоммутом $[A^*, A]$ компактного оператора $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ в том и только в том случае, если выполнено (i). В [13, теорема 2] для эрмитова оператора $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ установлено, что (i) $\Leftrightarrow \text{tr}(X_+) = \text{tr}(X_-)$, где $X_+ = (|X| + X)/2$, $X_- = |X| - X_+$. В [14] с применением результатов из [13] для $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ показано, что

$$(i) \Leftrightarrow \text{tr}(\text{Re}(e^{i\theta} X)_+) = \text{tr}(\text{Im}(e^{i\theta} X)_-) \text{ для всех } \theta, 0 \leq \theta < 2\pi.$$

Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{M}$ операторов действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, τ — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{M}$. Пусть $S(\mathcal{M}, \tau)$ — *-алгебра всех τ -измеримых операторов, $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ — банахово пространство всех τ -интегрируемых операторов. Пусть $\tau(I) = +\infty$ и $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Если $B = B^3$ или $B = C + X$, где $C = C^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и X τ -компактен, то коммутатор $[A, B]$ не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ -компактен (см. [15, теорема 3] (или [16, теорема 3]) и [17, предложение 4]) соответственно. Коммутаторы τ -измеримых операторов являются значениями внутренних дифференцирований алгебры $S(\mathcal{M}, \tau)$ [18–20].

Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $[A, B] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Вопрос: при каких условиях $\tau([A, B]) = 0$? Если $\tau(I) < +\infty$, то $\tau([A, B]) = 0 \Leftrightarrow \|I + z[A, B]\|_1 \geq \tau(I)$ для всех $z \in \mathbb{C}$ (см. [21, теорема 4.8]). В [22–24] указаны некоторые случаи равенства $\tau([A, B]) = 0$.

Если $U \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ — неунитарная изометрия и пространство $(I - UU^*)\mathcal{H}$ конечномерно, то канонический след от самокоммутора $[U^*, U] = I - UU^*$ также не равен нулю. Если $U = X + iY$ — декартово разложение оператора U с $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$, то $[U^*, U] = 2i[X, Y]$, т. е. существуют ограниченные самосопряженные операторы, коммутатор которых лежит в $\mathfrak{S}_1$ и имеет ненулевой канонический след. Но если $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})^{\text{sa}}$ и оператор $Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ компактен с $[X, Y] \in \mathfrak{S}_1$, то $\text{tr}([X, Y]) = 0$ [25, лемма 1.3]. В [26, лемма 8] для нормального оператора $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{S}_2$ с $[T, X] \in \mathfrak{S}_1$ показано, что $\text{tr}([T, X]) = 0$. В [27] этот результат был обобщен на некоторые не нормальные операторы. В [28, теоремы 4, 5] для $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $X \in \mathfrak{S}_2$ с $[T, X] \in \mathfrak{S}_1$ доказано, что $\text{tr}([T, X]) = 0$ при выполнении одного из условий: а) T^2 нормален или б) T^n нормален для некоторого целого $n > 2$ и $[T^*, T] \in \mathfrak{S}_1$.

Основные результаты статьи получены в контексте полуконечных алгебр фон Неймана $\mathcal{M}$; некоторые из них являются новыми даже в случае алгебры $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$, снабженной следом $\tau = \text{tr}$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $Y = Y^3 \in \mathcal{M}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$ (теорема 2). Получено обобщение классической теоремы Путнама для ограниченного гипонормального оператора [29] (см. также [3, задача 188]) на случай τ -измеримого неограниченного гипонормального оператора: положительный самокоммутор $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не

может иметь обратного в $\mathcal{M}$ (теорема 6). Если $\tau(I) = +\infty$, то положительный самокоммутатор $[A^*, A]$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ -компактен (теорема 7). Если $A^2 = A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $[A^*, A] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([A^*, A]) = 0$ (теорема 8). Если частичная изометрия $U \in \mathcal{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутатором, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$ (теорема 11). Если $U \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и проекторы $P = U^*U$, $Q = UU^*$ взаимно ортогональны, то $U^2 = 0$. Поэтому U является коммутатором и $\tau(U) = 0$ (следствие 13).

2. Определения и обозначения

Пусть $\mathcal{M}$ — алгебра фон Неймана операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, $\mathcal{M}^{\text{pr}}$ — решетка проекторов ($P = P^2 = P^*$) в $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}^+$ — конус положительных элементов из $\mathcal{M}$, $P^\perp = I - P$ для $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Оператор $A \in \mathcal{M}$ называется *унитарным*, если $A^*A = AA^* = I$; *изометрией*, если $A^*A = I$; *частичной изометрией*, если $A^*A \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$.

Отображение $\varphi : \mathcal{M}^+ \rightarrow [0, +\infty]$ называется *следом*, если $\varphi(X+Y) = \varphi(X) + \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda X) = \lambda\varphi(X)$ для всех $X, Y \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$) и $\varphi(Z^*Z) = \varphi(ZZ^*)$ для всех $Z \in \mathcal{M}$. След φ называется

- *точным*, если $\varphi(X) > 0$ для всех $X \in \mathcal{M}^+$, $X \neq 0$;
- *нормальным*, если $X_i \nearrow X$ ($X_i, X \in \mathcal{M}^+$) $\Rightarrow \varphi(X) = \sup \varphi(X_i)$;
- *конечным*, если $\varphi(I) < +\infty$;
- *полуконачным*, если $\varphi(X) = \sup\{\varphi(Y) : Y \in \mathcal{M}^+, Y \leq X, \varphi(Y) < +\infty\}$

для каждого $X \in \mathcal{M}^+$ (см. [30, гл. V, § 2]).

Оператор в $\mathcal{H}$ (не обязательно ограниченный или плотно определенный) называется *присоединенным к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$* , если он перестановочен с любым унитарным оператором из коммутанта $\mathcal{M}'$ алгебры $\mathcal{M}$. Далее всюду τ — точный нормальный полуконачный след на $\mathcal{M}$. Замкнутый оператор X , присоединенный к $\mathcal{M}$, имеющий всюду плотную в $\mathcal{H}$ область определения $\mathcal{D}(X)$, называется *τ -измеримым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой $P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$, что $P\mathcal{H} \subset \mathcal{D}(X)$ и $\tau(P^\perp) < \varepsilon$. Множество $S(\mathcal{M}, \tau)$ всех τ -измеримых операторов является $*$ -алгеброй относительно перехода к сопряженному оператору, умножению на скаляр и операций сильного сложения и умножения, получаемых замыканием обычных операций [31, гл. IX]. Для семейства $\mathcal{L} \subset S(\mathcal{M}, \tau)$ обозначим через $\mathcal{L}^+$ и $\mathcal{L}^h$ его положительную и эрмитову части соответственно. Частичный порядок в $S(\mathcal{M}, \tau)^h$, порожденный собственным конусом $S(\mathcal{M}, \tau)^+$, будем обозначать через $\leq$. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $X = U|X|$ — полярное разложение X , то $U \in \mathcal{M}$ и $|X| = \sqrt{X^*X} \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$. Оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ называется *гипонормальным*, если $A^*A \geq AA^*$. Напомним, что формула $S_P = 2P - I$ устанавливает биекцию между множествами идемпотентов ($P^2 = P$) и симметрий ($S^2 = I$) из $S(\mathcal{M}, \tau)$. Пусть $[A, B] = AB - BA$ — коммутатор операторов $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Самокоммутатор оператора $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ есть оператор $[A^*, A] = A^*A - AA^*$. Операторы $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ *антикоммутируют*, если $AB = -BA$.

Через $\mu(t; X)$ обозначим *функцию сингулярных значений* оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, т. е. невозрастающую непрерывную справа функцию $\mu(\cdot; X) : (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, заданную формулой

$$\mu(t; X) = \inf\{\|XP\| : P \in \mathcal{M}^{\text{pr}}, \tau(P^\perp) \leq t\}, \quad t > 0.$$

Лемма 1 [32]. Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $A, B \in \mathcal{M}$ и $U, V \in \mathcal{M}$ унитарны. Тогда

- (i) $\mu(t; X) = \mu(t; |X|) = \mu(t; X^*) = \mu(t; UXV)$ для всех $t > 0$;
- (ii) если $|X| \leq |Y|$, то $\mu(t; X) \leq \mu(t; Y)$ для всех $t > 0$;
- (iii) $\mu(t; AXB) \leq \|A\| \|B\| \mu(t; X)$ для всех $t > 0$;
- (iv) $\mu(s+t; X+Y) \leq \mu(s; X) + \mu(t; Y)$ для всех $s, t > 0$;
- (v) $\mu(t; f(|X|)) = f(\mu(t; X))$ для всех непрерывных функций $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ с $f(0) = 0$ и $t > 0$.

Пусть m — линейная мера Лебега на $\mathbb{R}$. Некоммутативное L_p -пространство Лебега ($0 < p < +\infty$), ассоциированное с $(\mathcal{M}, \tau)$, может быть определено как

$$L_p(\mathcal{M}, \tau) = \{X \in S(\mathcal{M}, \tau) : \mu(\cdot; X) \in L_p(\mathbb{R}^+, m)\}$$

с F -нормой (нормой для $1 \leq p < +\infty$) $\|X\|_p = \|\mu(\cdot; X)\|_p$, $X \in L_p(\mathcal{M}, \tau)$. Продолжение τ до единственного линейного функционала на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ обозначаем той же буквой τ .

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и $\tau = \text{tr}$ — канонический след, то $S(\mathcal{M}, \tau)$ и $S_0(\mathcal{M}, \tau)$ совпадают с $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ и с идеалом $\mathfrak{S}_\infty$ компактных операторов в $\mathcal{H}$ соответственно. Имеем

$$\mu(t; X) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(X) \chi_{[n-1, n)}(t), \quad t > 0,$$

где $\{s_n(X)\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность s -чисел компактного оператора X ; χ_A — индикатор множества $A \subset \mathbb{R}$ [33, гл. II]. Тогда пространство $L_p(\mathcal{M}, \tau)$ есть идеал Шаттена — фон Неймана $\mathfrak{S}_p$, $0 < p < +\infty$.

Если $\mathcal{M}$ абелева (т. е. коммутативна), то $\mathcal{M} \simeq L^\infty(\Omega, \Sigma, \nu)$ и $\tau(f) = \int_{\Omega} f d\nu$, где (Ω, Σ, ν) — локализуемое пространство с мерой, $*$ -алгебра $S(\mathcal{M}, \tau)$ совпадает с алгеброй всех измеримых комплексных функций f на (Ω, Σ, ν) , которые ограничены всюду, кроме множества конечной меры. Функция $\mu(t; f)$ совпадает с невозрастающей перестановкой функции $|f|$; свойства перестановок см. в [34]. Алгебра $\mathcal{M}$ не содержит ненулевых компактных операторов тогда и только тогда, когда мера ν не имеет атомов [35, теорема 8.4].

3. Основные результаты

Лемма 2 [31, гл. IX, теорема 2.13]. Если $X \in \mathcal{M}$ и $Y \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $XY, YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 3 [36, теорема 17]. Если $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $XY, YX \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(XY) = \tau(YX)$.

Теорема 1. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $U \in \mathcal{M}$ является изометрией, то $\tau(X) = \tau(UXU^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Заметим, что $\mu(t; X) = \mu(t; UXU^*)$ для всех $t > 0$. Действительно, имеем $U^*UXU^*U = X$ и

$$\begin{aligned} \mu(t; X) &= \mu(t; U^*UXU^*U) \leq \|U^*\| \|U\| \mu(t; UXU^*) \\ &= \mu(t; UXU^*) \leq \|U\| \|U^*\| \mu(t; X) = \mu(t; X) \end{aligned}$$

для всех $t > 0$ в силу п. (iii) леммы 1 и равенства $\|U^*\| = \|U\| = 1$. Для $X \geq 0$ в силу [37, п. (с) предложения 3.9] получаем

$$\tau(X) = \int_0^{+\infty} \mu(t; X) dt = \int_0^{+\infty} \mu(t; UXU^*) dt = \tau(UXU^*).$$

ШАГ 2. Для $X = X^*$ рассмотрим разложение Жордана $X = X_+ - X_-$. Тогда $X_+, X_- \in L_1(\mathcal{M}, \tau)^+$ и в силу линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и шага 1 получаем

$$\tau(X) = \tau(X_+) - \tau(X_-) = \tau(UX_+U^*) - \tau(UX_-U^*) = \tau(UXU^*).$$

ШАГ 3. Если $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ — произвольный оператор и $X = \operatorname{Re} X + i \operatorname{Im} X$ — его декартово представление, то операторы $\operatorname{Re} X = (X + X^*)/2$, $\operatorname{Im} X = (X - X^*)/(2i)$ лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)^h$ и в силу линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и шага 1 получаем

$$\tau(X) = \tau(\operatorname{Re} X) + i\tau(\operatorname{Im} X) = \tau(U \cdot \operatorname{Re} X \cdot U^*) + i\tau(U \cdot \operatorname{Im} X \cdot U^*) = \tau(UXU^*). \quad \square$$

Следствие 1. Если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $U \in \mathcal{M}$ унитарный и $A - UAU^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $U^*AU - A \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau(U^*AU - A) = \tau(A - UAU^*)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $\tau(U^*AU - A) = \tau(U^*(A - UAU^*)U)$. $\square$

Следствие 2. Пусть $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $U \in \mathcal{M}$ унитарный и $U^2 = -I$. Имеем $X - UXU^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow [X, U] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и при этом $\tau(X - UXU^*) = \tau([X, U]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $U^* = -U$. Если $X - UXU^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $[X, U] = (X - UXU^*)U \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$; если $[X, U] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $X - UXU^* = [X, U]U^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ в силу леммы 2. При выполнении этих условий из теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned} \tau(X - UXU^*) &= \tau(X + UXU) = \tau(U(X + UXU)U^*) = -\tau(U(X + UXU)U) \\ &= -\tau(UXU + X) = -\tau(X - UXU^*), \end{aligned}$$

поэтому $\tau(X - UXU^*) = 0$. Аналогичным образом имеем

$$\begin{aligned} \tau(XU - UX) &= \tau(U(XU - UX)U^*) = -\tau(U(XU - UX)U) \\ &= -\tau(-UX + XU) = -\tau(XU - UX), \end{aligned}$$

поэтому $\tau(XU - UX) = 0$. $\square$

Следствие 3. Пусть $U \in \mathcal{M}$ и оператор $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ такие, что $[U^*, A] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда для проектора $P = UU^*$ имеем

$$\tau(U^*AU - A) = \tau(PA - UAU^*) = \tau(PAP - UAU^*).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 с $X = U^*A - AU^*$ и $Y = U$ получаем

$$\tau(U^*AU - A) = \tau((U^*A - AU^*)U) = \tau(U(U^*A - AU^*)) = \tau(PA - UAU^*),$$

и силу теоремы 1 имеем

$$\tau(U^*AU - A) = \tau(U(U^*AU - A)U^*) = \tau(PAP - UAU^*).$$

Так как операторы $PA - UAU^*$ и $PAP - UAU^*$ лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $PAP^\perp \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau(PAP^\perp) = 0$.

Теорема 2. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $Y = Y^3 \in \mathcal{M}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ШАГ 1. Пусть $Y = Y^2 \in \mathcal{M}$. Поскольку

$$2YXY - YX - XY = Y[X, Y] - [X, Y]Y \in L_1(\mathcal{M}, \tau),$$

утверждение следует из представления

$$[X, Y] = Y(2YXY - YX - XY) - (2YXY - YX - XY)Y$$

и леммы 3 с парой Y и $B = 2YXY - YX - XY$.

ШАГ 2. Пусть $Y = Y^3 \in \mathcal{M}$ и $Y = P - Q$, где идемпотенты P, Q принадлежат $\mathcal{M}$ с $PQ = QP = 0$ (см. [38, предложение 1]). Тогда оператор $Y^2 = P + Q$ является идемпотентом и

$$[X, P] + [X, Q] = [X, Y^2] = [X, Y]Y + Y[X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$$

По условию $[X, P] - [X, Q] = [X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Из двух последних соотношений имеем $[X, P], [X, Q] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, и в силу шага 1 и линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ получаем

$$\tau([X, Y]) = \tau([X, P]) - \tau([X, Q]) = 0 - 0 = 0. \quad \square$$

Следствие 4. Пусть $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $S \in \mathcal{M}$ и $S^2 = I$. Имеем $X - SXS \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow [X, S] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и при этом $\tau(X - SXS) = \tau([X, S]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $X - SXS \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $[X, S] = (X - SXS)S \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$; если $[X, S] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $X - SXS = [X, S]S \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ в силу леммы 2. При выполнении этих условий из соотношения

$$(XS - SX)S - S(XS - SX) = 2(X - SXS)$$

и леммы 3 с парой $[X, S]$ и S получаем $\tau(X - SXS) = 0$. Равенство $\tau([X, S]) = 0$ вытекает из теоремы 2, поскольку $S^3 = S$. $\square$

Следствие 5. Если $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$, $C = C^3 \in \mathcal{M}^{sa}$ и $A - BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, $\tau([B, C]) = 0$ и $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $[B, C] = (A - BC)^* - (A - BC) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $\tau([B, C]) = 0$ в силу теоремы 2. Далее (черта сверху означает комплексное сопряжение),

$$\begin{aligned} \tau(A - BC) &= \tau(A - BC + CB - CB) = \tau(A - CB) - \tau([B, C]) \\ &= \tau(A - CB) = \overline{\tau(A - BC)}, \end{aligned}$$

поэтому $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$. $\square$

Теорема 3. Если $A, B, C \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ и $A - BC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $[B, C] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Если еще $A - AC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A - BC), \tau(A - AC) \in \mathbb{R}$ и $\tau([B, C]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $[B, C] = (A - BC)^* - (A - BC) \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Если еще $A - AC \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $A - BC = A(I - C) + (A - B)C$ и $(A - B)C \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу теоремы 3.1 из [39] получаем $\tau(A(I - C)), \tau((A - B)C) \in \mathbb{R}$. Поэтому $\tau(A - BC) \in \mathbb{R}$.

Поскольку $\tau(X^*) = \overline{\tau(X)}$ для всех $X \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, имеем

$$\begin{aligned} \tau([B, C]) &= \tau(A - CB - A + BC) = \tau(A - CB) - \tau(A - BC) \\ &= \overline{\tau(A - BC)} - \tau(A - BC) = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

Теорема 4. Пусть $Y, P \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $P^2 = P$ и $X = [Y, P]$, $S_P = 2P - I$. Тогда

- (i) $S_P X = -X S_P$;
- (ii) если $X^k, S_P X^k S_P \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ для некоторого нечетного $k \in \mathbb{N}$, то $\tau(X^k) = \tau(S_P X^k S_P) = 0$;
- (iii) если $P = P^*$, то $X^k \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow S_P X^k S_P \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и при этом $\|X\|, P = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (ii). Пусть $k = 1$. Из (i) получаем $X = -S_P X S_P$ и в силу леммы 3 с парой $S_P X$ и S_P имеем

$$\tau(S_P X S_P) = \tau(AB) = \tau(BA) = \tau(X),$$

т. е. $\tau(X) = \tau(-X) = -\tau(X) = 0$. Для $k = 2n + 1 \geq 3$ в силу соотношения $X^2 = X S_P \cdot S_P X = -S_P X \cdot -X S_P = S_P X^2 S_P$ получаем

$$\begin{aligned} X^{2n+1} &= \underbrace{X^2 \cdot X^2 \cdot \dots \cdot X^2}_n \cdot X = \underbrace{S_P X^2 S_P \cdot S_P X^2 S_P \cdot \dots \cdot S_P X^2 S_P}_n \cdot X \\ &= S_P X^{2n} \cdot S_P X = -S_P X^{2n+1} S_P. \end{aligned}$$

В силу леммы 3 с парой $S_P X^{2n}$ и $X S_P$ имеем

$$\tau(S_P X^{2n+1} S_P) = \tau(AB) = \tau(BA) = \tau(X^{2n+1}),$$

т. е. $\tau(X^{2n+1}) = -\tau(X^{2n+1}) = 0$.

(iii). Если $P = P^*$, то $X^k \in L_1(\mathcal{M}, \tau) \Leftrightarrow S_P X^k S_P \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ в силу леммы 2. Переходя к сопряженным, из п. (i) получаем $X^* S_P = -S_P X^*$ и $S_P X^* S_P = -X^*$. Поэтому

$$|X|^2 = X^* X = -S_P X^* S_P \cdot -S_P X S_P = S_P |X|^2 S_P$$

и $|X|^2 S_P = S_P |X|^2$, т. е. $|X|^2 P = P |X|^2$. Следовательно, $|X|P = P|X|$ в силу спектральной теоремы. $\square$

Из теоремы 4.8 в [21] получаем

Следствие 6. Пусть $\tau(I) = 1$. Тогда

- (i) в условиях теоремы 3 имеем $\|I + z[B, C]\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$;
- (ii) в условиях п. (ii) теоремы 4 имеем

$$\|I + zX^{2n-1}\|_1 \geq 1, \quad \|I + zS_P X^{2n-1} S_P\|_1 \geq 1$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 5. Пусть $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ и $A = A^3 \in \mathcal{M}^{sa}$. Если $AX - YA \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(AX - YA) \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = P - Q$, где $P, Q \in \mathcal{M}^{pr}$ с $PQ = QP = 0$ (см. [38, предложение 1]). Тогда оператор $A^2 = P + Q$ является проектором. Операторы

$$PXP - PYP = P(AX - YA)P, \quad QXQ - QYQ = -Q(AX - YA)Q$$

лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)^h$ в силу леммы 2. Операторы

$$QXP + QYP = -Q(AX - YA)P, \quad PXP + PYP = (QXP + QYP)^*$$

также лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 3 с парой $I - A^2$, $AX - YA$ и с парой $2A^2$, $AX - A^2YA - AXA^2$ и линейности продолжения τ на все пространство $L_1(\mathcal{M}, \tau)$ имеем

$$\begin{aligned} \tau(AX - YA) &= \tau(A^2(AX - YA) + (I - A^2)(AX - YA)) \\ &= \tau(A^2(AX - YA)) + \tau((I - A^2)(AX - YA)) \\ &= \tau(A^2(AX - YA)) + \tau((AX - YA)(I - A^2)) \\ &= \tau(2AX - A^2YA - AXA^2) = \tau(2A^3X - A^2YA - A^3XA^2) \\ &= \tau(2A^2(AX - A^2YA - AXA^2)) = \tau((AX - A^2YA - AXA^2)2A^2) \\ &= \tau(AXA^2 - A^2YA) = \tau((P - Q)X(P + Q) - (P + Q)Y(P - Q)) \\ &= \tau(PXP - PYP) + \tau(-QXQ + QYQ) + \tau(PXQ + PYQ) - \tau(QXP + QYP) \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

поскольку $\tau(PXP - PYP), \tau(QXQ - QYQ) \in \mathbb{R}$ и

$$\tau(PXQ + PYQ) = \tau(P(PXQ + PYQ)) = \tau((PXQ + PYQ)P) = \tau(0) = 0;$$

аналогично $\tau(QXP + QYP) = 0$. $\square$

Следствие 7. В условиях теоремы 5 имеем

$$[A, X + Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau), \quad \tau([A, X + Y]) = 0.$$

Доказательство. Поскольку $XA - AY = (AX - YA)^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(XA - AY) = \tau(AX - YA) \in \mathbb{R}$. Заметим, что

$$[A, X + Y] = AX - YA - (XA - AY). \quad \square$$

Следующее утверждение обобщает классическую теорему Путнама для ограниченного гипонормального оператора [29] (см. также [3, задача 188]) на случай τ -измеримого неограниченного гипонормального оператора.

Теорема 6. Положительный самокоммутиатор $A^*A - AA^*$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не может иметь обратного в $\mathcal{M}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ оператор $A^*A - AA^*$ имеет обратный в $\mathcal{M}$, т. е.

$$A^*A - AA^* \geq \varepsilon I \tag{1}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Умножив обе части (1) слева на оператор A и справа на оператор A^* , получим

$$A^2A^{*2} \leq (AA^*)^2 - \varepsilon AA^*.$$

Поэтому для каждого числа $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mu(t; A^2)^2 &= \mu(t; A^{*2})^2 = \mu(t; A^2A^{*2}) \leq \mu(t; (AA^*)^2 - \varepsilon AA^*) \\ &\leq \mu(t; (AA^*)^2) = \mu(t; AA^*)^2 = \mu(t; A)^4 \end{aligned} \tag{2}$$

в силу пп. (v), (ii) леммы 1.

Умножив обе части (1) слева на оператор A^* и справа на оператор A , получаем

$$A^{*2}A^2 \geq (A^*A)^2 + \varepsilon A^*A. \tag{3}$$

Введем функцию $f(x) = x^2 + \varepsilon x$, $x \in \mathbb{R}^+$. Тогда для всех $t > 0$

$$\begin{aligned}\mu(t; A^2)^2 &= \mu(t; A^{*2} A^2) \geq \mu(t; (A^* A)^2 + \varepsilon A^* A) = \mu(t; f(A^* A)) \\ &= f(\mu(t; A^* A)) = \mu(t; A^* A)^2 + \varepsilon \mu(t; A^* A) = \mu(t; A)^4 + \varepsilon \mu(t; A)^2\end{aligned}\quad (4)$$

в силу (3) и пп. (v), (ii) леммы 1. Теперь из (2) и (4) получаем

$$\mu(t; A)^4 \geq \mu(t; A^2)^2 \geq \mu(t; A)^4 + \varepsilon \mu(t; A)^2 \quad \text{для всех } t > 0.$$

Получили противоречие. Теорема доказана. $\square$

Заметим, что утверждение теоремы 6 другим методом было получено автором в теореме 2 из [15] (см. также [16]).

Теорема 7. Если $\tau(I) = +\infty$, то положительный самокоммутатор $A^* A - AA^*$ ($A \in S(\mathcal{M}, \tau)$) не может иметь вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и оператор K τ -компактен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $A^* A - AA^* = \lambda I + K \geq 0$ для некоторого $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ с подходящими $\lambda > 0$ и $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$. Не ограничивая общности, считаем $\lambda = 1$. Тогда

$$A^* A - K = AA^* + I.$$

Поскольку функция $\mu(t; A)$ не возрастает и $A \notin S_0(\mathcal{M}, \tau)$, существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mu(t; A) = a > 0.$$

Заметим, что $\mu(t; AA^* + I) = 1 + \mu(t; AA^*)$ для каждого числа $t > 0$ в силу представления

$$\mu(t; X) = \inf\{s > 0 : \tau(P^{|X|}(s, +\infty)) \leq t\}$$

для каждого оператора $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$, где $|X| = \int_0^{+\infty} u P^{|X|}(du)$ — спектральное разложение оператора $|X|$ и указанный инфимум достигается [32, предложение 2.2]. Поэтому для каждого числа $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned}1 + \mu(t; A)^2 &= 1 + \mu(t; AA^*) = \mu(t; AA^* + I) = \mu(t; A^* A - K) \\ &\leq \mu(t/2; A^* A) + \mu(t/2; K) = \mu(t/2; A)^2 + \mu(t/2; K)\end{aligned}$$

в силу пп. (iv), (v) леммы 1. Переходя в полученном неравенстве

$$1 + \mu(t; A)^2 \leq \mu(t/2; A)^2 + \mu(t/2; K), \quad t > 0,$$

к пределу при $t \rightarrow +\infty$, получаем $1 + a^2 \leq a^2 + 0 = a^2$; противоречие. $\square$

Из теорем 6, 7 вытекает

Следствие 8. Если $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ и $B := i[X, Y] \geq 0$, то оператор B не может иметь (а) обратного в $\mathcal{M}$ и (б) при $\tau(I) = +\infty$ вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что $B = \frac{1}{2}(A^* A - AA^*)$ для оператора $A = X + iY$. $\square$

Самокоммутатор произвольного оператора $Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ имеет вид $A - UAU^*$, где $A = Y^* Y$ и U — частичная изометрия из полярного разложения $Y = U|Y|$.

Теорема 8. Если $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $U \in \mathcal{M}$ является изометрией, то оператор $X := A - UAU^*$ является самокоммутирующим. Для $\tau(I) < +\infty$ каждый самокоммутирующий имеет такой вид.

Доказательство. Если $X = A - UAU^*$, то $A^{1/2}U^* = (UA^{1/2})^*$ и $X = [A^{1/2}U^*, UA^{1/2}]$.

Пусть $\tau(I) < +\infty$ и оператор $X \in S(\mathcal{M}, \tau)^h$ является самокоммутирующим, т. е. $X = Y^*Y - YY^*$ для некоторого оператора $Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Если $Y = V|Y|$ — полярное разложение Y , то частичная изометрия V может быть «продолжена» до унитарного оператора $U \in \mathcal{M}$ со свойством $Y = U|Y|$ (см. доказательство теоремы 2 в [40]). Тогда $YY^* = U|Y|^2U^* = UY^*YU^*$ и можно выбрать $A := Y^*Y$. $\square$

Из теорем 6–8 получаем

Следствие 9. Пусть $A \in S(\mathcal{M}, \tau)^+$ и $U \in \mathcal{M}$ является изометрией и $X := A - UAU^* \geq 0$. Тогда X не может иметь (а) обратного в $\mathcal{M}$ и (б) при $\tau(I) = +\infty$ вид $\lambda I + K$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $K \in S_0(\mathcal{M}, \tau)$.

Лемма 4. Если $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$, оператор B нормален и $AB = BA$, то $[A^* - B^*, A - B] = [A^*, A]$.

Доказательство. В силу теоремы Фуглида — Путнама для τ -измеримых операторов [41, теорема 6] имеем $AB^* = B^*A$. Поэтому

$$BA^* = (AB^*)^* = (B^*A)^* = A^*B.$$

Заметим, что для алгебры $LS(\mathcal{M})$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$ типа I и типа III, теорема Фуглида — Путнама была установлена в [42, теорема 1] и [43, теорема 1]. $\square$

Теорема 9. Если $A^2 = A \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $[A^*, A] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([A^*, A]) = 0$.

Доказательство. Для $A = A^2 \in S(\mathcal{M}, \tau)$ существует единственное разложение $A = P + Z$, где $P \in \mathcal{M}^{pr}$ и нильпотент Z принадлежит $S(\mathcal{M}, \tau)$ с $Z^2 = 0$ и $ZP = 0$, $PZ = Z$ [44, теорема 2.23]. По предположению оператор

$$Z + Z^* + Z^*Z - ZZ^* = [A^*, A] \quad (5)$$

лежит в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу равенств $Z^*P = (PZ)^* = Z^*$ операторы

$$Z^* - ZZ^* = [A^*, A]P, \quad Z + Z^*Z = [A^*, A]P^\perp \quad (6)$$

также лежат в $L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Поэтому $Z^* + Z^*Z = (Z + Z^*Z)^* \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и в силу первого равенства в (6) получаем $ZZ^* + Z^*Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. Тогда $Z^*Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и в силу второго равенства в (6) имеем $Z \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 3 с $X = P$ и $Y = Z$ получаем

$$\tau(Z) = \tau(PZ) = \tau(ZP) = \tau(0) = 0.$$

Поэтому $\tau(Z^*) = \overline{\tau(Z)} = 0$. В силу равенства

$$\tau(X) = \int_0^{+\infty} \mu(t; X) dt \quad (X \in S(\mathcal{M}, \tau)^+)$$

(см. [37, п. (с) предложения 3.9]) и пп. (i), (v) леммы 1 имеем

$$\tau(A^*A - AA^*) = \tau(Z + Z^* + Z^*Z - ZZ^*) = \tau(Z) + \tau(Z^*) + \tau(Z^*Z) - \tau(ZZ^*)$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + 0 + \int_0^{+\infty} \mu(t; Z^* Z) dt - \int_0^{+\infty} \mu(t; Z Z^*) dt \\
&= \int_0^{+\infty} (\mu(t; Z)^2 - \mu(t; Z^*)^2) dt = \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.
\end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Следствие 10. Если $X = X^3 \in S(\mathcal{M}, \tau)$, оператор $X^2 - X$ эрмитов и $[X^*, X] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X^*, X]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [38, предложение 1] имеем представление $X = A - B$, где идемпотенты $A = (X^2 + X)/2$ и $B = (X^2 - X)/2$ с $AB = BA = 0$. Поскольку $B = B^*$, в силу леммы 4 получаем $[X^*, X] = [A^*, A]$ и применяем теорему 8. $\square$

Следствие 11. Если $X \in S(\mathcal{M}, \tau)$ с $X^2 = I$ и $[X^*, X] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X^*, X]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для оператора $A := (I + X)/2$ имеем $A^2 = A$ и $X^*X - XX^* = 4(A^*A - AA^*)$. Поэтому $\tau([X^*, X]) = 0$. $\square$

Следствие 12. Пусть $\tau(I) = 1$ и $A \in S(\mathcal{M}, \tau)$. Если $[A^*, A] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и $A^2 \in \{A, I\}$, то $\|I + z[A^*, A]\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$.

Предложение 1. Если $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$, $XY = \lambda YX$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$ и $[X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau([X, Y]) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\lambda = 1$, то утверждение выполнено. Пусть $\lambda \neq 1$. Имеем $(\lambda - 1)YX = [X, Y] \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, поэтому $YX, XY \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. В силу леммы 3 получаем $\tau(YX) = \tau(XY) = \lambda\tau(YX) = 0$, поэтому $\tau([X, Y]) = 0$. $\square$

Примеры операторов $X, Y \in S(\mathcal{M}, \tau)$ с $XY = \lambda YX$ были даны в п. (i) теоремы 4 (см. также [45]).

Теорема 10. Пусть $A, B \in S(\mathcal{M}, \tau)$ и $A^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, пусть $k, m \in \mathbb{N}$ и $k + m \geq n$. Тогда оператор $A^k B A^m$ является коммутатором и если $A^k B A^m \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(A^k B A^m) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $A^k B A^m = A^k B \cdot A^m - A^m \cdot A^k B = [A^k B, A^m]$. Если $A^k B A^m \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то в силу леммы 3 с операторами $X = A^k B$ и $Y = A^m$ получаем

$$\tau(A^k B \cdot A^m) = \tau(A^m \cdot A^k B) = \tau(0) = 0, \quad k + m \geq n.$$

Заметим, что при $2k \geq n$ операторы $[A^k, B]$ и A^k антикоммутируют, а операторы $A^k B + B A^k$ и A^k коммутируют. В частности, при $\tau(I) = 1$ имеем $\|I + z A^k B A^m\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$ и $k, m \in \mathbb{N}$ с $k + m \geq n$. $\square$

Теорема 11. Если частичная изометрия U принадлежит $\mathcal{M}$ и $U^n = 0$ для некоторого целого $n \geq 2$, то оператор U^{n-1} является коммутатором, и если $U^{n-1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$, то $\tau(U^{n-1}) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $U = U U^* U$ [3, следствие 3 из задачи 98], при $n \geq 2$ имеем

$$U^{n-1} = U^{n-2} \cdot U U^* U = U^{n-1} \cdot U^* U - U^* U \cdot U^{n-1} = [U^{n-1}, U^* U];$$

если $n = 2$, то $U = U \cdot U^*U - U^*U \cdot U = [U, U^*U]$.

Пусть $U^{n-1} \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$. При $n \geq 2$ в силу леммы 3 с $X = U^*U^{n-1}$, $Y = U$ и равенства $U = UU^*U$ получаем

$$0 = \tau(0) = \tau(U^*U^n) = \tau(U \cdot U^*U \cdot U^{n-2}) = \tau(U^{n-1});$$

если $n = 2$, то аналогичным образом имеем

$$0 = \tau(0) = \tau(U^*U^2) = \tau(UU^*U) = \tau(U).$$

В частности, если $\tau(I) = 1$, то $\|I + zU^{n-1}\|_1 \geq 1$ для всех $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Следствие 13. Если частичная изометрия $U \in L_1(\mathcal{M}, \tau)$ и проекторы $P = U^*U$, $Q = UU^*$ взаимно ортогональны, то $U^2 = 0$. Поэтому U является коммутатором и $\tau(U) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3 с $X = U$ и $Y = U^*2U$ имеем

$$0 = \tau(0) = \tau(QP) = \tau(UU^*2U) = \tau(U^*2U^2) = \tau(U^2*U^2) = \tau(|U^2|^2).$$

Отсюда в силу точности следа τ получаем $|U^2|^2 = 0$, поэтому $|U^2| = 0$ и $U^2 = 0$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный линейный анализ в задачах. М.: Наука, 1969.
2. Albert A. A., Muckenhoupt B. On matrices of trace zeros // Michigan Math. J. 1957. V. 4, N 1. P. 1–3.
3. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. М.: Мир, 1970.
4. Johnson W. B., Ozawa N., Schechtman G. A quantitative version of the commutator theorem for zero trace matrices // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 2013. V. 110, N 48. P. 19251–19255.
5. Angel O., Schechtman G. The Hilbert–Schmidt version of the commutator theorem for zero trace matrices // Bull. Lond. Math. Soc. 2015. V. 47, N 4. P. 715–719.
6. Wang D.-G., Zhang J. J., Zhuang G. Coassociative Lie algebras // Glasgow Math. J. 2013. V. 55, N A. P. 195–215.
7. Ravichandran M., Srivastava N. Asymptotically optimal multi-paving // Int. Math. Res. Not. 2021. V. 2021, N 14. P. 10908–10940.
8. Robinson D. W. Matrices with zero trace as commutators of nilpotents // Linear multilinear algebra. 1977. V. 5, N 1. P. 45–51.
9. Brown A., Pearcy C. Structure of commutators of operators // Ann. Math. (2). 1965. V. 82, N 1. P. 112–127.
10. Bikhentaev A. Commutators in C^* -algebras and traces // Ann. Funct. Anal. 2023. V. 14, N 2. Paper No. 42, 14 pp.
11. Fan P. On the diagonal of an operator // Trans. Am. Math. Soc. 1984. V. 283, N 1. P. 239–251.
12. Fan P., Fong C. K. Which operators are the self-commutators of compact operators? // Proc. Am. Math. Soc. 1980. V. 80, N 1. P. 58–60.
13. Fan P., Fong C. K., Che K., Herrero D. A. On zero-diagonal operators and traces // Proc. Am. Math. Soc. 1987. V. 99, N 3. P. 445–451.
14. Fan P., Fong C. K., Che K. An intrinsic characterization for zero-diagonal operators // Proc. Am. Math. Soc. 1994. V. 121, N 3. P. 803–805.
15. Бикчентаев А. М. К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана. II // Математика и теоретические компьютерные науки. 2023. Т. 1, № 2. С. 3–11.
16. Bikhentaev A. M. Concerning the theory of τ -measurable operators affiliated to a semifinite von Neumann algebra. II // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 10. P. 4507–4511.
17. Бикчентаев А. М. Существенно обратимые измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана, и коммутаторы // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 272–282.

18. Weigt M. Derivations of τ -measurable operators // Operator algebras, operator theory and applications. Basel: Birkhäuser Verlag, 2010. P. 273–286. (Oper. Theory Adv. Appl.; V. 195).
19. Бер А. Ф., Кудайбергенов К. К., Сукочев Ф. А. Дифференцирования на алгебрах Мюррея — фон Неймана // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 5. С. 183–184.
20. Huang J., Kudaybergenov K. K., Sukochev F. A. Ring derivations of Murray–von Neumann algebras // Linear Algebra Appl. 2023. V. 672, N 1. P. 28–52.
21. Бикчентаев А. М. О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Тр. МИАН. 2016. Т. 293. С. 73–82.
22. Бикчентаев А. М. След и коммутаторы измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана // Квантовая вероятность. Итоги науки и техники. Сер. Современная математика и ее приложения. М.: ВИНТИ РАН, 2018. С. 10–20. (Тематические обзоры; Т. 151).
23. Bikchentaev A. M. Trace and commutators of measurable operators affiliated to a von Neumann algebra // J. Math. Sci. (New York). 2021. V. 252, N 1. P. 8–19.
24. Бикчентаев А. М., Фауаз Х. Разности и коммутаторы идемпотентов в C^* -алгебрах // Изв. вузов. Математика. 2021. № 8. С. 16–26.
25. Helton J., Howe R. Traces of commutators of integral operators // Acta Math. 1975. V. 135, N 3–4. P. 271–305.
26. Weiss G. The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert–Schmidt class and generating functions for matrix operators. I // Trans. Am. Math. Soc. 1978. V. 246. P. 193–209.
27. Kittaneh F. On zero-trace commutators // Bull. Austral. Math. Soc. 1986. V. 34, N 1. P. 119–126.
28. Kittaneh F. Some trace class commutators of trace zero // Proc. Am. Math. Soc. 1991. V. 113, N 3. P. 655–661.
29. Putnam C. R. On commutators of bounded matrices // Am. J. Math. 1951. V. 73, N 1. P. 127–131.
30. Takesaki M. Theory of operator algebras. I. Encyclopaedia of mathematical sciences, 124. Operator algebras and non-commutative geometry, 5. Berlin: Springer-Verl., 2002.
31. Takesaki M. Theory of operator algebras. II. Encyclopaedia of mathematical sciences, 125. Operator algebras and non-commutative geometry, 6. Berlin: Springer-Verl., 2003.
32. Fack T., Kosaki H. Generalized s -numbers of τ -measurable operators // Pacific J. Math. 1986. V. 123, N 2. P. 269–300.
33. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
34. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
35. Антонец А. Б. Линейные функциональные уравнения: операторный подход. Минск: Университетское, 1988.
36. Brown L. G., Kosaki H. Jensen's inequality in semifinite von Neumann algebra // J. Operator Theory. 1990. V. 23, N 1. P. 3–19.
37. Dodds P. G., Dodds T. K.-Y., Pagter de B. Noncommutative Köthe duality // Trans. Am. Math. Soc. 1993. V. 339, N 2. P. 717–750.
38. Bikchentaev A. M., Yakushev R. S. Representation of tripotents and representations via tripotents // Linear Algebra Appl. 2011. V. 435, N 9. P. 2156–2165.
39. Бикчентаев А. М. К теории τ -измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 337–348.
40. Бикчентаев А. М. О минимальности топологии сходимости по мере на конечных алгебрах фон Неймана // Мат. заметки. 2004. Т. 75, № 3. С. 342–349.
41. Ber A., Chilin V., Sukochev F., Zanin D. Fuglede–Putnam theorem for locally measurable operators // Proc. Am. Math. Soc. 2018. V. 146, N 4. P. 1681–1692.
42. Ahramovich M. V., Chilin V. I., Muratov M. A. Fuglede–Putnam theorem in the algebra of locally measurable operators // Indian J. Math. 2013. V. 55, N suppl. P. 13–20.
43. Ахрамович М. В., Муратов М. А., Чилин В. И. Теорема Фуглида — Путнама для локально измеримых операторов // Динамические системы (Симферополь). 2014. Т. 4, № 1–2. С. 3–8.
44. Бикчентаев А. М. Об идемпотентных τ -измеримых операторах, присоединенных к алгебре фон Неймана // Мат. заметки. 2016. Т. 100, № 4. С. 492–503.

45. Akhmadiev M., Alhasan H., Bikchentaev A., Ivanshin P. Commutators and hyponormal operators on a Hilbert space // J. Iran Math. Soc. 2023. V. 4, N 1. P. 67–78.

Поступила в редакцию 21 ноября 2023 г.

После доработки 21 ноября 2023 г.

Принята к публикации 25 января 2024 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович (ORCID 0000-0001-5992-3641)

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ул. Кремлевская, 18, Казань 420008

`Airat.Bikchentaev@kpfu.ru`

ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ОБЪЕМОВ ОБОБЩЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ И ЗАЦЕПЛЕНИЙ

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

Аннотация. Многогранник в трехмерном гиперболическом пространстве называется обобщенным, если его вершины могут быть конечными, идеальными или усеченными. В силу теоремы Беллетти (2021) верхняя точная грань объемов обобщенных гиперболических многогранников, имеющих один и тот же одномерный скелет Γ , достигается на идеальном прямоугольном многограннике, который называют ректификацией графа Γ . В работе получены верхние оценки для произвольных обобщенных гиперболических многогранников. Эти оценки линейно зависят от числа ребер многогранника. Более того, показано, что оценки могут быть улучшены, если многогранник имеет треугольные грани и трехвалентные вершины. В качестве приложения получены новые верхние оценки объемов гиперболических зацеплений, имеющих более восьми скручиваний в диаграмме.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.304

Ключевые слова: геометрия Лобачевского, объемы гиперболических многогранников, гиперболические узлы и зацепления.

1. Введение

В работе рассматриваются выпуклые многогранники конечного объема, лежащие в пространстве Лобачевского (гиперболическом пространстве) $\mathbb{H}^3$. Многогранник в пространстве постоянной секционной кривизны $\mathbb{S}^3$, $\mathbb{E}^3$ или $\mathbb{H}^3$ будем называть *остроугольным*, если все его двугранные углы не превосходят $\pi/2$. В частности, будем называть многогранник *прямоугольным*, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. Хорошо известно, что в сферическом пространстве $\mathbb{S}^n$ любой остроугольный многогранник является симплексом [1, теорема 1], а в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ любой остроугольный многогранник является прямым произведением некоторого числа симплексов и симплицеального конуса [1, теорема 2] (см. также [2, гл. 6, теорема 1.5]).

Необходимые и достаточные условия реализации многогранника заданного комбинаторного типа с предписанными двугранными углами как остроугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$ конечного объема описываются теоремами Андреева [3, 4] (см. также [5]). Эти условия формулируются в виде линейных уравнений и неравенств, которые определяются комбинаторикой одномерного скелета (1-скелета) многогранника. Более того, если реализация многогранника в $\mathbb{H}^3$ существует, то она единственна с точностью до изометрии пространства.

Работа выполнена при поддержке гранта Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» и госзадания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0004).

Таким образом, объем остроугольного гиперболического многогранника полностью определяется комбинаторикой его 1-скелета и двугранными углами. Положим $\mathbb{H}^3 = \mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$. Вершину гиперболического многогранника будем называть *идеальной*, если она принадлежит абсолюту $\partial\mathbb{H}^3$. Многогранник будем называть *идеальным*, если все его вершины являются идеальными. В силу теоремы Андреева [4] если P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник, то каждая его вершина является 4-валентной, т. е. инцидентна ровно четырем ребрам. Вычисление объема гиперболического многогранника по его комбинаторике и двугранным углам является достаточно трудной задачей. Частные примеры решения этой задачи восходят к Лобачевскому. Некоторые современные результаты и методы решения этой задачи представлены в работах Милнора [6], Винберга [7], Келлерхалса [8], Кашаева [9], Чо и Кима [10], Мураками и Яно [11], где рассматривались многогранники с конечными, идеальными и усеченными вершинами, имеющие фиксированную комбинаторику, такие как тетраэдры и пирамиды. В силу теоремы жесткости Мостова, вычисления объемов и оценки объемов имеют приложения в теории гиперболических 3-многообразий и в теории узлов [12].

Ниже в формулах для объемов трехмерных гиперболических многогранников и многообразий будем использовать *функцию Лобачевского*, введенную Милнором в [6]:

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin(t)| dt.$$

Ниже результаты о верхних и нижних оценках объемов будут сформулированы с использованием констант, которые с точностью до шести знаков имеют следующие значения:

$$v_{tet} = 3\Lambda(\pi/3) = 1,014941 \quad \text{и} \quad v_{oct} = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663863.$$

Приближенные численные значения величин, выражаемых через функцию Лобачевского, будут приводиться с точностью до шести знаков.

В данной работе будут получены верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников, где оценки линейно зависят от числа ребер. В разд. 2 напомним понятие обобщенного гиперболического многогранника. В [13] Белетти показал, что максимум объемов обобщенных гиперболических многогранников с одним и тем же 1-скелетом достигается на соответствующем идеальном прямоугольном гиперболическом многограннике (см. теорему 2.1). Оценки объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников через число вершин были ранее получены в [14–17]. Основываясь на этих результатах, мы даем в теореме 2.2 верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников через число ребер. В разд. 3 рассматривается случай, когда имеется дополнительная информация о комбинаторике обобщенного многогранника. А именно, в теореме 3.4 получены более сильные верхние оценки объемов, учитывающие число треугольных граней и трехвалентных вершин в многограннике. В разд. 4 приведены примеры использования оценок из теорем 2.2 и 3.4 для трех бесконечных семейств обобщенных гиперболических многогранников: пирамид, призм и пирамид с двумя вершинами. В разд. 5 описана связь между объемами гиперболических многогранников и оценками объемов гиперболических узлов и зацеплений через число скручиваний в их диаграммах. Связи такого типа ранее обсуждались в [18–21]. В теореме 5.1 получена

верхняя оценка для объемов гиперболических узлов и зацеплений, имеющих более восьми скручиваний в диаграмме.

2. Объем обобщенного гиперболического многогранника

Для определения обобщенного гиперболического многогранника будем использовать проективную модель пространства Лобачевского (см. подробнее в [22, 13, 12, 23]). Рассмотрим определенную на $\mathbb{R}^4$ симметричную билинейную форму

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

При стандартном вложении $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{RP}^3$, которое сопоставляет точке $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ точку $\mathbb{RP}^3$ с однородными координатами $(1, x_1, x_2, x_3)$, подмножество $\mathbb{H}^3$ соответствует открытому единичному шару в $\mathbb{R}^3$. При этом геодезические в $\mathbb{H}^3$ — это пересечения $\mathbb{H}^3$ с проективными прямыми из $\mathbb{RP}^3$ или, эквивалентно, с прямыми из $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$. Аналогично (вполне геодезические) гиперболические плоскости $\mathbb{H}^3$ соответствуют непустым пересечениям $\mathbb{H}^3$ с проективными плоскостями из $\mathbb{RP}^3$ или, эквивалентно, с аффинными плоскостями из $\mathbb{R}^3$.

В проективной модели гиперболического пространства $\mathbb{H}^3$ имеет место следующее свойство двойственности. Для k -мерного, $0 \leq k \leq 2$, проективного подпространства $\ell \subset \mathbb{RP}^3$ рассмотрим соответствующее ему $(k+1)$ -мерное линейное подпространство $L \subset \mathbb{R}^4$. Тогда подпространство $L^\perp$, ортогональное L относительно введенной выше формы $\langle \cdot, \cdot \rangle$, является $(3-k)$ -мерным линейным подпространством в $\mathbb{R}^4$ и задает $(2-k)$ -мерное проективное подпространство $\ell^\perp \subset \mathbb{RP}^3$. В частности, если $x \in \mathbb{RP}^3 \setminus \mathbb{H}^3$, то $x^\perp$ — плоскость, которая пересекает $\mathbb{H}^3$, а точка x называется *гиперидеальной*.

Реализацию выпуклого евклидова многогранника в проективной модели пространства $\mathbb{H}^3$ будем называть *обобщенным гиперболическим многогранником*, если каждая его вершина является конечной, идеальной или гиперидеальной. При этом каждое ребро многогранника должно содержать внутренние точки пространства Лобачевского. Каждой гиперидеальной точке p сопоставим *полярную плоскость* $\Pi_p \subset \mathbb{H}^3$, которая является плоскостью, ортогональной всем прямым, проходящим через $\mathbb{H}^3$ и p . Плоскость Π_p делит $\mathbb{H}^3$ на два полупространства; обозначим через $H_p \subset \mathbb{H}^3$ то из них, которое содержит $0 \in \mathbb{R}^3$. Обобщенный гиперболический многогранник P будем называть *собственным*, если для каждой гиперидеальной вершины v многогранника P внутренность полупространства H_v содержит все конечные вершины многогранника P .

Пусть P — обобщенный гиперболический многогранник, а $U(P)$ — множество всех его гиперидеальных вершин. Определим *усечение* обобщенного гиперболического многогранника P как следующее множество:

$$P_{tr} = P \bigcap_{v \in U(P)} H_v.$$

Объемом обобщенного многогранника P будем считать объем его усечения P_{tr} . Отметим, что если многогранник P собственный, то двугранные углы при новых ребрах, появляющихся после усечения, равны $\pi/2$.

Следуя [13], будем говорить, что многогранник $\bar{\Gamma} \subset \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$ является *ректификацией* трехсвязного графа Γ , если 1-скелет многогранника $\bar{\Gamma}$ совпадает с графом Γ и все ребра $\bar{\Gamma}$ касаются $\partial\mathbb{H}^3$. Заметим, что $\bar{\Gamma}$ не является обобщенным гиперболическим многогранником, так как его ребра не пересекают

внутренность $\mathbb{H}^3$. Тем не менее для $\bar{\Gamma}$ можно так же, как и выше, определить усечение $\bar{\Gamma}_{tr}$, которое будет являться идеальным прямоугольным многогранником, граф которого является срединным графом для Γ . Под объемом $\text{vol}(\bar{\Gamma})$ ректификации $\bar{\Gamma}$ будем понимать объем $\text{vol}(\bar{\Gamma}_{tr})$ ее усечения $\bar{\Gamma}_{tr}$.

В [24, следствие 7.4] Аткинсон получил следующую верхнюю оценку. Пусть P — остроугольный гиперболический многогранник, имеющий V_3 трехвалентных вершин и V_4 четырехвалентных вершин. Тогда

$$\text{vol}(P) < \frac{2V_4 + 3V_3 - 2}{4} \cdot v_{oct} + \frac{15V_3 + 20V_4}{16} \cdot v_{tet}. \quad (1)$$

В [13] Белетти установил, что объем произвольного обобщенного гиперболического многогранника можно оценить сверху объемом построенного по его 1-скелету идеального прямоугольного гиперболического многогранника.

Теорема 2.1 [13, теорема 2.3]. *Для любого 3-связного планарного графа Γ имеет место равенство*

$$\sup_P \text{vol}(P) = \text{vol}(\bar{\Gamma}),$$

где P пробегает множество всех собственных обобщенных гиперболических многогранников, для которых Γ является 1-скелетом, а $\bar{\Gamma}$ — ректификация графа Γ .

По определению объем ректификации $\bar{\Gamma}$ равен объему многогранника $\bar{\Gamma}_{tr}$, т. е. такого идеального прямоугольного гиперболического многогранника, что его 1-скелет является срединным графом для Γ . По построению все вершины $\bar{\Gamma}_{tr}$ четырехвалентны. Напомним, что если G — плоский граф, то *срединным* для него называется граф $M(G)$ такой, что вершины $M(G)$ взаимно однозначно соответствуют ребрам G и для каждой грани G если два ребра в ней идут последовательно, то соответствующие вершины из $M(G)$ соединяются ребром.

Начальный список идеальных прямоугольных многогранников приведен в работе [15], где также вычислены первые 248 значений объемов таких многогранников. Известным бесконечным семейством идеальных прямоугольных многогранников является семейство n -антипризм для целых $n \geq 3$. В частности, 3-антипризма является октаэдром. Формула для объемов идеальных n -антипризм с циклической симметрией получена Терстоном [12] в связи с вычислением объемов семейства цепных зацеплений. Арифметичность групп, порожденных отражениями в гранях идеальных прямоугольных антипризм (и, следовательно, арифметичность групп соответствующих цепных зацеплений), исследована в работах [25, 26].

Двусторонние оценки для объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников через число их вершин были получены Аткинсоном [14, теорема 2.2]. А именно, если P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами, то

$$\frac{v_{oct}}{4} \cdot V - \frac{v_{oct}}{2} \leq \text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 2v_{oct}. \quad (2)$$

При этом оба неравенства превращаются в равенства тогда, когда P является идеальным прямоугольным октаэдром, т. е. при $V = 6$.

Идеальный прямоугольный октаэдр является единственным идеальным прямоугольным многогранником с $V = 6$ и его объем равен v_{oct} . Следующие идеальные прямоугольные многогранники имеют $V \geq 8$ вершин, для них верхнюю оценку можно улучшить. А именно, в [16, теорема 2.3] показано, что если P —

идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с $V \geq 8$ вершинами, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - \frac{5v_{oct}}{2}. \quad (3)$$

Объемы многогранников с числом вершин $V \leq 21$ были табулированы в [15]. Затем в [17] было показано, что верхнюю оценку из формулы 2 можно уточнить, если не рассматривать многогранники, имеющие $V \leq 24$ вершин. А именно, в силу [17, теорема 1.1], если P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с $V > 24$ вершинами, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 3v_{oct}. \quad (4)$$

Теорема 2.2. Пусть Γ — 3-связный планарный граф с E ребрами, а P — обобщенный гиперболический многогранник, для которого Γ является 1-скелетом. Тогда имеют место следующие неравенства:

- (а) если P является тетраэдром, то $\text{vol}(P) \leq v_{oct}$;
- (б) если P отличен от тетраэдра, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - \frac{5v_{oct}}{2};$$

- (с) если число ребер $E > 24$, то

$$\text{vol}(P) \leq \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - 3v_{oct}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из теоремы 2.1 и формул (2)–(4). $\square$

Хорошо известно (см., например, [27]), что для каждого идеального прямоугольного многогранника его скелет является срединным графом для двух многогранников, комбинаторно двойственных друг другу.

3. Многогранники с трехвалентными вершинами и треугольными гранями

Заметим, что в случаях, когда многогранник P имеет некоторые специальные комбинаторные свойства, верхнюю оценку его объема можно улучшить. В этом разделе улучшим оценки, используя информацию о числе трехвалентных вершин и треугольных граней.

Прежде всего рассмотрим *регулярную* идеальную n -угольную бипирамиду B_n^r , $n \geq 3$ (см. [20]). Регулярность означает, что B_n^r получена склеиванием вместе n копий идеального тетраэдра T_n вокруг общего ребра, где T_n задается двугранными углами $\frac{2\pi}{n}$, $\frac{(n-2)\pi}{2n}$ и $\frac{(n-2)\pi}{2n}$ при ребрах, инцидентных одной из вершин, и требованием, что двугранные углы при противоположащих ребрах тетраэдра равны. Следуя обозначениям для идеальных гиперболических тетраэдров из [6], можем записать, что $T_n = T(\frac{2\pi}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n})$. Как показано в [20, теорема 2.1], максимальный объем идеальной n -угольной бипирамиды достигается тогда, когда она регулярна. Формула для объема тетраэдра T_n приведена в [20] в следующем виде:

$$\text{vol}(T_n) = \int_0^{2\pi/n} -2 \ln(\sin \theta) d\theta + 2 \int_0^{\pi(n-1)/2n} -2 \ln(\sin \theta) d\theta.$$

Согласно [6] этот объем может быть записан в терминах функции Лобачевского в следующем виде:

$$\text{vol}(T_n) = \Lambda\left(\frac{2\pi}{n}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}\right) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

где использованы тождества $\Lambda(2x) = 2\Lambda(x) + 2\Lambda(x + \frac{\pi}{2})$ и $\Lambda(-\theta) = -\Lambda(\theta)$. Таким образом,

$$\text{vol}(B_n^r) = 2n\Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Ниже мы воспользуемся этим равенством для оценки объема идеального прямоугольного многогранника.

Лемма 3.1. Пусть P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник. Обозначим через p_n , $n \geq 3$, число его n -угольных граней. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq \sum_{n \geq 3} \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right) p_n n - 4v_{tet}. \quad (5)$$

Доказательство. Обозначим через ∂P поверхность многогранника P , которая естественным образом разбивается на многоугольники, соответствующие граням P . Выберем вершину $v \in \partial P \subset P$ и соединим ее с остальными вершинами геодезическими линиями. Получим разбиение P на пирамиды с вершиной v над многоугольниками, разбивающими ∂P . Для каждой полученной n -угольной пирамиды рассмотрим ее дубль, который является идеальной бипирамидой. Поскольку максимальный объем идеальной n -угольной бипирамиды достигается тогда, когда она регулярна [20, теорема 2.1], объем каждой из рассматриваемых пирамид ограничен сверху величиной $\frac{1}{2} \text{vol}(B_n^r)$, где, как и выше, через B_n^r обозначена регулярная n -угольная бипирамида. Учитывая, что $\text{vol}(B_n^r) = 2n\Lambda(\frac{\pi}{n})$, получим

$$\text{vol}(P) \leq \sum_{n \geq 3} \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right) p_n n.$$

При указанном построении четыре пирамиды, основаниями которых являются грани, инцидентные v , вырождаются. Их вклад в оценку объемов был не менее чем сумма объемов четырех регулярных идеальных тетраэдров:

$$4 \cdot \frac{1}{2} \text{vol}(B_3^r) = 4 \cdot 3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot v_{tet}.$$

Таким образом, неравенство (5) установлено. $\square$

Как показано в [20, теорема 2.2], имеет место оценка $\text{vol}(B_n^r) \leq 2\pi \ln(n/2)$ для $n \geq 3$, причем $\text{vol}(B_n^r)$ при $n \rightarrow \infty$ растет асимптотически как $2\pi \ln(n/2)$. Используя эту оценку для объема регулярной бипирамиды, наряду с неравенством (5) получаем следующий результат.

Следствие 3.2. Пусть P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник. Обозначим через p_n , $n \geq 3$, число его n -угольных граней. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq \pi \sum_{n \geq 3} \ln\left(\frac{n}{2}\right) p_n - 4v_{tet}. \quad (6)$$

Пусть P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник, а p_n , $n \geq 3$, обозначает число его n -угольных граней. Из формулы Эйлера для

многогранников и из четырехвалентности вершин многогранника P следует (см. например [16]), что

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k.$$

Таким образом, P имеет по крайней мере восемь треугольных граней. Приведем оценку объема многогранника, учитывающую число его треугольных граней.

Лемма 3.3. Пусть P — идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами. Обозначим через p_n , $n \geq 3$, число n -угольных граней в P . Тогда

(а) имеет место неравенство

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{tet} \left(V - \frac{p_3 + 8}{4} \right),$$

(b) если $V > 24$, то

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{tet} \left(V - \frac{p_3 + 13}{4} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) Пусть число граней многогранника P равно F . Грани многогранника обозначим через $f_1, \dots, f_F$. Как и в доказательстве леммы 3.1, рассмотрим разбиение многогранника P на такие идеальные пирамиды τ_i , $i = 1, \dots, F$, что основанием τ_i является грань f_i и все пирамиды имеют общую вершину v . Для каждой идеальной пирамиды τ_i рассмотрим ее удвоение — идеальную бипирамиду β_i . Имеем

$$\text{vol}(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^F \text{vol}(\beta_i).$$

Пусть для определенности τ_i является n -угольной пирамидой для некоторого $n \geq 3$. Тогда β_i является идеальной n -угольной бипирамидой. Разобьем β_i на идеальные тетраэдры. Если $n = 3$, то пирамида τ_i является тетраэдром и β_i является объединением двух идеальных тетраэдров вдоль общей грани. Следовательно, $\text{vol}(\beta_i) \leq 2v_{tet}$. Если $n \geq 4$, то β_i разбивается на n идеальных тетраэдров, которые имеют общее ребро, содержащее вершину v и ее дубль v' (см. пример для $n = 4$, приведенный на рис. 1). Таким образом, объем n -угольной бипирамиды не превосходит $2v_{tet}$, если $n = 3$, и не превосходит nv_{tet} , если $n \geq 4$.

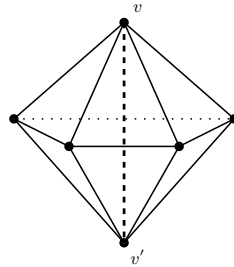


Рис. 1. Разбиение идеальной 4-бипирамиды на 4 идеальных тетраэдра.

Обозначим через E число ребер многогранника P . Поскольку все двугранные углы многогранника P равны $\pi/2$, каждое ребро $e \in E$ инцидентно двум бипирамидам. Таким образом, сумма инцидентных ребер по всем бипирамидам будет равна удвоенному числу ребер $2E$ (каждое ребро, инцидентное основанию пирамиды в разбиении P , посчитано дважды). Поскольку сумма инцидентных ребер по 3-бипирамидам равна $3p_3$, сумма инцидентных ребер, соответствующих n -бипирамидам, для $n \geq 4$ равна $2E - 3p_3$. Таким образом,

$$2 \operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot p_3 + v_{tet} \cdot (2E - 3p_3) = v_{tet} \cdot (4V - p_3), \quad (7)$$

где использовано то, что $E = 2V$ в силу четырехвалентности всех вершин многогранника P .

При получении оценки из формулы (7) не принималось во внимание, что вершина v инцидентна четырем граням, значит соответствующие четыре пирамиды, а следовательно, и четыре бипирамиды, вырождаются в плоские. Вклад четырех бипирамид в построение оценки формулы (7) не менее чем $4 \cdot (2v_{tet})$ (случай, когда все они 3-бипирамиды). С учетом этого

$$2 \operatorname{vol}(P) \leq v_{tet} \cdot (4V - p_3 - 8),$$

откуда

$$\operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot \left(V - \frac{p_3 + 8}{4} \right).$$

(b) Выберем общую вершину пирамид специальным образом. Очевидно, каждая вершина многогранника P имеет четыре смежные вершины. Следуя [17], будем говорить, что две вершины *квазисмежны*, если они лежат в одной грани, но не смежны. В [17, лемма 2.1] показано, что для любого идеального прямоугольного многогранника с $V > 24$ вершинами найдется вершина v_0 , которая квазисмежна не менее чем четырем вершинам. С учетом того, что у v_0 есть 4 смежные вершины, получаем, что v_0 смежна с четырьмя гранями, сумма числа сторон которых не меньше, чем 16. Выберем именно такую вершину v_0 в качестве вершины всех пирамид разбиения многогранника P . В этом случае количество вырожденных тетраэдров будет не менее 13. Повторяя рассуждения из доказательства п. (a), получаем требуемую оценку. $\square$

Проведем оценки объемов, которые улучшают теорему 2.2 в случае, когда имеется дополнительная информация о числе трехвалентных вершин и треугольных граней.

Теорема 3.4. Пусть Γ — 3-связный планарный граф с E ребрами, P — обобщенный гиперболический многогранник, для которого Γ является 1-скелетом.

(a) Если P имеет V_3 трехвалентных вершин и p_3 треугольных граней, то

$$\operatorname{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot \left(E - \frac{p_3 + V_3 + 8}{4} \right).$$

(b) Если все вершины P трехвалентны и он имеет p_3 треугольных граней, то

$$\operatorname{vol}(P) \leq \frac{5v_{tet}}{3} \left(E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (a) Введем обозначения V , E и F для числа вершин, ребер и граней графа Γ и аналогично $\bar{V}$, $\bar{E}$ и $\bar{F}$ для числа вершин, ребер и

граней 1-скелета многогранника $\bar{\Gamma}_{tr}$. Поскольку 1-скелет многогранника $\bar{\Gamma}_{tr}$ является срединным графом для Γ , имеем $\bar{V} = E$, $\bar{E} = 2\bar{V} = 2E$ и $\bar{F} = V + F$. Если грань в $\bar{\Gamma}_{tr}$ соответствует вершине графа Γ , то число ее сторон равно валентности вершины. Если грань в $\bar{\Gamma}_{tr}$ соответствует грани графа Γ , то число ее сторон равно числу сторон в исходной грани. Следовательно, $\bar{\Gamma}_{tr}$ имеет $V_3 + p_3$ треугольных граней. Применяя лемму 3.1 к многограннику $\bar{\Gamma}_{tr}$, получаем требуемое неравенство.

(b) Если все вершины графа трехвалентны, то $2E = 3V = 3V_3$. Подставляя $V_3 = \frac{2}{3}E$ в оценку из п. (a), получаем

$$\text{vol } P \leq 2v_{tet} \cdot \left(E - \frac{p_3 + V + 8}{4} \right) = \frac{5v_{tet}}{3} \left(E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right),$$

что завершает доказательство. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Для сравнения оценок, полученных в теореме 2.2 и теореме 3.4, отметим, что имеет место неравенство $\frac{5}{3}v_{tet} < \frac{1}{2}v_{oct}$. Таким образом, если все вершины многогранника трехвалентны, то оценки из теоремы 3.4 дают лучшую асимптотику. Более того, неравенство

$$\frac{5v_{tet}}{3} \left(E - \frac{3p_3 + 24}{10} \right) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - 3v_{oct}$$

эквивалентно неравенству

$$E + \frac{3v_{tet}}{3v_{oct} - 10v_{tet}}p_3 > \frac{6(3v_{oct} - 4v_{tet})}{3v_{oct} - 10v_{tet}}.$$

Используя приближенные значения $v_{tet} = 1,014941$ и $v_{oct} = 3,663863$, получаем, что при

$$E + 3,615410 \cdot p_3 > 49,385163$$

оценка из теоремы 3.4 более сильная.

4. Пирамиды, призмы и двухвершинные пирамиды

Приведем некоторые примеры вычисления верхних оценок на основе полученных выше формул и сравним их с известными значениями объемов.

4.1. Пирамиды. Заметим, что срединным графом для 1-скелета n -угольной пирамиды P_n является 1-скелет n -антипризмы $A(n)$ (см. рис. 2 для $n = 4$). Напомним, что n -антипризмой $A(n)$ называют $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним n -угольными основаниями и с боковой поверхностью из двух слоев по n треугольников, у которого в каждой вершине сходятся по четыре ребра.

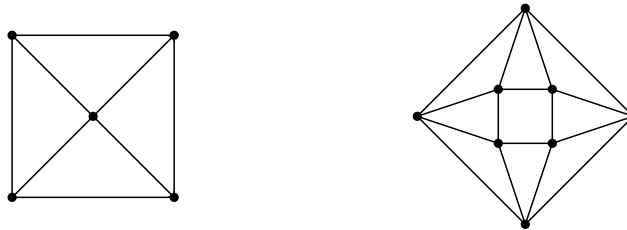


Рис. 2. Пирамида P_4 и антипризма A_4 .

Пусть $n = 3$. Треугольная пирамида P_3 является тетраэдром, имеет $E = 6$ ребер, $p_3 = 4$ треугольных граней, $V_3 = 4$ трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(P_3) \leq 2v_{tet} \left(6 - \frac{4 + 4 + 8}{4} \right) = 4v_{tet}.$$

Напомним, что формула для объема обобщенного гиперболического тетраэдра приведена в [23]. Хорошо известно, что срединным графом для 1-скелета тетраэдра является 1-скелет октаэдра. Объем идеального прямоугольного октаэдра равен $v_{oct} = 3,663863$. Таким образом, объем любого обобщенного тетраэдра не превосходит v_{oct} . Этот факт отмечен в [23]. Поскольку $v_{oct} < 4v_{tet}$, то оценка, полученная из теоремы 3.4, верна, хотя и не является точной.

При $n \geq 4$ пирамида P_n имеет $E = 2n$ ребер, $p_3 = n$ треугольных граней, $V_3 = n$ трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(P_n) \leq 2v_{tet} \left(2n - \frac{2n + 8}{4} \right) = 3v_{tet} \cdot n - 4v_{tet}.$$

Отметим, что $3v_{tet} = 3,044823$.

Напомним, что формула объема идеальной прямоугольной гиперболической антипризмы $A(n)$, $n \geq 3$, известна. Она была получена Терстоном в [12]:

$$\text{vol}(A(n)) = 2n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Таким образом, для $n \geq 4$ объем обобщенной гиперболической n -пирамиды P_n удовлетворяет следующему неравенству:

$$\text{vol}(P_n) \leq 2n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

Правая сторона неравенства асимптотически эквивалентна $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$ при $n \rightarrow \infty$.

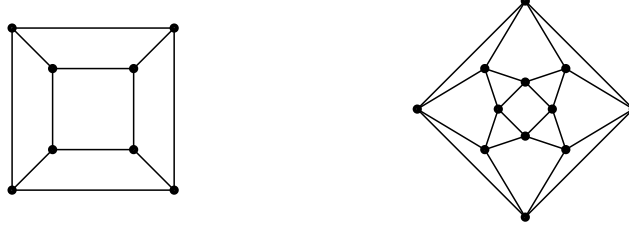
4.2. Призмы. Обозначим через Π_n обобщенную гиперболическую n -угольную призму для $n \geq 3$, т. е. многогранник, имеющий верхнее и нижнее n -угольные основания и n четырехугольных граней на боковой поверхности. Вершины многогранника могут быть конечными, идеальными или гиперидеальными, а двугранные углы предполагаются такими, что многогранник реализуется в $\mathbb{H}^3$.

Пусть $n = 3$. Призма Π_3 является треугольной призмой, которая имеет $E = 9$ ребер, $p_3 = 2$ треугольных граней и $V_3 = 6$ трехвалентных вершин. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем, что

$$\text{vol}(\Pi_3) \leq 2v_{tet} \cdot \left(9 - \frac{2 + 6 - 8}{4} \right) = 18v_{tet}.$$

В то же время ректификацией Π_3 является многогранник, составленный из двух октаэдров, откуда $\text{vol}(\Pi_3) \leq 2v_{oct}$. Поскольку $2v_{oct} < 18v_{tet}$, оценка, полученная из теоремы 3.4, верна, хотя и не является точной.

Пусть $n = 4$. Призма Π_4 является кубом. Нетрудно видеть, что срединным графом для 1-скелета куба является 1-скелет идеального прямоугольного

Рис. 3. Призма Π_4 и многогранник Q_{14} .

многогранника Q_{14} с 8 треугольными и 6 четырехугольными гранями, изображенного на рис. 3.

Его объем вычислен в [15] и приближенно равен 12,046092. Этот многогранник является объединением двух экземпляров идеальной антипризмы $A(4)$ вдоль четырехугольной грани. Заметим также, что этот многогранник имеет максимальный объем среди всех девяти идеальных прямоугольных гиперболических многогранников с 14 гранями.

Проведем единое обсуждение случая $n \geq 4$. В [24, следствие 11] приведена следующая оценка объема призмы Π_n :

$$\text{vol}(\Pi_n) < \frac{3}{2}v_{oct} \cdot n - 2v_{oct}. \quad (8)$$

Отметим, что $\frac{3}{2}v_{oct} = 5,495794$.

Поскольку все вершины призмы Π_n трехвалентные и ее 1-скелет имеет $E = 3n$ ребер, из случая (b) теоремы 3.4 получаем

$$\text{vol}(\Pi_n) < 5v_{tet} \cdot n - 4v_{tet}. \quad (9)$$

Отметим, что $5v_{tet} = 5,074705$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Неравенство

$$5v_{tet} \cdot n - 4v_{tet} < \frac{3}{2}v_{oct} \cdot n - 2v_{oct}$$

имеет место при

$$n > \frac{2v_{oct} - 4v_{tet}}{\frac{3}{2}v_{oct} - 5v_{tet}}.$$

Подставляя вместо указанных констант их приближенные значения, получаем, что оценка из формулы (9) улучшает оценку из формулы (8) при $n > 7,760616$, т. е. при $n \geq 8$.

Формула объема идеальной прямоугольной гиперболической n -антипризмы $A(n)$ установлена в [12]. Используя эту формулу, получаем

$$\text{vol}(\Pi_n) < 2 \text{vol}(A(n)) = 4n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right].$$

При этом $\text{vol}(A(n))$ асимптотически эквивалентен $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$ при $n \rightarrow \infty$.

4.3. Двухвершинные пирамиды. Рассмотрим многогранник W_n , $n \geq 4$, который получается из пирамиды P_n следующим образом. Раздвоим вершину пирамиды P_n , заменив ее на две новые и соединив их ребром. Затем одну из новых вершин соединим с двумя смежными между собой вершинами основания, а вторую новую вершину соединим с оставшимися $n - 2$ вершинами основания. В результате основанием W_n по-прежнему остается n -угольник, а его боковая

поверхность состоит из двух четырехугольников и $n-2$ треугольников, как изображено на рис. 4 для $n = 6$. Многогранник W_n будем называть *двухвершинной пирамидой*. Очевидно, W_4 является треугольной призмой Π_3 . В этом смысле семейство двухвершинных пирамид W_n можно рассматривать как обобщение рассмотренных выше семейств пирамид и призм.

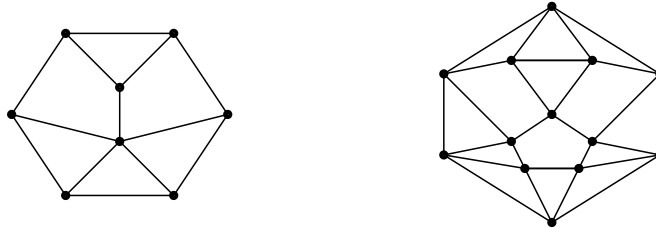


Рис. 4. Двухвершинная пирамида W_6 и скрученная антипризма $A(6)^*$.

Срединным графом для 1-скелета двухвершинной пирамиды W_n является 1-скелет многогранника $A(n)^*$, который был введен в работе [15] и назван *скрученной антипризмой* (см. рис. 4 для $n = 6$). Арифметичность скрученных антипризм была исследована в недавнем препринте [28]. В частности, скрученная антипризма $A(6)^*$ неарифметична. При $n \geq 5$ двухвершинная пирамида W_n имеет $E = 2n + 1$ ребер, $V_3 = n + 1$ трехвалентных вершин и $p_3 = n - 2$ треугольных граней. Из случая (а) теоремы 3.4 получаем следующую оценку:

$$\text{vol}(W_n) \leq 2v_{tet} \left(2n + 1 - \frac{(n-2) + (n+1) + 8}{4} \right) = 3v_{tet} \cdot n - \frac{3}{2}v_{tet}.$$

Поскольку ректификацией многогранника W_n является многогранник $A(n)^*$, то

$$\text{vol}(W_n) \leq \text{vol}(A(n)^*)$$

Как показано в [15], объем скрученной антипризмы выражается через объем антипризмы следующим образом:

$$\text{vol}(A(n)^*) = \text{vol}(A(n-1)) + A(3),$$

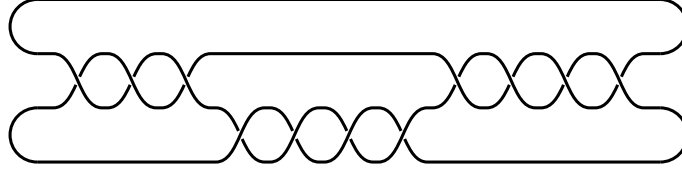
и значит, $\text{vol}(A(n)^*)$ асимптотически эквивалентен $\frac{1}{2}v_{oct} \cdot n$ при $n \rightarrow \infty$.

5. Оценка объема зацепления через число скручиваний

Объемом гиперболического узла или зацепления $K \subset S^3$ будем называть объем гиперболического многообразия $S^3 \setminus K$. В этом разделе построим новые верхние оценки объемов узлов и зацеплений через комбинаторные параметры его диаграммы.

Прежде всего напомним ранее известные оценки, иллюстрируя их на примере двухмостового узла $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$, диаграмма которого приведена на рис. 5. Эта диаграмма соответствует разложению в цепную дробь $\frac{55}{17} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4}}$ и является *нормальной формой Конвея* двухмостового узла $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ [29, 30]. Вычисляя объем с помощью компьютерной программы *SnapPy* [31], получаем $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) = 10,117141$.

По-видимому, первая известная оценка объема гиперболического узла K через число перекрестков $c(K)$ в его диаграмме была получена в диссертации

Рис. 5. Диаграмма двухмостового узла $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$.

Адамса [32]. Там было показано, что если узел K отличен от узла восьмерка 4_1 , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4c(K) - 16). \quad (10)$$

Напомним, что $\text{vol}(S^3 \setminus 4_1) = 2v_{tet}$. Поскольку $c(\mathbf{b}(\frac{55}{17})) = 11$, неравенство в формуле (10) дает оценку $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 28 \cdot v_{tet} = 28,418348$.

В [33] Адамс улучшил оценку из формулы (10) следующим образом: если $c(K) \geq 5$, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{oct} \cdot (c(K) - 5) + 4 \cdot v_{tet}. \quad (11)$$

Из неравенства (11) получаем $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 26,078932$.

Следующее семейство оценок объемов узлов и зацеплений связано с числом скручиваний в его диаграмме. *Скручиванием* в диаграмме D узла или зацепления K будем называть максимальную по длине цепочку из последовательно идущих двугольных областей (рис. 6).



Рис. 6. Скручивание длины пять в диаграмме.

Эквивалентно, скручивание можно понимать как цепочку из нескольких последовательных полуоборотов на двух нитях, причем все полуобороты направлены в одну сторону: либо положительную, либо отрицательную. Количество полуоборотов в скручивании будем называть *длиной скручивания*. Число скручиваний в диаграмме D обозначим через $t(D)$. Например, для диаграммы, изображенной на рис. 5, число скручиваний $t = 3$.

В приложении к статье Лакенби [18] Агол и Терстон показали, что объем любого гиперболического зацепления K можно оценить через число скручиваний $t(D)$ в его диаграмме D следующим образом:

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (t(D) - 1). \quad (12)$$

Более того, данная оценка является асимптотически точной. Из неравенства (12) получаем $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) \leq 20 \cdot v_{tet} = 20,29882$.

В работе [19] Дасбах и Цветкова использовали дополнительную информацию о скручивании для улучшения оценки Агола и Терстона. Для диаграммы D зацепления K обозначим через $t_i = t_i(D)$ число скручиваний длины i , $i \geq 1$. Отметим, что $t(D) = \sum_{i \geq 1} t_i(D)$. Обозначим через $g_i = g_i(D)$ число скручиваний длины не менее i , $i \geq 1$. Согласно [19, теорема 2.3], если D — приведенная альтернированная диаграмма гиперболического альтернированного зацепления K , то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4t_1 + 6t_2 + 8t_3 + 10g_4 - a), \quad (13)$$

где $a = 10$, если $g_4 \neq 0$, $a = 7$, если $t_3 \neq 0$, $a = 6$ иначе. Позднее в работе [34] Дасбах и Цветкова доказали, что оценка из формулы (13) верна и для случая, когда диаграмма не является альтернированной.

Адамс [20, теорема 3.1] улучшил результат Дасбаха и Цветковой следующим образом. Пусть K — гиперболическое зацепление, допускающее альтернированную приведенную D диаграмму, у которой $c(D) \geq 5$ и $t(D) \geq 3$. Предположим также, что K отлично от зацепления Борромеевы кольца 6_2^3 . Тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < t_1 \cdot v_{oct} + t_2 \cdot 6v_{tet} + t_3 \cdot 16\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right) + t_4 \cdot 20\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) + g_5 \cdot 10v_{tet} - a, \quad (14)$$

где

$$a = \begin{cases} 7v_{oct} - 10v_{tet}, & \text{если } g_2 = 0, \\ 11v_{tet}, & \text{если } g_3 = 0 \text{ и } t_2 \geq 1, \\ 32\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right) + 5v_{tet} - v_{oct} - 14\Lambda\left(\frac{\pi}{7}\right), & \text{если } g_4 = 0 \text{ и } t_3 \geq 1, \\ 40\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) + 12\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) - 2v_{tet} - 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) - 18\Lambda\left(\frac{\pi}{9}\right), & \text{если } g_5 = 0 \text{ и } t_4 \geq 1, \\ 4v_{tet} + 12\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) + 60\Lambda\left(\frac{\pi}{10}\right) - 54\Lambda\left(\frac{\pi}{9}\right), & \text{если } g_5 \geq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Вычислив указанные в формулах (14) и (15) значения функции Лобачевского с точностью до шести знаков, получим неравенство

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < 3,663863 \cdot t_1 + 6,089646 \cdot t_2 + 7,854977 \cdot t_3 + 9,237551 \cdot t_4 + 10,149416 \cdot g_5 - a, \quad (16)$$

где величина a принимает следующие значения:

$$a = \begin{cases} 15,497263, & \text{если } g_2 = 0, \\ 11,164351, & \text{если } g_3 = 0 \text{ и } t_2 \geq 1, \\ 10,088228, & \text{если } g_4 = 0 \text{ и } t_3 \geq 1, \\ 10,287338, & \text{если } g_5 = 0 \text{ и } t_4 \geq 1, \\ 12,111063, & \text{если } g_5 \geq 1. \end{cases} \quad (17)$$

Отметим, что из формул (14)–(17) следует оценка $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) < 16,0426$.

Следующие оценки объема альтернированного узла через коэффициенты его полинома Джонса получили Дасбах и Ли [35]. Пусть K — простой альтернированный узел, не являющийся торическим. Пусть его полином Джонса имеет вид

$$V_K(t) = a_n t^n + a_{n+1} t^{n+1} \dots + a_{m-1} t^{m-1} + a_m t^m.$$

Тогда

$$v_{oct} \cdot \max\{|a_{m-1}|, |a_{n+1}| - 1\} \leq \text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (|a_{n+1}| + |a_{m-1}| - 1). \quad (18)$$

Согласно [36] полином Джонса для $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ имеет вид

$$V(t) = t^3 - t^4 + 3t^5 - 5t^6 + 7t^7 - 8t^8 + 9t^9 - 8t^{10} + 6t^{11} - 4t^{12} + 2t^{13} - t^{14}.$$

Следовательно, имеют место оценки

$$2 \cdot v_{oct} \leq \text{vol}\left(S^3 \setminus \mathbf{b}\left(\frac{55}{17}\right)\right) \leq 20 \cdot v_3.$$

Рассматриваемый в качестве примера узел $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$ принадлежит к классу двухмостовых зацеплений, который достаточно хорошо изучен. Напомним [30],

что для взаимно простых целых чисел p и q таких, что $p \geq 2$ и $0 < q < p$, определено двухмостовое зацепление $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$. Если p нечетное, то $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$ является узлом. Если p четное, то $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$ является 2-компонентным зацеплением. Диаграмма зацепления $\mathbf{b}(p, q)$ строится по разложению рационального числа $\frac{p}{q}$ в цепную дробь. А именно, если $\frac{p}{q} = [a_1, \dots, a_k]$, где

$$[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}},$$

то $\mathbf{b}(\frac{p}{q})$ имеет диаграмму, как на рис. 7, в зависимости от четности или нечетности k , где $a_1, \dots, a_k$ указывают число полуоборотов на двух нитях. Диаграммы двухмостовых узлов и зацеплений, приведенные на рис. 7, называют *диаграммами Конвея*.

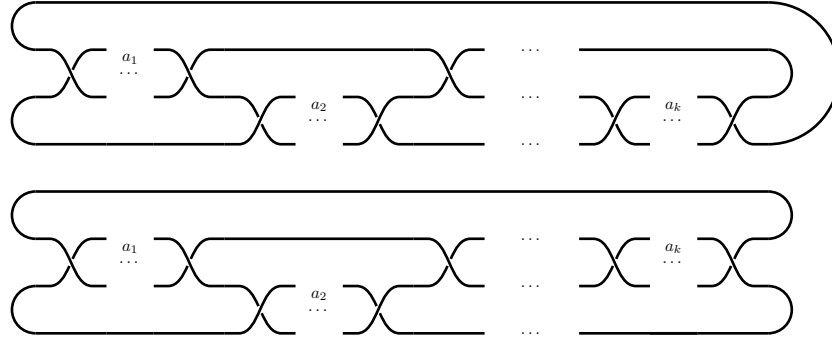


Рис. 7. Диаграммы Конвея для случаев четного и нечетного k .

Для объемов двухмостовых зацеплений в [37, теорема В.3] были получены следующие верхняя и нижняя оценки. Пусть D — приведенная альтернированная диаграмма двухмостового зацепления K , тогда

$$2v_{tet} \cdot t(D) - 2,7066 \leq \text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 2v_{oct} \cdot (t(D) - 1). \quad (19)$$

Эти оценки использовались в [38] для оценки сложности по Матвееву для гиперболических трехмерных многообразий, представляемых как разветвленные накрытия двухмостовых узлов и зацеплений. Доказательство верхней оценки основано на методе из [18], состоящем в переходе к аугментации двухмостового зацепления (см. подробнее в доказательстве теоремы 5.1). Применяя оценки из формулы (18) к $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$, получаем

$$6 \cdot v_{tet} - 2,7066 \leq \text{vol}\left(S^3 \setminus \mathbf{b}\left(\frac{55}{17}\right)\right) \leq 4 \cdot v_{oct}.$$

Вернемся к рассмотрению произвольных гиперболических узлов и зацеплений. В теореме 5.1 получим неравенство, которое улучшает оценки из формул (12) и (14), если число скручиваний в диаграмме зацепления достаточно велико.

Теорема 5.1. Пусть D — диаграмма гиперболического зацепления K , имеющая $t(D)$ скручиваний, и каждое скручивание имеет длину не менее двух. Если $t(D) > 8$, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10 \cdot v_{tet} \cdot (t(D) - 1, 4). \quad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим по K такое зацепление L , что $\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L)$, и оценим объем многообразия $S^3 \setminus L$, разбив его на идеальные прямоугольные многогранники.

ШАГ 1. Пусть D — диаграмма зацепления K , имеющая $t = t(D)$ скручиваний. Обозначим длины скручиваний через $n_1, n_2, \dots, n_t$. Аналогично [18] и [21, гл. 7] построим по диаграмме D новое зацепление следующим образом. Если $|n_i| \geq 2$, то заменим максимально возможное число полных оборотов $\lfloor \frac{n_i}{2} \rfloor$ в i -м скручивании, $i = 1, \dots, t$, новой компонентой зацепления, которая охватывает это скручивание. Если $|n_i| = 1$, то просто добавим новую компоненту, которая охватывает скручивание. Полученное зацепление J называют *полной аугментацией* зацепления K (см. [39]). Таким образом, J имеет на $t(D)$ компонент больше, чем исходное зацепление K . Новые компоненты в J будем далее называть *вертикальными*. Отметим, что исходное зацепление K может быть получено хирургиями Дена на вертикальных компонентах. Например, диаграмма узла $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$, приведенная на рис. 5, имеет скручивания длины 3, 4 и 4. Соответствующее ему зацепление J_4 имеет четыре компоненты, оно изображено на рис. 8.

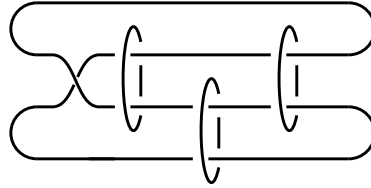


Рис. 8. Четырехкомпонентное зацепление J_4 .

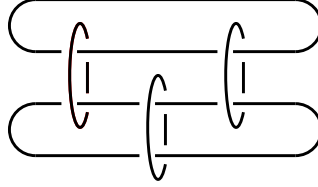
Три из четырех компонент зацепления J_4 вертикальны, и хирургии на этих компонентах дают узел $\mathbf{b}(\frac{55}{17})$. Следовательно, $\text{vol}(S^3 \setminus \mathbf{b}(\frac{55}{17})) < \text{vol}(S^3 \setminus J_4)$.

ШАГ 2. Если скручивание в D имело нечетную длину, то в диаграмме зацепления J от него останется один полуоборот. Перейдем от зацепления J к зацеплению L , не имеющему таких полуоборотов. Для этого применим нужное число раз *преобразование Адамса*, приведенное на рис. 9. Полученное зацепление L называют *полной аугментацией без полуоборотов* зацепления K (см., например, [40]).

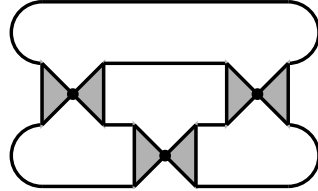
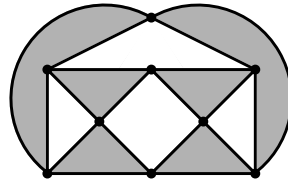


Рис. 9. Преобразование Адамса.

Как показал Адамс [41, следствие 5.1], применение этого преобразования сохраняет свойство зацепления быть гиперболическим и не изменяет объем, следовательно, $\text{vol}(S^3 \setminus J) = \text{vol}(S^3 \setminus L)$. Отметим, что зацепления J и L имеют одинаковое число вертикальных компонент и L не имеет полуоборотов в диаграмме. Например, зацепление L_5 , полученное преобразованием Адамса из зацепления J_4 , приведено на рис. 10, оно имеет 5 компонент, три из которых вертикальные.

Рис. 10. Пятикомпонентное зацепление L_5 .

ШАГ 3. Следуя методу из [18], представим $S^3 \setminus L$ как объединение двух экземпляров идеального прямоугольного гиперболического многогранника. Сначала заменим каждую вертикальную компоненту зацепления L парой треугольников с общей вершиной, как указано на рис. 11 для зацепления L_5 . При этом назовем красными ребра, соответствующие треугольникам, а черными — ребра, соединяющие треугольники.

Рис. 11. Замена вертикальных компонент зацепления L_5 парами треугольников.Рис. 12. Многогранник P_5 для L_5 .

Стянем каждое черное ребро в точку и обозначим полученный многогранник через P . Поскольку каждое черное ребро инцидентно двум 3-валентным вершинам, после стягивания черных ребер появятся новые 4-валентные вершины, которые будем называть *черными*. В итоге все вершины многогранника P 4-валентны, из них $t(D)$ являются красными и $2t(D)$ — черными. Таким образом, P имеет $V = 3t(D)$ вершин и не менее чем $2t(D)$ треугольных граней, которые при двухцветной шахматной раскраске граней многогранника окажутся покрашенными в один цвет. Как отмечено в [18], многогранник P является идеальным прямоугольным и $\text{vol}(S^3 \setminus L) = 2 \text{vol}(P)$. Многогранник P_5 , соответствующий диаграмме зацепления L_5 , приведен на рис. 12.

Как и в доказательстве леммы 3.1, рассмотрим объединение DP бипирамид, полученных удвоением пирамид с общей вершиной v , разбивающих P . Объем DP в два раза больше объема P и поэтому совпадает с $\text{vol}(S^3 \setminus L)$. Для $n \geq 4$ каждая n -угольная бипирамида является объединением n идеальных тетраэдров. Каждую 3-угольную бипирамиду, соответствующую одной из $2t(D)$ треугольных граней одного цвета, разобьем на два тетраэдра. Остальные 3-угольные бипирамиды будем считать разбитыми на 3 тетраэдра. Так как число вершин $V = 3t(D) > 24$, то (см. доказательство п. (b) леммы 3.3) точку v можно выбрать так, что сумма размеров четырех граней, смежных с v , будет не

меньше чем 16. Получим оценку

$$\text{vol}(DP) \leq 4v_{tet} \cdot \left(V - \frac{2t(D) + k}{4} \right),$$

где k — число тетраэдров, соответствующих вырожденным бипирамидам. Оценим величину k . Вершина v смежна двум треугольникам, которые раскрашены в один цвет в двухцветной шахматной раскраске граней многогранника P . Двум бипирамидам, которые имеют в качестве оснований эти треугольники, соответствуют 4 вырожденных тетраэдра. Две другие грани, смежные с v , могут быть любого размера, но их общее количество сторон не меньше 10. Значит, две бипирамиды, которые имеют в качестве оснований данные две грани, соответствуют не менее чем 10 вырожденным тетраэдрам. Отсюда получаем, что $k \geq 4 + 10 = 14$, следовательно,

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L) = \text{vol}(DP) \leq 4v_{tet} \cdot \left(3t(D) - \frac{2t(D) + 14}{4} \right),$$

что завершает доказательство теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [19] получена оценка, учитывающая число Δ треугольников в многограннике P , построенном по зацеплению K :

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq v_{tet} \cdot (4t_1 + 6t_2 + 8t_3 + 10g_4 - a - \Delta).$$

Уточним аналогичным образом формулу (19). Пусть многогранник P , построенный по зацеплению K , имеет $\Delta + 2t(D)$ треугольников, тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot \left(t(D) - 1, 3 - \frac{\Delta}{10} \right). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Пусть зацепление K имеет диаграмму D с $t(D) > 8$ скручивающими. Тогда оценка из формулы (21) улучшает оценку из формулы (12).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Пусть зацепление K имеет такую альтернированную приведенную диаграмму D , что $t(D) > 8$ и все скручивания имеют длину не менее 5, т. е. $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = 0$. Тогда оценка из формулы (21) улучшает оценку из формулы (14). В самом деле, сравнивая эти оценки, получаем

$$10v_{tet}(t(D) - 1, 4) < 10v_{tet}t(D) - 12,111063,$$

поскольку $14v_{tet} = 14,209174$.

Отметим, что кроме верхних оценок объемов гиперболических зацеплений через число скручиваний существует несколько нижних оценок. В качестве примера приведем оценку, установленную в [42]. Пусть зацепление K имеет такую простую альтернированную приведенную диаграмму D , что $t(D) \geq 2$ и все скручивания имеют длину не менее 7, т. е. $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_6 = 0$. Тогда

$$0,70735 \cdot (t(D) - 1) < \text{vol}(S^3 \setminus K). \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Оценку из теоремы 5.1 можно уточнить, если имеется информация о том, каких грани, кроме $2t(D)$ треугольных, имеются в многограннике P , построенном по диаграмме D . Напомним, что при двухцветной шахматной раскраске $2t(D)$ треугольников имеют один цвет, назовем его *темным*, а остальные многоугольники — другой цвет, назовем его *светлым*. Обозначим через f_n , $n \geq 3$, число светлых n -угольников в P . Например, для многогранника P , приведенного на рис. 12, $f_3 = 3$, $f_4 = 2$, $f_n = 0$, $n \geq 5$.

Следствие 5.2. Пусть D — диаграмма гиперболического зацепления K . Пусть f_n — число светлых n -угольников в идеальном прямоугольном многограннике P , построенном по полной аугментации без полуоборотов для зацепления K . Тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq (4t(D) - 8)v_{tet} + 2 \sum_{n \geq 3} n f_n \Lambda\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы 3.1, воспользуемся тем, что объем n -угольной бипирамиды не превосходит $2n\Lambda(\frac{\pi}{n})$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Coxeter H. S. M. Discrete groups generated by reflections // Ann. Math. 1934. V. 35, N 2. P. 588–621.
2. Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Геометрия–2. Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1988. Т. 29. С. 5–146.
3. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.
4. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 2. С. 256–260.
5. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 2007. V. 57, N 3. P. 825–882.
6. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bul. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
7. Винберг Э. Б. Объемы неевклидовых многогранников // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 2. С. 17–46.
8. Kellerhals R. On the volume of hyperbolic polyhedra // Math. Ann. 1989. V. 285. P. 541–569.
9. Kashaev R. M. The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm // Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 269–275.
10. Cho Y., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra // Discrete Comput. Geom. 1999. V. 22. P. 347–366.
11. Murakami J., Yano M. On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron // Commun. Anal. Geom. 2005. V. 13, N 2. P. 379–400.
12. Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds. Collected works of William Thurston P. with commentary. V. IV. With a preface by Kerckhoff S. P. Ed. by Farb B., Gabai D. and Kerckhoff S. P. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2022.
13. Belletti G. The maximum volume of hyperbolic polyhedra // Trans. Am. Math. Soc. 2021. V. 374. P. 1125–1153.
14. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & geometric topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
15. Egorov A., Vesnin A. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space // Chebyshevskii Sb. 2020. V. 21, N 2. P. 65–83.
16. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2020. V. 52. P. 565–576.
17. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
18. Lackenby M. The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88. P. 204–224.
19. Dasbach O., Tsvietkova A. A refined upper bound for the hyperbolic volume of alternating links and the colored Jones polynomial // Math. Res. Lett. 2015. V. 22. P. 1047–1060.
20. Adams C. Bipyramids and bounds on volumes of hyperbolic links // Topology Appl. 2017. V. 222. P. 100–114.
21. Purcell J. S. Hyperbolic knot theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2020. (Graduate Stud. Math.; V. 209).
22. Bao X., Bonahon F. Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space // Bull. Soc. Math. France. 2002. V. 130, N 3. P. 457–491.
23. Ushijima A. A volume formula for generalized hyperbolic polyhedra // Math. Appl. 2006. V. 581. P. 249–265.

24. Atkinson C. Two-sided combinatorial volume bounds for non-obtuse hyperbolic polyhedra // *Geometriae Dedicata*. 2011. V. 153. P. 177–211.
25. Kellerhals R. A polyhedral approach to the arithmetic and geometry of hyperbolic chain link complements // *J. Knot Theory Ramif.* 2023. V. 32, N 7. 2350052.
26. Meyer J.S., Millichap C., Trapp R. Arithmeticity and hidden symmetries of fully augmented pretzel link complements // *New York J. Math.* 2020. V. 26. P. 149–183.
27. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B. D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere // *Discrete Math.* 2005. V. 305. P. 33–54.
28. Bogachev N., Guschin D., Vesnin A. Arithmeticity of ideal hyperbolic right-angled polyhedra and hyperbolic link complements. <https://arxiv.org/abs/2307.07000>.
29. Rolfsen D. Knots and links. Houston, TX, 1976. (Math. Lecture Ser.; V. 7).
30. Kawachi A. A survey of knot theory. Basel: Birkhäuser, 1996.
31. SnapPy, a computer program available at <https://snappy.math.uic.edu>.
32. Adams C. Hyperbolic structures on link complements. Ph.D. thesis. University of Wisconsin, 1983.
33. Adams C. Triple crossing number of knots and links // *J. Knot Theory Ramif.* 2013. V. 22, N 2. 1350006.
34. Dasbach O., Tsvietkova A. Simplicial volume of links from link diagrams // *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 2019. V. 166, N 1. P. 75–81.
35. Dasbach O. T., Lin X.-S. A volumish theorem for the Jones polynomial of alternating knots // *Pacific J. Math.* 2007. V. 231, N 2. P. 279–291.
36. Livingston C., Moore A. H. KnotInfo: table of knot invariants. Available at <http://knotinfo.math.indiana.edu>.
37. Guéritaud F., Futer D. On canonical triangulations of once-punctured torus bundles and two-bridge link complements // *Geom. Topol.* 2006. V. 10. P. 1239–1284.
38. Petronio C., Vesnin A. Two-sided bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links // *Osaka J. Math.* 2009. V. 46. P. 1077–1095.
39. Purcell J. S. An introduction to fully augmented links // *Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory. Contemp. Math.* 2011. V. 541. P. 205–220.
40. Kwon A. Fully augmented links in the thickened torus. Preprint version available at <https://arxiv.org/abs/2007.12773>.
41. Adams C. Thrice-punctured spheres in hyperbolic 3-manifolds // *Trans. Am. Math. Soc.* 1985. V. 287. P. 645–656.
42. Futer D., Kalfagianni E., Purcell J. S. Dehn filling, volume, and the Jones polynomial // *Trans. Am. Math. Soc.* 2008. V. 78, N 3. P. 429–464.

Поступила в редакцию 18 июля 2023 г.

После доработки 26 февраля 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-00001-7553-1269),
 Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148),
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
 Новосибирский государственный университет,
 ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vesnin@math.nsc.ru, a.egorov2@g.nsu.ru

УДК 517.518+517.54

О ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

Аннотация. Работа посвящена исследованию задачи о граничном соответствии для последовательности гомеоморфизмов, изменяющих емкость конденсаторов контролируемым образом. Для изучения совместного граничного поведения указанных отображений введены емкостные метрики в последовательности областей, обладающей невырожденным ядром, посредством пополнения по которым к последовательности областей присоединяются новые элементы, называемые граничными. В качестве следствия получены достаточные условия глобальной равномерной сходимости последовательности гомеоморфизмов, а также приведены некоторые приложения к задачам математической теории упругости.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.305

Ключевые слова: квазиконформный анализ, простые концы, емкость конденсатора, емкостная метрика, отображения с конечным искажением.

Введение

Конструкция простых концов, введенная Каратеодори [1], позволила исследовать граничное поведение плоского конформного отображения в ситуации, когда оно задано на области с нерегулярной границей. В работах [2–7] данная теория развивается на плоскости и в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ (в работе [7] приведена обширная библиография по обсуждаемому вопросу). В [8] описано ее обобщение применительно к последовательности плоских конформных отображений круга, в рамках которого изучено поведение последовательностей вида $\{f_n(z_n)\}$, где $\{f_n : Q \rightarrow B_n\}$ — последовательность отображений единичного круга Q на области B_n , $\{z_n\}$ — последовательность внутренних точек круга Q , сходящаяся к некоторой точке $z_0 \in \partial Q$ (см. также монографию [9], где рассматривается более общая ситуация). В работе [10] представлен подход к описанию граничного соответствия для пространственного гомеоморфизма класса $\mathcal{Q}_{q,p}$ в терминах емкостных метрик.

Идея исследования граничного поведения состоит в том, чтобы

- (1) построить метрику, ассоциированную с геометрией отображения;
- (2) пополнить область по этой метрике;
- (3) продолжить отображение на присоединенную границу, т. е. доопределить отображение на добавившихся при пополнении элементах;

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

© 2024 Водопьянов С. К., Павлов С. В.

- (4) в том случае, когда известна связь евклидовой и присоединенной границ, описать граничное поведение отображения в терминах евклидовой метрики.

В работе рассматривается последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$, удовлетворяющих емкостному неравенству

$$\text{cap}^{1/q}(\theta_j(E); L_q^1(D_j)) \leq K \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D'_j))$$

для всех конденсаторов E в D'_j и всех $j \in \mathbb{N}$ с некоторой константой $K < \infty$. Здесь все D'_j, D_j — области в $\mathbb{R}^n$, $n-1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$. Мы вводим емкостную метрику в последовательности областей и рассматриваем два подхода к определению граничных элементов, т. е. к пополнению возникающего метрического пространства. Первый подход, основанный на стандартной конструкции Хаусдорфа пополнения метрического пространства, представляет собой прямолинейное обобщение идей работы [10] и дает описание граничного поведения предельного для ϑ гомеоморфизма θ_0 , заданного на ядре D'_0 последовательности областей (D'_j) . Вторым подходом исходит из альтернативного способа пополнения и приводит к характеристике предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$, где $y_j \in D'_j$. Устанавливается связь между указанными подходами.

1. Предварительные сведения

Символом d будем обозначать евклидову метрику в пространстве $\mathbb{R}^n$:

$$d(y^1, y^2) = ((y_1^1 - y_1^2)^2 + \dots + (y_n^1 - y_n^2)^2)^{1/2},$$

где $y^1 = (y_1^1, \dots, y_n^1)$ и $y^2 = (y_1^2, \dots, y_n^2)$ — точки из $\mathbb{R}^n$. Также будем всегда предполагать, что $n \geq 2$.

Областью будем называть непустое открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$. Связный компакт в $\mathbb{R}^n$, состоящий более чем из одной точки, будем называть *континуумом*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [9]. Пусть дана последовательность областей $\mathcal{D}' = (D'_j)_{j=1}^\infty$ такая, что некоторый шар $B(a, r)$, $r > 0$, содержится в почти всех (п. в.) D'_j , т. е. во всех D'_j за исключением, быть может, лишь конечного их числа. *Невырожденным ядром последовательности областей $\mathcal{D}'$ относительно точки a* называется наибольшая по включению область D'_0 среди областей D' , удовлетворяющих условиям:

- (1) $a \in D'$;
- (2) если компакт F содержится в D' , то F содержится в D'_j при п. в. j .

Нетрудно убедиться, что при наличии шара $B(a, r)$ из определения 1 ядро последовательности областей относительно точки a существует [11, 12]. Обратим внимание на то, что ядро зависит от точки a : например, ядра последовательности областей

$$D'_j = (-1; 1)^2 \setminus (\{0\} \times [-1 + 2^{-j}; 1 - 2^{-j}])$$

относительно точек $(-1/2, 0)$ и $(1/2, 0)$ суть $(-1; 0) \times (-1; 1)$ и $(0; 1) \times (-1; 1)$ соответственно. В то же время если D'_0 — невырожденное ядро последовательности областей $\mathcal{D}'$ относительно точки a , то D'_0 является ядром последовательности $\mathcal{D}'$ относительно любой точки $b \in D'_0$. В дальнейшем, говоря о ядре последовательности областей, мы предполагаем существование шара $B(a, r)$ из определения 1 с каким-нибудь центром a и радиусом $r > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть задана последовательность областей $\mathcal{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 . *Мультиконтинуумом в последовательности областей $\mathcal{D}'$* будем называть последовательность $\mathcal{F} = (F_j)_{j=1}^\infty$ континуумов $F_j \subset D'_j$, для которой в ядре D'_0 найдется континуум F_0 , к которому (F_j) сходится по метрике Хаусдорфа¹⁾.

Если $\mathcal{F}$ и F_0 — соответственно мультиконтинуум и континуум из определения 2, то будем говорить, что F_0 — *континуум в ядре, соответствующий мультиконтинууму $\mathcal{F}$* .

Предложение 1. Пусть заданы последовательность областей $\mathcal{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 и точка $y \in \partial D'_0$. Тогда любая окрестность точки y имеет непустое пересечение с бесконечно многими границами $\partial D'_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда найдется положительное число r такое, что для п. в. j пересечения $B(y, r) \cap \partial D'_j$ пустые. Поскольку y принадлежит границе области D'_0 , то найдется точка $z \in B(y, r) \cap D'_0$. Согласно определению ядра $z \in B(y, r) \cap D'_j$ для п. в. j . Так как для каждого достаточно большого j одновременно выполнены соотношения

$$B(y, r) \cap \partial D'_j = \emptyset \text{ и } B(y, r) \cap D'_j \neq \emptyset,$$

то $B(y, r) \subset D'_j$ для п. в. j . Из того, что $B(y, r)$ имеет непустое пересечение с ядром D'_0 , следует включение $B(y, r) \subset D'_0$, чего быть не может, ведь y — граничная точка области D'_0 . $\square$

Обозначим через $\mathcal{O}(D')$ систему открытых подмножеств области D' , обладающую следующими свойствами:

- (1) $D' \in \mathcal{O}(D')$ и если куб Q содержится в D' со своим замыканием, то $Q \in \mathcal{O}(D')$;
- (2) если $\{U_l \in \mathcal{O}(D')\}$ — конечный дизъюнктивный набор, то $\bigcup_l U_l \in \mathcal{O}(D')$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Отображение $\Phi : \mathcal{O}(D') \rightarrow [0; \infty]$ называется *квазиаддитивной функцией множества*, если

- (1) для всякой точки $y \in D'$ существует положительное число $\delta(y)$ такое, что $\overline{Q}(y, \delta(y)) \subset D'$ и $0 < \Phi(Q(y, \delta)) < \infty$ для всех $\delta \in (0; \delta(y))$;
- (2) для всякого конечного дизъюнктивного набора $\{U_l \in \mathcal{O}(D')\}$ открытых множеств таких, что $\bigcup_l U_l \subset U$, где $U \in \mathcal{O}(D')$, верно неравенство

$$\sum_l \Phi(U_l) \leq \Phi(U).$$

Отображение $\varphi \in W_{1, \text{loc}}^1(D; \mathbb{R}^n)$ называется *отображением с конечным искажением*, если $D\varphi = 0$ п. в. на множестве $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана, где $D\varphi = (\partial\varphi_i/\partial x_j)_{i,j=1}^n$.

Пусть в области D' задан конденсатор $E = (F_1, F_0)$: пара непересекающихся континуумов $F_1, F_0 \subset D'$. Непрерывную функцию u класса $W_{1, \text{loc}}^1(D')$ будем называть *допустимой для E в D'* , если $u(y) = 1$ для $y \in F_1$, $u(y) = 0$ для $y \in F_0$ и $0 \leq u(y) \leq 1$ для $y \in D'$.

¹⁾Расстояние по Хаусдорфу между множествами A и B определяется как точная нижняя грань множества всех чисел $r > 0$ таких, что замкнутая r -окрестность A содержит B и замкнутая r -окрестность B содержит A .

Емкость конденсатора $E = (F_1, F_0)$ в пространстве $L_p^1(D')$, $1 \leq p < \infty$, определяется как величина

$$\text{cap}(E; L_p^1(D')) = \inf_u \int_{D'} |\nabla u(x)|^p dx,$$

где инфимум берется по всем допустимым для конденсатора E в области D' функциям $u \in L_p^1(D')$.

Теорема 1 [13]. Пусть $\varphi : D \rightarrow D'$ — гомеоморфизм областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, где $n \geq 2$. Следующие утверждения эквивалентны:

- (1) для любого кубического конденсатора $E = (\overline{Q}(y, r), \partial Q(y, R))$, $r < R$, в D' с прообразом $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(\overline{Q}(y, r)), \varphi^{-1}(\partial Q(y, R)))$ в D выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \text{cap}^{1/q}(\varphi^{-1}(E); L_q^1(D)) \\ & \leq \begin{cases} K_p \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D')), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}(Q(y, R) \setminus \overline{Q}(y, r))^{1/\sigma} \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D')), & 1 < q < p < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $K_p < \infty$ — положительная постоянная, а $\Psi_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на системе открытых подмножеств области D' , включающей в себя объединения всех конечных дизъюнктивных наборов кубических колец $Q(y, R) \setminus \overline{Q}(y, r)$ и кубов $Q(y, r)$, содержащихся в D' со своими замыканиями;

- (2) гомеоморфизм φ принадлежит классу Соболева $W_{q,\text{loc}}^1(D)$, имеет конечное искажение и операторная функция искажения

$$K_{q,p}(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{1/p}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

принадлежит $L_\sigma(D)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ при $1 < q < p < \infty$ и $\sigma = \infty$ при $1 < q = p < \infty$;

- (3) оператор композиции $\varphi^* : L_p^1(D') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(D') \rightarrow L_q^1(D)$, определенный по правилу $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, является ограниченным;
- (4) для любого конденсатора $E = (F_1, F_0)$ в D' с прообразом $\varphi^{-1}(E) = (\varphi^{-1}(F_1), \varphi^{-1}(F_0))$ в D выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & \text{cap}^{1/q}(\varphi^{-1}(E); L_q^1(D)) \\ & \leq \begin{cases} \tilde{K}_p \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D')), & 1 < q = p < \infty, \\ \tilde{\Psi}_{q,p}(D' \setminus (F_0 \cup F_1))^{1/\sigma} \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D')), & 1 < q < p < \infty, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, $\tilde{K}_p < \infty$ — положительная постоянная, а $\tilde{\Psi}_{q,p}$ — некоторая ограниченная квазиаддитивная функция множества, определенная на некоторой системе открытых подмножеств области D' , включающей в себя объединения всех конечных дизъюнктивных наборов множеств вида $D' \setminus (F_1 \cup F_0)$, где (F_1, F_0) — конденсатор в D' , и кубов $Q(y, r)$, содержащихся в D' со своими замыканиями.

Равносильность утверждений (1)–(4) сохраняется при $1 = q \leq p < \infty$ и $n = 2$, если в условии (1) неравенства выполнены также для конденсаторов $E = (F_1, F_0)$ в D' , имеющих один из двух следующих видов:

$$F_1 = \partial([a - r, a + r] \times [b; c]), \quad F_0 = \{a\} \times [b + r; c - r], \quad 2r < c - b;$$

$$F_1 = \partial([b; c] \times [a - r, a + r]), \quad F_0 = [b + r; c - r] \times \{a\}, \quad 2r < c - b.$$

Если выполнено одно из условий (1)–(4), то величина

$$\sup_E \frac{\text{cap}^{1/q}(\varphi^{-1}(E); L_q^1(D))}{\text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D'))},$$

где супремум берется по всем конденсаторам E в D' , обладающим положительной емкостью в пространстве $L_p^1(D')$, оценивается сверху через $\|K_{q,p}(\cdot, \varphi) | L_\sigma(D)\|$.

Непосредственно из определения емкости следует

Предложение 2 (монотонность емкости). Пусть в области D' содержится конденсатор (F_1, F_0) . Пусть еще $\tilde{D}'$ — область, содержащая D' , и $\tilde{F}_1, \tilde{F}_0$ — континуумы такие, что $\tilde{F}_1 \subset F_1, \tilde{F}_0 \subset F_0$. Тогда

$$\text{cap}(\tilde{F}_1, \tilde{F}_0; L_p^1(D')) \leq \text{cap}(F_1, F_0; L_p^1(D')) \leq \text{cap}(F_1, F_0; L_p^1(\tilde{D}')).$$

Следующая лемма позволяет установить топологическую эквивалентность евклидовой и емкостных метрик. В [10, лемма 2.1] она доказана в случае, когда S_1 и S_0 — замкнутые шары, а континуумы $T_{0,j}$ попарно совпадают.

Лемма 1. Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$, S_1 и S_0 — непересекающиеся компакты в D' , $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. Пусть задана последовательность конденсаторов $\{(T_{1,j}, T_{0,j})\}$ в D' таких, что $T_{1,j} \subset S_1, T_{0,j} \subset S_0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Если $\liminf_j \text{diam } T_{0,j} > 0$, то соотношение

$$\lim_j \text{cap}(T_{1,j}, T_{0,j}; L_p^1(D')) = 0 \quad (1)$$

выполняется в том и только том случае, когда

$$\lim_j \text{diam } T_{1,j} = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость докажем от противного.

(1.1) Пусть выполнено (1), а условие (2) нарушается: $\liminf_j \text{diam } T_{1,j} > 0$.

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что предел $\lim_j \text{diam } T_{1,j}$ положителен.

Фиксируем произвольные точки $y_{1,j} \in T_{1,j}$ и $y_{0,j} \in T_{0,j}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как точки последовательности $\{y_{i,j}\}_{j=1}^\infty$, $i = 0, 1$, принадлежат компактному множеству S_i , то, переходя дважды к подпоследовательностям, можно считать, что существуют пределы $\lim_j y_{i,j} = y_i \in S_i$, $i = 0, 1$. Пусть $r \in (0, \liminf_j \text{diam } T_{0,j})$ —

число такое, что $B(y_i, r) \Subset D'$, $i = 0, 1$. Положим $B_1 = B(y_1, r)$, а $B_0 = B(y_0, r)$.

В силу [14, лемма 3] существует область Джона $\Omega \in J(\alpha, \beta)$, компактно вложенная в D' , с некоторыми положительными параметрами α и β , зависящими от D' и шаров B_1, B_0 , которая содержит в себе их замыкания. В области Ω имеем следующее неравенство Пуанкаре [15, теоремы 4 и 9]²⁾:

$$\|u - c_u | L_{p^*}(\Omega)\| \leq C \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n (\text{diam } \Omega)^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{p^*}} \|\nabla u | L_p(\Omega)\|, \quad (3)$$

²⁾ В приводимом неравенстве $u \in W_p^1(\Omega)$.

в котором $p^* \in [n; \infty)$ — произвольное число при $p = n$ и $p^* = \frac{np}{n-p}$ при $p < n$, а c_u и C — постоянные, причем $C > 0$ не зависит от u , α и β .

При выполнении (1) существует последовательность функций $u_j \in C(D') \cap L_p^1(D')$, допустимых для емкости $\text{cap}(T_{1,j}, T_{0,j}; L_p^1(D'))$, для которых

$$u_j|_{T_{1,j}} = 1, \quad u_j|_{T_{0,j}} = 0, \quad 0 \leq u_j \leq 1 \quad \text{и} \quad \|\nabla u_j\|_{L_p(D')} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Так как $u_j \in W_p^1(\Omega)$, из неравенства Пуанкаре (3) выводим, что $\|u_j - c_{u_j}\|_{L_{p^*}(\Omega)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Последовательность чисел c_{u_j} не может быть неограниченной, так как ввиду неравенства Пуанкаре и того, что $0 \leq u_j \leq 1$, $|\Omega| < \infty$, последовательность $\|\nabla u_j\|_{L_p(\Omega)}$ была бы также неограниченной. Поэтому, переходя к подпоследовательности, можно предполагать, что последовательность чисел c_{u_j} сходится к некоторому $c_0 \in \mathbb{R}$.

Так как Ω — ограниченная область, по неравенству Гёльдера имеем

$$\|u_j - c_0\|_{L_p(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда получаем, что $\|u_j - c_0\|_{W_p^1(\Omega)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Поскольку существует ограниченный оператор продолжения $W_p^1(B_0) \rightarrow W_p^1(\mathbb{R}^n)$ [16; 17, гл. 4.4, теорема 1], можно продолжить ограничения $(u_j - c_0)|_{B_0}$ до функций $v_j \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, $v_j|_{B_0} = (u_j - c_0)|_{B_0}$, таких, что $\|v_j\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. Отсюда при условии $c_0 \neq 0$ выводим

$$\|c_0^{-1}u_j - 1\|_{W_p^1(B_0)} \leq |c_0^{-1}| \|v_j\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad j \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Пусть $[T_{0,j} \cap \overline{B_0}]_{y_{0,j}}$ — компонента связности пересечения $T_{0,j} \cap \overline{B_0}$, содержащая точку $y_{0,j}$. Из (4) выводим, что емкости континуумов $[T_{0,j} \cap \overline{B_0}]_{y_{0,j}}$ в пространстве $W_p^1(\mathbb{R}^n)$ (совпадающем с пространством бесселевых потенциалов $\mathcal{L}_p^1(\mathbb{R}^n)$ при $p > 1$) стремятся к нулю при $j \rightarrow \infty$, поскольку $(-c_0)^{-1}v_j(y) = 1$ для всех $y \in T_{0,j} \cap \overline{B_0}$ и всех $j \in \mathbb{N}$. Для $n - 1 < p \leq n$ последнее возможно только при условии $\text{diam}[T_{0,j} \cap \overline{B_0}]_{y_{0,j}} \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, ввиду соотношения [18, гл. II, § 3.4, следствие 2; 19, теорема 4.1; 20, теорема 9]

$$\text{diam}[T_{0,j} \cap \overline{B_0}]_{y_{0,j}} \leq C(n, p) \text{Cap}_{(1,p)}(T_{0,j} \cap \overline{B_0}). \quad (5)$$

Последний вывод противоречит неравенству $\text{diam}[T_{0,j} \cap \overline{B_0}]_{y_{0,j}} \geq r/2 > 0$ при $j \geq j_0$, где j_0 выбрано так, что $y_{0,j} \in B(y_0, r/2)$ при всех $j \geq j_0$. В случае $p = 1$, $n = 2$ неравенство (5) — это частный случай утверждения [21, лемма 6]. Следовательно, c_0 может равняться только нулю.

(1.2) Проводя аналогичные рассуждения для шара B_1 , заключаем, что существует последовательность непрерывных функций $v_j \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$, совпадающих с u_j на B_1 : $v_j|_{B_1} = u_j|_{B_1}$, таких, что

$$\|v_j\|_{W_p^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0.$$

Поскольку $v_j(y) = 1$ при $y \in T_{1,j} \cap \overline{B_1}$, отсюда вытекает, что емкости континуумов $[T_{1,j} \cap \overline{B_1}]_{y_{1,j}}$ в пространстве бесселевых потенциалов стремятся к нулю. Последнее возможно только в том случае, если $\lim_j \text{diam}[T_{1,j} \cap \overline{B_1}]_{y_{1,j}} = 0$, что также вытекает из оценки [18, гл. II, § 3.4; 19, теорема 4.1; 20, теорема 9]

$$\text{diam}[T_{1,j} \cap \overline{B_1}]_{y_{1,j}} \leq C(n, p) \text{Cap}_{(1,p)}(T_{1,j} \cap \overline{B_1}).$$

В то же время по предположению левая часть этого неравенства отделена от нуля, т. е. получено противоречие.

Перейдем к достаточности. Докажем, что

$$\text{cap}(T_{1,j}, T_{0,j}; L_p^1(D')) \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \quad (6)$$

когда $\text{diam } T_{1,j} \rightarrow 0$.

Положим $R = \text{dist}(S_1, S_0)$. Фиксируем точки $y_{1,j} \in T_{1,j}$, $j \in \mathbb{N}$. Так как диаметры континуумов $T_{1,j}$ стремятся к нулю, то $T_{1,j} \subset B(y_{1,j}, r_j)$, где $r_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$. При достаточно больших j верны неравенства

$$\text{diam } T_{1,j} < r_j < R/2.$$

Из свойства монотонности емкости следует, что

$$\text{cap}(T_{1,j}, T_{0,j}; L_p^1(D')) \leq \text{cap}(B(y_{1,j}, r_j), \partial B(y_{1,j}, R); L_p^1(\mathbb{R}^n)).$$

Значит, достаточно доказать, что правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Последнее является следствием известной формулы [18, гл. II, § 3.1, с. 54, 55] при $p > 1$, и частным случаем из [21, лемма 6] при $p = 1$:

$$\begin{aligned} \text{cap}(\overline{B(0, r)}, \partial B(0, R); L_p^1(\mathbb{R}^n)) \\ = \begin{cases} \sigma_{n-1} r^{n-1} & \text{при } p = 1 \\ \sigma_{n-1} \left(\frac{n-p}{n-1}\right)^{p-1} (r^{\frac{p-n}{p-1}} - R^{\frac{p-n}{p-1}})^{1-p} & \text{при } 1 < p < n, \\ \sigma_{n-1} \left(\ln \frac{R}{r}\right)^{1-n} & \text{при } p = n, \end{cases} \end{aligned}$$

где $r \in (0, R)$, а σ_{n-1} — площадь единичной $(n-1)$ -мерной сферы в пространстве $\mathbb{R}^n$. Полагая в этой формуле $r = r_j$, получаем (6). $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [10]. Пусть заданы область D' и континуум $F \subset D'$ такие, что дополнение $D' \setminus F$ связно, и число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. Для $y^1, y^2 \in D' \setminus F$ *емкостная метрическая функция* задается равенством

$$\rho_{p,F}(y^1, y^2) = \inf_{\gamma} \text{cap}^{1/p}(\gamma([0; 1]), F; L_p^1(D')),$$

где инфимум берется по всем непрерывным кривым $\gamma : [0; 1] \rightarrow D' \setminus F$ с концевыми точками y^1 и y^2 .

В [10] показано, что если $n-1 < p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$, то $\rho_{p,F}$ — метрика на множестве $D' \setminus F$, топологически эквивалентная евклидовой метрике d . Кроме того, в [10] приведены более детальная история вопроса и более обширная библиография по обсуждаемому вопросу.

Ниже вместо $\gamma([0; 1])$ будем писать γ , что не должно привести к разночтению.

2. Емкостная метрика и граничные элементы в последовательности областей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть в последовательности областей $\mathcal{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 заданы мультиконтинуум $\mathcal{F} = (F_j)$ и соответствующий ему в ядре континуум F_0 такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Пусть также задано число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$. *Емкостная метрическая функция в последовательности $\mathcal{D}'$* определяется как

$$\varrho_{p,\mathcal{F}}(y^1, y^2) = \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2),$$

где $y^1, y^2 \in D'_0 \setminus F_0$, а каждая ρ_{p, F_j} — метрика на $D'_j \setminus F_j$ из определения 4, в котором взяты $D' = D'_j$, $F = F_j$.

Сделаем несколько замечаний относительно определения функции $\varrho_{p, \mathcal{F}}$.

1. Поскольку D'_0 — ядро $\mathcal{D}'$, а последовательность (F_j) сходится к F_0 по Хаусдорфу, то из того, что y^1 и y^2 принадлежат $D'_0 \setminus F_0$, следует, что $y^1, y^2 \in D'_j \setminus F_j$, $j \geq j_0$, для некоторого $j_0 \geq 1$. Это обеспечивает корректность определения 5.

2. Естественно предположить, что функцию $\varrho_{p, \mathcal{F}}$ следует задавать на последовательностях вида $(y_j \in D'_j \setminus F_j)$. Более подробное рассмотрение данного вопроса отложим до разд. 4. Пока лишь обращаем внимание читателя на предположение 5.

3. В работе [6] для построения простых концов последовательности областей, определяемых посредством убывающих цепей относительных континуумов, p -емкость последовательности конденсаторов (E_j) задается формулой

$$\overline{\lim}_j \operatorname{cap} (E_j; L_p^1(D'_j)),$$

однако в рамках работы [6] метризация пространства простых концов представляется затруднительной.

Предложение 3. Пусть $n - 1 < p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$, $\mathcal{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей с невырожденным ядром D'_0 , $\mathcal{F} = (F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathcal{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные.

Тогда $\varrho_{p, \mathcal{F}}$ — метрика на множестве $D'_0 \setminus F_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2) < \infty$ для произвольных $y^1, y^2 \in D'_0 \setminus F_0$. Пусть $\gamma : [0; 1] \rightarrow D'_0 \setminus F_0$ — кривая, соединяющая y^1 и y^2 , $\overline{V} \subset D'_0 \setminus \gamma$ — замыкание некоторой связной окрестности V континуума F_0 . Тогда $\gamma \subset D'_j$, $F_j \subset \overline{V} \subset D'_j$ для п. в. j . Отсюда по свойству монотонности получаем

$$\begin{aligned} \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2) &\leq \overline{\lim}_j \operatorname{cap}^{1/p} (\gamma, F_j; L_p^1(D'_j)) \\ &\leq \overline{\lim}_j \operatorname{cap}^{1/p} (\gamma, \overline{V}; L_p^1(D'_j)) \leq \operatorname{cap}^{1/p} (\gamma, \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)) < \infty. \end{aligned}$$

(1) Поскольку ρ_{p, F_j} — метрики на $D'_j \setminus F_j$, для $y \in D'_0 \setminus F_0$ имеем

$$\varrho_{p, \mathcal{F}}(y, y) = \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y, y) = 0.$$

Пусть теперь $y^1, y^2 \in D'_0 \setminus F_0$ — различные точки, $\overline{B} \subset D'_0 \setminus F_0$ — замкнутый шар с центром в y^1 , не содержащий y^2 , $\overline{V} \subset D'_0 \setminus \overline{B}$ — замыкание некоторой связной окрестности V континуума F_0 . Пусть также $\Omega \Subset D'_0$ — область, содержащая $\overline{B}$ и $\overline{V}$. Для кривой γ с началом в точке y^1 и пересекающей границу шара $\overline{B}$ определим кривую $\gamma_{\overline{B}} = \gamma|_{[0; t_\gamma]}$, где $t_\gamma = \inf\{t \in [0; 1] \mid \gamma(t) \notin \operatorname{int} \overline{B}\} > 0$.

Предположим, что $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2) = 0$. Тогда найдутся число $j_0 \in \mathbb{N}$ и кривые $\gamma_j : [0; 1] \rightarrow D'_j \setminus F_j$, $j \geq j_0$, такие, что $\gamma_j(0) = y^1$, $\gamma_j(1) = y^2$ и $\operatorname{cap}(\gamma_j, F_j; L_p^1(D'_j)) \rightarrow 0$. Имеем

$$\lim_j \operatorname{cap}^{1/p} ((\gamma_j)_{\overline{B}}, F_j; L_p^1(\Omega)) \leq \lim_j \operatorname{cap}^{1/p} (\gamma_j, F_j; L_p^1(D'_j)) = 0.$$

Поскольку $\lim_j \text{diam } F_j > 0$ в силу сходимости (F_j) к F_0 по Хаусдорфу, применяя лемму 1 с $S_1 = \overline{B}$ и $S_0 = \overline{V}$, получаем отсюда, что $\text{diam}(\gamma_j)_{\overline{B}} \rightarrow 0$. Получено противоречие с тем, что диаметры кривых $(\gamma_j)_{\overline{B}}$ отделены от нуля радиусом шара $\overline{B}$.

(2), (3). Пусть $y^1, y^2, y^3 \in D'_0 \setminus F_0$. Тогда начиная с некоторого j_0 точки y^1, y^2 и y^3 принадлежат всем $D'_j \setminus F_j$. Поскольку каждая ρ_{p, F_j} есть метрика на $D'_j \setminus F_j$, то

$$\begin{aligned} \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2) &= \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y^1, y^2) = \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y^2, y^1) = \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^2, y^1), \\ \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^3) &= \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y^1, y^3) \leq \overline{\lim}_j (\rho_{p, F_j}(y^1, y^2) + \rho_{p, F_j}(y^2, y^3)) \\ &\leq \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y^1, y^2) + \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y^2, y^3) = \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2) + \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^2, y^3). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 4. Пусть выполняются условия предложения 3. Если $y, y^m \in D'_0 \setminus F_0$, $m \in \mathbb{N}$, то верно следующее: $d(y, y^m) \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $\overline{V} \subset D'_0$ — замыкание связной окрестности F_0 , не содержащее точку y . Пусть $r^m = d(y, y^m) \rightarrow 0$. Тогда при достаточно больших m в силу леммы 1 справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^m, y) &\leq \overline{\lim}_j \text{cap}^{1/p}(\overline{B}(y, r^m), F_j; L_p^1(D'_j)) \\ &\leq \text{cap}^{1/p}(\overline{B}(y, r^m), \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$. Предположим, что $\{y^m\}$ не сходится к y в евклидовой метрике d . Тогда после перехода к подпоследовательности и перенумерации выберем шар $\overline{B} = \overline{B}(y, r)$ такой, что $\overline{B} \subset D'_0 \setminus F_0$ и $y^m \notin \overline{B}$, $m \in \mathbb{N}$. Пусть снова $\overline{V} \subset D'_0 \setminus \overline{B}$ — замыкание некоторой связной окрестности F_0 , $\Omega \Subset D'_0$ — область, содержащая $\overline{B}$ и $\overline{V}$. Тогда $\Omega \subset D'_j$ и $F_j \subset \overline{V}$ для п. в. j . Для каждого m существует последовательность кривых $(\gamma_j^m : [0; 1] \rightarrow D'_j \setminus F_j)_{j=1}^\infty$ такая, что $\gamma_j^m(0) = y$, $\gamma_j^m(1) = y^m$ для п. в. j и

$$2\varrho_{p, \mathcal{F}}(y, y^m) \geq \overline{\lim}_j \text{cap}^{1/p}(\gamma_j^m, F_j; L_p^1(D'_j)).$$

Далее, для каждого m существует число $j_m > j_{m-1}$ такое, что $\gamma_{j_m}^m$ соединяет точки y, y^m и

$$2\overline{\lim}_j \text{cap}^{1/p}(\gamma_j^m, F_j; L_p^1(D'_j)) \geq \text{cap}^{1/p}(\gamma_{j_m}^m, F_{j_m}; L_p^1(D'_{j_m})).$$

Из того, что $\Omega \subset D'_{j_m}$ для п. в. m , выводим

$$\begin{aligned} \text{cap}^{1/p}(\gamma_{j_m}^m, F_{j_m}; L_p^1(D'_{j_m})) &\geq \text{cap}^{1/p}((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(D'_{j_m})) \\ &\geq \text{cap}^{1/p}((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(\Omega)), \end{aligned}$$

где $(\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}$ определены, как в доказательстве предложения 3. Отсюда

$$\text{cap}^{1/p}((\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}}, F_{j_m}; L_p^1(\Omega)) \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty,$$

поскольку $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$. Следовательно, по лемме 1 с $S_1 = \overline{B}$, $S_0 = \overline{V}$ в силу того, что $\lim_j \text{diam } F_j > 0$, получаем $\text{diam}(\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}} \rightarrow 0$. Однако последнее противоречит оценкам $\text{diam}(\gamma_{j_m}^m)_{\overline{B}} \geq r > 0$. $\square$

Предложение 5. Пусть выполняются условия предложения 3. Пусть последовательности $(y_j^1 \in D'_j \setminus F_j)$, $(y_j^2 \in D'_j \setminus F_j)$ сходятся в евклидовой метрике к точкам $y^1, y^2 \in D'_0 \setminus F_0$ соответственно. Тогда верно равенство

$$\varrho_{p,\mathcal{F}}(y^1, y^2) = \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^1, y_j^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_j = d(y^1, y_j^1) \rightarrow 0$. Тогда в силу свойства монотонности и леммы 1 имеем

$$\overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y^1, y_j^1) \leq \overline{\lim}_j \text{cap}^{1/p}(\overline{B}(y^1, r_j), \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)) = 0,$$

где $\overline{V}$ — замыкание связной окрестности континуума F_0 , не содержащее y^1 .

Далее, в силу того, что ρ_{p,F_j} — метрики, при п. в. j имеем неравенство

$$\rho_{p,F_j}(y_j^1, y_j^2) \leq \rho_{p,F_j}(y_j^1, y^1) + \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \rho_{p,F_j}(y^2, y_j^2),$$

переходя в котором к верхнему пределу при $j \rightarrow \infty$, выводим

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^1, y_j^2) &\leq \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^1, y^1) + \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) + \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y^2, y_j^2) \\ &= \overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y^1, y^2) = \varrho_{p,\mathcal{F}}(y^1, y^2). \end{aligned}$$

Обратное неравенство $\overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^1, y_j^2) \geq \varrho_{p,\mathcal{F}}(y^1, y^2)$ может быть получено аналогичным образом. $\square$

Предложение 6. Пусть выполняются условия предложения 3. Пусть $\{y^m \in D'_0 \setminus F_0\}$ — фундаментальная в метрике $\varrho_{p,\mathcal{F}}$ последовательность, а y — ее частичный предел в топологии пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

- (1) $\varrho_{p,\mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$ и $d(y, y^m) \rightarrow 0$, если $y \in D'_0 \setminus F_0$;
- (2) $\text{dist}(y^m, F_0) = \inf_{z \in F_0} d(y^m, z) \rightarrow 0$, если $y \in F_0$;
- (3) $\text{dist}(y^m, \partial D'_0) \rightarrow 0$, если $y \in \partial D'_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Пусть $\{y^{m_l}\}$ — подпоследовательность, сходящаяся к y в евклидовой метрике. Тогда $\varrho_{p,\mathcal{F}}(y, y^{m_l}) \rightarrow 0$ и в силу фундаментальности $\{y^m\}$ имеем $\varrho_{p,\mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$. По предложению 4 верно также $d(y, y^m) \rightarrow 0$.

(2) Предположим противное, т. е. что $\text{dist}(y^m, F_0)$ не стремится к нулю. Тогда найдутся связные окрестности $U_1 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq U_2 \subseteq D'_0$ континуума F_0 и подпоследовательности $\{y_1^l\}$, $\{y_2^l\}$ последовательности $\{y^m\}$ такие, что $y_1^l \in V_1$ и $y_2^l \notin V_2$. Также аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 4, можно построить возрастающую последовательность номеров $\{j_l\}$ и последовательность кривых $\{\gamma^l : [0; 1] \rightarrow D'_{j_l} \setminus F_{j_l}\}$ такие, что $U_2 \subset D'_{j_l}$, $\gamma^l(0) = y_1^l$, $\gamma^l(1) = y_2^l$ для всех l и $\text{cap}(\gamma^l, F_{j_l}; L_p^1(D'_{j_l})) \rightarrow 0$ (отметим, что $\varrho_{p,\mathcal{F}}(y_1^l, y_2^l) \rightarrow 0$, так как последовательность $\{y^m\}$ фундаментальная).

Теперь для каждого l выберем по точке $t^l \in (0; 1)$ так, чтобы $\gamma^l(t^l) \in V_2 \setminus \overline{V_1}$ и $\gamma^l(t) \in V_2$ при $t \leq t^l$, что можно сделать, поскольку $y_1^l \in V_1$, $y_2^l \notin V_2$ и $\overline{V_1} \subset V_2$. Далее, рассмотрим кривые $(\gamma^l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}} = \gamma^l|_{[t_1^l; t_2^l]}$, где

$$t_1^l = \sup\{t < t^l \mid \gamma^l(t) \in V_1\} \in (0; t^l),$$

$$t_2^l = \inf\{t > t^l \mid \gamma^l(t) \notin V_2\} \in (t^l; 1).$$

Образы кривых $(\gamma^l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}$ содержатся в $\overline{V_2 \setminus V_1}$ и их диаметры оцениваются снизу через $\text{dist}(V_1, \partial V_2) > 0$, так как $\gamma^l(t_1^l) \in \partial V_1$, $\gamma^l(t_2^l) \in \partial V_2$. Согласно лемме 1, в

которой следует положить $S_1 = \overline{V_2 \setminus V_1}$ и $S_0 = \overline{U_1}$, это противоречит тому, что следующие емкости стремятся к нулю:

$$\text{cap}((\gamma^l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}, F_{j_l}; L_p^1(U_2)) \leq \text{cap}(\gamma^l, F_{j_l}; L_p^1(D'_{j_l})) \rightarrow 0.$$

(3) Если у последовательности $\{y^m\}$ есть какой-либо другой частичный предел z , то предположение $z \notin \partial D'_0$ в случае $z \in D'_0 \setminus F_0$ приводит к тому, что $d(z, y^m) \rightarrow 0$, а в случае $z \in F_0$ — к тому, что $y^m \rightarrow F_0$, чего быть не может. $\square$

Пусть, как и в предложении 3, заданы число $p \in (n-1; n]$ при $n > 2$ и $p \in [1; 2]$ при $n = 2$, равномерно ограниченная последовательность областей $\mathcal{D}' = (D'_j)$ с невырожденным ядром D'_0 , мультиконтинуум $\mathcal{F} = (F_j)$ в $\mathcal{D}'$ и соответствующий ему континуум $F_0 \subset D'_0$ такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные.

Опираясь на идеи работы [10], рассмотрим пополнение $(\mathcal{C}^{\text{ker}}_{\mathcal{D}'}, \varrho_{p, \mathcal{F}}^k)$ метрического пространства $(D'_0 \setminus F_0, \varrho_{p, \mathcal{F}})$ по стандартной конструкции Хаусдорфа³⁾. Отметим, что в ситуации, когда $D'_j = D'$ и $F_j = F$ для всех j , построенное таким образом пространство совпадает с пространством $\widetilde{D}'_{\rho, p}$ из [10, определение 2.14].

В дальнейшем для краткости будем использовать также символ $\mathcal{C}^k_{\mathcal{D}'}$ для обозначения пространства $\mathcal{C}^{\text{ker}}_{\mathcal{D}'}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Носителем $\mathcal{S}^k(h)$ элемента $h \in (\mathcal{C}^{\text{ker}}_{\mathcal{D}'}, \varrho_{p, \mathcal{F}}^k)$ называется совокупность всех частичных в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ пределов для всех фундаментальных в метрике $\varrho_{p, \mathcal{F}}$ последовательностей, входящих в класс h .

Нетрудно показать, что носитель $\mathcal{S}^k(h)$ каждого элемента h — замкнутое в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ множество.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Граничным элементом в последовательности областей $\mathcal{D}'$ будем называть элемент $h \in \mathcal{C}^{\text{ker}}_{\mathcal{D}'}$ такой, что $\mathcal{S}^k(h) \subset \partial D'_0$.

Из предложения 6 следует, что $\mathcal{S}^k(h) \cap \partial D'_0 \neq \emptyset$ в том и только том случае, когда h — граничный элемент в $\mathcal{D}'$, а также что носитель всякой точки $y \in D'_0 \setminus F_0$ ⁴⁾ представляет собой одноточечное множество $\{y\}$.

ПРИМЕР (исчезающая ручка). Положим

$$D'_j = (-2; 2)^2 \setminus ([1; 2 - j^{-1}] \times [-1; 1]).$$

Ядром последовательности $\mathcal{D}' = (D'_j)$ является область

$$D'_0 = (-2; 2)^2 \setminus ([1; 2] \times [-1; 1]).$$

³⁾Напомним конструкцию Хаусдорфа пополнения метрического пространства (M, ρ) . На множестве всех фундаментальных в M последовательностей введем отношение эквивалентности: фундаментальные последовательности $\{\xi^m \in M\}$ и $\{\eta^m \in M\}$ называются эквивалентными, если $\lim_m \rho(\xi^m, \eta^m) = 0$. Обозначим через $\widetilde{M}$ множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей в смысле данного отношения. Далее, зададим на $\widetilde{M} \times \widetilde{M}$ функцию $\widetilde{\rho}(\xi, \eta) = \lim_m \rho(\xi^m, \eta^m)$, где $\{\xi^m\} \in \xi \in \widetilde{M}$, $\{\eta^m\} \in \eta \in \widetilde{M}$. Тогда $\widetilde{\rho}$ определена корректно (т. е. фигурирующий в ее определении предел существует и не зависит от представляющих последовательностей $\{\xi^m\} \in \xi$ и $\{\eta^m\} \in \eta$) и является метрикой на $\widetilde{M}$, относительно которой пространство $\widetilde{M}$ полное. Отображение, сопоставляющее точке $\xi \in \widetilde{M}$ класс последовательностей, сходящихся к ξ , есть изометрическое вложение (M, ρ) в $(\widetilde{M}, \widetilde{\rho})$ такое, что образ M под его действием — плотное в $\widetilde{M}$ множество.

⁴⁾Как это обычно принято, будем отождествлять класс последовательностей, сходящихся к точке y , с самой точкой y .

Пусть $p \in [1; 2]$, $F_j = [-1; 0]^2$, $\mathcal{F} = (F_j)$. Тогда любые последовательности $\{y^m \in D'_0 \setminus F_0\}$, $\{z^m \in D'_0 \setminus F_0\}$, сходящиеся в топологии $\mathbb{R}^2$ к точкам $(2, 1)$ и $(2, -1)$ соответственно, являются фундаментальными в метрике $\varrho_{p, \mathcal{F}}$. Также легко видеть, что последовательности $\{y^m\}$ и $\{z^m\}$ эквивалентны и что $\mathcal{S}^k(h) = \{(2, 1), (2, -1)\}$, где $\{y^m\}, \{z^m\} \in h$.

Приведенный пример показывает, что носитель граничного элемента $h \in \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p$ в последовательности областей не обязан быть связным. Отсюда также можем видеть, что в общем случае естественного взаимно однозначного соответствия между граничными элементами в последовательности областей и граничными элементами в ядре может не быть.

3. Последовательности отображений, удовлетворяющих емкостному неравенству. Поведение предельного отображения на границе ядра

Рассмотрим равномерно ограниченную последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)_{j=1}^\infty$, удовлетворяющих емкостному неравенству с общей константой K . А именно, пусть для некоторых $n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$ неравенство

$$\text{cap}^{1/q}(\theta_j(E); L_q^1(D_j)) \leq K \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D'_j)) \quad (7)$$

выполняется для каждого конденсатора E в D'_j и каждого j . Пусть еще последовательность ϑ сходится локально равномерно в ядре D'_0 к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \rightarrow D$.

Поскольку граничное поведение последовательности ϑ будем исследовать в терминах пространства $\mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p$, определяемого как пополнение подмножества ядра $D'_0 \setminus F_0$ по емкостной метрике, для нас интересен вопрос о связи образа ядра $D = \theta_0(D'_0)$ с ядром последовательности $\mathcal{D} = (D_j)$. Известен следующий общий результат.

Лемма 2 [12, теорема 1]. Пусть $\mathcal{D}' = (D'_j)$ и $\mathcal{D} = (D_j)$ — последовательности областей и непустая область D' содержится в ядре последовательности $\mathcal{D}'$. Если последовательность гомеоморфизмов $(\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$ сходится локально равномерно в области D' к гомеоморфизму $\theta_0 : D' \rightarrow D$, то D содержится в ядре последовательности $\mathcal{D}$, при этом последовательность обратных отображений (θ_j^{-1}) сходится локально равномерно в D к обратному отображению θ_0^{-1} .

Обозначим через D_0 то ядро последовательности $\mathcal{D}$, которое содержит область D (подчеркнем, что ядро D_0 здесь берется относительно любой точки $\theta_0(a)$, $a \in D'_0$). В работе [22] в предположении о том, что последовательности прямых (θ_j) и обратных (θ_j^{-1}) отображений удовлетворяют емкостному неравенству с общей константой, получено равенство $D = D_0$, которое нельзя гарантировать в условиях леммы 2, если положить $D' = D'_0$.

Рассмотрим вопрос о поведении вблизи границы семейства отображений, удовлетворяющих емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми $n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$. Пусть в последовательности областей $\mathcal{D}'$, обладающей невырожденным ядром D'_0 , задан мультиконтинуум $\mathcal{F} = (F_j)$, которому соответствует континуум $F_0 \subset D'_0$, такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Тогда $\vartheta(\mathcal{F}) = (\theta_j(F_j))$ — мультиконтинуум в последовательности областей $\mathcal{D}$, а $\theta_0(F_0)$ — соответствующий ему континуум в ядре, содержащийся в D , такие, что дополнения $D_j \setminus \theta_j(F_j)$,

$j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Для $y \in D'_0 \setminus F_0$ положим $\vartheta(y) = \lim_j \theta_j(y) = \theta_0(y) \in D \setminus \theta_0(F_0)$. Согласно предложению 5 из неравенств

$$\rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y^1), \theta_j(y^2)) \leq K \rho_{p, F_j}(y^1, y^2),$$

вытекающих из (7), следует, что

$$\varrho_{q, \vartheta(\mathcal{F})}(\vartheta(y^1), \vartheta(y^2)) \leq K \varrho_{p, \mathcal{F}}(y^1, y^2).$$

Иными словами, последовательность ϑ задает K -липшицево отображение между пространствами $(D'_0 \setminus F_0, \varrho_{p, \mathcal{F}})$ и $(D_0 \setminus \theta_0(F_0), \varrho_{q, \vartheta(\mathcal{F})})$. Поэтому отображение ϑ может быть единственным образом продолжено по непрерывности до K -липшицевого отображения

$$\vartheta^k : (\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p, \varrho_{p, \mathcal{F}}^k) \rightarrow (\mathcal{C}^k \mathcal{D}_q, \varrho_{q, \vartheta(\mathcal{F})}^k).$$

По построению ϑ^k и определению носителя имеем следующую характеристику поведения предельного гомеоморфизма на границе ядра: для каждого элемента $h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$ и для каждой последовательности $\{y^m\} \in h$ выполняется

$$\theta_0(y^m) \rightarrow \mathcal{S}^k(\vartheta^k(h)).$$

Предложение 7. Пусть выполнены условия предложения 3. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$, удовлетворяющая емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми $n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$, и сходящаяся к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \rightarrow D$ локально равномерно в D'_0 .

Если h — граничный элемент в последовательности областей $\mathcal{D}'$, то носитель элемента $\vartheta^k(h)$ содержится в ∂D .

Доказательство. Пусть $\{y^m\} \in h$. Тогда последовательность $\{\theta_0(y^m)\}$ фундаментальна в метрике $\varrho_{q, \vartheta(\mathcal{F})}$. Пусть x — предел некоторой подпоследовательности $\{\theta_0(y^{m_i})\}$ последовательности $\{\theta_0(y^m)\}$. Если $x \in D$, то $y^{m_i} = \theta_0^{-1}(\theta_0(y^{m_i})) \rightarrow \theta_0^{-1}(x) \in D'_0$ в евклидовой метрике, поскольку θ_0 — гомеоморфизм. Это противоречит выбору $\{y^m\}$, так как $y^m \rightarrow \mathcal{S}^k(h) \subset \partial D'_0$. $\square$

Согласно предложениям 6, 7 ситуация, при которой $\mathcal{S}^k(\vartheta^k(h)) = \{x\}$, где $x \in D_0 \cap \partial D$, представляется наиболее простой: для $\{y^m\} \in h$ имеем сходимость $\theta_0(y^m) \rightarrow x$. Доказываемая ниже теорема 2 исключает такую возможность.

Теорема 2. Пусть $n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$, $\mathcal{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей, обладающая невырожденным ядром D'_0 . Пусть еще задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$, сходящаяся локально равномерно в D'_0 к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \rightarrow D$ и удовлетворяющая емкостному неравенству с общей константой K :

$$\text{cap}^{1/q}(\theta_j(E); L_q^1(D_j)) \leq K \text{cap}^{1/p}(E; L_p^1(D'_j))$$

для каждого конденсатора E в D'_j и каждого j .

Тогда D — это ядро последовательности областей $\mathcal{D} = (D_j)$.

Доказательство. Обозначим через D_0 ядро последовательности $\mathcal{D}$, содержащее D , существование которого обеспечивается леммой 2. Пусть еще

$\mathcal{F} = (F_j)$ — произвольный мультиконтинуум в $\mathcal{D}'$, которому в ядре D'_0 соответствует континуум F_0 , $V \in D'_0$ — связная окрестность F_0 , а $U \in D$ — окрестность $\theta_0(F_0)$.

Предположим, что $D \neq D_0$. Тогда существует $x \in D_0 \cap \partial D$. Так как $x \in D_0 \setminus \overline{U}$, то при некотором R имеем включение $\overline{B}(x, 2R) \subset D_0 \setminus \overline{U}$. Пусть $\Omega \in D_0$ — область, содержащая в себе $\overline{U}$ и $\overline{B}(x, 2R)$. Можем считать, что включения $\Omega \subset D_j$ и $\theta_j(F_j) \subset \overline{U}$ выполнены для всех j . Пусть последовательность $\{x^m \in (B(x, R) \cap D) \setminus \overline{U}\}$ сходится к x в евклидовой метрике. Положим $y^m = \theta_0^{-1}(x^m)$. Тогда $y^m \rightarrow \partial D'_0$. После перехода к подпоследовательности можем считать, что $y^m \rightarrow y \in \partial D'_0$. Пусть $r^m = 2 \operatorname{dist}(y^m, \partial D'_0)$. Тогда найдется замкнутый шар $\overline{B}(y, r)$, находящийся на положительном расстоянии от $\overline{V}$. В силу сходимостей $r^m \rightarrow 0$, $y^m \rightarrow y$ справедливы включения $\overline{B}(y^m, r^m) \subset \overline{B}(y, r)$, $m \geq m_0$, где m_0 — достаточно большое число. Также по выбору r^m имеем $B(y^m, r^m) \cap \partial D'_0 \neq \emptyset$, откуда в силу предложения 1 вытекает, что каждый шар $B(y^m, r^m)$ имеет непустое пересечение с бесконечно многими границами $\partial D'_j$.

Для каждого $m \geq m_0$ выберем достаточно большое число j_m , чтобы $y^m \in D'_{j_m}$, $\theta_{j_m}(y^m) \in B(x, R)$ и $B(y^m, r^m) \cap \partial D'_{j_m} \neq \emptyset$ ⁵⁾. При этом не требуется, чтобы последовательность $\{j_m\}$ была возрастающей.

Теперь рассмотрим кривые

$$\gamma^m : [0; 1] \rightarrow \overline{D'_{j_m}} \cap B(y^m, r^m), \quad m \geq m_0,$$

такие, что $\gamma^m(0) = y^m$, $\gamma^m((0; 1)) \subset D'_{j_m} \cap B(y^m, r^m)$, $\gamma^m(1) \in \partial D'_{j_m}$. Поскольку $r^m \rightarrow 0$, то

$$\operatorname{cap}(\gamma^m, \overline{V}'; L_p^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow 0.$$

Обозначим $\tilde{\sigma}^m(t) = \theta_{j_m}(\gamma^m(t))$ при $t \in [0; 1]$. Поскольку $\tilde{\sigma}^m(0) \in B(x, R)$, $\tilde{\sigma}^m(t) \rightarrow \partial D_{j_m}$ при $t \rightarrow 1$, и $\overline{B}(x, 2R) \subset D_{j_m}$, то $\tilde{\sigma}^m \cap \partial B(x, 2R) \neq \emptyset$. Определим еще

$$t^m = \inf\{t \in [0; 1] \mid \tilde{\sigma}^m(t) \notin B(x, 2R)\} \in (0; 1).$$

Положим $\sigma^m = \tilde{\sigma}^m|_{[0; t^m]}$. Тогда $\sigma^m : [0; t^m] \rightarrow \overline{B}(x, 2R)$ — кривая. По построению $\sigma^m(0) \in B(x, R)$ и $\sigma^m(t^m) \in \partial B(x, 2R)$, так что $\operatorname{diam} \sigma^m \geq R$ при $m \geq m_0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} \operatorname{cap}^{1/q}(\sigma^m, \theta_{j_m}(F_{j_m}); L_q^1(\Omega)) &\leq \operatorname{cap}^{1/q}(\sigma^m, \theta_{j_m}(F_{j_m}); L_q^1(D_{j_m})) \\ &\leq K \operatorname{cap}^{1/p}(\gamma^m|_{[0; t^m]}, F_{j_m}; L_p^1(D'_{j_m})) \leq K \operatorname{cap}^{1/p}(\gamma^m, \overline{V}; L_p^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Последнее согласно лемме 1 с $S_1 = \overline{B}(x, 2R)$ и $S_0 = \overline{U}$ противоречит тому, что $\operatorname{diam} \sigma^m \geq R$. Таким образом, предположение $D \neq D_0$ неверно. $\square$

В предложении 7 и теореме 2 установлено следующее описание поведения предельного отображения θ_0 вблизи границы ядра D'_0 .

Теорема 3. Пусть $\mathcal{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей, обладающая невырожденным ядром D'_0 , $\mathcal{F} = (F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathcal{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$, удовлетворяющая емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми

⁵⁾Такие числа найдутся, поскольку первые два из условий, налагаемых на j_m , выполняются для п. в. j , а третье — для бесконечно многих из них.

$n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$ и сходящаяся к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \rightarrow D_0$ локально равномерно в D'_0 .

Тогда

- (1) область D_0 — ядро последовательности $\mathcal{D} = (D_j)$;
- (2) если $h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$ — граничный элемент в последовательности областей $\mathcal{D}'$, то $\vartheta^k(h) \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}_q$ — граничный элемент в $\mathcal{D}$, т. е. $\mathcal{S}^k(\vartheta^k(h)) \subset \partial D_0$;
- (3) если $\{y^m\} \in h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$, то $\theta_0(y^m) \rightarrow \mathcal{S}^k(\vartheta^k(h))$.

4. Альтернативное представление граничных элементов

Следующей нашей целью станет исследование предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$, где $y_j \in D'_j \setminus F_j$, $j \in \mathbb{N}$. Конечно, не все последовательности (y_j) позволяют извлекать адекватную информацию о поведении последовательности отображений ϑ вблизи дополнения к ядру. Например, если $D'_j = B(0, 1)$, θ_j — тождественные отображения и (y_j) — последовательность, предельными точками которой являются все точки сферы $\partial B(0, 1)$, то можно сделать вывод лишь о том, что $(\theta_j(y_j))$ стремится к $\partial B(0, 1)$, чего слишком мало, особенно при имеющихся предположениях.

В первую очередь выделим наименьший набор последовательностей (y_j) , для которых рассмотрение последовательности $(\theta_j(y_j))$ приводит к получению разумного описания граничного поведения ϑ (далее станет ясен смысл этого неточного выражения). Еще одно необходимое требование, налагаемое на «подходящие» последовательности (y_j) , состоит в том, чтобы последовательности вида $(\theta_j(y_j))$ были «подходящими» в последовательности образов $\mathcal{D}$.

В действительности уже выделен некоторый набор последовательностей с описанными свойствами: последовательности, сходящиеся в евклидовой метрике к точкам множества $D'_0 \setminus F_0$. Конечно, каждая последовательность, отождествленная таким образом с внутренней точкой, локализуется внутри ядра, поэтому требуется *дополнить* этот набор. Но поскольку стандартная процедура пополнения приводит к описанию поведения предельного отображения θ_0 на границе ядра (в смысле п. (3) теоремы 3), для работы с совместным граничным поведением последовательности ϑ понадобится альтернативная конструкция. Идея состоит в том, чтобы представить пополнение области, снабженной емкостной метрикой, как замыкание множества постоянных последовательностей (y_0) , $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, в (полном) пространстве последовательностей вида $(y_j \in D'_j \setminus F_j)$, в котором расстояние между элементами (y_j^1) и (y_j^2) определяется как $\overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j^1, y_j^2)$. В доказываемой ниже лемме 3, носящей довольно общий характер, разрешаются все возникающие при этом технические тонкости.

Рассмотрим последовательность метрических пространств $((M_j, \rho_j))$ и произвольную последовательность $\xi^0 = (\xi_j^0) \in \prod_j M_j$. Обозначим

$$\mathcal{M}(\xi^0) = \left\{ \xi = (\xi_j) \in \prod_j M_j \mid \overline{\lim}_j \rho_j(\xi_j^0, \xi_j) < \infty \right\},$$

$$\rho(\eta, \zeta) = \overline{\lim}_j \rho_j(\eta_j, \zeta_j), \quad [\eta] = \{ \xi \in \mathcal{M}(\xi^0) \mid \rho(\xi, \eta) = 0 \},$$

где $\eta = (\eta_j)$, $\zeta = (\zeta_j) \in \mathcal{M}(\xi^0)$. Зададим на $\mathcal{M}(\xi^0)$ бинарное отношение:

$$\eta \sim_\rho \zeta, \text{ если } \rho(\eta, \zeta) = 0. \quad (8)$$

Лемма 3. Пусть $((M_j, \rho_j))$ — последовательность метрических пространств и $\xi^0 = (\xi_j^0) \in \prod_j M_j$. Тогда

- (1) $\mathcal{M}(\xi^0) = \mathcal{M}(\xi^1)$, если $\overline{\lim}_j \rho_j(\xi_j^1, \xi_j^0) < \infty$, где $\xi^1 = (\xi_j^1) \in \prod_j M_j$;
- (2) отношение (8) есть отношение эквивалентности на $\mathcal{M}(\xi^0)$, а $[\eta]$ — класс эквивалентности, содержащий последовательность η ;
- (3) $\rho(\eta, \zeta) = \rho(\tilde{\eta}, \tilde{\zeta})$, если $\eta \sim_\rho \tilde{\eta}$ и $\zeta \sim_\rho \tilde{\zeta}$, где $\eta, \tilde{\eta}, \zeta, \tilde{\zeta} \in \mathcal{M}(\xi^0)$;
- (4) $\zeta \in \mathcal{M}(\xi^0)$ и $\zeta \sim_\rho \eta$, если $\eta = (\eta_j) \in \mathcal{M}(\xi^0)$ и $\zeta = (\zeta_j)$ таковы, что $\overline{\lim}_j \rho_j(\eta_j, \zeta_j) = 0$;
- (5) функция ϱ , заданная на парах элементов из множества классов эквивалентности

$$\mathcal{M}(\xi^0)/\sim_\rho = \{[\eta] \mid \eta \in \mathcal{M}(\xi^0)\}$$

по правилу

$$\varrho([\eta], [\zeta]) = \rho(\eta, \zeta),$$

является метрикой, относительно которой $\mathcal{M}(\xi^0)/\sim_\rho$ — полное метрическое пространство.

Доказательство. Утверждения (1)–(4) проверяются непосредственно. Симметричность функции ρ и выполнение для нее неравенства треугольника следуют из ее определения. Конечность ρ следует из перечисленных свойств и определения множества $\mathcal{M}(\xi^0)$:

$$\rho(\eta, \zeta) \leq \rho(\eta, \xi^0) + \rho(\xi^0, \zeta) < \infty.$$

Поскольку множества значений функций ρ и ϱ совпадают, в силу своего определения ϱ тоже удовлетворяет перечисленным свойствам. Наконец, аксиома тождества для ϱ вытекает из задания отношения (8) на $\mathcal{M}(\xi^0)$. Таким образом, $(\mathcal{M}(\xi^0)/\sim_\rho, \varrho)$ — метрическое пространство.

Покажем его полноту. Пусть $\{[\xi^m] \in \mathcal{M}(\xi^0)/\sim_\rho\}$ — фундаментальная последовательность. После перехода к подпоследовательности и замены обозначений можем считать, что $\varrho([\xi^m], [\xi^{m+1}]) < 1/2^{m+1}$ при всех m . По определению ϱ это означает, что для каждого $m \geq 1$ найдется число $j_m > j_{m-1}$ такое, что при всех $j \geq j_m$ справедливо

$$\rho_j(\xi_j^m, \xi_j^{m+1}) < \frac{1}{2^{m+1}},$$

где $j_0 = 0$. Положим $\xi_j = \xi_j^m$ при $j_m \leq j < j_{m+1}$ и $m \geq 1$. Если $j_1 > 1$, то для $j < j_1$ выберем $\xi_j \in M_j$ произвольным образом. Покажем, что последовательность $\{[\xi^m]\}$ сходится к $[\xi]$, где $\xi = (\xi_j)$. Если $j_{m+m'} \leq j < j_{m+m'+1}$, то

$$\rho_j(\xi_j^m, \xi_j) = \rho_j(\xi_j^m, \xi_j^{m+m'}) \leq \sum_{l=1}^{m'} \rho_j(\xi_j^{m+l-1}, \xi_j^{m+l}) < \sum_{l=1}^{m'} \frac{1}{2^{m+l}} < \frac{1}{2^m},$$

где $\rho_j(\xi_j^{m+l-1}, \xi_j^{m+l}) < 1/2^{m+l}$ в силу того, что $j \geq j_{m+m'} > j_{m+l-1}$ при всех $l = 1, \dots, m'$. Отсюда при всех $j \geq j_{m+1}$ имеем

$$\rho_j(\xi_j^m, \xi_j) < \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, $\rho(\xi^m, \xi) \leq 1/2^m$, т. е. $\xi \in \mathcal{M}(\xi^0)$ и $\varrho([\xi^m], [\xi]) \leq 1/2^m \rightarrow 0$. $\square$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть выполнены условия предложения 3. А именно, пусть $n - 1 < p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq p \leq 2$ при $n = 2$, $\mathcal{D}' = (D'_j)$ — равномерно ограниченная последовательность областей с невырожденным ядром D'_0 , $\mathcal{F} = (F_j)$ — мультиконтинуум в $\mathcal{D}'$, F_0 — соответствующий ему континуум в ядре такие, что дополнения $D'_j \setminus F_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$, связные. Положим в лемме 3

$$(M_j, \rho_j) = (D'_j \setminus F_j, \rho_{p, F_j}), \quad \xi^0 = (z_0),$$

где $z_0 \in D'_0 \setminus F_0$ ⁶⁾, и обозначим

$$\varrho_{p, \mathcal{F}}^s = \varrho, \quad \mathcal{D}'(D'_0) = \mathcal{M}(\xi^0).$$

Пространство $\mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p = \mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$, снабжаемое метрикой $\varrho_{p, \mathcal{F}}^s$, определяется как замыкание множества $\{[(y_0)] \mid y_0 \in D'_0 \setminus F_0\}$ в $(\mathcal{D}'(D'_0)/\sim_\rho, \varrho_{p, \mathcal{F}}^s)$.

Применяя лемму 3 и определения метрик $\varrho_{p, \mathcal{F}}$ и $\varrho_{p, \mathcal{F}}^s$, выводим следующее.

1. Всякая постоянная последовательность (y_0) , $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, принадлежит $\mathcal{D}'(D'_0)$ при любой точке z_0 , что обеспечивает корректность определения 8.

2. Множество $\mathcal{D}'(D'_0)$ и, как следствие, $\mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$ не зависят от выбора $z_0 \in D'_0 \setminus F_0$ (здесь следует обратить внимание на конечность функции $\varrho_{p, \mathcal{F}}$).

3. Соответствие, сопоставляющее точке y_0 класс эквивалентности $[(y_0)]$, содержащий постоянную последовательность (y_0) , есть изометрическое вложение пространства $(D'_0 \setminus F_0, \varrho_{p, \mathcal{F}})$ в $(\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p, \varrho_{p, \mathcal{F}}^s)$, т. е.

$$\varrho_{p, \mathcal{F}}^s([(y_0^1)], [(y_0^2)]) = \varrho_{p, \mathcal{F}}(y_0^1, y_0^2)$$

для всех $y_0^1, y_0^2 \in D'_0 \setminus F_0$.

Из того, что $\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$ замкнутое в полном пространстве $\mathcal{D}'(D'_0)/\sim_\rho$, следует, что отображение $y_0 \mapsto [(y_0)]$ может быть продолжено до изометрии

$$i : (\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p, \varrho_{p, \mathcal{F}}^k) \rightarrow (\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p, \varrho_{p, \mathcal{F}}^s) \quad (9)$$

(определение $\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$ см. в разд. 2). Хотя построенное таким образом пространство $\mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$ изометрично пространству $\mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p$, такое представление пополнения множества $D'_0 \setminus F_0$, снабженного емкостной метрикой, приводит к другим наблюдениям при установлении связей с евклидовой геометрией, поскольку теперь мы имеем дело с другим запасом представляющих последовательностей.

Как показано в предложении 5, для всякой точки $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$ и произвольной последовательности $(y_j \in D'_j \setminus F_j)$ справедливо: если (y_j) сходится к y_0 в евклидовой метрике, то $\varlimsup_j \rho_{p, F_j}(y_0, y_j) = 0$. Так что всякая последовательность $(y_j \in D'_j \setminus F_j)$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, принадлежит классу $[(y_0)]$.

С этого момента отсутствие нижнего индекса будет обычно означать, что мы имеем дело с последовательностью: $y = (y_j)$, $y^m = (y_j^m)$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Для класса $Y \in \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$ определим его носитель $\mathcal{S}^s(Y)$ как совокупность всех частичных пределов в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ последовательности $y = (y_j \in D'_j \setminus F_j)$ для всех $y \in Y$.

⁶⁾Равенство $\xi^0 = (z_0)$ понимается в том смысле, что $\xi_j^0 = z_0$, если $z_0 \in D'_j \setminus F_j$, т. е. при п. в. j .

Предложение 8. Пусть выполнены условия предложения 3. Тогда для каждого $h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$ выполнено включение

$$\mathcal{S}^k(h) \subset \mathcal{S}^s(i(h)),$$

где i — изометрия (9). Более того, для всякой точки $y_0 \in \mathcal{S}^k(h)$ существует последовательность $(y_j \in D'_j \cap D'_0 \setminus (F_j \cup F_0)) \in i(h)$, сходящаяся к y_0 в евклидовой метрике. В частности, для всякого $Y \in \mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$ пересечение $\mathcal{S}^s(Y) \cap \overline{D'_0 \setminus F_0}$ непустое.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{y_0^m\} \in h$, сходящуюся к произвольной точке $y_0 \in \mathcal{S}^k(h)$ в топологии пространства $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяющую при каждом m неравенству

$$\varrho_{p,\mathcal{F}}(y_0^m, y_0^{m+1}) < \frac{1}{2^{m+1}}.$$

Поскольку i — изометрия, то

$$\varrho_{p,\mathcal{F}}^s(i(y_0^m), i(y_0^{m+1})) < \frac{1}{2^{m+1}}$$

для всех m . Пусть последовательность $y^m = (y_j^m) \in i(y_0^m)$ такова, что $y_j^m = y_0^m$ при всех $j \geq j_m^0$, где j_m^0 — число такое, что точка $y_0^m \in D'_0 \setminus F_0$ принадлежит всем $D'_j \setminus F_j$ при $j \geq j_m^0$. По определению $\varrho_{p,\mathcal{F}}^s$ это означает, что

$$\overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j^{m+1}) < \frac{1}{2^{m+1}} \text{ для всех } m.$$

Следовательно, для каждого $m \geq 1$ найдется $j_m > \max\{j_{m-1}, j_m^0\}$ такое, что при всех $j \geq j_m$ справедливо

$$\rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j^{m+1}) < \frac{1}{2^{m+1}},$$

где $j_0 = 1$. Положим $y_j = y_j^m = y_0^m$ при $j_m \leq j < j_{m+1}$ и $m \geq 1$. Если $j_1 > 1$, то для $j < j_1$ выберем $y_j \in D'_j \setminus F_j$ произвольным образом. Очевидно, что $y = (y_j)$ сходится к y_0 в евклидовой метрике.

Для $j_{m+m'} \leq j < j_{m+m'+1}$ имеем

$$\rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j) = \rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j^{m+m'}) \leq \sum_{l=1}^{m'} \rho_{p,F_j}(y_j^{m+l-1}, y_j^{m+l}) < \sum_{l=1}^{m'} \frac{1}{2^{m+l}} < \frac{1}{2^m},$$

где $\rho_{p,F_j}(y_j^{m+l-1}, y_j^{m+l}) < 1/2^{m+l}$ в силу того, что $j \geq j_{m+m'} > j_{m+l-1}$ при всех $l = 1, \dots, m'$. Отсюда для всех $j \geq j_{m+1}$ выводим

$$\rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j) < \frac{1}{2^m}.$$

Следовательно, $\overline{\lim}_j \rho_{p,F_j}(y_j^m, y_j) \leq 1/2^m$, $y \in \mathcal{D}'(D'_0)$ и

$$\varrho_{p,\mathcal{F}}^s(i(y^m), [y]) \leq 1/2^m \rightarrow 0.$$

Поскольку $i(y^m) \rightarrow i(h)$ в $\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$, то $[y] = i(h)$ и, таким образом, $y \in i(h)$. $\square$

В примере исчезающей ручки последовательности вида

$$y_j = (2 - j^{-1}/2, t), \quad t \in [-1; 1],$$

принадлежат классу $i(h)$, где $\mathcal{S}^k(h) = \{(2, 1), (2, -1)\}$. Отсюда можно вывести, что $\mathcal{S}^s(i(h)) = \{2\} \times [-1; 1] \neq \mathcal{S}^k(h)$. Также данный пример показывает, что носители элементов пространства $\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$ могут не содержаться в замыкании ядра.

Предложение 9. Пусть выполнены условия предложения 3 и $Y \in \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$. Тогда множество $\mathcal{S}^s(Y)$ связное и замкнутое и выполнено одно и только одно из следующих утверждений:

- (1) $\mathcal{S}^s(Y)$ представляет собой одноточечное множество, содержащееся в $D'_0 \setminus F_0$;
- (2) $\mathcal{S}^s(Y)$ содержится в F_0 ;
- (3) $\mathcal{S}^s(Y)$ имеет непустое пересечение с границей ядра $\partial D'_0$ и содержится вне D'_0 .

Доказательство. (1) Предположим, что $\mathcal{S}^s(Y)$ не является связным. Тогда для некоторых непересекающихся открытых в $\mathbb{R}^n$ множеств U и V , каждое из которых имеет непустое пересечение с $\mathcal{S}^s(Y)$, имеем $\mathcal{S}^s(Y) \subset U \cup V$. Пусть $y = (y_j) \in Y$ — последовательность, сходящаяся в евклидовой метрике к некоторой точке $y_0 \in \mathcal{S}^k(i^{-1}(Y)) \subset \mathcal{S}^s(Y)$. Для определенности можно считать, что $y_0 \in U$. Согласно определению $\mathcal{S}^s(Y)$ рассмотрим последовательность $z = (z_j) \in Y$, имеющую частичный предел, содержащийся в V . Тогда $z_j \in V$ для бесконечно многих j . При этом $y_j \in U$ для п. в. j . Найдется последовательность кривых $(\gamma_j : [0; 1] \rightarrow D'_j \setminus F_j)$ с концевыми точками y_j и z_j такая, что

$$\text{cap}^{1/p}(\gamma_j, F_j; L^1_p(D'_j)) \leq 2\rho_{p, F_j}(y_j, z_j).$$

На каждой кривой γ_j выберем по точке w_j со следующим условием: если $z_j \in V$ и $y_j \in U$, то $w_j \notin U \cup V$; в противном случае точка $w_j \in \gamma_j$ произвольная. Для $w = (w_j)$ в силу свойства монотонности имеем

$$\overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, w_j) \leq \overline{\lim}_j \text{cap}^{1/p}(\gamma_j, F_j; L^1_p(D'_j)) \leq 2\overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, z_j) = 0,$$

т. е. $w \sim_\rho y \in Y$. В то же время из построения w следует, что бесконечное число точек w_j лежит вне $U \cup V$. Поскольку $U \cup V$ открыто, некоторый частичный предел последовательности w не принадлежит $U \cup V$. Получено противоречие с тем, что $\mathcal{S}^s(Y) \subset U \cup V$.

(2) Покажем, что $\mathcal{S}^s(Y)$ замкнуто. Пусть $\{y_0^m \in \mathcal{S}^s(Y)\}$ сходится в евклидовой метрике к некоторой точке y_0 . Требуется показать, что существует последовательность $y^0 = (y_j^0) \in Y$, имеющая подпоследовательность, сходящуюся к y_0 . С самого начала можно считать, что $d(y_0, y_0^m) < 1/m$. Положим $j_1 = 1$. Пусть $y^m = (y_j^m) \in Y$ — последовательность, имеющая точку y_0^m в качестве предельной, $m \in \mathbb{N}$. По выбору последовательностей y^m для всякого $m \geq 2$ найдется число $j_m > j_{m-1}$ такое, что $y_{j_m}^m \in B(y_0, m^{-1})$ и

$$\rho_{p, F_j}(y_j^1, y_j^m) < \frac{1}{m} \text{ для всех } j \geq j_m.$$

Положим $y_j^0 = y_j^m$ при $j_m \leq j < j_{m+1}$. Тогда, очевидно, $y_{j_m}^0 = y_{j_m}^m \rightarrow y_0$. Также при $j_m \leq j < j_{m+1}$ выполняются соотношения

$$\rho_{p, F_j}(y_j^1, y_j^0) = \rho_{p, F_j}(y_j^1, y_j^m) < \frac{1}{m}.$$

Так как в последнем неравенстве m неограниченно возрастает при $j \rightarrow \infty$, то $\overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j^1, y_j^0) = 0$. Значит, $y^0 \sim_\rho y^1 \in Y$.

(3) Доказательство утверждения о возможных расположениях носителя $\mathcal{S}^s(Y)$ в определенной мере повторяет доказательство аналогичного утверждения для $\mathcal{S}^k(h)$ (см. предложение 6), поэтому мы опускаем некоторые детали.

По предложению 8 в каждом классе $Y \in \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$ существует последовательность $y = (y_j)$, сходящаяся к некоторой точке $y_0 \in \overline{D'_0}$ (при этом наличие других свойств, например, гарантируемых предложением 8, у последовательности y для дальнейших рассуждений не требуется). Будем вести перебор случаев по расположению y_0 .

(3.1) Если $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, то рассмотрим шар $\overline{B} = \overline{B}(y_0, r)$ и замыкание $\overline{V}$ связной окрестности F_0 такие, что $2\overline{B} \cap \overline{V} = \emptyset$ и $2\overline{B}, \overline{V} \subset D'_0$, где $2\overline{B} = \overline{B}(y_0, 2r)$. Пусть еще $\Omega \Subset D'_0$ — область, содержащая $2\overline{B}$ и $\overline{V}$. Предположим, что некоторая последовательность $(z_j) \in Y$ не сходится к y_0 . Выбирая $r > 0$ достаточно малым, можем считать, что некоторая подпоследовательность (z_{j_l}) последовательности (z_j) лежит вне этого шара, а также что $y_{j_l} \in \overline{B}$ для всех l , так как $d(y_j, y_0) \rightarrow 0$. В силу того, что $\overline{\lim}_l \rho_{p, F_{j_l}}(y_{j_l}, z_{j_l}) \leq \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, z_j) = 0$, найдутся кривые $\gamma_l : [0; 1] \rightarrow D'_{j_l}$, $l \in \mathbb{N}$, каждая из которых соединяет точки y_{j_l} и z_{j_l} , удовлетворяющие соотношению

$$\text{сар}(\gamma_l, F_{j_l}; L^1_p(D'_{j_l})) \rightarrow 0.$$

Отсюда согласно свойству монотонности следует, что $\text{сар}((\gamma_l)_{2\overline{B}}, F_{j_l}; L^1_p(\Omega)) \rightarrow 0$. С другой стороны, все $\text{diam}(\gamma_l)_{2\overline{B}}$ не меньше чем r . Снова получили противоречие с леммой 1 при $S_1 = 2\overline{B}$, $S_0 = \overline{V}$.

(3.2) Пусть $y_0 \in F_0$. Предположим, что существует последовательность $(z_j) \in Y$, все члены некоторой подпоследовательности (z_{j_l}) которой находятся вне связной окрестности $U_2 \Subset D'_0$ континуума F_0 . Рассмотрим еще связные окрестности $U_1 \Subset V_1 \Subset V_2 \Subset U_2$ континуума F_0 . Поскольку $\overline{\lim}_l \rho_{p, F_{j_l}}(y_{j_l}, z_{j_l}) \leq \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, z_j) = 0$, существуют кривые $\gamma_l : [0; 1] \rightarrow D'_{j_l}$, $l \in \mathbb{N}$, такие, что $\gamma_l(0) = y_{j_l}$, $\gamma_l(1) = z_{j_l}$ и $\text{сар}(\gamma_l, F_{j_l}; L^1_p(D'_{j_l})) \rightarrow 0$ при $l \rightarrow \infty$. Диаметры кривых $(\gamma_l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}$ отделены от нуля расстоянием $\text{dist}(V_1, \partial V_2) > 0$, так как $y_{j_l} \in V_1$ и $z_{j_l} \notin V_2$ при достаточно больших l , но в то же время емкости $\text{сар}((\gamma_l)_{\overline{V_2 \setminus V_1}}, F_{j_l}; L^1_p(U_2))$ стремятся к нулю. Это противоречит лемме 1, если положить $S_1 = \overline{V_2 \setminus V_1}$, $S_0 = \overline{U_1}$.

(3.3) Пусть $y_0 \in \partial D'_0$. Предположим, что существует последовательность $(z_j) \in Y$, некоторая подпоследовательность (z_{j_l}) которой сходится к $z_0 \in D'_0$. Обозначим $\tilde{\mathcal{D}}' = (\tilde{D}'_l)$, $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{F}_l)$, где $\tilde{D}'_l = D'_{j_l}$, $\tilde{F}_l = F_{j_l}$, и рассмотрим то ядро $\tilde{D}'_0$ последовательности $\tilde{\mathcal{D}}'$, которое содержит D'_0 . Очевидно, что пара $\tilde{\mathcal{D}}', \tilde{\mathcal{F}}$ удовлетворяет условиям предложения 3, причем $\tilde{F}_0 = F_0$ — континуум в ядре $\tilde{D}'_0$, соответствующий $\tilde{\mathcal{F}}$.

Рассмотрим пространства $(\mathcal{C}^k \tilde{\mathcal{D}}'_p, \varrho^k_{p, \tilde{\mathcal{F}}})$, $(\mathcal{C}^s \tilde{\mathcal{D}}'_p, \varrho^s_{p, \tilde{\mathcal{F}}})$. Пусть $\tilde{i}$ — их естественная изометрия. Тогда (y_{j_l}) и (z_{j_l}) представляют один элемент из $(\mathcal{C}^s \tilde{\mathcal{D}}'_p, \varrho^s_{p, \tilde{\mathcal{F}}})$. Действительно, для всех последовательностей $(w^1_j \in D'_j \setminus F_j)$, $(w^2_j \in D'_j \setminus F_j)$ имеем неравенство

$$\overline{\lim}_l \rho_{p, \tilde{F}_l}(w^1_{j_l}, w^2_{j_l}) \leq \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(w^1_j, w^2_j).$$

Отсюда если $\{y^m_0 \in D'_0 \setminus F_0\} \in i^{-1}(Y)$, то последовательность $\{y^m_0\}$ фундаментальная в пространстве $\mathcal{C}^k \tilde{\mathcal{D}}'_p$ и $(y_{j_l}), (z_{j_l}) \in \tilde{i}(\tilde{h})$, где $\{y^m_0\} \in \tilde{h} \in \mathcal{C}^k \tilde{\mathcal{D}}'_p$.

Далее, в зависимости от того, лежит ли $z_0 \in D'_0$ вне континуума F_0 или принадлежит F_0 , остается проделать рассуждения п. (3.1) или п. (3.2) с заменой $\mathcal{D}'$, $\mathcal{F}$, (y_j) , (z_j) и y_0 на $\tilde{\mathcal{D}}'$, $\tilde{\mathcal{F}}$, (z_{j_i}) , (y_{j_i}) и z_0 соответственно. В самом деле, последовательность $(z_{j_i}) \in \tilde{i}(\tilde{h})$ сходится к некоторой точке $z_0 \in D'_0 \subset \tilde{D}'_0$, а последовательность (y_{j_i}) , эквивалентная ей, отстранена от z_0 и $\tilde{F}_0 = F_0$ в смысле евклидовой метрики, т. е. мы попадаем в одну из уже рассмотренных ситуаций. $\square$

5. Совместное граничное поведение последовательности отображений

Этот раздел посвящен систематическому изучению предельного поведения последовательностей вида $(\theta_j(y_j))$ при помощи альтернативного задания граничных элементов в последовательности областей, описанного в разд. 4. Именно, пусть выполнены условия предложения 3. Пусть задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D'_j \rightarrow D_j)$, удовлетворяющих емкостному неравенству (7) с общей константой K и некоторыми $n - 1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$, которая сходится к гомеоморфизму $\theta_0 : D'_0 \rightarrow D_0$ локально равномерно в D'_0 , где D_0 — ядро последовательности областей $\mathcal{D} = (D_j)$.

Фиксируем в $\mathcal{D}$ мультиконтинуум $\vartheta(\mathcal{F})$ и определим отображение

$$\vartheta^s : \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}_q$$

по правилу

$$[(y_j)] \mapsto [(\theta_j(y_j))].$$

Покажем, что задание ϑ^s корректно. Пусть $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$. Тогда $\theta_j(y_0) \rightarrow \theta_0(y_0) \in D_0 \setminus \theta_0(F_0)$ при $j \rightarrow \infty$ и поэтому согласно предложению 5 выполнено равенство

$$\overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_0), \theta_0(y_0)) = 0,$$

из которого вытекает, что если $(y_j) \in \mathcal{D}'(D'_0)$, то $(\theta_j(y_j)) \in \mathcal{D}(D_0)$. Действительно, в силу (7) имеем

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_0(y_0)) &\leq \overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(y_0)) + \overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_0), \theta_0(y_0)) \\ &= \overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(y_0)) \leq K \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, y_0) < \infty \end{aligned}$$

(поскольку $\theta_0(y_0) \in D_0 \setminus \theta_0(F_0)$, это неравенство и означает, что $(\theta_j(y_j)) \in \mathcal{D}(D_0)$). Далее, если $(y_j) \sim_\rho (z_j)$, то $(\theta_j(y_j)) \sim_\rho (\theta_j(z_j))$ в силу неравенства

$$\overline{\lim}_j \rho_{q, \theta_j(F_j)}(\theta_j(y_j), \theta_j(z_j)) \leq K \overline{\lim}_j \rho_{p, F_j}(y_j, z_j).$$

Последнее и означает корректность определения отображения $\vartheta^s : \mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathcal{D}(D_0)/\sim_\rho$.

Поскольку образы $[(\theta_0(y_0))]$ классов $[(y_0)]$, $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, принадлежат $\mathcal{C}^s \mathcal{D}_q$ и $\mathcal{C}^s \mathcal{D}_q$ замкнуто в $\mathcal{D}(D_0)/\sim_\rho$, то образ $\vartheta^s(Y)$ всякого $Y \in \mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$ принадлежит $\mathcal{C}^s \mathcal{D}_q$ (заметим, что совокупность классов постоянных последовательностей (y_0) , $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$, плотна в $\mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p$, а отображение ϑ^s является K -липшицевым).

Для всякой последовательности $(y_j) \in Y \in \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p$, очевидно, справедливо

$$\theta_j(y_j) \rightarrow \mathcal{S}^s(\vartheta^s(Y)).$$

Обозначим через

$$i_{\mathcal{D}'} : \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathcal{C}^s \mathcal{D}'_p, \quad i_{\mathcal{D}} : \mathcal{C}^k \mathcal{D}_q \rightarrow \mathcal{C}^s \mathcal{D}_q$$

изометрии, гарантируемые теоремой Хаусдорфа о пополнении. Тогда

$$\vartheta^s \circ i_{\mathcal{D}'} = i_{\mathcal{D}} \circ \vartheta^k,$$

поскольку $\vartheta^s([(y_0)]) = [(\theta_0(y_0))] = i_{\mathcal{D}}(\theta_0(y_0))$ для всякой точки $y_0 \in D'_0 \setminus F_0$ (т. е. указанное соотношение выполняется на плотном в $\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$ множестве; поскольку все участвующие в выражении отображения непрерывны, оно справедливо и для всех $h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$).

Объединяя перечисленные наблюдения с теоремой 3, можем сформулировать следующую теорему о граничном соответствии.

Теорема 4. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда существуют естественные изометрии

$$i_{\mathcal{D}'} : \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p \rightarrow \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p, \quad i_{\mathcal{D}} : \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}_q \rightarrow \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}_q$$

для которых диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p & \xrightarrow{\vartheta^k} & \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}_q \\ i_{\mathcal{D}'} \downarrow & & \downarrow i_{\mathcal{D}} \\ \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}'_p & \xrightarrow{\vartheta^s} & \mathcal{C}^{\text{sec}} \mathcal{D}_q \end{array}$$

коммутативна, т. е. $\vartheta^s \circ i_{\mathcal{D}'} = i_{\mathcal{D}} \circ \vartheta^k$.

Это, в свою очередь, означает, что если $h \in \mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p$ — произвольный граничный элемент, то для всех $\{y^m \in D'_0 \setminus F_0\} \in h$ и всех $(y_j \in D'_j \setminus F_j) \in i_{\mathcal{D}'}(h)$ выполняются предельные соотношения

$$\theta_0(y^m) \rightarrow \mathcal{S}^k(\vartheta^k(h)), \quad \theta_j(y_j) \rightarrow \mathcal{S}^s(\vartheta^s(i_{\mathcal{D}'}(h))),$$

причем

$$\mathcal{S}^k(\vartheta^k(h)) \subset \mathcal{S}^s(\vartheta^s(i_{\mathcal{D}'}(h))), \quad \mathcal{S}^s(\vartheta^s(i_{\mathcal{D}'}(h))) \cap D_0 = \emptyset.$$

Следствие 1. Пусть $n-1 < q \leq p \leq n$ при $n > 2$ и $1 \leq q \leq p \leq 2$ при $n = 2$. Пусть ограниченная область D' и континуум $F \subset D'$ со связным дополнением в D' таковы, что для некоторого открытого множества $U \Subset D'$, содержащего F , множество $\{h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p \mid \mathcal{S}^k(h) \cap U = \emptyset\}$ компактно в метрическом пространстве $(\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p, \varrho_{p,\mathcal{F}}^k)$, где $\mathcal{D}' = (D')$, $\mathcal{F} = (F)$. Пусть еще задана равномерно ограниченная последовательность гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j : D' \rightarrow D_j)$, удовлетворяющая емкостному неравенству (7) с общей константой K и сходящаяся локально равномерно в D' к гомеоморфизму $\theta_0 : D' \rightarrow D_0$.

Если носитель $\mathcal{S}^s(X)$ всякого элемента $X \in (\mathcal{C}^s \mathcal{D}_q, \varrho_{q,\vartheta(\mathcal{F})}^s)$ такого, что $\mathcal{S}^s(X) \cap D_0 = \emptyset$, является одноточечным множеством, то последовательность ϑ сходится к θ_0 равномерно на области D' .

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдутся число $\varepsilon_0 > 0$, подпоследовательность (θ_{j_m}) и последовательность точек $(y_m \in D')$ такие, что

$$d(\theta_{j_m}(y_m), \theta_0(y_m)) \geq \varepsilon_0 \text{ для всех } m.$$

При этом можно считать, что $y_m \notin U$, поскольку ϑ сходится к θ_0 равномерно на $U \Subset D'$. Согласно предположению о компактности найдется подпоследовательность (y_{m_l}) , сходящаяся к некоторому $h \in (\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p, \mathcal{Q}^k_{p,\mathcal{F}})$. Поэтому $\theta_0(y_{m_l}) \rightarrow x$, где $\{x\} = \mathcal{S}^s(i_{\mathcal{D}}(\vartheta^k(h)))$. Для $j_{m_l} \leq j < j_{m_l+1}$ положим $z_j = y_{m_l}$ (если $j_{m_l} > 1$, то, как обычно, выбираем $z_j \in D'_j \setminus F_j$ при $j < j_{m_l}$ произвольным образом). Покажем, что $z = (z_j)$ принадлежит $\mathcal{D}'(D'_0)$ и что $z \in i_{\mathcal{D}'}(h)$.

Поскольку последовательность (y_{m_l}) фундаментальна в $\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p$, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется l_ε такое, что

$$\rho_{p,F}(y_{m_l}, y_{m_{l'}}) < \varepsilon$$

для всех $l, l' \geq l_\varepsilon$. Отсюда

$$\lim_j \rho_{p,F}(z_j, y_{m_l}) \leq \varepsilon \text{ при } l \geq l_\varepsilon.$$

Значит, $z \in \mathcal{D}'(D'_0)$ и $\mathcal{Q}^s_{p,\mathcal{F}}([z], i_{\mathcal{D}'}(y_{m_l})) \rightarrow 0$. Поэтому $[z] = i_{\mathcal{D}'}(h)$, поскольку $i_{\mathcal{D}'}$ — изометрия.

Таким образом, $\theta_j(z_j) \rightarrow x$ и потому $\theta_{j_{m_l}}(y_{m_l}) = \theta_{j_{m_l}}(z_{j_{m_l}}) \rightarrow x$. Мы получили, что $d(\theta_{j_{m_l}}(y_{m_l}), \theta_0(y_{m_l})) \rightarrow 0$. Это противоречит предположению о том, что $d(\theta_{j_m}(y_m), \theta_0(y_m)) \geq \varepsilon_0$ для всех m . $\square$

Простым достаточным условием компактности множества $\{h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p \mid \mathcal{S}^k(h) \cap U = \emptyset\}$ является локальная конечная связность ядра D'_0 в каждой граничной точке $y \in \partial D'_0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 [23, 24]. Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$.

- (1) Область D' называется *локально связной в точке* $y \in \partial D'$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что $V \cap D'$ связно.
- (2) Область D' называется *локально μ -связной в точке* $y \in \partial D'$, $\mu \in \mathbb{N}$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что множество $V \cap D'$ состоит из μ компонент связности, каждая из которых локально связна в точке y .
- (3) Область D' называется *локально конечно связной в точке* $y \in \partial D'$, если для всякой окрестности U точки y найдется окрестность $V \subset U$ этой точки такая, что множество $V \cap D'$ состоит из конечного набора компонент связности.

Предложение 10. Пусть выполнены условия предложения 3. Если ядро D'_0 последовательности D' локально конечно связно в каждой точке $y \in \partial D'_0$, то для любой окрестности $U \Subset D'_0$ континуума F_0 множество $\{h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p \mid \mathcal{S}^k(h) \cap U = \emptyset\}$ компактно в пространстве $(\mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p, \mathcal{Q}^k_{p,\mathcal{F}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку множество $D'_0 \setminus U$ плотно в $\{h \in \mathcal{C}^k \mathcal{D}'_p \mid \mathcal{S}^k(h) \cap U = \emptyset\}$ то можно рассматривать лишь последовательности, содержащиеся в $D'_0 \setminus U$. Пусть $\{y^m \in D'_0 \setminus U\}$. После перехода к подпоследовательности можем считать, что $\{y^m\}$ сходится к некоторой точке $y \in \overline{D'_0 \setminus U}$ в евклидовой метрике. Если $y \in D'_0 \setminus U$, то согласно предложению 6 справедлива сходимост $\mathcal{Q}_{p,\mathcal{F}}(y, y^m) \rightarrow 0$.

Пусть теперь $y \in \partial D'_0$. Выберем шар $B(y, r_1)$ достаточно малого радиуса, чтобы $\overline{B}(y, r_1) \cap \overline{U} = \emptyset$. Найдется окрестность $V_1 \subset B(y, r_1)$ точки y такая, что $V_1 \cap D'_0$ состоит из конечного числа компонент связности. Поскольку $\{y^m\}$ сходится к y , среди конечного набора компонент множества $V_1 \cap D'_0$ найдется

та, в которой содержится бесконечное число точек y^m . Рассмотрим подпоследовательность $\{y_1^m\}$ в $\{y^m\}$ и компоненту $W_1 \subset V_1 \cap D'_0$ с тем свойством, что $y_1^m \in W_1$, $m \in \mathbb{N}$. Теперь выберем $r_2 < r_1/2$ таким образом, чтобы $B(y, r_1) \subset V_1$. Как и на первом шаге, найдется окрестность $V_2 \subset B(y, r_2)$ точки y такая, что $V_2 \cap D'_0$ состоит из конечного числа компонент связности, и поэтому найдутся подпоследовательность $\{y_2^m\}$ в $\{y_1^m\}$ и компонента $W_2 \subset V_2$ такие, что $y_2^m \in W_2$, $m \in \mathbb{N}$. Продолжаем этот процесс по индукции.

Положим $y_0^1 = y_1^1$. Пусть выбраны элементы $y_0^1, \dots, y_0^{l-1}$ последовательности $\{y^m\}$. В качестве y_0^l возьмем член последовательности $\{y_l^m\}$ так, чтобы номера элементов $y_0^1, \dots, y_0^l$ как членов последовательности $\{y^m\}$ возрастали. Таким образом, $\{y_0^l\}$ — подпоследовательность последовательности $\{y^m\}$. Поскольку пространство $\mathcal{C}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_p$ полное, достаточно показать, что $\{y_0^l\}$ фундаментальна. По построению для всех $l_2 \geq l_1 \geq 1$ найдется кривая $\gamma^{l_1, l_2} : [0; 1] \rightarrow W_{l_1}$ с концевыми точками $y_0^{l_1}$ и $y_0^{l_2}$. Выберем $j(l_1, l_2)$ таким образом, чтобы $\varrho_{p, \mathcal{F}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) \leq 2\rho_{p, F_{j(l_1, l_2)}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1})$ и $\gamma^{l_1, l_2} \subset D'_{j(l_1, l_2)}$. Тогда для $l_2 \geq l_1 \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} \varrho_{p, \mathcal{F}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) &\leq 2\rho_{p, F_{j(l_1, l_2)}}(y_0^{l_2}, y_0^{l_1}) \leq 2\text{cap}^{1/p}(\gamma^{l_1, l_2}, F_{j(l_1, l_2)}; L_p^1(D'_{j(l_1, l_2)})) \\ &\leq 2\text{cap}^{1/p}(\overline{B}(y, r_{l_1}), \overline{U}; L_p^1(\mathbb{R}^n)) \rightarrow 0 \text{ при } l_1 \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

так как $\gamma^{l_1, l_2} \subset W_{l_1} \subset B(y, r_{l_1})$ и $r_{l_1} \rightarrow 0$. $\square$

6. Связь с экстремальной задачей теории упругости

Основываясь на [25], приведем условия, при которых результаты данной работы можно применить для изучения граничного поведения деформаций, возникающих в математической теории упругости. В монографии [26] приведен обзор результатов нелинейной теории упругости, связанных с подходом Болла.

Обозначим через $\mathbb{M}^n$ пространство вещественных $n \times n$ -матриц. Функция $W : D \times \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется *поливыпуклой*, если найдется выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$ с положительным определителем равенство

$$G(x, F, \text{Adj } F, \det F) = W(x, F)$$

справедливо для п. в. $x \in D$.

Говорят, что функция $G : D \times \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет *условию Каратеодори*, если функция $G(x, \cdot)$ непрерывна для п. в. $x \in D$ и функция $G(\cdot, a)$ измерима для всех $a \in \mathbb{R}^T$.

Известно, что если функция $G : D \times \mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Каратеодори, а отображение $f : D \rightarrow \mathbb{R}^T$ измеримо, то функция $x \mapsto G(x, f(x))$ измерима на D .

Фиксируем области $D, D' \subset \mathbb{R}^n$. Определим следующий класс допустимых деформаций:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(p, q, M) &= \{\varphi : D \rightarrow D' \mid \varphi \text{ — гомеоморфизм с конечным искажением,} \\ &\varphi \in W_1^1(D), I(\varphi) < \infty, \det D\varphi \geq 0 \text{ п. в. в } D, \\ &K_O(\cdot, \varphi) \in L_p(D), \|K_I(\cdot, \varphi)\|_{L_q(D)} \leq M\}, \end{aligned}$$

где

$$I(\varphi) = \int_D W(x, D\varphi(x)) dx,$$

$$K_O(x, \varphi) = \frac{|D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|}, \quad K_I(x, \varphi) = \frac{|\operatorname{Adj} D\varphi(x)|^n}{|\det D\varphi(x)|^{n-1}}.$$

Справедлива следующая теорема существования минимума функционала I .

Теорема 5 [25, теорема 11]. Пусть $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ — области с липшицевыми границами, $\alpha > 0$, $g \in L_1(D)$ и поливыпуклая функция $W : D \times \mathbb{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет неравенству коэрцитивности

$$W(x, F) \geq \alpha|F|^n + g(x).$$

Если класс $\mathcal{H}(n-1, s, M)$ непустой, $s > 1$, $M > 0$, то существует гомеоморфизм $\varphi_0 \in \mathcal{H}(n-1, s, M)$ такой, что

$$I(\varphi_0) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{H}(n-1, s, M)\}.$$

Сформулируем условия, при которых теоремы 3, 4 могут быть применены для изучения граничного поведения экстремальных деформаций.

Для фиксированных $q \in (n-1, n]$, $K > 0$, ограниченных областей $D, D' \subset \mathbb{R}^n$ с липшицевыми границами и гомеоморфизма $\psi : \overline{D} \rightarrow \overline{D'}$ класса $W_1^1(D)$ рассмотрим классы допустимых деформаций

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q, K, D, D') &= \{\varphi : D \rightarrow D' \mid \varphi \in W_{q, \text{loc}}^1(D) \text{ — гомеоморфизм} \\ &\text{с конечным искажением, } I(\varphi) < \infty, \det D\varphi \geq 0 \text{ п. в. в } D, \\ &\|K_{q, n}(\cdot, \varphi)\|_{L_\sigma(D)} \leq K\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(q, K, D, D'; \psi) &= \{\varphi : \varphi : \overline{D} \rightarrow \overline{D'} \mid \varphi \text{ — гомеоморфизм,} \\ &\varphi|_D \in \mathcal{A}(q, K, D, D'), \varphi|_{\partial D} = \psi|_{\partial D}\}, \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{n}$ при $q < n$ и $\sigma = \infty$ при $q = n$.

Пусть даны гомеоморфизмы $\psi_j : \overline{D} \rightarrow \overline{D'_j}$ класса $W_1^1(D)$, где D, D'_j — ограниченные области с липшицевыми границами, $j = 0, 1, 2, \dots$. Пусть еще последовательность граничных данных $(\psi_j|_{\partial D})_j$ сходится равномерно к $\psi_0|_{\partial D}$. Отметим, что при указанных предположениях последовательность областей $\mathcal{D}' = (D'_j)$ оказывается равномерно ограниченной. Также нетрудно вывести, что из равномерной сходимости $(\psi_j|_{\partial D})$ к $\psi_0|_{\partial D}$ следует, что D'_0 есть ядро последовательности $\mathcal{D}'$ ⁷⁾. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$\liminf_j \{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, K, D, D'_j; \psi_j)\}. \quad (10)$$

Очевидная модификация доказательства теоремы 5 приводит к тому, что если соответствующие классы допустимых деформаций непустые, то для каждого $j = 1, 2, \dots$ существует гомеоморфизм $\varphi_j \in \mathcal{A}(q, K, D, D'_j; \psi_j)$ такой, что

$$I(\varphi_j) = \inf\{I(\varphi) \mid \varphi \in \mathcal{A}(q, K, D, D'_j; \psi_j)\}.$$

После перехода к подпоследовательности можно считать, что $(I(\varphi_j))$ сходится к величине (10). Пусть нижний предел (10) конечен. Тогда в силу неравенства коэрцитивности последовательность (φ_j) ограничена в $W_n^1(D)$. Отсюда в силу липшицевости границы области D вытекает, что отображения φ_j имеют в $\overline{D}$

⁷⁾ Более того, D'_0 является ядром любой подпоследовательности (D'_{j_k}) последовательности $\mathcal{D}'$.

общий модуль непрерывности [27, § 4] и потому (φ_j) можно считать равномерно сходящейся к непрерывному отображению $\varphi_0 : \overline{D} \rightarrow \overline{D'_0}$.

С другой стороны, последовательность обратных отображений $(\theta_j = \varphi_j^{-1})$ ограничена в $W_{n,\text{loc}}^1(D'_0)$: по теореме 4 работы [28] обратные отображения θ_j имеют конечное искажение, каждое из них принадлежит $W_{n,\text{loc}}^1(D'_j)$ и выполнена оценка

$$\|K_{n,q'}(\cdot, \theta_j) \mid L_{\sigma'}(D'_j)\| \leq \|K_{q,n}(\cdot, \varphi_j) \mid L_{\sigma}(D)\|^{n-1},$$

где $q' = \frac{q}{q-n+1}$, $\frac{1}{\sigma'} = \frac{1}{n} - \frac{1}{q}$; применяя теорему 1, можно вывести отсюда ограниченность последовательности обобщенных дифференциалов $D\theta_j$ в $L_{n,\text{loc}}(D'_0)$. Так как область D ограничена, (θ_j) тоже можно считать локально равномерно сходящейся в ядре D'_0 к некоторому непрерывному отображению $\theta_0 : D'_0 \rightarrow \overline{D}$. Из равномерной сходимости (φ_j) к φ_0 на $\overline{D}$ и из соотношений $\varphi_j(\theta_j(y)) = y$, $y \in D'_0$, следует равенство $\varphi_0(\theta_0(y)) = y$, т. е. θ_0 — непрерывная инъекция. По теореме о сохранении области [26, теорема 1.2-6] θ_0 есть гомеоморфизм ядра D'_0 на некоторую подобласть области D , которая согласно теореме 2 совпадает с D . Отсюда ввиду равенства $\varphi_0(\theta_0(y)) = y$ выводим, что $\varphi_0(x) \in D'_0$, $x \in D$. Поскольку (θ_j) сходится к θ_0 локально равномерно на D'_0 , то, переходя к пределу в равенствах $\theta_j(\varphi_j(x)) = x$, получаем $\theta_0(\varphi_0(x)) = x$. Таким образом, $\varphi_0 : D \rightarrow D'_0$ — гомеоморфизм, обратный к θ_0 .

Итак, к последовательности гомеоморфизмов $\vartheta = (\theta_j)$ применимы теоремы о граничном соответствии. Фиксируем замкнутый шар $B \subset D$. Тогда $\mathcal{F} = (F_j) = (\varphi_j(B))$ — мультиконтинуум в последовательности $\mathcal{D}'$, удовлетворяющий условиям теоремы 3. В силу липшицевости границ областей все граничные элементы каждой отдельно взятой области обладают одноточечными носителями, причем разным граничным элементам соответствуют разные носители. Так, предельное отображение θ_0 допускает продолжение по непрерывности до отображения $\overline{\theta}_0 : \overline{D'_0} \rightarrow \overline{D}$. Также для всякого граничного элемента $h \in \mathcal{E}^{\text{ker}} \mathcal{D}'_n$ с одноточечным носителем $\{y_h\}$ и всех $(y_j) \in i_{\mathcal{D}'}(h)$ справедливо

$$\theta_j(y_j) \rightarrow \overline{\theta}_0(y_h).$$

Проводя рассуждения в духе доказательства следствия 1, при условии типа *компактности* отсюда можно вывести равномерную сходимость в следующей форме:

$$\sup_{y \in D'_0 \cap D'_j} d(\theta_0(y), \theta_j(y)) \rightarrow 0.$$

Условие компактности состоит в том, что для любой последовательности $(y_j \in D'_j \setminus F_j)$ существует последовательность чисел (j_l) такая, что (y_{j_l}) представляет некоторый граничный элемент в последовательности областей (D'_{j_l}) с мультиконтинуумом (F_{j_l}) .

Благодарность. Авторы выражают искреннюю признательность анонимному рецензенту за конструктивные предложения по улучшению первоначального варианта рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carathéodory C. Über die Bergranzung einfach zusammenhängender Gebiete // Math. Ann. 1913. V. 73, N 3. P. 323–370.
2. Зорич В. А. Соответствие границ при q -квазиконформных отображениях шара // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145, № 6. С. 1209–1212.

3. Зорич В. А. Определение граничных элементов посредством сечений // Докл. АН СССР. 1965. Т. 164, № 4. С. 736–739.
4. Водопьянов С. К. О граничном соответствии при квазиконформных отображениях пространственных областей // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 3. С. 630–633.
5. Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными // Успехи. мат. наук. 1979. Т. 34, № 1. С. 17–65.
6. Кругликов В. И. Простые концы пространственных областей с переменными границами // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 5. С. 1047–1050.
7. Ковтонюк Д. А., Рязанов В. И. Простые концы и классы Орлича — Соболева // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 5. С. 81–116.
8. Суворов Г. Д. Простые концы последовательности плоских областей, сходящейся к ядру // Мат. сб. 1953. Т. 33, № 1. С. 73–100.
9. Суворов Г. Д. Простые концы и последовательности плоских отображений. Киев: Наук. думка, 1986.
10. Vodopyanov S. K., Molchanova A. O. The boundary behavior of $\mathcal{Q}_{q,p}$ -homeomorphisms // Изв. РАН. 2023. V. 87, N 4. P. 47–90.
11. Суворов Г. Д. Семейства плоских топологических отображений. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1965.
12. Gehring F. W. The Carathéodory convergence theorem for quasiconformal mappings in space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1963. V. 336, N 11. P. 1–21.
13. Водопьянов С. К. Об эквивалентности двух подходов к задачам квазиконформного анализа // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1252–1270.
14. Водопьянов С. К. Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях // Мат. сб. 2019. Т. 210, № 1. С. 63–112.
15. Isangulova D. V., Vodopyanov S. K. Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Euras. Math. J. 2010. V. 1, N 3. P. 58–96.
16. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.
17. Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф. Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.
18. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
19. Решетняк Ю. Г. О понятии емкости в теории функций с обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10, № 5. С. 1109–1138.
20. Водопьянов С. К., Кудрявцева Н. А. Нелинейная теория потенциала для пространств Соболева на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1016–1036.
21. Мазья В. Г. О некоторых интегральных неравенствах для функций многих переменных // Проблемы математического анализа. Л.: ЛГУ, 1972. Вып. 3. С. 33–68.
22. Кругликов В. И. Емкости конденсаторов, простые концы и пространственные отображения, квазиконформные в среднем // Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Донецк, 1987.
23. Näkki R. Boundary behavior of quasiconformal mappings in n -space // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 1970. V. 484. P. 1–50.
24. Väisälä J. Lectures on n -dimensional quasiconformal mappings. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1971.
25. Molchanova A., Vodopyanov S. Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calc. Var. 2019. V. 59, N 17. P. 1–25.
26. Ciarlet P. G. Mathematical elasticity. V. 1. Three-dimensional elasticity. Amsterdam: North-Holland; Elsevier Sciro B.V., 1988.
27. Mostow G. D. Quasi-conformal mappings in n -space and the rigidity of hyperbolic space forms // Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques. 1968. V. 34. P. 53–104.
28. Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб.

2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.

Поступила в редакцию 5 декабря 2023 г.

После доработки 18 марта 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Водопьянов Сергей Константинович,
Павлов Степан Валерьевич,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vodopis@math.nsc.ru, s.pavlov4254@gmail.com

О РАЗМЕРНОСТИ КВАНТОВАНИЯ МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ

А. А. Иванов

Аннотация. Доказано, что для метрического компакта X и для любого неотрицательного числа b , не превосходящего нижней емкостной размерности X , существует максимальная сцепленная система из λX с нижней размерностью квантования, равной b , и с носителем X . Также существует максимальная сцепленная система из λX с носителем X , нижняя и верхняя размерности квантования которой совпадают с нижней и верхней емкостной размерностями X соответственно.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.306

Ключевые слова: емкостная размерность, размерность квантования, суперрасширение.

Пусть $\mathcal{F}$ — полунормальный сохраняющий вес метризуемый функтор в категории $Comp$ компактов и их непрерывных отображений, (X, ρ) — метрический компакт. Тогда для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определены верхняя $\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi$ и нижняя $\underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi$ размерности квантования (см. [1]). Известно, что для функтора экспоненты $\exp$ размерности квантования совпадают с емкостными размерностями $\dim_B$ замкнутых подмножеств X . Для функтора суперрасширения λ размерности квантования исследованы в работе [2], где в частности, были установлены неравенства

$$\underline{\dim}_{\lambda} \xi \leq \underline{\dim}_B \operatorname{supp}(\xi), \quad \overline{\dim}_{\lambda} \xi \leq \overline{\dim}_B \operatorname{supp}(\xi)$$

для любой максимальной сцепленной системы (мсс) $\xi \in \lambda X$ и доказана следующая теорема о промежуточных значениях верхней размерности квантования:

Теорема 1 [2]. Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда для любого числа b такого, что $0 \leq b \leq a$, существует мсс $\xi_b \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_{\lambda} \xi_b = b$ и $\operatorname{supp}(\xi_b) = X$.

Доказательство этой теоремы существенно опирается на доказанную в той же работе теорему о промежуточных значениях для верхней емкостной размерности.

Теорема 2 [2]. Пусть (X, ρ) — метрический компакт и $\overline{\dim}_B X = a$. Тогда для любого числа b такого, что $0 \leq b < a$, существует замкнутое подмножество $F_b \subset X$, для которого $\overline{\dim}_B F_b = b$.

Для нижней емкостной размерности аналогичное утверждение в общем случае неверно: в работе [3] построен пример метрического компакта X такого,

Статья подготовлена при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

что $\underline{\dim}_B X = 1$ и $\underline{\dim}_B F = 0$ для любого непустого собственного замкнутого $F \subset X$. Таким образом, использованная в работе [2] схема доказательства теоремы 1 не может быть реализована для нижней размерности квантования. Тем не менее утверждение о промежуточных значениях для нижней размерности квантования максимальных сцепленных систем имеет место, и в этом состоит основной результат настоящей статьи (теорема 3): для любого метрического компакта (X, ρ) и любого неотрицательного числа $b \leq \underline{\dim}_B X = a$ существует мсс $\xi \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_\lambda \xi = b$ и $\text{supp}(\xi) = X$. Данная теорема показывает, что даже в тех случаях, когда в множестве значений нижней емкостной размерности замкнутых подмножеств метрического компакта X имеются лакуны, нижняя размерность квантования максимальных сцепленных систем заполняет весь диапазон значений от нуля до $\underline{\dim}_B X$.

В работе доказано также, что для любого метрического компакта (X, ρ) существует мсс ξ , для которой

$$\underline{\dim}_\lambda \xi = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_\lambda \xi = \overline{\dim}_B X, \quad \text{supp}(\xi) = X.$$

Напомним необходимые определения. Ковариантный функтор $\mathcal{F}$ в категории Comp компактов и их непрерывных отображений называется *полуноормальным*, если он мономорфен, непрерывен, сохраняет пересечения, точку и пустое множество (см. [4]). Для каждого полуноормального функтора $\mathcal{F}$, компакта X и точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ определено понятия носителя $\text{supp}(\xi)$ — это наименьшее по включению замкнутое $A \subset X$ такое, что $\xi \in \mathcal{F}(A)$. Для всех $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n(X) = \{\xi \in \mathcal{F}(X) : \text{supp}(\xi) \leq n\}.$$

При этом $\mathcal{F}_1(X)$ гомеоморфно X и можно считать, что $X \subset \mathcal{F}(X)$. Для любого полуноормального функтора $\mathcal{F}$ и любого компакта X множество $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n(X)$ всюду плотно в $\mathcal{F}(X)$ (см. [4]).

Функтор $\mathcal{F}$ имеет бесконечную степень, если $\mathcal{F}_n(X) \neq \mathcal{F}(X)$ для любого бесконечного X и любого $n \in \mathbb{N}$.

Функтор $\mathcal{F}$ называется *метризуемым* (по В. В. Федорчуку, см. [5]), если для всякой метрики ρ на метризуемом компакте X можно указать совместимую с топологией метрику $\rho_{\mathcal{F}}$ на $\mathcal{F}(X)$ так, что

1) для любого изометрического вложения i метризуемых компактов $\mathcal{F}(i)$ также изометрическое вложение;

2) $\rho_{\mathcal{F}}|_X = \rho$;

3) $\text{diam}(\mathcal{F}(X)) = \text{diam}(X)$.

При этом по определению семейство метрик $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$ задает метризацию функтора $\mathcal{F}$.

Далее всюду X — метрический компакт с метрикой ρ .

Если $\mathcal{F}$ — полуноормальный сохраняющий вес метризуемый семейством метрик $\{\rho_{\mathcal{F}}\}$ функтор бесконечной степени, то для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно определить число

$$N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = \min\{n : \rho_{\mathcal{F}}(\xi, \mathcal{F}_n(X)) \leq \varepsilon\}.$$

Верхней и нижней размерностью квантования ξ называются числа

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \inf\{\alpha : \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = 0\},$$

$$\underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \inf\{\alpha : \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X)) = 0\}.$$

В работах [2, 6] размерность квантования исследовалась под названиями «порядок метрической аппроксимации» и «размерность финитной аппроксимации»; квантование, по сути, это сокращение слов «финитная аппроксимация».

Имеют места следующие равенства (см. [1]):

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X))}{-\log \varepsilon}, \quad \underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X))}{-\log \varepsilon}.$$

Очевидно, что $\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi \geq \underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi$ для любой точки $\xi \in \mathcal{F}(X)$.

Также верно следующее

Предложение 1 [1]. Если последовательность $\varepsilon_n > 0 : n \in \mathbb{N}$ сходится к нулю монотонно и существует $c > 0$ такое, что $\varepsilon_{n+1} \geq c\varepsilon_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то

$$\overline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n, \mathcal{F}(X))}{-\log \varepsilon_n}, \quad \underline{\dim}_{\mathcal{F}} \xi = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi, \varepsilon_n, \mathcal{F}(X))}{-\log \varepsilon_n}.$$

В дальнейшем, если из контекста ясно, о каком функторе идет речь, будем писать $N(\xi, \varepsilon)$ вместо $N(\xi, \varepsilon, \mathcal{F}(X))$. Также будем использовать стандартные обозначения:

$$B(F, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, F) \leq \varepsilon\}, \quad O(F, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x, F) < \varepsilon\},$$

где F — подмножество X .

Функтор экспоненты $\exp$, ставящий в соответствие компакту X пространство его непустых замкнутых подмножеств (см. [7]), полунормален, сохраняет вес, обладает бесконечной степенью и метризуем при помощи метрики Хаусдорфа

$$\rho_H(F, G) = \inf\{\varepsilon : F \subset B(G, \varepsilon), G \subset B(F, \varepsilon)\},$$

где F, G — непустые замкнутые подмножества X . Как было отмечено, размерности квантования точек $F \in \exp X$ (т. е. непустых замкнутых подмножеств X) совпадают с верхней и нижней емкостными размерностями $\overline{\dim}_B F$ и $\underline{\dim}_B F$ множества F (см. [1]).

Функтор суперрасширения λ , ставящий в соответствие компакту X пространство максимальных сцепленных систем λX , также полунормален, сохраняет вес, имеет бесконечную степень и метризуем (см. [5]) при помощи метрики

$$\rho_\lambda(\xi, \eta) = \inf\{\varepsilon : \forall F \in \xi \ B(F, \varepsilon) \in \eta\}.$$

Таким образом, для мсс $\xi \in \lambda X$ определены верхняя и нижняя размерности квантования $\overline{\dim}_\lambda \xi$ и $\underline{\dim}_\lambda \xi$.

Нам потребуются также следующая конструкция, предложенная в [8]. Пусть $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности, состоящие из попарно различных точек X , причем $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Для каждого $i \in \mathbb{N}$ положим $A_i = \{x_1, \dots, x_i, y_i\}$, $B_i = \{y_1, \dots, y_i, x_{i+1}\}$ и рассмотрим сцепленную систему

$$\xi' = \{A_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{B_i : i \in \mathbb{N}\}.$$

Система ξ' единственным образом дополняется до мсс в X , которую обозначают через $\xi(A, B)$. Для всех $i \in \mathbb{N}$ множества A_i и B_i являются минимальными по включению элементами $\xi(A, B)$ и $\text{supp}(\xi(A, B)) = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Ниже рассматриваются только последовательности, состоящие из попарно различных точек.

Напомним, что множество $F \subset X$ называется ε -разделенным для некоторого $\varepsilon > 0$, если $\rho(x, y) > \varepsilon$ для любых различных точек $x, y \in F$. Любое ε -разделенное подмножество компакта конечно. Подмножество $F \subset X$ называется ε -сетью в X , если $B(F, \varepsilon) = X$.

Лемма 1. Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ множество $D = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ ε -разделенное, то $N(\xi(A, B), \varepsilon/2) \geq 2k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η — мсс с конечным носителем, для которой выполняется неравенство $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta) \leq \varepsilon/2$.

Для каждой точки $z \in D \setminus \{x_{k+1}\}$ существуют $F_1, F_2 \in \xi(A, B)$ такие, что $F_1 \cap F_2 = \{z\}$ и $F_1, F_2 \subset D$. Множество D ε -разделенное, стало быть, $B(F_1, \varepsilon/2) \cap B(F_2, \varepsilon/2) = B(z, \varepsilon/2)$. При этом $B(F_1, \varepsilon/2), B(F_2, \varepsilon/2) \in \eta$. Значит, $B(F_1, \varepsilon/2) \cap B(F_2, \varepsilon/2) \cap \text{supp}(\eta) \neq \emptyset$.

Итак, для любой точки $z \in D \setminus \{x_{k+1}\}$ пересечение $\text{supp}(\eta) \cap B(z, \varepsilon/2)$ непусто. Следовательно, $|\text{supp}(\eta)| \geq 2k$. $\square$

Лемма 2. Если $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ — две непересекающиеся последовательности точек X такие, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, и для некоторых $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $\rho(x_{k+1}, y_{k+1}) \leq \varepsilon$, то $N(\xi(A, B), \varepsilon) \leq 2k + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим $D = \{x_1, \dots, x_{k+1}\} \cup \{y_1, \dots, y_k\}$ и сцепленную систему $\eta' = \{A_i : i \leq k\} \cup \{B_i : i \leq k\} \cup \{x_1, \dots, x_{k+1}\}$. Существует единственная мсс $\eta \in \lambda(X)$, содержащая η' . Очевидно, что $\text{supp}(\eta) = D$. Следовательно, $|\text{supp}(\eta)| = 2k + 1$.

Все элементы η' кроме множества $\{x_1, \dots, x_{k+1}\}$ содержатся в $\xi(A, B)$. При этом $y_{k+1} \in B(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \varepsilon)$, а значит, $A_{k+1} \subset B(\{x_1, \dots, x_{k+1}\}, \varepsilon)$. Следовательно, $B(F, \varepsilon) \in \xi(A, B)$ для любого $F \in \eta$. Поэтому $\rho_\lambda(\xi(A, B), \eta) \leq \varepsilon$ и $N(\xi(A, B), \varepsilon) \leq 2k + 1$. $\square$

Предложение 2. Для любого метрического компакта (X, ρ) существует мсс ξ , для которой

$$\underline{\dim}_\lambda \xi = \underline{\dim}_B X, \quad \overline{\dim}_\lambda \xi = \overline{\dim}_B X, \quad \text{supp}(\xi) = X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Построим по индукции возрастающую (по включению) последовательность $G_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, состоящую из ε_k -разделенных ε_k -сетей в X . В качестве G_1 возьмем максимальное ε_1 -разделенное подмножество X . Предположим, что G_{k-1} уже построено. В множестве $X \setminus B(G_{k-1}, \varepsilon_k)$ выберем максимальное ε_k -разделенное подмножество C_k и положим $G_k = G_{k-1} \cup C_k$.

Продолжая индукцию, получим искомую последовательность $\{G_k : k \in \mathbb{N}\}$. Положим $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Легко проверить, что G всюду плотно в X . Выделим в G фундаментальную последовательность $Z = \{z_i : i \in \mathbb{N}\}$, состоящую из попарно различных точек. Распределим теперь точки G по двум непересекающимся последовательностям $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) $G_k \cap A = \{x_1, \dots, x_{n_k}\}$, $G_k \cap B = \{y_1, \dots, y_{m_k}\}$;
- 2) $n_k \geq m_k$ и $n_k - m_k \leq 1$;
- 3) пересечения $A \cap Z$ и $B \cap Z$ бесконечны.

Из условия 3 следует, что $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, следовательно, определена мсс $\xi(A, B)$, причем $\text{supp}(\xi(A, B)) = X$. Множество $D = \{x_1, \dots, x_{n_k}\} \cup \{y_1, \dots, y_{n_k-1}\}$ является ε_k -разделенным, следовательно, по лемме 1

$$N(\xi(A, B), \varepsilon_k/2) \geq 2(n_k - 1) \geq |G_k| - 2 \geq N(X, \varepsilon_k) - 2.$$

Применяя предложение 1, получаем

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_\lambda \xi(A, B) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), \varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N(X, \varepsilon_k) - 2)}{-\log \varepsilon_k/2} = \underline{\dim}_B X, \\ \overline{\dim}_\lambda \xi(A, B) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), \varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(N(X, \varepsilon_k) - 2)}{-\log \varepsilon_k/2} = \overline{\dim}_B X.\end{aligned}$$

Из [2, предложение 2] следует, что

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_\lambda \xi(A, B) &\leq \underline{\dim}_B(\text{supp}(\xi(A, B))) = \underline{\dim}_B X, \\ \overline{\dim}_\lambda \xi(A, B) &\leq \overline{\dim}_B(\text{supp}(\xi(A, B))) = \overline{\dim}_B X.\end{aligned}$$

Значит, $\xi(A, B)$ — искомая максимальная сцепленная система. $\square$

Теорема 3. Пусть (X, ρ) — метрический компакт. Для любого неотрицательного числа $b \leq \underline{\dim}_B X = a \leq \infty$ существует мсс $\xi \in \lambda X$, для которой $\underline{\dim}_\lambda(\xi) = b$ и $\text{supp}(\xi) = X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $b = 0$ утверждение теоремы следует из теоремы 2. Случай $b = a$ рассмотрен в предложении 2. Пусть $b \in (0, a)$. Положим $\varepsilon_k = 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$. В силу предложения 1 получаем

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, \varepsilon_k)}{-\log \varepsilon_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(X, 2\varepsilon_k)}{-\log \varepsilon_k} > b,$$

откуда следует, что при достаточно больших k

$$N(X, 2\varepsilon_k) > 2^{kb}. \quad (1)$$

Пусть натуральное число k_0 таково, что для всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство (1), и числа

$$n_k = [2^{kb-1}] - 1 \quad (2)$$

положительны и попарно различны.

Фиксируем предельную точку $p \in X$. Построим по индукции последовательности натуральных чисел $T = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ и пар точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}} \in X$, $i \in \mathbb{N}$, следующим образом.

ШАГ 1. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям: $k_1 > k_0$ и $B(p, \varepsilon_{k_1}) \setminus B(p, \varepsilon_{k_1+1}) \neq \emptyset$. Выберем точки $x_{n_{k_1}} \in B(p, \varepsilon_{k_1}) \setminus B(p, \varepsilon_{k_1+1})$ и $y_{n_{k_1}} \in O(p, \varepsilon_{k_1+1})$ так, что $\rho(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}) > \varepsilon_{k_1+1}$. Легко проверить, что $\rho(x_{n_{k_1}}, y_{n_{k_1}}) \leq 2\varepsilon_{k_1}$.

ШАГ 2. Пусть k_2 — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям: $2\varepsilon_{k_2} < \rho(p, y_{n_{k_1}})$ и $B(p, \varepsilon_{k_2}) \setminus B(p, \varepsilon_{k_2+1}) \neq \emptyset$. Дословно повторив проведенные выше рассуждения (с заменой индекса k_1 на k_2), выберем точки $x_{n_{k_2}} \in B(p, \varepsilon_{k_2}) \setminus B(p, \varepsilon_{k_2+1})$ и $y_{n_{k_2}} \in O(p, \varepsilon_{k_2+1})$.

Продолжая индукцию, получим множество $T = \{k_i : i \in \mathbb{N}\}$ и последовательности $A' = \{x_{n_{k_i}} : i \in \mathbb{N}\}$, $B' = \{y_{n_{k_i}} : i \in \mathbb{N}\}$. Заметим, что $|k_i - k_j| > 1$ для любых различных $i, j \in \mathbb{N}$, а также что $(A' \cup B') \setminus B(p, 2\varepsilon_k) \subset (\bigcup_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\}) \cup (\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\})$ для любого $k \geq k_0$.

Будем строить по индукции возрастающую (по включению) последовательность конечных подмножеств $G_k \subset X$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, так, чтобы выполнялись следующие условия:

(а) $G_k \cap (A' \cup B') = \emptyset$;

- (b) $G_k \cup \{p\} - 2\varepsilon_k$ -разделенное множество;
- (c) $G_k \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\} \right) - \varepsilon_k$ -разделенное множество;
- (d) $G_k \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\} \right) \cup \{p\} - 2\varepsilon_k$ -сеть.

Шаг $k = k_0$. В качестве G_{k_0} возьмем максимальное $2\varepsilon_{k_0}$ -разделенное подмножество $X \setminus B(p, 2\varepsilon_{k_0})$. Очевидно, что все перечисленные выше условия выполняются.

Шаг $k > k_0$. Пусть C_k — максимальное $2\varepsilon_k$ -разделенное подмножество $X \setminus B(G_{k-1} \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\} \right) \cup \{p\}, 2\varepsilon_k)$. Тогда положим $G_k = G_{k-1} \cup C_k$. Условия (a), (b) и (d) будут выполняться для G_k в силу свойств A' , B' , построения C_k и того факта, что условие (a) выполнялось для G_{k-1} . Проверим выполнение условия (c).

Если $k = k_j$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то в силу выполнения условия (c) для G_{k_j-1} , а также того, что $k_j - 1 \notin T$, множество $G_{k_j-1} \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right)$ будет $2\varepsilon_{k_j}$ -разделенным. В силу построения C_{k_j} множество $G_{k_j} \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right)$ также является $2\varepsilon_{k_j}$ -разделенным. Это множество не пересекает $B(p, 2\varepsilon_{k_j})$ в силу выполнения условия (b) для G_{k_j} и построения точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}$. Точка $x_{n_{k_j}}$ содержится в $B(p, \varepsilon_{k_j})$, а значит, $G_{k_j} \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right)$ будет ε_{k_j} -разделенное.

Если $k = k_j + 1$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то в силу выполнения условия (c) для G_{k_j} множество $G_{k_j} \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right) - 2\varepsilon_{k_j+1}$ -разделенное. В силу построения C_{k_j+1} множество $G_{k_j+1} \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right)$ также $2\varepsilon_{k_j+1}$ -разделенное. Это множество пересекает $B(p, 2\varepsilon_{k_j+1})$ только по точке $x_{n_{k_j}}$ в силу выполнения условия (b) для G_{k_j+1} и построения точек $x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}$. Кроме того, $\rho(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) > \varepsilon_{k_j+1}$ и $y_{n_{k_j}} \in B(p, \varepsilon_{k_j+1})$. Значит, $G_{k_j+1} \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k_j} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i \leq k_j} \{y_{n_{k_i}}\} \right)$ ε_{k_j+1} -разделенно. В силу того, что $k_j + 1 \notin T$, условие (c) для G_{k_j+1} тем самым проверено.

Если $k_j + 1 < k < k_{j+1}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то выполнение условия (c) будет следовать из выполнения этого условия для G_{k-1} и построения C_k .

Продолжая индукцию, получаем искомую последовательность G_k . Положим

$$G = \bigcup_{k \geq k_0} G_k.$$

Точка p является предельной точкой последовательностей A' и B' . Поэтому в силу условия (d) множество $G \cup A' \cup B'$ будет всюду плотным в X . Из условий (d), (1) и (2) следует, что

$$\left| G_k \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{x_{n_{k_i}}\} \right) \cup \left(\bigcup_{k_i < k} \{y_{n_{k_i}}\} \right) \right| \geq N(X, 2\varepsilon_k) - 1 \geq 2n_k. \quad (3)$$

Положим $S = \mathbb{N} \setminus T$. В силу неравенства (3) множество G можно представить в виде объединения двух непересекающихся последовательностей $A'' =$

$\{x_i : i \in S\}$ и $B'' = \{y_i : i \in S\}$ так, чтобы для любого $k \geq k_0$ выполнялось включение $\{x_j : j \in S, j \leq n_k\} \cup \{y_j : j \in S, j \leq n_k\} \subset G_k$. Объединяя последовательности A' с A'' и B' с B'' , получим (соответственно) последовательности $A = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ и $B = \{y_i : i \in \mathbb{N}\}$. Для любого $k \in T$ имеем $\rho(x_{n_k}, y_{n_k}) \leq 2\varepsilon_k$, следовательно, $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Из свойства (с) следует, что $\{x_j : j \in \mathbb{N}, j \leq n_k\} \cup \{y_j : j \in \mathbb{N}, j < n_k\} - \varepsilon_k$ -разделенное множество для всех $k \geq k_0$. В силу леммы 1 $N(\xi(A, B), \varepsilon_k/2) \geq 2n_k - 2$. Применяя к данному неравенству предложение 1 и (2), получаем, что

$$\underline{\dim}_\lambda \xi(A, B) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), \varepsilon_k/2)}{-\log \varepsilon_k/2} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log(2n_k - 2)}{-\log \varepsilon_k/2} = b.$$

Для любого $k_i \in T$ будет $\rho(x_{n_{k_i}}, y_{n_{k_i}}) \leq 2\varepsilon_{k_i}$, поэтому по лемме 2 верно неравенство $N(\xi(A, B), 2\varepsilon_{k_i}) \leq 2n_{k_i} - 1$. С учетом предложения 1 и того факта, что T бесконечно, получаем

$$\begin{aligned} \underline{\dim}_\lambda \xi(A, B) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), 2\varepsilon_k)}{-\log 2\varepsilon_k} \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log N(\xi(A, B), 2\varepsilon_{k_i})}{-\log 2\varepsilon_{k_i}} \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\log(2n_{k_i} - 1)}{-\log 2\varepsilon_{k_i}} = b. \end{aligned}$$

Так как $A \cup B$ всюду плотно в X , носитель $\text{supp}(\xi(A, B))$ равен X . Итак, $\xi(A, B)$ — искомая максимальная сцепленная система. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ivanov A. V. On metric order in spaces of the form $\mathcal{F}(X)$ // Topology Appl. 2017. V. 221. P. 107–113.
2. Иванов А. В., Фомкина О. В. О порядке метрической аппроксимации максимальных сцепленных систем и емкостных размерностях // Тр. Карел. науч. центра РАН. 2019. № 7. С. 5–14.
3. Иванов А. В. О промежуточных значениях емкостных размерностей // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 540–545.
4. Fedorchuk V., Todorovic S. Cellularity of covariant functors // Topology Appl. 1997. V. 76. P. 125–150.
5. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1990. Т. 54, № 2. С. 396–417.
6. Иванов А. В. О функторе вероятностных мер и размерностях квантования // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика. 2020. Т. 63. С. 15–26.
7. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988.
8. Вакулова (Кашуба) Е. В. О носителях максимальных сцепленных систем // Тр. ПГУ. Математика. 2004. № 11. С. 3–8.

Поступила в редакцию 2 декабря 2023 г.

После доработки 2 декабря 2023 г.

Принята к публикации 25 января 2024 г.

Иванов Андрей Александрович (ORCID 0009-0002-8303-2544)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
кафедра общей топологии и геометрии;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
Ленинские горы, 1, Москва 119991
an98iv@yandex.ru

УДК 515.162.8+515.145.2+515.148

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ АРТИНА ОБ ИЗОТОПНОСТИ ЗАМКНУТЫХ КОС. I

А. В. Малютин

Аннотация. Восходящая к работам Артина классическая теорема теории кос гласит, что замкнутые косы в полнотории объемлемо изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос. Эта теорема допускает переформулировку в рамках теории узлов и зацеплений без обращения к групповой структуре. В трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью, зацепление назовем трансверсальным, если сужение расслоения на это зацепление является накрытием базы. В таком ракурсе теорема Артина утверждает, что в полнотории, тривиально расслоенном над окружностью, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений. В статье обобщается этот результат и доказывается (в кусочно-линейной категории), что в произвольном компактном ориентируемом трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.307

Ключевые слова: узел, зацепление, коса, поверхность, трехмерное многообразие, несжимаемая поверхность, гиперболический, расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность.

§ 1. Введение

Восходящая к работам Артина классическая теорема теории кос гласит, что замкнутые косы в полнотории объемлемо изотопны (т. е. эквивалентны как зацепления в полнотории), если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [1; 2, теорема 1; 3, предложение 10.16; 4, теорема 2.1 и замечание на с. 91]; см. также недавнюю работу [5] с результатами по обобщению теоремы Артина). Эта теорема допускает переформулировку в рамках теории узлов и зацеплений без обращения к групповой структуре. Напомним, что *зацеплениями* называются одномерные компактные подмногообразия, лежащие во внутренней области трехмерного многообразия. В трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью, зацепление называется *трансверсальным*, если сужение расслоения на это зацепление является накрытием базы. В этих терминах вышесформулированная теорема Артина принимает следующий вид: в полнотории, тривиально расслоенном над окружностью, трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных зацеплений. В настоящей работе в рамках кусочно-линейной категории доказывается следующая теорема.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, <https://rscf.ru/project/22-11-00299/>.

© 2024 Малютин А. В.

Теорема 1. В компактном ориентируемом трехмерном многообразии, локально тривиально расслоенном над окружностью со слоем компактная поверхность (не обязательно связная и, возможно, с непустым краем) трансверсальные зацепления объемлемо изотопны, если и только если они изотопны в классе трансверсальных.

Для удобства структурирования доказательства трансформируем теорему 1 до чуть более общего и чуть более детализированного предложения 1, включив в формулировку зацепления в топологической категории.

Предложение 1. Пусть M — компактное ориентируемое трехмерное кусочно-линейное многообразие, локально тривиально кусочно-линейно расслоенное над окружностью со слоем компактная поверхность F . Пусть L_1 и L_2 — трансверсальные кусочно-линейные зацепления в M . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (a) L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны,
- (b) L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны в классе трансверсальных,
- (c) L_1 и L_2 кусочно-линейно изотопны в классе трансверсальных,
- (d) L_1 и L_2 изотопны в топологической категории в классе трансверсальных топологических зацеплений.

Теорема 1 есть сужение предложения 1 до утверждения об эквивалентности (a) $\Leftrightarrow$ (c) и тем самым прямо следует из предложения 1. Импликации (b) $\Rightarrow$ (a) и (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) выполняются по определению. Таким образом, для доказательства предложения 1 и теоремы 1 достаточно проверить справедливость импликаций (a) $\Rightarrow$ (d) и (d) $\Rightarrow$ (b). В § 2 работы доказывается импликация (d) $\Rightarrow$ (b), в § 4 доказывается импликация (a) $\Rightarrow$ (d).

Теорема 1 допускает серию дальнейших обобщений как на случай других классов расслоенных пространств, так и на случай более широких классов зацеплений. Частично эти обобщения будут представлены в готовящихся следующих работах цикла.

Ключевым моментом работы является новый подход, дающий доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (d). Этот подход использует конструкции с несжимаемыми поверхностями из [6, 7] в композиции с результатами о расслоенных пространствах из [8, 9] (подробности изложены в § 4 ниже).

§ 2. Доказательство импликации (d) $\Rightarrow$ (b)

Импликация (d) $\Rightarrow$ (b) утверждает, что кусочно-линейные трансверсальные зацепления L_1 и L_2 в расслоенном многообразии M , изотопные в топологической категории в классе трансверсальных, кусочно-линейно объемлемо изотопны. Для доказательства этой импликации зафиксируем на M какую-нибудь совместимую с топологией метрику и введем в рассмотрение отвечающую ей хаусдорфову метрику d_H на множестве топологических зацеплений в M . Индексом трансверсального зацепления в M назовем число точек пересечения этого зацепления со слоем заданного расслоения $p : M \rightarrow S^1$. Поскольку изотопия в классе трансверсальных зацеплений не меняет индекс, он одинаков у заданных зацеплений L_1 и L_2 . Пусть k — индекс зацеплений L_1 и L_2 . Снабженное метрикой d_H множество всех трансверсальных топологических зацеплений в M , имеющих индекс k , обозначим через $\mathcal{V}_k$.

Утверждение 1. Подмножество кусочно-линейных зацеплений плотно в $\mathcal{V}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу классической теоремы о равномерной непрерывности на компактах выполняются следующие свойства.

(А) Для произвольного заданного трансверсального топологического зацепления L в M и для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если дуга J в L при проекции p в базовую окружность дает дугу, длина которой не превышает δ , то диаметр дуги J как подмножества в M не превышает ϵ .

(В) Для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если расстояние между двумя лежащими в разных слоях точками в M не превышает δ , то найдется соединяющая эти точки трансверсальная кусочно-линейная дуга, диаметр которой не превышает ϵ .

Из (А) и (В) легко следует требуемое. $\square$

В следующем утверждении под ϵ -окрестностью $B_\epsilon(L)$ зацепления L из $\mathcal{V}_k$ имеется в виду ϵ -окрестность зацепления как точки в пространстве $\mathcal{V}_k$ с метрикой d_H .

Утверждение 2. Для произвольного зацепления L из $\mathcal{V}_k$ найдется такое вещественное $\epsilon > 0$, что любые два зацепления из $\mathcal{V}_k$, лежащие в (скажем, замкнутой) ϵ -окрестности $B_\epsilon(L)$ зацепления L , объемлемо изотопны, а любые два кусочно-линейных зацепления из $\mathcal{V}_k$, лежащие в $B_\epsilon(L)$, кусочно-линейно объемлемо изотопны.

Для доказательства утверждения 2 введем ряд вспомогательных понятий. Трехмерное кусочно-линейное подмногообразие N в M будем называть *толстым трансверсальным зацеплением*, если исходное расслоение $p : M \rightarrow S^1$ индуцирует на N структуру локально тривиального расслоения, слой которого гомеоморфен набору замкнутых дисков. (Поскольку M ориентируемо, каждое толстое трансверсальное зацепление гомеоморфно набору полноториев.) Если трансверсальное топологическое зацепление L в M является топологическим деформационным ретрактом толстого трансверсального зацепления N и содержится во внутренней u N , будем говорить, что N является *замкнутой трансверсальной трубчатой окрестностью (ЗТТО)* для L .

Утверждение 3. У каждого топологического трансверсального зацепления L в M имеется ЗТТО.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть λ — замкнутая дуга в S^1 . Замкнутое кусочно-линейное подмногообразие P , содержащееся в подмножестве $p^{-1}(\lambda)$ пространства M , будем называть *локальной ЗТТО для L над λ* , если исходное расслоение $p : M \rightarrow S^1$ индуцирует на P структуру локально тривиального расслоения и для каждой точки $s \in \lambda$ в слое $F_s = p^{-1}(s)$ множество $F_s \cap P$ является трубчатой окрестностью для набора точек $F_s \cap L$. Поскольку у каждого конечного набора точек на поверхности имеется трубчатая окрестность, опираясь на локальную тривиальность расслоения p и непрерывность, заключаем, что для каждой точки $s \in S^1$ найдется содержащая точку s во внутренней замкнутая дуга $\lambda \subset S^1$ такая, что для L над λ имеется локальная ЗТТО. Отсюда в силу соображений компактности следует, что найдется разбиение окружности на конечное число полуоткрытых дуг, над замыканием каждой из которых имеется локальная ЗТТО для L . Для получения «полной» ЗТТО из таких локальных ЗТТО над покрывающими окружность дугами достаточно «подправить края» этих локальных ЗТТО над концами дуг, чтобы они «согласовывались на стыках», и взять объединение таких «подправленных» локальных ЗТТО. Вопрос

о существовании подходящей трансформации «на стыках» сводится к рутинному вопросу о наличии кусочно-линейной изотопии (неподвижной на некоторой малой окрестности набора точек) между двумя наборами попарно не пересекающихся дисков на поверхности. Мы опускаем легко восстанавливаемые технические подробности. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Возвращаясь к доказательству утверждения 2, заметим, что в полнотории (тривиально расслоенном над окружностью) любые два трансверсальных узла единичного индекса объемлемо изотопны и — кусочно-линейно объемлемо изотопны, если расслоение и зацепления рассматривается в кусочно-линейной категории. (Это проверяется элементарными построениями: заданный полноторий можно считать прямым произведением евклидова треугольника на окружность; тогда узлы связаны изотопией, путь которой в каждом слое есть равномерное движение по отрезку; эту изотопию объемлет изотопия, неподвижная на крае и в каждый момент в каждом слое линейно переводящая каждый отрезок, соединяющий точку края с точкой узла, в такой же отрезок.) Отсюда вытекает, что если у двух трансверсальных топологических зацеплений L и L' в M имеются совпадающие ЗТТО, то L и L' топологически объемлемо изотопны, а если L и L' при этом кусочно-линейны, то они еще и кусочно-линейно объемлемо изотопны. Далее, заметим, что если L — трансверсальное зацепление из $\mathcal{V}_k$, а N — ЗТТО для L , то найдется такое вещественное $\epsilon > 0$, что N является ЗТТО для каждого зацепления из $\mathcal{V}_k$, лежащего в ϵ -окрестности $B_\epsilon(L)$ зацепления L . В композиции с утверждением 3 это доказывает утверждение 2. $\square$

Утверждение 2 интерпретируется как утверждение о «локальной» эквивалентности рассматриваемых типов изотопности в классе трансверсальных зацеплений. Покажем, что «локальная» эквивалентность влечет и «глобальную». Для этого заметим, что (в силу неравенства треугольника) функция, сопоставляющая зацеплению L из $\mathcal{V}_k$ супремум множества таких вещественных $\epsilon > 0$, что для пары (L, ϵ) выполняется свойство из утверждения 2, непрерывна (более того, 1-липпшицева), а исходное условие об изотопности (в топологической категории в классе трансверсальных) для зацеплений L_1 и L_2 интерпретируется как наличие пути $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathcal{V}_k$ из L_1 в L_2 . Следовательно, поскольку указанная функция положительна и непрерывна, а путь $\tau([0, 1])$ компактен, найдется $\epsilon' > 0$ такое, что для любой точки L на пути $\tau([0, 1])$ для метрического шара $B_{\epsilon'}(L)$ выполняется свойство из утверждения 2. Кроме того, в силу компактности пути $\tau([0, 1])$, в $\tau([0, 1])$ найдется конечная последовательность

$$\{L_1 = \ell_1, \ell_2, \dots, \ell_z = L_2\}$$

такая, что $d_H(\ell_i, \ell_{i+1}) < \epsilon'/3$ для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Воспользовавшись утверждением 1, подберем в $\mathcal{V}_k$ последовательность кусочно-линейных зацеплений

$$\{L_1 = \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_z = L_2\}$$

с $d_H(\mu_i, \ell_i) < \epsilon'/3$ для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$. Тогда по построению получаем, что для каждого $i \in \{1, \dots, z-1\}$ зацепления μ_i и μ_{i+1} лежат в $B_{\epsilon'}(\ell_i)$ и, следовательно, кусочно-линейно объемлемо изотопны, так что L_1 и L_2 кусочно-линейно объемлемо изотопны. Тем самым доказательство импликации (d) $\Rightarrow$ (b) завершено.

§ 3. Вспомогательные леммы о «выравнивании»

Доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (d) (§ 4) использует конструкции из [6] и [7] (см. также [10, лемма 2]), связанные с «выравниванием»¹⁾ поверхностей в расслоенных пространствах, и, предваряя это доказательство, мы формулируем и доказываем ряд вариаций (леммы 1 и 2 и следствия 1 и 2) леммы 3.5 из [7].

В дальнейшем изложении гомеоморфизм между расслоенными пространствами называется *послойным*, если он отправляет каждый слой в некоторый слой. Автогомеоморфизм, отправляющий каждый слой в тот же слой, называется *внутрислойным*. Изотопия расслоенного пространства называется *послойной* (соответственно *внутрислойной*), если она состоит из послойных (соответственно внутрислойных) автогомеоморфизмов. В нижеследующих леммах 1 и 2 и их доказательствах под «слоями» в рассматриваемых прямых произведениях $Y \times [0, 1]$ поверхности на отрезок понимаются поверхности $Y \times \{t\}$. Соответствующим образом трактуются понятия «послойности» и «внутрислойности». Леммы 1 и 2 и следствия 1 и 2 относятся к кусочно-линейной категории (упоминание которой для краткости опускается).

Лемма 1. Пусть Y — компактная связная ориентируемая поверхность, отличная от сферы, пусть $W = Y \times [0, 1]$, и пусть $h : W \rightarrow W$ — гомеоморфизм с $h(Y \times \{0, 1\}) = Y \times \{0, 1\}$. Тогда найдется изотопия θ пространства W , неподвижная на $Y \times \{0, 1\}$ и связывающая h с послойным гомеоморфизмом (т. е. с гомеоморфизмом, переводящим каждый слой $Y \times \{t\}$ в некоторый слой).

Лемма 2. Если в предположениях леммы 1 гомеоморфизм h переводит край $(\partial Y) \times \{t\}$ каждого слоя в край некоторого слоя (включая случай $\partial Y = \emptyset$), то изотопия θ может быть выбрана неподвижной на ∂W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1. Пусть $g : W \rightarrow W$ — какой-нибудь послойный гомеоморфизм такой, что композиция $g \circ h$ тождественна на $Y \times \{0\}$ (в качестве g можно взять, к примеру, произведение гомеоморфизмов $g_Y : Y \rightarrow Y$ и $g_I : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, где g_Y есть обратный гомеоморфизм к проекции на Y сужения на $Y \times \{0\}$ отображения h , а g_I есть тождественное отображение, если h переводит $Y \times \{0\}$ в $Y \times \{0\}$, и — нетождественная изометрия, если h переводит $Y \times \{0\}$ в $Y \times \{1\}$).

Подпространство $\partial Y \times [0, 1]$ либо пусто, либо является набором колец, а всякий автогомеоморфизм кольца $S^1 \times [0, 1]$, тождественный на одной из компонент края, связан с тождественным отображением изотопией, неподвижной на этой компоненте (см. [7, лемма 1.4.2; 11]). Отсюда следует (см. [7, доказательство леммы 3.5]), что найдется изотопия $\nu_t : W \rightarrow W$, $t \in [0, 1]$, $\nu_0 = \text{id}_W$, неподвижная на $Y \times \{0\}$, в каждый момент переводящая $Y \times \{1\}$ в $Y \times \{1\}$ и такая, что композиция

$$h' = \nu_1 \circ g \circ h$$

тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0, 1])$.

При этом сужение изотопии ν на слой $Y \times \{1\}$, как всякая изотопия слоя $Y \times \{1\}$, продолжима до некоторой внутрислойной изотопии $\sigma_t : W \rightarrow W$, $t \in [0, 1]$, $\sigma_0 = \text{id}_W$, неподвижной на $Y \times \{0\}$. Определим изотопию $\phi_t : W \rightarrow W$, $t \in [0, 1]$, полагая

$$\phi_t = \nu_t \circ \sigma_t^{-1}.$$

¹⁾Здесь и далее под «выравниванием» и «выпрямлением» поверхности в расслоенном пространстве, как и под «выравнивающими» и «выпрямляющими» изотопиями, имеются в виду изотопии, переводящие поверхность в слой расслоения.

Тогда ϕ_t неподвижна на $Y \times \{0, 1\}$ и

$$h' = \phi_1 \circ \sigma_1 \circ g \circ h,$$

т. е. мы получили переход от $g \circ h$ к h' посредством внутрислойной изотопии σ и неподвижной на $Y \times \{0, 1\}$ изотопии ϕ .

Поскольку гомеоморфизм $h' = \nu_1 \circ g \circ h$ тождествен на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0, 1])$, в силу [7, лемма 3.5] для h' найдется изотопия $\psi_t : W \rightarrow W$, $t \in [0, 1]$, $\psi_0 = \text{id}_W$, неподвижная на ∂W и «выпрямляющая» образы слоев, т. е. связывающая h' с некоторым внутрислойным гомеоморфизмом

$$h'' = \psi_1 \circ \phi_1 \circ \sigma_1 \circ g \circ h.$$

Таким образом,

$$h'' = \sigma_1 \circ g \circ (g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ [\psi_1 \circ \phi_1] \circ \sigma_1 \circ g) \circ h.$$

Поскольку h'' , σ_1 и g послойны, а ϕ_t и ψ_t неподвижны на $Y \times \{0, 1\}$, отсюда следует, что изотопия

$$\theta_t = g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ [\psi_t \circ \phi_t] \circ \sigma_1 \circ g \quad (1)$$

обладает желаемыми свойствами: она неподвижна на $Y \times \{0, 1\}$ и связывает гомеоморфизм h с послойным гомеоморфизмом $g^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \circ h''$. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Если край ∂Y непуст, а гомеоморфизм h переводит край каждого слоя в край некоторого слоя, то проекция на отрезок $[0, 1]$ сужения гомеоморфизма h на набор колец $\partial Y \times [0, 1]$ дает гомеоморфизм отрезка $[0, 1]$. Обозначим через g'_I обратный гомеоморфизм отрезка, через $g'_Y : Y \rightarrow Y$ — обратный гомеоморфизм к проекции на Y сужения на $Y \times \{0\}$ отображения h (по аналогии с первым этапом доказательства леммы 1), а через $g' : W \rightarrow W$ — произведение гомеоморфизмов g'_I и g'_Y . Тогда композиция $g' \circ h$ тождественна на $Y \times \{0\}$ и переводит край $\partial Y \times \{t\}$ каждого слоя $Y \times \{t\}$ в край того же слоя. Следовательно, найдется внутрислойный гомеоморфизм $g'' : W \rightarrow W$, тождественный на $Y \times \{0\}$ и такой, что композиция $g'' \circ g' \circ h$ тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0, 1])$. Таким образом, $g = g'' \circ g'$ есть послойный гомеоморфизм, у которого композиция $g \circ h$ тождественна на $(Y \times \{0\}) \cup (\partial Y \times [0, 1])$. В таком случае в рамках конструкции доказательства леммы 1 мы можем взять изотопии ν_t , σ_t и ϕ_t неподвижными. Тогда изотопия θ_t (1) принимает вид $g^{-1} \circ \psi_t \circ g$ и, следовательно, неподвижна на ∂W .

Если край ∂Y пуст, то изотопия θ_t (1) из леммы 1 автоматически удовлетворяет условию леммы 2, поскольку при $\partial Y = \emptyset$ имеем $\partial W = Y \times \{0, 1\}$. $\square$

Следствие 1. Пусть Y — компактная связная ориентируемая поверхность, отличная от сферы, W_1 и W_2 — трехмерные многообразия, локально тривиально расслоенные над окружностью с одним и тем же слоем Y . Пусть $h : W_1 \rightarrow W_2$ — гомеоморфизм, переводящий один из слоев в W_1 в некоторый слой Y'' в W_2 . Тогда найдется изотопия θ пространства W_2 , неподвижная на Y'' и связывающая h с послойным гомеоморфизмом.

Следствие 2. Если в предположениях следствия 1 гомеоморфизм h переводит край каждого слоя в край некоторого слоя (включая случай $\partial Y = \emptyset$), то изотопия θ может быть выбрана неподвижной на ∂W_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 1. Пусть $q_1 : Y \times [0, 1] \rightarrow W_1$ и $q_2 : Y \times [0, 1] \rightarrow W_2$ — какие-нибудь послойные представления пространств W_1 и W_2

в виде торов (кусочно-линейных) отображений с $q_1(Y \times \{0, 1\}) = h^{-1}(Y'')$ и $q_2(Y \times \{0, 1\}) = Y''$. Тогда многозначное отображение $q_2^{-1} \circ h \circ q_1$ содержит единственный автогомеоморфизм $\tilde{h}$, и этот гомеоморфизм удовлетворяет условиям леммы 1. Отправив с помощью q_2 какую-нибудь изотопию для $\tilde{h}$, существование которой гарантировано леммой 1, в изотопию на W_2 , получаем искомое. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2 проводится по аналогии с доказательством следствия 1 с добавлением условий и выводов леммы 2. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждения настоящего раздела выполняются и для случая, когда Y — сфера. Случай сферы сводится к случаю диска с помощью теоремы о лампочке. Однако в дальнейшем случай сферы нам не потребуется, и для краткости мы исключаем его из формулировок, следуя [7].

§ 4. Доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (d)

Импликация (a) $\Rightarrow$ (d) утверждает, что кусочно-линейно объемлемо изотопные трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M изотопны в топологической категории в классе трансверсальных. Докажем это с помощью следующего предложения.

Предложение 2. Если в предположениях предложения 1 трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M кусочно-линейно объемлемо изотопны, то среди кусочно-линейных объемлющих изотопий, переводящих L_1 в L_2 , найдется изотопия, финальный гомеоморфизм которой послоен (т. е. переводит каждый слой заданного расслоения на M в некоторый слой того же расслоения).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tau_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, $\tau_0 = \text{id}_M$, — кусочно-линейная изотопия, переводящая L_1 в L_2 . Для доказательства предложения достаточно построить изотопию $\rho_t : M \rightarrow M$, $t \in [0, 1]$, $\rho_0 = \text{id}_M$, дополняющую изотопию τ до изотопии с искомыми свойствами, т. е. такую, что автогомеоморфизм-композиция $\rho_1 \circ \tau_1$ послоен и переводит L_1 в L_2 (последнее эквивалентно условию $\rho_1(L_2) = L_2$).

Мы построим ρ_t в пять ступеней, — как композицию пяти изотопий:

(I) Выберем и зафиксируем произвольные ЗТТО N_1 и N_2 для L_1 и L_2 соответственно (см. утверждение 3 выше). В силу теоремы о единственности трубчатой окрестности для кусочно-линейных подмногообразий коразмерности 2 (см. [12, теорема 3]) найдется неподвижная на L_2 кусочно-линейная изотопия ρ_t^a многообразия M , переводящая $\tau_1(N_1)$ в N_2 , причем такая, что каждый слоевой²⁾ диск подмногообразия N_1 гомеоморфизмом $\rho_1^a \circ \tau_1$ переводится в слоевой диск подмногообразия N_2 .

(II) Обозначим через M_i , где $i \in \{1, 2\}$, подмногообразие $M \setminus \text{int}(N_i)$. Исходное расслоение $p : M \rightarrow S^1$ индуцирует на M_i локально тривиальное расслоение $p_i : M_i \rightarrow S^1$. (Слои расслоения p_i гомеоморфны поверхности G , получающейся из слоя F расслоения p вырезанием дыр.) Поскольку каждый слой G' расслоения p_1 является в M_1 несжимаемой поверхностью (см. [6]), образ $G'' = \rho_1^a(\tau_1(G'))$ несжимаем в M_2 . Теорема о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3] позволяет не умаляя общности считать изотопии τ и ρ^a неподвижными на крае ∂M . В совокупности с тем свойством, что каждый

²⁾Под слоевым диском ЗТТО понимаются компоненты связности пересечений ЗТТО со слоями исходного расслоения на M .

слоевой диск из N_1 гомеоморфизмом $\rho_1^a \circ \tau_1$ переводится в слойевой диск подмногообразия N_2 , это обеспечивает то, что каждая компонента края $\partial G''$ лежит в слое расслоения p_2 . В этих условиях применима теорема 4 из [6], в силу которой для правильно вложенной несжимаемой поверхности G'' в расслоенном многообразии M_2 , если каждая компонента края поверхности G'' лежит в одном из слоев расслоения, найдется изотопия, переводящая поверхность G'' либо в слой расслоения, либо в положение, когда все особенности индуцированного расслоения с особенностями являются седлами. Поскольку проекция слоя G' в базу-окружность стягиваема в базе и это обстоятельство сохраняется при изотопиях, у изотопных образов этого слоя имеются точки «максимума» и «минимума», что исключает вторую опцию используемой теоремы. Следовательно, некоторая изотопия многообразия M_2 переводит поверхность G'' в слой расслоения p_2 . Продолжим эту изотопию до изотопии ρ^b всего M , тождественной на малой окрестности зацепления L_2 (продолжимость гарантируется теоремой о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3]). Полученная изотопия ρ^b — вторая часть строимой изотопии ρ .

(III) В силу следствия 1 найдется изотопия пространства M_2 , неподвижная на слое $\rho_1^b(\rho_1^a(\tau_1(G')))$ и для каждого из слоев G_x расслоения p_1 переводящая образ $\rho_1^b(\rho_1^a(\tau_1(G_x)))$ в слой расслоения p_2 . (С исключительным случаем слоя — сферы мы не сталкиваемся, поскольку поверхность F'_x имеет в результате удаления внутренней трубочкой окрестности зацепления непустой край и сферой не является.) Продолжим такую изотопию до изотопии всего M , тождественной на малой окрестности зацепления L_2 (продолжимость гарантируется теоремой о накрывающей изотопии [13, теорема 2, следствие 2.3]). Полученная изотопия ρ^c — третья часть строимой изотопии ρ .

(IV) Дополним композицию изотопий ρ^c , ρ^b , ρ^a изотопией ρ^d с носителем в N_2 , «выпрямляющей» в N_2 образы дисков-слоев из индуцированного исходным расслоением расслоения полноториев из N_1 . Для этого сначала в каждом из полноториев многообразия N_2 изотопией, тождественной на M_2 , мы «выпрямляем» по одному диску (существование «выпрямляющей» изотопии для диска доказывается стандартным рассуждением теории несжимаемых поверхностей, изложенным, например, в [7, лемма 3.4]; край каждого диска лежит в слое расслоения p , поскольку $\rho_1^c \circ \rho_1^b \circ \rho_1^a \circ \tau_1$ переводит слои расслоения p_1 в слои расслоения p). Остальные слоевые диски в N_2 «выравниваются» в силу следствия 2.

(V) Образ $\rho_1^d(L_2)$ (может не совпадать с L_2 , однако), как и L_2 , содержится во внутренней у N_2 и пересекает каждый слойевой диск в N_2 ровно в одной точке, откуда следует, что $\rho_1^d(L_2)$ переводится в L_2 внутрислойной изотопией, которую мы обозначаем через ρ^e .

Композиция описанных изотопий ρ^e , ρ^d , ρ^c , ρ^b и ρ^a по построению дает изотопию ρ с требуемыми свойствами.

Импликация (a) $\Rightarrow$ (d) вытекает из предложения 2 в силу теоремы 1 из [9], утверждающей, что все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью трехмерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) являются *расслоениями Бирман — Хильдена*, т. е. в каждой паре изотопных и послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) автогомеоморфизмов такого расслоенного пространства автогомеоморфизмы связаны еще и послойной изотопией. Действительно, доказательство импликации (a) $\Rightarrow$ (d) очевидным образом сводится к случаю связного M . В случае связно-

го M , если трансверсальные кусочно-линейные зацепления L_1 и L_2 в M кусочно-линейно объемлемо изотопны, то в силу предложения 2 найдется послойный гомеоморфизм $r : M \rightarrow M$, переводящий L_1 в L_2 и изотопный тождественному отображению, а в силу теоремы 1 из [9] гомеоморфизм r связан с тождественным отображением послойной изотопией, т. е. L_1 и L_2 связаны объемлющей послойной изотопией, и остается лишь заметить, что такая изотопия сохраняет зацепление в классе трансверсальных.

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за предложенные поправки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
2. Morton H. R. Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.
3. Burde G., Zieschang H. Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Studies in Math.; V. 5).
4. Kassel C., Turaev V. Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
5. Grant M., Sienicka A. Isotopy and homeomorphism of closed surface braids // Glasgow Math. J. 2021. V. 63, N 4. P. 297–306.
6. Thurston W. P. A norm for the homology of 3-manifolds // Mem. Am. Math. Soc. 1986. V. 339. P. 99–130.
7. Waldhausen F. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. Math. (2). 1968. V. 87. P. 56–88.
8. Малютин А. В. Расслоения Бирман — Хильдена I // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 125–139.
9. Малютин А. В. Расслоения Бирман — Хильдена II // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 2. С. 360–375.
10. Hatcher A. Homeomorphisms of sufficiently large P^2 -irreducible 3-manifolds // Topology. 1976. V. 15, N 4. P. 343–347.
11. Epstein D. B. A. Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.
12. Wall C. T. C. Locally flat PL submanifolds with codimension two // Proc. Camb. Phil. Soc. 1967. V. 63. P. 5–8.
13. Hudson J. F. P., Zeeman E. C. On combinatorial isotopy // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 69–94.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.

После доработки 27 ноября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
 Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук,
 ул. Губкина, 8, Москва 119991;
 Санкт-Петербургское отделение
 математического института им. В. А. Стеклова РАН,
 наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
 malyutin@pdmi.ras.ru

ИТВМ-КОНСТРУКТИВНЫЕ ПОПОЛНЕНИЯ АЛГЕБР

А. С. Морозов

Аннотация. Вводится понятие ИТВМ-конструктивной алгебры, обобщающее понятие конструктивной алгебры. Для метризованных алгебр получен критерий существования пополнения. Доказывается, что любая ИТВМ-конструктивная метризованная алгебра, обладающая пополнением, может быть естественным образом расширена до своего ИТВМ-конструктивного пополнения. Полученные результаты использованы для доказательства существования ИТВМ-конструктивных представлений у некоторых конкретных алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.308

Ключевые слова: машины Блюм — Шуба — Смейла, ИТВМ-конструктивная алгебра, обобщенная вычислимость, вычислимость над вещественными числами, метризованная алгебра, пополнение.

1. Введение

Машины Блюм — Шуба — Смейла, выполняющие вычисления над вещественными числами и допускающие бесконечные вычисления, шаги которых соответствуют ординалам (Infinite time Blum–Shub–Smale machines), получившие сокращенное название ИТВМ, были предложены Кепке и Зайфертом в [1]. Авторы концепции ИТВМ высказали предположение, что все используемые в математическом анализе конструкции так или иначе могут быть определены с помощью ИТВМ и, таким образом, ИТВМ-вычислимость как бы дает оценку сверху с точки зрения обобщенной вычислимости для сложности построения используемых в математическом анализе объектов и конструкций. Так, в математическом анализе можно сначала вычислять пределы последовательности или суммировать ряды, а потом использовать полученные результаты для вычисления новых сумм или пределов и т. д., что вполне соответствует вычислениям на ИТВМ. Вышеуказанное предположение в основном подтверждается дальнейшими исследованиями, но, тем не менее, здесь стоит отметить пример ИТВМ-вычислимой функции из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, область значений которой обладает точной верхней гранью, которая уже не является ИТВМ-вычислимой (см. [2, теорема 5.4]).

Фактически данная работа продолжает изучение вопроса о соотношении ИТВМ-вычислимости и математического анализа.

Подробное изложение определений, касающихся ИТВМ, в частности, определение функций, вычисляемых на этих машинах, некоторые результаты, а также некоторые характеристики этой вычислимости можно найти в [2–4]. Для чтения этой работы желательно хотя бы поверхностное знакомство с работой [2].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-11-00170, <https://rscf.ru/project/23-11-00170>.

Поскольку ИТВМ-вычислимость напрямую использует вещественные числа, большой интерес представляет открывающаяся тем самым возможность работы с несчетными структурами, в том числе и с математическими структурами в более широком смысле (например, математическими структурами в смысле Бурбаки [5]). Особый интерес представляют структуры, связанные с математическим анализом. В частности, одним из естественных объектов исследований здесь являются метрические пространства и связанные с ними структуры.

В данной работе предлагается понятие ИТВМ-конструктивной алгебры, являющееся модификацией хорошо известного понятия конструктивной алгебры [6, 7]. Получен критерий существования пополнения для метризованных алгебр и доказывается, что любая ИТВМ-конструктивная метризованная алгебра, обладающая пополнением, может быть естественным образом расширена до полной ИТВМ-конструктивной метризованной алгебры. Полученные результаты использованы для доказательства существования ИТВМ-конструктивных представлений для некоторых конкретных алгебр.

Напомним в неформальном виде некоторые определения, касающиеся ИТВМ. Можно сказать, что ИТВМ — это абстрактное вычислительное устройство с конечным числом регистров, предназначенных для хранения вещественных чисел. У этого устройства имеется программа, в которой допускается два типа операторов: оператор присваивания, который одновременно заменяет значения во всех регистрах на значения рациональных функций с рациональными коэффициентами от значений этих регистров, и условный оператор перехода типа `if  $Q(\vec{r}) > 0$  then goto  $k$  else goto  $l$` , где $Q(\vec{r})$ — рациональная функция с рациональными коэффициентами от значений регистров $\vec{r}$, а k и l — номера операторов в программе. Главная особенность выполнения ИТВМ-программы состоит в том, что в качестве шагов в ней используются ординалы. При этом если все шаги вычисления γ , $\gamma < \alpha$, уже выполнены и α — предельный ординал, и значения во всех регистрах сходятся к конечным пределам, то следует выполнить еще один шаг $\alpha + 1$ уже с этими предельными значениями в регистрах, причем на этом шаге должна быть исполнена команда программы с наименьшим номером, исполнявшаяся до этого момента конфинально часто. Начальные данные программы — ее аргументы — загружаются в заранее объявленные входные регистры, а результат вычисления — кортеж вещественных чисел — извлекается из выходных регистров после остановки программы. Следуя обычной практике, под ИТВМ-вычислимым предикатом будем понимать предикат с ИТВМ-вычислимой характеристической функцией.

Нам понадобятся следующие результаты.

Предложение 1.1 [2, предложение 2.4]. 1. Все вычислимые предикаты над ω ИТВМ-вычислимы.

2. Если предикаты $R(\vec{x})$ и $Q(\vec{x})$ ИТВМ-вычислимы, то и предикаты $R(\vec{x}) \wedge Q(\vec{x})$, $R(\vec{x}) \vee Q(\vec{x})$, $\neg R(\vec{x})$ также ИТВМ-вычислимы.

3. Если предикат $R \subseteq \mathbb{R}^k$ и функции $f_i(\vec{y})$, $i < k$, ИТВМ-вычислимы и всюду определены, то предикат $R(f_0(\vec{y}), \dots, f_{k-1}(\vec{y}))$ также ИТВМ-вычислим.

4. Если предикат $R(\vec{x}, t)$ ИТВМ-вычислим, то предикаты $\exists t \in \omega R(\vec{x}, t)$ и $\forall t \in \omega R(\vec{x}, t)$ также ИТВМ-вычислимы. $\square$

Заметим, что из п. 4 теоремы 1.1 в частности следует, что навешивание кванторов по натуральным числам на ИТВМ-вычисляемые отношения снова дает нам ИТВМ-вычисляемые отношения.

В формулировке следующего результата через $\mathbb{R}^+$ обозначается множество всех неотрицательных вещественных чисел.

Теорема 1.1. Пусть функция $g : (\mathbb{R}^+)^n \times \omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ ИТВМ-вычислима. Тогда и функции $\sum_{i < \omega} g(\bar{x}, i)$ и $\lim_{i \rightarrow \infty} g(\bar{x}, i)$ также ИТВМ-вычислимы.

Доказательство для суммы ряда состоит в предъявлении программы, вычисляющей данную функцию. Она создается с использованием техники зуммирования вычислений из [2] и может быть получена несложной модификацией программы из доказательства п. 4 предложения 2.4 из этой работы. Доказательство для предела получается с использованием аналогичных идей. Мы оставляем это читателю. $\square$

Введем еще некоторые обозначения. Для $x \in (0, 1)$ и $n < \omega$ определим $[x]_n$ как n -ю цифру (0 или 1) в двоичном разложении числа x после запятой. В [2] показано, что эта функция ИТВМ-вычислима (см. описание программы Digit в этой работе). Обозначим через $c(x, y)$ функцию $((x + y)^2 + 3x + y)/2$. Хорошо известно, что эта функция осуществляет взаимно однозначное соответствие между ω^2 и ω . Зафиксируем также некоторые вычислимые функции ℓ и r со свойствами $\ell c(x, y) = x$, $rc(x, y) = y$, $c(\ell(x), r(x)) = x$. Пусть $n \in \omega$. Ограничение функции f на множество $\{0, \dots, n-1\}$ будем обозначать через $f \upharpoonright n$.

2. Метризованные алгебры

Здесь под *алгеброй* будем понимать произвольную алгебраическую систему, содержащую только операции. Ограничимся рассмотрением только алгебр конечных сигнатур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пару $\langle A; \rho \rangle$, где A — произвольная алгебра, а ρ — заданная на ней метрика, относительно которой все операции алгебры A непрерывны, назовем *метризованной алгеброй*.

Очевидно, что подалгебра метризованной алгебры образует метризованную алгебру.

Если ρ — произвольная метрика, то предел при i , стремящемся к бесконечности, по этой метрике будет обозначаться через $\lim_{i \rightarrow \infty}^\rho$. Если x — некоторая последовательность, проиндексированная натуральными числами, то ее i -й элемент будем обозначать через x_i . Как обычно, будем говорить, что последовательности x и y *эквивалентны*, если значение $\rho(x_j, y_j)$ стремится к 0, и записывать это как $x \sim y$.

Следующее определение сформулируем только для конечных сигнатур, но это не исключает в дальнейшем его обобщения на бесконечные сигнатуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пару $\langle A; \nu \rangle$, где A — алгебра конечной сигнатуры и ν — отображение из некоторого ИТВМ-вычислимого подмножества $D \subseteq \mathbb{R}$ на A , назовем *ИТВМ-конструктивной алгеброй*, если

- (1) все операции алгебры A ИТВМ-вычислимы на ν -номерах элементов из A , т. е. для любой сигнатурной операции $F(x_1, \dots, x_n)$ алгебры A существует ИТВМ-вычислимая функция $f(x_1, \dots, x_n)$ такая, что для любых $y_1, \dots, y_n \in D$ выполнено $F(\nu y_1, \dots, \nu y_n) = \nu f(y_1, \dots, y_n)$;
- (2) отношение $\{\langle x, y \rangle \mid \nu x = \nu y\}$ ИТВМ-вычислимо.

Отображение ν будем называть *ИТВМ-конструктивизацией* этой алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Тройку $\langle A; \rho, \nu \rangle$ назовем *ИТВМ-конструктивной метризованной алгеброй*, если

- (1) $\langle A; \nu \rangle$ — ИТВМ-конструктивная алгебра, а $\langle A; \rho \rangle$ — метризованная алгебра;
- (2) метрика ρ вычислима на ν -номерах, а именно, существует ИТВМ-вычисляемая функция g такая, что $\rho(\nu x, \nu y) = g(x, y)$.

Если сигнатура метризованной алгебры пуста, то будем также говорить об ИТВМ-вычислимом метрическом пространстве.

Отображение ν будем называть ИТВМ-конструктивизацией этой метризованной алгебры.

Если для алгебры (метризованной алгебры) существует конструктивизация ν , вместе с которой она является ИТВМ-конструктивной (ИТВМ-конструктивной метризованной алгеброй), то будем называть ее ИТВМ-представимой.

Будем говорить, что метризованная алгебра A_0 является *подалгеброй метризованной алгебры* A , если A_0 — подалгебра A и метрика алгебры A_0 является ограничением метрики алгебры A .

Следующее определение фактически является обобщением определения морфизма из теории нумераций [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Пусть $\langle A_0, \nu_0 \rangle, \langle A_1, \nu_1 \rangle$ — ИТВМ-конструктивные алгебры и $\text{dom } \nu_0 = D_0, \text{dom } \nu_1 = D_1$. Отображение $\varphi : A_0 \rightarrow A_1$ назовем ИТВМ-вычислимым, если существует ИТВМ-вычисляемое отображение $f : D_0 \rightarrow D_1$ такое, что для всех $x \in D_0$ справедливо $\varphi(\nu_0 x) = \nu_1 f(x)$.

Под *изоморфным вложением* (ИТВМ-вычислимым изоморфным вложением) *метризованных алгебр* (соответственно ИТВМ-конструктивных метризованных алгебр) будем понимать любое изоморфное вложение (соответственно ИТВМ-вычисляемое изоморфное вложение) между ними, сохраняющее метрику. Заметим, что изоморфное вложение метризованных алгебр также сохраняет пределы последовательностей.

Напомним, что метрическое пространство называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность, составленная из его элементов, имеет предел. Под *полной метризованной алгеброй* будем понимать метризованную алгебру, основное множество которой образует полное метрическое пространство относительно ее метрики.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Пусть A_0 — подалгебра метризованной алгебры A . Будем говорить, что A — пополнение A_0 , если A полна относительно ее метрики и множество A_0 плотно в A .

Предложение 2.1. Пусть A_0 — метризованная алгебра с метрикой ρ , и пусть A' и A'' — ее пополнения с метриками ρ' и ρ'' соответственно. Тогда существует изоморфизм метризованных алгебр $\theta : A' \xrightarrow{\text{на}} A''$, тождественный на A_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По сути доказательство будет отличаться от доказательства единственности пополнения метрического пространства только дополнительной проверкой того, что построенная в нем изометрия является изоморфизмом алгебр.

Пусть ρ, ρ' и ρ'' — метрики алгебр A_0, A' и A'' соответственно. Из определения следует, что $\rho \subseteq \rho', \rho''$.

Определим отображение $\theta : A' \rightarrow A''$. Пусть $a \in A'$. Поскольку A_0 плотно в A' , то a имеет вид $a = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} a_i$, для подходящих $a_i \in A_0$. Последовательность a_i имеет предел относительно ρ' , поэтому она фундаментальна в этой метрике.

Поскольку метрики ρ' и ρ'' совпадают на A_0 , последовательность a_i фундаментальна также и относительно ρ'' , поэтому в силу полноты A'' существует $b = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho''} a_i$. Положим $\theta(a) = b$.

Следующие три свойства обычно доказываются при доказательстве единственности пополнения метрических пространств, и мы оставляем их проверку читателю.

- 1 Значение $\theta(a)$ определено корректно: оно не зависит от выбора последовательности a_i .
- 2 Отображение θ сохраняет метрику: $\rho'(x, y) = \rho''(\theta(x), \theta(y))$.
- 3 θ — отображение из A' на A'' , тождественное на A_0 .

Покажем, что θ является изоморфизмом алгебр. Пусть F , F' и F'' — произвольные n -арные сигнатурные операции на A_0 , A' и A'' соответственно, соответствующие одному и тому же сигнатурному символу. Напомним, что F' и F'' расширяют F . Пусть $a^{(1)}, \dots, a^{(n)} \in A'$, $a^{(k)} = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} a_i^{(k)}$, $a_j^{(k)} \in A_0$, для всех $k = 1, \dots, n$, $j < \omega$. Используя определение θ и учитывая то, что F' и F'' совпадают на A_0 , а также непрерывность этих отображений на A' и A'' соответственно, получаем

$$\begin{aligned} \theta F'(a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) &= \theta F'(\lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} a_i^{(1)}, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} a_i^{(n)}) \\ &= \theta \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} F'(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) = \theta \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho'} F(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) = \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho''} F(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) = \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho''} F''(a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(n)}) \\ &= F''(\lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho''} a_i^{(1)}, \dots, \lim_{i \rightarrow \infty}^{\rho''} a_i^{(n)}) = F''(\theta(a^{(1)}), \dots, \theta(a^{(n)})), \end{aligned}$$

что и требовалось. $\square$

В отличие от метрических пространств не все метризованные алгебры обладают пополнением (соответствующий пример будет приведен позже). Тем не менее критерий существования пополнения выглядит достаточно просто и естественно.

Теорема 2.1 (критерий пополнимости метризованных алгебр). Пусть $\langle A; \rho \rangle$ — произвольная метризованная алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны.

- 1 $\langle A; \rho \rangle$ имеет пополнение.
- 2 Для любой операции $F(x_1, \dots, x_n)$ алгебры A и для любых фундаментальных последовательностей $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in A^\omega$ последовательность $(F(x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n)}))_{j < \omega}$ также фундаментальна.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если алгебра не содержит операций, то это утверждение является хорошо известной теоремой о существовании пополнений метрических пространств. Хорошо известны также теоремы о существовании пополнений для некоторых конкретных метризованных алгебр, например, для поля рациональных чисел с метрикой $|x - y|$ и p -адическими метриками; соответствующими пополнениями будут поля вещественных и p -адических чисел. Автор не обнаружил в литературе ни рассмотрения общего случая, ни предлагаемый в теореме 2.1 критерий. Поэтому здесь будет приведено подробное доказательство, которое, впрочем, является расширением на произвольные алгебры для классического доказательства существования пополнений метрических пространств. Достаточно подробное изложение доказательства также обусловлено тем, что его

детали и обозначения будут использованы в последующем построении ИТВМ-вычислимых пополнений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\rightarrow$ (2) очевидна.

Докажем импликацию (2) $\rightarrow$ (1). Предположим, что выполнено условие (2). Определим метризованную алгебру $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$ и проверим, что она является пополнением для $\langle A; \rho \rangle$.

ОСНОВНОЕ МНОЖЕСТВО алгебры $\bar{A}$ будет состоять из классов эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей элементов из A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАЦИЙ. Для каждой n -арной сигнатурной операции F алгебры A определим на $\bar{A}$ операцию $\bar{F}$ следующим образом: для любых фундаментальных последовательностей $x^{(1)}, \dots, x^{(n)} \in A^\omega$ полагаем

$$\bar{F}(x^{(1)}/\sim, \dots, x^{(n)}/\sim) = (F(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}))_{i < \omega} / \sim.$$

Корректность этого определения следует из условия 2 и следующей леммы

Лемма 2.1.1. Пусть $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ для всех $k = 1, \dots, n$ — фундаментальные последовательности из A^ω и $x^{(k)} \sim y^{(k)}$. Тогда

$$(F(x_i^{(1)}, \dots, x_i^{(n)}))_{i < \omega} \sim (F(y_i^{(1)}, \dots, y_i^{(n)}))_{i < \omega}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположения следует, что для всех $k = 1, \dots, n$ последовательности $x_0^{(k)}, y_0^{(k)}, x_1^{(k)}, y_1^{(k)}, x_2^{(k)}, y_2^{(k)}, \dots$ фундаментальны, откуда по условию следует, что и последовательность

$$F(x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)}), F(y_0^{(1)}, \dots, y_0^{(n)}), F(x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}), F(y_1^{(1)}, \dots, y_1^{(n)}), \dots \quad (2)$$

также фундаментальна. Поскольку последовательности в правой и левой частях (1) являются подпоследовательностями одной и той же фундаментальной последовательности (2), немедленно получается требуемое утверждение (1). Лемма доказана.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕТРИКИ $\bar{\rho}$. Как и в стандартном доказательстве существования пополнения у метрического пространства, определим теперь метрику $\bar{\rho}$ на полученной алгебре $\bar{A}$ равенством

$$\bar{\rho}(x/\sim, y/\sim) = \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, y_i).$$

Поскольку определение метрики $\bar{\rho}$ не использует операции на алгебре A , корректность этого определения, а также полнота полученного метрического пространства $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$ доказывается точно так же, как и в хорошо известных доказательствах для обычных метрических пространств.

Лемма 2.1.2. Все операции на алгебре $\bar{A}$ непрерывны относительно метрики $\bar{\rho}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что n -арная операция $\bar{F}$ не является непрерывной в точке $x^{(1)}/\sim, \dots, x^{(n)}/\sim$, где все $x^{(l)} \in A^\omega$, $l = 1, \dots, n$, — фундаментальные последовательности. Это условие можно переформулировать следующим образом: существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $m < \omega$ найдутся фундаментальные последовательности $y^{(1),m}, \dots, y^{(n),m} \in A^\omega$ такие, что

$$\bigwedge_{l=1}^n [\bar{\rho}(x^{(l)}/\sim, y^{(l),m}/\sim) < (m+1)^{-1}]$$

$$\wedge \bar{\rho}(\bar{F}(x^{(1)}/\sim, \dots, x^{(n)}/\sim), \bar{F}(y^{(1),m}/\sim, \dots, y^{(n),m}/\sim)) \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Зафиксируем такое ε и определим последовательность натуральных чисел $k_0, k_1, \dots$ по шагам.

ШАГ 0. Полагаем $k_0 = 0$.

ШАГ m . Возьмем некоторые $y^{(1),m}, \dots, y^{(n),m} \in A^\omega$, удовлетворяющие условию (3) для данного m . Выберем в качестве k_{m+1} некоторое число, удовлетворяющее условию $k_{m+1} > k_m$, а также следующему условию: для всех $k \geq k_{m+1}$ справедливо

$$\bigwedge_{l=1}^n [\rho(x_k^{(l)}, y_k^{(l),m}) < (m+1)^{-1}] \wedge \rho(F(x_k^{(1)}, \dots, x_k^{(n)}), F(y_k^{(1),m}, \dots, y_k^{(n),m})) \geq \varepsilon/2. \quad (4)$$

Описание построения последовательности закончено.

Из справедливости неравенств $\rho(x_{k_{m+1}}^{(l)}, y_{k_{m+1}}^{(l),m}) < (m+1)^{-1}$ при всех $m < \omega$, $l = 1, \dots, n$, а также фундаментальности последовательностей $(x_{k_{m+1}}^{(l)})_{m < \omega}$ следует, что каждая из последовательностей $(y_{k_{m+1}}^{(l),m})_{m < \omega}$, $l = 1, \dots, n$, фундаментальна и эквивалентна последовательности $(x_{k_{m+1}}^{(l)})_{m < \omega}$. Но в силу (4) последовательности

$$(F(x_{k_{m+1}}^{(1)}, \dots, x_{k_{m+1}}^{(n)}))_{m < \omega}, \quad (F(y_{k_{m+1}}^{(1),m}, \dots, y_{k_{m+1}}^{(n),m}))_{m < \omega}$$

неэквивалентны, что противоречит лемме 2.1.1. Лемма доказана.

Мы доказали, что $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$ является полной метризованной алгеброй. Построим изоморфное вложение метризованной алгебры $\langle A; \rho \rangle$ в $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$, в силу существования которого можно будет в дальнейшем считать $\langle A; \rho \rangle$ ее подалгеброй. Для каждого $a \in A$ определим $\xi(a) \in A^\omega$ как последовательность, тождественно равную a . Простая проверка показывает, что отображение $\psi : a \in A \rightarrow \xi(a)/\sim$ является изоморфным вложением метризованной алгебры $\langle A; \rho \rangle$ в $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$, образ которого является плотным в $\langle \bar{A}; \bar{\rho} \rangle$. Таким образом, отображение ψ годится в качестве искомого. $\square$

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Условие 2 в теореме 2.1 нельзя заменить следующим условием сохранения фундаментальности по каждой координате: для любого $k = 1, \dots, n$, любых $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n \in A$ и любой фундаментальной последовательности $x \in A^\omega$ последовательность $(F(a_1, \dots, a_{k-1}, x_j, a_{k+1}, \dots, a_n))_{j < \omega}$ также фундаментальна, поскольку оно ему не эквивалентно. Примером, различающим эти условия, может служить метризованная алгебра $\langle \langle \mathbb{R} \setminus \{0\}; F(x, y) \rangle; \rho \rangle$, где $F(x, y) = xy(x^2 + y^2)^{-1}$, с естественной метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Вышеупомянутое условие выполнено ввиду непрерывности F на множестве $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^2$. С другой стороны, для фундаментальных последовательностей $x_n = 1/(n+1)$ и $y_n = (-1)^n/(n+1)$ последовательность $F(x_n, y_n) = \frac{1}{2}(-1)^n$ уже не фундаментальна.

2. Одна и та же алгебра может иметь пополнение в одной метрике и не иметь его в другой. В частности, в отличие от метрических пространств, где пополнение существует всегда, существуют метризованные алгебры, не имеющие пополнений. В качестве примера рассмотрим алгебру $A = \langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}; \text{sg} \rangle$, где $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел, а $\text{sg}(x)$ — знак числа x :

$$\text{sg}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Метрику ρ_0 определим как обычно: $\rho_0(x, y) = |x - y|$, а для определения ρ_1 как бы отодвигаем положительную часть основного множества от отрицательной на единицу, а именно полагаем

$$\rho_1(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{если } xy > 0, \\ |x - y| + 1 & \text{в оставшемся случае.} \end{cases}$$

По теореме 2.1 алгебра A не имеет пополнения с метрикой ρ_0 но имеет пополнение с метрикой ρ_1 .

Отметим еще одно достаточно очевидное свойство пополнений метризованных алгебр.

Теорема 2.2. Пусть $\bar{A}$ — пополнение метризованной алгебры A . Тогда $\bar{A}$ и A удовлетворяют одним и тем же тождествам. $\square$

3. Существование конструктивных пополнений

Теорема 3.1. Для любой ИТВМ-конструктивной метризованной алгебры, обладающей пополнением, существует ИТВМ-вычислимо вложение в некоторое ее ИТВМ-конструктивное пополнение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\langle A; \nu, \rho \rangle$ — ИТВМ-конструктивная метризованная алгебра, обладающая пополнением, и $D \subseteq \mathbb{R}$ — область определения ν , которая согласно определению ИТВМ-вычислима. Построим ИТВМ-конструктивное пополнение для нашей метризованной алгебры, используя его описание из доказательства теоремы 2.1.

Пусть $\bar{A}$ и $\bar{\rho}$ — алгебра и ее метрика, построенные по A и ρ , как в доказательстве теоремы 2.1. Определим ИТВМ-вычислимо множество $\bar{D} \subseteq (0, 1)$ и отображение $\bar{\nu} : \bar{D} \rightarrow \bar{A}$ такие, что $\langle \bar{A}; \bar{\rho}, \bar{\nu} \rangle$ будет образовывать ИТВМ-вычислимо пополнение для $\langle A; \rho, \nu \rangle$.

Ввиду очевидного факта существования ИТВМ-вычислимой биекции из $\mathbb{R}$ на отрезок $(0, 1)$, обратная к которой также ИТВМ-вычислима, можно без ограничения общности считать, что исходное множество D также является подмножеством в интервале $(0, 1)$.

Нам понадобится некоторое ИТВМ-вычислимо кодирование последовательностей из $(0, 1)^\omega$ числами из отрезка $(0, 1)$, существование которого доказывается в следующей лемме.

Лемма 3.1.1. Существует ИТВМ-вычислимо отображение

$$\lambda : (0, 1) \times \omega \rightarrow \{0\} \cup (0, 1)$$

такое, что для любой ИТВМ-вычислимой функции $g : \mathbb{R}^n \times \omega \rightarrow (0, 1)$ найдется ИТВМ-вычислимая функция $h : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, 1)$ такая, что для всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и $j < \omega$ справедливо $g(\bar{x}, j) = \lambda(h(\bar{x}), j)$. В частности, для любой последовательности $a \in (0, 1)^\omega$ существует $b \in (0, 1)$ такое, что для всех $j < \omega$ справедливо $\lambda(b, j) = a_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неформально значение $\lambda(x, j)$ определяется следующим образом. Расположим цифры после запятой двоичного разложения числа x в виде бесконечной таблицы, у которой на пересечении i -й строки и m -го столбца находится число $[x]_{c(i, m)}$. Если эта таблица содержит строку, в которой, начиная с некоторой позиции, находятся только единицы, либо строку, состоящую целиком из нулей, то полагаем $\lambda(x, j) = 0$. В остальных случаях

в качестве $\lambda(x, j)$ берем число с нулевой целой частью, двоичное разложение которого после запятой образовано j -й строкой этой таблицы, т. е.

$$\lambda(x, j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists l \exists k_0 \forall k > k_0 ([x]_{c(l, k)} = 1), \\ 0, & \text{если } \exists l \forall k ([x]_{c(l, k)} = 0), \\ \sum_{m < \omega} 2^{-(m+1)} [x]_{c(j, m)} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

ИТВМ-вычислимость этой функции следует из предложения 1.1 и теоремы 1.1.

Функция h определяется по функции g следующим образом. Сначала последовательно расположим двоичные разложения после запятой для чисел $g(\bar{x}, j)$, $j < \omega$, друг над другом в виде бесконечной таблицы, а потом определим $h(\bar{x})$ как число с нулевой целой частью, в двоичном разложении которого на j -м месте находится элемент (равный 0 или 1), находящийся на пересечении $\ell(j)$ -й строки и $r(j)$ -столбца этой таблицы, иначе говоря, полагаем

$$h(\bar{x}) = \sum_{j < \omega} 2^{-(j+1)} [g(\bar{x}, \ell(j))]_{r(j)}.$$

ИТВМ-вычислимость функции h следует из предложения 1.1 и теоремы 1.1. Легко проверяется, что функции λ и построенная по g функция h обладают также остальными требуемыми свойствами. Лемма доказана.

Определим теперь кодирование элементов из замыкания $\bar{A}$ алгебры A . Множество $\bar{D}$ всех возможных кодов элементов из $\bar{A}$ будет состоять из таких $x \in (0, 1)$, что последовательность $(\lambda(x, i))_{i < \omega}$ состоит из элементов множества D и фундаментальна, т. е.

$$\bar{D} = \{x \in (0, 1) \mid \forall i (\lambda(x, i) \in D) \wedge [\forall m \exists k \forall u, v \geq k (\rho(\nu\lambda(x, u), \nu\lambda(x, v)) < (m+1)^{-1})]\}.$$

ИТВМ-вычислимость множества $\bar{D}$ следует из предложения 1.1.

Определим отображение $\bar{\nu}$. Для произвольного $x \in \bar{D}$ положим $\bar{\nu}x$ равным элементу из $\bar{A}$, определяемому фундаментальной последовательностью $(\nu\lambda(x, i))_{i < \omega}$, т. е.

$$\bar{\nu}x = (\nu\lambda(x, i))_{i < \omega} / \sim.$$

Остается проверить, что $\langle \bar{A}; \bar{\rho}, \bar{\nu} \rangle$ — ИТВМ-конструктивная метризованная алгебра.

ИТВМ-вычислимость отношения $\bar{\nu}x = \bar{\nu}y$ следует из эквивалентности

$$\bar{\nu}x = \bar{\nu}y \Leftrightarrow \forall m \exists k \forall l > k [\rho(\nu\lambda(x, l), \nu\lambda(y, l)) < (m+1)^{-1}],$$

вычислимости метрики ρ на ν -номерах и предложения 1.1.

ИТВМ-вычислимость метрики $\bar{\rho}$ относительно $\bar{\nu}$ следует из равенства

$$\bar{\rho}(\bar{\nu}x, \bar{\nu}y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(\nu\lambda(x, k), \nu\lambda(y, k)),$$

вычислимости метрики ρ на ν -номерах, предложения 1.1 и теоремы 1.1.

Проверим вычислимость сигнатурных операций на $\bar{\nu}$ -номерах. Пусть F — сигнатурная операция и f — ИТВМ-вычисляемая функция со свойством

$$F(\nu x_1, \dots, \nu x_n) = \nu f(x_1, \dots, x_n),$$

для всех $x_1, \dots, x_n \in \overline{D}$. Учитывая определения операций на пополнении, сформулированные в доказательстве теоремы 2.1, получаем, что

$$\begin{aligned}\overline{F}(\overline{\nu}x_1, \dots, \overline{\nu}x_n) &= \overline{F}((\nu\lambda(x_1, i))_{i < \omega} / \sim, \dots, (\nu\lambda(x_n, i))_{i < \omega} / \sim) \\ &= (F(\nu\lambda(x_1, i), \dots, \nu\lambda(x_n, i)))_{i < \omega} / \sim \\ &= (\nu f(\lambda(x_1, i), \dots, \lambda(x_n, i)))_{i < \omega} / \sim\end{aligned}$$

для любых $x_1, \dots, x_n \in \overline{D}$. По лемме 3.1.1 существует ИТВМ-вычислимая функция $\overline{f}(\overline{x})$, для которой справедливо тождество

$$f(\lambda(x_1, i), \dots, \lambda(x_n, i)) = \lambda(\overline{f}(x_1, \dots, x_n), i).$$

Цепочку равенств (5) теперь можно продолжить так:

$$(\nu f(\lambda(x_1, i), \dots, \lambda(x_n, i)))_{i < \omega} / \sim = (\nu \lambda(\overline{f}(x_1, \dots, x_n), i))_{i < \omega} / \sim = \overline{\nu} \overline{f}(x_1, \dots, x_n),$$

откуда и получаем требуемое.

Для завершения доказательства достаточно проверить, что отображение ψ , построенное в доказательстве теоремы 2.1, ИТВМ-вычислимо на $\overline{\mathcal{T}}$ -номерах. Пусть λ определена как в доказательстве леммы 3.1.1. Прямое применение определений показывает, что

$$\psi \nu x = \overline{\nu} \sum_{j < \omega} 2^{-(j+1)} [x]_{r(j)}.$$

По теореме 1.1 отображение ψ ИТВМ-вычислимо. $\square$

В частном случае, когда сигнатура алгебры пуста, получаем

Следствие 3.1.1. *Любое ИТВМ-вычислимое метрическое пространство обладает ИТВМ-вычислимым вложением в полное ИТВМ-вычислимое метрическое пространство.*

4. Некоторые приложения

Здесь будут приведены некоторые примеры метризованных алгебр, ИТВМ-представимость которых получается как следствие теоремы 3.1. Разумеется, не исключается возможность доказательства этих результатов другими методами.

Следующий результат получается как следствие из того, что поле рациональных чисел с p -адической метрикой образует метризованную алгебру, а поле $\mathbb{Q}_p$ с p -адической метрикой является его пополнением.

Теорема 4.1. *Пусть p — простое число. Поле p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$, снабженное p -адической метрикой, является метризованной алгеброй, которая имеет ИТВМ-конструктивное представление.* $\square$

Обозначим через C множество всех непрерывных функций из отрезка $[0, 1]$ в себя. Очевидно, что C замкнуто относительно операции композиции, которую будем обозначать через $\circ$. Определим на C естественную метрику ρ :

$$\rho(f_0, f_1) = \sup_{x \in [0, 1]} |f_0(x) - f_1(x)|.$$

Теорема 4.2. $\langle C; \circ, \rho \rangle$ является ИТВМ-представимой метризованной алгеброй.

Доказательство. Сначала проверим, что это метризованная алгебра. Для этого достаточно проверить непрерывность композиции. Зафиксируем $f_0, g_0 \in C$ и докажем непрерывность этой операции в точке (f_0, g_0) . Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ такое, что для любых $y, y' \in [0, 1]$ из $|y - y'| < \delta$ следует $|f_0(y) - f_0(y')| < \varepsilon/2$. Такое δ существует из-за равномерной непрерывности f_0 на компактном множестве $[0, 1]$. Пусть произвольные $f, g \in C$ таковы, что $\rho(f, f_0) < \varepsilon/2$ и $\rho(g, g_0) < \delta$. Тогда для всех $x \in [0, 1]$ справедливо

$$|f_0 g_0(x) - f g(x)| \leq |f_0 g_0(x) - f_0 g(x)| + |f_0 g(x) - f g(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, при любых $f, g \in C$ таких, что $\rho(f, f_0) < \varepsilon/2$ и $\rho(g, g_0) < \delta$, имеем $\rho(f_0 g_0, f g) \leq \varepsilon$, откуда и следует требуемое.

Теперь достаточно представить нашу алгебру в виде замыкания некоторой ИТВМ-представимой метризованной алгебры.

Пусть C_0 — множество всех непрерывных кусочно линейных отображений из замкнутого отрезка $[0, 1]$ в себя с рациональными параметрами, т. е. элементами C_0 являются в точности все непрерывные отображения из $[0, 1]$ в себя, для которых существует конечная последовательность рациональных чисел $0 = a_0 < \dots < a_{k+1} = 1$ такая, что на каждом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ эта функция имеет вид $b_i x + c_i$, для подходящих $b_i, c_i \in \mathbb{Q}$.

Очевидно, что C_0 замкнуто относительно композиции и потому $\langle C_0; \rho \rangle$ является подалгеброй метризованной алгебры $\langle C; \rho \rangle$.

Пусть ν — произвольное кодирование элементов из C_0 натуральными числами, в котором по номеру n элемента однозначно эффективно восстанавливаются рациональные числа a_i, b_i, c_i как в описании элементов множества C_0 . Тогда по номерам элементов эффективно вычисляется некоторый номер их композиции, а также расстояние ρ между ними, т. е. $\langle \langle C_0; \circ \rangle; \rho, \nu \rangle$ — ИТВМ-конструктивная метризованная алгебра.

Для завершения доказательства достаточно показать, что C является замыканием для C_0 . В свою очередь, для этого достаточно проверить, что относительно метрики ρ алгебра C полна и что алгебра C_0 плотна в C . Оба утверждения являются хорошо известными теоремами из математического анализа. $\square$

Теорема 4.3. Группа всех перестановок счетного множества $\text{Sym}(\omega)$ ИТВМ-представима.

Доказательство. Определим на группе $\text{Sym}(\omega)$ метрику ρ следующим образом: для $f_0, f_1 \in \text{Sym}(\omega)$ положим

$$\rho(f_0, f_1) = \inf \{ 2^{-n} \mid (f_0 \upharpoonright n = f_1 \upharpoonright n) \wedge (f_0^{-1} \upharpoonright n = f_1^{-1} \upharpoonright n) \}.$$

Непосредственно проверяется, что $\langle \text{Sym}(\omega); \rho \rangle$ — полная метризованная алгебра, которая является пополнением алгебры $\langle \text{Fin}; \rho \rangle$, где Fin — подгруппа финитарных перестановок, т. е.

$$\text{Fin} = \{ f \in \text{Sym}(\omega) \mid |\{x \mid f(x) \neq x\}| < \omega \}.$$

Остается заметить, что $\langle \text{Fin}; \rho \rangle$ — ИТВМ-представимая метризованная алгебра и применить теорему 3.1. $\square$

Теорема 4.4. Полугруппа по композиции всех отображений счетного множества в себя ITBM-представима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим эту полугруппу через F . Без ограничения общности можно считать, что F состоит из всех отображений из ω в ω . Рассмотрим на ней стандартную бэровскую метрику

$$\rho(f_0, f_1) = \inf\{2^{-n} \mid f_0 \upharpoonright n = f_1 \upharpoonright n\}.$$

Как нетрудно видеть, $\langle F; \rho \rangle$ — метризованная алгебра. Легко видеть, что ее подалгебра, состоящая из отображений, тождественных везде кроме конечного числа элементов, имеет ITBM-вычислимое представление. Теперь теорема следует из теоремы 3.1. $\square$

Теорема 4.5. Булева алгебра всех подмножеств счетного множества ITBM-представима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть B — булева алгебра, образованная всеми подмножествами ω . Рассмотрим на B канторовскую метрику ρ , определяемую для $a, b \in B$ как

$$\rho(a, b) = \inf\{2^{-n} \mid \chi_a \upharpoonright n = \chi_b \upharpoonright n\},$$

где χ_a и χ_b — характеристические функции для a и b соответственно. Тогда $\langle B; \rho \rangle$ — метризованная алгебра, являющаяся пополнением своей подалгебры, образованной конечными и коконечными подмножествами. По теореме 3.1 B имеет ITBM-вычислимое представление. $\square$

Благодарность. Автор выражает благодарность С. С. Кутателадзе за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Seyffert B., Koepke P. Towards a theory of infinite time Blum–Shub–Smale machines // How the World computes (Proceedings CiE 2012). Lecture Notes in Computer Science. V. 7318. 2012. P. 405–415.
2. Кёпке П., Морозов А. С. О вычислительных возможностях машин Блюм — Шуба — Смэйла, работающих в бесконечном времени // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 1. С. 55–92.
3. Кёпке П., Морозов А. С. Характеризации ITBM-вычислимости. I // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 6. С. 627–648.
4. Кёпке П., Морозов А. С. Характеризации ITBM-вычислимости. II // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 1. С. 39–56.
5. Бурбаки Н. Теория множеств. М.: Мир, 1965.
6. Мальцев А. И. Конструктивные алгебры. I // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 3. С. 3–60.
7. Ершов Ю. Л., Гончаров С. С. Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.
8. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 4 октября 2023 г.

После доработки 6 марта 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru

ОБ ОБОБЩЕННОЙ КОНСТРУКЦИИ МИЦУХАРЫ

А. П. Пожидаев

Аннотация. Дается описание идеалов в расширениях Мицухары. Находятся необходимые и достаточные условия простоты прямого расширения Мицухары. Исследуется конструкция Мицухары для матричной алгебры и алгебр Бурдэ. Строятся различные обобщения конструкции Мицухары и даются примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности, строятся простые дубли Витта $\mathcal{A}_d$ и $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ ассоциативной коммутативной унитарной алгебры $\mathcal{A}$ с дифференцированием d .

DOI 10.33048/smzh.2024.65.309

Ключевые слова: левосимметрическая алгебра, правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелиева алгебра, конструкция Мицухары, эндоморф, алгебра Бурдэ, дубль Витта.

§ 1. Введение

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *левосимметрической* (*прелиевой*), если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathfrak{A}$ левосимметричен, т. е. симметричен относительно двух первых элементов: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathfrak{A}$ (далее символ $:=$ означает равенство по определению). Как легко видеть, левосимметрические алгебры являются естественным обобщением ассоциативных алгебр и они также Ли-допустимы.

Левосимметрические алгебры естественно возникают в различных контекстах. По-видимому, эти алгебры впервые возникли в работе Кэли в 1857 г. [1]. В 1961 г. Кожуль применил их при изучении действий аффинных преобразований [2]. В 1963 г. Винберг использовал левосимметрические алгебры при классификации выпуклых однородных конусов [3], а Герстенхабер — при изучении деформаций алгебр [4]. Левосимметрические алгебры также возникают при изучении уравнения Янга — Бакстера [5], в дифференциальной геометрии плоских многообразий [6] и в теории представлений групп Ли [7]. Для многообразия алгебр $\mathcal{V}$ общее понятие пре- $\mathcal{V}$ -многообразия было определено в [8]. Легко видеть, что понятие левосимметрической алгебры совпадает с понятием прелиевой алгебры. Таким образом, в настоящее время левосимметрические алгебры известны как *алгебры Кожуля — Винберга*, *алгебры Винберга*, *алгебры Кожуля*, *прелиевы алгебры* и *алгебры Герстенхабера*. Частными случаями левосимметрических алгебр являются так называемые ассосимметрические алгебры и алгебры Новикова, глубоко исследованные многими авторами (см., например, [9, 10]).

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

В работе [11] была введена конструкция одномерного расширения левосимметрической алгебры и построены различные примеры простых левосимметрических алгебр, в основном исходя из «вырожденных» алгебр. Случай, когда исходная алгебра простая, остался в [11] неисследован. Изучению этого случая, в частности, посвящена данная работа; случай, когда исходная алгебра является эндоморфом, рассмотрен в [12], а в настоящей работе рассматривается конструкция Мицухары для матричных алгебр и алгебр Бурдэ. Отметим, что конструкция Мицухары играет важную роль при построении и изучении простых прелиевых алгебр.

Статья организована следующим образом. В § 2 дается описание идеалов в расширениях Мицухары, а также находятся необходимые и достаточные условия простоты прямого расширения Мицухары. В § 3 исследуется конструкция Мицухары для матричной алгебры, а в § 4 — для алгебр Бурдэ. В § 5 строятся различные обобщения конструкции Мицухары и даются примеры простых прелиевых алгебр, полученных при помощи данной конструкции, в частности, строятся простые дубли Витта $\mathcal{A}_d$ и $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ ассоциативной коммутативной унитарной алгебры $\mathcal{A}$ с дифференцированием d .

Зафиксируем произвольное основное поле F , характеристику поля F будем обозначать символом $\chi(F)$. В дальнейшем $\langle \Upsilon \rangle := \langle \Upsilon \rangle_F$ — линейная оболочка множества Υ над F , где мы опускаем символ F , если поле ясно из контекста. Для данной алгебры $\mathfrak{A}$ через L_a и R_a обозначаются операторы левого и правого умножений на элемент $a \in \mathfrak{A}$, т. е. $L_a(b) = ab = R_b(a)$ для любого $b \in \mathfrak{A}$. Всюду далее через e_{ij} обозначаются обычные матричные единицы, $E := 1$ — единичная матрица (или тождественное преобразование); δ_{ij} — символ Кронекера; $(x, y, z)_{is} := (x, y, z) - (y, x, z)$; $[x, y] := xy - yx$. Если V — векторное пространство над F , то через V^* обозначаем дуальное пространство к V , а через $\text{End}(V)$ — алгебру всех F -линейных операторов на V ; образ элемента $x \in V$ под действием $\phi \in \text{End}(V)$ часто обозначается через $\phi_x := \phi(x)$.

§ 2. Конструкция Мицухары

Пусть $\mathfrak{A}$ — левосимметрическая алгебра над полем F . Следуя [13], симметрическую билинейную форму $H(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{A}$ со значениями в F будем называть *гессианом*, если

$$H(xy, z) - H(x, yz) = H(yx, z) - H(y, xz) \quad (1)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{A}$.

Напомним конструкцию Мицухары [11] расширения левосимметрической алгебры $\mathfrak{A}$ при помощи нильпотента или идемпотента, т. е. такого элемента u , что $u^2 = \varepsilon u$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$, $u \notin \mathfrak{A}$ (элемент u будем называть ε -*потентом*). Гессиап H и дифференцирование D на $\mathfrak{A}$ назовем ε -*согласованными*, если

$$\varepsilon H(x, y) = H(D_x, y) + H(x, D_y)$$

для любых $x, y \in \mathfrak{A}$ (при этом согласованные пары $(H, 0)$ и $(0, D)$ назовем *тривиальными*). Рассмотрим одномерное расширение $\mathfrak{A}$ при помощи F -и ε -согласованной пары (H, D) , на котором произведение определяется правилами

$$u \cdot u = \varepsilon u, \quad u \cdot x = D_x, \quad x \cdot u = 0, \quad x \cdot y = xy + H(x, y)u$$

для всех $x, y \in \mathfrak{A}$. Обозначим полученную алгебру через $\mathfrak{A}(H, D)$. Алгебру $\mathfrak{A}(H, D)$ будем называть ε -*расширением Мицухары* алгебры $\mathfrak{A}$. Как замечено в

[11], $\mathfrak{A}(H, D)$ является левосимметрической алгеброй. Заметим, что ε -потент u порождает одномерный левый идеал, и такой ε -потент u будем называть *главным*.

Обозначим через $M^\perp := \{x \in \mathfrak{A} : H(x, m) = 0 \text{ для любого } m \in M\}$ ортогональное дополнение к множеству M в алгебре $\mathfrak{A}$ относительно гессиана H алгебры $\mathfrak{A}$.

Лемма 2.1 [11]. Подпространство $I = Fu \oplus J$ является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathfrak{A}$, что $D(\mathfrak{A}) \subseteq J$. Подпространство J из $\mathfrak{A}$ является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда J — такой идеал в $\mathfrak{A}$, что $D(J) \subseteq J$ и $J \subseteq \mathfrak{A}^\perp$.

Данная лемма не дает описания всех идеалов в $\mathfrak{A}(H, D)$ при $\varepsilon = 0$, что было отмечено в [11]. В этом случае возможны также «неоднородные» идеалы, описываемые леммой 2.2, для формулировки которой удобно ввести следующее техническое определение. Пусть (H, D) — ε -согласованная пара на алгебре $\mathfrak{A}$. Левый D -инвариантный идеал I алгебры $\mathfrak{A}$ назовем (H, D) -идеалом с компаньоном $\alpha \in I^*$, если

$$ax + \alpha_a D_x \in I, \quad \alpha(xa) = \alpha(ax + \alpha_a D_x) = H(a, x), \quad \alpha(D_a) = 0$$

для всех $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$.

Лемма 2.2. Пусть J — подпространство в $\mathfrak{A}(H, D)$ такое, что $J \not\subseteq \mathfrak{A}$, $u \notin J$. Тогда J является идеалом в $\mathfrak{A}(H, D)$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{A}$ существует (H, D) -идеал I с компаньоном α такой, что

$$J = \langle a + \alpha_a : a \in I \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть J — идеал в $\mathfrak{A}(H, D)$, $J \not\subseteq \mathfrak{A}$, $u \notin J$. Тогда $a + u \in J$ для некоторого ненулевого $a \in \mathfrak{A}$. Из условий на J следует, что $\varepsilon = 0$. Пусть $I = \{x \in \mathfrak{A} : x + \alpha_x u \in J \text{ для некоторого } \alpha_x \in F\}$. Заметим, что I — подпространство в $\mathfrak{A}$ и α_x определен единственным образом для любого $x \in \mathfrak{A}$. Таким образом, естественно определяется $\alpha \in I^*$. Если $a + \alpha_a u \in J$, то $u \cdot (a + \alpha_a u) = D_a \in J$, т. е. $D_I \subseteq I$, $\alpha(D_I) = 0$. Далее, пусть $(,) := H(,)$, тогда

$$(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a, x)u + \alpha_a D_x \in J, \quad x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a, x)u \in J,$$

откуда

$$xa \in I, \quad ax + \alpha_a D_x \in I, \quad \alpha(xa) = \alpha(ax + \alpha_a D_x) = (a, x)$$

для любых $a \in I$, $x \in \mathfrak{A}$.

Обратно, если I — (H, D) -идеал в $\mathfrak{A}$ с компаньоном α , то $J = \langle a + \alpha_a u : a \in I \rangle$ — идеал в $\mathfrak{A}(H, D)$. Действительно, $(a + \alpha_a u) \cdot u = 0$, $u \cdot (a + \alpha_a u) = D_a \in J$, $(a + \alpha_a u) \cdot x = ax + (a, x)u + \alpha_a D_x \in J$, $x \cdot (a + \alpha_a u) = xa + (a, x)u \in J$, что и требовалось. $\square$

Зафиксируем $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Пусть $\mathcal{A}_i(H_i, D_i)$ — ε -расширения Мицухары левосимметрических алгебр $\mathcal{A}_i$, $i = 1, 2$. Рассмотрим прямую сумму $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$ алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ (как идеалов). Обозначим через $\mathcal{D}$ (соответственно $\mathcal{H}$) дифференцирование (гессиан) алгебры $\mathcal{A}$, определенные правилами:

$$\mathcal{D}|_{\mathcal{A}_i} = D_i, \quad \mathcal{H}|_{\mathcal{A}_i} = H_i, \quad \mathcal{H}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Как следует из [11], $(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ является согласованной парой на $\mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}(\mathcal{H}, \mathcal{D})$ называется прямым *расширением Мицухары* алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. (Отметим, что «старые» ε -потенты алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ никак не участвуют в определении

прямого расширения Мицухары.) Левосимметрическая алгебра $\mathcal{A}$ называется *разложимой*, если существуют нетривиальные алгебры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такие, что $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. В противном случае $\mathcal{A}$ называется *неразложимой*. Назовем алгебру $\mathcal{A}$ *просто неразложимой*, если $\mathcal{A}$ не является прямым расширением Мицухары двух простых алгебр. Важность ε -расширения Мицухары объясняет следующее

Предложение 2.1 [11]. Пусть $\mathcal{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$. Если $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ простые, то и $\mathcal{A}$ простая.

Усилим данное предложение. Для этого введем следующее определение. Алгебру $\mathcal{A}(H, D)$ назовем *расширяемо простой*, если она либо проста, либо любой ее собственный идеал не совпадает с $\mathcal{A}$, имеет коразмерность 1 и не содержит главного ε -потента.

Теорема 2.1. Пусть $\mathfrak{A}$ является прямым расширением Мицухары алгебр $\mathcal{A} := \mathfrak{A}_1(H_1, D_1)$ и $\mathcal{B} := \mathfrak{A}_2(H_2, D_2)$. Алгебра $\mathfrak{A}$ проста тогда и только тогда, когда одна из алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ проста, а другая расширяемо проста.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ проста, а $\mathcal{B}$ расширяемо проста; $\mathcal{D}, \mathcal{H}$ определены при помощи (2). Далее считаем $\varepsilon = 0$, так как при $\varepsilon = 1$ рассуждения становятся только проще. Пусть J — идеал в $\mathfrak{A}$ и $I = \{x \in \mathfrak{A}_1 : x + \alpha u \in J \text{ для некоторого } \alpha \in F\}$.

Рассмотрим сначала случай $I \neq 0$. Тогда $a + \alpha u \in J$ для некоторых одновременно ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1$, $\alpha \in F$. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Тогда $(a + \alpha u) \cdot \mathfrak{A}_2 = \mathcal{D}(\mathfrak{A}_2) \subseteq J$. Так как $\mathcal{B}$ расширяемо проста и $\mathcal{D}(\mathfrak{A}_2) \neq 0$, то $b + u \in J$ для некоторого $b \in \mathcal{B}$, откуда $0 \neq \mathcal{D}(\mathfrak{A}_1) \subseteq J$. Так как $\mathcal{A}$ проста, то $\mathcal{A} \subseteq J$, $u \in J$ и в итоге $J = \mathfrak{A}$. Если же $I \subseteq \mathfrak{A}_1$, то $\mathcal{H}(I, \mathfrak{A}_1) = 0$, откуда $I \trianglelefteq \mathcal{A}$; противоречие.

В случае $b + \alpha u \in J$ для некоторых одновременно ненулевых $b \in \mathfrak{A}_2$, $\alpha \in F$ имеем $(b + \alpha u) \cdot \mathfrak{A}_1 = \mathcal{D}(\mathfrak{A}_1) \subseteq J$. Так как $\mathcal{A}$ проста, то $\mathcal{A} \subseteq J$ и $u \in J$, откуда $J = \mathfrak{A}$. Если же $0 \neq \mathcal{B} \cap J \subseteq \mathfrak{A}_2$, то, так как $\mathcal{B}$ расширяемо проста, $b + u \in J$ для некоторого ненулевого $b \in \mathfrak{A}_2$, что противоречит предыдущему предположению.

Пусть $a + b \in J$ для некоторых ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1$, $b \in \mathfrak{A}_2$. Пусть $I := \{x \in \mathfrak{A}_1 : x + y \in J \text{ для некоторого } b \in \mathfrak{A}_2\}$. Тогда $a\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_1a = 0$, $\mathcal{H}(I, \mathfrak{A}_1) = 0$, $\mathcal{D}(I) \subseteq I$, так как иначе приходим к случаю, рассмотренному выше. Но тогда $I \trianglelefteq \mathcal{A}$; противоречие.

Окончательно, пусть $v = a + b + u \in J$ для некоторых ненулевых $a \in \mathfrak{A}_1$, $b \in \mathfrak{A}_2$. Можно считать, что $uv = 0$, так как иначе приходим к предыдущим случаям. Так как $\mathcal{A}$ проста, то, домножая v на элементы из $\mathcal{A}$, получим $\mathcal{A} \subseteq J$, что рассмотрено выше.

Обратно, пусть $\mathfrak{A}$ проста, а I — собственный идеал в $\mathcal{A}$. Тогда $I + \mathcal{B}$ является идеалом в $\mathfrak{A}$ (отождествляя главные ε -потенты алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ с главным ε -потентом алгебры $\mathfrak{A}$). Значит, $\text{codim}_{\mathcal{A}} I = 1$. Если $I = \mathfrak{A}_1$, то $I \trianglelefteq \mathfrak{A}$. Если $u \in I$, то $I + \mathfrak{A}_2$ — собственный идеал в $\mathfrak{A}$. Если J — аналогичный собственный идеал в $\mathcal{B}$, то $I + J$ — собственный идеал в $\mathfrak{A}$. Таким образом, одна из алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ должна быть простой, а другая — расширяемо простой. $\square$

§ 3. О конструкции Мицухары для матричной алгебры

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра, то $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] := \langle [x, y] : x, y \in \mathfrak{A} \rangle$.

Лемма 3.1. Если $\mathfrak{A}$ — левосимметрическая алгебра с 1, а $H := (\cdot, \cdot)$ — гессиян на $\mathfrak{A}$, то H полностью определяется своими значениями на 1 и базисе

$\mathcal{B}$ дополнения $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$, т. е. элементами $(1, b)$, $b \in \mathcal{B}$, при этом $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] \subseteq F^\perp$ и $(x, y) = (1, xy)$ для любых $x, y \in \mathfrak{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $z = 1$ в (1), получаем $(1, xy) = (1, yx)$ для любых $x, y \in \mathfrak{A}$. Полагая $y = 1$ в (1), получаем $(xz, 1) = (x, z)$ для любых $x, z \in \mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}] \oplus \mathcal{B}$ и $\{b_i : i \in I\}$ — базис $\mathcal{B}$. Определим $(1, b_i) = \beta_i \in F$ для всех $i \in I$, $(1, a) = 0$ при $a \in [\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ и $(x, y) = (1, xy)$ для любых $x, y \in \mathfrak{A}$. Тогда форма $(\cdot, \cdot)$ симметрична на $\mathfrak{A}$ и

$$(xy, z) - (x, yz) = (1, xy \cdot z - x \cdot yz) = (1, yx \cdot z) - (1, y \cdot xz) = (yx, z) - (y, xz)$$

для любых $x, y, z \in \mathfrak{A}$, что следует из левосимметричности $\mathfrak{A}$. $\square$

Заметим, что если $\mathfrak{A}$ — алгебра с 1 и $\mathfrak{A} = F1 \oplus B$, где B — подалгебра в $\mathfrak{A}$, то гессиан на $\mathfrak{A}$ индуцирует гессиан на B , но не всякий гессиан с B поднимается до гессиана на $\mathfrak{A}$. К примеру, рассмотрим кольцо строго треугольных матриц $\mathfrak{A} = ST_3(F)$ над полем F характеристики не 2. Легко видеть, что любой гессиан H на $\mathfrak{A}$ задается условием $\text{Ker } H = \mathfrak{A}^2$, где $\mathfrak{A}^2$ — квадрат алгебры $\mathfrak{A}$. Рассматривая произвольный гессиан $H^\sharp$ на $\mathfrak{A}^\sharp$ (присоединяя 1 к $\mathfrak{A}$: $\mathfrak{A}^\sharp := F1 \oplus \mathfrak{A}$), получаем, что $H^\sharp = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Обозначим через Tr симметрическую билинейную форму на $M_n(F)$, определенную равенством $\text{Tr}(A, B) = \text{tr}(AB)$ для любых $A, B \in M_n(F)$, где tr — это функция следа на матрицах. Легко видеть, что Tr является гессианом.

Следствие 3.1. Если H — гессиан на $M_n(F)$, то $H = \alpha \cdot \text{Tr}$ для некоторого $\alpha \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3.1 $H(1, A) = 0$, если $\text{tr}(A) = 0$. Так как любой элемент из $M_n(F)$ однозначно представим в виде $\alpha E + A$, где E — единичная матрица, а $\text{tr}(A) = 0$, то H полностью определяется значением $H(1, 1)$. Поскольку $\text{Tr}(A, B)$ является гессианом, то $H = \alpha \cdot \text{Tr}$ для некоторого $\alpha \in F$. $\square$

Так как любое дифференцирование алгебры $M_n(F)$ является внутренним и $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$ для любых $A, B, C \in M_n(F)$, то любая 1-согласованная пара на $M_n(F)$ тривиальна, т. е. с нулевым гессианом. Рассмотрим случай 0-согласованной пары (Tr, D) на $M_n(F)$. Далее предполагаем, что $n > 1$, так как иначе все дифференцирования матричной алгебры тривиальны. Легко заметить, что сама (левосимметрическая) алгебра $M_n(F)$ неразложима, так как не содержит левых аннуляторов элемента размерности $n^2 - 1$.

Теорема 3.1. Любое 0-расширение Мицухары алгебры $M_n(F)$, $n \geq 2$, является локальной расширяемой простой алгеброй для любых ненулевых дифференцирования D и гессиана $H = \alpha \text{Tr}$. Ее единственным собственным идеалом является простая неассоциативная неразложимая левосимметрическая алгебра

$$M_n(F)_u = \langle A + \text{tr}(A)u : A \in M_n(F) \rangle.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha = 1$. Пусть I — собственный идеал в $M_n(F)(\text{Tr}, D)$. Так как алгебра $M_n(F)$ проста, $D \neq 0$, $H = \text{Tr}$, по лемме 2.1 можно считать, что $A + u \in I$ для некоторой ненулевой матрицы $A \in M_n(F)$, $u \notin I$. Заметим, что если некоторая матрица S лежит в I , то $\text{tr}(S) = 0$, так как иначе $S \cdot E = S + \text{tr}(S)u \in I$ и $u \in I$. Если I одномерен, то из включения $B \cdot (A + u) = B \cdot A = BA + \text{tr}(BA)u \in I$ следует, что $BA = \text{tr}(BA)A$ для любой $B \in M_n(F)$, а это невозможно.

Далее считаем, что $\dim I \geq 2$, $A + u \in I$ и $\text{tr}(A) = 1$, что можно получить из равенства выше, полагая $B = E$. Из соображений размерности также получаем, что I содержит ненулевую матрицу C со следом 0. Так как $C \cdot B = CB + \text{tr}(CB)u \in I$, то $[B, C] \in I$ для всех $B \in M_n(F)$. Тогда лиев идеал, порожденный C , лежит в I , т. е. $sl_n(F) \subseteq I$. Стало быть, $I = M_n(F)_u$. Легко видеть, что $M_n(F)_u$ является собственным идеалом размерности $n^2 - 1$ в алгебре $M_n(F)(\text{Tr}, D)$.

Докажем простоту $M_n(F)_u$. Пусть I — ненулевой идеал в $M_n(F)_u$. Предположим, что ненулевая матрица C лежит в I . Если $C \in \langle E \rangle$, то $E \cdot B = B + \text{tr}(B)u \in I$ для любой B со следом 0, т. е. $sl_n(F) \subseteq I$. Включение $E \cdot (A + u) = A + \text{tr}(A)u \in I$ для любой $A \in M_n(F)$ дает $I = M_n(F)_u$. Если $C \notin \langle E \rangle$, то, как и ранее, лиев идеал, порожденный C , лежит в I , $C \cdot (A + u) \in I$ для любой $A \in M_n(F)$, откуда опять $I = M_n(F)_u$.

Таким образом, можно считать, что $A + u \in I$ для некоторой A такой, что $\text{tr} A = 1$. Случай одномерности I невозможен, как и выше, и мы, как и ранее, получаем, что ненулевая матрица лежит в I , откуда $I = M_n(F)_u$.

Для доказательства неассоциативности алгебры $M_n(F)_u$ достаточно при $i \neq j$ рассмотреть $(e_{ij}, e_{ji}, e_{ji}) = (e_{ii} + u) \cdot e_{ji} = D(e_{ij})$.

Для доказательства неразложимости алгебры $M_n(F)_u$ достаточно заметить, что если $v \in M_n(F)_u$ и $v^2 = \varepsilon v$, то левый аннулятор элемента v не может иметь размерность $n^2 - 1$: если $v = A + \text{tr}(A)u$, то $(B + \text{tr}(B)u)v = 0$ влечет $\text{tr}(BA) = 0$ для любой $B \in M_n(F)$ такой, что $B \notin \langle A \rangle$, а это невозможно. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как видно из теоремы, в данном случае по простой алгебре строится простая левосимметрическая алгебра той же размерности, что и исходная, но не изоморфная ей. Вопросы изоморфизма всех получаемых в данной статье простых левосимметрических алгебр будут рассмотрены в отдельной работе.

§ 4. О конструкции Мицухары для алгебр Бурдэ

Пусть $T_n(F)$ — ассоциативная алгебра верхнетреугольных матриц. Определим отображение $\tau : M_n(F) \mapsto T_n(F)$ правилом

$$\tau(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{при } i > j, \\ e_{ii}/2, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Тогда $T_n(F)$ становится левосимметрической алгеброй относительно нового произведения $x \circ y = xy + \tau(xy^\top + yx^\top)$, где $^\top$ означает транспонирование [14]. Алгебра $(T_n(F); \circ)$ не является простой, однако ее идеал $I_n = \langle e_{1i}, i = 1, \dots, n \rangle$ прост. Положим $e_k = e_{1n+1-k}$, $k = 1, \dots, n$. Тогда ненулевые произведения в данном базисе алгебры I_n задаются формулами

$$e_n \cdot e_n = 2e_n, \quad e_n \cdot e_j = e_j, \quad e_j \cdot e_j = e_n, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

В [15] было отмечено, что все дифференцирования I_2 нулевые, а в [16] были описаны дифференцирования I_n при $n > 2$. Как следует из [16], $\text{Der}(I_n)$ — это алгебра Ли кососимметрических отображений пространства $J_n = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$, аннулирующих $\langle e_n \rangle$; далее матрицы отображений из $\text{End}(I_n)$ рассматриваются в стандартном базисе $\{e_i : i = 1, \dots, n\}$ пространства I_n и предполагается, что $\chi(F) \neq 2$.

Лемма 4.1. Любой гессиан на I_n индуцируется гессианом алгебры $I_n^\sharp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H(x, y) := (x, y)$ — гессиан на I_n . Обозначим через $H(x, y, z)$ разность между левой и правой частью (1). При различных $i, j \neq n$

$$H(e_n, e_i, e_j) = 0 \Rightarrow (e_i, e_j) = 0;$$

$$H(e_i, e_j, e_i) = 0 \Rightarrow 0 = -(e_j, e_n);$$

$$H(e_n, e_i, e_i) = 0 \Rightarrow (e_i, e_i) - (e_n, e_n) = -(e_i, e_i);$$

а если $(,)$ — гессиан на $I_n^\sharp$, то $(e_i, e_j) = (1, e_i e_j) = 0$, $(e_j, e_n) = (1, e_j e_n) = 0$, $2(e_i, e_i) = 2(1, e_i e_i) = 2(1, e_n) = (e_n, e_n)$, что и доказывает лемму. $\square$

Лемма 4.2. (H, D) — нетривиальная ε -согласованная пара на $I_n \Leftrightarrow \varepsilon = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $H = (,)$, $D = (\alpha_{ij}) \in \text{Der}(I_n)$ — нетривиальная ε -согласованная пара на I_n . Для любых $1 \leq s, k \leq n$, $1 \leq p, q \leq n-1$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon(e_s, e_k) &= \left(e_s \sum_{p < q} \alpha_{pq} (e_{pq} - e_{qp}), e_k \right) + \left(e_s, e_k \sum_{p < q} \alpha_{pq} (e_{pq} - e_{qp}) \right) \\ &= \left(\sum_{q > s} \alpha_{sq} e_q - \sum_{p < s} \alpha_{ps} e_p, e_k \right) + \left(e_s, \sum_{k < q} \alpha_{kq} e_q - \sum_{p < k} \alpha_{pk} e_p \right). \end{aligned}$$

Если $\varepsilon = 1$, то при $k = s = n$ получаем $(e_n, e_n) = 0$; противоречие. Итак $\varepsilon = 0$. Если $k = n$ или $s = n$, то $0 = 0$. Если $k = s < n$, то

$$0 = 2 \left(\sum_{q > s} \alpha_{sq} e_q - \sum_{p < s} \alpha_{ps} e_p, e_s \right),$$

что верно. Если $k < s < n$, то

$$0 = -\alpha_{ks}(e_k, e_k) + \alpha_{ks}(e_s, e_s),$$

что также верно. $\square$

Заметим, что любая алгебра I_n при $n > 1$ разложима, однако она просто неразложима.

Лемма 4.3. Пусть A — алгебра с нулевым умножением над полем F , $\dim_F(A) = n-1$, $n \geq 2$. Тогда I_n является 1-расширением Мицухары алгебры A . Более того, I_n является прямым 1-расширением Мицухары любых двух алгебр A_1 и A_2 с нулевым умножением и условием $\dim(A_1) + \dim(A_2) = n-1$. Любое прямое расширение Мицухары, дающее алгебру I_n , является расширением двух алгебр с нулевым умножением. В частности, I_n просто неразложима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в A базис $\mathcal{E} := \{e_i : i = 1, \dots, n-1\}$ и определим ненулевые значения гессиана H и дифференцирования D на $\mathcal{E}$ правилом

$$H(e_i, e_i) = 2, \quad D(e_i) = \frac{1}{2} e_i$$

для всех $i = 1, \dots, n-1$. Легко видеть, что пара (H, D) 1-согласованная. Полагая $e_n := 2u$ в $A(H, D)$, замечаем, что умножение в базисе $\mathcal{E} \cup e_n$ алгебры $A(H, D)$ совпадает с умножением в I_n . Заметим, что данная часть леммы также отмечена в [11]. Вторая часть леммы, про прямое 1-расширение Мицухары алгебр A_1 и A_2 с нулевым умножением, доказывается аналогично.

Далее, предположим, что I_n является прямым расширением Мицухары алгебр A_1 и A_2 посредством нильпотента u . Тогда $x \cdot u = 0$ для любого $x \in I_n$,

откуда $u = 0$. Если же u является идемпотентом, то $x \cdot u \in \langle u \rangle$ для любого $x \in I_n$, откуда $2u = e_n$. Пусть $a + e_n \in A_i$ для некоторого ненулевого $a \in J_n$. Тогда, с одной стороны, $2u \cdot (a + e_n) = a + 2e_n$, а с другой стороны, $2u \cdot (a + e_n) = D(a + e_n) \in A_i$ для некоторого $D \in \text{Der}(A_i)$, так как u является главным идемпотентом. Таким образом, $e_n \in A_i$, что невозможно. Значит, $A_i \subseteq J_n$, $i = 1, 2$, а потому A_i — алгебра с нулевым умножением. $\square$

Теорема 4.1. Любое 0-расширение Мицухары алгебры I_n является локальной алгеброй для любого ненулевого дифференцирования D с условием $-1 \notin \text{Spes } D$ и для любого гессиана H на I_n . При данном условии на D ее единственный собственный идеал — это простая неассоциативная левосимметрическая алгебра

$$I_u = \langle e_n + u \rangle \oplus J_n.$$

Любое прямое расширение Мицухары, дающее алгебру I_u , является расширением двух алгебр с нулевым умножением. В частности, I_u является просто неразложимой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности можно считать, что $H(e_i, e_i) = 1$, $i < n$, $H(e_n, e_n) = 2$. Также предполагаем, что $n > 2$, так как иначе все дифференцирования алгебры I_n тривиальны. Легко видеть, что I_u является собственным идеалом в $I_n(H, D)$. Пусть I — произвольный собственный идеал в $I_n(H, D)$. Покажем, что $I \subseteq I_u$. По лемме 2.1 можно считать, что $a + u \in I$ для некоторого $a \in I_n$, $u \notin I$. Тогда из $e_i \cdot a \in I$, $i = 1, \dots, n$, получаем $e_n + u \in I$. Значит, $(e_n + u) \cdot e_j = e_j + D(e_j) \in I$ для любого $j < n$, откуда $\langle e_n + u \rangle \oplus \langle a + D(a) : a \in J_n \rangle \subseteq I$. Осталось заметить, что $\langle a + D(a) : a \in J_n \rangle = J_n$. Действительно, если $a + D(a) = 0$, то $-1 \in \text{Spes } D$, что противоречит условию на D .

Для доказательства простоты I_u сначала покажем, что если ненулевой $a \in J_n$ лежит в собственном идеале J алгебры I_u , то $J = I_u$. Можно считать, что $e_i a = e_n$ для некоторого $i < n$. Тогда $e_i \cdot a = e_n + u \in J$, $(e_n + u) \cdot e_j = e_j + D(e_j) \in J$ для любого $j < n$, откуда $a + D(a) \in J$ для любого $a \in J_n$, т. е. $J_n \subseteq J$ и $J = I_u$. Если $e_n + u \in J$, то, как и выше, $J_n \subseteq J$ и $J = I_u$. Теперь если $x = a + \alpha(e_n + u) \in J$ для некоторых ненулевых $\alpha \in F$ и $a \in J_n$, то можно считать, что $e_i a = e_n$ для некоторого $i < n$, откуда $e_i \cdot x = e_n + u \in J$ и $J = I_u$.

Предположим, что I_u является прямым расширением Мицухары алгебр A_1 и A_2 посредством элемента $v := a + \alpha u_n$, где $a \in J_n$, $\alpha \in F$, $u_n := e_n + u$. Тогда $x \cdot v \in \langle v \rangle$ для любого $x \in I_u$. В алгебре I_u при $a = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i e_i$, $\alpha_i \in F$, имеем

$$e_i \cdot u_n = 0, \quad e_i \cdot a = \alpha_i u_n, \quad u_n \cdot u_n = 2u_n,$$

откуда $a = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{2}u_n$ и I_u является 1-расширением A_1 и A_2 . Если $b + \beta u_n \in A_i$ для некоторых $i \in \{1, 2\}$, $b \in J_n$, $\beta \in F$, то из условия $(b + \beta u_n) \cdot v = 0$ следует $\beta = 0$, т. е. умножение в алгебрах A_1 и A_2 может быть только нулевым. В частности, получаем, что I_u является просто неразложимой. $\square$

§ 5. Обобщенная конструкция Мицухары, дубли Витта

Как отмечено в § 1, если B — левосимметрическая алгебра, то ее коммутаторная алгебра $B^{(-)}$, получаемая заменой умножения на B коммутатором $[x, y]$, является алгеброй Ли. Напомним также, что алгебра дифференцирований $\text{Der}(A)$ произвольной алгебры A также является алгеброй Ли относительно коммутатора.

Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное симметрическое отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ ($x \circ y = y \circ x$) и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto \text{Der}(A)$ такие, что

$$D_b(x) \circ y + x \circ D_b(y) = b(x \circ y), \quad (3)$$

$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz) \quad (4)$$

для любых $x, y, z \in A$, $b \in B$. Рассмотрим прямую сумму $A \oplus B$, где B является подалгеброй, а оставшиеся произведения определены правилами

$$b \cdot x = D_b(x), \quad x \cdot b = 0, \quad x \cdot y = xy + x \circ y \quad (5)$$

для всех $x, y \in A$, $b \in B$. Обозначим полученную алгебру через $A \circ_D B$. Справедлива следующая

Теорема 5.1. Алгебра $A \circ_D B$ левосимметрическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x, y \in A$, $b \in B$ имеем

$$\begin{aligned} (b, x, y)_{ls} &= D_b(x) \cdot y - b \cdot (xy + x \circ y) + x \cdot D_b(y) \\ &= D_b(x)y + D_b(x) \circ y - D_b(xy) - b(x \circ y) + xD_b(y) + x \circ D_b(y) \\ &= D_b(x) \circ y - b(x \circ y) + x \circ D_b(y) = 0, \end{aligned}$$

что следует из (3). Далее,

$$(x, y, b)_{ls} = (xy + x \circ y) \cdot b - (yx + y \circ x) \cdot b = (x \circ y - y \circ x)b = 0,$$

что следует из симметричности отображения $\circ$. Для любых $x \in A$, $b, c \in B$ выполняется

$$\begin{aligned} (b, c, x)_{ls} &= (bc) \cdot x - b \cdot D_c(x) - (cb) \cdot x + c \cdot D_b(x) \\ &= D_{bc}(x) - D_b(D_c(x)) - D_{cb}(x) + D_c(D_b(x)) \\ &= D_{[b, c]}(x) - [D_b, D_c](x) = 0, \end{aligned}$$

так как D — гомоморфизм алгебр Ли. С другой стороны,

$$(x, b, c)_{ls} = -D_b(x) \cdot c = 0.$$

Осталось проверить тождество для элементов $x, y, z \in A$:

$$\begin{aligned} (x, y, z)_{ls} &= (xy + x \circ y) \cdot z - x \cdot (yz + y \circ z) - (yx + y \circ x) \cdot z + y \cdot (xz + x \circ z) \\ &= (xy)z + (xy) \circ z + D_{x \circ y}(z) - x(yz) - x \circ (yz) \\ &\quad - (yx)z - (yx) \circ z - D_{y \circ x}(z) + y(xz) + y \circ (xz) \\ &= (xy) \circ z - x \circ (yz) - (yx) \circ z + y \circ (xz) = 0 \end{aligned}$$

по тождеству левосимметричности алгебры A , по симметричности отображения $\circ$ и (4). $\square$

Примером данной конструкции является следующая конструкция. Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены линейное отображение $\phi : A \mapsto B$ с условием $\phi([A, A]) = 0$ и гомоморфизм алгебр Ли $D : B^{(-)} \mapsto \text{Der}(A)$ такие, что

$$\phi(b \cdot x) = b\phi(x)$$

для любых $x \in A$, $b \in B$ и $b \cdot x := D_b(x)$. Положим

$$x \circ y := \phi(xy). \quad (6)$$

Легко видеть, что отображение $\circ$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Таким образом, $A \circ_D B$ является левосимметрической алгеброй. Данную конструкцию можно проиллюстрировать следующим примером.

Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d . Далее используем следующие обозначения: $d(x) := x'$ для любого $x \in \mathcal{A}$, $J' := d(J)$ для любого подпространства J в $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ (как векторного пространства) с классическим левосимметрическим умножением $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xd(y)}$. Пусть ϕ — естественное вложение $\mathcal{A}$ в $\overline{\mathcal{A}}$: $\phi(a) = \overline{a}$. Определим отображение $D : \mathcal{B}^{(-)} \mapsto \text{Der}(\mathcal{A})$ правилом $D(\overline{a}) = ad$, где $ad(x) = ax'$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Легко проверить, что D — это гомоморфизм алгебр Ли и $\phi(b \cdot x) = b\phi(x)$ для любых $x \in A$, $b \in \mathcal{B}$, где $b \cdot x := D_b(x)$. Обозначим полученную алгебру $\mathcal{A} \oplus \overline{\mathcal{A}}$ с умножением (5), (6) через $\mathcal{A}_d$ и назовем *дублем Витта* алгебры $\mathcal{A}$. По теореме 5.1 $\mathcal{A}_d$ является левосимметрической алгеброй. Более того, данная алгебра оказывается простой, если исходная алгебра $\mathcal{A}$ была унитарной d -простой алгеброй при $d \neq 0$.

Теорема 5.2. Пусть $\mathcal{A}$ — унитарная ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d . Алгебра $\mathcal{A}_d$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d -простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_d$ простая, J — собственный d -идеал в $\mathcal{A}$. Легко видеть, что $I := J \oplus \overline{J}$ — собственный идеал в $\mathcal{A}_d$. Действительно, справедливы следующие включения:

$$\overline{c} \cdot (a + \overline{b}) = ca' + \overline{cb'} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{bc'} \in I,$$

$$c \cdot (a + \overline{b}) = ca + \overline{ca} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot c = ac + \overline{ac} + bc' \in I$$

для любых $a, b \in J$, $c \in \mathcal{A}$, так как $a', b' \in J$. Таким образом, I — собственный идеал в $\mathcal{A}_d$, что противоречиво.

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ является d -простой, а I — ненулевой идеал в $\mathcal{A}_d$. Покажем, что случай $J := \mathcal{A} \cap I \neq 0$ влечет $I = \mathcal{A}_d$. Пусть $a \in J$. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ имеем $\overline{x} \cdot a = xa' \in J$, т. е. $\mathcal{A}J' \subseteq J$, $J' \subseteq J$. Далее, $a \cdot x = ax + \overline{ax} \in I$, откуда, полагая $x = 1$, получаем $a + \overline{a} \in I$, т. е. $\overline{a} \in I$ для любого $a \in J$.

Заметим, что

$$(J\mathcal{A})' \subseteq J'\mathcal{A} + J\mathcal{A}' \subseteq J\mathcal{A},$$

т. е. $J\mathcal{A}$ — d -идеал в $\mathcal{A}$ и $J\mathcal{A} = \mathcal{A}$. Как известно, $\mathcal{A}\mathcal{A}'$ — это d -идеал в $\mathcal{A}$, т. е. $\mathcal{A}\mathcal{A}' = \mathcal{A}$. Включение $(ax + \overline{ax}) \cdot \overline{y} = \overline{axy'} \in I$ дает $\overline{J\mathcal{A}\mathcal{A}'} \subseteq I$, откуда $\overline{\mathcal{A}} \subseteq I$. Теперь $a \cdot x \in I$ влечет $J\mathcal{A} \subseteq I$, т. е. $\mathcal{A} \subseteq I$ и $I = \mathcal{A}_d$.

Покажем, что случай $\overline{\mathcal{A}} \cap I \neq 0$ приводит к предыдущему. Пусть $\overline{a} \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathcal{A}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ имеем $\overline{a} \cdot x = ax' \in I$, откуда либо приходим к первому случаю, либо $a\mathcal{A}' = 0$. Пусть $K := \{a \in \mathcal{A} : a\mathcal{A}' = 0\}$. Так как $a\mathcal{A}' = 0$ влечет $a'\mathcal{A}' + a(\mathcal{A}')' = 0$, то $a'\mathcal{A}' = 0$. Значит, K — это d -идеал в $\mathcal{A}$, т. е. $K = \mathcal{A}$, что невозможно.

Окончательно, если $a + \overline{b} \in I$ для некоторых ненулевых $a, b \in \mathcal{A}$, то $xa + \overline{xb} \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}$, откуда $I = \{a + \overline{a} : a \in L\}$ для некоторого идеала L в $\mathcal{A}$, если I собственный. Тогда $(a + \overline{a}) \cdot x = ax + \overline{ax} + ax' \in I$ влечет $L\mathcal{A}' = 0$. Включение $\overline{x} \cdot (a + \overline{a}) = xa' + \overline{xa'} \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}$ дает $\mathcal{A}L' \subseteq L$, $L' \subseteq L$. Значит, L — это d -идеал в $\mathcal{A}$, т. е. $L = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}' = 0$; противоречие. $\square$

Рассмотрим еще одно обобщение. Пусть A, B — левосимметрические алгебры и определены билинейное отображение $\circ : A \times A \mapsto B$ и бимодульное действие алгебры B на A ($b \cdot x \in A, x \cdot b \in A$) такие, что прямая сумма $A \oplus B$ становится левосимметрической алгеброй относительно операции, индуцированной указанными действиями и новой операцией на A : $x \cdot y = xy + x \circ y$. Легко видеть (см. теорему 5.3 ниже), что на языке тождеств это эквивалентно выполнению следующих соотношений в $A \oplus B$:

$$b \cdot (xy) = (b \cdot x - x \cdot b)y + x(b \cdot y), \quad (7)$$

$$(b \cdot x) \circ y + x \circ (b \cdot y) = b(x \circ y) + (x \cdot b) \circ y, \quad (8)$$

$$(xy - yx) \cdot b = x(y \cdot b) - y(x \cdot b), \quad (9)$$

$$(x \circ y - y \circ x)b = x \circ (y \cdot b) - y \circ (x \cdot b), \quad (10)$$

$$(bc - cb) \cdot x = b \cdot (c \cdot x) - c \cdot (b \cdot x), \quad (11)$$

$$(x \cdot b - b \cdot x) \cdot c = x \cdot (bc) - b \cdot (x \cdot c), \quad (12)$$

$$(xy) \circ z - x \circ (yz) = (yx) \circ z - y \circ (xz), \quad (13)$$

$$(x \circ y - y \circ x) \cdot z = x \cdot (y \circ z) - y \cdot (x \circ z) \quad (14)$$

для любых $x, y, z \in A, b, c \in B$. Алгебру $A \oplus B$, где B является подалгеброй, B бимодульно действует на A как выше, а новое произведение на A определено правилом

$$x \cdot y = xy + x \circ y$$

для всех $x, y \in A$, будем называть *бимодульным расширением* алгебры A с помощью B . Обозначим полученную алгебру через $A \circ B$. Покажем, что $A \circ B$ с соотношениями (7)–(14) действительно является левосимметрической алгеброй. Мы опускаем символ операции для старого умножения в A и B (в B оно не изменяется).

Теорема 5.3. Алгебра $A \circ B$ левосимметрическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $x, y \in A, b \in B$ имеем

$$\begin{aligned} (b, x, y)_{ls} &= (b \cdot x) \cdot y - b \cdot (xy + x \circ y) - (x \cdot b) \cdot y + x \cdot (b \cdot y) \\ &= (b \cdot x)y + (b \cdot x) \circ y - b \cdot (xy) - b(x \circ y) \\ &\quad - (x \cdot b)y - (x \cdot b) \circ y + x(b \cdot y) + x \circ (b \cdot y) = 0, \end{aligned}$$

что следует из (7) и (8). Далее,

$$\begin{aligned} (x, y, b)_{ls} &= (xy + x \circ y) \cdot b - x \cdot (y \cdot b) - (yx + y \circ x) \cdot b + y \cdot (x \cdot b) \\ &= (xy - yx) \cdot b - x(y \cdot b) + y(x \cdot b) + (x \circ y - y \circ x)b - x \circ (y \cdot b) + y \circ (x \cdot b) = 0, \end{aligned}$$

что следует из (9) и (10). Для любых $x \in A, b, c \in B$ выполняется

$$(b, c, x)_{ls} = (bc) \cdot x - b \cdot (c \cdot x) - (cb) \cdot x + c \cdot (b \cdot x) = 0$$

по (11). С другой стороны,

$$(x, b, c)_{ls} = (x \cdot b) \cdot c - x \cdot (bc) - (b \cdot x) \cdot c + b \cdot (x \cdot c) = 0$$

по (12). Осталось проверить тождество для элементов $x, y, z \in A$:

$$(x, y, z)_{ls} = (xy + x \circ y) \cdot z - x \cdot (yz + y \circ z) - (yx + y \circ x) \cdot z + y \cdot (xz + x \circ z)$$

$$\begin{aligned}
&= (xy)z + (xy) \circ z + (x \circ y) \cdot z - x(yz) - x \circ (yz) - x \cdot (y \circ z) \\
&- (yx)z - (yx) \circ z - (y \circ x) \cdot z + y(xz) + y \circ (xz) + y \cdot (x \circ z) \\
&= (xy) \circ z - x \circ (yz) - (yx) \circ z + y \circ (xz) \\
&\quad + (x \circ y) \cdot z - x \cdot (y \circ z) - (y \circ x) \cdot z + y \cdot (x \circ z) = 0
\end{aligned}$$

по левосимметричности алгебры A и (13), (14). $\square$

В качестве примера алгебры данного типа можно рассмотреть, например, алгебру $(F \oplus F) \circ D_2(F)$, где $A = Fe_1 \oplus Fe_2$ — прямая сумма полей, а $D_2(F)$ — подалгебра диагональных матриц в $M_2(F)$. Определим коммутативное действие $D_2(F)$ на A правилом $e_i e_{jj} = \delta_{ij} e_j$. Положим $1 \circ e_i = \alpha_i e_{ii}$ для некоторых фиксированных $\alpha_i \in F$, $i = 1, 2$, и определим $x \circ y := 1 \circ xy$ для произвольных $x, y \in A$. Справедливость равенств (7)–(14) легко проверяется (а также следует из предложения 5.1, если положить $\phi(e_i) := 1 \circ e_i$; заметим, что при этом A является также ассоциативным бимодулем над $D_2(F)$). Таким образом, по теореме 5.3 $(F \oplus F) \circ D_2(F)$ является левосимметрической алгеброй. Данный пример обобщается следующим утверждением.

Предложение 5.1. Пусть A — произвольная ассоциативная коммутативная алгебра с 1, а B — произвольная левосимметрическая алгебра. Предположим, что A является коммутативным левосимметрическим бимодулем над B с условием $(xy) \cdot b = x(y \cdot b)$ и определено отображение $\phi : A \mapsto B$ такое, что $b\phi(x) = \phi(b \cdot x)$ и $x \cdot \phi(yz) = y \cdot \phi(xz)$ для любых $x, y, z \in A$, $b \in B$. Положим $x \circ y = \phi(xy)$ для любых $x, y \in A$. Тогда $A \circ B$ является левосимметрической алгеброй.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в непосредственной проверке (7)–(14). Тождества (7)–(13) следуют из условий на алгебру, бимодульное действие и свойств отображения ϕ . Проверим (14). Имеем $x \circ y = y \circ x$, что следует из определения $\circ$ и коммутативности A . Далее,

$$x \cdot (y \circ z) - y \cdot (x \circ z) = x \cdot \phi(yz) - y \cdot \phi(xz) = 0,$$

что получается из свойств отображений $\circ$ и ϕ . $\square$

Ранее автором отмечалось в [17], что конструкция эндоморфа является частным случаем общей конструкции (*обобщенного эндоморфа*) расширения алгебры при помощи другой алгебры со взаимными действиями алгебр. Так как явно в [17] эта конструкция не приводилась, а в данной работе замечено, что все конструкции эндоморфов, а также обобщенная конструкция Мицухары, являются обобщенными эндоморфами, то дадим ее в явном виде. Пусть A, B — алгебры над полем F и определены двусторонние действия алгебр друг на друга, т. е. заданы билинейные отображения

$$\triangleright : A \times B \rightarrow B; \quad \triangleright : B \times A \rightarrow A;$$

$$\triangleleft : A \times B \rightarrow A; \quad \triangleleft : B \times A \rightarrow B;$$

$$a \triangleright b \in B, \quad b \triangleright a \in A, \quad a \triangleleft b \in A, \quad b \triangleleft a \in B$$

для всех $a \in A$, $b \in B$. Также пусть заданы два билинейных произведения $\circ_i$, $i = 1, 2$, из A в B и из B в A соответственно, т. е. $A \circ_1 A \subseteq B$ и $B \circ_2 B \subseteq A$. Определим на прямой сумме $A \oplus B$ новое произведение $\cdot$ правилом:

$$b \cdot a = b \triangleright a + b \triangleleft a,$$

$$\begin{aligned}
a \cdot b &= a \triangleright b + a \triangleleft b, \\
a_1 \cdot a_2 &= a_1 a_2 + a_1 \circ_1 a_2, \\
b_1 \cdot b_2 &= b_1 b_2 + b_1 \circ_2 b_2
\end{aligned}$$

для всех $a, a_i \in A, b, b_i \in B$. Назовем полученную алгебру $E(A, B)$ *обобщенным эндоморфом* алгебр A и B . Легко видеть, что все конструкции эндоморфов из [17–20], а также обобщенная конструкция Мицухары являются обобщенными эндоморфами левосимметрических алгебр. Как заметил рецензент, данная конструкция в нескольких иных обозначениях и терминах также приведена в работе [21, определение 3.1]. Как доказано в [21, теорема 3.9], любая левосимметрическая алгебра, содержащая подалгебру A , является расширением алгебры A (обобщенным эндоморфом). Таким образом, понятие обобщенного эндоморфа является слишком общим, а потому представляют особый интерес частные случаи данной конструкции, приводящие к простым алгебрам, которые приводятся в данном параграфе.

В качестве примера обобщенного эндоморфа рассмотрим следующий *обобщенный дубль Витта*. Пусть, как и ранее, $\mathcal{A}$ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d ; $d(x) := x'$. Пусть $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ — изоморфная копия алгебры $\mathcal{A}$ с умножением $\overline{x} \star \overline{y} = \overline{xd(y)}$. Определим взаимные действия алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ друг на друга:

$$a \triangleright \overline{b} = \overline{ab}, \quad \overline{b} \triangleright a = ba', \quad a \triangleleft \overline{b} = 0, \quad \overline{b} \triangleleft a = \overline{ab}$$

для всех $a \in \mathcal{A}, \overline{b} \in \mathcal{B}$. Полагаем

$$\begin{aligned}
\overline{b} \cdot a &= ba' + \overline{ba}, \quad a \cdot \overline{b} = \overline{ab}, \\
a_1 \cdot a_2 &= a_1 a_2, \quad \overline{b}_1 \cdot \overline{b}_2 = \overline{b}_1 \star \overline{b}_2
\end{aligned}$$

для всех $a, a_i \in A, \overline{b}, \overline{b}_i \in B$, т. е. $\circ_1 = 0 = \circ_2$. Так как алгебра $E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ в действительности зависит только от $\mathcal{A}$ и дифференцирования d , будем обозначать ее через $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$. Заметим, что в отличие от алгебры $\mathcal{A}_d$ в алгебре $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ изоморфная копия действует справа на $\mathcal{A}$ ненулевым образом и $\mathcal{A}$ является подалгеброй в $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$.

Теорема 5.4. Алгебра $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ левосимметрическая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ по условию являются подалгебрами, достаточно рассмотреть только взаимные ассоциаторы алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, которые, как легко видеть, все равны нулю за исключением одного случая:

$$\begin{aligned}
(\overline{b}, \overline{c}, a) &= \overline{bc'} \cdot a - \overline{b} \cdot (ca' + \overline{ca}) \\
&= bc'a' + \overline{bc'a} - b(ca')' - \overline{bca'} - \overline{b(ca)'} = -bca'' - 2\overline{bca'} = (\overline{c}, \overline{b}, a),
\end{aligned}$$

что и доказывает данную теорему. $\square$

Теорема 5.5. Пусть $\mathcal{A}$ — унитарная ассоциативная коммутативная алгебра над полем F с ненулевым дифференцированием d . Алгебра $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ является простой тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является d -простой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$ простая, а J — собственный d -идеал в $\mathcal{A}$. Легко видеть, что $I := J \oplus \overline{J}$ — собственный идеал в $\mathcal{A}_d$. Действительно, справедливы следующие включения:

$$c \cdot (a + \overline{b}) = ca + \overline{cb} \in I, \quad (a + \overline{b}) \cdot c = ac + bc' + \overline{bc} \in I,$$

$$\bar{c} \cdot (a + \bar{b}) = ca' + \bar{c}a + \bar{c}b' \in I, \quad (a + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a}c + \bar{b}c' \in I$$

для любых $a, b \in J$, $c \in \mathcal{A}$, так как $a', b' \in J$. Таким образом, I — собственный идеал в $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$, что противоречиво.

Обратно, пусть $\mathcal{A}$ является d -простой, а I — ненулевой идеал в $\mathcal{W}_d(\mathcal{A})$. Покажем, что случай $J := \mathcal{A} \cap I \neq 0$ влечет $I = \mathcal{W}_d(\mathcal{A})$. Пусть $a \in J$. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ имеем $a \cdot \bar{1} = \bar{a} \in I$. Далее, $\bar{1} \cdot a = a' + \bar{a}$, откуда $a' \in I$. Значит, J — это d -идеал в A , $J = A$, и $I = \mathcal{W}_d(\mathcal{A})$.

Теперь покажем, что случай $\overline{\mathcal{A}} \cap I \neq 0$ приводит к предыдущему. Пусть $\bar{a} \in I$ для некоторого ненулевого $a \in \mathcal{A}$. Тогда для любого $x \in \mathcal{A}$ имеем $\bar{a} \cdot x = ax' + \bar{a}x \in I$, $x \cdot \bar{a} = \bar{a}x \in I$, откуда либо приходим к первому случаю, либо $a\mathcal{A}' = 0$, что невозможно, как и в теореме 5.2.

Окончательно, если $a + \bar{b} \in I$ для некоторых ненулевых $a, b \in \mathcal{A}$, то

$$x \cdot (a + \bar{b}) = xa + \bar{x}b \in I,$$

$$(a + \bar{b}) \cdot x = ax + bx' + \bar{x}b \in I$$

для любого $x \in \mathcal{A}$, откуда $bx' \in I$ и опять, как и в теореме 5.2, приходим к первому случаю. $\square$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cayley A. A memoir on the symmetric functions of the roots of an equation // Philos. Trans. Royal Soc. London. 1857. V. 147. P. 489–496.
2. Koszul J.-L. Domaines bornes homogenes et orbites de groupes de transformations affines // Bull. Soc. Math. France. 1961. V. 89. P. 515–533.
3. Винберг Э. Б. Теория однородных выпуклых конусов // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 12. С. 303–358.
4. Gerstenhaber M. On the deformation of rings and algebras // Ann. Math. (2). 1964. V. 79, N 1. P. 59–103.
5. Golubchik I. Z., Sokolov V. V. Generalized operator Yang–Baxter equations, integrable ODEs and nonassociative algebras // J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7, N 2. P. 184–197.
6. Milnor J. On fundamental groups of complete affinely flat manifolds // Adv. Math. 1977. V. 25. P. 178–187.
7. Segal D. The structure of complete left-symmetric algebras // Math. Ann. 1992. V. 293. P. 569–578.
8. Gubarev V. Y., Kolesnikov P. S. Operads of decorated trees and their duals // Comment. Math. Univ. Carolinae. 2014. V. 55, N 4. P. 421–445.
9. Kleinfeld E. Assosymmetric rings // Proc. Am. Math. Soc. 1957. V. 8. P. 983–986.
10. Зельманов Е. И. Об одном классе локальных трансляционно инвариантных алгебр Ли // Докл. АН СССР. 1987. Т. 292, № 6. С. 1294–1297.
11. Mizuhara A. On simple left symmetric algebras over a solvable Lie algebra // Sci. Math. Jpn. 2003. V. 57, N 2. P. 325–337.
12. Пожидаев А. П. О конструкции Мицухары для эндоморфов // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 41–54.
13. Shima H. Homogenous Hessian manifolds // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). 1980. V. 30. P. 91–128.
14. Burde D. Simple left-symmetric algebras with solvable Lie algebra // Manuscr. Math. 1998. V. 95. P. 397–411.
15. Bai C. M., Meng D. J. Left-symmetric algebras and complete Lie algebras // Commun. Algebra. 2002. V. 30, N 2. P. 1001–1015.
16. Gubarev V. Burde’s series of simple pre-Lie algebras // Sao Paulo J. Math. Sci. 2024. P. 1–11.
17. Пожидаев А. П. Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.

-
18. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. О правосимметрических алгебрах с унитарной матричной подалгеброй // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 1. С. 173–184.
 19. Пожидаев А. П., Шестаков И. П. О простых правосимметрических $(1, 1)$ -супералгебрах // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 2. С. 166–175.
 20. Пожидаев А. П. О неконстантных прелиевых бимодулях над $M_2(F)$ // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 392–403.
 21. Hong Y. Extending structures and classifying complements for left-symmetric algebras // Results Math. 2019. V. 74:32. P. 1–24.

Поступила в редакцию 9 ноября 2023 г.

После доработки 5 марта 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`app@math.nsc.ru`

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ В ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается гиперболическое уравнение с переменной главной частью и нелинейностью в младшем члене. Предполагается, что коэффициенты уравнения являются гладкими функциями точки трехмерного пространства и постоянны вне некоторой компактной области. Из внешности этой области на неоднородность падает плоская волна с направлением ℓ . Решение соответствующей задачи Коши для исходного уравнения измеряется в точках границы области для временного интервала, включающего в себя момент прихода волны в эти точки. Предполагается, что единичный вектор ℓ является параметром задачи и может пробегать последовательно все возможные значения. На основе этой информации о решениях уравнения изучается обратная задача об определении коэффициента при нелинейности. Выписывается структура решения прямой задачи и показывается, что решение обратной задачи может быть сведено к задаче интегральной геометрии. Эта задача заключается в построении искомой функции по заданным интегралам от произведения искомой функции и некоторой заданной весовой функции. Интегралы берутся вдоль геодезических линий римановой метрики, ассоциированной с главной частью дифференциального уравнения. Эта задача является новой, в статье выполнено ее исследование, найдена оценка устойчивости ее решения. На этой основе установлена оценка устойчивости решения рассматриваемой обратной задачи.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.310

Ключевые слова: нелинейное волновое уравнение, структура решения, обратная задача, интегральная геометрия, оценка устойчивости.

1. Введение

Пусть $B(R)$ — открытый шар в пространстве $\mathbb{R}^3$ радиуса R с центром в начале координат и границей $S(R) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = R\}$, $a_{ij}(x)$ — гладкие функции переменной x такие, что матрица $A(x) = (a_{ij}(x), i, j = 1, \dots, n)$ является равномерно положительно определенной, т. е. для нее выполнены неравенства

$$\mu_0 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_1 |\xi|^2$$

для любых $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ и некоторых положительных μ_0, μ_1 . Пусть, кроме того, $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$, вне $B(R)$. Здесь δ_{ij} — символ Кронекера. Предположим также, что $q(x)$ — гладкая функция и ее носитель содержится в $B(R)$.

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-281.

Пусть функция $u = u(x, t, \ell)$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\ell \in \mathbb{S}^2$, является решением задачи Коши

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) u_{x_i x_j} = q(x) u^m, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u|_{t=0} = H(t - x \cdot \ell - R), \quad (1)$$

в которой $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$ для $t \geq 0$, $H(t) = 0$ для $t < 0$. Под гладкостью коэффициентов уравнения (1) понимается их бесконечная дифференцируемость в $\mathbb{R}^3$. На самом деле некоторой конечной гладкости вполне достаточно для справедливости всех утверждений, сформулированных в статье.

Введем обозначения $\bar{B}(R) = B(R) \cup S(R)$,

$$\mathbb{R}_-^3(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell + R < 0\}, \quad \mathbb{R}_+^3(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell + R > 0\},$$

$$S^-(R, \ell) = \{x \in S(R) \mid x \cdot \ell < 0\}, \quad S^+(R, \ell) = \{x \in S(R) \mid x \cdot \ell > 0\}.$$

Пусть $\Sigma(\ell) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \ell = -R\}$ — плоскость, касающаяся $S(R)$ в точке $x = -R\ell$ и являющаяся общей границей полупространств $\mathbb{R}_-^3(\ell)$ и $\mathbb{R}_+^3(\ell)$.

Рассмотрим риманову метрику $ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 a^{ij}(x) dx_i dx_j$, в которой функции $a^{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, образуют положительно определенную матрицу $A^{-1}(x)$, обратную матрице $A(x)$. Относительно этой метрики сделаем два предположения.

Предположение 1. Риманова метрика является простой в $\mathbb{R}_+^3(\ell)$.

Это предположение означает, что любые две точки x и y в области $\mathbb{R}_+^3(\ell)$ могут быть соединены единственной геодезической $\Gamma(x, y)$ римановой метрики. Геодезическое расстояние между точками x и y обозначим через $\tau(x, y)$.

Обозначим через $\hat{\Gamma}(x, \ell) \equiv \Gamma(x, x^0)$ геодезическую линию, которая соединяет точку $x \in \mathbb{R}^3$ с некоторой точкой x^0 плоскости $\Sigma(\ell)$ так, что $\Gamma(x, x^0)$ ортогональна плоскости $\Sigma(\ell)$ в точке x^0 .

Предположение 2. Геодезические линии $\hat{\Gamma}(x, \ell)$, выпущенные из точек плоскости $\Sigma(\ell)$, не пересекаются между собой в шаре $B(R + \epsilon)$, где ϵ — некоторое положительное число.

Введем в рассмотрение функцию $\hat{\tau}(x, \ell)$. Определим ее в области $\mathbb{R}_-^3(\ell)$ формулой $\hat{\tau}(x, \ell) = x \cdot \ell + R$, а в области $\mathbb{R}_+^3(\ell)$ положим ее равной римановой длине геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$. Заметим, что функция $\hat{\tau}(x, \ell)$ является гладким решением уравнения эйконала

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \hat{\tau}_{x_i}(x, \ell) \hat{\tau}_{x_j}(x, \ell) = 1, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (2)$$

и удовлетворяет условию

$$\hat{\tau}|_{\Sigma(\ell)} = 0. \quad (3)$$

Чтобы построить $\hat{\Gamma}(x, \ell)$ и $\hat{\tau}(x, \ell)$ в области $\mathbb{R}_+^3(\ell) \cap B(R + \epsilon)$, можно поступить следующим образом. Ввести взаимно ортогональную тройку единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \ell$, представить произвольную точку $x^0 \in \Sigma(\ell)$ в виде $x^0 = z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2 - R \mathbf{e}_3$ и решить относительно $x = (x_1, x_2, x_3)$, $p = (p_1, p_2, p_3) =$

$\nabla_x \hat{\tau}(x, \ell)$, $\hat{\tau}(x, \ell)$ задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см, например, уравнения (2.2.12) в книге [1]):

$$\frac{dx_k}{ds} = \sum_{j=1}^3 a_{kj}(x) p_j, \quad \frac{dp_k}{ds} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 p_i p_j \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x), \quad \frac{d\hat{\tau}}{ds} = 1, \quad k = 1, 2, 3, \quad (4)$$

$$x|_{s=0} = x^0, \quad p|_{s=0} = \ell, \quad \hat{\tau}|_{s=0} = 0.$$

Решение этой задачи определяет x , p и $\hat{\tau}$ как бесконечно дифференцируемые функции переменной $s \geq 0$ и параметров z_1, z_2, ℓ , т. е. $x = \hat{x}(s, z_1, z_2, \ell)$, $p = \hat{p}(s, z_1, z_2, \ell)$, $\hat{\tau} = \hat{\tau}(s, z_1, z_2, \ell)$. При этом $\hat{\tau}(s, z_1, z_2, \ell) \equiv s$. Равенство $x = \hat{x}(s, z_1, z_2, \ell)$ определяет параметрическое задание геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$, выходящей из точки $x^0 = x^0(z_1, z_2)$ ортогонально плоскости $\Sigma(\ell)$. В силу предположения 2 при каждом фиксированном $\ell \in \mathbb{S}^2$ между точками $x \in \{\mathbb{R}_+^3(\ell) \cap B(R+\epsilon)\}$ и параметрами s, z_1, z_2 существует взаимно однозначное соответствие. Разрешая равенство $x = \hat{x}(s, z_1, z_2, \ell)$ относительно s, z_1, z_2 , находим $s = s(x, \ell) = \hat{\tau}(x, \ell)$, $z_1 = z_1(x, \ell)$, $z_2 = z_2(x, \ell)$ и функцию $p = p(x, \ell) = \hat{p}(s(x, \ell), z_1(x, \ell), z_2(x, \ell), \ell)$. Можно также найти и другое параметрическое задание геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$, а именно, $\xi = \xi(s, x, \ell) = \hat{x}(s, z_1(x, \ell), z_2(x, \ell), \ell)$, $s \in [0, s(x, \ell)]$. Все построенные функции являются гладкими функциями своих аргументов.

Рассмотрим следующую *обратную задачу*: пусть функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2, 3$, известны всюду в $\mathbb{R}^3$, а функция $q(x)$ неизвестна внутри $B(R)$, требуется ее найти по следу на $S^+(R, \ell)$ решения задачи (1), заданному при всех $\ell \in \mathbb{S}^2$ для значений t , лежащих в некоторой ϱ окрестности фронта $t = \hat{\tau}(x, \ell)$, т. е. $q(x)$ требуется найти по функции

$$g(x, t, \ell) = u|_{x \in S^+(R, \ell)}, \quad \ell \in \mathbb{S}^2, \quad \hat{\tau}(x, \ell) - \varrho \leq t \leq \hat{\tau}(x, \ell) + \varrho, \quad (5)$$

где ϱ — некоторое положительное число.

Обратные задачи для нелинейных гиперболических уравнений, а также для нелинейных уравнений электродинамики изучались в работах [2–16]. В частности, в [2–6] гиперболические уравнения рассматривались на лоренцевых многообразиях и изучался вопрос об определении соответствующей метрики по заданной информации о решениях уравнения. В работах [7–9] рассматривались задачи об определении коэффициентов уравнений с различного типа нелинейностями. В [10–14] для полулинейных волновых уравнений рассматривались обратные задачи об определении коэффициентов при нелинейностях, основанные на изучении структуры решения прямых задач в окрестности фронта бегущей волны и сведении обратных задач к задачам томографии. Подобный подход использован также при изучении обратных задач для уравнений электродинамики [15, 16].

В настоящей статье развитая в работах [10–14] техника для уравнений с постоянной главной частью обобщается на случай переменной главной части. При этом для решения поставленной выше обратной задачи возникает линейная задача об определении функции $q(x)$ по заданным интегралам вдоль любых геодезических линий $\hat{\Gamma}(x, \ell)$, $x \in S^+(R, \ell)$, $\ell \in \mathbb{S}^2$, от произведения искомого коэффициента $q(x)$ и заданной весовой функции $\rho(x, \nu)$. Эта весовая функция вычисляется по амплитуде фронта бегущей волны. Возникающая задача является новой, она изучена в настоящей работе и для нее установлена оценка устойчивости решения (см. лемму 3). В дальнейшем показано, что найденная оценка при определенных условиях на коэффициенты $a_{ij}(x)$ уравнения (1) приводит к оценке устойчивости решения обратной задачи.

Несколько слов о структуре статьи. В следующем разделе выводится представление решения прямой задачи в окрестности фронта бегущей волны, даются формулы для вычисления на фронте волны амплитуды решения прямой задачи и его производной по переменной t . Затем, в последующем разделе, анализируется обратная задача и сводится к описанной выше задаче интегральной геометрии. Далее формулируется лемма 3 об устойчивости решения задачи интегральной геометрии и показывается, что при некоторых условиях на коэффициенты $a_{ij}(x)$ выполняются условия леммы 3. Это приводит к оценке устойчивости решения обратной задачи. Доказательство леммы 3 дано в последнем разделе.

2. Исследование прямой задачи

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$LG = \delta(x - y)\delta(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \quad u|_{t < 0} \equiv 0, \quad (6)$$

в которой линейный оператор L определен формулой (1).

Пусть $E(x, y, t)$ — риманов эллипсоид

$$E(x, y, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid \tau(\xi, x) + \tau(\xi, y) = t, \quad t \geq \tau(x, y)\}.$$

Из книги [1] (см. лемму 2.2.1) следует

Лемма 1. Пусть коэффициенты $a_{ij}(x)$ бесконечно дифференцируемы и выполнено предположение 1 о простоте римановой метрики

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^3 a^{ij}(x) dx_i dx_j.$$

Тогда решение задачи (6) представимо в виде

$$G(x, t, y) = H(t)[\alpha(x, y)\delta(t^2 - \tau^2(x, y)) + \hat{G}(x, t, y)H(t^2 - \tau^2(x, y))], \quad (7)$$

в котором $\alpha(x, y)$, $\tau^2(x, y)$ и $\hat{G}(x, t, y)$ — бесконечно дифференцируемые функции своих аргументов.

Пусть функция $v(x, t, \ell)$ является решением задачи

$$Lv = h(x, t)H(t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \quad v|_{t < 0} \equiv H(t - x \cdot \ell - R), \quad (8)$$

в которой $h(x, t)$ — некоторая гладкая функция своих аргументов. Представим $v(x, t, \ell)$ в виде

$$v(x, t, \ell) = \beta(x, \ell)H(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \hat{v}(x, t, \ell), \quad (9)$$

в котором $\beta(x, \ell) = 1$ для $x \in \mathbb{R}_-^3(\ell)$, а в области $\mathbb{R}_+^3(\ell)$ является решением задачи Коши

$$2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x)\beta_{x_i}(x, \ell)\hat{\tau}_{x_j}(x, \ell) + \beta(x, \ell) \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x)\hat{\tau}_{x_i x_j}(x, \ell) = 0, \quad \beta|_{s=0} = 1. \quad (10)$$

Достаточно простые вычисления показывают, что тогда $\hat{v}(x, t, \ell)$ является решением задачи Коши

$$L\hat{v} = \hat{h}(x, t, \ell), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \quad \hat{v}|_{t < 0} \equiv 0, \quad (11)$$

в которой

$$\widehat{h}(x, t, \ell) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \beta_{x_i x_j}(x, \ell) H(t - \widehat{\tau}(x, \ell)) + h(x, t) H(t). \quad (12)$$

Решение задачи (10) нетрудно выписать в явном виде, если заметить, что первое слагаемое уравнения (10) представляет собой производную по s вдоль геодезической $\widehat{\Gamma}(x, \ell)$. Последнее следует из уравнений (4). Действительно,

$$\frac{d\beta}{ds} = \sum_{k=1}^3 \beta_{x_k} \frac{dx_k}{ds} = \sum_{k,j=1}^3 a_{kj}(x) \beta_{x_k} p_j = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \beta_{x_i} \widehat{\tau}_{x_j}.$$

Поэтому решение задачи (10) дается формулой

$$\beta(x, \ell) = \exp \left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\widehat{\Gamma}(x, \ell)} a_{ij}(\xi) \widehat{\tau}_{\xi_i \xi_j}(\xi, \ell) ds \right), \quad x \in \mathbb{R}_+^3(\ell) \cap B(R + \epsilon), \quad (13)$$

в которой ξ — промежуточная переменная точка вдоль $\widehat{\Gamma}(x, \ell)$, а ds — элемент римановой длины.

Решение задачи (11) можно выписать, используя формулы (7) и (8), через фундаментальное решение $G(x, t, y)$ в виде

$$\begin{aligned} \widehat{v}(x, t, \ell) = \int_{\mathbb{R}^4} \widehat{h}(y, z, \ell) G(x, t - z, y) dy dz = \frac{1}{2} \int_{\tau(x, y) \leq t} \widehat{h}(y, t - \tau(x, y), \ell) \frac{\alpha(x, y)}{\tau(x, y)} dy \\ + \int_{K(x, t)} \widehat{h}(y, z, \ell) \widehat{G}(x, t - z, y) dy dz, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

в котором

$$K(x, t) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \leq z \leq t - \tau(x, y)\}.$$

В силу сказанного выше задачу (1) можно свести к интегральному уравнению

$$\begin{aligned} u(x, t, \ell) = u_0(x, t, \ell) + \frac{1}{2} \int_{\tau(x, y) \leq t} q(y) u^m(y, t - \tau(x, y), \ell) \frac{\alpha(x, y)}{\tau(x, y)} dy \\ + \int_0^t \int_{\tau(x, y) \leq t-z} q(y) u^m(y, z, \ell) \widehat{G}(x, t - z, y) dy dz, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В этом уравнении

$$\begin{aligned} u_0(x, t, \ell) = \beta(x, \ell) H(t - \widehat{\tau}(x, \ell)) + \frac{1}{2} \int_{E^*(x, t, \ell)} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(y) \beta_{y_i y_j}(y, \ell) \frac{\alpha(x, y)}{\tau(x, y)} dy \\ + \int_{K^*(x, t, \ell)} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(y) \beta_{y_i y_j}(y, \ell) \widehat{G}(x, t - z, y) dy dz, \end{aligned}$$

а множества $E^*(x, t, \ell)$ и $K^*(x, t, \ell)$ определены формулами

$$E^*(x, t, \ell) = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid \tau(x, y) + \widehat{\tau}(y, \ell) \leq t\},$$

$$K^*(x, t, \ell) = \{(y, z) \in \mathbb{R}^4 \mid \widehat{\tau}(y, \ell) \leq z \leq t - \tau(x, y)\}.$$

Пусть $x^* \in S^+(R, \ell)$, $t^* > \widehat{\tau}(x^*, \ell)$,

$$D(x^*, t^*, \ell) = \{(x, t) \mid x \in \mathbb{R}_+^3(\ell), \widehat{\tau}(x, \ell) \leq t \leq t^* - \tau(x, x^*)\}$$

и $\Upsilon(\eta)$ — сечение области $D(x^*, t^*, \ell)$ характеристической поверхностью $\{(y, z) \mid z = \widehat{\tau}(y, \ell) + \eta\}$, $\eta > 0$.

Лемма 2. Пусть выполнены предположения 1 и 2 и коэффициенты уравнения (1) бесконечно дифференцируемы. Тогда решение задачи (1) обладает следующими свойствами:

- (1) $u(x, t, \ell) \equiv 0$ для всех $\{(x, t) \mid t < \hat{\tau}(x, \ell), x \in \mathbb{R}_+^3(\ell)\}$,
- (2) найдутся положительные числа $M_0 = M_0(x^*, t^*)$ и $\eta_0 = \eta_0(x^*, t^*)$ такие, что для всех $(x, t) \in \{\Upsilon(\eta), 0 \leq \eta < \eta_0\}$ функция $u(x, t, \ell)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет оценке

$$|u(x, t, \ell)| \leq \frac{M_0}{(1 - \eta/\eta_0)^{1/(m-1)}}, \quad \eta \in [0, \eta_0]. \quad (16)$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение (15). Так как $\text{supp } q \subset B(R)$, это уравнение можно рассматривать отдельно для $x \in \mathbb{R}_+^3(\ell)$, $t > 0$. Очевидно, что в этой области $u_0(x, t, \ell) \equiv 0$ для $0 < t < \hat{\tau}(x, \ell)$. Отсюда следует, что и $u(x, t, \ell) \equiv 0$ для $x \in \mathbb{R}_+^3(\ell)$ и $0 < t < \hat{\tau}(x, \ell)$.

Из сказанного выше следует, что уравнение (15) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} u(x, t, \ell) = & u_0(x, t, \ell) + \frac{1}{2} \int_{E^*(x, t, \ell)} q(y) u^m(y, t - \tau(x, y), \ell) \frac{\alpha(x, y)}{\tau(x, y)} dy \\ & + \int_{K^*(x, t, \ell)} q(y) u^m(y, z, \ell) \hat{G}(x, t - z, y) dy dz, \quad x \in \mathbb{R}_+^3(\ell) \cap B(R + \epsilon), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Пусть теперь положительное число $\eta^* = t^* - \hat{\tau}(x^*, \ell)$ таково, что $E(x^*, t^*, \ell) \subset B(R + \epsilon)$. Зафиксируем x^*, t^*, ℓ и в дальнейшем будем рассматривать уравнение (17) только в области $D(x^*, t^*, \ell)$. Устроим расслоение областей $K^*(x, t, \ell)$ и $D(x^*, t^*, \ell)$ поверхностями

$$P(\eta', \ell) = \{(y, z) \mid z = \hat{\tau}(y, \ell) + \eta', \eta' \in [0, \eta^*]\}.$$

Обозначим через $\Upsilon(\eta')$ сечение области $K^*(x^*, t^*, \ell)$ поверхностью $P(\eta', \ell)$, т. е. $\Upsilon(\eta') = P(\eta', \ell) \cap K^*(x^*, t^*, \ell)$, опуская для краткости зависимость этого сечения от фиксированных x^*, t^*, ℓ . Пусть $\eta = t - \hat{\tau}(x, \ell)$.

Так как $\beta(x, \ell)$, $\alpha(x, \ell)$ и $\hat{G}(x, t, y)$ — гладкие функции, а $\tau(x, y) = O(|x - y|)$ при $y \rightarrow x$, существует постоянная $M_0(x^*, t^*)$ такая, что

$$|u_0(x, t, \ell)| \leq M_0, \quad (x, t) \in D(x^*, t^*, \ell).$$

Обозначим

$$U(\eta') = \sup_{(x, t) \in \Upsilon(\eta')} |u(x, t, \ell)|.$$

Тогда из (17) следует оценка

$$U(\eta) \leq M_0 + M_1 \int_0^\eta U^m(\eta') d\eta', \quad \eta \in [0, \eta^*], \quad (18)$$

с некоторой положительной постоянной $M_1 = M_1(x^*, t^*)$. Покажем, что из этого неравенства следует неравенство (16) при подходящем значении $\eta_0 > 0$. Обозначим

$$J(\eta) = \int_0^\eta U^m(\eta') d\eta'$$

и перепишем неравенство (18) в виде

$$J'(\eta) \leq (M_0 + M_1 J(\eta))^m, \quad J(0) = 0.$$

Интегрируя это неравенство, находим, что

$$M_0^{1-m} - (M_0 + M_1 J(\eta))^{1-m} \leq (m-1)M_1 \eta.$$

Отсюда следует неравенство

$$U(\eta) = M_0 + M_1 J(\eta) \leq \frac{M_0}{(1 - (m-1)M_1 M_0^{m-1} \eta)^{1/(m-1)}}$$

при условии, что $1 - (m-1)M_1 M_0^{m-1} \eta > 0$. Поэтому имеет место неравенство (16), если $\eta_0 < \min(\eta^*, 1/((m-1)M_1 M_0^{m-1}))$.

Из априорной оценки (16) нетрудно с помощью довольно стандартного приема извлечь существование единственного гладкого решения уравнения (17) во всей той области, в которой действует оценка (16). Мы не будем обсуждать это более подробно, так как основная наша цель состоит в исследовании обратной задачи. $\square$

Теорема 1. Пусть выполнены предположения 1 и 2. Тогда существует решение задачи (1), представимое в окрестности фронта $t = \hat{\tau}(x, \ell)$ в виде

$$u(x, t, \ell) = \beta(x, \ell)H(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \gamma(x, \ell)H_1(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \hat{u}(x, t, \ell), \quad (19)$$

в котором $H_1(t) = tH(t)$, $\beta(x, \ell)$ и $\gamma(x, \ell)$ — гладкие функции переменной x , а $\hat{u}(x, t, \ell) \equiv 0$ для $t < \hat{\tau}(x, \ell)$ имеет порядок $O(\eta^2)$ при $t - \hat{\tau}(x, \ell) = \eta \rightarrow +0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $\beta(x, \ell)$ и $\gamma(x, \ell)$ определяют амплитуды фронта волны и производной по t решения задачи (1). Подставляя представление (19) в равенство (1), найдем уравнения для отыскания $\beta(x, \ell)$ и $\gamma(x, \ell)$. При этом $\beta(x, \ell) = 1$ и $\gamma(x, \ell) = 0$ для $x \in \mathbb{R}_-^3(\ell)$, а в области $\mathbb{R}_+^3(\ell)$ функция $\beta(x, \ell)$ является решением задачи Коши (10) и определяется формулой (13). Функция $\gamma(x, \ell)$ является решением задачи Коши

$$2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \gamma_{x_i} \hat{\tau}_{x_j} + \gamma \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \hat{\tau}_{x_i x_j} - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \beta_{x_i x_j} - q(x) \beta^m = 0, \quad \gamma|_{\Sigma(\ell)} = 0. \quad (20)$$

С учетом равенства (10) запишем уравнение (20) в виде

$$2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \gamma_{x_i} \hat{\tau}_{x_j} - 2\gamma \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) (\ln \beta)_{x_i} \hat{\tau}_{x_j} - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \beta_{x_i x_j} - q(x) \beta^m = 0, \quad \gamma|_{\Sigma(\ell)} = 0.$$

Это уравнение вдоль геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$ эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\gamma}{\beta} \right) - \frac{1}{2\beta} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \beta_{x_i x_j} + q(x) \beta^m \right) = 0, \quad \gamma|_{\Sigma(\ell)} = 0. \quad (21)$$

Здесь ds — элемент римановой длины. Из уравнения (21) находим, что

$$\gamma(x, \ell) = \frac{\beta(x, \ell)}{2} \int_{\hat{\Gamma}(x, \ell)} \frac{1}{\beta(\xi, \ell)} \left(\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(\xi) \beta_{\xi_i \xi_j}(\xi, \ell) + q(\xi) \beta^m(\xi, \ell) \right) ds. \quad (22)$$

Функция $\hat{u}(x, t, \ell)$ является решением задачи

$$L\hat{u}(x, t, \ell) = F(x, t, \hat{u}, \ell), \quad \hat{u}|_{t < \hat{\tau}(x, \ell)} = 0, \quad (23)$$

в которой

$$F(x, t, \hat{u}, \ell) = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \gamma_{x_i x_j}(x, \ell) (t - \hat{\tau}(x, \ell)) + q(x) [(\beta(x, \ell) + \gamma(x, \ell)(t - \hat{\tau}(x, \ell)) + \hat{u}(x, t, \ell))^m - \beta^m]. \quad (24)$$

Установить постулируемые теоремой 1 свойства функции $\hat{u}(x, t, \ell)$ можно на основе анализа задачи (23), (24), но фактически этого делать не нужно, так как они следуют из леммы 2. $\square$

3. Исследование обратной задачи

Сопоставляя данные обратной задачи (5) с формулой (19), заключаем, что имеет место равенство

$$g_t(x, t, \ell)|_{t=\hat{\tau}(x, \ell)+0} = \gamma(x, \ell), \quad x \in S^+(R, \ell), \quad \ell \in \mathbb{S}^2. \quad (25)$$

Таким образом, обратная задача сводится к отысканию искомого коэффициента $q(x)$ по заданной функции $\gamma(x, \ell)$. Воспользуемся для решения последней задачи формулой (22) для вычисления $\gamma(x, \ell)$. Так как функция $\beta(x, \ell)$, входящая в нее, известна, из равенства (22) можно найти интегралы

$$\int_{\hat{\Gamma}(x, \ell)} \rho(\xi, \ell) q(\xi) ds = \hat{w}(x, \ell), \quad x \in S^+(R, \ell), \quad \ell \in \mathbb{S}^2, \quad (26)$$

в которых

$$\rho(x, \ell) = \beta^{m-1}(x, \ell), \quad (27)$$

а $\hat{w}(x, \ell)$ — известная функция для всех $x \in S^+(R, \ell)$, $\ell \in \mathbb{S}^2$, вычисляемая по формуле

$$\hat{w}(x, \ell) = \frac{2\gamma(x, \ell)}{\beta(x, \ell)} - \sum_{i,j=1}^3 \int_{\hat{\Gamma}(x, \ell)} \frac{a_{ij}(\xi) \beta_{\xi_i \xi_j}(\xi, \ell)}{\beta(\xi, \ell)} ds.$$

Задача об отыскании функции $q(x)$ из уравнения (26) называется задачей интегральной геометрии. Впервые подобная задача, но с другой параметризацией геодезических и весовой функции $\rho(x, \ell)$, была исследована в работах [17-20] в связи с изучением обратной кинематической задачи сейсмики. Задача (26) является новой и требует отдельного рассмотрения. Конечно, можно было бы перейти в ней к той параметризации, которая использовалась в цитированных выше работах, но получаемые при этом оценки устойчивости решения задачи приводят к трудно проверяемым условиям на весовую функцию. Поэтому ниже мы формулируем лемму об устойчивости решения уравнения (26), доказательство которой, в принципе, использует уже известный метод, однако содержит и элементы новизны. Условия этой леммы на функцию $\rho(x, \nu)$, задаваемую формулой (27), затем проверяются в терминах коэффициентов $a_{ij}(x)$ задачи (1).

Введем в рассмотрение функцию $w(x, \ell)$ как решение задачи Коши

$$\sum_{i,j}^3 a_{ij}(x) w_{x_i}(x, \ell) \widehat{\tau}_{x_j}(x, \ell) = \rho(x, \ell) q(x), \quad w|_{\Sigma(\ell)} = 0. \quad (28)$$

Очевидно, что $w(x, \ell) = \widehat{w}(x, \ell)$ для $x \in S^+(R, \ell)$, $\ell \in \mathbb{S}^2$. Кроме того, $w(x, \ell) = 0$ для всех $x \in S^-(R, \ell)$, $\ell \in \mathbb{S}^2$, так как носитель $q(x)$ содержится в $B(R)$.

Пусть $\ell = (\sin \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta)$, и $A^{1/2}(x)$ — корень квадратный из матрицы $A(x)$, $|A(x)| = \det(A(x))$. Тогда $(\nabla \widehat{\tau}(x, \ell)) A^{1/2}(x) = \nu(x, \ell) \in \mathbb{S}^2$. Обозначим

$$|\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2 = ((\ln \rho)_{\vartheta})^2 + ((\ln \rho)_{\psi})^2 / \sin^2 \vartheta, \quad |\nabla_{\vartheta, \psi} \nu|^2 = |\nu_{\vartheta}|^2 + |\nu_{\psi}|^2 / \sin^2 \vartheta.$$

Лемма 3. Пусть выполнено предположение 2, $\text{supp } q \subset B(R)$, $q \in C^2(B(R))$, $a_{ij} \in C^2(\overline{B}(R))$ для всех $i, j = 1, 2, 3$, $\rho \in C^1(\overline{B}(R) \times \mathbb{S}^2)$, функция $w(x, \ell)$ является решением уравнения (28) и, кроме того, выполнены условия

$$\rho(x, \ell) \geq \rho_0, \quad |\nu_{\vartheta} \times \nu_{\psi} / \sin \vartheta| \geq \kappa_1 > 0, \quad \frac{|\nabla_{\vartheta, \psi} \nu|^2}{|\nu_{\vartheta} \times \nu_{\psi} / \sin \vartheta|^2} |\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2 \leq \kappa_2 < 2, \quad (29)$$

в которых κ_1 , κ_2 и ρ_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда для функции $q(x)$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} |A(x)|^{-1/2} q^2(x) dx &\leq \frac{1}{8\pi \rho_0^2 \kappa_1 (2 - \kappa_2)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S^+(R, \ell)} |(\nabla \widehat{w} \times n(x))|^2 \\ &\quad + |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{w}|^2 |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{\tau}|^2 dS \sin \vartheta d\vartheta d\psi, \end{aligned} \quad (30)$$

в котором $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $S^+(R, \ell)$ в точке x , dS — элемент площади поверхности $S^+(R, \ell)$.

Доказательство этой леммы дано в следующем разделе.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \mu_1 \sum_{i=1}^3 \xi_i^2$$

с некоторой положительной постоянной μ_1 , то $|A(x)| \leq \mu_1^3$ и $|A(x)|^{-1/2} \geq \mu_1^{-3/2}$. Как результат тогда оценка (30) может быть заменена следующей:

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} q^2(x) dx &\leq \frac{\mu_1^{3/2}}{8\pi \rho_0^2 \kappa_1 (2 - \kappa_2)} \int_{\mathbb{S}^2} \int_{S^+(R, \ell)} |(\nabla \widehat{w} \times n(x))|^2 \\ &\quad + |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{w}|^2 |\nabla_{\vartheta, \psi} \widehat{\tau}|^2 dS \sin \vartheta d\vartheta d\psi. \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть выполнены предположения 1 и 2, $\text{supp } q \subset B(R)$, $q \in C^2(B(R))$, $a_{ij} \in C^3(\overline{B}(R))$ для всех $i, j = 1, 2, 3$, $\rho \in C^2(\overline{B}(R) \times \mathbb{S}^2)$ и, кроме того, имеют место оценки

$$\sum_{i,j=1}^3 |a_{ij}(x)| \leq M, \quad \|a_{ij}(x) - \delta_{ij}\|_{C^3(\overline{B}(R))} \leq \varepsilon, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (31)$$

с некоторыми положительными постоянными M и ε . Тогда для любых $\rho_0 \in (0, 1)$, $k_1 \in (0, 1)$ и $k_2 \in (0, 2)$ найдется $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho_0, \kappa_1, \kappa_2, M) > 0$ такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ справедлива оценка устойчивости (30) для решения обратной задачи.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\beta(x, \ell)$, которая определяет по формуле (27) функцию $\rho(x, \ell)$, зависит от вторых производных функции $\hat{\tau}(x, \ell)$ (см. формулу (12)). Выпишем для этих производных дифференциальные уравнения вдоль геодезической $\hat{\Gamma}(x, \nu)$. Это использует обыкновенную технику построения геодезических для уравнения эйконала (2) и производных функции $\hat{\tau}(x, \ell)$, поэтому не будем останавливаться отдельно на их выводе. Обозначим $p_{ij}(x, \ell) = \hat{\tau}_{x_i x_j}(x, \ell)$. Тогда уравнения для вычисления $p_{ij}(x, \ell)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp_{ij}}{ds} &= -\frac{1}{2} \sum_{k,s=1}^3 (2a_{ks}p_{kj}p_{si} + 4(a_{ks})_{x_i}p_{kj}p_s + (a_{ks})_{x_i x_j}p_k p_s), \\ p_{ij}|_{s=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (32)$$

и их надо рассматривать совместно с системой уравнений (4). Чтобы проверить выполнение условий леммы 3, необходимо также выписать уравнения для производных по переменным ϑ и ψ функций $p_{ij}(x, \ell)$, $\rho(x, \ell)$, $\nu(x, \ell)$, $x_k(s, x^0, \ell)$, $p_k(s, x^0, \ell)$. Уравнения для $p_{ij}(x, \ell)$ находятся в результате дифференцирования по ϑ и ψ уравнений (32) и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d(p_{ij})_{\vartheta}}{ds} &= -\frac{1}{2} \sum_{k,s,n=1}^3 (2(a_{ks})_{x_n}p_{kj}p_{si} + 4(a_{ks})_{x_i x_n}p_{kj}p_s + (a_{ks})_{x_i x_j x_n}p_k p_s)(x_n)_{\vartheta} \\ &\quad - \sum_{k,s=1}^3 (2a_{ks}(p_{kj})_{\vartheta}p_{si} + 2(a_{ks})_{x_i}[(p_{kj})_{\vartheta}p_s + p_{kj}(p_s)_{\vartheta}] + (a_{ks})_{x_i x_j}(p_k)_{\vartheta}p_s), \\ (p_{ij})_{\vartheta}|_{s=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \\ \frac{d(p_{ij})_{\psi}}{ds} &= -\frac{1}{2} \sum_{k,s,n=1}^3 (2(a_{ks})_{x_n}p_{kj}p_{si} + 4(a_{ks})_{x_i x_n}p_{kj}p_s + (a_{ks})_{x_i x_j x_n}p_k p_s)(x_n)_{\psi} \\ &\quad - \sum_{k,s=1}^3 (2a_{ks}(p_{kj})_{\psi}p_{si} + 2(a_{ks})_{x_i}[(p_{kj})_{\psi}p_s + p_{kj}(p_s)_{\psi}] + (a_{ks})_{x_i x_j}(p_k)_{\psi}p_s), \\ (p_{ij})_{\psi}|_{s=0} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как $\rho(x, \ell)$ определена равенством (27), то $\ln \rho(x, \ell) = (m-1) \ln \beta(x, \ell)$, а из (10) следует, что

$$\frac{d}{ds} \ln \beta = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x)p_{ij} = 0, \quad \ln \beta|_{s=0} = 0,$$

то $\ln \rho(x, \ell)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{ds} \ln \rho = -\frac{m-1}{2} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x)p_{ij} = 0, \quad \ln \rho|_{s=0} = 0. \quad (34)$$

Следовательно, частные производные функции $\ln \rho(x, \ell)$ по ϑ и ψ являются решениями следующих задач Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\ln \rho)_{\vartheta} &= -\frac{m-1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\sum_{s=1}^3 (a_{ij})_{x_s} (x_s)_{\vartheta} p_{ij} + a_{ij}(p_{ij})_{\vartheta} \right) = 0, \quad (\ln \rho)_{\vartheta}|_{s=0}, \\ \frac{d}{ds}(\ln \rho)_{\psi} &= -\frac{m-1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \left(\sum_{s=1}^3 (a_{ij})_{x_s} (x_s)_{\psi} p_{ij} + a_{ij}(p_{ij})_{\psi} \right) = 0, \quad (\ln \rho)_{\psi}|_{s=0}. \end{aligned} \quad (35)$$

Положим $A^{1/2}(x) = B(x) = (b_{ij}(x))$. Тогда $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. $\nu_k = \sum_{j=1}^3 b_{kj} p_j$, $k = 1, 2, 3$, и

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_k}{d\vartheta} &= \sum_{i,j=1}^3 (b_{kj})_{x_i} \frac{dx_i}{d\vartheta} p_j + \sum_{j=1}^3 b_{kj} \frac{dp_j}{d\vartheta}, \quad \nu|_{s=0} = \ell, \quad k = 1, 2, 3, \\ \frac{d\nu_k}{d\psi} &= \sum_{i,j=1}^3 (b_{kj})_{x_i} \frac{dx_i}{d\psi} p_j + \sum_{j=1}^3 b_{kj} \frac{dp_j}{d\psi}, \quad \nu|_{s=0} = \ell, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (36)$$

Уравнения для производных от x_k и p_k находятся в результате дифференцирования равенств (4), в правых частях которых надо положить $x = x(s, x^0, \ell)$. В результате дифференцирования получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d(x_k)_{\vartheta}}{ds} &= \sum_{j,i=1}^3 (a_{kj})_{x_i} (x_i)_{\vartheta} p_j + \sum_{j=1}^3 a_{kj}(p_j)_{\vartheta}, \quad (x_k)_{\vartheta}|_{s=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \\ \frac{d(x_k)_{\psi}}{ds} &= \sum_{j,i=1}^3 (a_{kj})_{x_i} (x_i)_{\psi} p_j + \sum_{j=1}^3 a_{kj}(p_j)_{\psi}, \quad (x_k)_{\psi}|_{s=0} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(p_k)_{\vartheta}}{ds} &= - \sum_{i,j=1}^3 (p_i)_{\vartheta} p_j (a_{ij})_{x_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,s=1}^3 p_i p_j (a_{ij})_{x_k x_s} (x_s)_{\vartheta}, \\ &\quad (p_k)_{\vartheta}|_{s=0} = \ell_{\vartheta}, \quad k = 1, 2, 3, \\ \frac{d(p_k)_{\psi}}{ds} &= - \sum_{i,j=1}^3 (p_i)_{\psi} p_j (a_{ij})_{x_k} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,s=1}^3 p_i p_j (a_{ij})_{x_k x_s} (x_s)_{\psi}, \\ &\quad p_{\psi}|_{s=0} = \ell_{\psi}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (38)$$

Исходя из выписанных выше уравнений, оценим величины входящих в них производных по ϑ и ψ . При этом для упрощения выкладок будем рассматривать ε как малую величину и использовать в оценках ее порядок малости как $O(\varepsilon)$.

Из равенств (4), (37), (38) и условий (31) находим, что

$$\begin{aligned} |p(x, \ell) - \ell| &= O(\varepsilon), \quad |x_{\vartheta}| = O(\varepsilon), \quad |x_{\psi} / \sin \vartheta| = O(\varepsilon), \\ |p_{\vartheta}| &= 1 + O(\varepsilon), \quad |p_{\psi} / \sin \vartheta| = 1 + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (39)$$

Из оценок (39) и уравнений (36) следует, что

$$|\nu_{\vartheta}| = 1 + O(\varepsilon), \quad |\nu_{\psi} / \sin \vartheta| = 1 + O(\varepsilon). \quad (40)$$

Из формул (40) следует оценка

$$|\nu_{\vartheta} \times \nu_{\psi} / \sin \vartheta| = 1 + O(\varepsilon), \quad |\nabla_{\vartheta, \psi} \nu| = 2 + O(\varepsilon). \quad (41)$$

Покажем, что функция $\hat{\tau}(x, \ell)$ ограничена сверху некоторой постоянной $d > 0$ для всех $x \in B(R)$ и $\ell \in \mathbb{S}^2$. Прежде всего, из равномерной положительности матрицы $A(x)$ следует оценка

$$\mu_0 |\nabla \hat{\tau}|^2 \leq \sum_{ij}^3 a_{ij}(\hat{\tau})_{x_i}(\hat{\tau})_{x_j} = 1.$$

Из этой оценки заключаем, что $|\nabla \hat{\tau}| \leq 1/\sqrt{\mu_0}$ для всех $x \in B(R)$ и $\ell \in \mathbb{S}^2$. Далее, пусть $L(x, x^0)$ — отрезок прямой, соединяющий точку $x \in B(R)$ с точкой $x^0 \in \Sigma(\ell)$ и ортогональный плоскости $\Sigma(\ell)$. Представим множество точек этой прямой в виде $\xi = x^0 + \sigma' \ell$, $\sigma' \in [0, \sigma]$, где σ — евклидова длина $L(x, x^0)$. Тогда

$$\hat{\tau}(x, \ell) = \int_0^\sigma (\nabla \hat{\tau}(x^0 + \sigma' \ell, \ell) \cdot \ell) d\sigma' \leq \sigma / \sqrt{\mu_0} \leq 2R / \sqrt{\mu_0} = d, \quad x \in B(R), \ell \in \mathbb{S}^2.$$

Таким образом, римановы длины геодезических $\hat{\Gamma}(x, \ell)$ равномерно ограничены числом d для всех $x \in B(R)$ и $\ell \in \mathbb{S}^2$.

Пусть $\max_{1 \leq i, j \leq 3} |p_{ij}(s, x^0, \ell)| = P(s, x^0, \ell)$. Из уравнений (32) и условий (31) следует, что вдоль геодезической $\hat{\Gamma}(x, \ell)$ верно неравенство

$$P(s, x^0, \ell) \leq M \left(\int_0^s [P^2(s', x^0, \ell) + 2CP(s', x^0, \ell)] ds' \right) + C, \quad (42)$$

в котором положительная постоянная $C = O(\varepsilon)$. Обозначим

$$J(s) = \int_0^s [P^2(s') + 2CP(s')] ds',$$

опустив для краткости зависимость от фиксированных вдоль $\hat{\Gamma}(x, \ell)$ параметров x^0 и ℓ . Тогда $P(s) \leq MJ(s) + C$ и $J'(s) = P^2(s) + 2CP(s)$. Из (42) и предыдущего равенства получаем неравенство

$$J'(s) \leq (MJ(s) + 2C)^2 - C^2.$$

Кроме того, в силу введенного обозначения имеет место условие $J(0) = 0$. Интегрируя это неравенство с учетом начального условия, приходим к промежуточному неравенству

$$\frac{MJ(s) + C}{MJ(s) + 3C} \leq \frac{1}{3} \exp(2MCs), \quad s \geq 0.$$

Из этого неравенства находим оценку

$$P(s) \leq MJ(s) + C \leq \frac{2C}{3 \exp(-2MCs) - 1} \leq \frac{2C}{3 \exp(-2Mcd) - 1}, \quad s \leq d, \quad (43)$$

при условии, что $3 \exp(-2Mcd) > 1$. Так как $C = O(\varepsilon)$, последнее условие выполняется при достаточно малом ε . Тогда из (43) выводим, что $P(s, x^0, \ell) = O(\varepsilon)$ и

$$p_{ij}(x, \ell) = O(\varepsilon), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad x \in B(R), \ell \in \mathbb{S}^2. \quad (44)$$

Из соотношений (33) и уже найденных выше оценок для $p_k(s, x^0, \ell)$ и частных производных по переменным ϑ и ψ функций $x_k(s, x^0, \ell)$, $p_k(s, x^0, \ell)$ выводятся оценки

$$(p_{ij})_{\vartheta}(s, x^0, \ell) = O(\varepsilon), \quad (p_{ij})_{\psi}(s, x^0, \ell) = O(\varepsilon), \quad (45)$$

равномерные для всех $\widehat{\Gamma}(x, \ell)$, $x \in B(R)$, $\ell \in \mathbb{S}^2$.

Перейдем к оценке функции $\rho(s, x^0, \ell)$. Из равенств (35) и полученных ранее оценок следуют равенства

$$(\ln \rho)_{\vartheta}(s, x^0, \ell) = O(\varepsilon), \quad (\ln \rho)_{\psi}(s, x^0, \ell) = O(\varepsilon). \quad (46)$$

Кроме того, из равенств (27) и (13) с учетом принятых выше обозначений следует, что

$$\rho(x, \ell) = \beta^{m-1}(x, \ell) = \exp \left(-\frac{m-1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \int_{\widehat{\Gamma}(x, \ell)} a_{ij}(\xi) p_{ij}(\xi, \ell) ds \right). \quad (47)$$

Так как входящие в формулу (47) коэффициенты $a_{ij}(x)$ равномерно ограничены, а p_{ij} согласно (44) имеют порядок $O(\varepsilon)$, из (47) следует оценка

$$\rho(x, \ell) = 1 + O(\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}_+^3(\ell), \quad \ell \in \mathbb{S}^2. \quad (48)$$

Зададим произвольные числа $\rho_0 \in (0, 1)$, $\kappa_1 \in (0, 1)$, $\kappa_2 \in (0, 2)$. Тогда из оценок (40), (41), (46), (48) вытекает существование положительного числа $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\rho_0, k_1, k_2, M)$ такого, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \rho(x, \ell) &\geq \rho_0, \quad |\nu_{\vartheta} \times \nu_{\psi} / \sin \vartheta| \geq \kappa_1, \\ \frac{|\nabla_{\vartheta, \psi} \nu|^2}{|\nu_{\vartheta} \times \nu_{\psi} / \sin \vartheta|^2} |\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2 &\leq \kappa_2, \quad x \in B(R), \quad \ell \in \mathbb{S}^2. \end{aligned} \quad (49)$$

Из выполнения неравенств (49) следует, что выполнены условия (29) леммы 3. Поэтому справедлива оценка (30). $\square$

4. Доказательство леммы 3

Обозначим $(\nabla w(x, \ell)) A^{1/2}(x) = W(x, \ell)$,

$$(\nabla \widehat{\tau}(x, \ell)) A^{1/2}(x) = \nu(x, \ell) = (\sin \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta \sin \psi, \cos \vartheta).$$

Тогда уравнение (28) запишется в виде

$$(W \cdot \nu) = \rho(x, \ell) q(x), \quad x \in B(R), \quad \ell \in \mathbb{S}^2. \quad (50)$$

Определим оператор $\mathcal{L}$ равенством

$$\mathcal{L} \equiv 2\rho |A|^{-1/2} \left[(W \cdot (\nu_{\psi} \times \nu)) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - (W \cdot (\nu_{\vartheta} \times \nu)) \frac{\partial}{\partial \psi} \right].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\rho} (W \cdot \nu) \right\} &= 2\rho |A|^{-1/2} \left[(W \cdot (\nu_{\psi} \times \nu)) \frac{\partial}{\partial \vartheta} - (W \cdot (\nu_{\vartheta} \times \nu)) \frac{\partial}{\partial \psi} \right] \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{\rho} (W \cdot \nu) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Непосредственные вычисления приводят к тождеству

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{\rho} (W \cdot \nu) \right\} &\equiv \frac{\partial}{\partial \vartheta} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\psi \times \nu))(W \cdot \nu)] \} \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \psi} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu))(W \cdot \nu)] \} \\ &\quad + |A|^{-1/2} \{ (W \cdot (\nu_\psi \times \nu))(W \cdot \nu_\vartheta) - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu))(W \cdot \nu_\psi) \\ &\quad - (W \cdot \nu)[(W \cdot (\nu_\psi \times \nu_\vartheta)) - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu_\psi))] \\ &\quad + (W \cdot (\nu_\psi \times \nu))(W_\vartheta \cdot \nu) - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu))(W_\psi \cdot \nu) \\ &\quad - (W \cdot \nu)[(W_\vartheta \cdot (\nu_\psi \times \nu)) - (W_\psi \cdot (\nu_\vartheta \times \nu))] \} \\ &\quad + 2|A|^{-1/2} \left[(W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) \frac{\partial \ln \rho}{\partial \vartheta} - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) \frac{\partial \ln \rho}{\partial \psi} \right] (W \cdot \nu). \quad (51) \end{aligned}$$

Легко проверяются следующие равенства:

$$\nu_\psi \times \nu = \lambda_1 \nu_\vartheta - \mu_1 \nu_\psi, \quad \lambda_1 = \frac{|\nu_\psi|^2}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi|}, \quad \mu_1 = \frac{(\nu_\vartheta \cdot \nu_\psi)}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi|},$$

$$\nu_\vartheta \times \nu = \lambda_2 \nu_\vartheta - \mu_2 \nu_\psi, \quad \lambda_2 = \frac{(\nu_\vartheta \cdot \nu_\psi)}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi|}, \quad \mu_2 = \frac{|\nu_\vartheta|^2}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi|}, \quad \nu_\vartheta \times \nu_\psi = |\nu_\vartheta \times \nu_\psi| \nu.$$

Используя эти равенства, оценим отдельные квадратичные слагаемые, входящие в формулу (51). На время опускаем в них множитель $|A|^{-1/2}$. Имеем

$$\begin{aligned} P_1 &\equiv (W \cdot (\nu_\psi \times \nu))(W \cdot \nu_\vartheta) - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu))(W \cdot \nu_\psi) \\ &= \lambda_1 (W \cdot \nu_\vartheta)^2 + \mu_2 (W \cdot \nu_\psi)^2 - (\mu_1 + \lambda_2) (W \cdot \nu_\vartheta)(W \cdot \nu_\psi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 &\equiv 2 \left[(W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) \frac{\partial \ln \rho}{\partial \vartheta} - (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) \frac{\partial \ln \rho}{\partial \psi} \right] (W \cdot \nu) \\ &= 2(W \cdot \nu)(W \cdot \nu_\vartheta)[\lambda_1 (\ln \rho)_\vartheta - \lambda_2 (\ln \rho)_\psi] - 2(W \cdot \nu)(W \cdot \nu_\psi)[\mu_1 (\ln \rho)_\vartheta - \mu_2 (\ln \rho)_\psi], \end{aligned}$$

$$P_3 \equiv -(W \cdot \nu)[(W \cdot (\nu_\psi \times \nu_\vartheta)) + (W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu_\psi))] = 2(W \cdot \nu)^2 |\nu_\vartheta \times \nu_\psi|.$$

Далее, так как $\mu_1 = \lambda_2$, то

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \lambda_1 [(W \cdot \nu_\vartheta) + (W \cdot \nu)(\ln \rho)_\vartheta]^2 + \mu_2 [(W \cdot \nu_\psi) + (W \cdot \nu)(\ln \rho)_\psi]^2 \\ &\quad - 2\lambda_2 [(W \cdot \nu_\vartheta) + (W \cdot \nu)(\ln \rho)_\vartheta][(W \cdot \nu_\psi) + (W \cdot \nu)(\ln \rho)_\psi] \\ &\quad - (W \cdot \nu)^2 [\lambda_1 ((\ln \rho)_\vartheta)^2 + \mu_2 ((\ln \rho)_\psi)^2 - 2\lambda_2 (\ln \rho)_\vartheta (\ln \rho)_\psi]. \end{aligned}$$

Замечая, что $|\lambda_2| \leq \sqrt{\lambda_1 \mu_2}$ и

$$-2\sqrt{\lambda_1 \mu_2} (\ln \rho)_\vartheta (\ln \rho)_\psi \leq \lambda_1 ((\ln \rho)_\psi)^2 / \sin^2 \vartheta + \mu_2 ((\ln \rho)_\vartheta)^2 \sin^2 \vartheta,$$

получаем неравенство

$$P_1 + P_2 + P_3 \geq (W \cdot \nu)^2 (2|\nu_\vartheta \times \nu_\psi| - (\lambda_1 + \mu_2 \sin^2 \vartheta) |\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2),$$

При выполнении условий леммы

$$|\nu_\vartheta \times \nu_\psi| / \sin \vartheta \geq \kappa_1 > 0, \quad \rho(x, \ell) \geq \rho_0 > 0,$$

$$\frac{(\lambda_1 + \mu_2 \sin^2 \vartheta)}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi|} |\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2 = \frac{|\nu_\vartheta|^2 + |\nu_\psi|^2 / \sin^2 \vartheta}{|\nu_\vartheta \times \nu_\psi| / \sin \vartheta} |\nabla_{\vartheta, \psi} \ln \rho|^2 \leq \kappa_2 < 2,$$

приходим к оценке

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &\geq (W \cdot \nu)^2 |\nu_\vartheta \times \nu_\psi| (2 - \kappa_2) \geq \kappa_1 (2 - \kappa_2) (W \cdot \nu)^2 \sin \vartheta \\ &= \kappa_1 (2 - \kappa_2) \rho^2(x, \ell) q^2(x) \sin \vartheta \geq \kappa_1 (2 - \kappa_2) \rho_0^2 q^2(x) \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Рассмотрим и преобразуем другие слагаемые тождества (51). Имеем

$$\begin{aligned} S_1 &\equiv |A|^{-1/2} \{ (W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) (W_\vartheta \cdot \nu) - (W \cdot \nu) (W_\vartheta \cdot (\nu_\psi \times \nu)) \} \\ &= |A|^{-1/2} \{ W_\vartheta \cdot [\nu (W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) - (\nu_\psi \times \nu) (W \cdot \nu)] \} \\ &= |A|^{-1/2} \{ W_\vartheta \cdot [W \times (\nu \times (\nu_\psi \times \nu))] \} = |A|^{-1/2} \{ (W_\vartheta \cdot (W \times \nu_\psi)) \} \\ &= |A|^{-1/2} (\nu_\psi \cdot (W_\vartheta \times W)). \end{aligned}$$

При выводе этого равенства использована (в предпоследней строке) ортогональность векторов ν и ν_ψ . Аналогично находим, что

$$\begin{aligned} S_2 &\equiv |A|^{-1/2} \{ -(W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) (W_\psi \cdot \nu) + (W \cdot \nu) (W_\psi \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) \} \\ &= |A|^{-1/2} \{ -(\nu_\vartheta \cdot (W_\psi \times W)) \}. \end{aligned}$$

В результате сложения получаем новое равенство

$$S_1 + S_2 = |A|^{-1/2} \{ (\nu_\psi \cdot (W_\vartheta \times W)) - (\nu_\vartheta \cdot (W_\psi \times W)) \}.$$

Напомним, что ранее были введены обозначения $W = \nabla w A^{1/2}$ и $\nu = \nabla \hat{\tau} A^{1/2}$. Используя их, приходим к формуле

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \{ (\nabla \hat{\tau}_\psi \cdot (\nabla w_\vartheta \times \nabla w)) - (\nabla \hat{\tau}_\vartheta \cdot (\nabla w_\psi \times \nabla w)) \} \\ &= \operatorname{div} [w_\vartheta (\nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi) - w_\psi (\nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta)]. \end{aligned}$$

В качестве следствия проведенных выше вычислений из тождества (51) и очевидного равенства $\mathcal{L}\{W \cdot \nu\}/\rho = 0$ выводим неравенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) (W \cdot \nu)] \} - \frac{\partial}{\partial \psi} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) (W \cdot \nu)] \} \\ + \kappa_1 (2 - \kappa_2) \rho_0^2 |A(x)|^{-1/2} q^2(x) \sin \vartheta \\ + \operatorname{div} [w_\vartheta (\nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi) - w_\psi (\nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta)] \leq 0, \quad (52) \end{aligned}$$

имеющее место для всех $x \in B(R)$ и $\ell \in \mathbb{S}^2$.

Проинтегрируем неравенство (52) по области $B(R)$ и по $\vartheta \in [0, \pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$. Получим интегральное неравенство

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial \vartheta} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\psi \times \nu)) (W \cdot \nu)] \} \\ - \frac{\partial}{\partial \psi} \{ |A|^{-1/2} [(W \cdot (\nu_\vartheta \times \nu)) (W \cdot \nu)] \} d\vartheta d\psi dx \\ + \int_{B(R)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \kappa_1 (2 - \kappa_2) \rho_0^2 |A(x)|^{-1/2} q^2(x) \sin \vartheta d\vartheta d\psi dx \\ + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{B(R)} \operatorname{div} [w_\vartheta \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi - w_\psi \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta] dx d\vartheta d\psi \leq 0. \quad (53) \end{aligned}$$

В этой формуле интегралы от подынтегральных функций, стоящих в первой и второй строках, обращаются в нуль. Интеграл от производной по ϑ равен нулю, так как $\nu_\psi = 0$ при значениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, а интеграл от производной по ψ обращается в нуль в силу 2π -периодичности функций W и ν по этой переменной. Интеграл, стоящий в третьей строке, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \int_{B(R)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \kappa_1(2 - \kappa_2) \rho_0^2 \sin \theta d\theta d\varphi dx |A(x)|^{-1/2} q^2(x) \sin \vartheta d\vartheta d\psi dx \\ = 4\pi \kappa_1(2 - \kappa_2) \rho_0^2 \int_{B(R)} |A(x)|^{-1/2} q^2(x) dx. \end{aligned}$$

Применяя к интегралу в четвертой строке формулу Гаусса — Остроградского, получаем равенство

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{B(R)} \operatorname{div} [w_\vartheta \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi - w_\psi \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta] dx d\vartheta d\psi \\ = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{S(R)} [w_\vartheta \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi - w_\psi \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta] \cdot n(x) dS d\vartheta d\psi, \end{aligned}$$

в котором dS — элемент площади поверхности $S(R)$, а $n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к $S(R)$ в точке x . Напомним, что в этой формуле $w(x, \ell) = 0$ для $x \in S^-(R, \ell)$. Поэтому интеграл по $S(R)$ можно заменить интегралом только по $S^+(R, \ell)$.

В результате из формулы (53) находим, что

$$\begin{aligned} 4\pi \rho_0^2 \kappa_1(2 - \kappa_2) \int_{B(R)} |A(x)|^{-1/2} q^2(x) dx \\ \leq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{S^+(R, \ell)} [-w_\vartheta \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\psi + w_\psi \nabla w \times \nabla \hat{\tau}_\vartheta] \cdot n(x) dS d\vartheta d\psi \\ \leq \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{S^+(R, \ell)} [w_\vartheta \nabla \hat{\tau}_\psi - w_\psi \nabla \hat{\tau}_\vartheta] \cdot (\nabla w \times n(x)) dS d\vartheta d\psi \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{S^+(R, \ell)} [(\nabla w \times n(x))^2 + |\nabla_{\vartheta, \psi} w|^2 |\nabla_{\vartheta, \psi} \hat{\tau}|^2] dS \sin \vartheta d\vartheta d\psi. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует оценка (30). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Мир, 2005.
2. Kurylev Y., Lassas M., Uhlmann G. Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations // Invent. Math. 2018. V. 212. P. 781–857.
3. Lassas M., Uhlmann G., Wang Y. Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds // Commun. Math. Phys. 2018. V. 360. P. 555–609.

4. Lassas M. Inverse problems for linear and non-linear hyperbolic equations // Proc. Intern. Congress Math. 2018. V. 3. P. 3739–3760.
5. Hintz P., Uhlmann G. Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets // Internat. Math. Res. Notices. 2019. V. 22. P. 6949–6987.
6. Hintz P., Uhlmann G., Zhai J. An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds // Intern. Math. Res. Notices. 2022. V. 17. P. 13181–13211.
7. Wang Y., Zhou T. Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations // Commun. Partial Differ. Equ. 2019. V. 44, N 11. P. 1140–1158.
8. Barreto A. S. Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions // Inverse Probl. Imaging. 2020. V. 14, N 6. P. 1057–1105.
9. Barreto A. S., Stefanov P. Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime // Commun. Math. Phys. 2022. V. 392. P. 25–53.
10. Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для нелинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 2. С. 83–100.
11. Романов В. Г., Бугуева Т. В. Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 3. С. 154–169.
12. Романов В. Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения // Докл. АН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 504, № 1. С. 36–41.
13. Романов В. Г., Бугуева Т. В. Обратная задача для волнового уравнения с полиномиальной нелинейностью // Сиб. журн. индустр. математики. 2023. Т. 26, № 1. С. 142–149.
14. Романов В. Г. Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 635–652.
15. Романов В. Г. Обратная задача для уравнений электродинамики с нелинейной проводимостью // Докл. АН. 2023. Т. 509, № 1. С. 65–68.
16. Романов В. Г. Одномерная обратная задача для нелинейных уравнений электродинамики // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 10. С. 1397–1411.
17. Мухометов Р. Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 232, № 1. С. 32–35.
18. Мухометов Р. Г., Романов В. Г. К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n -мерном пространстве // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 1. С. 41–44.
19. Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмологии // Докл. АН СССР. 1978. Т. 243, № 2. С. 302–305.
20. Бейлькин Г. Я. Устойчивость и единственность решения обратной кинематической задачи сейсмологии в многомерном случае // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука, 1979. С. 3–6.

Поступила в редакцию 26 января 2024 г.

После доработки 26 января 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru

УДК 512.548+515.162.8

КОНСТРУКЦИИ КВАНДЛОВ НАД ГРУППАМИ И КОЛЬЦАМИ

А. А. Симонов,
М. В. Нецадим, А. Н. Бородин

Аннотация. Приведены конструкции расширения тривиального квандла при помощи группы с нетривиальной абелевой подгруппой; квандла над некоммутативной группой при помощи произвольного антиавтоморфизма; квандла, построенного при помощи обобщенного квандла Александра заменой автоморфизма центральным антиавтоморфизмом; квандла над n -мерным модулем, зависящего от $n(n-1)-1$ параметров из коммутативного кольца с единицей, $n \geq 2$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.311

Ключевые слова: Квандл, квандл Госсу, тривиальный квандл, квандл Александра, обобщенный квандл Александра, самодистрибутивность, дистрибутивность, группа, автоморфизм, антиавтоморфизм, модуль, кольцо.

Введение

Квандл — это непустое множество с бинарной операцией, удовлетворяющей трем алгебраическим аксиомам [1, 2], которые формализуют три преобразования Райдемайстера [3] плоских диаграмм узлов в трехмерном пространстве. Если рассматривать только второе и третье преобразования Райдемайстера, то получим алгебраическую структуру, которая называется *рэком*.

Исторически понятие *квандла* или *самодистрибутивного группоида* связывают с именами С. В. Матвеева и Джойса. В 1982 г. С. В. Матвеев [1] ввел алгебраическую систему, которую назвал *дистрибутивным группоидом*. Он доказал, что с каждым классическим узлом можно естественным образом связать *праводистрибутивную правую квазигруппу*, которая является его алгебраическим инвариантом и определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения. Таким образом, был получен универсальный алгебраический инвариант классических узлов. В том же году к этому результату независимо пришел Джойс [2], давший найденной структуре название «*квандл*».

Одной из центральных задач теории узлов является построение инвариантов узлов, в частности, алгебраических инвариантов и их производных структур, которые, в свою очередь, также являются инвариантами. В связи с этим одной из важных задач является построение новых примеров алгебраических систем, по которым можно строить инварианты узлов. В предлагаемой работе приводятся несколько новых алгебраических конструкций, которые позволяют

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5. (проект FWNF-2022-0009).

© 2024 Симонов А. А., Нецадим М. В., Бородин А. Н.

строить квандлы над группой и над модулем. Дополнительное обоснование важности новых конструкций можно найти в работах [4, 5].

Самодистрибутивные группоиды и квазигруппы начали изучаться значительно раньше 1982 г. В работе Берстина и Майера [6] 1929 г. были впервые рассмотрены дистрибутивные квазигруппы. В дистрибутивной квазигруппе выполняются тождества левой и правой дистрибутивности. Митухиса Такасаки в геометрических построениях 1943 г. [7] также получал квазигруппу с правосторонней дистрибутивностью, но с дополнительным ограничением, приводящим к инволютивным квандлам.

Исследуя вопросы дифференцируемости решений функциональных уравнений, Рыль-Нардзевский [8] в 1949 г. ввел *симметричное среднее* и получил дистрибутивную квазигруппу. Позже, в 1953 г., Госсу рассмотрел [9] несимметричные средние, далее [10, 11] он не только выделил аксиоматически данный объект, но и построил его представление над произвольной группой. Он нашел необходимые и достаточные условия, при выполнении которых группа имеет, в терминологии Госсу, правосторонний дистрибутивный изотоп. Построенный Госсу квандл над группой называют обобщенным квандлом Александра. В 1959 г. Стейн [12] ввел на некоммутативной группе производную операцию и показал, что полученная операция леводистрибутивна, идемпотентна и является левой квазигруппой. В 1960-х гг. В. Д. Белоусов показал, что дистрибутивная квазигруппа изотопна коммутативной лупе Муфанг [13]. Далее, вводя производную операцию на лупе Муфанг, которую он называет сердцевиной, доказал, что сердцевина лупы Муфанг нечетного порядка является леводистрибутивной квазигруппой [14]. Исследования изотопов дистрибутивных квазигрупп естественно поставили вопрос и об изотопах леводистрибутивных квазигрупп. Этими вопросами в 1970-х и начале 1980-х гг. занимались В. И. Оной [15–18] В. М. Галкин [19], Н. И. Санду [20].

Конструкции квандлов помимо теории узлов появляются в различных областях математики в связи с изучением вопросов теории групп [1, 2, 21], поиском теоретико-множественных решений уравнения Янга — Бакстера [22], строением симметрических римановых пространств [23], изучением алгебр Хопфа [24]. В последние годы квандлы изучаются как абстрактные алгебраические системы, не связанные с теорией узлов. В частности, в работах [24–31] приведены некоторые конструкции квандлов и их расширений, изучаются автоморфизмы квандлов и их представлений. Хорошее описание алгебраической теории квандлов можно найти в книге [32]. Многие квандлы строятся на основе групп (сопрягающие квандлы, сердцевинные квандлы, обобщенные квандлы Александра, (G, A) -квандлы и вербальные квандлы), при этом операция квандла определяется в терминах исходной групповой операции. Также рассматриваются вопросы перенесения результатов теории групповых колец на квандловые кольца [33, 34]. Обзоры по различным вопросам строения квандлов и связанных с ними конструкций можно найти в [34–39].

Статья имеет следующую структуру. В §1 приведены основные определения, связанные с квандлами как алгебраическими объектами. В теореме 1 построено расширение тривиального квандла при помощи группы с нетривиальной абелевой подгруппой. В теореме 2 доказывается, что у обобщенного квандла Александра есть дуальный квандл, построенный при помощи того же самого автоморфизма.

В §2 в теореме 3 над некоммутативной группой и произвольным антиавто-

морфизмом группы строится квандл. В теоремах 4, 5 установлено, что для обобщенного квандла Александера автоморфизм можно заменить антиавтоморфизмом тогда и только тогда, когда антиавтоморфизм является центральным. В теореме 6 рассматривается аналогичная замена в дуальном обобщенном квандле Александера.

В теореме 7 на двумерном свободном модуле над коммутативным кольцом с единицей строится квандл, зависящий от одного параметра. В теореме 8 построено обобщение на n -мерный свободный модуль, $n \geq 2$. При этом структура квандла зависит уже от $n(n-1)-1$ произвольных параметров из кольца.

Далее в статье везде под дистрибутивностью понимается правая дистрибутивность.

§ 1 Квандлы и групповые автоморфизмы

Приведем необходимые определения алгебраических объектов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квандлом называют алгебраическую систему $\langle Q; \circ, / \rangle$, с операциями умножения « $\circ$ » и деления « $/$ », в которой для произвольных $x, y, z \in Q$ выполняются следующие условия:

- 1) разрешимости слева, что эквивалентно делению справа $(x \circ y)/y = x$,
- 2) идемпотентности $x \circ x = x$,
- 3) дистрибутивности $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

Если $\langle Q; \circ, / \rangle$ является квандлом, то алгебраическая система $\langle Q; /, \circ \rangle$ также является квандлом, который называется обратным квандлом [1, пример 4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квандл $\langle Q; \circ, / \rangle$ называют *инволютивным*, если операции умножения и деления совпадают, т. е. для произвольных $x, y \in Q$ справедливо равенство $x \circ y = x/y$, так что выполняется равенство $(x \circ y) \circ y = x$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квандл $\langle Q; \circ, / \rangle$ называют *абелевым*, если для произвольных $x, y, z, t \in Q$ справедливо тождество $(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t)$.

Госсу в [10, 11] показал, что над произвольной группой $\langle G; \cdot, {}^{-1}, e \rangle$ при помощи произвольного автоморфизма $\varphi \in \text{Aut}(G)$ можно построить квандл с операцией

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G. \quad (1)$$

Если G — абелева группа, то получившийся квандл абелев. Хотя квандл с операцией (1) называют обобщенным квандлом Александера, но исторически следовало бы называть его квандлом Госсу. Отметим, что квандл Александера $x \circ y = tx + (1-t)y$ строится над модулем $M = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Если в (1) использовать тождественный автоморфизм $\varphi = id$, то при помощи получающейся операции:

$$x \circ y = (xy^{-1})y = x,$$

строится *тривиальный квандл*. Тривиальный квандл можно построить не только над группой, но и над произвольным множеством X .

Теорема 1. Пусть X — непустое множество, G — группа с нетривиальной абелевой подгруппой $H \leq G$ и $f : X \times X \rightarrow H$ — произвольная функция с условием $f(x, x) = e$ для любого $x \in X$. Тогда операция

$$(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = (x_1, f(x_1, y_1)x_2), \quad x_1, y_1 \in X, \quad x_2, y_2 \in G, \quad (2)$$

определяет структуру квандла на прямом произведении $X \times G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идемпотентность легко проверяется:

$$(x_1, x_2) \circ (x_1, x_2) = (x_1, f(x_1, x_1)x_2) = (x_1, x_2).$$

Операцией деления к (2) будет операция

$$(x_1, x_2)/(y_1, y_2) = (x_1, (f(x_1, y_1))^{-1}x_2).$$

Проверим дистрибутивность. С одной стороны,

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) \circ (y_1, y_2)) \circ (z_1, z_2) &= (x_1, f(x_1, y_1)x_2) \circ (z_1, z_2) \\ &= (x_1, f(x_1, z_1)f(x_1, y_1)x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} ((x_1, x_2) \circ (z_1, z_2)) \circ ((y_1, y_2) \circ (z_1, z_2)) \\ = (x_1, f(x_1, z_1)x_2) \circ (y_1, f(y_1, z_1)y_2) = (x_1, f(x_1, y_1)f(x_1, z_1)x_2). \end{aligned} \quad (4)$$

С учетом коммутативности подгруппы H и условия $f(X \times X) \subseteq H$ равенства (3) и (4) совпадают. Теорема доказана.

Данный пример интересен тем, что похож на тривиальный квандл, но можно сказать, что это *подкрученный тривиальный квандл*.

Для обобщенного квандла Александра с операцией (1) существует конструкция *дуального квандла*, построенного по тому же автоморфизму.

Теорема 2. Пусть G — группа и φ — произвольный ее автоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\varphi(y^{-1}x), \quad x, y \in G, \quad (5)$$

задает структуру квандла на группе G .

Вопрос 1. Если группа G коммутативна, то операции (1) и (5) задают один и тот же квандл. Если группа некоммутирует, то дуальные операции на одной и той же группе G задают два набора квандлов, зависящие от действующих на группе автоморфизмов φ . Будут ли эти наборы одинаковыми или они будут одинаковыми только с точностью до изоморфизма входящих квандлов?

§ 2 Квандлы и групповые антиавтоморфизмы

Теорема 3. Пусть G — группа, σ — произвольный ее антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\sigma(yx^{-1}), \quad x, y \in G, \quad (6)$$

определяет структуру квандла на группе G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Идемпотентность и разрешимость легко проверяются, причем обратной к (6) будет операция

$$x/y = (\sigma^{-1}(y^{-1}x))^{-1}y = \sigma^{-1}(x^{-1}y)y.$$

Проверим дистрибутивность. С одной стороны,

$$(x \circ y) \circ z = z\sigma(z\sigma(xy^{-1})y^{-1}) = z\sigma(y^{-1})\sigma^2(x)\sigma^2(y^{-1})\sigma(z). \quad (7)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}(x \circ z) \circ (y \circ z) &= z\sigma(zy^{-1})\sigma(z\sigma(zy^{-1})\sigma(xz^{-1})z^{-1}) \\ &= z\sigma(y^{-1})\sigma(z)\sigma(z^{-1})\sigma^2(x)\sigma^2(z^{-1})\sigma^2(z)\sigma^2(y^{-1})\sigma(z),\end{aligned}\quad (8)$$

после сокращения получим совпадение правых частей равенств (7) и (8).

Теорема доказана.

Если в качестве антиавтоморфизма взять $\sigma(x) = x^{-1}$, то получим *сопрягающий квандл* с умножением

$$x \circ y = y\sigma(yx^{-1}) = y(yx^{-1})^{-1} = yxy^{-1},$$

который впервые появился в работе Стейна [12].

Теорема 4. Пусть G — группа и σ — ее антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = \sigma(xy^{-1})y, \quad x, y \in G, \quad (9)$$

определяет структуру квандла на группе G тогда и только тогда, когда антиавтоморфизм удовлетворяет тождеству

$$x\sigma(y)x^{-1} = \sigma(yx^{-1}) \quad (10)$$

для произвольных $x, y \in G$.

Доказательство. Идемпотентность и разрешимость легко проверяются. Покажем необходимость выполнения тождества (10). С одной стороны, можно записать:

$$(x \circ y) \circ z = \sigma((x \circ y)z^{-1})z = \sigma(yz^{-1})\sigma^2(xy^{-1})z. \quad (11)$$

С другой стороны,

$$(x \circ z) \circ (y \circ z) = \sigma^2(zy^{-1})\sigma^2(xz^{-1})\sigma(yz^{-1})z. \quad (12)$$

Следовательно, для выполнения дистрибутивности должно выполняться равенство

$$\sigma(yz^{-1})\sigma^2(xy^{-1}) = \sigma^2(zy^{-1})\sigma^2(xz^{-1})\sigma(yz^{-1}).$$

Производя сначала замены $x \rightarrow \sigma^{-1}(x)$, $y \rightarrow \sigma^{-1}(y)$, $z \rightarrow \sigma^{-1}(z)$, а затем замены $z \rightarrow yz$ и $x \rightarrow yx$, придем к равенству $z^{-1}\sigma(x)z = \sigma(z^{-1}xz)$.

Покажем достаточность тождества (10). Для этого продолжим правую часть равенства (12):

$$\begin{aligned}\sigma^2(zy^{-1})\sigma^2(xz^{-1})\sigma(yz^{-1})z &= \sigma(\sigma(zy^{-1}xz^{-1}))\sigma(yz^{-1})z \\ &= \sigma(z\sigma(y^{-1}x)z^{-1})\sigma(yz^{-1})z = \sigma(z^{-1})\sigma(\sigma(y^{-1}x))\sigma(z)\sigma(z^{-1})\sigma(y)z \\ &= \sigma(z^{-1})\sigma(y)\sigma(y^{-1})\sigma(\sigma(y^{-1}x))\sigma(y)z \\ &= \sigma(yz^{-1})\sigma(\sigma(yy^{-1}xy^{-1}))z = \sigma(yz^{-1})\sigma^2(xy^{-1})z.\end{aligned}$$

В итоге пришли к правой части равенства (11) и соответственно выполнению дистрибутивности. Теорема доказана.

Если в качестве антиавтоморфизма взять $\sigma(x) = x^{-1}$, то получим квандл с операцией

$$x \circ y = (xy^{-1})^{-1}y = yx^{-1}y.$$

В терминологии С. В. Матвеева [1] такой квандл называется *сердцевинным квандлом* (core quandle). Данный квандл является инволютивным и именно он, построенный над абелевой группой, впервые появился в работе Такасаки [7].

Опишем строение антиавтоморфизмов с условием (10).

Лемма 1. Пусть $\iota : G \rightarrow G$ — отображение инверсии группы G , т. е. $\iota(x) = x^{-1}$ для любого элемента x из группы G . Тогда отображение $\sigma = \iota\varphi$, где φ — произвольный автоморфизм группы G , является антиавтоморфизмом и любой антиавтоморфизм группы G может быть представлен в таком виде для подходящего автоморфизма φ .

Доказательство очевидно.

Теорема 5. Антиавтоморфизм σ группы G удовлетворяет условию

$$\sigma(xyx^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x, y \in G$ тогда и только тогда, когда $\sigma = \iota\varphi$, где φ — центральный автоморфизм группы G .

Доказательство. Пусть σ — антиавтоморфизм группы G с условием

$$\sigma(xyx^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x, y \in G$. Тогда

$$\sigma(x^{-1})\sigma(y)\sigma(x) = x\sigma(y)x^{-1}$$

или

$$(\sigma(x)x)^{-1}\sigma(y)(\sigma(x)x) = \sigma(y).$$

Так как $\sigma(y)$ — произвольный элемент группы G , то произведение $\sigma(x)x$ лежит в центре $Z(G)$ группы G , т. е.

$$\sigma(x) = c(x)x^{-1}, \quad c(x) \in Z(G).$$

Тогда для $\varphi = \iota\sigma$ имеем

$$\varphi(x) = xc(x)^{-1}, \quad x \in G.$$

Следовательно, φ — центральный автоморфизм группы G и $\sigma = \iota\varphi$.

Обратно, если $\sigma = \iota\varphi$, где φ — центральный автоморфизм группы G , то

$$\begin{aligned} \sigma(xyx^{-1}) &= \iota(\varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}) = \iota(xc(x)\varphi(y)x^{-1}c(x)^{-1}) \\ &= \iota(x\varphi(y)x^{-1}) = x\iota\varphi(y)x^{-1} = x\sigma(y)x^{-1}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Рассмотрим дуальную к (9) операцию.

Теорема 6. Пусть G — группа и σ — некоторый ее антиавтоморфизм. Тогда операция

$$x \circ y = y\sigma(y^{-1}x), \quad x, y \in G,$$

задает структуру квадла на группе G тогда и только тогда, когда

$$\sigma(xyx^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x, y \in G$.

Доказательство. Проверим выполнение аксиом квадла.

Идемпотентность:

$$x \circ x = x\sigma(x^{-1}x) = x, \quad x \in G.$$

Разрешимость:

$$x \circ y = z \Leftrightarrow y\sigma(y^{-1}x) = z \Leftrightarrow \sigma(y^{-1}x) = y^{-1}z \Leftrightarrow x = y\sigma^{-1}(y^{-1}z),$$

т. е. для любых $y, z \in G$ существует единственный $x \in G$ с условием $x \circ y = z$.

Проверим дистрибутивность. Преобразуем левую часть равенства:

$$(x \circ y) \circ z = (y\sigma(y^{-1}x)) \circ z = z\sigma(z^{-1}y\sigma(y^{-1}x)) = z\sigma^2(y^{-1}x)\sigma(z^{-1}y).$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$\begin{aligned} (x \circ z) \circ (y \circ z) &= (z\sigma(z^{-1}x)) \circ (z\sigma(z^{-1}y)) \\ &= z\sigma(z^{-1}y)\sigma(\sigma(y^{-1}z)z^{-1}z\sigma(z^{-1}x)) = z\sigma(z^{-1}y)\sigma(\sigma(y^{-1}z)\sigma(z^{-1}x)) \\ &= z\sigma(z^{-1}y)\sigma^2(z^{-1}xy^{-1}z). \end{aligned}$$

Итак, для любых $x, y, z \in G$

$$z\sigma^2(y^{-1}x)\sigma(z^{-1}y) = z\sigma(z^{-1}y)\sigma^2(z^{-1}xy^{-1}z).$$

Преобразуем это равенство:

$$\sigma^2(y^{-1}x)\sigma(z^{-1}y) = \sigma(z^{-1}y)\sigma^2(z^{-1}xy^{-1}z).$$

Воспользуемся тем, что σ — антиавтоморфизм:

$$\sigma(z^{-1}y\sigma(y^{-1}x)) = \sigma(\sigma(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1}y).$$

Действуя на полученное равенство отображением σ^{-1} , придем к равенству

$$z^{-1}y\sigma(y^{-1}x) = \sigma(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1}y$$

или

$$(z^{-1}y)\sigma(y^{-1}x)(z^{-1}y)^{-1} = \sigma((z^{-1}y)(y^{-1}x)(z^{-1}y)^{-1}).$$

Ввиду произвольности элементов $x, y, z \in G$ последнее равенство равносильно соотношению

$$\sigma(xy x^{-1}) = x\sigma(y)x^{-1}$$

для любых $x, y \in G$. Так как проведенные преобразования обратимы, последнее соотношение равносильно дистрибутивности.

Теорема доказана.

В связи с полученными утверждениями сформулируем следующие проблемы.

Проблема 1. Пусть G — группа и ψ — биективное отображение G на себя такое, что

$$\psi(xy x^{-1}) = x\psi(y)x^{-1} \quad (13)$$

для любых $x, y \in G$. Описать все такие отображения ψ . В частности, для каких групп G такие отображения (а) определяются однозначно, (б) являются центральными автоморфизмами или антиавтоморфизмами?

Сделаем несколько замечаний.

1. Если положить $y = e$, то $\psi(e) = x\psi(e)x^{-1}$. Из произвольности x следует, что $\psi(e)$ — центральный элемент группы G . В частности, если центр группы G тривиален, то $\psi(e) = e$.

2. Если положить $y = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$, то $\psi(x^n) = x\psi(x^n)x^{-1}$. Следовательно, $\psi(x^n)$ лежит в централизаторе $C_G(x)$ элемента x группы G . В частности, если группа G такова, что для любого элемента $x \neq e$, который не является собственной степенью,

$$C_G(x) = \{x^n, n \in \mathbb{Z}\},$$

то $\psi(x^n) = x^{m(n)}$, где $m(n)$ — некоторое целое число, зависящее от n . Например, это выполнено в свободной неабелевой группе.

3. Если группа G абелева, то отображение $\psi : G \rightarrow G$ — произвольная биекция.

4. Формула (13) определяет отображение классов сопряженности элементов y и $\psi(y)$. Поэтому классы сопряженности этих элементов должны быть равномошными.

Как показывают следующие примеры, в некоторых случаях можно получить полное описание биекций группы G , для которых выполнено (13).

ПРИМЕР 1. Рассмотрим группу подстановок на трех элементах S_3 . Она содержит три класса сопряженности $\{e\}$, $\{(123), (132)\}$, $\{(12), (13), (23)\}$ разной мощности. Поэтому отображение ψ отображает каждый из этих классов в себя.

Прямые вычисления показывают, что если

$$\psi((123)) = (132), \quad \psi((132)) = (123),$$

то для любого $x \in S_3$ выполняется равенство

$$\psi(xyx^{-1}) = x\psi(y)x^{-1},$$

где y равно (123) или (132) .

Далее рассмотрим действие ψ на циклах длины два.

Возможны два случая. В первом случае один из циклов под действием ψ остается на месте. Во втором случае под действием ψ ни один из циклов не остается на месте.

Пусть, например,

$$\psi((12)) = (12), \quad \psi((13)) = (23), \quad \psi((23)) = (13).$$

Тогда для $x = y = (13)$ получаем

$$\psi(xyx^{-1}) = (23), \quad x\psi(y)x^{-1} = (12).$$

Так как $\psi(xyx^{-1}) \neq x\psi(y)x^{-1}$, такой случай невозможен. Далее, пусть, например,

$$\psi((12)) = (13), \quad \psi((13)) = (23), \quad \psi((23)) = (12).$$

Тогда для $x = y = (13)$ получаем

$$\psi(xyx^{-1}) = (13), \quad x\psi(y)x^{-1} = (23).$$

Так как $\psi(xyx^{-1}) \neq x\psi(y)x^{-1}$, такой случай невозможен. Все остальные случаи разбираются аналогично.

Следовательно, биекций группы S_3 , удовлетворяющих (13), ровно две. Это тождественное отображение и биекция, которая определяется на элементах группы S_3 следующим образом:

$$\psi : e \mapsto e, (12) \mapsto (12), (13) \mapsto (13), (23) \mapsto (23), (123) \mapsto (132), (132) \mapsto (123).$$

Вопрос 2. Описать все биекции симметрической группы S_n на $n \geq 4$ симболах, которые удовлетворяют соотношению (13).

ПРИМЕР 2. Пусть F — неабелева свободная группа. Тогда F можно представить в виде дизъюнктного объединения классов сопряженности

$$F = \coprod_{m \in \Gamma} \coprod_{k \in K} w_k^{mF},$$

где $\Gamma = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ — множество ненулевых целых чисел, $\{w_k, k \in K\}$ — множество неединичных слов группы F , каждое из которых не является собственной степенью, занумерованное некоторым множеством индексов K , w_k^{mF} — класс сопряженности элемента w_k^m в группе F . Фиксируем множество биекций:

$$\theta_k : \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad k \in K.$$

Тогда искомая биекция $\psi : F \rightarrow F$, удовлетворяющая формуле (13), определяется следующим образом:

$$\psi(xw_k^m x^{-1}) = xw_k^{\theta_k(m)} x^{-1}, \quad x \in F.$$

Любая биекция $\psi : F \rightarrow F$, удовлетворяющая формуле (13), определяется таким образом для подходящего множества биекций θ_k , $k \in K$.

Проблема 2. Пусть G — группа и ψ — биективное отображение на G . Описать все биекции $\psi : G \rightarrow G$, для которых операция

$$x \circ y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

задает структуру квандла на G .

§ 3 Квандлы над модулями

Пусть R — произвольное коммутативное кольцо с единицей и R^2 — свободный модуль ранга 2 над ним. Элементы модуля R^2 будем рассматривать как столбцы длины два с элементами из R . Для произвольных столбцов $x, y \in R^2$ определим матрицу $(xy) \in R^{2 \times 2}$ из этих столбцов в указанном порядке. Имеет место следующая

Теорема 7. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, $a \in R$. Тогда операции

$$x \circ y = x + a \det(xy)y \tag{14}$$

и ее обратная

$$x/y = x - a \det(xy)y$$

для произвольных $x, y \in R^2$ задают квандл $\langle R^2; \circ, / \rangle$.

Предварительно докажем вспомогательную лемму, где под *линейностью* будем иметь в виду тождество, справедливое для произвольных $x, y, z \in R^2$ и $\alpha, \beta \in R$:

$$\det(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \det(x, z) + \beta \det(y, z).$$

Лемма 2. *Имеет место тождество*

$$\det((x + az \det(xz))(y + az \det(yz))) = \det(xy). \quad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем левую часть этого равенства, воспользовавшись линейностью:

$$\begin{aligned} \det((x + az \det(xz))(y + az \det(yz))) &= \det(x(y + az \det(yz))) + \det((az \det(xz))(y + az \det(yz))) \\ &= \det(xy) + \det(x(az \det(yz))) + a \det(xz) \det(z(y + az \det(yz))) \\ &= \det(xy) + a \det(yz) \det(xz) + a \det(xz) \det(zy) + a \det(xz) \det(zaz \det(yz)) \\ &= \det(xy) + a \det(yz) \det(xz) - a \det(xz) \det(yz) = \det(xy). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Проверяем идемпотентность:

$$x \circ x = x + ax \det(xx) = x.$$

Проверяем разрешимость

$$\begin{aligned} (x \circ y)/y &= (x + ay \det(xy))/y \\ &= (x + ay \det(xy)) - ay \det((x + ay \det(xy))y) \\ &= x + ay \det(xy) - ay \det(xy) - ay \det(ay \det(xy)y) \\ &= x + ay \det(xy) - ay \det(xy) - a^2 y \det(xy) \det(yy) = x. \end{aligned}$$

Проверяем дистрибутивность. Сначала распишем левую часть равенства:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x + ay \det(xy)) \circ z \\ &= (x + ay \det(xy)) + az \det((x + ay \det(xy))z) \\ &= x + ay \det(xy) + az \det(xz) + a^2 z \det(xy) \det(yz). \end{aligned}$$

С другой стороны — правая часть равенства:

$$\begin{aligned} (x \circ z) \circ (y \circ z) &= (x + az \det(xz)) \circ (y + az \det(yz)) \\ &= (x + az \det(xz)) + a(y + az \det(yz)) \det((x + az \det(xz))(y + az \det(yz))) \\ &= x + az \det(xz) + (ay + a^2 z \det(yz)) \det((x + az \det(xz))(y + az \det(yz))) \\ &= x + az \det(xz) + (ay + a^2 z \det(yz)) \det(xy) \\ &= x + az \det(xz) + ay \det(xy) + a^2 z \det(yz) \det(xy), \end{aligned}$$

с учетом коммутативности по сложению и умножению приходим к равенству обеих частей.

Теорема доказана.

Покажем, что приведенная конструкция квандла над свободным модулем ранга 2 обобщается на свободный модуль R^m произвольного ранга $m > 1$.

Теорема 8. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, тогда при помощи произвольных $a_0, a_1, \dots, a_n \in R$ и произвольных линейно независимых $c_1, \dots, c_n \in R^{n+2}$ определим операции:

$$x \circ y = x + a_0 y \det(xyc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n), \quad (16)$$

$$x/y = x - a_0 y \det(xyc_1 \dots c_n) - \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n) \quad (17)$$

для $x, y \in R^{n+2}$, задающие квандл $\langle R^{n+2}; \circ, / \rangle$.

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Справедливо тождество*

$$\det((x \circ y)zc_1 \dots c_n) = \det(xzc_1 \dots c_n) + a_0 \det(xyc_1 \dots c_n) \det(yzc_1 \dots c_n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем левую часть этого равенства, воспользовавшись линейностью:

$$\begin{aligned} \det((x \circ y)zc_1 \dots c_n) &= \det((x + a_0 y \det(xyc_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n))zc_1 \dots c_n) \\ &= \det(xzc_1 \dots c_n) + a_0 \det(xyc_1 \dots c_n) \det(yzc_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xyc_1 \dots c_n) \det(c_k zc_1 \dots c_n) \\ &= \det(xzc_1 \dots c_n) + a_0 \det(xyc_1 \dots c_n) \det(yzc_1 \dots c_n). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Справедливо тождество*

$$\det[(x \circ z)(y \circ z)c_1 \dots c_n] = \det[xyz_1 \dots c_n].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем левую часть этого равенства, воспользовавшись линейностью:

$$\begin{aligned} &\det[(x \circ z)(y \circ z)c_1 \dots c_n] \\ &= \det \left[(x + a_0 z \det(xzc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xzc_1 \dots c_n))(y \circ z)c_1 \dots c_n \right] \\ &= \det[x(y \circ z)c_1 \dots c_n] + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det[z(y \circ z)c_1 \dots c_n] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k \det(xzc_1 \dots c_n) \det[c_k(y \circ z)c_1 \dots c_n] \\ &= \det[x(y \circ_a z)c_1 \dots c_n] + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det[z(y \circ z)c_1 \dots c_n] \\ &= \det \left[x(y + a_0 z \det(yzc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(yzc_1 \dots c_n))c_1 \dots c_n \right] \\ &\quad + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det[z(y \circ z)c_1 \dots c_n] \\ &= \det[xyz_1 \dots c_n] + a_0 \det(yzc_1 \dots c_n) \det[xzc_1 \dots c_n] \\ &\quad + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det[z(y \circ z)c_1 \dots c_n] = \det[xyz_1 \dots c_n] \\ &\quad + a_0 \det(yzc_1 \dots c_n) \det[xzc_1 \dots c_n] \\ &+ a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det \left[z(y + a_0 z \det(yzc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(yzc_1 \dots c_n))c_1 \dots c_n \right] \\ &= \det[xyz_1 \dots c_n] + a_0 \det(yzc_1 \dots c_n) \det[xzc_1 \dots c_n] \\ &\quad + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n) \det[zyc_1 \dots c_n] \\ &= \det[xyz_1 \dots c_n] + a_0 \det(yzc_1 \dots c_n) \det[xzc_1 \dots c_n] \\ &\quad + a_0 \det(xzc_1 \dots c_n)(-1) \det[zyc_1 \dots c_n] = \det[xyz_1 \dots c_n]. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Проверим идемпотентность:

$$x \circ x = x + a_0 x \det(xx c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(xx c_1 \dots c_n) = x.$$

Проверим, что для операции (16) операция (17) задает правое деление:

$$\begin{aligned} (x \circ y)/y &= (x \circ y) - a_0 y \det((x \circ y) y c_1 \dots c_n) - \sum_{k=1}^n a_k c_k \det((x \circ y) y c_1 \dots c_n) \\ &= x + a_0 y \det(x y c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x y c_1 \dots c_n) \\ &\quad - a_0 y \det(x y c_1 \dots c_n) - \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x y c_1 \dots c_n) = x. \end{aligned}$$

Проверяем дистрибутивность. Запишем сначала левую часть равенства:

$$\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x \circ y) + a_0 z \det((x \circ y) z c_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det((x \circ y) z c_1 \dots c_n) \\ &= x + a_0 y \det(x y c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x y c_1 \dots c_n) \\ &\quad + a_0 z (\det(x z c_1 \dots c_n) + a_0 \det(x y c_1 \dots c_n) \det(y z c_1 \dots c_n)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k (\det(x z c_1 \dots c_n) + a_0 \det(x y c_1 \dots c_n) \det(y z c_1 \dots c_n)) \\ &= x + a_0 (y \det(x y c_1 \dots c_n) + z \det(x z c_1 \dots c_n)) \\ &\quad + a_0^2 z \det(x y c_1 \dots c_n) \det(y z c_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k (\det(x y c_1 \dots c_n) + \det(x z c_1 \dots c_n) \\ &\quad + a_0 \det(x y c_1 \dots c_n) \det(y z c_1 \dots c_n)). \end{aligned}$$

Рассмотрим правую часть равенства:

$$\begin{aligned} (x \circ z) \circ (y \circ z) &= (x \circ z) + a_0 (y \circ z) \det((x \circ z)(y \circ z) c_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det((x \circ z)(y \circ z) c_1 \dots c_n) \\ &= (x \circ z) + a_0 (y \circ z) \det(x y c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x y c_1 \dots c_n) \\ &= \left(x + a_0 z \det(x z c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x z c_1 \dots c_n) \right) \\ &\quad + a_0 \left(y + a_0 z \det(y z c_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(y z c_1 \dots c_n) \right) \det(x y c_1 \dots c_n) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_k c_k \det(x y c_1 \dots c_n) = x + a_0 (z \det(x z c_1 \dots c_n) + y \det(x y c_1 \dots c_n)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_0^2 z \det(yz c_1 \dots c_n) \det(xyc_1 \dots c_n) + \sum_{k=1}^n a_k c_k (\det(xzc_1 \dots c_n) \\
& + a_0 \det(xyc_1 \dots c_n) \det(yzc_1 \dots c_n) + \det(xyc_1 \dots c_n)).
\end{aligned}$$

Сравнивая обе части равенства, приходим к дистрибутивности.

Теорема доказана.

Вопрос 3. Можно ли данную конструкцию перенести на свободный модуль R^m над не обязательно коммутативным кольцом R ?

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев С. В. Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.
2. Joyce D. A classifying invariant of knots: the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. V. 23, N 1. P. 37–65.
3. Reidemeister K. Elementare Begründung der Knotentheorie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1926. V. 5. P. 24–32.
4. Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. 2021. V. 293. 107552.
5. Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.
6. Burstin C., Mayer W. Distributive Gruppen von endlicher Ordnung // J. Reine Angew. Math. 1929. V. 160. P. 111–130.
7. Takasaki M. Abstractions of symmetric functions // Tohoku Math. J. 1943. V. 49. P. 143–207.
8. Ryll-Nardzewski C. Sur les moyennes // Studia Math. 1949. V. 11. P. 31–37.
9. Hosszu M. On the functional equation of distributivity // Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae. 1953. V. 4, N 1–2. P. 159–167.
10. Госсю М. Несимметричные средние // Colloq. Math. 1957. V. 5. P. 32–42.
11. Hosszu M. Nonsymmetric means // Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 1–9.
12. Stein K. S. Left-distributive quasigroups // Proc. Am. Math. Soc. Aug. 1959. V. 10, N 4. P. 577–578.
13. Белоусов В. Д. О структуре дистрибутивных квазигрупп // Мат. сб. 1960. Т. 50, № 3. С. 267–298.
14. Белоусов В. Д. Леводистрибутивные квазигруппы // Изв. вузов. Математика. 1963. Т. 32, № 1. С. 16–20.
15. Оной В. И. Леводистрибутивные квазигруппы, однородные слева над квазигруппой // Изв. АН МолдССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. 1970. Т. 2. С. 24–31.
16. Оной В. И. О сердцевинах квазигрупп со свойством правой обратимости // Вопросы теории квазигрупп и луп. Кишинев, 1970. С. 91–104.
17. Оной В. И. О лупах, изотопных леводистрибутивным квазигруппам // Математические исследования. Кишинев: Штиинца, 1972. Т. 7. С. 135–152.
18. Оной В. И. О леводистрибутивных квазигруппах Стейна // Исследования по современной алгебре и геометрии. Математические науки. Кишинев, 1983. С. 94–104.
19. Галкин В. М. Леводистрибутивные квазигруппы конечного порядка // Математические исследования. Кишинев: Штиинца, 1979. Т. 57. С. 43–54.
20. Санду Н. И. О леводистрибутивных квазигруппах // Математические исследования. Кишинев: Штиинца, 1985. Т. 83. С. 87–94.
21. Nelson S. The combinatorial revolution in knot theory // Notices Am. Math. Soc. 2011. V. 58, N 1. P. 1553–1561.
22. Eisermann M. Yang–Baxter deformations of quandles and racks // Algebr. Geom. Topol. 2005. V. 5. P. 537–562.
23. Loos O. Reflexion spaces and homogeneous symmetric spaces // Bull. Am. Math. Soc. 1967. V. 73. P. 250–253.
24. Andruskiewitsch N., Grana M. From racks to pointed Hopf algebras // Adv. Math. 2003. V. 178, N 2. P. 177–243.
25. Bardakov V. G., Nasybullov T., Singh M. General constructions of biquandles and their symmetries // J. Pure Appl. Algebra. 2022. V. 226, N 7. 106936.

26. Bardakov V. G., Singh M. Quandle cohomology, extensions and automorphisms // J. Algebra. 2021. V. 585. P. 558–591.
27. Elhamdadi M., Moutuou E. M. Finitely stable racks and rack representations // Commun. Algebra. 2018. V. 46, N 11. P. 4787–4802.
28. Elhamdadi M., Macquarrie J., Restrepo R. Automorphism groups of quandles // J. Algebra Appl. 2012. V. 11, N 01. P. 12.
29. Bardakov V. G., Dey P., Singh M. Automorphism groups of quandles arising from groups // Monatsh. Math. 2017. V. 184. P. 519–530.
30. Bardakov V. G., Nasybullov T., Singh M. Automorphism groups of quandles and related groups // Monatsh. Math. 2019. V. 189, N 1. P. 1–21.
31. Bardakov V. G., Nasybullov T. Embeddings of quandles into groups // J. Algebra Appl. 2020. V. 19, N 7. 2050136.
32. Nosaka T. Quandles and topological pairs. Symmetry, knots, and cohomology. Singapore: Springer, 2017.
33. Bardakov V. G., Passi I. B. S., Singh M. Quandle rings // J. Algebra Appl. 2019. V. 18, N 8. 1950157.
34. Elhamdadi M. A survey of racks and quandles: Some recent developments // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 3. P. 509–522.
35. Scott Carter J. A survey of quandle ideas. arXiv:1002.4429.
36. Nelson S. A survey of quantum enhancements // Intern. Conf. Knots, Low-Dimensional Topology Appl. 2016. P. 163–178.
37. Elhamdadi M. Distributivity in quandles and quasigroups. arXiv:1209.651.
38. Lopes P., Roseman D. On finite racks and quandles. arXiv:math/0412487.
39. Carter J. S., Saito M. Quandle homology theory and cocycle knot invariants. arXiv:math/0112026.

Поступила в редакцию 15 января 2024 г.

После доработки 19 февраля 2024 г.

Принята к публикации 8 апреля 2024 г.

Симонов Андрей Артёмович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru

Нещади́м Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru

Бородин Александр Николаевич
Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 659700
serajsova@yandex.ru

О РЕГУЛЯРНЫХ ПОДГРУППАХ ГРУППЫ $\text{Lim}(N)$

Н. М. Сучков, А. А. Шлепкин

Аннотация. Пусть G — группа всех ограниченных подстановок множества натуральных чисел N . Доказано, что каждая счетная локально конечная группа изоморфна некоторой регулярной подгруппе группы G , а если регулярная подгруппа H группы G содержит элемент бесконечного порядка, то H содержит нормальную бесконечную циклическую подгруппу конечного индекса.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.312

Ключевые слова: группа, ограниченная подстановка, локально конечная группа, регулярная группа подстановок.

1. Введение

Пусть N — множество всех натуральных чисел.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Подстановка g множества N называется *ограниченной*, если

$$\omega(g) = \max_{\alpha \in N} |\alpha - \alpha^g| < \infty.$$

Множество $G = \text{Lim}(N)$ всех ограниченных подстановок множества N образует подгруппу группы $S(N)$ всех подстановок множества N .

Подстановки группы $S(N)$ с конечными носителями образуют локально конечную группу $\text{Fin}(N)$. В монографии Д. А. Супруненко [1] поставлена общая задача изучения подгрупп этой группы. В [2] доказано, что $\text{Fin}(N)$ не содержит квазициклических p — подгрупп при любом простом p .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Произвольная группа называется *ограниченной*, если она изоморфна подгруппе группы $G = \text{Lim}(N)$.

Известно (см. [3]), что ограниченными являются, например, счетная свободная группа, 2-группа Алешина, счетная свободная абелева группа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа H подстановок множества Ω называется *регулярной*, если она транзитивна на Ω и

$$\text{supp}(x) = \{\alpha \mid \alpha \in \Omega, \alpha^x \neq \alpha\} = \Omega$$

для любой неединичной подстановки $x \in H$.

Согласно теореме Кэли произвольная группа X изоморфна регулярной группе подстановок множества $\Omega = X$. Этот изоморфизм Кэли элемент $x \in X$ отображает в подстановку $\pi(x)$ множества X , для которой

$$y^{\pi(x)} = yx \quad (y \in X).$$

Работа авторов выполнена за счет гранта Российского научного фонда, проект № 19-71-10017-П.

Если X — счетная группа, то элементы X можно занумеровать натуральными числами. Тогда изоморфизм Кэли индуцирует подстановку на индексах, т. е. подстановку множества натуральных чисел N . Поэтому любая счетная группа изоморфна регулярной группе подстановок множества N .

Возникает вопрос: какие счетные группы допускают такую нумерацию их элементов натуральными числами, что образы соответствующих изоморфизмов Кэли содержатся в группе $G = \text{Lim}(N)$?

В настоящей статье изучаются регулярные подгруппы группы G . Получены следующие результаты.

Теорема 1. Пусть регулярная подгруппа H группы $G = \text{Lim}(N)$ содержит элемент бесконечного порядка. Тогда H является конечным расширением бесконечной циклической группы. Если при этом H — группа без кручения, то H — бесконечная циклическая группа.

Теорема 2. Любая счетная локально конечная группа изоморфна регулярной подгруппе группы $G = \text{Lim}(N)$.

Представляет интерес следующая

Гипотеза. Периодическая регулярная подгруппа группы $G = \text{Lim}(N)$ локально конечна.

Все обозначения, используемые в данной статье, либо оговариваются, либо стандартны (см. [4]).

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. Если x — подстановка группы $G = \text{Lim}(N)$, то число бесконечных орбит группы $X = \langle x \rangle$ не превосходит $m = \omega(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, напротив, существуют бесконечные орбиты $T_1, T_2, \dots, T_k$ группы X и $k > m$.

Считаем, что если α_i — наименьшее число орбиты T_i ($1 \leq i \leq k$), то $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$. Фиксируем любое натуральное $s > \alpha_k$. Ясно, что для каждого $i = 1, 2, \dots, k$ найдется такой элемент β_i орбиты T_i , что $\beta_i \leq s < \beta_i^x$. Поскольку $\omega(x) = m$, все элементы $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ принадлежат множеству

$$\{\gamma \mid \gamma \in M, s - m + 1 \leq \gamma \leq s\}$$

из m натуральных чисел. С другой стороны, так как $T_i \cap T_j = \emptyset$ при $1 \leq i < j \leq k$, то $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ — различные элементы этого множества. Получили противоречие с неравенством $k > m$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть R — регулярная группа подстановок множества N и $R < G = \text{Lim}(N)$. Предположим, что R содержит бесконечную циклическую подгруппу $S = \langle d \rangle$. Тогда для индекса S в R выполняется неравенство

$$|R : S| \leq \omega(d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу регулярности R все орбиты подгруппы S бесконечны, а значит, согласно лемме 1 множество N разбивается на t орбит $U_1, \dots, U_t$ группы S , где $t \leq \omega(d)$. Фиксируем любые элементы $\alpha_1 \in U_1, \dots, \alpha_t \in U_t$. Из транзитивности R на N следует, что для каждого $i = 1, \dots, t$ найдется такая подстановка $x_i \in R$, что $\alpha_1^{x_i} = \alpha_i$. Отсюда выводим, что

$$U_i = \alpha_i^S = \alpha_1^{x_i S}, \quad 1 \leq i \leq t.$$

Пусть y — произвольный элемент группы R и $\alpha_1^y = \beta_j \in U_j$ для некоторого индекса j . Из вышеизложенного следует, что $\beta_j = \alpha_1^{x_j z_j}$ для некоторого $z_j \in S$. Таким образом, $\alpha_1^y = \alpha_1^{x_j z_j}$.

Поскольку $y, x_j z_j$ содержатся в регулярной группе R , отсюда заключаем, что $y = x_j z_j \in x_j S$. Итак, объединение различных смежных классов $x_1 S, \dots, x_t S$ совпадает с R , а потому $|R : S| = t$ — число орбит группы S . По лемме 1 $t \leq \omega(d)$. Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть группа без кручения H является регулярной подгруппой группы $G = \text{Lim}(N)$. Тогда H — бесконечная циклическая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть d — любой неединичный элемент группы H . В силу условия $|d| = \infty$, а значит, в силу леммы 2 $S = \langle d \rangle$ — подгруппа конечного индекса в H . Отсюда легко следует, что и любая неединичная подгруппа из H имеет в ней конечный индекс. По известной теореме Федорова H — бесконечная циклическая группа. Лемма доказана.

Пусть группа H удовлетворяет условию теоремы 1. В силу леммы 2 H содержит бесконечную циклическую подгруппу S конечного индекса. По теореме Пуанкаре S содержит нормальную в H подгруппу T конечного индекса. Но тогда T — бесконечная циклическая подгруппа. Итак, H — конечное расширение бесконечной циклической группы T . Лемма 3 завершает доказательство теоремы 1.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим бесконечный цикл

$$x = (\dots, 2k \dots 4 \ 2 \ 1 \ 3 \ \dots \ 2k + 1 \ \dots).$$

Очевидно, что $w(x) = 2$, т. е. $x \in G = \text{Lim}(N)$. При этом $X = \langle x \rangle$ — регулярная группа подстановок множества натуральных чисел N .

3. Вспомогательные результаты

Лемма 4. Пусть X, Y — изоморфные регулярные группы подстановок множества Ω . Тогда $X^h = Y$ для некоторой подстановки h множества Ω .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X = \{x_j \mid j \in I\}$. Фиксируем $\alpha \in \Omega$. В силу условия $\Omega = \{\alpha^{x_j} \mid j \in I\}$. Если Θ — изоморфизм X на Y и $x_j^\Theta = y_j$ ($j \in I$), то из регулярности Y на Ω следует, что $\Omega = \{\alpha^{y_j} \mid j \in I\}$.

Заметим, что если $x_i \in X$, $y_i \in Y$; $\alpha^{x_j}, \alpha^{y_j} \in \Omega$, то

$$(\alpha^{x_j})^{x_i} = \alpha^{(x_j x_i)}, \quad (\alpha^{y_j})^{y_i} = \alpha^{(y_j y_i)}$$

при любых $i, j \in I$. Покажем, что искомой является подстановка h множества Ω , для которой $(\alpha^{x_j})^h = \alpha^{y_i}$ при каждом $j \in I$. Действительно,

$$(\alpha^{y_j})^{h^{-1} x_i h} = \alpha^{(x_j x_i) h}.$$

Если $x_j x_i = x_s$, то, действуя автоморфизмом Θ , получим $y_j y_i = y_s$. Следовательно,

$$\alpha^{(x_j x_i) h} = (\alpha^{x_s})^h = \alpha^{y_s} = (\alpha^{y_j})^{y_i}.$$

Таким образом,

$$(\alpha^{y_j})^{h^{-1} x_i h} = (\alpha^{y_j})^{y_i}.$$

Отсюда выводим, что $h^{-1} x_i h = y_i$, а значит, $X^h = Y$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть X — группа подстановок множества Ω . Если $\text{supp}(x) = \Omega$ для любой неединичной подстановки $x \in X$, то группа X индуцирует на каждой своей орбите изоморфную X регулярную группу.

Лемма 5. Пусть A, B — изоморфные подгруппы регулярной группы подстановок X конечного множества Ω . Тогда $A^g = B$ для некоторой подстановки g множества Ω .

Доказательство. В силу условия $|X| = |\Omega|$. Если $k = |A| = |B|$, то по теореме Лагранжа $|X| = n = km$. Так как $\text{supp}(d) = \Omega$ для любой неединичной подстановки $d \in A$, то Ω разбивается на A -орбиты $\Omega_1, \dots, \Omega_m$, каждая из которых содержит точно k элементов. При этом A индуцирует на орбите Ω_i изоморфную A регулярную группу подстановок A_i по замечанию 1 ($1 \leq i \leq m$).

Аналогично множество Ω разбивается на B -орбиты $\Omega'_1, \dots, \Omega'_m$ и B индуцирует на Ω'_i изоморфную B регулярную группу подстановок B_i ($1 \leq i \leq m$).

Пусть h — такая подстановка множества Ω , что $\Omega_i^h = \Omega'_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда каждое множество Ω'_i является орбитой групп A^h и B , которые индуцируют на Ω'_i регулярные изоморфные группы A_i^h и B_i . По лемме 4 $A_i^{ht_i} = B_i$ для некоторой подстановки t_i множества Ω'_i , $i = 1, \dots, m$. Считаем, что t_i действует тождественно на элементах разности $\Omega \setminus \Omega_i$. Тогда t_i — подстановка множества Ω , и если $g = ht_1 \dots t_m$, то непосредственно проверяется, что $A^g = B$. Лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для натуральных $\alpha < \beta$ множество

$$\Delta(\alpha, \beta) = \{\gamma \mid \gamma \in N, \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$$

будем называть *отрезком натуральных чисел*.

Пусть H — группа порядка m . Определим изоморфизм Θ группы H на подгруппу $\overline{H}$ группы $G = \text{Lim}(N)$. Для этого разобьем N на последовательные отрезки:

$$\Delta_0^m = \Delta(1, m), \Delta_1^m = \Delta(m+1, 2m), \dots, \Delta_k^m = \Delta(km+1, (k+1)m), \dots \quad (1)$$

По теореме Кэли существует изоморфизм ψ группы H на регулярную группу подстановок H_0 отрезка Δ_0^m . Для каждой подстановки $h_0 \in H_0$ и любого $k = 0, 1, 2, \dots$ определим подстановку h_k отрезка Δ_k^m , полагая

$$(km + \alpha)^{h_k} = km + \alpha^{h_0} \quad (1 \leq \alpha \leq m).$$

Ясно, что отображение $\phi_k : h_0 \rightarrow h_k$ ($h_0 \in H_0$) задает изоморфизм групп подстановок H_0 и $H_k = H_0^{\phi_k}$ отрезков Δ_0^m и Δ_k^m . Определим подстановку $\bar{h}$ множества N , исходя из элемента $h \in H$. Если $\beta \in N$, то β принадлежит точно одному отрезку Δ_k^m множества (1). Если $h^\psi = h_0$, то полагаем $\beta^{\bar{h}} = \beta^{h_k}$.

Ясно, что $\omega(\bar{h}) < m$; отображение $\Theta : h \rightarrow \bar{h}$ есть изоморфизм H на $\overline{H}$; $\text{supp}(\bar{h}) = N$ для любой неединичной подстановки $\bar{h} \in \overline{H}$. Итак, изоморфизм Θ , который будем называть *m -вложением* группы H , однозначно определяется изоморфизмом Кэли ψ группы H на регулярную группу подстановок отрезка $\Delta(1, m)$.

Пусть B — произвольная счетная локально-конечная группа. Тогда B является объединением строго возрастающего ряда $B_1 < \dots < B_n < B_{n+1} < \dots$ конечных подгрупп. Для доказательства теоремы 2 построим изоморфную B регулярную подгруппу L группы $G = \text{Lim}(N)$.

Полагаем $L_1 = B_1^{\Theta_1} = \overline{B_1}$, где Θ_1 является $|B_1|$ -вложением группы B_1 . Предположим, что уже построены группы $L_1 < L_2 < \dots < L_n$ такие, что $L_i = B_i^{\Theta_i} = \overline{B_i}$, где Θ_i — $|B_i|$ -вложение группы B_i , при этом

$$B_i^{\Theta_n} = B_i^{\Theta_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Определим группу L_{n+1} . Пусть $|L_n| = |B_n| = k$. По теореме Лагранжа $|B_{n+1}| = s = kt$. Рассмотрим разбиение отрезка $\Delta(1, s)$ на t последовательных отрезков по k элементов в каждом:

$$\Delta_1 = \Delta(1, k), \Delta_2 = \Delta(k+1, 2k), \dots, \Delta_t = \Delta((t-1)k, tk). \quad (2)$$

Пусть ψ — изоморфизм Кэли группы B_{n+1} на регулярную группу подстановок отрезка $\Delta(1, s)$. Без ограничения общности можно предположить, что отрезки разбиения (2) составляют орбиты подгруппы B_n^ψ группы B_{n+1}^ψ (см. доказательство леммы 5).

Далее, так как $B_n^{\Theta_n}$ индуцирует на каждом из этих отрезков регулярную группу изоморфную B_n , в силу леммы 4 найдется такая подстановка h отрезка $\Delta(1, s)$, что $\Delta_i^h = \Delta_i$ ($1 \leq i \leq t$) и $B_n^{\psi h}$ совпадает с ограничением группы L_n на $\Delta(1, s)$. Рассматривая вместо изоморфизма Кэли ψ аналогичный изоморфизм ψh , получаем, что если Θ_{n+1} является s -вложением группы B_{n+1} и $L_{n+1} = B_{n+1}^{\Theta_{n+1}}$, то $B_n^{\Theta_{n+1}} = B_n^{\Theta_n}$, а значит, $B_i^{\Theta_i} = B_i^{\Theta_{n+1}}$ при всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, индуктивно построен строго возрастающий ряд

$$L_1 < L_2 < \dots < L_{n+1} < \dots \quad (3)$$

конечных подгрупп группы $G = \text{Lim}(N)$. Обозначим $L = \bigcup_{n \in N} L_n$ и определим отображение $\Theta : B \rightarrow L$ следующим образом. Если $b \in B$, то $b \in B_n$ для некоторого натурального n . Полагаем $b^\Theta = b^{\Theta_n}$. Из вышеизложенных свойств изоморфизмов Θ_i , $i = 1, 2, \dots$, следует, что Θ изоморфно отображает B на L .

Из построения ряда подгрупп (3) вытекает, что $\text{supp}(x) = N$ для любой неединичной подстановки $x \in L$. Если $\alpha, \beta \in N$, то найдется такое натуральное n , что $\alpha, \beta < |L_n| = k$. Поскольку L_n действует транзитивно на отрезке $\Delta(1, k)$, то $\alpha^z = \beta$ для некоторой подстановки $z \in L_n < L$. Значит, L — транзитивная группа подстановок множества N . Итак, доказано, что L изоморфна B и является регулярной подгруппой группы $G = \text{Lim}(N)$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.. Супруненко Д. А. Группы матриц. М.: Наука, 1972.
2. Адо И. Д. О подгруппах счетных симметрических групп // Докл. АН УССР. 1945. Т. 50, № 3. С. 15–17.
3. Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. О подгруппах группы $\text{Lim}(N)$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 208–217.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 16 декабря 2023 г.

После доработки 16 декабря 2023 г.

Принята к публикации 25 января 2024 г.

Сучков Николай Михайлович (ORCID 0009-0004-4019-4700),
Шлепки Алексей Анатольевич (ORCID 0000-0003-2241-2842)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
shlyopkin@mail.ru

УДК 512.542

ПРИМЕР ОТНОСИТЕЛЬНО МАКСИМАЛЬНОЙ НЕПРОНОРМАЛЬНОЙ ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА В КОНЕЧНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЕ

С. Чжан, Л. Су, Д. О. Ревин

Аннотация. Доказано существование тройки $(\mathfrak{X}, G, H)$, где $\mathfrak{X}$ — состоящий из групп нечетного порядка полный (т. е. замкнутый относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений) класс конечных групп, G — конечная простая группа и H — ее $\mathfrak{X}$ -максимальная подгруппа, таких, что H не пронормальна в G .

DOI 10.33048/smzh.2024.65.313

Ключевые слова: полный класс групп, относительно максимальная подгруппа, пронормальная подгруппа, конечная простая группа.

Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в $\langle H, H^g \rangle$.

Пронормальные подгруппы были введены Ф. Холлом [1] как естественное обобщение нормальных подгрупп. Пронормальность тесно связана с широко используемым в теории групп рассуждением, известным как аргумент Фраттини. Свойство пронормальности играет важную роль как в самой теории групп, так и в ее комбинаторных приложениях. Изучению вопросов, связанных с этим свойством, посвящена обширная литература (см. обзоры [2–4]).

В простых группах, где отсутствуют собственные нетривиальные нормальные подгруппы, нахождение пронормальных подгрупп представляет особый интерес. Помимо нормальных подгрупп в любой, в том числе простой группе пронормальными всегда будут максимальные подгруппы. Наряду с обычными максимальными подгруппами, которые максимальны по включению среди собственных подгрупп, рассматривают элементы решетки подгрупп, максимальные среди $\mathfrak{X}$ -подгрупп, где $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, а под $\mathfrak{X}$ -*группой* понимается группа, принадлежащая $\mathfrak{X}$. Такие подгруппы называют $\mathfrak{X}$ -*максимальными*. Проблемы поиска таких подгрупп восходит к классическим трудам Галуа и Жордана и составляют содержание программы Виланда, предложенной в 1979 г. на знаменитой конференции по конечным группам в г. Санта-Круз [5]. Один из важных аспектов этой программы связан с изучением свойств, в частности, пронормальности, $\mathfrak{X}$ -максимальных подгрупп и их обобщений. В дальнейшем, как и в докладе Виланда, мы будем предполагать, что класс $\mathfrak{X}$ является

Работа С. Чжан поддержана Естественным научным фондом провинции Хайнань (Hainan Provincial Natural Science Foundation of China), грант № 122MS001. Работа Д. О. Ревина выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002 частично поддержана Национальным естественно-научным фондом Китая (NSFC), грант № 12371021.

© 2024 Чжан С., Су Л., Ревин Д. О.

полным [6, определение 11.1] т. е. замкнут относительно взятия подгрупп гомоморфных образов и расширений. *Относительно максимальной подгруппой* будем называть подгруппу, которая $\mathfrak{X}$ -максимальна для некоторого класса $\mathfrak{X}$. Типичными примерами полных классов служат класс разрешимых групп или для любого множества π простых чисел класс π -групп, где, как обычно, под π -группой понимается группа, у которой все простые делители порядка принадлежат π .

С одной стороны, максимальные и относительно максимальные подгруппы — существенно разные понятия. Например, если G — неединичная конечная p -группа для простого числа p , то максимальные подгруппы в G — это в точности подгруппы индекса p , в то время как максимальная $\mathfrak{X}$ -подгруппа в предположении полноты класса $\mathfrak{X}$ всегда одна — это либо G , либо 1 в зависимости от того, содержит $\mathfrak{X}$ группу порядка p или нет. С другой стороны, в конечной простой группе G максимальные подгруппы — это в точности $\mathfrak{X}$ -максимальные подгруппы, где в качестве $\mathfrak{X}$ рассматривается класс всех групп, у которых порядки композиционных факторов строго меньше, чем порядок группы G (ясно, что такой класс полон). Поэтому естественной представляется

Проблема 1. *Всегда ли относительно максимальные подгруппы простых конечных групп пронормальны?*

В 2018 г. в [4, проблема 5.20] и [7, проблема 6] проблема была поставлена даже более широко, как вопрос о пронормальности так называемых $\mathfrak{X}$ -субмаксимальных подгрупп, которые включают в себя $\mathfrak{X}$ -максимальные подгруппы. Об $\mathfrak{X}$ -субмаксимальных подгруппах и о том, какую роль вопросы пронормальности играют в их изучении, в особенности для простых и близких к ним групп, можно составить представление по работам [7–9] и обзору [4]. Дополнительным мотивом к изучению сформулированной проблемы стал установленный в [10] факт пронормальности холловых подгрупп, т. е. таких, у которых индекс и порядок взаимно просты, или, эквивалентно, $\mathfrak{X}$ -холловых подгрупп в конечных простых группах, т. е. $\mathfrak{X}$ -подгрупп, индексы которых не делятся на простые числа p , если только $\mathfrak{X}$ содержит группу порядка p . Очевидно, что $\mathfrak{X}$ -холловы подгруппы всегда $\mathfrak{X}$ -максимальны.

В недавней работе [11] дано отрицательное решение проблемы 1. Основываясь на довольно тонких примерах Уилсона [12], которые, в свою очередь, служат контрпримерами к одной из гипотез Ашбахера [13, вопрос 8.2], авторами было доказано существование нескольких серий троек $(\mathfrak{X}, G, H)$, где $\mathfrak{X}$ — полный класс конечных групп, G — конечная простая группа и H — ее $\mathfrak{X}$ -максимальная подгруппа, таких, что H не пронормальна в G . Во всех таких тройках, возникающих из примеров Уилсона, класс $\mathfrak{X}$ подбирается весьма прихотливым образом, включает в себя неразрешимые группы и, более того, $\mathfrak{X}$ -максимальная подгруппа H сама оказывается неразрешимой. Это дало авторам основание для постановки следующей проблемы.

Проблема 2 [11, проблема 3]. *Всегда ли пронормальны $\mathfrak{X}$ -максимальные подгруппы простых конечных групп, если полный класс $\mathfrak{X}$ состоит только из разрешимых групп или, более узко, только из групп нечетного порядка?*

В данной работе дано отрицательное решение этой проблемы и указан намного более прямой и естественный пример, дающий отрицательное решение проблемы 1.

Теорема. Простая группа $Sp_4(4)$ порядка $2^8 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 17 = 979200$ обладает непропорциональной $\{3, 5\}$ -максимальной подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [14] список максимальных подгрупп группы $Sp_4(4)$ с точностью до сопряженности исчерпывается группами M , указанными в табл. 1.

Таблица 1. Максимальные подгруппы группы $Sp_4(4)$

M	$ M $
$2^6 : (3 \times A_5)$	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 = 11520$
$2^6 : (3 \times A_5)$	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 = 11520$
$L_2(16) : 2$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 8160$
$L_2(16) : 2$	$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 8160$
$(A_5 \times A_5) : 2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$
$(A_5 \times A_5) : 2$	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 7200$
S_6	$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 = 720$

Известно, что группы A_5 и S_6 не содержат элементов, а следовательно, и подгрупп порядка $15 = 3 \cdot 5$, а S_6 не содержит также подгрупп порядка $3^2 \cdot 5$ (см., например, [14]). Отсюда следует, что любая подгруппа порядка 15 в группе $Sp_4(4)$ будет максимальной $\{3, 5\}$ -подгруппой. Теперь в максимальной подгруппе

$$M = (A_5 \times A_5) : 2 \cong Sp_2(4) \wr S_2,$$

принадлежащей классу Ашбахера $\mathcal{C}_2$ [15, табл. 8.14], возьмем подгруппу H порядка 15 из базы

$$B = A_5 \times A_5 \cong Sp_2(4) \times Sp_2(4)$$

сплетения $Sp_2(4) \wr S_2$, порожденную элементом порядка 3 из первого прямого сомножителя и элементом порядка 5 из второго сомножителя. Любой элемент $g \in M \setminus B$ переставляет прямые сомножители в B . При этом подгруппа H^g содержится в B и, значит, такова, что ее проекция на первый прямой сомножитель имеет порядок 5, а на второй — порядок 3. Тем самым проекции H и H^g на, скажем, первый сомножитель не только не сопряжены, но даже имеют разные порядки. Значит, и подгруппы H и H^g группы B не сопряжены в B и тем более не сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$ группы B . В соответствии с определением подгруппа H не пронормальна в $Sp_4(4)$. $\square$

По-видимому, пример непропорциональной относительно максимальной подгруппы нечетного порядка в конечной простой группе не является исключительным и дает начало серии примеров непропорциональных относительно максимальных подгрупп нечетного порядка в группах $Sp_{2n}(q)$, где $n \geq 2$ может быть любым, а q сколь угодно большим. Ограничимся лишь описанием идеи того, как можно перенести нахождение подгруппы H в доказательстве теоремы на более общую ситуацию.

Отметим, что существует бесконечно много простых чисел q таких, что количество (с учетом кратности) простых делителей числа $q^2 - 1$ не превосходит 20 [16, следствие D]. Поэтому для любого n можно указать такое простое число q , что оба числа $q - 1$ и $q + 1$ имеют простые делители r и s соответственно, которые больше n . Тогда из описания максимальных подгрупп [15, табл. 8.2] ясно,

что группа $Sp_2(q) \cong SL_2(q)$ не содержит групп порядка rs . Рассмотрим сплетение $M = Sp_2(q) \wr S_n$, которое является подгруппой в $Sp_{2n}(q)$ — стабилизатором разложения естественного модуля в ортогональную сумму невырожденных подпространств размерности 2. В базе B этого сплетения возьмем подгруппу H порядка $r^{n-1}s$, у которой проекции на все сомножители, кроме последнего, имеют порядок r , а на последний — s . Тогда в M существует элемент g такой, что подгруппа H^g , содержащаяся в B , имеет проекцию на первый сомножитель в B порядка s , а на остальные — порядка r . Подгруппы H и H^g не сопряжены в B , поскольку имеют проекции разного порядка на первый сомножитель. Тем самым H не пронормальна в $Sp_{2n}(q)$. Из подобных соображений можно вывести, что образ H не пронормален в $PSp_{2n}(q)$. Поскольку любая $\{r, s\}$ -группа разрешима по теореме Бернсайда, максимальная $\{r, s\}$ -подгруппа из $Sp_{2n}(q)$, в которую может быть погружена H , содержится в элементе одного из классов Ашбахера $\mathcal{C}_1$ – $\mathcal{C}_8$ согласно теореме Ашбахера [17]. Перебирая эти элементы [15, табл. разд. 8] и [18, табл. 3.5C] и пользуясь тем, что $r, s > n$, по-видимому, нетрудно установить, что подгруппа H является максимальной $\{r, s\}$ -подгруппой в $Sp_{2n}(q)$, а ее образ — в $PSp_{2n}(q)$. Детальное обоснование этих соображений потребовало бы дополнительных усилий и существенно увеличило бы объем работы, при этом мало что добавив к общей картине, принципиально ясной из уже доказанной теоремы.

Несмотря на отрицательное решение проблемы 1, продвижения в изучении вопроса о пронормальности подгрупп нечетного индекса (см. [3, 4]) дают основание надеяться, что по крайней мере максимальные $\mathfrak{X}$ -подгруппы нечетного индекса в конечных простых группах всегда пронормальны [11, проблема 2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6. Cambridge: Univ. of Cambridge, 1951–1967. Available at: <http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788>.
2. de Giovanni F., Trombetti M. Pronormality in group theory // Adv. Group Theory Appl. 2020. V. 9. P. 123–149. (<https://doi.org/10.32037/agta-2020-00>).
3. Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups // Groups St Andrews 2017 in Birmingham / eds. C.M. Campbell, M.R. Quick, C.W. Parker, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2019. P. 406–418. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 455). (<https://doi.org/10.1017/9781108692397.016>).
4. Guo W., Revin D. O. Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$ -subgroups in finite groups // Comm. Math. Stat. 2018. V. 6, N 3. P. 289–317. (<https://doi.org/10.1007/s40304-018-0154-9>).
5. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conference on finite groups (Univ. California, Santa Cruz, CA, 1979). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Proc. Sympos. Pure Math.; V. 37). (<https://doi.org/10.1017/9781108692397.016>).
6. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen endlicher Ordnung // Helmut Wielandt. Mathematische Werke / Mathematical Works. Berlin: de Gruyter, 1994. V. 1 (Group Theory). P. 607–655. (<https://doi.org/10.1017/9781108692397.016>).
7. Го В., Ревин Д. О. О максимальных и субмаксимальных $\mathfrak{X}$ -подгруппах // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 1. С. 14–42. (<https://doi.org/10.17377/alglog.2018.57.102>).
8. Guo W., Revin D. O. Classification and properties of the π -submaximal subgroups in minimal nonsolvable groups // Bull. Math. Sci. 2018. V. 8, N 2. P. 325–3517. (<https://doi.org/10.1007/s13373-017-0112-y>).
9. Ревин Д. О. Субмаксимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в знакопеременных группах // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 387–401. (<https://doi.org/10.33048/smzh.2021.62.210>).
10. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.

- (<https://doi.org/10.1134/S0037446612020231>).
11. Ли Б., Ревин Д. О. Примеры непропорциональных относительно максимальных подгрупп в конечных простых группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 140–145. (<https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-140-145>).
 12. Wilson R. A. A negative answer to a question of Aschbacher // Albanian J. Math. 2018. V. 12, N 1. P. 24–31. (<https://doi.org/10.51286/albjm/1544605486>).
 13. Aschbacher M. The subgroup structure of finite groups // Contemp. Math. 2017. V. 694. Finite simple groups: thirty years of the Atlas and beyond. P. 111–121.
 14. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
 15. Bray J., Holt D., Roney-Dougal C. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. V. 407 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.).
 16. Alladi K., Solomon R., Turull A. Finite simple groups of bounded subgroup chain length // J. Algebra. 2000. V. 231, N 1. P. 374–386. (<https://doi.org/10.1006/jabr.2000.8371>).
 17. Aschbacher M. On the maximal subgroups of the finite classical groups // Invent. math. 1984. V. 76. P. 46–514. (<https://doi.org/10.1007/BF01388470>).
 18. Kleidman P., Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990. V. 129 (London Math. Soc. Lect. Note Ser.).

Поступила в редакцию 6 декабря 2023 г.

После доработки 6 декабря 2023 г.

Принята к публикации 25 января 2024 г.

Zhang Xinfang (Чжан Синьфан) (ORCID 0000-0001-7104-8528)

School of Math. Stat., Hainan University,

Haikou, P.R. China

995272@hainanu.edu.cn

Su Leilei (Су Лэйлэй)

School of Math. Stat., Hainan University,

Haikou, P.R. China

leilei_su@163.com

Ревин Данила Олегович (ORCID 0000-0002-8601-0706)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

revin@math.nsc.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
the American Mathematical Society's $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 29.04.2024. Уч.-изд. л. 14. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 28.05.2024. Объем файла 1.5 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.