

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65

2

2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, С. С. Кутателадзе

Редакторы:

В. Л. Береснев,	А. А. Лаптев,
А. А. Боровков,	В. Д. Мазуров,
А. Ю. Веснин,	А. Е. Миронов,
А. Е. Гутман,	Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко,	А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов,	П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 65, № 2 (384) Март—апрель, 2024

СОДЕРЖАНИЕ

Абрамова Е. В., Сивкова Е. О. Об оптимальном восстановлении одного семейства операторов на классе функций по приближенной информации об их спектре	235
Бородин О. В., Иванова А. О. Легкие 3-цепи в 3-многогранниках без смежных 3-граней	249
Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Квазиплотность в $\mathbb{R}^N$ и проективные параллелотопы	258
Дмитриев В. И., Журавлева Е. В., Михайлова О. Ю., Бурилич И. Н. О K -функционалах абсолютно калдероновых элементов банаховой пары (l_1, c_0)	277
Дубинин В. Н. Модульная теорема Тейхмюллера и вариация интеграла Дирихле	288
Зубарева И. А. Геодезические и кратчайшие некоторых субримановых метрик на группах Ли $SU(1, 1) \times \mathbb{R}$ и $SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$ с трехмерными порождающими распределениями	295
Кулпешов Б. Ш. Алгебры бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий с тривиальным определимым замыканием ..	318
Ломакина Е. Н., Насырова М. Г. Оценки норм оператора Харди в операторных идеалах	332
Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Интерполяционное свойство Крейга в предтабличных логиках	349
Малютин А. В. Расслоения Бирман — Хильдена. II	358
Назаров С. А., Слуцкий А. С. Осреднение скалярной краевой задачи в тонком периодически изломанном цилиндре	374

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Файзрахманов М. Х.	<i>Семейство с единственной минимальной, но не наименьшей нумерацией</i>		395
Щеглова А. А.	<i>Устойчивость по линейному приближению нелинейных вырожденных систем с дискретным временем</i>		408

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ
ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ
НА КЛАССЕ ФУНКЦИЙ ПО ПРИБЛИЖЕННОЙ
ИНФОРМАЦИИ ОБ ИХ СПЕКТРЕ
Е. В. Абрамова, Е. О. Сивкова

Аннотация. Найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления в задаче восстановления значений линейных непрерывных операторов на соболевском классе функций по следующей информации: преобразование Фурье этих функций известно приближенно на некотором измеримом подмножестве конечномерного пространства, на котором заданы функции. В качестве следствий получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.201

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

Введение

Работа посвящена оптимальному восстановлению значений одного класса линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ на соболевском классе функций по следующей информации: о каждой функции из этого класса известно приближенно ее преобразование Фурье на некотором измеримом подмножестве в $\mathbb{R}^d$. По этой информации для рассматриваемого оператора построен оптимальный метод восстановления. Этот метод использует не всю доступную информацию о преобразовании Фурье, а используемую предварительно «сглаживает». В качестве непосредственных следствий доказанного результата получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности в данный момент времени по неточно заданной информации о преобразовании Фурье начальной функции и решения задачи Дирихле для полупространства на гиперплоскости по неточно заданной информации о преобразовании Фурье граничной функции.

Тематика данной работы относится к той ветви теории приближений, которая получила название теории оптимального (наилучшего) восстановления значений линейных функционалов и операторов на классах множеств, элементы которых известны приближенно. Началом развития этой теории послужила работа С. А. Смоляка [1]. Затем эта тематика развивалась в самых различных направлениях. Отметим здесь обзоры [2, 3], монографию [4] и статьи [5, 6]. По поводу тематики данной работы, отметим статьи [7–13].

1. Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ обозначаем евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x, \xi \rangle = \sum_{i=1}^d x_i \xi_i$, где $x = (x_1, \dots, x_d)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$. Евклидову норму (длину) вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ обозначаем через $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_d^2}$.

Определим пространство функций $\mathcal{W}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)\}$, где $F[f](\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$, и класс функций

$$W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d) = \left\{ f(\cdot) \in \mathcal{W}_{2,\infty}(\mathbb{R}^d) : \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq 1 \right\},$$

где n — целое неотрицательное число.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$ и $a(0) = 0$. Определим оператор $T_a : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий в образах Фурье по формуле

$$F[T_a f(\cdot)](\xi) = e^{-a(|\xi|)} F[f](\xi) \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что этот оператор линеен и непрерывен.

Поставим следующую задачу. Пусть A — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$. Предположим, что о каждой функции $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d)$ известно ее преобразование Фурье на множестве A с точностью до δ в метрике $L_\infty(A)$, т. е. известна некоторая функция $g(\cdot) \in L_\infty(A)$ такая, что

$$\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta.$$

Если $\delta = 0$, то сужение $F[f](\cdot)$ на A известно точно. По этой информации мы хотим восстановить значения оператора T_a на классе $W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d)$.

Точная постановка такова. Каждое отображение $m : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ обь является *методом восстановления* и его *погрешность* определяется по формуле

$$e(W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), g(\cdot) \in L_\infty(A) \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|T_a f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Если $\delta = 0$, то ясно, что

$$e(W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), A, 0, m) = \sup_{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d)} \|T_a f(\cdot) - m(F[f](\cdot)|_A)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $F[f](\cdot)|_A$ — сужение $F[f](\cdot)$ на A .

Нас интересуют величина

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \inf_{m: L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} e(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m),$$

где m пробегает все методы (отображения) $m : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы $\hat{m}$, на которых нижняя грань достигается, т. е.

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = e(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, \hat{m}).$$

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Пусть $B(x, r)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r \geq 0$ ($B(x, 0) = x$). Положим

$$r_A = \sup\{r \geq 0 : \text{mes}(A \cap B(0, r)) = \text{mes } B(0, r)\}.$$

При $\delta > 0$ обозначим

$$\hat{r} = (2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d + 2n) \delta^{-2})^{1/(d+2n)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера, и пусть $r_0 = \min\{r_A, \hat{r}\}$.

Теорема. Пусть A — измеримое подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\delta \geq 0$.

1. Если $r_A = 0$, то

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = +\infty.$$

2. Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) = \frac{e^{-2a(r_A)}}{r_A^{2n}}$$

и линейный оператор $\hat{m} : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле

$$\hat{m}(F[f](\cdot)|_A)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-a(|\xi|)} F[f](\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi,$$

является оптимальным методом.

3. Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta > 0$, то

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + r_A^{-2n} e^{-2a(r_A)} \left(1 - \left(\frac{r_A}{\hat{r}}\right)^{d+2n}\right)_+}$$

и линейный оператор $\hat{m} : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, действующий для п. в. $x \in \mathbb{R}^d$ по формуле

$$\hat{m}(g(\cdot))(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} e^{-a(|\xi|)} (1 - e^{2(a(|\xi|) - a(r_0))} |\xi|^{2n} r_0^{-2n}) g(\xi) e^{i\langle \xi, x \rangle} d\xi,$$

является оптимальным методом.

Прокомментируем утверждения сформулированной теоремы.

Первое утверждение говорит о том, что какое бы ни было множество, на котором известно преобразование Фурье функций из данного класса, восстановить значения оператора невозможно, если в это множество нельзя вписать (в указанном выше смысле) никакой шар с центром в нуле.

Второе утверждение говорит о том, что если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta = 0$, то для оптимального восстановления значений оператора достаточно знать преобразования Фурье функций из данного класса только на вписанном в множество A шаре $B(0, r_A)$, и чем больше этот шар, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Оптимальный метод состоит в том, что надо взять обратное преобразования от того, что мы наблюдаем на шаре.

Третье утверждение наиболее интересно. Если $0 < r_A < +\infty$ и $\delta > 0$, то снова преобразование Фурье достаточно знать только на шаре $B(0, r_A)$ и погрешность оптимального восстановления уменьшается с ростом радиуса шара, но только до величины $\hat{r}$. Далее эта погрешность стабилизируется — информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, \hat{r})$ становится лишней. Другими словами, если нарушается соотношение $r_A \leq \hat{r}$, т. е.

$$r_A^{d+2n} \delta^2 \leq 2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d+2n)$$

между погрешностью задания исходных данных и шаром r_A , то доступная информация о преобразовании Фурье функций оказывается излишней.

Оптимальный метод в данном случае — это обратное преобразование Фурье от «сглаженной» наблюдаемой информации о преобразовании Фурье на шаре $B(0, r_0)$.

2. Доказательство теоремы

1. Покажем сначала, что справедлива следующая оценка:

$$E(W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1)$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d)$ и $\|F[f_0](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta$. Тогда функция $-f_0(\cdot)$ также удовлетворяет этим соотношениям и для любого $m : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$ имеем

$$\begin{aligned} 2\|T_a f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|T_a f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) - (T_a(-f_0(\cdot)) - m(0)(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|T_a f(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \ g(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \\ [2pt] \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|T_a f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= 2e(W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)$ таким, что $f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d)$ и $\|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta$, приходим к неравенству

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta}} \|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq e(W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), A, \delta, m).$$

Метод m был выбран произвольно, поэтому, переходя справа к нижней грани по всем методам m , получаем оценку (1).

Величина справа в (1) есть значение следующей экстремальной задачи:

$$\|T_a f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta, \quad f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d). \quad (2)$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (2) в образах Фурье равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \quad |F[f](\xi)| \leq \delta \text{ для п. в. } \xi \in A, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\leq 1, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \quad (3)$$

2. Докажем первое утверждение теоремы. В силу оценки (1) достаточно показать, что значение задачи (3) (а значит, и задачи (2)) равно $+\infty$.

Действительно, в этом случае $\text{mes}(A \cap B(0, \varepsilon)) < \text{mes} B(0, \varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ и тем самым мера множества $\Omega_\varepsilon = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, \varepsilon)$ положительна. Пусть функции $f_\varepsilon(\cdot)$, $\varepsilon > 0$, такие, что

$$F[f_\varepsilon](\xi) = \begin{cases} (2\pi)^d \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |x|^{2n} dx \right)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$ и допустимы в задаче (3), так как $F[f](\xi) = 0$, если $\xi \in A$ и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f_\varepsilon](\xi)|^2 d\xi = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} |\xi|^{2n} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} |x|^{2n} dx} = 1.$$

Оценим значения максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях. Если $\xi \in \Omega_\varepsilon$, то $|\xi| \leq \varepsilon$, поэтому $e^{2a(|\xi|)} \leq e^{2a(\varepsilon)}$ и тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f_\varepsilon](\xi)|^2 d\xi &= \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} e^{-2a(|\xi|)} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} |x|^{2n} dx} \\ &= \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} e^{-2a(|\xi|)} |\xi|^{2n} |\xi|^{-2n} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} e^{2a(|x|)} e^{-2a(|x|)} |x|^{2n} dx} \geq \frac{\varepsilon^{-2n} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-2a(|\xi|)} |\xi|^{2n} d\xi}{e^{2a(\varepsilon)} \int_{\Omega_\varepsilon} e^{-2a(|x|)} |x|^{2n} dx} \geq e^{-2a(\varepsilon)} \varepsilon^{-2n}, \end{aligned}$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (3) может быть сделано сколь угодно большим.

3. Докажем второе утверждение теоремы. Сначала оценим снизу погрешность оптимального восстановления $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0)$. Как показано выше, квадрат этой величины не меньше значения задачи (3), которая в данном случае ($\delta = 0$) записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \quad F[f](\xi) = 0 \text{ для п. в. } \xi \in A, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\leq 1, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{aligned} \tag{4}$$

Предъявим последовательность допустимых функций в задаче (4), которая сразу даст нужную оценку снизу для значения этой задачи (т. е. оценку, совпадающую с величиной погрешности оптимального восстановления в формулировке теоремы). Скажем несколько слов по поводу происхождения этой последовательности.

Задача (4) относительно переменной $u(\cdot) = |F[f](\cdot)|^2$ является задачей выпуклого программирования. Используя необходимые условия в теореме Каруша — Куна — Таккера (см., например, [14]), легко проверить, что решения в данной задаче нет. Если расширить задачу (4) до задачи на линейном пространстве всех вещественных конечных мер на σ -алгебре измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^d$, то, используя достаточные условия в теореме Каруша — Куна — Таккера, нетрудно показать, что эта задача имеет решение и это решение есть δ -функция Дирака (поводом для такого расширения является то, что задаче (4) можно рассматривать как задачу на множестве положительных мер вида $d\mu_f(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_E |F[f](\xi)|^2 d\xi$, когда $f(\cdot)$ пробегает все допустимые функции).

Ясно, что найденное значение расширенной задачи не меньше значения исходной задачи (4). Беря δ -образную последовательность допустимых в задаче (4) функций, аппроксимирующую решение расширенной задачи, получаем оценку

снизу для задачи (4), которая, как оказывается, совпадает со значением расширенной задачи, т. е. значения задачи (4) и ее расширения одинаковы. Опуская все эти рутинные рассуждения (которые в разных вариантах использовались и ранее, см., например, [5, 12]), сразу предъявляем последовательность, которая дает нужную оценку.

В силу определения r_A множество $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$ для каждого $k \in \mathbb{N}$ имеет ненулевую меру. Рассмотрим семейство функций $f_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[f_k](\xi) = \begin{cases} \frac{(2\pi)^{d/2}}{(r_A + 1/k)^n \sqrt{\text{mes } \Omega_k}}, & \xi \in \Omega_k, \\ 0, & \xi \notin \Omega_k. \end{cases}$$

Очевидно, эти функции $f_k(\cdot)$ принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$ и они допустимы в задаче (4), поскольку

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2n} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2n} \text{mes } \Omega_k} \int_{\Omega_k} |\xi|^{2n} d\xi \\ &\leq \frac{(r_A + 1/k)^{2n}}{(r_A + 1/k)^{2n} \text{mes } \Omega_k} \int_{\Omega_k} d\xi = 1. \end{aligned}$$

Оценим значение максимизируемого функционала в (4) на этих функциях:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} e^{-2a(|\xi|)} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(r_A + 1/k)^{2n} \text{mes } \Omega_k} \int_{\Omega_k} e^{-2a(|\xi|)} d\xi \\ &\geq \frac{e^{-2a(r_A + 1/k)}}{(r_A + 1/k)^{2n} \text{mes } \Omega_k} \int_{\Omega_k} d\xi \geq \frac{e^{-2a(r_A + 1/k)}}{(r_A + 1/k)^{2n}}. \end{aligned}$$

Выражение справа стремится к величине $r_A^{-2n} e^{-2a(r_A)}$ и тем самым значение задачи (4) не меньше этой величины. Тогда в силу (1) получаем оценку

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) \geq \frac{e^{-a(r_A)}}{r_A^n}. \quad (5)$$

Докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность метода восстановления из утверждения 2 теоремы.

Оптимальность метода $\hat{m}$ означает, что его погрешность, т. е. значение задачи

$$\|T_a f(\cdot) - \hat{m}(F[f](\cdot)|_A)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \quad f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \quad (6)$$

совпадает с величиной $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (6), по теореме Планшереля получим, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi &\rightarrow \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\leq 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Оценим значение максимизируемого функционала. Так как функция $g(\cdot)$ совпадает с $F[f](\cdot)$ на шаре $B(0, r_A)$ и равна нулю вне него, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} |\xi|^{-2n} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{e^{-2a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_A)} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{e^{-2a(r_A)}}{(2\pi)^d r_A^{2n}} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq \frac{e^{-2a(r_A)}}{r_A^{2n}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) \leq r_A^{-n} e^{-a(r_A)}$. Вместе с оценкой (5) это означает, что

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, 0) = \frac{e^{-a(r_A)}}{r_A^n}$$

и что $\hat{m}$ — оптимальный метод. Утверждение 2 теоремы доказано.

4. Докажем третье утверждение теоремы. Как и раньше, начинаем с оценки снизу величины $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, A)$. В п. 2 показано, что квадрат этой величины не меньше значения задачи (3).

Пусть сначала $r_A \geq \hat{r}$. Это означает, что $\text{mes}(B(0, \hat{r}) \cap A) = \text{mes} B(0, \hat{r})$. Покажем, что в этом случае у задачи (3) существует решение.

Относительно переменной $|F[f](\cdot)|^2$ задача (3) является задачей выпуклого программирования с континуумом ограничений типа неравенств. Для нахождения ее решения воспользуемся естественной модификацией достаточных условий в классической теореме Каруша — Куна — Таккера, где число подобных ограничений конечно.

Сопоставим задаче (3) следующую функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(\cdot), \lambda) &= -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \int_A \lambda_1(\xi) |F[f](\xi)|^2 d\xi + \lambda_2 \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

где $\lambda = (1, \lambda_1(\cdot), \lambda_2)$. Покажем, что если найдутся п. в. неотрицательная и ограниченная измеримая функция $\lambda_1(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, число $\lambda_2 \geq 0$ и допустимая в задаче (3) функция $\hat{f}(\cdot)$ такие, что

$$\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda) \geq \mathcal{L}(\hat{f}(\cdot), \lambda) \quad (7)$$

для всех функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, а также

$$\int_A \lambda_1(\xi) (|F[\hat{f}](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_2 \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[\hat{f}](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) = 0, \quad (9)$$

то $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Действительно, пусть $f(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (3). Используя это обстоятельство и неотрицательность $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2 , равенства (8) и (9), а затем неравенство (7), будем иметь

$$\begin{aligned} -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi &\geq -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &+ \int_A \lambda_1(\xi) (|F[f](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi + \lambda_2 \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) \\ &= \mathcal{L}(f(\cdot), \lambda) - \delta^2 \int_A \lambda_1(\xi) d\xi - \lambda_2 \geq \mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot), \lambda) - \delta^2 \int_A \lambda_1(\xi) d\xi - \lambda_2 \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Анализируя соотношения (7)–(9), можно понять вид функций $\widehat{f}(\cdot)$, $\lambda_1(\cdot)$ и значение λ_2 . Опуская этот анализ, предъявим $\widehat{f}(\cdot)$, $\lambda_1(\cdot) \geq 0$ и $\lambda_2 \geq 0$, удовлетворяющие условиям (7)–(9).

Пусть функция $\widehat{f}(\cdot)$ такова, что

$$\begin{aligned} F[\widehat{f}](\xi) &= \begin{cases} \delta, & \xi \in B(0, \widehat{r}), \\ 0, & \xi \notin B(0, \widehat{r}), \end{cases} \\ \lambda_1(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{(2\pi)^d} (e^{-2a(|\xi|)} - \lambda_2 |\xi|^{2n}), & \xi \in B(0, r_0), \\ 0, & \xi \notin B(0, r_0), \end{cases} \end{aligned}$$

$\lambda_2 = r_0^{-2n} e^{-2a(r_0)}$, где, напомним, $r_0 = \min\{r_A, \widehat{r}\}$.

Проверим, что функция $\widehat{f}(\cdot)$ допустима в задаче (3). Очевидно, что $\widehat{f}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет первому ограничению в (3). Если теперь учесть нетрудно проверяемое равенство

$$\int_{B(0, r)} |\xi|^{2s} d\xi = \frac{2\pi^{d/2}}{(d+2s)\Gamma(d/2)} r^{d+2s},$$

справедливое для любых $s > 0$ и $r > 0$, и выражение для $\widehat{r}$, то будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, \widehat{r})} |\xi|^{2n} d\xi = 1.$$

Таким образом, функция $\widehat{f}(\cdot)$ удовлетворяет второму ограничению в задаче (3) и, значит, она допустима в этой задаче.

Ясно, что $\lambda_2 > 0$ и элементарно проверяется, что $\lambda_1(\cdot) \geq 0$. Очевидным образом выполняются условия (8) и (9). Наконец, простая проверка показывает, что $\mathcal{L}(f(\cdot), \lambda) \geq 0$ для всех функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{L}(\widehat{f}(\cdot), \lambda) = 0$. Следовательно, соотношение (7) также выполняется и тем самым $\widehat{f}(\cdot)$ — решение задачи (3).

Теперь можно вычислить значение этой задачи:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, \widehat{r})} e^{-2a(|\xi|)} d\xi.$$

Отсюда и из (1) следует нужная оценка снизу для погрешности оптимального восстановления для случая, когда $r_A \geq \widehat{r}$:

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, \widehat{r})} e^{-2a(|\xi|)} d\xi}. \quad (10)$$

Пусть теперь $r_A < \widehat{r}$. В этой ситуации, снова руководствуясь соображениями, связанными с теоремой Каруша — Куна — Таккера, предъявим допустимую последовательность в задаче (3), которая даст нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\Omega_k = (\mathbb{R}^d \setminus A) \cap B(0, r_A + 1/k)$. Напомним, что силу определения r_A для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество Ω_k имеет ненулевую меру. Также легко видеть, что $\text{mes}(B(0, r_A) \cap \Omega_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и соответственно $\text{mes}(\Omega_k \setminus B(0, r_A)) = \text{mes} \Omega_k$. Рассмотрим семейство функций $f_k(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$F[f_k](\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(2\pi)^d (1 - (\frac{r_A}{r_A + 1/k})^{d+2n})}{\text{mes} \Omega_k (r_A + 1/k)^{2n}}}, & \xi \in \Omega_k \setminus B(0, r_A), \\ \delta, & \xi \in B(0, r_A), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\widehat{f}(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$ и удовлетворяет первому ограничению в задаче (3). Обозначая для краткости $\alpha = 1 - (r_A/\widehat{r})^{d+2n}$ и учитывая, что

$$\alpha = 1 - \frac{\delta^2 r_A^{d+2n}}{2^{d-1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2) (d+2n)} = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2n} d\xi,$$

будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2n} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega_k \setminus B(0, r_A)} |\xi|^{2n} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2n} d\xi + \frac{(r_A + 1/k)^{-2n} \alpha}{\text{mes} \Omega_k} \int_{\Omega_k \setminus B(0, r_A)} |\xi|^{2n} d\xi \\ &\leq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2n} d\xi + \frac{(r_A + 1/k)^{-2n} \alpha}{\text{mes} \Omega_k} (r_A + 1/k)^{2n} \text{mes} \Omega_k \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} |\xi|^{2n} d\xi + \alpha = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, функции $f_k(\cdot)$ допустимы в задаче (3).

Оценим значение максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f_k](\xi)|^2 d\xi \\
&= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + \frac{(r_A + 1/k)^{-2n} \alpha}{\text{mes } \Omega_k} \int_{\Omega_k \setminus B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi \\
&\geq \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + \frac{(r_A + 1/k)^{-2n} \alpha}{\text{mes } \Omega_k} e^{-2a(r_A + 1/k)} \text{mes } \Omega_k \\
&= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + e^{-2a(r_A + 1/k)} (r_A + 1/k)^{-2n} \alpha.
\end{aligned}$$

Ясно, что величина справа стремится к

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + e^{-2a(r_A)} r_A^{-2n} \alpha.$$

Отсюда следует, что значение задачи (3) не меньше этой величины и тем самым в случае $0 < r_A < \widehat{r}$ получена следующая оценка:

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_A)} e^{-2a(|\xi|)} d\xi + e^{-2a(r_A)} r_A^{-2n} \alpha},$$

которая вместе с (10) доказывает нужную оценку снизу для погрешности оптимального восстановления.

В терминах введенных выше функции $\lambda_1(\cdot)$ и числа λ_2 эту оценку можно записать так:

$$E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta) \geq \sqrt{\delta^2 \int_{B(0, r_0)} \lambda_1(\xi) d\xi + \lambda_2}. \quad (11)$$

Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанного в утверждении (3) теоремы метода восстановления.

Поясним схему нахождения оптимального метода, указанного в теореме. Будем искать оптимальный метод среди методов, подобных оператору T_a , т. е. методов $m_\omega : L_\infty(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[m_\omega(g(\cdot))](\cdot) = e^{-a(\cdot)} \omega(\cdot) g(\cdot),$$

где $\omega(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ (считая, что функция $g(\cdot)$ за пределами A равна нулю). Кроме того, из полученной оценки для погрешности оптимального восстановления следует, что информация о преобразовании Фурье за пределами шара $B(0, r_0)$ не используется, поэтому будем предполагать, что функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне шара $B(0, r_0)$.

Оптимальность метода m_ω означает, что его погрешность равна погрешности оптимального восстановления, т. е. значение задачи

$$\begin{aligned}
& \|T_a f(\cdot) - m_\omega(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow \max, \\
& \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty(A)} \leq \delta, \quad f(\cdot) \in W_{2,\infty}^n(\mathbb{R}^d), \quad g(\cdot) \in L_\infty(A),
\end{aligned} \quad (12)$$

совпадает с величиной $E(W_2^n(\mathbb{R}^d), A, \delta)$.

Переходя к образам Фурье в задаче (12), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ & |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 \leq \delta^2 \quad \text{для п. в. } \xi \in A, \\ & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq 1, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad g(\cdot) \in L_\infty(A). \end{aligned} \quad (13)$$

Оценим выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале. Пусть сначала $\xi \in B(0, r_0)$. Имеем по неравенству Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} & e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)|^2 \\ &= e^{-2a(|\xi|)} |\omega(\xi)(F[f](\xi) - g(\xi)) + (1 - \omega(\xi))F[f](\xi)|^2 \\ &= e^{-2a(|\xi|)} \left| \frac{\omega(\xi)}{(2\pi)^{d/2} \sqrt{\lambda_1(\xi)}} (2\pi)^{d/2} \sqrt{\lambda_1(\xi)} (F[f](\xi) - g(\xi)) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1 - \omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2} |\xi|^n} \cdot \sqrt{\lambda_2} |\xi|^n F[f](\xi) \right|^2 \leq e^{-2a(|\xi|)} \left(\frac{|\omega(\xi)|^2}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)} + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2n}} \right) \\ & \quad \times ((2\pi)^d \lambda_1(\xi) |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 + \lambda_2 |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2). \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по шару $B(0, r_0)$, обозначая

$$S_\omega(\xi) = e^{-2a(|\xi|)} \left(\frac{|\omega(\xi)|^2}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)} + \frac{|1 - \omega(\xi)|^2}{\lambda_2 |\xi|^{2n}} \right), \quad 0 < |\xi| \leq r_0,$$

учитывая второе условие в (13) и считая, что $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} (2\pi)^d \lambda_1(\xi) |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi \right. \\ & \quad \left. + \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \right) \\ & \leq \|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)} \left(\delta^2 \int_{B(0, r_0)} \lambda_1(\xi) d\xi + \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \right). \end{aligned}$$

Оценим максимизируемый функционал в (12) по дополнению к $B(0, r_0)$ (напомним, что функция $\omega(\cdot)$ на этом множестве равна нулю):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_0)} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_0)} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, r_0)} e^{-2a(|\xi|)} |\xi|^{-2n} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \frac{\lambda_2}{(2\pi)^d} \int_{B(0, r_0)} |\xi|^{2n} |F[f](\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

Складывая полученные оценки, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2a(|\xi|)} |F[f](\xi) - \omega(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0, r_0))} \left(\delta^2 \int_{B(0, r_0)} \lambda_1(\xi) d\xi + \lambda_2 \right).
\end{aligned}$$

Если функция $\omega(\cdot)$ такова, что $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0, r_0))} \leq 1$, то вместе с оценкой (11) это будет означать, что метод m_ω оптимален и справедливо выражение для погрешности оптимального восстановления, указанное в теореме.

Покажем, что такая функция $\omega(\cdot)$ существует. Действительно, выделяя полный квадрат в выражении в скобках в определении $S_\omega(\cdot)$, нетрудно убедиться, что условие $\|S_\omega(\cdot)\|_{L_\infty(B(0, r_0))} \leq 1$ равносильно соотношению

$$\begin{aligned}
&\left| \omega(\xi) - \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \right|^2 \\
&\leq \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) \lambda_2 |\xi|^{2n}}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \left(e^{2a(|\xi|)} - \frac{1}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя сюда выражения для $\lambda_1(\cdot)$ и λ_2 , получим, что величина справа в скобках равна нулю и, значит,

$$\omega(\xi) = \frac{(2\pi)^d \lambda_1(\xi)}{(2\pi)^d \lambda_1(\xi) + \lambda_2 |\xi|^{2n}} = 1 - e^{2(a(|\xi|) - a(r_0))} |\xi|^{2n} r_0^{-2n}$$

для всех $\xi \in B(0, r_0)$.

Это доказывает оптимальность метода, указанного в теореме, и тем самым теорема полностью доказана.

3. Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $(t, x) \mapsto u(t, x)$ — функция на $[0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальным распределением температуры $u(0, \cdot) = f(\cdot)$.

Предположим, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение этой задачи дается для всех $t > 0$, как хорошо известно, интегралом Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy$$

и при этом $u(t, \cdot; f(\cdot)) \rightarrow f(\cdot)$ при $t \rightarrow 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Таким образом, имеем семейство операторов

$$T(t) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d), \quad T(t)f(\cdot) = u(t, \cdot)$$

и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F[T(t)f(\cdot)](\xi) = F[u(t, x; f(\cdot))](\xi) = e^{-t|\xi|^2} F[f](\xi) \text{ для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, если поставить задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени $t > 0$ по преобразованию Фурье начальной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A , то ее решение дается доказанной теоремой при $a(|\xi|) = t|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\Delta u = 0, \quad u(\cdot, 0) = f(\cdot),$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot, \cdot)$ в верхнем полупространстве $\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$ такой, что $u(\cdot, y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и

$u(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot)$ при $y \rightarrow 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [15])

$$u(x, y) = u(x, y; f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y f(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}} dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $T(y) : L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)$, $T(y)f(\cdot) = u(\cdot, y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[T(y)f](\xi) = F[u(x, y; f)](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi).$$

Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = Y$ по преобразованию Фурье граничной функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно на некотором измеримом множестве A , то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $a(|\xi|) = Y|\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). New York: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
3. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Berlin: Springer-Verl., 1985. V. 1129. P. 21–93.
4. Traub J. F., Woźniakowski H. A general theory of optimal algorithms. New York: Acad. Press, 1980.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37, № 3. С. 51–64.
6. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44, № 3. С. 76–79.

7. Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавк. мат. журн. 2004. Т. 6, № 4. С. 55–62.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 37–54.
9. Абрамова Е. В. Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции // Владикавк. мат. журн. 2017. Т. 19, № 4. С. 3–12.
10. G. G. Magaril-Ilyayev, E. O. Sivkova Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Euras. Math. J. 2019. V. 10, N 4. P. 75–84.
11. Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 10. С. 1711–1720.
12. Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 25, № 2. С. 124–135.
13. Абрамова Е. В., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости // Владикавк. мат. журн. 2022. Т. 64, № 3. С. 441–449.
14. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: УРСС, 2020.
15. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.

Поступила в редакцию 20 сентября 2023 г.

После доработки 20 сентября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Абрамова Елена Владимировна
НИУ «Московский энергетический институт»,
Красноказарменная ул., 14, Москва 111250
abramova_elena@inbox.ru

Сивкова Елена Олеговна
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
ул. Ватутина, 53, Владикавказ 362025;
НИУ «Московский энергетический институт»,
Красноказарменная ул., 14, Москва 111250
sivkova_elena@inbox.ru

ЛЕГКИЕ 3-ЦЕПИ В 3-МНОГОГРАННИКАХ БЕЗ СМЕЖНЫХ 3-ГРАНЕЙ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. Пусть w_k — максимум минимальной суммы степеней вершин (веса) в k -вершинных цепях (k -цепях) 3-многогранников. Очевидно, что каждый 3-многогранник содержит вершину степени не больше 5, так что $w_1 \leq 5$. Еще в 1955 г. Коциг доказал, что $w_2 \leq 13$ (т. е. найдется ребро веса не больше 13), причем оценка точна.

В 1993 г. Андо, Ивасаки и Канеко доказали, что $w_3 \leq 21$, и эта оценка также не улучшаема ввиду конструкции Йендроля, найденной в 1997 г. В 1997 г. О. В. Бородин уточнил этот результат, показав, что $w_3 \leq 18$ верно для всех 3-многогранников с $w_2 \geq 7$, но для 3-многогранников с $w_2 \geq 8$ имеет место более сильная оценка $w_3 \leq 17$, причем неувлучшаемость 18 была подтверждена О. В. Бородиным и др. в 2013 г, а неувлучшаемость 17 была известна давно.

За последние три десятилетия большое число работ было посвящено задачам раскраски и структурным задачам на плоских графах, разреженных в том или ином смысле.

В данной статье рассматриваются 3-многогранники без смежных 3-циклов, т. е. не имеющие хордальных 4-циклов (иначе говоря, без $K_4 - e$). Известно, что для таких 3-многогранников $w_1 \leq 4$ и, более того, $w_2 \leq 9$, где обе оценки точны (Бородин, 1992).

Доказано, что всякий 3-многогранник без хордальных 4-циклов содержит 3-цепь веса не более 15, т. е. $w_3 \leq 15$, и эта оценка неувлучшаема.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.202

Ключевые слова: плоский граф, 3-многогранник, разреженный 3-многогранник, структурные свойства, 3-цепь, вес.

1. Введение

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике P есть число инцидентных ребер. Под k -вершиной (k -гранью) понимается вершина (грань) степени k , k^+ -вершина имеет степень не меньше k , и т. д.

Цепь на k вершинах называется k -цепью. Цепь uvw есть (i, j, k) -цепь, если $d(u) \leq i$, $d(v) \leq j$ и $d(w) \leq k$. Вес $w(H)$ подграфа H в P есть сумма степеней вершин из H в P . Будем опускать аргументы функций, когда они понятны из контекста. Через $\mathbf{P}_\delta$ обозначим класс 3-многогранников с минимальной степенью вершин δ ; в частности, $\mathbf{P}_3$ есть множество всех 3-многогранников.

Пусть w_k — максимум минимальной суммы степеней вершин (веса) в k -вершинных цепях 3-многогранников из $\mathbf{P}_\delta$.

Работа О. В. Бородина (постановка задачи, доказательство) поддержана Министерством науки и высшего образования России (проект FWNF-2022-0017). Работа А. О. Ивановой (детали доказательства, конструкция) поддержана Министерством науки и высшего образования России, соглашение № 075-02-2023-947 от 16 февраля 2023 г.

В 1904 г. Вернике [1] доказал, что если $P_5 \in \mathbf{P}_5$, то P_5 содержит 5-вершину, смежную с 6^- -вершиной, т. е. $w_2 \leq 11$, причем оценка точна. Этот результат был усилен Франклином [2] в 1922 г., доказавшим существование $(6, 5, 6)$ -цепи в любом P_5 , так что $w_3 \leq 17$ в $\mathbf{P}_5$, и эта оценка неупрощаема. В 2016 г. О. В. Бородин и А. О. Иванова [3] доказали, что имеется также и $(5, 6, 6)$ -цепь, а других точных описаний 3-цепей в $\mathbf{P}_5$ не существует.

Теорема Франклина [2] является основополагающей в структурной теории плоских графов; она была обобщена или уточнена в нескольких направлениях (см., например, [4–13] и обзоры Йендроя, Фосса [14], О. В. Бородина, А. О. Ивановой [15] и Кренстона, Веста [16]).

Очевидно, что каждый 3-многогранник, т. е. из $\mathbf{P}_3$, содержит вершину степени не больше 5, так что $w_1 \leq 5$. Еще в 1955 г. Коциг [17] доказал, что $w_2 \leq 13$ (другими словами, что найдется ребро веса не больше 13), причем оценка точна.

В 1993 г. Андо, Ивасаки и Канеко [18] доказали, что $w_3 \leq 21$, и эта оценка также неупрощаема ввиду конструкции Йендроя [8], найденной в 1997 г. В 1997 г. О. В. Бородин [19] уточнил этот результат, показав, что $w_3 \leq 18$ верно для всех 3-многогранников с $w_2 \geq 7$, но для 3-многогранников с $w_2 \geq 8$ имеет место более сильная оценка $w_3 \leq 17$, причем неупрощаемость 18 была подтверждена О. В. Бородиным и др. [20] в 2013 г., а неупрощаемость 17 была известна давно.

За последние три десятилетия большое число работ было посвящено задачам раскраски и структурным задачам на плоских графах, разреженных в том или ином смысле. В частности, новые результаты о строении плоских графов с минимальной степенью 3 и 4 без смежных 3-циклов при различных дополнительных предположениях находят применение в 3-раскраске (как правильной, так и неправильной), предписанной 3- и 4-раскрасках, а также в недавно введенных 3- и 4-DP-раскрасках (такую информацию можно найти в ссылках на выдающуюся статью Дворжака, Постля [21]).

В данной статье рассматриваются наиболее плотные среди разреженных плоских графов, а именно, класс $\mathbf{P}_3^{TT}$ 3-многогранников без $K_4 - e$ (иначе говоря, не имеющих двух 3-циклов с общим ребром). Известно еще с 1992 г., что такие 3-многогранники имеют $w_1 \leq 4$ и, более того, $w_2 \leq 9$, где обе оценки точны [22], откуда следует, в частности, что $\mathbf{P}_5^{TT} = \emptyset$.

Цель данной статьи — доказать, что все 3-многогранники из $\mathbf{P}_3^{TT}$ имеют $w_3 \leq 15$ и эта оценка неупрощаема.

Теорема 1. *Всякий 3-многогранник без хордальных 4-циклов содержит 3-цепь веса не более 15, причем оценка неупрощаема.*

2. Доказательство теоремы 1

На рис. 1 показано, как преобразовать додекаэдр в 3-многогранник без хордальных 4-циклов такой, что каждая его 3-цепь имеет вес не менее 15.

2.1. Перераспределение зарядов на контрпримере к $w_3 \leq 15$. Предположим, что 3-многогранник P имеет все 3-цепи веса не менее 16. По ходу доказательства будем сокращать утверждение «поскольку P не содержит (a, b, c) -цепей» до «ввиду не- (a, b, c) !». В дальнейшем через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ будем обозначать соседние с вершиной v вершины в циклическом порядке.

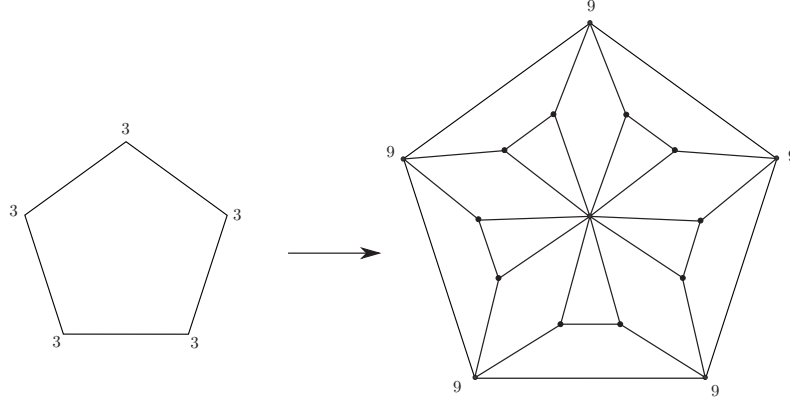


Рис. 1. Преобразование додекаэдра в 3-многогранник со всеми 3-цепями веса не менее 15, не содержащий хордальных C_4 .

Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для P , где V , E , F суть множества вершин, ребер и граней в P соответственно, можно переписать в виде

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8. \quad (1)$$

Каждая вершина или грань $x \in V \cup F$ имеет *начальный заряд* $\mu(x) = d(x) - 4$. Используя свойства 3-многогранника P как контрпримера, мы зададим локальное перераспределение зарядов μ , сохраняющее их сумму, таким образом, что *новый заряд* $\mu'(x)$ будет неотрицательным для всех $x \in V \cup F$. Это даст противоречие с тем фактом, что сумма новых зарядов согласно (1) равна -8 .

Правила перераспределения зарядов такие (рис. 2).

R1. Каждая 5^+ -грань дает $\frac{1}{3}$ каждой инцидентной 3-вершине.

R2. Каждая d -вершина при $d = 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9$ дает $\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \vee \frac{3}{4} \vee \frac{4}{5} \vee 1$ соответственно каждой смежной 3-вершине.

R3. Каждая d -вершина при $d = 5 \vee 6 \vee 7 \vee 8 \vee 9$ дает $\frac{1}{3} \vee \frac{1}{2} \vee \frac{3}{4} \vee \frac{4}{5} \vee 1$ соответственно каждой инцидентной 3-грани за следующим исключением:

(ex) если 8-вершина v лежит в общей 3-грани f с двумя 4-вершинами, то v дает 1 грани f вместо $\frac{4}{5}$.

R4. Пусть 10^+ -вершина v смежна с 3-вершиной w по ребру, инцидентному двум 4+-граням. Тогда v дает $\frac{3}{5}$ вершине w за следующим исключением:

(ex) если имеется 4-грань vv_1v_2 с $d(v_1) \geq 8$, то v вместо этого дает $\frac{9}{10}$ вершине w .

R5. Каждая 10^+ -вершина v , лежащая в 3-грани $f = vv_1v_2$, дает на f :

- (a) 1, если $d(v_1) \leq 4$ и $d(v_2) \leq 5$,
- (b) $\frac{1}{2}$, если $d(v_1) \leq 4$ и $d(v_2) \geq 6$, или
- (c) $\frac{1}{3}$, если $d(v_1) \geq 5$ и $d(v_2) \geq 5$.

R6. Если 10^+ -вершина v лежит в общей 3-грани $f = vv_1v_2$ с 3-вершиной v_1 , то v дает на v_1 :

- (a) $\frac{1}{10}$ при $d(v_2) = 3$,

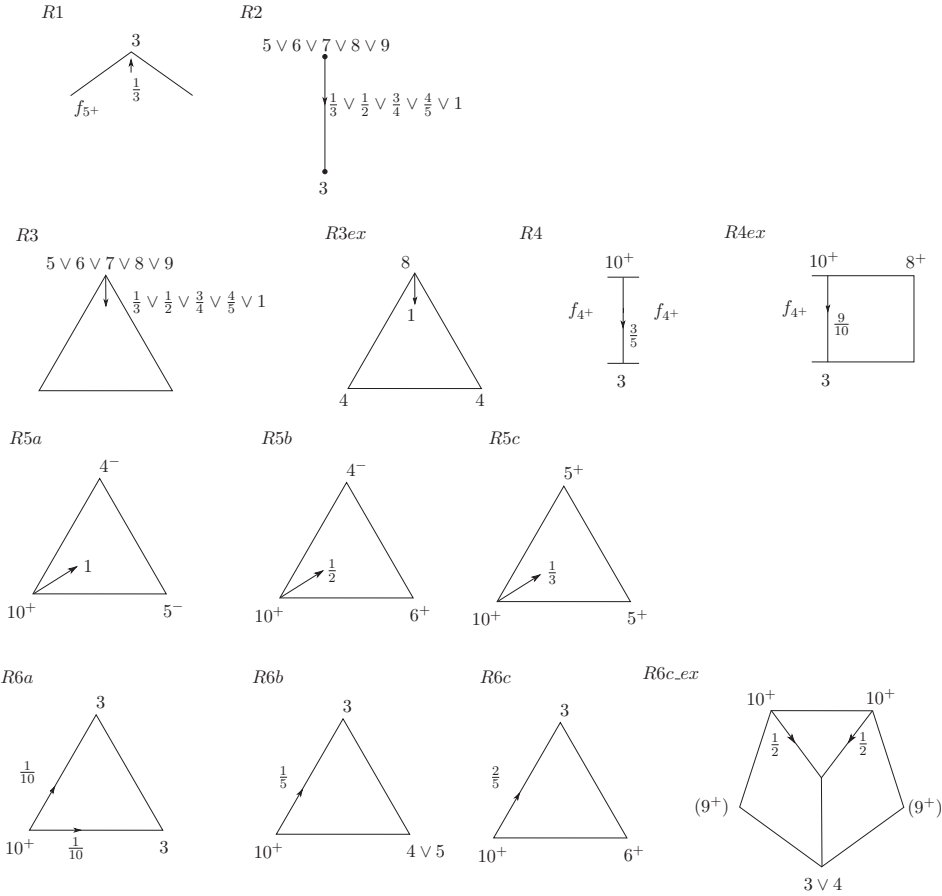


Рис. 2. Правила перераспределения зарядов.

(b) $\frac{1}{5}$ при $4 \leq d(v_2) \leq 5$, или

(c) $\frac{2}{5}$ при $d(v_2) \geq 6$ за следующим исключением:

(c.ex) если $d(v_2) \geq 10$, а v_1 инцидентна двум 4-граням и смежна с 4^- -вершиной, то v_1 получает $\frac{1}{2}$ от каждой из вершин v и v_2 .

2.2. Проверка того, что $\mu'(x) \geq 0$ при всех $x \in V \cup F$. Для 5^+ -границ f имеем $\mu'(f) = d(f) - 4 - \frac{1}{3} \times \lfloor \frac{2d(f)}{3} \rfloor \leq d(f) - 4 - \frac{1}{3} \times \frac{2d(f)}{3} = \frac{7d(f)-36}{9}$ по правилу R1 ввиду не-(3, 3, 3)!. Если $d(f) \geq 6$, то отсюда уже $\mu'(f) > 0$, а при $d(f) = 5$ имеется не более трех 3-вершин при грани f , откуда $\mu'(f) = 5 - 4 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$.

Если f есть 4-грань, то она не участвует в перераспределении зарядов, а значит, $\mu'(f) = \mu(f) = 4 - 4 = 0$.

Пусть 3-грань $f = vv_1v_2$ имеет $d(v) \geq d(v_1) \geq d(v_2)$. Если $d(v_2) \geq 5$, то $\mu'(f) = 3 - 4 + 3 \times \frac{1}{3} = 0$ по правилу R3 в сочетании с R5с, так что можем дальше предполагать, что $d(v_2) \leq 4$. Теперь если $d(v_1) \geq 6$, то $\mu'(f) = -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R3 и R5b.

При $d(v_1) \leq 5$ имеем $d(v) \geq 7$ согласно не-(4, 5, 6)!. Если же $d(v) \geq 9$, то $\mu'(f) = -1 + 1 = 0$ по R3 и R5a. Далее пусть $d(v) = 8$; если $d(v_1) = 5$, то $\mu'(f) = -1 + \frac{4}{5} + \frac{1}{3} > 0$ согласно R3. Остается допустить, что $d(v_1) \leq 4$, откуда

следует ввиду не-(3, 4, 8)!, что $d(v_1) = d(v_2) = 4$, а значит, $\mu'(f) = -1 + 1 = 0$ по R3ex, что и требовалось.

Наконец, если $d(v) = 7$, то $d(v_1) = 5$ и $d(v_2) = 4$ ввиду не-(3, 5, 7)! в сочетании с не-(4, 4, 7)!, поэтому $\mu'(f) = -1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{4} > 0$ согласно R3.

Теперь рассмотрим вершину v .

СЛУЧАЙ 1: $d(v) = 3$. Пусть сначала v не смежна с 10^+ -вершинами; тогда у нее есть не меньше двух 7^+ -соседей ввиду не-(3, 6, 6)! Значит, v получает не менее $\frac{3}{4}$ от каждого из них по R2, а следовательно, $\mu'(v) \geq 3 - 4 + 2 \times \frac{3}{4} > 0$.

Теперь пусть имеется 10^+ -сосед v_1 , а v_2 и v_3 — две другие соседние с v вершины.

ПОДСЛУЧАЙ 1.1: v_1 — единственный 10^+ -сосед; тогда правило R6a не применимо к v_1 ввиду не-(3, 3, 9)!, и можно считать, что $d(v_2) \geq 7$ ввиду симметрии в сочетании с не-(3, 6, 6)!. Если $d(v_2) = 9$, то $\mu'(v) \geq -1 + 1 = 0$ по R2. Если $d(v_2) = 8$, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{5} > 0$ по R2 и ввиду отсутствия (3, 4, 8)-цепей. Наконец, если $d(v_2) = 7$, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} > 0$ по R2 и не-(3, 5, 7)!.

ПОДСЛУЧАЙ 1.2: у v не менее двух 10^+ -соседей. Если найдется три 10^+ -соседа, то $\mu'(v) \geq -1 + 3 \times \frac{2}{5} > 0$ согласно R6с. Если имеются в точности два 10^+ -соседа, v_1 и v_2 (а $d(v_3) \leq 9$), то возможны два случая.

Пусть сначала при v нет 3-граней. Тогда $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{3}{5} > 0$ по R4, что и требовалось доказать. Далее пусть v инцидентна 3-границе f . Вспомним, что v инцидентна лишь одной 3-границе ввиду отсутствия хордальных 4-циклов.

ПОДСЛУЧАЙ 1.2.1: $f = v_1vv_2$. Если при v имеется 5^+ -грань, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{5} > 0$ по R1 и R6с.

Теперь пусть $v_1vv_3 \dots$ и $v_2vv_3 \dots$ — две 4-границы при v . Если $d(v_3) \geq 5$, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + 2 \times \frac{2}{5} > 0$ по R2 и R6с. Если же $3 \leq d(v_3) \leq 4$, то $\mu'(v) \geq -1 + 2 \times \frac{1}{2} = 0$ по R6с_ex.

ПОДСЛУЧАЙ 1.2.2: $f = v_1vv_3$. Если при v имеется 5^+ -грань, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} > 0$ по R1, R4 и одному из пунктов правила R6.

Пусть $v_1vv_2 \dots$ и v_2vv_3x — 4-границы при v . Если $5 \leq d(v_3) \leq 9$, то $\mu'(v) \geq -1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{5} > 0$ по R2, R4 в сочетании с R6b или R6с. Наконец, если $3 \leq d(v_3) \leq 4$, то $d(x) \geq 9$ ввиду (3, 4, 9)!, откуда $\mu'(v) \geq -1 + \frac{9}{10} + \frac{1}{5} > 0$ по R4ex и R6b.

СЛУЧАЙ 2: $d(v) = 4$. Поскольку v не участвует в перераспределении зарядов, имеем $\mu'(v) = \mu(v) = 4 - 4 = 0$.

СЛУЧАЙ 3: $5 \leq d(v) \leq 9$. Заметим, что у v не более одного 3-соседа ввиду не-(3, 3, 9)! и не более $\lceil \frac{d(v)}{2} \rceil$ инцидентных 3-граней из-за отсутствия хордальных 4-циклов в P .

При $d(v)$, равном 5, 6 и 7, отсюда следует согласно R2 и R3, что $\mu'(v) = 5 - 4 - (1 + 2) \times \frac{1}{3} = 0$, $\mu'(v) = 6 - 4 - (1 + 3) \times \frac{1}{2} = 0$ и $\mu'(v) = 7 - 4 - (1 + 3) \times \frac{3}{4} = 0$ соответственно.

Далее пусть $d(v) = 8$. Если у v есть 3-сосед, то у v нет 4-соседа ввиду не-(3, 4, 8)!, поэтому R3ex неприменимо к v , а значит, $\mu'(v) \geq 8 - 4 - (1 + 4) \times \frac{4}{5} = 0$ по R2 и основной части правила R3. В противном случае $\mu'(v) \geq 8 - 4 - 4 \times 1 = 0$ по R3 и R3ex.

Наконец, $d(v) = 9$ влечет $\mu'(v) \geq 9 - 4 - (1 + 4) \times 1 = 0$ согласно R2 и R3.

СЛУЧАЙ 4. $d(v) \geq 10$. Для оценки суммарной передачи зарядов вершиной v смежным 3-вершинам по R4 и R6 и инцидентным 3-граням по R5 удобно распределить эти передачи по инцидентным v ребрам так, чтобы каждое инцидентное ребро забирало не более $\frac{3}{5}$ от v . Действительно, тем самым мы докажем, что $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - d(v) \times \frac{3}{5} = \frac{2(d(v)-10)}{5} \geq 0$.

С этой целью применим следующие продолжения $\overrightarrow{R4ex}$, $\overrightarrow{R5}$ и $\overrightarrow{R6c_ex}$ к правилам R4ex, R5 и R6c_ex соответственно (см. рис. 3), где в нескольких случаях 10^+ -вершина позволяет себе давать 3-грани даже больше в $\overrightarrow{R5}$, чем предписано правилом R5:

$\overrightarrow{R4ex}$. Пусть 10^+ -вершина v смежна с 3-вершиной w по ребру, инцидентному двум 4^+ -граням, (по меньшей мере) одна из которых есть 4-грань vwv_1 с $d(v_1) \geq 8$; тогда v переключает $\frac{3}{10}$ на ребро vv_1 из заряда $\frac{9}{10}$, даваемого w согласно R4ex.

$\overrightarrow{R5}$. Каждая 10^+ -вершина v , лежащая в 3-грани $f = vv_1v_2$, переключает ребрам vv_1 и vv_2 следующие порции заряда, даваемого грани f согласно R5:

- (a1) $\frac{1}{2}$ каждому из vv_1 и vv_2 , если $d(v_1) = d(v_2) = 3$,
- (a2) $\frac{2}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{5}$ на vv_2 , если $d(v_1) = 3$, а $4 \leq d(v_2) \leq 5$,
- (a3) $\frac{3}{5}$ каждому из vv_1 и vv_2 , если $d(v_1) = 4$, а $4 \leq d(v_2) \leq 5$,
- (b1) $\frac{1}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{10}$ на vv_2 , если $d(v_1) = 3$, а $d(v_2) \geq 6$,
- (b2) $\frac{1}{5}$ на vv_1 и $\frac{3}{10}$ на vv_2 , если $d(v_1) = 4$, а $d(v_2) \geq 6$,
- (c) $\frac{3}{10}$ на каждое из vv_1 и vv_2 , если $d(v_1) \geq 5$ и $d(v_2) \geq 5$.

$\overrightarrow{R6c_ex}$. Если 10^+ -вершина v лежит в общей 3-грани $f = vv_1v_2$ с 3-вершиной v_1 и 10^+ -вершиной v_2 , а v_1 смежна с 4^- -вершиной w , которая инцидентна двум 4-граням по ребру v_1w , то v переключает $\frac{3}{10}$ на ребро vv_2 , а также на ребро, ведущее в 9^+ -вершину z в грани vv_1wz .

Лемма 2. После применения правил R4–R6, $\overrightarrow{R4ex}$, $\overrightarrow{R5}$ и $\overrightarrow{R6c_ex}$ каждая 10^+ -вершина посылает неположительный заряд граням и не более $\frac{3}{5}$ каждой смежной вершине.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d(v) \geq 10$. Заметим, что согласно $\overrightarrow{R4ex}$, $\overrightarrow{R5}$ и $\overrightarrow{R6c_ex}$ ни одно ребро из вершины v в 7^- -вершину v_1 не получает дополнительного заряда через 4^+ -грань.

Кроме того, при $d(v_1) \geq 6$ видно из $\overrightarrow{R4ex}$, $\overrightarrow{R5b}$ и $\overrightarrow{R5c}$ совместно с $\overrightarrow{R6c_ex}$, что ребро vv_1 в итоге забирает от v не более $2 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$.

При $4 \leq d(v_1) \leq 5$ ребро vv_1 получает не более $\frac{3}{5}$ от (единственной) инцидентной 3-грани, что происходит согласно $\overrightarrow{R5a2}$, $\overrightarrow{R5a3}$ и $\overrightarrow{R5c}$.

В дальнейшем будем считать, что $d(v_1) = 3$.

СЛУЧАЙ 1: вершина v смежна с v_1 по ребру, не инцидентному 3-граням. Если к ребру vv_1 применимо основное правило R4, а не исключение из него R4ex, то vv_1 не получает ничего по $\overrightarrow{R4ex}$ и $\overrightarrow{R5}$, а значит, по-прежнему проводит $\frac{3}{5}$ от v .

В противном случае $\overrightarrow{R4ex}$ применимо к vv_1 хотя бы один раз и тогда это ребро проводит не более $\frac{9}{10} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$, что и требовалось.

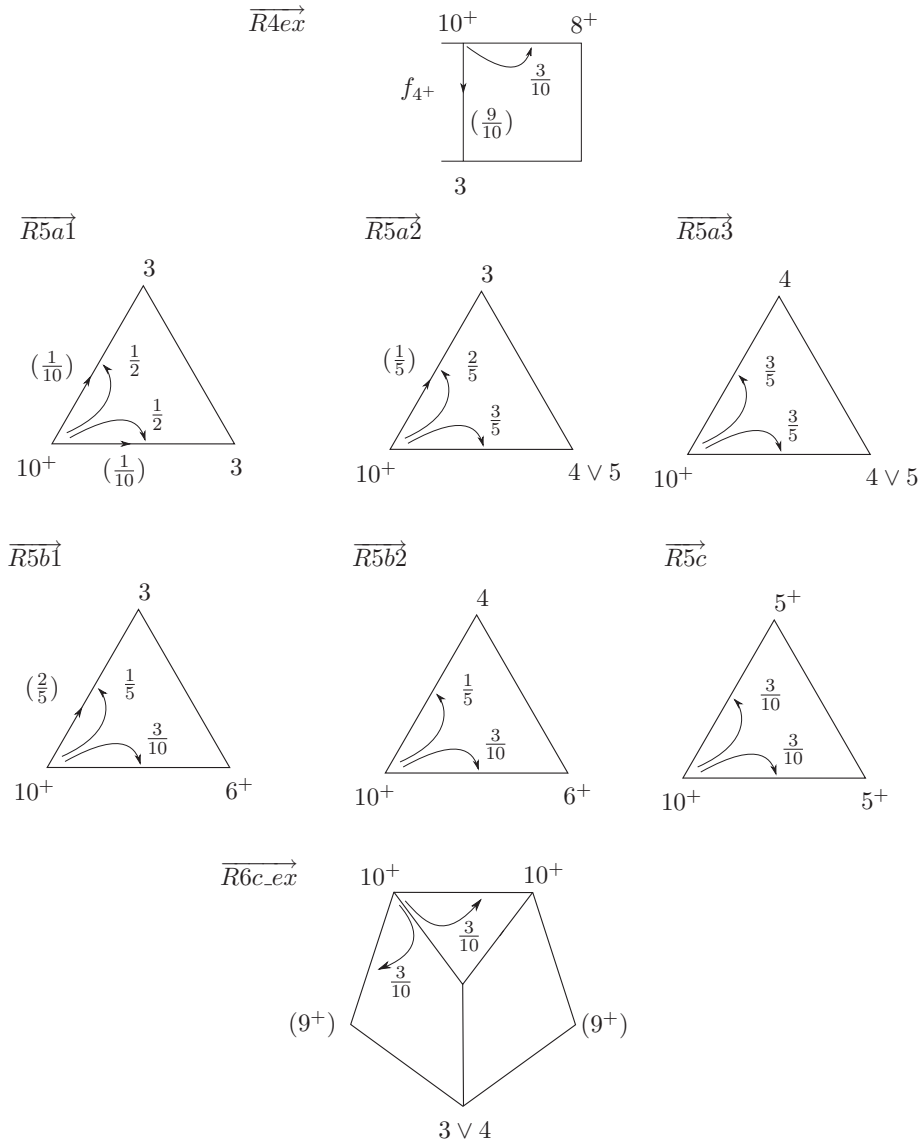


Рис. 3. Дополнительные правила $\overrightarrow{R4ex}$, $\overrightarrow{R5}$ и $\overrightarrow{R6c-ex}$ передачи зарядов от 10^+ -вершины.

СЛУЧАЙ 2: вершина v лежит в 3-грань vv_1v_2 . Если v_2 также 3-вершина, то каждое из ребер vv_1 и vv_2 получает $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$ от v по $R6a$ и $\overrightarrow{R5a1}$, как и требовалось.

Если $4 \leq d(v_2) \leq 5$, то vv_1 получает $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ согласно $R6b$ и $\overrightarrow{R5a2}$, а vv_2 получает $\frac{3}{5}$ по $\overrightarrow{R5a2}$ (и ничего через инцидентную 4^+ -грань).

Если $d(v_2) \geq 6$, а $\overrightarrow{R6c-ex}$ неприменимо, то vv_1 получает $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$ по $R6c$ и $\overrightarrow{R5b1}$, а vv_2 получает $\frac{3}{10}$ согласно $\overrightarrow{R5b1}$ и не более $\frac{3}{10}$ через инцидентную 4^+ -грань по $R4ex$, т. е. не больше $\frac{3}{5}$ в сумме.

Наконец, если v_1 подчиняется правилу $\overrightarrow{\text{R6c_ex}}$, а значит, v смежна по циклу с вершинами z, v_1, v_2 степеней соответственно 9^+ , 3 и ≥ 10 , то ребра vz, vv_1 и v_2 после усреднения проводят не более $2 \times \frac{3}{10}, \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{3}{10} = \frac{2}{5}$ и $2 \times \frac{3}{10}$, что и требовалось доказать.

Этим завершается доказательство леммы 2 и теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Wernicke P. Über den kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
2. Franklin P. The four color problem // Amer. J. Math. 1922. V. 44. P. 225–236.
3. Borodin O. V., Ivanova A. O. An analogue of Franklin's theorem // Discrete Math. 2016. V. 339, N 10. P. 2553–2556.
4. Borodin O. V., Ivanova A. O. An extension of Franklin's theorem // Sib. Electron. Math. Rep. 2020. V. 17. P. 1516–1521.
5. Ferencová B., Madaras T. Light graphs in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310, N 12. P. 1661–1675.
6. Fijavz G., Juvan M., Mohar B., Skrekovski R. Planar graphs without cycles of specific lengths // Europ. J. Combinatorics. 2002. V. 23, N 4. P. 377–388.
7. Hudak P., Maceková M., Madaras T., Siroczki P. More on the structure of plane graphs with prescribed degrees of vertices, faces, edges and dual edges // Ars Math. Contemp. 2017. V. 13, N 2. P. 355–366.
8. Jendrol' S. Paths with restricted degrees of their vertices in planar graphs // Czechoslovak Math. J. 1999. V. 49, N 3. P. 481–490.
9. Jendrol' S. A structural property of convex 3-polytopes // Geom. Dedicata. 1997. V. 68. P. 91–99.
10. Jendrol' S., Madaras T., On light subgraphs in plane graphs with minimum degree five // Discuss. Math. Graph Theory. 1996. V. 16. P. 207–217.
11. Madaras T. Note on the weight of paths in plane triangulations of minimum degree 4 and 5 // Discuss. Math. Graph Theory. 2000. V. 20, N 2. P. 173–180.
12. Madaras T. Two variations of Franklin's theorem // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 36. P. 61–70.
13. Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J. Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.
14. Jendrol' S., Voss H.-J. Light subgraphs of graphs embedded in the plane — a survey // AIP Conf. Proc. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
15. Borodin O. V., Ivanova A. O. New results about the structure of plane graphs: a survey // AIP Conf. Proc. 2017. V. 1907, N 1. P. 030051.
16. Cranston D. W., West D. B. An introduction to the discharging method via graph coloring // Discrete Math. 2017. V. 340, N 4. P. 766–793.
17. Kotzig A., West D. B. Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat.-Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.
18. Ando K., Iwasaki S., Kaneko A. Every 3-connected planar graph has a connected subgraph with small degree sum (Japanese) // Ann. Meeting Math. Soc. Japan. 1993.
19. Borodin O. V. Minimal vertex degree sum of a 3-path in plane maps // Discuss. Math. Graph Theory. 1997. V. 17, N 2. P. 279–284.
20. Borodin O. V., Ivanova A. O., Jensen T. R., Kostochka A. V., Yancey M. P. Describing 3-paths in normal plane maps // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2702–2711.
21. Dvořák Z., Postle L. Correspondence coloring and its application to list-coloring planar graphs without cycles of lengths 4 to 8 // J. Combin. Theory Ser. B. 2018. V. 129. P. 38–54.
22. Borodin O. V. An extension of Kotzig's theorem on the minimum weight of edges in 3-poly-

topes // *Mathematica Slovaca*. 1992. V. 42, N 4. P. 385–389.

Поступила в редакцию 17 октября 2023 г.

После доработки 2 ноября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`brdnoleg@math.nsc.ru`

Иванова Анна Олеговна (ORCID 0000-0002-6179-3740)
Северо-Восточный федеральный университет имени М.К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
`shmgnanna@mail.ru`

УДК 517.98

КВАЗИПЛОТНОСТЬ В $\mathbb{R}^N$ И ПРОЕКТИВНЫЕ ПАРАЛЛЕЛОТОПЫ А. Е. Гутман, И. А. Емельяненко

Аннотация. Предложены два новых критерия замкнутости архимедовых конусов в счетномерных локально выпуклых пространствах — в терминах проективных параллелотопов и проективных автоморфизмов. Получены ответы на некоторые открытые вопросы, связанные с понятиями квазивнутренности и квазиплотности.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.203

Ключевые слова: архимедово упорядоченное векторное пространство, локально выпуклое пространство, слабая топология, конус, квазивнутренность, квазиплотное множество.

В работе [1] предложено исчерпывающее описание класса локально выпуклых пространств, в которых все архимедовы конусы замкнуты. А именно, введено понятие квазиплотного подмножества локально выпуклого пространства и показано, что описываемый класс составляют конечномерные пространства, а также все счетномерные пространства X , у которых топологически сопряженное пространство X' квазиплотно в алгебраически сопряженном пространстве $X^\#$, снабженном слабой топологией $\sigma(X^\#, X)$. Привлечение понятия квазиплотности позволило решить ряд проблем, связанных с архимедовыми конусами, но это понятие остается новым и малоисследованным, о чем, в частности, свидетельствует список открытых вопросов, приведенный в конце статьи [1]. Поскольку в случае $\dim X = |\mathbb{N}|$ локально выпуклое пространство $(X^\#, \sigma(X^\#, X))$ изоморфно $\mathbb{R}^N$, первоочередной задачей в рассматриваемом направлении является характеристика квазиплотных подмножеств $\mathbb{R}^N$. Статья посвящена решению этой задачи.

В параграфах 1 и 2, имеющих вспомогательный характер, приведены предварительные сведения и изучены автоморфизмы пространств последовательностей. В центральном параграфе 3 введено и исследовано понятие проективного параллелотопа и доказаны два новых критерия квазиплотности в $\mathbb{R}^N$. В параграфах 4 и 5 даны ответы на четыре открытых вопроса, сформулированных в [1], а также на вопросы о представительности параллелотопов в их связи с квазиплотностью и квазивнутренностью.

§ 1. Предварительные сведения

Начнем с того, что уточним обозначения и термины общего характера, а также воспроизведем некоторые используемые в дальнейшем определения

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

и факты из [1], чтобы текст статьи был пригодным для независимого чтения. Более полный набор соответствующих сведений, включающий доказательства и примеры, имеется в работе [1] и цитируемой там литературе.

1.1. Символ « $\subset$ » обозначает нестрогое включение множеств. Знак присваивания « $:=$ » используется в значении «полагается равным» или «равно по определению».

Символ $\mathbb{N}$ обозначает множество натуральных чисел $\{1, 2, \dots\}$. Множества рациональных и вещественных чисел обозначаются символами $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. Символ $\mathbb{R}^+$ служит для обозначения совокупности $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq 0\}$ положительных вещественных чисел. Множество $\mathbb{R}$ наделяется стандартными операциями и топологией, относительно которых оно является полем и локально выпуклым пространством. Символом $\mathbb{R}_D$ условимся обозначать множество вещественных чисел, снабженное дискретной топологией. Замкнутые и открытые числовые промежутки обозначаются символами $[\alpha, \beta]$ и $] \alpha, \beta [$.

Символы $\text{lin } S$, $\text{co } S$, $\text{cl } S$ и $\text{int } S$ служат для обозначения линейной оболочки, выпуклой оболочки, замыкания и внутренности множества S в рассматриваемом векторном или топологическом пространстве.

1.2. В дальнейшем под *векторным пространством* понимается векторное пространство над $\mathbb{R}$. Термин *подпространство* всюду означает векторное подпространство. Подмножество K векторного пространства называется *конусом*, если $K + K \subset K$, $\mathbb{R}^+ K \subset K$ и $K \cap -K = \{0\}$. Конус K в векторном пространстве X называется *архимедовым*, если архимедово упорядоченное векторное пространство $(X, \leq_K)$, где $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$.

1.3. Если X и Y — векторные пространства, символом $L(X, Y)$ обозначается векторное пространство линейных операторов из X в Y . Символ $X^\#$ используется для обозначения алгебраически сопряженного к X векторного пространства $L(X, \mathbb{R})$. Если X и Y — топологические векторные пространства, символом $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначается векторное пространство непрерывных линейных операторов из X в Y , а символом X' — топологически сопряженное к X пространство $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$. Записи $L(X)$ и $\mathcal{L}(X)$ служат сокращениями для $L(X, X)$ и $\mathcal{L}(X, X)$. Символом $\text{Aut}(X)$ условимся обозначать совокупность всех автоморфизмов топологического векторного пространства X , т. е. множество таких биекций $T: X \rightarrow X$, что $T, T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

1.4. Символом $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ обозначается подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, состоящее из финитных последовательностей, т. е. функций $s: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ с конечными носителями $\text{supp } s := \{n \in \mathbb{N} : s(n) \neq 0\}$. Кортежи $x = (x(1), \dots, x(n)) \in \mathbb{R}^n$, где $n \in \mathbb{N}$, традиционно считаются функциями $x: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$. В дальнейшем используются обозначения

$$e_n := \chi_{\{n\}} = (0, \dots, 0, \underset{(n)}{1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};$$

$$\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}} := \text{lin}\{e_1, \dots, e_n\} = \{s \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} : \text{supp } s \subset \{1, \dots, n\}\}.$$

Линейный оператор $\pi_n: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$\pi_n s := s|_{\{1, \dots, n\}} = (s(1), \dots, s(n)). \quad (1)$$

Условимся использовать обозначение (1) не только для последовательностей $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, но и для кортежей $s \in \mathbb{R}^m$, где $m \geq n$. Кроме того, для удобства положим $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ и $\pi_0 s := 0 \in \mathbb{R}^0$.

1.5. Говорят, что векторные пространства X и Y образуют *двойственную пару* относительно двойственности $\langle \cdot | \cdot \rangle$, если $\langle \cdot | \cdot \rangle: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ — такой билинейный функционал, что $\ker \langle \cdot | = \{0\}$ и $\ker |\cdot \rangle = \{0\}$, где $\langle x | = \langle x | \cdot \rangle \in Y^\#$ ($x \in X$) и $|y \rangle = \langle \cdot | y \rangle \in X^\#$ ($y \in Y$). Такие пространства X и Y по умолчанию наделяются соответствующими слабыми топологиями $\sigma(X, Y)$ и $\sigma(Y, X)$ и тем самым становятся хаусдорфовыми локально выпуклыми пространствами, которые условимся обозначать символами $X|Y$ и $Y|X$. При этом отображения $\langle \cdot |: X \rightarrow Y'$ и $|\cdot \rangle: Y \rightarrow X'$ (или, точнее, $\langle \cdot |: X|Y \rightarrow (Y|X)'$ и $|\cdot \rangle: Y|X \rightarrow (X|Y)'$) являются линейными и топологическими изоморфизмами.

1.6. Пространство $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) рассматривается в двойственной паре с $\mathbb{R}^n$, где $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x(i)y(i)$, а векторные пространства $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ по умолчанию считаются парой относительно двойственности $\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)y(n)$ и наделяются соответствующими слабыми топологиями: $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$. Эта же двойственность подразумевается при рассмотрении локально выпуклых пространств вида $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | Y$, где Y — подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющее следующим равносильным условиям (см. [1, 3.5, 3.6]):

- (а) $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ и Y образуют двойственную пару относительно $\langle x | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} x(n)y(n)$;
- (б) слабая топология $\sigma(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}, Y)$ хаусдорфова;
- (в) Y плотно в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} | \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$;
- (г) Y плотно в $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$;
- (д) $\pi_n Y = \mathbb{R}^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (е) $\pi_n e_n \in \pi_n Y$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

1.7. Множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, называется *проективным* (см. [1, 7.1]), если оно замкнуто в $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$ или, что то же самое, содержит каждую последовательность $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющую включениям $\pi_n s \in \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Примерами проективных множеств служат произвольные декартовы произведения $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, где $\Lambda_n \subset \mathbb{R}$. Кроме того, любое замкнутое подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ замкнуто также в $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$ и поэтому проективно.

Последовательность множеств $S_n \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ($n \in \mathbb{N}$) называется *проективной* (см. [1, 7.1]), если она обладает следующими равносильными свойствами:

- (а) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $S_n = \pi_n S$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (б) $S_n = \pi_n S_m$ при $n \leq m$;
- (в) $S_n = \pi_n S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \pi_n^{-1}(S_n) = \{s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \pi_n s \in S_n \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}$$

называется *проективным пределом* последовательности $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и обозначается символом $\varprojlim S_n$ (см. [1, 7.3]). Проективный предел $\varprojlim S_n$ представляет собой наибольшее среди множеств S , удовлетворяющих условию пункта (а), является единственным проективным среди таких множеств и совпадает с замыканием любого из них в топологическом пространстве $\mathbb{R}_D^{\mathbb{N}}$.

1.8. Квазивнутренность $q_i S$ подмножества S хаусдорфова локально выпуклого пространства X определяется следующим образом:

$$q_i S := \{x \in S : \text{cl } \mathbb{R}^+(S - x) = X\}.$$

Элементы $q_i S$ называются *квазивнутренними точками* множества S . В случае $q_i S = S$ говорят, что множество S *квазиоткрыто*.

Теорема [1, 4.13]. Для любого выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^N$ справедливо равенство

$$q_i C = \{c \in C : \pi_n c \in \text{int } \pi_n C \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

В частности, выпуклое множество C квазиоткрыто в $\mathbb{R}^N$ тогда и только тогда, когда каждая проекция $\pi_n C$ открыта в $\mathbb{R}^n$.

1.9. Подмножество $\mathbb{R}^N$, имеющее вид $\prod_{n \in \mathbb{N}} \Lambda_n$, где Λ_n — открытые подмножества $\mathbb{R}$, называется *открытой коробкой*. Топология на $\mathbb{R}^N$, для которой открытые коробки служат базовыми открытыми множествами, называется *коробочной топологией*. Как легко видеть, для любого элемента $z \in \mathbb{R}^N$ выпуклые открытые коробки

$$\prod_{n \in \mathbb{N}} [z(n) - r(n), z(n) + r(n)], \quad r(n) > 0, \quad (2)$$

образуют базу окрестностей точки z в коробочной топологии.

Предложение [1, 7.8]. Всякая выпуклая открытая коробка в $\mathbb{R}^N$ служит примером проективного ограниченного квазиоткрытого множества. Более того, все подмножества $\mathbb{R}^N$, открытые в коробочной топологии, квазиоткрыты.

1.10. Подмножество S локально выпуклого пространства X называют *квазиплотным* в X , если $S \cap B \neq \emptyset$ для любого замкнутого ограниченного выпуклого множества $B \subset X$, имеющего непустую квазивнутренность (см. [1, 6.2]).

Предложение [1, 6.4]. В пространстве $\mathbb{R}^N$ все квазиплотные множества являются плотными.

1.11. Предложение [1, 8.8]. Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^N$ равносильны:

- (а) S квазиплотно в $\mathbb{R}^N$;
- (б) если C — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ и $q_i C \neq \emptyset$, то $S \cap C \neq \emptyset$;
- (в) если B — непустое проективное ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$, то $S \cap B \neq \emptyset$;
- (д) если $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — проективная последовательность непустых ограниченных открытых выпуклых множеств, то $S \cap \varprojlim B_n \neq \emptyset$;
- (е) если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ и $q_i C \neq \emptyset$, то $S \cap C \neq \emptyset$.

1.12. Теорема [1, 8.5]. Пусть Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^N$.

(а) В пространстве $\mathbb{R}_{nn}^N|Y$ все архимедовы конусы замкнуты тогда и только тогда, когда Y квазиплотно в $\mathbb{R}^N$.

(б) Если C — компактное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$, $q_i C \neq \emptyset$ и $Y \cap C = \emptyset$ (см. предложение 1.11 (б)), то множество $\{x \in \mathbb{R}_{nn}^N : \langle x | c \rangle \geq 0 \text{ при } c \in C\}$ служит примером архимедова, но не замкнутого (более того, плотного) конуса в $\mathbb{R}_{nn}^N|Y$.

$$\begin{pmatrix} \mu(1,1) & \mu(1,2) & \mu(1,3) & \cdots & \mu(1,n) & \cdots \\ 0 & \mu(2,2) & \mu(2,3) & \cdots & \mu(2,n) & \cdots \\ 0 & 0 & \mu(3,3) & \cdots & \mu(3,n) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mu(n,n) & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda(1,1) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \lambda(2,1) & \lambda(2,2) & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \lambda(3,1) & \lambda(3,2) & \lambda(3,3) & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda(m,1) & \lambda(m,2) & \lambda(m,3) & \cdots & \lambda(m,m) & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

2.3. Матрицам μ с финитными столбцами и матрицам λ с финитными строками соответствуют отображения $\mu^\wedge: \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ и $\lambda^\vee: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, определяемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} (\mu^\wedge x)(m) &:= \langle x | \mu(m, \cdot) \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(m, n) x(n), \quad x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ (\lambda^\vee y)(m) &:= \langle \lambda(m, \cdot) | y \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda(m, n) y(n), \quad y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(Поясним, почему $\mu^\wedge x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ при $x \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$. Действительно, благодаря финитности столбцов $\mu(\cdot, n)$ имеется такая последовательность натуральных чисел m_n , что $\mu(m, n) = 0$ для всех $m \geq m_n$. Пусть $x(n) = 0$ при $n > k$. Тогда для всех чисел $m \geq \max\{m_1, \dots, m_k\}$ имеем $(\mu^\wedge x)(m) = \sum_{n=1}^k \mu(m, n) x(n) = 0$.)

Всякому оператору T , принадлежащему $L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ или $L(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, сопоставим матрицу $[T] \in \mathbb{R}^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$, полагая

$$[T](m, n) := (Te_n)(m), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

2.4. Предложение (ср. [2, 11-1-6, 11-1-10, 11-1-11]).

- (а) Если μ — матрица с финитными столбцами, то $\mu^\wedge \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ и $[\mu^\wedge] = \mu$.
- (б) Если λ — матрица с финитными строками, то $\lambda^\vee \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $[\lambda^\vee] = \lambda$.
- (с) Если $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$, то $[\nabla]$ — матрица с финитными столбцами, $[\nabla]^\wedge = \nabla$, $\nabla' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $[\nabla'] = [\nabla]^\top$.
- (д) Если $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, то $[\Delta]$ — матрица с финитными строками, $[\Delta]^\vee = \Delta$, $\Delta' \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ и $[\Delta'] = [\Delta]^\top$.

◁ В пояснении нуждается лишь пункт (д). Пусть $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Тогда для всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$[\Delta](m, n) = (\Delta e_n)(m) = \langle e_m | \Delta e_n \rangle = \langle \Delta' e_m | e_n \rangle = (\Delta' e_m)(n),$$

а значит, $[\Delta](m, \cdot) = \Delta' e_m \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$, т.е. $[\Delta]$ — матрица с финитными строками. Далее, для всех $m, n \in \mathbb{N}$

$$([\Delta]^\vee e_n)(m) = \langle [\Delta](m, \cdot) | e_n \rangle = ([\Delta](m, \cdot))(n) = [\Delta](m, n) = (\Delta e_n)(m),$$

откуда с учетом плотности $\text{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и непрерывности операторов Δ и $[\Delta]^\vee$ (см. п. (б)) вытекает равенство $[\Delta]^\vee = \Delta$. Равенство $[\Delta'] = [\Delta]^\top$ очевидно. ▷

2.5. Предложение. Следующие свойства оператора $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ равносильны:

- (а) $[\nabla]$ — верхнетреугольная матрица;
- (б) $\nabla(\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}) \subset \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (с) $\nabla e_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (а)–(с), назовем *индуктивным*.

2.6. Предложение. Следующие свойства оператора $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ равносильны:

- (а) $[\Delta]$ — нижнетреугольная матрица;
- (б) если $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\pi_n y = 0$, то $\pi_n \Delta y = 0$;
- (с) если $y, z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\pi_n y = \pi_n z$, то $\pi_n \Delta y = \pi_n \Delta z$;
- (д) $\pi_n \Delta e_{n+1} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оператор $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (а)–(д), назовем *проективным*.

2.7. Предложение. (а) Оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ является индуктивным тогда и только тогда, когда $\nabla' \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ — проективный оператор.

(б) Оператор $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ является проективным тогда и только тогда, когда $\Delta' \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ — индуктивный оператор.

2.8. Предложение. (а) Для любой последовательности элементов $x_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ существует единственный оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ такой, что $\nabla e_n = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такой оператор ∇ является индуктивным.

(б) Если последовательность элементов $y_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет условию $\pi_n y_{n+1} = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то существует единственный оператор $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ такой, что $\Delta e_n = y_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Такой оператор Δ является проективным.

◁ Утверждение (а) в пояснении не нуждается.

(б) По условию матрица λ , определенная формулой $\lambda(m, n) := y_n(m)$, является нижнетреугольной, а значит, $\Delta := \lambda^{\vee}$ — искомый оператор (см. предложение 2.4(б)). Единственность такого оператора вытекает из его непрерывности и плотности $\text{lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, а проективность обусловлена соотношением 2.6(d). ▷

2.9. Предложение. Пусть $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ — проективный оператор.

(а) Оператор Δ непрерывен как отображение из $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$ в $\mathbb{R}_{\text{D}}^{\mathbb{N}}$.

(б) Если P — проективное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $\Delta^{-1}(P)$ — проективное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(с) Если $\text{im } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $\Delta(Y)$ — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

◁ Утверждение (а) легко доказать с помощью предложения 2.6(с). Утверждения (б) и (с) вытекают из утверждения (а) согласно пп. 1.7 и 1.6(d) соответственно. ▷

2.10. Предложение. Пусть $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ — индуктивный оператор. Следующие свойства ∇ равносильны:

(а) $\nabla \in \text{Aut}(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$;

(б) ∇e_n ($n \in \mathbb{N}$) — линейно независимые элементы $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$;

(с) $[\nabla](n, n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

◁ Импликация (а) $\Rightarrow$ (б) тривиальна.

(б) $\Rightarrow$ (с). Поскольку $\nabla e_1 \in \mathbb{R}_1^{\mathbb{N}}$ (см. предложение 2.5(с)) и $\nabla e_1 \neq 0$, имеем $[\nabla](1, 1) = (\nabla e_1)(1) \neq 0$. Пусть теперь $n > 1$. Согласно п. (б) элементы $\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}$ образуют базис $\mathbb{R}_{n-1}^{\mathbb{N}}$. Если бы число $[\nabla](n, n) = (\nabla e_n)(n)$ равнялось нулю, то с учетом включения $\nabla e_n \in \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ были бы справедливы соотношения $\nabla e_n \in \mathbb{R}_{n-1}^{\mathbb{N}} = \text{lin}\{\nabla e_1, \dots, \nabla e_{n-1}\}$ вопреки линейной независимости $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$.

(с) $\Rightarrow$ (а). Поскольку верхнетреугольная матрица $n \times n$ с ненулевыми диагональными элементами невырождена, элементы $\nabla e_1, \dots, \nabla e_n$ образуют базис $\mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, а значит, $\{\nabla e_n : n \in \mathbb{N}\}$ — базис $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$. ▷

Индуктивный оператор $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (а)–(с), будем называть *индуктивным автоморфизмом*. Индуктивный автоморфизм ∇ назовем *позитивным*, если $[\nabla](n, n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество всех позитивных индуктивных автоморфизмов обозначим символом $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$.

2.11. Предложение. Пусть $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ — проективный оператор. Следующие свойства Δ равносильны:

- (a) $\Delta \in \text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$;
- (b) Δe_n ($n \in \mathbb{N}$) — линейно независимые элементы $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $\text{clim } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$;
- (c) $[\Delta](n, n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

◁ Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) тривиальна.

(b) $\Rightarrow$ (c). Покажем, что $\Delta' e_n$ ($n \in \mathbb{N}$) — линейно независимые элементы $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$.

Действительно, если $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ и $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta' e_i = 0$, то для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid \Delta y \right\rangle = \left\langle \Delta' \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right) \mid y \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i \Delta' e_i \mid y \right\rangle = 0,$$

откуда благодаря плотности $\text{im } \Delta$ в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вытекает равенство $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ и поэтому $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Согласно предложениям 2.4(d), 2.7(b) и 2.10 отсюда следует, что $[\Delta](n, n) = [\Delta']^T(n, n) = [\Delta'](n, n) \neq 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Импликация (c) $\Rightarrow$ (a) так же легко выводится из предложений 2.4(d), 2.7(b) и 2.10. ▷

Заметим, что в пункте (b) требование $\text{clim } \Delta = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является существенным. Соответствующим контрпримером служит оператор сдвига, определяемый формулой $\Delta(y) = (0, y(1), y(2), y(3), \dots)$.

Проективный оператор $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$, обладающий равносильными свойствами (a)–(c), будем называть *проективным автоморфизмом*. Проективный автоморфизм Δ назовем *позитивным*, если $[\Delta](n, n) > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество всех позитивных проективных автоморфизмов обозначим символом $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

2.12. Следующее утверждение с очевидностью вытекает из приведенных выше сведений.

Предложение. (a) Для любых $\nabla \in L(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ и $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

$$\begin{aligned} \nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}) &\Leftrightarrow \nabla' \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}); \\ \Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) &\Leftrightarrow \Delta' \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}). \end{aligned}$$

(b) Множества $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ и $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ являются подгруппами в группах автоморфизмов $\text{Aut}(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$ и $\text{Aut}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ относительно композиции операторов.

§ 3. Проективные параллелотопы

В этом параграфе вводится понятие проективного параллелотопа, устанавливается связь параллелотопов с индуктивными и проективными автоморфизмами (теорема 3.4) и предлагаются два новых критерия квазиплотности в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ — в терминах параллелотопов и автоморфизмов (теорема 3.8).

3.1. Для $\varkappa = (\varkappa_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и $r \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ положим

$$\Pi_{\varkappa}^r := \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(1)| < r(1), \right. \\ \left. \left| y(n+1) - \sum_{i=1}^n \varkappa_n(i) y(i) \right| < r(n+1) \text{ для всех } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Для удобства в дальнейшем будем полагать $\varkappa_0 := 0 \in \mathbb{R}^0$. (Напомним о введенных ранее обозначениях $\mathbb{R}^0 := \{0\}$ и $\pi_0 y := \pi_0 x := 0 \in \mathbb{R}^0$ для $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $x \in \mathbb{R}^n$.) С учетом этого соглашения имеем

$$\Pi_{\varkappa}^r = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}.$$

Множество $z + \Pi_{\varkappa}^r$, где $z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, условимся называть *параллелотопом* (точнее, *проективным параллелотопом*) с *центром* z , *наклоном* $\varkappa$ и *радиусом* r .

Символом Π_0^r обозначим параллелотоп с нулевым центром $0 \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, нулевым наклоном $(0, 0, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и радиусом $r \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$, а символом Π_0^1 — параллелотоп $\Pi_0^{(1,1,\dots)}$:

$$\begin{aligned} \Pi_0^r &= \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < r(n) \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}, \\ \Pi_0^1 &= \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y(n)| < 1 \text{ для всех } n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

3.2. Из следующей леммы видно, что каждая проекция $\pi_n P$ параллелотопа $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является открытым параллелотопом в $\mathbb{R}^n$, т. е. открытым n -мерным параллелепипедом.

Лемма. Пусть $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, $r \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\begin{aligned} \pi_n \Pi_{\varkappa}^r &= \{x \in \mathbb{R}^n : |x(m) - \langle \varkappa_{m-1} | \pi_{m-1} x \rangle| < r(m) \text{ для } m = 1, \dots, n\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \pi_{n-1} x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r \text{ и } |x(n) - \langle \varkappa_{n-1} | \pi_{n-1} x \rangle| < r(n)\}. \end{aligned}$$

◁ Включение « $\subset$ » очевидно. Предположим теперь, что $x \in \mathbb{R}^n$ и

$$|x(m) - \langle \varkappa_{m-1} | \pi_{m-1} x \rangle| < r(m), \quad m = 1, \dots, n.$$

Определим $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, полагая $\pi_n y := x$ и $y(m) := \sum_{i=1}^{m-1} \varkappa_{m-1}(i) y(i)$ рекурсивно для $m > n$. Тогда $y \in \Pi_{\varkappa}^r$, а значит, $x \in \pi_n \Pi_{\varkappa}^r$. ▷

3.3. Предложение. Центр, наклон и радиус однозначно определяются параллелотопом: если $z + \Pi_{\varkappa}^r = z' + \Pi_{\varkappa'}^{r'}$, то $z = z'$, $\varkappa = \varkappa'$ и $r = r'$.

◁ Пусть $z + \Pi_{\varkappa}^r = z' + \Pi_{\varkappa'}^{r'}$. Сразу заметим, что $z = z'$, так как непустое ограниченное множество не может иметь два центра симметрии. Поэтому можно считать, что $z = z' = 0$.

Рассмотрим $n \in \mathbb{N}$ и покажем, что $r(n) = r'(n)$ и $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$. Случай $n = 1$ тривиален. Пусть $n > 1$. Для каждого $x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r = \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa'}^{r'}$ благодаря лемме 3.2 имеем при всех $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |\lambda - \langle \varkappa_{n-1} | x \rangle| < r(n) &\Leftrightarrow (x, \lambda) \in \pi_n \Pi_{\varkappa}^r \\ &\Leftrightarrow (x, \lambda) \in \pi_n \Pi_{\varkappa'}^{r'} \Leftrightarrow |\lambda - \langle \varkappa'_{n-1} | x \rangle| < r'(n), \end{aligned}$$

а значит, $r(n) = r'(n)$ и $\langle \varkappa_{n-1} | x \rangle = \langle \varkappa'_{n-1} | x \rangle$. Последнее равенство с учетом произвольности $x \in \pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$ означает, что функционал $\langle \varkappa_{n-1} - \varkappa'_{n-1} | \cdot \rangle$ постоянен на $\pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$. Следовательно, $\varkappa_{n-1} = \varkappa'_{n-1}$, так как согласно лемме 3.2 множество $\pi_{n-1} \Pi_{\varkappa}^r$ является окрестностью нуля в $\mathbb{R}^{n-1}$. ▷

3.4. Теорема. Следующие свойства множества $P \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильны:

- (а) P является параллелотопом с центром в нуле, т. е. $P = \Pi_{\mathcal{K}}^r$ для некоторых $\mathcal{K} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$ и $r \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$;
 (б) $P = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1 \text{ при всех } n \in \mathbb{N}\}$ для некоторого автоморфизма $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$;
 (с) $P = \Delta(\Pi_0^1)$ для некоторого автоморфизма $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$.

При этом $\mathcal{K}$, r , ∇ и Δ однозначно определяются параллелотопом P и удовлетворяют следующим соотношениям:

$$r(n) = \frac{1}{(\nabla e_n)(n)}; \quad \mathcal{K}_{n-1} = -r(n) \pi_{n-1} \nabla e_n; \quad (3)$$

$$\nabla e_n = \frac{1}{r(n)}(-\mathcal{K}_{n-1}(1), \dots, -\mathcal{K}_{n-1}(n-1), 1, 0, 0, \dots); \quad (4)$$

$$\Delta = (\nabla')^{-1} = (\nabla^{-1})'; \quad \nabla = (\Delta')^{-1} = (\Delta^{-1})'.$$

◁ (а)⇒(б). Пусть $\mathcal{K}$ и r удовлетворяют условию (а). Согласно предложению 2.8(а) имеется индуктивный оператор ∇ , удовлетворяющий равенству (4) для всех $n \in \mathbb{N}$, причем $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$, поскольку $[\nabla](n, n) = (\nabla e_n)(n) = \frac{1}{r(n)} > 0$. Остается заметить, что для $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |y(n) - \langle \mathcal{K}_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n) &\Leftrightarrow \left| \frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)} \mathcal{K}_{n-1} \middle| \pi_{n-1} y \right\rangle \right| < 1 \\ &\Leftrightarrow |\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1. \end{aligned}$$

(б)⇒(с). Пусть P и ∇ удовлетворяют условию (б). Согласно предложению 2.12 операторы ∇' и $\Delta := (\nabla')^{-1}$ принадлежат группе $\Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Кроме того, для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$ неравенство $|\langle \nabla e_n | y \rangle| < 1$ равносильно $|(\nabla' y)(n)| < 1$, а значит,

$$y \in P \Leftrightarrow \nabla' y \in \Pi_0^1 \Leftrightarrow y \in (\nabla')^{-1}(\Pi_0^1) = \Delta(\Pi_0^1).$$

(с)⇒(а). Пусть $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ и $P = \Delta(\Pi_0^1)$. Согласно предложению 2.12 оператор $\nabla := (\Delta^{-1})'$ принадлежит $\nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$. Определим r и $\mathcal{K}$ в соответствии с равенствами (3) и покажем, что $P = \Pi_{\mathcal{K}}^r$. Действительно, для всех $y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} (\Delta^{-1} y)(n) &= \langle e_n | \Delta^{-1} y \rangle = \langle (\Delta^{-1})' e_n | y \rangle = \langle \nabla e_n | y \rangle \\ &= (\nabla e_n)(n) y(n) + \langle \pi_{n-1} \nabla e_n | \pi_{n-1} y \rangle = \frac{1}{r(n)} y(n) - \left\langle \frac{1}{r(n)} \mathcal{K}_{n-1} \middle| \pi_{n-1} y \right\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, неравенства $|(\Delta^{-1} y)(n)| < 1$ и $|y(n) - \langle \mathcal{K}_{n-1} | \pi_{n-1} y \rangle| < r(n)$ равносильны и поэтому

$$y \in P \Leftrightarrow y \in \Delta(\Pi_0^1) \Leftrightarrow \Delta^{-1} y \in \Pi_0^1 \Leftrightarrow y \in \Pi_{\mathcal{K}}^r.$$

Поясним единственность параметров $\mathcal{K}$, r , ∇ и Δ , фигурирующих в формулировке теоремы. Единственность $\mathcal{K}$ и r обоснована в лемме 3.3. Если ∇ удовлетворяет условию (б), то, как видно из доказательства импликации (с)⇒(а), имеет место равенство $P = \Pi_{\mathcal{K}}^r$, где r и $\mathcal{K}$ определяются соотношениями (3). Тогда из предложения 3.3 следует, что параллелотопом P однозначно определяются значения ∇e_n ($n \in \mathbb{N}$), а значит, и оператор ∇ . Если же Δ удовлетворяет условию (с), то, как легко видеть, $\nabla := (\Delta^{-1})'$ удовлетворяет условию (б) и, следовательно, параллелотоп P однозначно определяет операторы ∇ и $\Delta = (\nabla')^{-1}$. ▷

3.5. Следующее утверждение вытекает из предложения 2.12(b) и теоремы 3.4.

Следствие. Если P — параллелотоп и $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$, то $\Delta(P)$ и $\Delta^{-1}(P)$ — параллелотопы.

3.6. Следствие. Всякий параллелотоп является непустым проективным ограниченным квазиоткрытым выпуклым подмножеством $\mathbb{R}^N$.

◁ Параллелотоп Π_0^1 , очевидно, обладает перечисленными свойствами, а значит, с учетом предложений 2.9(b) и 2.12(b) ими обладает и всякое множество вида $z + \Delta(\Pi_0^1)$, где $z \in \mathbb{R}^N$ и $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$. Остается привлечь теорему 3.4. ▷

3.7. Лемма. Пусть C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$. Тогда $\text{qi } C \neq \emptyset$ в том и только в том случае, если C содержит некоторый параллелотоп.

◁ Достаточность вытекает из следствия 3.6. Покажем необходимость. Можно считать, что $0 \in \text{qi } C$. Согласно теореме 1.8 для каждого $n \in \mathbb{N}$ проекция $\pi_n C$ является окрестностью нуля в $\mathbb{R}^n$, а значит, существуют последовательности элементов $c_n \in C$ и чисел $\varepsilon_n > 0$ такие, что

$$\pi_n c_n = \varepsilon_n \pi_n e_n \quad \text{для всех } n \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\pi_n c_{n+1} = \pi_n \pi_{n+1} c_{n+1} = \pi_n (\varepsilon_{n+1} \pi_{n+1} e_{n+1}) = 0$, благодаря предложению 2.8(b) имеется такой проективный оператор $\Delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, что $\Delta e_n = \frac{1}{2^{n+1}} c_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} [\Delta](n, n) &= (\Delta e_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} c_n(n) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} (\pi_n c_n)(n) = \frac{1}{2^{n+1}} (\varepsilon_n \pi_n e_n)(n) > 0, \end{aligned}$$

а значит, $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$. Из предложения 2.9(b) следует, что $D := \Delta^{-1}(C)$ — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$, причем $0 \in D$ и $2^{n+1} e_n \in D$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $z := (1, 1, \dots) \in \mathbb{R}^N$ и покажем, что $z + \Pi_0^1 \subset D$.

Пусть $y \in \Pi_0^1$. Поскольку множество D проективно, достаточно фиксировать $n \in \mathbb{N}$ и установить включение $x := \pi_n(z + y) \in \pi_n D$. Для всех $i \in \{1, \dots, n\}$ имеем $x(i) = 1 + y(i)$, где $|y(i)| < 1$, и поэтому $0 < x(i) < 2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= x(1)\pi_n e_1 + x(2)\pi_n e_2 + \dots + x(n)\pi_n e_n \\ &= \frac{x(1)}{4}\pi_n(4e_1) + \frac{x(2)}{8}\pi_n(8e_2) + \dots + \frac{x(n)}{2^{n+1}}\pi_n(2^{n+1}e_n) + \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{x(i)}{2^{i+1}}\right)0, \end{aligned}$$

а значит, x принадлежит $\pi_n D$ как выпуклая комбинация элементов

$$\pi_n(4e_1), \pi_n(8e_2), \dots, \pi_n(2^{n+1}e_n), 0 \in \pi_n D.$$

Из включения $z + \Pi_0^1 \subset D$ следует, что множество $C = \Delta(D)$ содержит параллелотоп $\Delta z + \Delta(\Pi_0^1)$ (см. теорему 3.4). ▷

В связи с леммой 3.7 возникает естественный вопрос о том, образуют ли параллелотопы «базу квазивнутренности» в следующем смысле: если C — проективное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^N$ и $x \in \text{qi } C$, то содержится ли в C какой-либо параллелотоп с центром x или хотя бы параллелотоп, включающий точку x ? Ответ на этот вопрос приведен ниже в пп. 5.5 и 5.6.

3.8. Теорема. Следующие свойства множества $S \subset \mathbb{R}^N$ равносильны:

- (а) S квазиплотно в $\mathbb{R}^N$;
- (б) S имеет непустое пересечение с любым параллелотопом;
- (с) для любого автоморфизма $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$ множество $\Delta(S)$ коробочно плотно в $\mathbb{R}^N$.

◁ Эквивалентность (а) $\Leftrightarrow$ (б) вытекает из предложения 1.11, следствия 3.6 и леммы 3.7.

(б) $\Rightarrow$ (с). Пусть $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$. Поскольку всякая базовая открытая коробка

$$B = \prod_{n \in \mathbb{N}}]z(n) - r(n), z(n) + r(n)[$$

(см. (2)) представляет собой параллелотоп $z + \Pi_0^r$, по следствию 3.5 множество $\Delta^{-1}(B)$ — тоже параллелотоп. Тогда из условия (б) следует $S \cap \Delta^{-1}(B) \neq \emptyset$, а значит, $\Delta(S) \cap B \neq \emptyset$.

(с) $\Rightarrow$ (б). Согласно теореме 3.4 всякий параллелотоп имеет вид $z + \Delta(\Pi_0^1)$ для некоторых $z \in \mathbb{R}^N$ и $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$. Поскольку $\Delta^{-1} \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$ (см. предложение 2.12(б)) и $\Delta^{-1}z + \Pi_0^1$ — коробка, из условия (с) следует, что

$$\Delta^{-1}(S) \cap (\Delta^{-1}z + \Pi_0^1) \neq \emptyset,$$

а значит, $S \cap (z + \Delta(\Pi_0^1)) \neq \emptyset$. ▷

3.9. Следствие. Если S — квазиплотное подмножество $\mathbb{R}^N$ и $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$, то $\Delta(S)$ квазиплотно в $\mathbb{R}^N$.

§ 4. Примеры

В этом параграфе приведены контрпримеры к трем сформулированным в [1] гипотезам — о полярках конусов [1, 9.6], о связи квазиплотности с проективностью [1, 9.7] и о пространствах, в которых все линейно независимые множества замкнуты [1, 9.11].

4.1. Если X, Y — двойственная пара векторных пространств, то для всякого множества $S \subset X$ определены полярки (см. [1, 3.7])

$$S^\oplus := \{y \in Y : \langle s | y \rangle \geq 0 \text{ для всех } s \in S\};$$

$$S^\boxplus := \{y \in Y : \langle s | y \rangle > 0 \text{ для всех } s \in S \setminus \{0\}\}.$$

Последовательность подмножеств $S_n \subset \mathbb{R}_n^N$ ($n \in \mathbb{N}$) называется *индуктивной* (см. [1, 8.1]), если она обладает любым из следующих равносильных свойств:

- (а) существует такое множество $S \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^N$, что $S_n = S \cap \mathbb{R}_n^N$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (б) $S_n = S_m \cap \mathbb{R}_n^N$ при $n \leq m$;
- (с) $S_n = S_{n+1} \cap \mathbb{R}_n^N$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

При этом множество S , удовлетворяющее условию (а), единственно и равно объединению $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$.

Лемма [1, 8.3]. Если $K_n \subset \mathbb{R}_n^N$ ($n \in \mathbb{N}$) — индуктивная последовательность замкнутых конусов, то $(\pi_n K_n)^\boxplus$ ($n \in \mathbb{N}$) — проективная последовательность и

$$\varprojlim (\pi_n K_n)^\boxplus = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right)^\boxplus.$$

Следующий пример дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.6] о том, проективна ли в этой ситуации последовательность поляр $(\pi_n K_n)^\oplus$.

Пример. Рассмотрим замкнутый конус $K_3 := \mathbb{R}^+(\{1\} \times D) \subset \mathbb{R}^3$, где $D = \{(y, z) : y^2 + (z - 1)^2 \leq 1\}$ (см. рис. 1).

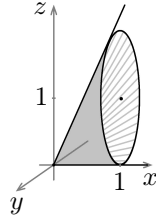


Рис. 1

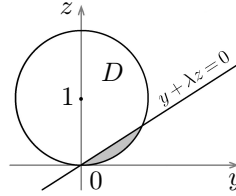


Рис. 2

Положим $\mathbb{R}_2^3 := \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$,

$$K_2 := \pi_2(K_3 \cap \mathbb{R}_2^3) = \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

и покажем, что $K_2^\oplus \neq \pi_2 K_3^\oplus$. Действительно, $(0, 1) \in K_2^\oplus$, но никакая тройка $(0, 1, \lambda)$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, не принадлежит $K_3^\oplus$, так как для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ полуплоскость $\{(y, z) : y + \lambda z < 0\}$ пересекается с кругом D (см. рис. 2), и для пары (y, z) из этого пересечения выполняется $(1, y, z) \in K_3$ и $\langle (1, y, z) | (0, 1, \lambda) \rangle = y + \lambda z < 0$. Таким образом, для $S := K_3 \times \{(0, 0, \dots)\} \subset \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ последовательность поляр $(\pi_n(S \cap \mathbb{R}_n^{\mathbb{N}}))^\oplus$ не является проективной.

4.2. Согласно предложению 1.11 квазиплотность множества $S \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ равносильна каждому из следующих двух условий:

- (а) S пересекается с любым непустым выпуклым множеством $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое является ограниченным, квазиоткрытым и *проективным*;
- (б) S пересекается с любым выпуклым множеством $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, которое имеет непустую квазивнутренность и является *проективным*.

Приведенный ниже пример дает ответ на вопрос [1, 9.7] и показывает, что требование проективности множеств B и C в условиях (а) и (б) является существенным даже в случае, когда S — плотное векторное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Пример. Существуют квазиплотное (и поэтому плотное) подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и непустое ограниченное квазиоткрытое выпуклое подмножество $B \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ такие, что $Y \cap B = \emptyset$.

◁ Пусть T — базис трансцендентности $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, т. е. максимальное алгебраически независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $\mathbb{R}$ или, что то же самое, алгебраически независимое над $\mathbb{Q}$ подмножество $T \subset \mathbb{R}$, для которого $\text{alg } \mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$. (Здесь $\mathbb{Q}(T)$ — подполе $\mathbb{R}$, порожденное множеством T , $\text{alg } F$ — подполе $\mathbb{R}$, состоящее из всех чисел, являющихся алгебраическими над подполем $F \subset \mathbb{R}$.) Рассмотрим произвольную последовательность $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ попарно различных элементов множества T и положим $T_0 := T \setminus \{t_n : n \in \mathbb{N}\}$, $T_n := T_0 \cup \{t_1, \dots, t_n\}$ и $F_n := \text{alg } \mathbb{Q}(T_n)$. Тогда $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность подполей $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- (i) $F_n \subset F_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
- (ii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = \mathbb{R}$;
- (iii) для каждого $n \in \mathbb{N}$ поле $\mathbb{R}$ бесконечномерно как векторное пространство над F_n .

Действительно, благодаря равенству $\text{alg } \mathbb{Q}(T) = \mathbb{R}$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ имеется ненулевой многочлен $p(x)$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}(T)$, для которого $p(\lambda) = 0$, откуда с учетом очевидных соотношений $\mathbb{Q}(T_n) \subset \mathbb{Q}(T_{n+1})$ и $\mathbb{Q}(T) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}(T_n)$

следует, что все коэффициенты многочлена $p(x)$ принадлежат $\mathbb{Q}(T_n)$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, и поэтому $\lambda \in \text{alg } \mathbb{Q}(T_n) = F_n$. Кроме того, как легко видеть, $F_n \neq \mathbb{R}$ и для $\lambda \in \mathbb{R} \setminus F_n$ числа $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \dots$ линейно независимы над F_n .

Согласно условию (iii) имеется такая последовательность элементов $x_n \in \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ числа $x_n(1), \dots, x_n(n)$ линейно независимы над F_n , причем $x_n(n) > 0$. Рассмотрим автоморфизм $\nabla \in \nabla_+(\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}})$, принимающий значения $\nabla e_n = x_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. предложения 2.8(a) и 2.10), и положим

$$Y := \nabla'(\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}), \quad B := \{b \in \Pi_0^1 \cap \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} : b(1) > 0\}.$$

Ясно, что множество B является непустым, выпуклым, ограниченным и квазиоткрытым (см. теорему 1.8). С помощью предложения 1.11(d) легко показать, что $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ — квазиплотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, $\nabla' \in \Delta^+(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ (см. предложение 2.12(a)), а значит, Y квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (см. следствие 3.9). Плотность пространства Y в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ вытекает из его квазиплотности согласно предложению 1.10 (см. также предложение 2.9(c)). Для завершения доказательства достаточно установить равенство $Y \cap \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}} = \{0\}$.

Покажем, что $\nabla'z \notin \mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}$ для любого ненулевого $z \in \text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Пусть

$$z = \sum_{j=1}^k \lambda_j q_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \quad q_j \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}},$$

и пусть $z(l) \neq 0$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Благодаря условиям (i) и (ii) имеется такое число $m \geq l$, что $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in F_m$. Рассмотрим произвольное $n \geq m$ и покажем, что $(\nabla'z)(n) \neq 0$. Действительно, для всех $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$z(i) = \sum_{j=1}^k \lambda_j q_j(i) \in F_m \subset F_n.$$

Тогда $\langle x_n | z \rangle = \sum_{i=1}^n x_n(i) z(i)$ — линейная комбинация линейно независимых над F_n чисел $x_n(1), \dots, x_n(n)$ с коэффициентами $z(1), \dots, z(n) \in F_n$, причем эта комбинация нетривиальна, так как $n \geq l$ и $z(l) \neq 0$. Следовательно, $\langle x_n | z \rangle \neq 0$. Осталось заметить, что $\langle x_n | z \rangle = \langle \nabla e_n | z \rangle = \langle e_n | \nabla'z \rangle = (\nabla'z)(n)$. ▸

4.3. В работе [3] приведены примеры собственных плотных векторных подпространств $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, для которых все линейно независимые множества замкнуты в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ (см. [3, 4.8]), и показано, что наличие незамкнутого линейно независимого множества влечет наличие незамкнутого архимедова конуса (см. [3, 4.7]). Вопрос о справедливости обратного утверждения был оставлен открытым и явно сформулирован в [1, 9.11]. Приведенный ниже пример дает отрицательный ответ на этот вопрос.

Для числовой последовательности $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ и числа λ будем писать $\lambda_n \rightarrow \lambda$, если $\lambda_n \rightarrow \lambda$ и существует такой номер $\bar{n} \in \mathbb{N}$, что $\lambda_n \neq \lambda$ при $n \geq \bar{n}$. Множество $\Lambda \subset \mathbb{R}$ условимся называть *разреженным*, если оно обладает следующими равносильными свойствами:

- (а) Λ замкнуто и дискретно;
- (б) все ограниченные подмножества Λ конечны;
- (с) не существуют такая последовательность $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ в Λ и такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\lambda_n \rightarrow \alpha$.

Лемма. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ множество

$$\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k) := \{\alpha_1 2^{n_1} + \dots + \alpha_k 2^{n_k} : n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}\}$$

является разреженным.

◁ Воспользуемся индукцией по k . Разреженность множества $\Lambda(\alpha) = \{\alpha 2^n : n \in \mathbb{N}\}$ для любого числа α не вызывает сомнений. Предположим, что для любых чисел $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$ множество $\Lambda(\beta_1, \dots, \beta_{k-1})$ является разреженным, рассмотрим произвольные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ и допустим вопреки доказываемому, что $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — не разреженное множество. Тогда существуют последовательности $\nu_1, \dots, \nu_k \in \mathbb{N}$ и число α такие, что

$$\lambda(n) := \alpha_1 2^{\nu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n)} \rightarrow \alpha.$$

Текущая цель — обнаружить противоречие.

Заметим, что все последовательности $\nu_1, \dots, \nu_k$ стремятся к бесконечности. Действительно, если, например, $\nu_1 \rightarrow \infty$, то ν_1 имеет постоянную подпоследовательность $\nu_1(n_m) \equiv i$. В этом случае

$$\lambda(n_m) = \alpha_1 2^i + \alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \rightarrow \alpha$$

и тогда

$$\alpha_2 2^{\nu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\nu_k(n_m)} \rightarrow \alpha - \alpha_1 2^i$$

вопреки разреженности множества $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$.

Положим $\mu(n) := \min\{\nu_1(n), \dots, \nu_k(n)\} - 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Тогда

$$\lambda(n) = 2^{\mu(n)} (\alpha_1 2^{\mu_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n)}),$$

где $\mu_i(n) = \nu_i(n) - \mu(n)$, причем $\mu(n) \rightarrow \infty$ и для каждого $n \in \mathbb{N}$ хотя бы одно из натуральных чисел $\mu_1(n), \dots, \mu_k(n)$ равно 1. Для определенности будем считать, что последовательность μ_1 имеет постоянную подпоследовательность $\mu_1(n_m) \equiv 1$. В этом случае

$$\lambda(n_m) = 2^{\mu(n_m)} (2\alpha_1 + \alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)}) \rightarrow \alpha,$$

откуда с учетом стремления $\mu(n_m) \rightarrow \infty$ следует, что

$$\alpha_2 2^{\mu_2(n_m)} + \dots + \alpha_k 2^{\mu_k(n_m)} \rightarrow -2\alpha_1$$

вопреки разреженности множества $\Lambda(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$. ▷

Пример. Положим $Y = \lim_{n \in \mathbb{N}} \prod \{2^{n+m} : m \in \mathbb{N}\}$. Тогда Y — плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, и в пространстве $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ все линейно независимые множества замкнуты, но имеются незамкнутые архимедовы конусы.

◁ Пространство Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, так как для всех $m \in \mathbb{N}$

$$e_m = \frac{1}{2^{m+1}} (d + 2^{m+1} e_m) - \frac{1}{2^{m+1}} d \in Y, \quad \text{где } d = (2^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Замкнутость всех линейно независимых множеств в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ доказывается совершенно аналогично [3, 4.8]. Согласно предложениям 1.11(с) и 1.9 и теореме 1.12(а) для того, чтобы установить наличие в $\mathbb{R}_{\text{fin}}^{\mathbb{N}}|Y$ незамкнутого архимедова конуса, достаточно показать, что $Y \cap]0, 1]^{\mathbb{N}} = \emptyset$. Каждый элемент $y \in Y$ имеет вид

$$y(n) = \alpha_1 2^{n+m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{n+m_k(n)} = 2^n \lambda(n) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $m_1(n), \dots, m_k(n) \in \mathbb{N}$ и

$$\lambda(n) = \alpha_1 2^{m_1(n)} + \dots + \alpha_k 2^{m_k(n)} \in \Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k).$$

Если $y \in]0, 1]^{\mathbb{N}}$, т. е. $0 < 2^n \lambda(n) < 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lambda(n) \rightarrow 0$, что противоречит разреженности множества $\Lambda(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. ▷

§ 5. Квазиплотность и топологическая плотность

В этом параграфе в качестве ответа на вопрос [1, 9.9] установлено, что квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ не равносильна плотности относительно коробочной топологии, а также приведены примеры, относящихся к вопросу [1, 9.10] о топологическом характере квазиплотности и показывающие, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии и не характеризуют квазиплотность в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ как топологическую. Кроме того, дан отрицательный ответ на сформулированный в п. 3.7 вопрос о том, образуют ли параллелотопы базу квазивнутренности.

5.1. Лемма. Существует такая последовательность $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, что

$$\Pi_{\varkappa}^1 \cap \Pi_0^1 = \{0\}.$$

В частности, если $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $z \notin Y$, то $Y \cap (z + \Pi_{\varkappa}^1) \cap (z + \Pi_0^1) = \emptyset$.

◁ Пусть $(N_m)_{m \in \mathbb{N}}$ — какое-либо разбиение $\mathbb{N}$ на бесконечные подмножества $N_m \subset \mathbb{N}$. Определим последовательность $\varkappa \in \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^n$, полагая $\varkappa_n = n\pi_n e_m$ при $n \in N_m$. Рассмотрим произвольный элемент $y \in \Pi_{\varkappa}^1$, имеющий ненулевое значение $y(m) \neq 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, и покажем, что $y \notin \Pi_0^1$. Действительно, если $n \in N_m$ и $n \geq m$, то

$$\langle \varkappa_n | \pi_n y \rangle = \langle n\pi_n e_m | \pi_n y \rangle = ny(m),$$

а значит, в силу включения $y \in \Pi_{\varkappa}^1$ для таких n справедливо неравенство

$$|y(n+1) - ny(m)| = |y(n+1) - \langle \varkappa_n | \pi_n y \rangle| < 1$$

и, в частности, $|y(n+1)| > n|y(m)| - 1$. Следовательно, $\sup_{n \in N_m} |y(n+1)| = \infty$. ▷

5.2. Согласно теореме 3.8 всякое квазиплотное подмножество $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ коробочно плотно (см. также предложения 1.9 и 1.11(c)). Как показывает следующий пример, обратное утверждение неверно даже для плотных векторных подпространств $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что дает отрицательный ответ на вопрос [1, 9.9].

Пример. Существует плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, являющееся коробочно плотным, но не квазиплотным в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

◁ Пусть Z — коробочно плотное подпространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, не содержащее ℓ^{∞} и имеющее плотное в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ пересечение $Z \cap \ell^{\infty}$. (На роль Z подходит, например, $\text{lin } \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.) Согласно лемме 5.1 имеется параллелотоп P с центром в нуле такой, что $P \cap \Pi_0^1 = \{0\}$. Используя абсолютную выпуклость P , легко показать, что $(\text{lin } P) \cap \ell^{\infty} = \{0\}$. Положим $Y_0 := Z \cap \ell^{\infty} + \text{lin } P$ и рассмотрим произвольный элемент $b \in \ell^{\infty}$, не принадлежащий Z . Как легко видеть, $b \notin Y_0$ и поэтому имеется подпространство $Y \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ коразмерности 1 такое, что $Y_0 \subset Y$ и $b \notin Y$. Поскольку $Z \cap \ell^{\infty} \subset Y$, пространство Y плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Кроме того, из соотношений $P \subset Y$ и $b \notin Y$ следует $Y \cap (b + P) = \emptyset$, а значит, согласно теореме 3.8 пространство Y не квазиплотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Остается показать, что Y коробочно плотно в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим произвольные последовательности $s \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и $r \in]0, \infty[^{\mathbb{N}}$ и докажем, что $Y \cap (s + \Pi_0^r) \neq \emptyset$. Можно считать, что $r \in \ell^{\infty}$, т.е. $\Pi_0^r \subset \ell^{\infty}$. Поскольку $\text{codim } Y = 1$, существует такое число $\alpha \in \mathbb{R}$, что $s - \alpha b \in Y$. Благодаря коробочной плотности Z в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ имеется элемент $z \in Z \cap (\alpha b + \Pi_0^r)$. Включение $\alpha b + \Pi_0^r \subset \ell^{\infty}$ влечет $z \in Z \cap \ell^{\infty} \subset Y$. Кроме того, $z + s - \alpha b \in s + \Pi_0^r$. Следовательно, $z + s - \alpha b \in Y \cap (s + \Pi_0^r)$. ▷

5.3. Из леммы 5.1 следует, что параллелотопы не образуют базу какой-либо топологии. Несмотря на то, что любое квазиплотное подпространство $Y \subset \mathbb{R}^N$ пересекается с каждым параллелотопом, в случае $Y \neq \mathbb{R}^N$ найдутся два таких параллелотопа P и Q с общим центром, что

$$Y \cap P \cap Q = \emptyset.$$

В частности, критерии 1.11 и 3.8 не характеризуют квазиплотность в $\mathbb{R}^N$ как топологическую плотность даже для векторных подпространств. Это наблюдение тем не менее не дает ответа на вопрос [1, 9.10] о том, существует ли топология на $\mathbb{R}^N$, плотность относительно которой была бы равносильна квазиплотности в $\mathbb{R}^N$.

5.4. В дальнейшем каждое из пространств $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) наделяется евклидовой нормой $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. Для $S \subset \mathbb{R}^n$ положим $\|S\| := \sup_{s \in S} \|s\|$. Символом 0_n обозначим нулевой элемент $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Если $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda \in \mathbb{R}$, то кортеж $(x(1), \dots, x(n), \lambda) \in \mathbb{R}^{n+1}$ условимся записывать в виде (x, λ) . В частности,

$$(0_n, \lambda) = (0, \dots, 0, \lambda) = \lambda \pi_{n+1} e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Лемма. Пусть $n \in \mathbb{N}$, C — ограниченное выпуклое подмножество $\mathbb{R}^n$, $0 \in \text{int } C$ и $\lambda > 0$. Определим подмножества $D, D^+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$, полагая

$$D := \text{co}(C \times \{-1\} \cup \{(0_n, \lambda)\}), \quad D^+ := \{d \in D : d(n+1) \geq 0\}.$$

Тогда

- (a) $0 \in \text{int } D$;
- (b) $D \cap -D \subset D^+ \cup -D^+$;
- (c) $\|D \cap -D\| \leq \|D^+\| = \max\{\lambda, \frac{\lambda}{\lambda+1} \|C\|\}$;
- (d) $\pi_n D = C$.

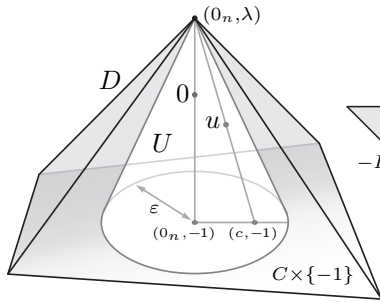


Рис. 3а

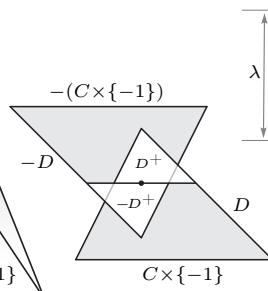


Рис. 3б

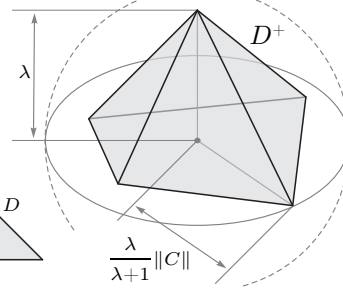


Рис. 3с

◁ (a) По условию множество C содержит некоторый шар $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Элементарная проверка показывает, что открытая окрестность нуля

$$U := \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} : \frac{\|\pi_n u\|}{\varepsilon} + \frac{u(n+1) + 1}{\lambda + 1} < 1, \quad u(n+1) > -1 \right\}$$

содержится в D . Действительно, если $u \in U$ и

$$c := \frac{\lambda + 1}{\lambda - u(n+1)} \pi_n u,$$

то $\|c\| < \varepsilon$ и вектор u принадлежит отрезку $[(c, -1), (0_n, \lambda)]$ (см. рис. 3а). Остальные соотношения тривиальны (см. рис. 3б и 3с). ▷

5.5. Если x — квазивнутренняя точка проективного выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^N$, то в связи с леммой 3.7 можно было бы ожидать, что в C содержится параллелотоп с центром x . Тем не менее доказательство леммы 3.7 обеспечивает лишь наличие параллелотопа $P \subset C$, центр которого отличен от x и, более того, $x \notin P$. Следующий пример показывает, что это обстоятельство является существенным.

Пример. Существует такое проективное выпуклое подмножество $C \subset \mathbb{R}^N$, что $0 \in \text{qi } C$, но C не содержит параллелотов с центром в нуле.

◁ Рассмотрим последовательность множеств $C_n \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), определенную следующим рекурсивным построением (см. рис. 4):

$$C_1 := [-1, 1],$$

$$C_{n+1} := \text{co}(C_n \times \{-1\} \cup \{(0_n, \lambda_n)\}),$$

где числа $\lambda_n > 0$ выбираются исходя из условия $\max\{\lambda_n, \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \|C_n\|\} \leq \frac{1}{n}$.

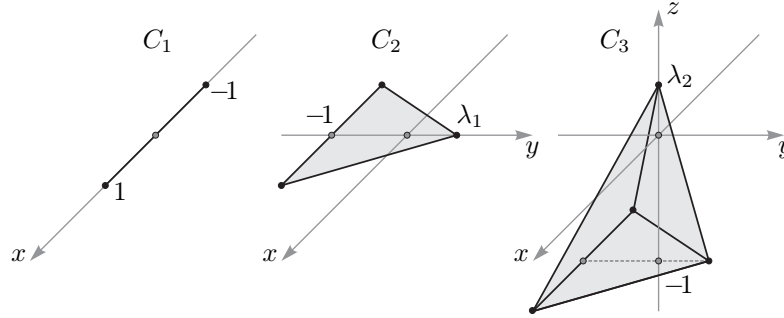


Рис. 4

Согласно лемме 5.4 выпуклые множества $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ образуют проективную последовательность, причем $0 \in \text{int } C_n$ и $\|C_n \cap -C_n\| \leq \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим $C := \varprojlim C_n$. Из теоремы 1.8 следует, что $0 \in \text{qi } C$. С другой стороны, если бы множество C содержало какой-либо параллелотоп с центром в нуле, то нашлся бы такой элемент $c \in C \cap -C$, что $c(1) \neq 0$, и тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ имели бы место противоречивые соотношения

$$|c(1)| \leq \|\pi_n c\| \leq \|\pi_n(C \cap -C)\| = \|C_n \cap -C_n\| \leq \frac{1}{n}. \triangleright$$

5.6. Усилим предыдущий пример и покажем, что в рассматриваемом случае точка $0 \in \text{qi } C$ не принадлежит никакому параллелотопу, содержащемуся в C .

Лемма. Пусть $P \subset \mathbb{R}^N$ — параллелотоп и $x \in P$. Тогда имеется параллелотоп P_x с центром x такой, что $P_x \subset P$.

◁ По теореме 3.4 существуют $z \in \mathbb{R}^N$ и $\Delta \in \Delta^+(\mathbb{R}^N)$ такие, что $P = z + \Delta(\Pi_0^1)$. Как легко видеть, $y := \Delta^{-1}(x - z) \in \Pi_0^1$. Определим $r \in]0, \infty[^N$, полагая $r(n) := 1 - |y(n)|$. Тогда $y + \Pi_0^r \subset \Pi_0^1$ и, следовательно,

$$P_x := x + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta y + \Delta(\Pi_0^r) = z + \Delta(y + \Pi_0^r) \subset z + \Delta(\Pi_0^1) = P. \triangleright$$

Следствие. Если множество C не содержит параллелотов с центром x , то C не содержит и таких параллелотов P , что $x \in P$.

Таким образом, всякое проективное выпуклое множество $C \subset \mathbb{R}^N$ с непустой квазивнутренностью содержит некоторый параллелотоп, но такие параллелотопы не всегда покрывают квазивнутренность C .

5.7. Говорят, что выпуклое множество $C \subset X$ *квазилокально ограничено* в точке $x \in \text{qi } C$, если $x \in \text{qi } B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$. Пространство X называют *квазилокально ограниченным*, если в X любое выпуклое множество C квазилокально ограничено в каждой точке $x \in \text{qi } C$ (см. [1, § 5]).

Согласно теореме [1, 5.10] пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ является квазилокально ограниченным, но из п. 5.6 следует, что параллелотопы не образуют «базу квазилокальной ограниченности»: если x — квазивнутренняя точка выпуклого множества $C \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, то $x \in \text{qi } B$ для некоторого ограниченного подмножества $B \subset C$, но среди таких множеств B может не найтись ни одного параллелотопа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман А. Е., Емельяненко И. А. Локально выпуклые пространства, в которых все архимедовы конусы замкнуты // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 945–970.
2. Wilansky A. Modern methods in topological vector spaces. New York: McGraw-Hill, 1978.
3. Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Матюхин А. В. Незамкнутые архимедовы конусы в локально выпуклых пространствах // Владикавк. мат. журн. 2015. Т. 17, № 3. С. 36–43.

Поступила в редакцию 24 декабря 2023 г.

После обработки 24 декабря 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`gutman@math.nsc.ru`

Емельяненко Иван Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`i.emelianenkov@yandex.ru`

О K -ФУНКЦИОНАЛАХ АБСОЛЮТНО
КАЛЬДЕРОНОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
БАНАХОВОЙ ПАРЫ (l_1, c_0)

В. И. Дмитриев, Е. В. Журавлева,
О. Ю. Михайлова, И. Н. Бурилич

Аннотация. Исследуется задача характеристики абсолютно кальдероновых элементов канонической пары (l_1, c_0) пространств последовательностей в терминах K -функционала Петре. Соответствующий результат был известен первому автору достаточно давно. Впервые приведено доказательство этого результата. Сформулированы нерешенные задачи.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.204

Ключевые слова: банахова пара, интерполяционная орбита, K -функционал Петре.

1. Введение. Необходимые сведения

Рассматриваются банаховы пространства над полем действительных чисел и используются только линейные операторы.

Пусть $\overline{A} = (A_0, A_1)$ — пара банаховых пространств [1–3]. Для любого элемента $a \in A_0 + A_1$ определяется его K -функционал (функционал Петре): $K(t, a; \overline{A}) = \inf\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a_0 + a_1 = a\}$, где $t > 0$. При фиксированном $a \neq 0$ функция $K(t) = K(t, a; \overline{A})$ является положительной вогнутой функцией на $(0, \infty)$. Функция $K(t)$ характеризует в некотором смысле местоположение элемента a в паре $\overline{A}$. Функция $K(t)$ имеет обратную $K^{-1} : (K(0+), K(\infty)) \rightarrow (0, \infty)$.

Если $\overline{A}$ и $\overline{B}$ — две банаховы пары, то для каждого $a \in A_0 + A_1$ определяется его K -орбита в паре $\overline{B}$:

$$K\text{-orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{B}) = \left\{ b \in B_0 + B_1 : \sup_{t>0} \frac{K(t, b; \overline{B})}{K(t, a; \overline{A})} < \infty \right\}.$$

Просто орбитой $\text{Orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{B})$ называется множество $\{Ta\}$, где T пробегает совокупность всех линейных ограниченных из пары $\overline{A}$ в пару $\overline{B}$ операторов (имеется в виду ограниченное действие $T : A_0 \rightarrow B_0$ и $T : A_1 \rightarrow B_1$). Всегда $\text{Orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{B}) \subset K\text{-orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{B})$.

Многие классические результаты в теории интерполяции операторов, относящиеся к конкретным парам $\overline{A}$ и $\overline{B}$, имеют вид $\text{Orb } a = K\text{-orb } a$ для всех $a \in A_0 + A_1$. Однако для многих банаховых пар аналогичное утверждение, вообще говоря, не имеет места, что означает, что найдутся элементы $a \in A_0 + A_1$, для которых вложение $\text{Orb } a \subset K\text{-orb } a$ оказывается строгим по крайней мере

в некоторых банаховых парах $\overline{B}$. В такой ситуации представляют некоторый интерес те элементы a заданной пары $\overline{A}$, с которыми подобного случиться не может. В общем случае эта задача, по-видимому, весьма трудна [4]. (Нильссон, персональное сообщение 2021 г., писал о попытках исследований в этом направлении).

Элемент $a \in A_0 + A_1$ назовем *абсолютно кальдероновым* (АКЭ), если $\text{Orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{X}) = \text{K-orb}(a; \overline{A} \rightarrow \overline{X})$ для любой банаховой пары $\overline{X}$ (с несущественным ограничением: $\overline{X}$ должна обладать свойством так называемой относительной полноты [1, 3]).

Сформулируем основную задачу: охарактеризовать абсолютно кальдероновы элементы заданной банаховой пары $\overline{A}$. В настоящей работе мы исследуем эту задачу для канонической пары пространств последовательностей: $\overline{A} = (l_1, c_0)$. Имеются различные характеристики абсолютно кальдероновых элементов этой пары, но все они являются довольно непрямыми (к примеру, абсолютно кальдероновы элементы — это неподвижные точки линейных операторов, ядерных из c_0 в c_0 и ограниченных из l_1 в l_1). Об описаниях такого рода см. [5]. Мы приводим максимально простое описание абсолютно кальдероновых элементов в терминах K -функционала — теоремы 3, 4.

Пересечение $A_0 \cap A_1$ целиком состоит из АКЭ. Особый интерес представляют АКЭ, лежащие вне $A_0 \cap A_1$. Ниже в задаче описания АКЭ мы ограничиваемся довольно частным случаем банаховых пространств последовательностей.

Если F — банахово идеальное пространство (БИП) последовательностей $f = (f_n)_{n=1}^\infty$, а $w = (w_n)$ — положительная последовательность — вес, то весовое пространство $F(w)$ образовано такими последовательностями $g = (g_n)$, для которых $w \cdot g = (w_n g_n) \in F$, и снабжено нормой $\|g\|_{F(w)} = \|wg\|_F$.

Через F' обозначается дуальное к F пространство,

$$\|h\|_{F'} = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} h_n f_n : \|f\|_F \leq 1 \right\}.$$

В доказательстве теоремы 2 используется неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} |h_n f_n| \leq \|h\|_{F'} \|f\|_F.$$

БИП F последовательностей назовем *правильным*, если множество финитных последовательностей плотно в F . В соответствии с этим пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$ БИП последовательностей будем называть *правильной*, если F_0 и F_1 правильны.

Основной результат настоящей работы получим довольно элементарными ходами, основываясь на следующем не вполне элементарном факте [6].

Теорема 1. *Предположим, что пара $\overline{F}$ правильная, $f \in F_0 + F_1$. Последовательность f является АКЭ тогда и только тогда, когда существует пара $(l_1(v_0), l_1(v_1))$ такая, что $l_1(v_i) \supset F_i$, $i = 0, 1$, и*

$$K(t, f; F_0, F_1) \leq K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1))$$

при всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем действовать по схеме работы [6]. Сначала заметим, что абсолютную кальдероновость элемента $f \in F_0 + F_1$ можно проверить только на одной паре $\overline{X} = \overline{L}_1$. Здесь $\overline{L}_1$ — стандартная весовая пара, образованная пространствами L_1 и $L_1(1/t)$ функций на $((0, \infty), dt/t)$.

Лемма 1. Последовательность f есть АКЭ тогда и только тогда, когда $\text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}) = K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$.

Пояснения требует только достаточность. Пусть $\overline{X}$ — произвольная (относительно полная) пара и $x \in K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{X})$. Найдем элемент $g \in L_1 + L_1(1/t)$ такой, что функция $K(t, g; \overline{L_1})$ эквивалентна функции $K(t, f; \overline{F})$. Это можно сделать, так как пара $\overline{L_1}$ является K_0 -полной [3]. Тогда $g \in K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}) = \text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$, т. е. $g = Pf$, где $P : \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}$. Кроме того, поскольку интерполяция из пары $\overline{L_1}$ в пару $\overline{X}$ K -монотонна (см. например, [3]), а $K(t, x; \overline{X}) \leq \text{const} \cdot K(t, g; \overline{L_1})$, имеем $x = Rg$ с некоторым оператором $R : \overline{L_1} \rightarrow \overline{X}$. В итоге $x = RPF$, где $RP : \overline{F} \rightarrow \overline{X}$, т. е. $x \in \text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{X})$.

Лемма 2. Если $a = Tf$, где оператор $T : \overline{F} \rightarrow \overline{A}$ абсолютно суммирует из F_i в $A_i, i = 0, 1$, то найдется пара $\overline{l_1(v)} = (l_1(v_0), l_1(v_1))$ такая, что $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$, т. е. $l_1(v_i) \supset F_i$, для которой

$$K(t, a; \overline{A}) \leq K(t, f; \overline{l_1(v)})$$

при всех $t > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Абсолютно суммирующую норму оператора T как оператора из F_i в A_i обозначим через k_i . Пусть (e_n) — стандартный базис пространства $F_0 + F_1$ (и F_0 , и F_1). В силу абсолютной суммируемости для каждой последовательности $\varphi = (\varphi_n) \in F_i$ и любого конечного множества σ номеров имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \sigma} |\varphi_n| \|Te_n\|_{A_i} &= \sum_{n \in \sigma} \|T(\varphi_n e_n)\|_{A_i} \leq k_i \max_{\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{n \in \sigma} \varepsilon_n \varphi_n e_n \right\|_{F_i} \\ &= k_i \|\varphi \cdot \chi_\sigma\|_{F_i} \leq k_i \|\varphi\|_{F_i}. \end{aligned}$$

Это означает, что $(\|Te_n\|_{A_i}) \in F'_i, i = 0, 1$. Возьмем какую-нибудь положительную последовательность $(\varepsilon_n) \in F'_0 \cap F'_1$ (таковые существуют). Положим $v_{in} = \|Te_n\|_{A_i}$, если $Te_n \neq 0$, и $v_{in} = \varepsilon_n$, если $Te_n = 0$. Имеем $v_i = (v_{in}) \in F'_i$, что равносильно $l_1(v_i) \supset F_i$.

Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Te_n$ (λ_n — числа). Если $\lambda = (\lambda_n) \in l_1(v_i)$, то этот ряд сходится абсолютно в A_i :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| \|Te_n\|_{A_i} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| v_{in} = \|\lambda\|_{l_1(v_i)}.$$

Для $\lambda \in l_1(v_0) + l_1(v_1)$ определим

$$S\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n Te_n.$$

Оператор S действует из пары $\overline{l_1(v)} = (l_1(v_0), l_1(v_1))$ в пару $\overline{A} = (A_0, A_1)$ ($\|S\| \leq 1$). Поскольку (e_n) — шаудеровский базис в $F_0 + F_1$, а T непрерывен из $F_0 + F_1$ в $A_0 + A_1$, то

$$Sf = \sum_{n=1}^{\infty} f_n Te_n = T \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n e_n \right) = Tf = a.$$

Следовательно, $K(t, a; \overline{A}) \leq K(t, f; \overline{l_1(v)})$, а именно это нам и нужно.

Приведем описание орбит элементов $f \in F_0 + F_1$ в паре весовых L_1 -пространств.

Лемма 3. $\text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}) = \bigcup \text{Orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1})$, где объединение берется по всевозможным парам $\overline{l_1(v)}$ таким, что $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$.

Доказательство. Если x принадлежит правой части доказываемого равенства, т. е. x лежит в какой-нибудь орбите $\text{Orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1})$, то $x = Hf$, где $H : \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}$. Тогда сужение оператора H на пару $\overline{F}$ дает оператор из $\overline{F}$ в $\overline{L_1}$, переводящий элемент f в элемент x . Стало быть, x принадлежит и левой части доказываемого равенства.

Обоснуем обратное вложение. Пусть $x \in \text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$, т. е. $x = Tf$, где $T : \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}$. Возьмем пару $(L_2, L_2(1/t)) = \overline{L_2}$ пространств функций на $((0, \infty), dt/t)$ и рассмотрим элемент $y \in L_2 + L_2(1/t)$, у которого K -функция, т. е. $K(t, y; \overline{L_2})$, эквивалентна функции $K(t, x; \overline{L_1})$. Так как интерполяция из $\overline{L_1}$ в $\overline{L_2}$ является K -монотонной [6], существует оператор $S : \overline{L_1} \rightarrow \overline{L_2}$ такой, что $Sx = y$. По теореме Гротендика этот оператор абсолютно суммирует из L_1 в L_2 и из $L_1(1/t)$ в $L_2(1/t)$. Поэтому оператор ST абсолютно суммирует из F_0 в L_2 и из F_1 в $L_2(1/t)$. Кроме того, $STf = Sx = y$. По лемме 2 найдется пара $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$, для которой $K(t, y; \overline{L_2}) \leq K(t, f; \overline{l_1(v)})$, а следовательно, и $K(t, x; \overline{L_1}) \leq \text{const} \cdot K(t, f; \overline{l_1(v)})$. Так как интерполяция из $\overline{l_1(v)}$ в $\overline{L_1}$ K -монотонна, то $x \in \text{Orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1})$.

Замечание. Поскольку в интерполяционной ситуации $\overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}$ орбиты совпадают с K -орбитами, то

$$\text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1}) = \bigcup K\text{-orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}), \quad \overline{l_1(v)} \supset \overline{F}.$$

Отметим для полноты картины, что утверждение леммы 3 остается справедливым при замене пары $\overline{L_1}$ произвольной весовой парой $\overline{L_1(w)}$.

Завершим доказательство теоремы. Пусть f — АКЭ пары $\overline{F}$. Тогда (лемма 1) любой $x \in K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$ лежит (лемма 3) в некотором множестве $\text{Orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}) = K\text{-orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1})$, $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$. Выберем в качестве x такой элемент z , чтобы функция $K(t, z; \overline{L_1})$ оказалась эквивалентной функции $K(t, f; \overline{F})$. Имеем $z \in K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$, и для подходящей пары $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$ получаем

$$K(t, f; \overline{F}) \leq cK(t, z; \overline{L_1}) \leq c_1 K(t, f; \overline{l_1(v)}).$$

При необходимости постоянную c_1 можно превратить в 1, умножив веса v_0, v_1 на подходящее число (что, очевидно, никак не меняет всей ситуации).

Обратно, пусть для некоторой пары $\overline{l_1(v)}$ выполнено $\overline{l_1(v)} \supset \overline{F}$ и

$$K(t, f; \overline{F}) \leq K(t, f; \overline{l_1(v)}).$$

Если $x \in K\text{-orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$, то

$$K(t, x; \overline{L_1}) \leq cK(t, f; \overline{F}) \leq cK(t, f; \overline{l_1(v)}).$$

Следовательно, $x \in K\text{-orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}) = \text{Orb}(f; \overline{l_1(v)} \rightarrow \overline{L_1}) \subset \text{Orb}(f; \overline{F} \rightarrow \overline{L_1})$ (лемма 3).

Таким образом, K -орбита и орбита элемента f совпадают в $\overline{L_1}$, значит (лемма 1), f — это АКЭ. Теорема доказана.

В дополнение к формулировке теоремы 1 укажем, что

$$K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1)) \leq \text{const} \cdot K(t, f; F_0, F_1),$$

и напомним общий вид K -функционала для пар весовых l_1 -пространств:

$$K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n|.$$

Кроме того, напомним, что $l_1(v) \supset F \Leftrightarrow v \in F'$ (этот факт уже использован при доказательстве леммы 2).

2. Случай тривиального множества АКЭ

Рассмотрим пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$ БИП последовательностей.

Теорема 2. Допустим, что

- (1) пара (F_0, F_1) правильна и относительно полна,
- (2) пара (F'_0, F'_1) правильна.

Тогда множество АКЭ этой пары есть $F_0 \cap F_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f = (f_n) \in F_0 + F_1$ является АКЭ. В силу теоремы 1 существуют положительные $v_i = (v_{in}) \in F'_i$, $i = 0, 1$, такие, что

$$K(t, f; F_0, F_1) \leq \sum_n \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n|$$

при всех $t > 0$. Воспользовавшись правильностью F_i , $i = 0, 1$, выберем N так, чтобы выполнялись неравенства

$$\|v_i \chi_{\{n > N\}}\|_{F'_i} \leq \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} K(t, f; F_0, F_1) &\leq \left(\sum_{n \leq N} + \sum_{n > N} \right) \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n| \\ &\leq \sum_{n \leq N} \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n| + \max_{i=0,1} (\|v_i \chi_{\{n > N\}}\|_{F'_i}) K(t, f \chi_{\{n > N\}}; F_0, F_1) \\ &\leq \sum_{n \leq N} \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n| + \frac{1}{2} K(t, f; F_0, F_1), \end{aligned}$$

откуда находим

$$K(t, f; F_0, F_1) \leq 2 \sum_{n \leq N} \min(v_{0n}, tv_{1n}) |f_n|$$

и, далее,

$$K(t, f; \overline{F}) \leq c \min(1, t), \quad (1)$$

где $c = 2 \sum_{n \leq N} \max(v_{0n}, v_{1n}) |f_n|$, при всех $t > 0$.

Из неравенства (1) и относительной полноты пары (F_0, F_1) получаем $f \in F_0 \cap F_1$.

Теорема доказана.

Заметим, что теорема 2 имеет своим следствием тот факт, что задача описания АКЭ пары (F_0, F_1) , где F_i , $i = 0, 1$, берутся из совокупности пространств l_p ($1 < p < \infty$), c_0 , априори может получить нетривиальное решение ($\neq F_0 \cap F_1$) лишь в случае, когда среди пространств F_0, F_1 встречается пространство l_1 . Таким образом, интересные в этом смысле «лебеговские» пары суть (l_1, l_p) , где $1 < p < \infty$, и (l_1, c_0) .

Ниже, в теореме 3, выясняется нетривиальность множества АКЭ «крайней» пары (l_1, c_0) и предлагается описание этого множества в терминах K -функционала.

3. Основной результат

Теорема 3. Пусть $f = (f_n) \in l_1 + c_0 = c_0$, $f \neq 0$. Положим для краткости $K(t, f; l_1, c_0) = K(t)$. Последовательность f является АКЭ пары (l_1, c_0) , если и только если найдется $c > 1$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right)}{n^2} < \infty.$$

Будем доказывать эту теорему в несколько другой формулировке.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность f являлась АКЭ пары (l_1, c_0) , необходимо и достаточно, чтобы существовали $c > 0$ и положительная неубывающая последовательность $(t(n))$, обладающая свойством

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty,$$

такие, что $K(n) \leq cK(t(n))$, $n = 1, 2, \dots$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что если $K(t, f; l_1, c_0) = K(t, g; l_1, c_0)$ при всех $t > 0$, то f и g одновременно являются или не являются АКЭ, поскольку f и g орбитально эквивалентны [3–9]. Из этого замечания и из того, что $K(t, f; l_1, c_0) = K(t, f^*; l_1, c_0)$, где f^* — последовательность, представляющая собой невозрастающую перестановку последовательности $|f|$, следует, что f является АКЭ тогда и только тогда, когда f^* является АКЭ. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $f = f^*$.

Из теоремы 1, как и при доказательстве теоремы 2, имеем: f является АКЭ лишь тогда, когда существуют $v_0 = (v_{0m}) \in l'_1 = l_\infty$, $v_1 = (v_{1m}) \in c'_0 = l_1$, такие, что

$$K(t, f; l_1, c_0) \leq K(t, f; l_1(v_0), l_1(v_1)), \quad t > 0. \quad (2)$$

Так как функции $K(t, \dots)$ в (2) неотрицательны и вогнуты, функция $K(t, f; l_1, c_0)$ линейна в промежутках $(0, 1]$, $[n, n+1]$, $n = 1, 2, \dots$,

$$\lim_{t \rightarrow 0+} K(t, f; l_1, c_0) = 0,$$

то неравенство (2) равносильно системе неравенств

$$K(n, f; l_1, c_0) \leq K(n, f; l_1(v_0), l_1(v_1)), \quad n = 1, 2, \dots,$$

или

$$K(n) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \min(v_{0m}, nv_{1m})|f_m|, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Из (3) получаем

$$K(n) \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \min(1, nv_m)|f_m|, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $c = \|v_0\|_{l_\infty}$, $v_m = \frac{v_{1m}}{\|v_0\|_{l_\infty}}$. Ясно, что и, обратно, из неравенства типа (4), где c — постоянная и $v = (v_m) \in l_1$, вытекает неравенство типа (3).

Очевидно, кроме того, что, поскольку $f = f^*$, можно считать $v = v^*$.

Пусть (4) имеет место. Положим $s(n) = \text{card}\{m : v_m \geq \frac{1}{n}\}$; $(s(n))$ — неотрицательная неубывающая неограниченная последовательность.

Оценим

$$\begin{aligned} \sum_m v_m &\geq \sum_n \sum_{\frac{1}{n+1} \leq v_m < \frac{1}{n}} \geq \sum_n \frac{1}{n+1} \operatorname{card} \left\{ m : \frac{1}{n+1} \leq v_m < \frac{1}{n} \right\} \\ &= \sum_n \frac{s(n+1) - s(n)}{n+1}. \end{aligned}$$

Так как

$$\sum_{n=1}^N \frac{s(n+1) - s(n)}{n+1} = -\frac{s(1)}{2} + \sum_{n=2}^N \frac{s(n)}{n(n+1)} + \frac{s(N+1)}{N+1},$$

делаем вывод, что ряд $\sum_n \frac{s(n)}{n(n+1)}$ сходится, а следовательно,

$$\sum_n \frac{s(n)}{n^2} < \infty. \quad (5)$$

Кроме того, $s(n) = O(n)$ (и даже $o(n)$), $n \rightarrow \infty$. В самом деле, если задано $\varepsilon > 0$, то для всех n , начиная с некоторого,

$$\varepsilon > \sum_{m=n}^{\infty} \frac{s(m)}{m(m+1)} \geq s(n) \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m(m+1)} = s(n) \frac{1}{n}.$$

Далее, находим

$$\begin{aligned} \sum_{m=s(n)+1}^{\infty} v_m f_m &= \sum_{m=n}^{\infty} \sum_{p=s(m)+1}^{s(m+1)} v_p f_p \leq (\text{в действительности } \asymp) \\ &\leq \sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{p=s(m)+1}^{s(m+1)} f_p = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m}. \end{aligned} \quad (6)$$

Но так как

$$\sum_{m=n}^{n+q} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m} = -\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{n+q} \frac{K(s(m))}{(m-1)m} + \frac{K(s(n+q+1))}{n+q}$$

и $K(s(n+q+1)) = o(s(n+q+1))$ и тем самым $K(s(n+q+1)) = o(n+q)$, $q \rightarrow \infty$, то

$$\sum_{m=n}^{\infty} \frac{K(s(m+1)) - K(s(m))}{m} = -\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}. \quad (7)$$

Пользуясь (4), (6), (7), получаем

$$\begin{aligned} K(n) &\leq c \sum_{m=1}^{s(n)} f_m + cn \sum_{m=s(n)+1}^{\infty} v_m f_m \\ &\leq cK(s(n)) + cn \left(-\frac{K(s(n))}{n} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m} \right) = cn \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}. \end{aligned} \quad (8)$$

Зафиксируем какое-нибудь натуральное число γ ,

$$\gamma \geq 3c. \quad (9)$$

Будем рассматривать, кроме того, достаточно большие n , а именно такие, для которых

$$\sum_{s(m) > n} \frac{s(m)}{(m-1)m} \leq \frac{1}{6c}. \quad (10)$$

Разобьем сумму $\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{K(s(m))}{(m-1)m}$ на три части:

$$\sum_{m > n} = \sum_{\substack{m > n, \\ m \leq \gamma n}} + \sum_{\substack{m > \gamma n, \\ s(m) \leq n}} + \sum_{\substack{m > \gamma n, \\ s(m) > n}},$$

и оценим каждую из них сверху:

$$\sum_{\substack{m > n, \\ m \leq \gamma n}} \frac{K(s(m))}{(m-1)m} \leq K(s(\gamma n)) \sum_{m > n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{K(s(\gamma n))}{n},$$

$$\sum_{\substack{m > \gamma n, \\ s(m) \leq n}} \leq K(n) \sum_{m > \gamma n} \frac{1}{(m-1)m} = \frac{K(n)}{\gamma n},$$

$$\sum_{\substack{m > \gamma n, \\ s(m) > n}} \frac{K(s(m))}{s(m)} \frac{s(m)}{(m-1)m} \leq \frac{K(n)}{n} \sum_{s(m) > n} \frac{s(m)}{(m-1)m}.$$

Из этих оценок и (8) вытекает неравенство

$$K(n) \leq cK(s(\gamma n)) + K(n) \left(\frac{c}{\gamma} + c \sum_{s(m) > n} \frac{s(m)}{(m-1)m} \right),$$

следовательно, в силу (9) и (10)

$$K(n) \leq cK(s(\gamma n)) + K(n)(1/3 + 1/6).$$

Таким образом,

$$K(n) \leq 2cK(s(\gamma n)) \quad (11)$$

для всех n , начиная с некоторого. Увеличив при необходимости постоянную c , добьемся того, чтобы (11) выполнялось уже для всех натуральных n .

Положим $t(n) = s(\gamma n)$. Ввиду соотношений (5) и (11) необходимость в доказываемой теореме установлена.

Проверим достаточность. Пусть $(t(n))$ — положительная неубывающая последовательность, $\sum_n \frac{t(n)}{n^2} < \infty$, $K(n) \leq cK(t(n))$, $n = 1, 2, \dots$, где c — некоторая постоянная. Положим $s(n) = [t(n) + n^{\frac{1}{2}}]$. Отметим, что последовательность $(s(n))$ неограниченная, $\sum_n \frac{s(n)}{n^2} < \infty$ (и, значит, $s(n) = o(n)$, $n \rightarrow \infty$). Определим последовательность $v = (v_m)$ правилом:

$$v_m = \frac{1}{n}, \text{ где } n = \min\{l : s(l) \geq m\}.$$

Имеем $v = v^*$. Легко сообразить, исходя из определения (v_m) , что

$$\{m : v_m \geq 1/n\} = \{m : 1 \leq m \leq s(n)\}.$$

Поэтому, во-первых,

$$\sum_{m=s(1)+1}^{s(N+1)} v_m = \sum_{n=1}^N \sum_{m=s(n)+1}^{s(n+1)} v_m \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} (s(n+1) - s(n)) \leq \sum_{n=2}^N \frac{s(n)}{(n-1)n} + \frac{s(N+1)}{N},$$

так что ряд $\sum_m v_m$ сходится, т. е. $v = (v_m) \in l_1$, а во-вторых,

$$K(n) \leq cK(t(n)) \leq cK(s(n)) = c \sum_{m=1}^{s(n)} f_m = c \sum_{v_m \geq \frac{1}{n}} f_m \leq c \sum_{m=1}^{\infty} \min(1, nv_m) f_m,$$

т. е. выполнено неравенство типа (4). Следовательно, достаточность в доказываемой теореме установлена.

Перейдем к начальной формулировке теоремы 3. Действительно, если f — АКЭ, то, имея в виду необходимую часть доказанного утверждения и записав неравенство $K(n) \leq cK(t(n))$, где, разумеется, $c > 1$, в виде $K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right) \leq t(n)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right)}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty.$$

Если известно, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right)}{n^2}$ сходится, то, положив $t(n) = K^{-1}\left(\frac{K(n)}{c}\right)$, получаем, что $(t(n))$ неубывающая, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t(n)}{n^2} < \infty$ и $K(n) = cK(t(n))$, и достаточная часть доказанного утверждения гарантирует нам принадлежность f к классу АКЭ.

Теорема 4 доказана.

4. О K -функциях АКЭ пары (l_1, c_0)

Оценка $K(n) \leq cK(t(n))$ из теоремы 4, конечно, дает сильные ограничения на рост функции $K(t)$ на бесконечности. Во всяком случае у любого АКЭ K -функция растет медленнее любой степенной. Точнее, справедливо следующее

Предложение. Пусть f — АКЭ банаховой пары (l_1, c_0) , $K(t, f; l_1, c_0) = K(t)$. Пусть $\varepsilon > 0$. Имеем $K(t) = o(t^\varepsilon)$, $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Используя теорему 2, найдем неубывающую последовательность натуральных чисел $(t(n))$, $\sum_n \frac{t(n)}{n^2} < \infty$, и постоянную $c > 1$ такие, что $K(n) \leq cK(t(n))$, $n = 1, 2, \dots$. Зафиксируем какое-нибудь η ,

$$0 < \eta < c^{-\frac{1}{\varepsilon}}. \quad (12)$$

Найдем $n_0 = n_0(\eta)$, обладающее тем свойством, что $t(n) \leq \eta n$ при $n \geq n_0$. Будем считать $t(\cdot)$ отображением $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение степени $t^2(\cdot), t^3(\cdot), \dots$ этого отображения. Заметим, что если $t^p(n) \geq n_0$, то $t^{p+1}(n) = t[t^p(n)] \leq \eta t^p(n)$, поэтому

$$t^{p+1}(n) \leq \eta t^p(n) \leq \eta^2 t^{p-1}(n) \leq \dots \leq \eta^p t(n) \leq \eta^{p+1} n. \quad (13)$$

Пусть $n \geq \frac{n_0}{\eta}$. Выберем натуральное $p = p(n; \eta)$ так, чтобы $\eta^{p+1} n < n_0 \leq \eta^p n$, т. е.

$$p = \left\lceil \frac{\ln \frac{n}{n_0}}{\ln \frac{1}{\eta}} \right\rceil. \quad (14)$$

Тогда в силу (13)

$$t^{p+1}(n) < n_0. \quad (15)$$

Итерируя неравенство $K(n) \leq cK(t(n))$, получаем

$$K(n) \leq cK(t(n)) \leq c^2 K(t^2(n)) \leq \dots \leq c^{p+1} K(t^{p+1}(n)).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K(n) &\leq (\text{см. (15)}) \leq K(n_0) c^{p+1} \leq (\text{см. (14)}) \leq cK(n_0) e^{\ln c \cdot \frac{\ln \frac{n}{n_0}}{\ln \frac{1}{\eta}}} \\ &= cK(n_0) \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\frac{\ln c}{\ln \frac{1}{\eta}}} \leq (\text{см. (12)}) \leq cK(n_0) \left(\frac{n}{n_0} \right)^\varepsilon = \frac{cK(n_0)}{n_0^\varepsilon} n^\varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, существует $c(\varepsilon)$ такое, что $K(n) \leq c(\varepsilon)n^\varepsilon$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\varepsilon > 0$ может быть любым, легко получаем $K(t) = o(t^\varepsilon)$, $t \rightarrow \infty$.

Предложение доказано.

5. Заключительные замечания

1. АКЭ банаховой пары (l_1, l_p) , $1 < p < \infty$, не изучались, и их характеристика нам неизвестна.

2. Работа [10] имеет дело с оценками погрешностей приближений некоторых функций специального вида в нормах пространств L_p ($1 \leq p \leq \infty$). Мы не исключаем, что соответствующая дискретизация может привести к задаче об оценках для элементов специального вида из пространств l_1, l_p ($p > 1$), c_0 , как в нашей работе. Пока требуемые подходы не изучались.

3. Рассмотрим функцию $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$; назовем ее *медленной вогнутой функцией*, если φ вогнута, $\varphi(0+) = 0$ и существует такое μ , $0 < \mu < 1$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{-1}(\mu\varphi(n))}{n^2} < \infty.$$

Совокупность всех медленных вогнутых функций обозначим через SConc.

Переформулируем теорему 4 в терминах класса SConc: f — АКЭ пары $(l_1; c_0)$ тогда и только тогда, когда $K(\cdot, f; l_1, c_0) \in \text{SConc}$.

По-видимому, было бы полезным изучить структуру множества SConc. Простой пример функции из SConc — функция, эквивалентная $\ln t$ при $t \rightarrow \infty$. Более сложный пример — почти степенная функция, эквивалентная на бесконечности функции $t^{\varepsilon(t)}$, где $\varepsilon(t)$ исчезает на бесконечности: $\varepsilon(t) = \frac{1}{\ln \ln t}$.

Конкретный вопрос, ответ на который нам неизвестен: как относится (в частности, совпадает ли) класс SConc с классом вогнутых функций $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $\varphi(0+) = 0$, допускающих «самооценку»

$$\varphi(t) \leq c\varphi\left(\frac{t}{\ln t}\right) \quad (t \geq e)$$

(см. также [11]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
2. Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
3. Брудный Ю. А., Крейн С. Г., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНТИ, 1986. Т. 24. С. 3–163.
4. Dmitriev V. I., Semenov E. M. Orbits and K -orbits // List of open problems. Israel Math. Conf. Proc. 1992. V. 5.
5. Дмитриев В. И., Студеникина Л. И., Шевцова Т. В. Об абсолютно кальдероновых элементах банаховой пары (l_1, c_0) // Науч. ведомости Белгород. ун-та. Математика. Физика. 2017. № 20. С. 34–39.
6. Дмитриев В. И. Об интерполяции операторов в пространствах L_p // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260, № 5. С. 1051–1054.
7. Дмитриев В. И. Об оценках интерполяционных орбит функций из $L_1 + L_\infty$ // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 62–71.
8. Овчинников В. И. Об оценках интерполяционных орбит // Мат. сб. 1981. Т. 114, № 4. С. 642–652.
9. Овчинников В. И. Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега // Функцион. анализ и его прил. 2005. Т. 39, № 1. С. 56–68.
10. Пастухова С. Е., Евсеева О. А. Асимптотика решения уравнения диффузии в периодической среде на больших временах и ее применение к оценкам усреднения // Рос. технолог. журн. 2017. Т. 5, № 5. С. 60–69.
11. Овчинников В. И. Интерполяционные функции и интерполяционная конструкция Лионса — Петре // Успехи мат. наук. 2014. Т. 69, № 4. С. 103–168.

Поступила в редакцию 10 июля 2023 г.

После доработки 12 декабря 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Дмитриев Вячеслав Иванович,
Журавлева Елена Вадимовна (ORCID 0000-0001-8607-9992),
Михайлова Ольга Юрьевна
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
mikhajlova@mirea.ru

Бурилич Ирина Николаевна
Курский государственный университет,
ул. Радищева, 33, Курск 305000
mois@kursksu.ru

МОДУЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ТЕЙХМЮЛЛЕРА И ВАРИАЦИЯ ИНТЕГРАЛА ДИРИХЛЕ

В. Н. Дубинин

Аннотация. Показывается, что изменение линии уровня гармонической функции с помощью классической вариации Адамара с малым параметром влечет за собой изменение интеграла Дирихле от этой функции порядка квадрата этого параметра. Как следствие дополняется известная теорема Тейхмюллера о сумме модулей двусвязных областей, на которые круговое кольцо разбивается континуумом, мало отличающимся от концентрической окружности.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.205

Ключевые слова: гармоническая функция, интеграл Дирихле, модуль двусвязной области, емкость конденсатора.

§ 1. Введение

Пусть $B = \{z : s < |z| < t\}$, $0 < s < t < \infty$, и пусть $\text{mod } D$ означает модуль двусвязной области $D \subset \mathbb{C}$, в частности

$$\text{mod } B = \frac{1}{2\pi} \log \frac{t}{s}.$$

Предположим, что континуум γ разбивает кольцо B на две непересекающиеся двусвязные области B_1 и B_2 . Согласно лемме Гретша величина

$$\Delta(B, \gamma) := \text{mod } B - \text{mod } B_1 - \text{mod } B_2 \quad (1)$$

неотрицательна и равна нулю лишь в случае, когда $\gamma = \{z : |z| = r\}$ при любом r , $s < r < t$. В 1938 г. Тейхмюллер [1] установил следующий результат. Если для достаточно малого $\delta > 0$

$$\Delta(B, \gamma) \leq \delta,$$

то существует число $C < \infty$, не зависящее от B и δ , такое, что

$$\frac{\sup\{|z| : z \in \gamma\}}{\inf\{|z| : z \in \gamma\}} \leq 1 + C\sqrt{\delta \log \frac{1}{\delta}}.$$

Это утверждение известно в литературе как модульная теорема Тейхмюллера (см. [2, предложение 9.5; 3, следствие 2.34; 4, теорема 4.1], а также [5, гл. VI, п. 6, «узкая теорема о модулях»]). Тейхмюллер [1] указал на точность полученной оценки, понимаемую в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует континуум

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282.

γ_ε , уклоняющийся от некоторой концентрической окружности в B на величину ε , в то время как

$$\Delta(B, \gamma_\varepsilon) \leq \delta(\varepsilon), \quad \delta(\varepsilon) \asymp \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{1}{\varepsilon}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Явный вид такого континуума в «двойственной задаче» приводит Бертильссон [3, пример 2.26] (см. также [4, гл. V, упражнение 10]). Наличие множителя $1/(\log \frac{1}{\varepsilon})$ вызвано тем, что одна из точек континуума $\gamma(\varepsilon)$ приближается к окружности при $\varepsilon \rightarrow 0$ на порядок медленнее, чем все остальные. Естественно предположить, что при более равномерном стремлении произвольного континуума γ_ε к окружности будет выполняться

$$\Delta(B, \gamma_\varepsilon) = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (2)$$

Действительно, в работе [6] было замечено, что (2) имеет место, когда кривая γ_ε получается из концентрической окружности с помощью деформации Адамара, заданной в общем случае следующим образом. Пусть γ — гладкая кривая в $\mathbb{C}$, и пусть φ — вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция на кривой γ . Для произвольного достаточно малого $\varepsilon > 0$ определим «деформацию» кривой γ вида

$$\delta n(z) := \varepsilon \varphi(z) + O(\varepsilon^2), \quad (3)$$

при которой γ переходит в кривую

$$\gamma_\varepsilon = \{z_\varepsilon = z + \delta n(z)i \, dz/|dz| : z \in \gamma\}.$$

Здесь $\delta n(z)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на γ и $O(\varepsilon^2)$ оценивается на γ равномерно¹⁾. Доказательство (2) в случае (3) можно получить с помощью вариационной формулы Адамара для интеграла Дирихле [7, (ПЗ.11); 6, формула (2.2)]. Мы существенно использовали (2) в [6] для получения тонкого свойства гриновой энергии дискретного заряда.

В данной заметке приводится прямое доказательство более общего, чем (2), результата. Кроме того, мы уходим от рассмотрения двусвязных областей к областям произвольной связности. В этой связи вместо сравнения модулей кольцевых областей изучается поведение интеграла Дирихле от гармонической функции при изменении ее линии уровня с помощью деформации (3). Перейдем к точным формулировкам.

Пусть B — конечносвязная область плоскости $\mathbb{C}$, граница которой состоит из аналитических дуг и замкнутых аналитических жордановых кривых. Предположим, что функция u непрерывна в $\bar{B}$, гармоническая в B , отлична от постоянной и удовлетворяет граничным условиям смешанной задачи Дирихле [4, теорема В.4]. Точнее, на некоторых замкнутых дугах (кривых) на границе B (Γ_1) она принимает постоянные значения, а на остальных участках границы B (Γ_2) производная по нормали $\partial u/\partial n$ обращается в нуль (последнее множество может быть пустым). Рассмотрим совокупность $\{\gamma\}$, состоящую из конечного числа попарно не пересекающихся замкнутых жордановых дуг либо замкнутых жордановых кривых в B , расположенных на линиях уровня функции u (возможно разных)²⁾. Каждой кривой $\gamma \in \{\gamma\}$ сопоставим кривую γ_ε , $\varepsilon > 0$,

¹⁾В отличие от оригинала [7, §3] мы вводим в (3) очевидное дополнительное слагаемое $O(\varepsilon^2)$, полезное для приложений.

²⁾То есть кривых, на которых u принимает постоянные значения.

полученную из γ с помощью деформации (3), где φ — вещественная дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на объединении $\bigcup \gamma$, $\varphi \neq 0$ на $\bigcup \gamma$ и носитель функции $\delta n(z)$ не содержит концов дуг $\gamma \in \{\gamma\}$. Здесь и ниже символы $\cup(\Sigma)$ означают объединение (сумму) по всем кривым $\gamma \in \{\gamma\}$. Параметр ε считаем настолько малым, что все кривые γ_ε попарно не пересекаются и лежат в B . Пусть функция u_ε непрерывна на множестве $\overline{B}$, гармоническая в $B_\varepsilon := B \setminus \bigcup \gamma_\varepsilon$, удовлетворяет граничным условиям функции u на ∂B и принимает на каждой кривой γ_ε постоянное значение, равное значению функции u на соответствующей при деформации (3) кривой γ . Введем обозначение

$$I(v, \Omega) = \iint_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dy.$$

Теорема 1. В приведенных выше условиях выполняется асимптотическое равенство

$$I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B) \asymp \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4)$$

Заметим, что в силу принципа Дирихле левая часть в (4) неотрицательная.

Доказательство (4) существенно опирается на результаты Келлога о поведении частных производных гармонической функции на границе области ее определения [8].

Мы ограничились случаем, когда функции u и u_ε являются потенциальными для обобщенных конденсаторов [9]. Из доказательства теоремы 1 видно, что равенство (4) выполняется также при замене граничных условий для этих функций существованием их непрерывных первых частных производных в окрестности ∂B .

В связи с (2) и (4) возникает предположение о справедливости соотношения

$$\Delta(B, \gamma_\varepsilon) \asymp \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (5)$$

Однако при $\delta n(z) \equiv c\varepsilon$, где c — постоянная, имеем $\Delta(B, \gamma_\varepsilon) = 0$. Автору известны примеры конкретных деформаций (3), при которых действительно выполняется (5). Возможно, случай $\delta n(z) \equiv c\varepsilon$ единственный, при котором это не имеет места.

В заключительной части статьи приводится следствие теоремы 1 в случае, когда B является круговым кольцом (неравенство (9)). Показывается, что это следствие вновь дает равенство (2).

§ 2. Доказательство теоремы 1

Можно считать, что граница области B состоит из аналитических жордановых кривых. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon = \frac{u - u_\varepsilon}{\varepsilon},$$

заданную на множестве B_ε , и функцию f , гармоническую в $B \setminus \bigcup \gamma$, непрерывную в $\overline{B}$ и удовлетворяющую следующим граничным условиям:

$$f = 0 \text{ на } \Gamma_1, \quad \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_2, \quad f(z) = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial n}(z), \quad z \in \gamma \quad \forall \gamma \in \{\gamma\}.$$

Здесь и ниже дифференцирование производится по положительно ориентированной нормали к соответствующей кривой. Ввиду равномерной непрерывности функции f для любого числа $\delta > 0$ и любой кривой $\gamma \in \{\gamma\}$ при достаточно малом ε выполняется

$$|f(z) - f(z_\varepsilon)| < \delta, \quad z \in \gamma.$$

По формуле Тейлора в точке $z_\varepsilon \in \gamma_\varepsilon$ имеем

$$f_\varepsilon(z_\varepsilon) = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial n}(z) + O(\varepsilon) = f(z) + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

причем оценка $O(\varepsilon)$ равномерная по $z \in \gamma$. Отсюда

$$|f_\varepsilon(z_\varepsilon) - f(z_\varepsilon)| \leq \delta$$

для всех $z_\varepsilon \in \gamma_\varepsilon$ и при достаточно малом ε . Из принципа максимума для гармонических функций с учетом леммы Хопфа вытекает неравенство

$$|f_\varepsilon(z) - f(z)| \leq \delta$$

для всех $z \in B_\varepsilon$ и, следовательно, на любом компактном подмножестве множества $B \setminus \bigcup \gamma$ при малых ε . Таким образом, функции f_ε сходятся к функции f при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно внутри $B \setminus \bigcup \gamma$ вместе со своими частными производными.

Каждой дуге $\gamma_\varepsilon, \gamma \in \{\gamma\}$, сопоставим двусвязную область Q_{γ_ε} , одна граничная компонента которой есть γ_ε , а другая — некоторая замкнутая аналитическая жорданова кривая. Замкнутой кривой $\gamma_\varepsilon, \gamma \in \{\gamma\}$, сопоставим две непересекающиеся двусвязные области $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ и $Q_{\gamma_\varepsilon}^-$, у которых одна граничная компонента есть γ_ε , а другая — замкнутая аналитическая жорданова кривая. Мы считаем, что области $Q_{\gamma_\varepsilon}, Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ и $Q_{\gamma_\varepsilon}^-$ попарно не пересекаются, а их замыкания содержатся в B . По теореме Келлога [8, теорема 1] заключаем, что функция f_ε имеет в замыканиях областей $Q_{\gamma_\varepsilon}, Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ и $Q_{\gamma_\varepsilon}^-$ непрерывные первые частные производные. Нам понадобится равномерная по ε ограниченность производной $\partial f_\varepsilon / \partial n$ на границе этих областей.

В работе [8] краевая задача для гармонических функций (в нашем случае для функции f_ε) сводится к рассмотрению интегральных уравнений. Решение f_ε , пусть в $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$, представляется в виде суммы потенциалов двойного слоя W_ε и простого слоя V_ε [8, § 3]. Частные производные от этих потенциалов на границе $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ являются интегралами по границе $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ от функций, непрерывно зависящих от области $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ (от ε), а также (в случае W_ε) от производной $\partial f_\varepsilon / \partial s$ граничных значений f_ε вдоль касательной к границе $Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ (см. [8, с. 111, 114, 120 и § 6]). Из предыдущего видно, что производная $\partial f_\varepsilon / \partial s$ непрерывна и ограничена равномерно по ε как на кривой γ_ε (по определению), так и на $(\partial Q_{\gamma_\varepsilon}^+) \setminus \gamma_\varepsilon$ (из равномерной сходимости в $B \setminus \bigcup \gamma$ частных производных f_ε). Ввиду представления (22) в [8] заключаем, что первые частные производные функции f_ε ограничены на $\partial Q_{\gamma_\varepsilon}^+$ равномерно по ε . Аналогично убеждаемся в равномерной по ε ограниченности первых частных производных функции f_ε на $\partial Q_{\gamma_\varepsilon}^-$. В случае области Q_{γ_ε} также имеет место ограниченность этих производных, в чем легко убедиться, отобразив конформно Q_{γ_ε} на жорданову область и применив предыдущие рассуждения к соответствующей суперпозиции (носитель $\delta n(z)$ не содержит концов γ).

Всюду ниже кривую $\gamma \in \{\gamma\}$ будем обозначать также через γ^+ , а противоположную ей по направлению кривую — через γ^- . Аналогично $\gamma_\varepsilon^+ = \gamma_\varepsilon$ и γ_ε^- — кривая, противоположная γ_ε^+ . Применяя формулу Грина³⁾, получаем

$$I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B) = I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B_\varepsilon)$$

³⁾В нашем случае эта формула верна в силу ограничения на рост градиента функций u и u_ε в окрестности концевых точек Γ_2 (ср. [4, с. 455; 9, с. 306]).

$$\begin{aligned}
& -2 \sum \left[\int_{\gamma_\varepsilon^+} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial n} |dz| + \int_{\gamma_\varepsilon^-} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial n} |dz| \right] \\
& = I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) + I(u, B_\varepsilon) + 2 \int_{\partial B_\varepsilon} (u_\varepsilon - u + u) \frac{\partial u}{\partial n} |dz| = I(u - u_\varepsilon, B_\varepsilon) \\
& = - \int_{\partial B_\varepsilon} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| \\
& \quad (\text{граница области } B \text{ ориентирована в положительном направлении}) \\
& = - \sum \left[\int_{\gamma_\varepsilon^+} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| + \int_{\gamma_\varepsilon^-} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| \right].
\end{aligned}$$

Из приведенных выше соотношений выделим следующие два равенства:

$$I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B) = - \sum \left[\int_{\gamma_\varepsilon^+} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| + \int_{\gamma_\varepsilon^-} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| \right], \quad (6)$$

$$I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B) = I(u - u_\varepsilon, B_\varepsilon). \quad (7)$$

Учитывая полученную выше информацию о функции f_ε , приходим к оценке

$$\left| \int_{\gamma_\varepsilon^\pm} (u - u_\varepsilon) \frac{\partial(u - u_\varepsilon)}{\partial n} |dz| \right| = \varepsilon^2 \left| \int_{\gamma_\varepsilon^\pm} f_\varepsilon \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial n} |dz| \right| = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Следовательно, равенство (6) дает

$$I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B) = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство противоположного соотношения с применением равенства (6) потребовало бы более точной оценки производной $\partial f_\varepsilon / \partial n$ и, следовательно, более глубокого анализа доказательства теоремы 1 работы [8]. Проще заметить, что в условиях теоремы 1 найдется поддуга $\gamma_0 \subset \gamma$, $\gamma \in \{\gamma\}$, на которой $\varphi(z) \neq 0$, а по лемме Хопфа $\partial u / \partial n \neq 0$ на γ_0 . Следовательно, $f \neq 0$ в $B \setminus \bigcup \gamma$. Поэтому в $B \setminus \bigcup \gamma$ найдется замкнутый круг E , для которого

$$I(f, E) \neq 0.$$

При достаточно малом ε круг E содержится в B_ε и выполняется

$$I(u - u_\varepsilon, B_\varepsilon) \geq I(u - u_\varepsilon, E) = \varepsilon^2 I(f_\varepsilon, E) = \varepsilon^2 I(f, E) + o(\varepsilon^2) \geq \varepsilon^2 \frac{I(f, E)}{2}.$$

С учетом (7) получаем

$$\varepsilon^2 = O(I(u_\varepsilon, B_\varepsilon) - I(u, B)), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 1 доказана.

§ 3. Модули и емкости

Произвольной двусвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с невырожденными граничными компонентами E_0 и E_1 сопоставим конденсатор $C = (E_0, E_1)$, емкость которого равна

$$\text{cap } C = I(\omega, D).$$

Здесь ω — «потенциальная функция» конденсатора C , непрерывная в $\overline{D}$, гармоническая в D , равная нулю на E_0 и единице на E_1 . Хорошо известно, что

$$\text{cap } C = \frac{1}{\text{mod } D}$$

(подробнее о емкостях см. [9]). Введем обозначения

$$B(\tau_1, \tau_2) = \{z : \tau_1 < |z| < \tau_2\}, \quad T(\tau) = \{z : |z| = \tau\}.$$

Окружность $\gamma = T(r)$ является линией уровня функции

$$u(z) = \frac{\log(|z|/t)}{\log(s/t)}, \quad 0 < s < r < t < \infty.$$

Кривая γ_ε , полученная из γ деформацией (3), разбивает кольцо $B = B(s, t)$ на непересекающиеся двусвязные области B_1 и B_2 , пусть $T(s) \subset \partial B_1$. В случае $\varphi \neq 0$ теорема 1 дает

$$I(u_\varepsilon, B_1 \cup B_2) - I(u, B) \asymp \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (8)$$

где u_ε — функция, непрерывная в $\overline{B}$, гармоническая в $B_1 \cup B_2$, равная единице на $T(s)$, нулю на $T(t)$ и

$$u_\varepsilon = \delta := \frac{\log(r/t)}{\log(s/t)} \text{ на } \gamma_\varepsilon.$$

Функция u потенциальна для конденсатора $C = (T(t), T(s))$, $(u_\varepsilon - \delta)/(1 - \delta)$ — потенциальная функция конденсатора $C_1 = (\gamma_\varepsilon, T(s))$, а u_ε/δ — потенциальная функция конденсатора $C_2 = (T(t), \gamma_\varepsilon)$. Поэтому (8) переписывается в виде

$$0 \leq (1 - \delta)^2 \text{cap } C_1 + \delta^2 \text{cap } C_2 - \text{cap } C \asymp \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

В терминах модулей это неравенство выглядит следующим образом:

$$0 \leq \frac{\text{mod}^2 B_1^*}{\text{mod } B_1} + \frac{\text{mod}^2 B_2^*}{\text{mod } B_2} - \text{mod } B \asymp \varepsilon^2, \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (9)$$

где $B_1^* = B(s, r)$, $B_2^* = B(r, t)$, а деформация (3) удовлетворяет условию $\varphi \neq 0$.

Покажем, что из неравенства (9) вытекает (2). Можно считать, что $\varphi \neq 0$. Обозначим через B'_1 и B'_2 круговые кольца вида $B(s, r(\varepsilon))$ и $B(r(\varepsilon), t)$, площади которых в логарифмической метрике $(2\pi|z|)^{-1}|dz|$ равны площадям в той же метрике областей B_1 и B_2 соответственно. Очевидно, $r(\varepsilon) = r + c\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, где c — некоторая постоянная, зависящая от функции φ . По лемме Ренгеля [9, ч. 5.5]

$$\text{mod } B_1 \leq \text{mod } B'_1, \quad \text{mod } B_2 \leq \text{mod } B'_2.$$

Вычитая из (9) равенство

$$\frac{\text{mod}^2 B_1^*}{\text{mod } B'_1} + \frac{\text{mod}^2 B_2^*}{\text{mod } B'_2} - \text{mod } B = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

получаем

$$\frac{\operatorname{mod}^2 B_1^*}{\operatorname{mod} B_1} - \frac{\operatorname{mod}^2 B_1^*}{\operatorname{mod} B_1'} + \frac{\operatorname{mod}^2 B_2^*}{\operatorname{mod} B_2} - \frac{\operatorname{mod}^2 B_2^*}{\operatorname{mod} B_2'} \leq C\varepsilon^2,$$

где C — некоторая постоянная. Отсюда

$$\operatorname{mod} B_k' - \operatorname{mod} B_k = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad k = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{mod} B - \operatorname{mod} B_1 - \operatorname{mod} B_2 \\ &= \operatorname{mod} B_1' - \operatorname{mod} B_1 + \operatorname{mod} B_2' - \operatorname{mod} B_2 = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \end{aligned}$$

что означает справедливость равенства (2). Аналогично устанавливаются неравенства, дополняющие теорему 4.2 и следствие 4.3 из [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Teichmüller O.* Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen // *Deutsche Math.* 1938. V. 3. P. 621–678.
2. *Pommerenke Ch.* Boundary behaviour of conformal maps. New York: Springer, 1992.
3. *Bertilsson D.* On Brennan's conjecture in conformal mapping. Doctoral Thesis. Stockholm: Royal Institute of Technology, 1999.
4. *Garnett J. B., Marshall D. E.* Harmonic measure. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2005.
5. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. М.: Физматгиз, 1960.
6. *Дубинин В. Н.* О гриновой энергии дискретного заряда на концентрических окружностях // *Изв. РАН. Сер. мат.* 2023. Т. 87, № 2. С. 69–88.
7. *Шиффер М.* Некоторые новые результаты в теории конформных отображений // *Курант, Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности.* М.: Изд-во иностр. лит., 1953. С. 234–299.
8. *Kellogg O. D.* Harmonic functions and Green's integral // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1912. V. 13, N 1. P. 109–132.
9. *Dubinin V. N.* Condenser capacities and symmetrization in geometric function theory. Basel: Birkhauser; Springer, 2014.

Поступила в редакцию 24 сентября 2023 г.

После доработки 24 сентября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Дубинин Владимир Николаевич (ORCID 0000-0002-4403-155X)
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7, Владивосток 690041;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
dubinin@iam.dvo.ru

УДК 514.752.8+514.763+514.765+514.764.227

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ И КРАТЧАЙШИЕ НЕКОТОРЫХ
СУБРИМАНОВЫХ МЕТРИК НА ГРУППАХ ЛИ
 $SU(1, 1) \times \mathbb{R}$ И $SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$ С ТРЕХМЕРНЫМИ
ПОРОЖДАЮЩИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

И. А. Зубарева

Аннотация. Найдены геодезические, множества разреза, первая каустика, выделены кратчайшие для некоторых левоинвариантных субримановых метрик на группах Ли $SU(1, 1) \times \mathbb{R}$ и $SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.206

Ключевые слова: группа Ли, алгебра Ли, геодезическая, левоинвариантная субриманова метрика, кратчайшая, первая каустика, множество разреза.

§ 1. Введение

В статье [1] Г. М. Мубаракзянова получена классификация (с точностью до изоморфизма) всех четырехмерных вещественных алгебр Ли. В [2] приведена модифицированная версия этой классификации, указаны все автоморфизмы рассматриваемых алгебр Ли и дана классификация всех связных групп Ли с этими алгебрами Ли. Согласно [2] четырехмерная вещественная алгебра Ли $\mathfrak{g}_{3,6} \oplus \mathfrak{g}_1$ имеет базис E_1, E_2, E_3, E_4 , удовлетворяющий следующим коммутационным соотношениям:

$$[E_1, E_2] = -E_3, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2, \quad [E_i, E_4] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Очевидно, что $\mathfrak{g}_{3,6} \oplus \mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$.

Известно (см., например, [2]), что $\mathfrak{so}(2, 1)$ — единственная трехмерная алгебра Ли, односвязная группа Ли $\tilde{A}$ которой не имеет линейного представления. Всякая связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$ либо изоморфна $\tilde{A}$, либо есть n -листное покрытие A_n укороченной группы Лоренца $SO_0(2, 1)$, $n \geq 1$. При этом $SO_0(2, 1)$ изоморфна $PSL(2, \mathbb{R})$, двулистное покрытие A_2 изоморфно $SL(2, \mathbb{R})$, четырехлистное покрытие A_4 изоморфно $M_p(2, \mathbb{R})$.

Согласно [2] существует шесть типов связных групп Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$:

- 1) односвязная группа Ли $\tilde{A} \times \mathbb{R}$;
- 2) n -листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / \exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3) \cong A_n \times \mathbb{R}$ группы $SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$;
- 3) группа $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / \exp(\mathbb{Z}E_4) \cong \tilde{A} \times \mathbb{T}$;

Работа автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

4) n -листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / \exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3 + E_4))$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / \exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3 + E_4))$;

5) n -листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / (\exp(2n\pi\mathbb{Z}E_3) \exp(\mathbb{Z}E_4)) \cong A_n \times \mathbb{T}$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / (\exp(\mathbb{Z}E_3) \exp(\mathbb{Z}E_4)) \cong \mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{T}$;

6) n^2 -листные покрытия $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / (\exp(n\mathbb{Z}(2\pi E_3 + \alpha E_4)) \exp(n\mathbb{Z}E_4))$ группы Ли $(\tilde{A} \times \mathbb{R}) / (\exp(\mathbb{Z}(2\pi E_3 + \alpha E_4)) \exp(\mathbb{Z}E_4))$.

В [3] доказано следующее

Предложение 1. *Трехмерное подпространство $\mathfrak{q}$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$ порождает $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{so}(2, 1)$ и проекция $\mathfrak{q}$ на $\mathfrak{so}(2, 1)$ вдоль $\mathbb{R}$ не является двумерной подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1)$. Существует пять неэквивалентных классов эквивалентных, т. е. переводимых друг в друга автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$, таких подпространств.*

Положим

$$\mathfrak{q}_1 = \mathrm{span}\{E_1, E_4 - E_3, E_2\}, \quad \mathfrak{q}_2 = \mathrm{span}\{E_1, E_4, E_2\}, \quad \mathfrak{q}_3 = \mathrm{span}\{E_1, E_4, E_3\},$$

$$\mathfrak{q}_4 = \mathrm{span}\{E_1, E_4 - E_2, E_3\}, \quad \mathfrak{q}_5 = \mathrm{span}\{E_4 + (E_2 - E_3)/2, E_2 + E_3, E_1\}.$$

Нетрудно показать, что каждое подпространство $\mathfrak{q}_i$, $i = 1, \dots, 5$, порождает алгебру Ли $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$ и эти подпространства попарно неэквивалентны.

С использованием результатов работы [4] в этой статье найдены геодезические субримановы метрики d_i , $i = 1, 2$, на связной группе Ли G (с единичным элементом Id) с алгеброй Ли $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$, заданных левоинвариантными вполне неголономными распределениями D_i с $D_i(\mathrm{Id}) = \mathfrak{q}_i$ и скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$ с ортонормированным базисом $E_1, E_4 - E_3, E_2$ при $i = 1$ и E_1, E_4, E_2 при $i = 2$. С помощью методов и результатов работ [5–11] найдены множества разреза, первые каустики, выделены непродолжаемые кратчайшие на группах Ли $\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}$ и $\mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$, снабженных этими метриками.

§ 2. Предварительные результаты

Теорема 1. *Пусть задан базис*

$$e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4 - E_3, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3 \quad (2)$$

алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$, $D_1(\mathrm{Id}) = \mathrm{span}(e_1, e_2, e_3)$ и на $D_1(\mathrm{Id})$ задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Тогда левоинвариантное распределение D_1 на связной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вполне неголономно и пара $(D_1(\mathrm{Id}), \langle \cdot, \cdot \rangle_1)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_1 на G . При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_1 = \gamma_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G, d_1) , удовлетворяющая условию $\gamma_1(0) = \mathrm{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_1(t) = \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4), \quad (3)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — некоторые вещественные постоянные, причем

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \quad (4)$$

Доказательство. В силу (1), (2)

$$[e_1, e_2] = [e_1, e_4] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_2, e_3] = -[e_3, e_4] = e_1, \quad [e_2, e_4] = 0. \quad (5)$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы 1.

Из (5) и [3, теорема 3] следует, что каждая аномальная экстремаль в (G, d_1) нестрога аномальна, следовательно, является геодезической. По [4, теорема 9] всякая нормальная геодезическая $\gamma_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $\gamma_1(0) = \text{Id}$, в (G, d_1) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\gamma}(t) = dl_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \psi_1(t)e_1 + \psi_2(t)e_2 + \psi_3(t)e_3, \quad |u(0)| = 1, \quad (6)$$

причем абсолютно непрерывные функции $\psi_i(t)$, $i = 1, \dots, 4$, удовлетворяют системе ОДУ

$$\dot{\psi}_j(t) = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^3 C_{ij}^k \psi_i(t) \psi_k(t), \quad j = 1, \dots, 4. \quad (7)$$

Здесь C_{ij}^k — структурные константы в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

С учетом (5) система (7) принимает вид

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_3(\psi_2 + \psi_4), \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1(\psi_2 + \psi_4), \quad \dot{\psi}_4 = 0.$$

Зададим произвольные начальные данные этой системы: $\psi_i(0) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$; $\psi_4(0) = -\alpha_2 - \beta$. Нетрудно видеть, что тогда $\psi_4(t) \equiv -\alpha_2 - \beta$,

$$\psi_1(t) = \alpha_1 \cos \beta t + \alpha_3 \sin \beta t, \quad \psi_2(t) \equiv \alpha_2, \quad \psi_3(t) = -\alpha_1 \sin \beta t + \alpha_3 \cos \beta t, \quad (8)$$

причем условие $|u(0)| = 1$ равносильно равенству (4).

Докажем, что (3) является решением дифференциального уравнения (6). Из (5) следует, что $(\text{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$, где (f) обозначает матрицу линейного отображения $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 . Здесь e_{ij} — матрица четвертого порядка, у которой в i -й строке и j -м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Дифференцируя (3) и используя (6), (8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1(t) &= \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4) \exp(-t\beta e_4) \\ &+ \gamma_1(t)(-\beta e_4) = \gamma_1(t) \exp(t\beta e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4) \exp(-t\beta e_4) + \gamma_1(t)(-\beta e_4) \\ &= \gamma_1(t) \exp(t\beta e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \exp(-t\beta e_4) + \gamma_1(t)(\beta e_4) + \gamma_1(t)(-\beta e_4) \\ &= \gamma_1(t) \cdot [\text{Ad}(\exp(t\beta e_4))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)] \\ &= \gamma_1(t) \cdot [\exp(t\beta(\text{ad}(e_4)))(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)] \\ &= \gamma_1(t) \cdot [(\alpha_1 \cos \beta t + \alpha_3 \sin \beta t)e_1 + \alpha_2 e_2 + (-\alpha_1 \sin \beta t + \alpha_3 \cos \beta t)e_3] \\ &= \gamma_1(t)u(t). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 2. Пусть задан базис

$$e_1 = E_1, \quad e_2 = E_4, \quad e_3 = E_2, \quad e_4 = -E_3 \quad (9)$$

алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$, $D_2(\text{Id}) = \text{span}(e_1, e_2, e_3)$ и на $D_2(\text{Id})$ задано скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3 . Тогда левоинвариантное распределение D_2 на связной группе Ли G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ вполне неголономно и пара $(D_2(\text{Id}), \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ определяет левоинвариантную субриманову метрику d_2 на G . При этом каждая параметризованная длиной дуги геодезическая $\gamma_2 = \gamma_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (G, d_2) , удовлетворяющая условию $\gamma_2(0) = \text{Id}$, есть произведение двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_2(t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4), \quad (10)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ — некоторые вещественные постоянные и выполнено (4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (1), (9)

$$[e_1, e_2] = [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 0, \quad [e_1, e_3] = e_4, \quad [e_1, e_4] = e_3, \quad [e_3, e_4] = -e_1. \quad (11)$$

Отсюда вытекает первое утверждение теоремы 2.

Из (11) и [3, теорема 3] следует, что каждая аномальная экстремаль субриманова пространства (G, d_2) нестрого аномальна, стало быть, является геодезической. При этом с учетом (11) система (7) принимает вид

$$\dot{\psi}_1 = -\psi_3\psi_4, \quad \dot{\psi}_2 = 0, \quad \dot{\psi}_3 = \psi_1\psi_4, \quad \dot{\psi}_4 = 0.$$

Зададим произвольные начальные данные этой системы: $\psi_i(0) = \alpha_i$, $i = 1, 2, 3$, $\psi_4(0) = -\beta$. Нетрудно видеть, что тогда $\psi_4(t) \equiv -\beta$, а функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, определены формулами (8). Из (11) следует, что $(\text{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$. Повторяя вычисления последнего абзаца доказательства теоремы 1, получаем, что (10) — решение ОДУ (6). Это завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Предложение 2. Для любых $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$, $\beta \in \mathbb{R}$ и для каждого $t \in \mathbb{R}$

$$\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_2; t) \exp(t\alpha_2 e_4).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (2), (3), (9), (10)

$$\begin{aligned} & \gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta + \alpha_2; t) \exp(t\alpha_2 e_4) \\ &= \exp(t(\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_4 + \alpha_3 E_2 - (\beta + \alpha_2) E_3)) \exp(t(\beta + \alpha_2) E_3) \exp(-t\alpha_2 E_3) \\ &= \exp(t(\alpha_1 E_1 + \alpha_2(E_4 - E_3) + \alpha_3 E_2 - \beta E_3)) \exp(t\beta E_3) = \gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t). \quad \square \end{aligned}$$

Предложение 3. Каждая параметризованная длиной дуги аномальная экстремаль субриманова пространства (G, d_i) , $i = 1, 2$, нестрого аномальна и является одной из двух однопараметрических подгрупп

$$\gamma_i(0, \alpha_2, 0, \beta; t) = \exp(t\alpha_2 e_2), \quad \alpha_2 = \pm 1, \quad \beta \in \mathbb{R},$$

или ее левым сдвигом на (G, d_i) .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha_2 = \pm 1$, то $\alpha_1 = \alpha_3 = 0$ в силу (4). Из (3), (5), (10), (11) и равенства $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$, если $[X, Y] = 0$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ (см., например, [12, гл. II, § 5]) следует, что при любом $\beta \in \mathbb{R}$

$$\gamma_i(0, \alpha_2, 0, \beta; t) = \exp(t(\alpha_2 e_2 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4) = \exp(\alpha_2 t e_2).$$

Отсюда и из [3] вытекают остальные утверждения предложения 3. $\square$

Предложение 4. Пусть $\gamma_i(t) = \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, — геодезическая в (G, d_i) , $i = 1, 2$, определяемая формулами (3), (10). Тогда для каждого $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\gamma_i(t_0)^{-1} \gamma_i(t) = \gamma_i(\alpha_1 \cos \beta t_0 + \alpha_3 \sin \beta t_0, \alpha_2, -\alpha_1 \sin \beta t_0 + \alpha_3 \cos \beta t_0, \beta; t - t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На основании (3), (10), равенства $(\text{ad}(e_4)) = e_{13} - e_{31}$, упомянутого в доказательствах теорем 1 и 2, и формулы (5) в [12, гл. II, § 5] получаем

$$\begin{aligned} & \gamma_i(t_0)^{-1} \gamma_i(t) = \exp(t_0 \beta e_4) \exp(-t_0(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \\ & \quad \times \exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t\beta e_4) \\ &= \exp(t_0 \beta e_4) \exp((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \exp(-t_0 \beta e_4) \exp(-(t - t_0) \beta e_4) \\ &= \exp[\text{Ad}(\exp(t_0 \beta e_4))((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))] \cdot \exp(-(t - t_0) \beta e_4) \\ &= \exp[\exp(\text{ad}(t_0 \beta e_4))((t - t_0)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4))] \cdot \exp(-(t - t_0) \beta e_4) \\ &= \exp((t - t_0)((\alpha_1 \cos \beta t_0 + \alpha_3 \sin \beta t_0) e_1 + \alpha_2 e_2 \\ & \quad + (-\alpha_1 \sin \beta t_0 + \alpha_3 \cos \beta t_0) e_3 + \beta e_4)) \cdot \exp(-(t - t_0) \beta e_4) \\ &= \gamma_i(\alpha_1 \cos \beta t_0 + \alpha_3 \sin \beta t_0, \alpha_2, -\alpha_1 \sin \beta t_0 + \alpha_3 \cos \beta t_0, \beta; t - t_0). \quad \square \end{aligned}$$

§ 3. Субримановы геодезические на $SU(1, 1) \times \mathbb{R}$

Напомним, что $SU(1, 1)$ есть группа Ли комплексных матриц второго порядка с определителем 1, сохраняющих индефинитную эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ в $\mathbb{C}^2$:

$$SU(1, 1) = \left\{ (A, B) := \begin{pmatrix} A & B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C}, |A|^2 - |B|^2 = 1 \right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{su}(1, 1)$ группы Ли $SU(1, 1)$ есть

$$\left\{ \mathfrak{su}(1, 1) = \begin{pmatrix} iX & Y \\ \bar{Y} & -iX \end{pmatrix} \mid X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{C} \right\}, \quad \mathfrak{su}(1, 1) \cong \mathfrak{so}(2, 1).$$

Тривиальное абелево расширение

$$SU(1, 1) \times \mathbb{R} = \left\{ (A, B, v) := \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ \bar{B} & \bar{A} & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix} \mid A, B \in \mathbb{C}, |A|^2 - |B|^2 = 1; v \in \mathbb{R} \right\} \quad (12)$$

группы Ли $SU(1, 1)$ есть группа Ли, алгебра Ли $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathbb{R}$ которой имеет базис E_1, E_2, E_3, E_4 , удовлетворяющий (1):

$$E_1 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad E_2 = \frac{i}{2}(e_{12} - e_{21}), \quad E_3 = \frac{i}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad E_4 = e_{33}; \quad (13)$$

здесь через e_{ij} , $i, j = 1, \dots, 3$, обозначена матрица третьего порядка, у которой в i -й строке и в j -м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Группа Ли $SU(1, 1)$ изоморфна специальной линейной группе Ли $SL(2, \mathbb{R})$, состоящей из всех вещественных матриц второго порядка с определителем 1. Искомый изоморфизм $\Omega : SU(1, 1) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$, задаваемый формулой

$$\Omega(g) = hgh^{-1}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \Omega(A, B) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(A) + \operatorname{Im}(B) & \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Re}(B) \\ \operatorname{Re}(B) - \operatorname{Im}(A) & \operatorname{Re}(A) - \operatorname{Im}(B) \end{pmatrix},$$

естественным образом можно продлить до изоморфизма $\tilde{\Omega} : SU(1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что дифференциал $d\tilde{\Omega}(\operatorname{Id})$ есть изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathbb{R}$ и $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$, переводящий базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами (13), в одноименный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами

$$E_1 = \frac{1}{2}(e_{12} + e_{21}), \quad E_2 = \frac{1}{2}(e_{11} - e_{22}), \quad E_3 = \frac{1}{2}(e_{12} - e_{21}), \quad E_4 = e_{33}.$$

Теорема 3. Пусть

$$m_2 = t/2, \quad n_2 = 1, \quad \text{если } \beta^2 = 1 - \alpha_2^2; \quad (14)$$

$$m_2 = \frac{\operatorname{sh} \frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}, \quad n_2 = \operatorname{ch} \frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}, \quad \text{если } \beta^2 < 1 - \alpha_2^2; \quad (15)$$

$$m_2 = \frac{\sin \frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}, \quad n_2 = \cos \frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2}, \quad \text{если } \beta^2 > 1 - \alpha_2^2. \quad (16)$$

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, определяемая равенством (10), задается формулами

$$A = \left(n_2 \cos \frac{\beta t}{2} + \beta m_2 \sin \frac{\beta t}{2} \right) + \left(n_2 \sin \frac{\beta t}{2} - \beta m_2 \cos \frac{\beta t}{2} \right) i, \quad (17)$$

$$B = m_2 \sqrt{1 - \alpha_2^2} \left[\cos \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) - \sin \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) i \right], \quad v = \alpha_2 t, \quad (18)$$

где

$$\cos \varphi_0 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}, \quad \sin \varphi_0 = -\frac{\alpha_3}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}. \quad (19)$$

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, определяемая формулой (10), равна $\tilde{\gamma}_2(t) = (e, \alpha_2 t)$, $t \in \mathbb{R}$, где e — единичная 2×2 -матрица.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$. Используя (4), (9), (13), (14)–(16), нетрудно получить, что

$$\exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) = \begin{pmatrix} n_2 - \beta m_2 i & (\alpha_1 + \alpha_3 i) m_2 & 0 \\ (\alpha_1 - \alpha_3 i) m_2 & n_2 + \beta m_2 i & 0 \\ 0 & 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix},$$

$$\exp(-t\beta e_4) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta t}{2} + i \sin \frac{\beta t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos \frac{\beta t}{2} - i \sin \frac{\beta t}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

На основании (10) осталось перемножить эти матрицы.

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ утверждение теоремы 3 следует из предложения 3, (9), (13). $\square$

Следующая теорема сразу вытекает из теоремы 3 и предложений 1, 2.

Теорема 4. Пусть

$$m_1 = \frac{t}{2}, \quad n_1 = 1, \quad \text{если } (\alpha_2 + \beta)^2 = 1 - \alpha_2^2;$$

$$m_1 = \frac{\text{sh} \frac{t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\alpha_2 + \beta)^2}}{2}}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\alpha_2 + \beta)^2}}, \quad n_1 = \text{ch} \frac{t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\alpha_2 + \beta)^2}}{2},$$

если $(\alpha_2 + \beta)^2 < 1 - \alpha_2^2$;

$$m_1 = \frac{\sin \frac{t\sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}}{2}}{\sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}}, \quad n_1 = \cos \frac{t\sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}}{2},$$

если $(\alpha_2 + \beta)^2 > 1 - \alpha_2^2$.

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$, определяемая равенством (3), задается формулами

$$A = \left(n_1 \cos \frac{\beta t}{2} + (\alpha_2 + \beta) m_1 \sin \frac{\beta t}{2} \right) + \left(n_1 \sin \frac{\beta t}{2} - (\alpha_2 + \beta) m_1 \cos \frac{\beta t}{2} \right) i,$$

$$B = m_1 \sqrt{1 - \alpha_2^2} \left[\cos \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) - \sin \left(\frac{\beta t}{2} + \varphi_0 \right) i \right], \quad v = \alpha_2 t,$$

причем выполнено (19).

При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = (A, B, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$, определяемая равенством (3), задается формулами

$$A = e^{-i(\alpha_2 t/2)}, \quad B \equiv 0, \quad v = \alpha_2 t. \quad (20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическую $\tilde{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$ будем также обозначать через $\tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, если выполнено (19).

§ 4. Множество разреза и первая каустика в $\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}$

Следующие определения адаптированы из обзора [10] для рассматриваемой в § 2 группы Ли G .

Момент времени $\hat{t} > 0$ называется сопряженным временем для нормальной геодезической $\gamma_i(t) = \mathrm{Exp}_i(\lambda, t)$, $\lambda = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta) \in C := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$, субриманова пространства (G, d_i) , задаваемой формулой (3) при $i = 1$ или (10) при $i = 2$, если $(\lambda, \hat{t})$ есть критическая точка экспоненциального отображения, т. е. дифференциал

$$(\mathrm{Exp}_i)_{*(\lambda, \hat{t})} : T_{(\lambda, \hat{t})}(C \times \mathbb{R}_+) \rightarrow T_{\hat{g}_i} G, \quad \text{где } \hat{g}_i = \mathrm{Exp}_i(\lambda, \hat{t}),$$

вырожденный. Первое сопряженное время вдоль геодезической $\gamma_i(t)$ есть

$$t_{\mathrm{conj}}^1 = \inf\{t > 0 \mid t - \text{сопряженное время вдоль } \gamma_i(\cdot)\}.$$

Если $t_{\mathrm{conj}}^1 > 0$, то $\gamma_i(t_{\mathrm{conj}}^1)$ называется первой сопряженной точкой.

Первой каустикой субриманова пространства (G, d_i) называется множество Conj_i^1 всех первых сопряженных точек нормальных геодезических $\gamma_i(t)$, $\gamma_i(0) = \mathrm{Id}$. Множеством разреза (для точки Id) субриманова пространства (G, d_i) называется множество Cut_i всех концов $g \in G$ непродолжаемых за g кратчайших, соединяющих Id с точкой g .

Легко показать, учитывая предложение 3, что $t_{\mathrm{conj}}^1 = 0$ вдоль нестрого аномальной экстремали $\gamma_i(t) = \exp(\pm t e_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Предложение 5. Положим

$$w_1 = \sqrt{(\alpha_2 + \beta)^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad w_2 = \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \cup (i\mathbb{R}_+). \quad (21)$$

Момент времени $\hat{t} > 0$ — сопряженное время вдоль геодезической $\tilde{\gamma}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, в $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, тогда и только тогда, когда $w_i > 0$ и

$$\sin \frac{w_i \hat{t}}{2} \left(\sin \frac{w_i \hat{t}}{2} - \frac{w_i \hat{t}}{2} \cos \frac{w_i \hat{t}}{2} \right) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i = 2$. Для удобства записи опустим нижний индекс у функций $\tilde{\gamma}_2(t)$, w_2 , $n_2(t)$, $m_2(t)$. На основании (12), (13)

$$\tilde{\gamma}(t) = 2B_1(t)E_1 + 2B_2(t)E_2 + 2A_2(t)E_3 + e^{\alpha_2 t}E_4 + 2A_1(t)E_5,$$

где $E_5 = \frac{1}{2}(E - E_4)$, E — единичная матрица третьего порядка,

$$A_1 = \mathrm{Re}(A), \quad A_2 = \mathrm{Im}(A), \quad B_1 = \mathrm{Re}(B), \quad B_2 = \mathrm{Im}(B). \quad (22)$$

Пусть $w \neq 0$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 4 в [13], получаем, что если при $t \neq 0$ векторы $\tilde{\gamma}'_t, \tilde{\gamma}'_{\alpha_2}, \tilde{\gamma}'_\beta, \tilde{\gamma}'_{\varphi_0}$ линейно зависимы, то

$$\frac{m(2m - nt)(1 - \alpha_2^2)t}{4w^2} = 0, \quad (23)$$

т. е. $m = 0$ или $m = nt/2$. Если $m = 0$, то $\tilde{\gamma}'_{\varphi_0} = 0$; если $m = nt/2$, то $\tilde{\gamma}'_\beta \parallel \tilde{\gamma}'_{\varphi_0}$. Таким образом, в обоих случаях векторы $\tilde{\gamma}'_t, \tilde{\gamma}'_{\alpha_2}, \tilde{\gamma}'_\beta, \tilde{\gamma}'_{\varphi_0}$ линейно зависимы.

Заметим, что при $w^2 < 0$ равенство (23) выполнено только при $t = 0$, т. е. при $w^2 < 0$ геодезическая $\tilde{\gamma}(t)$ не содержит сопряженных точек.

Пусть теперь $w = 0$. Легко видеть, что при $t \neq 0$ векторы $\tilde{\gamma}'_t, \tilde{\gamma}'_{\alpha_2}, \tilde{\gamma}'_{\varphi_0}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $t\tilde{\gamma}'_t - \alpha_2\tilde{\gamma}'_{\alpha_2}$ и $\tilde{\gamma}'_{\varphi_0}$ коллинеарны. В этом случае необходимо, чтобы

$$t[(B_1)'_{\varphi_0}(B_2)'_t - (B_1)'_t(B_2)'_{\varphi_0}] - \alpha_2[(B_1)'_{\varphi_0}(B_2)'_{\alpha_2} - (B_1)'_{\alpha_2}(B_2)'_{\varphi_0}] = 0. \quad (24)$$

Из (14) и (18) вытекает, что $(B_1)'_{\varphi_0} = B_2$, $(B_2)'_{\varphi_0} = -B_1$. Поэтому равенство (24) можно записать в виде

$$t(B_1^2 + B_2^2)'_t - \alpha_2(B_1^2 + B_2^2)'_{\alpha_2} = 0.$$

Вследствие (18) $B_1^2 + B_2^2 = t^2(1 - \alpha_2^2)/4$. Получаем

$$0 = t(t^2(1 - \alpha_2^2)/4)'_t - \alpha_2(t^2(1 - \alpha_2^2)/4)'_{\alpha_2} = t^2/2.$$

Следовательно, при $w = 0$ геодезическая $\tilde{\gamma}(t)$ не содержит сопряженных точек.

Случай $i = 1$ рассматривается аналогично. $\square$

Следствие 1. 1. n -е сопряженное время t_{conj}^n вдоль геодезической $\tilde{\gamma}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, где $w_i > 0$, в $(SU(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$t_{\text{conj}}^{2m-1} = \frac{2\pi m}{w_i}, \quad t_{\text{conj}}^{2m} = \frac{2x_m}{w_i}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\text{tg } x = x$.

2. Первая каустика Conj_i^1 субриманова пространства $(SU(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\text{Conj}_i^1 = \{(A, B, v) \in SU(1, 1) \times \mathbb{R} \mid |A| = 1, B = 0, v \in \mathbb{R}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следствия 1 вытекает из предложения 5. Далее, в силу теорем 3 и 4

$$\tilde{\gamma}_j(t_{\text{conj}}^1) = \tilde{\gamma}_j\left(\frac{2\pi}{w_j}\right) = \left(-e^{i(\beta\pi/w_j)}, 0, \frac{2\alpha_2\pi}{w_j}\right), \quad j = 1, 2. \quad (25)$$

Рассмотрим функции

$$f_j(\alpha_2, \beta) = \frac{\beta\pi}{w_j}, \quad v_j(\alpha_2, \beta) = \frac{2\alpha_2\pi}{w_j}, \quad (\alpha_2, \beta) \in (-1, 1) \times \mathbb{R}, \quad w_j > 0, \quad j = 1, 2.$$

В силу (21) области значений функций $f_2(\alpha_2, \beta)$ и $v_2(\alpha_2, \beta)$ суть $\mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi]$ и $\mathbb{R}$ соответственно, причем

$$v_2(\alpha_2, \beta) = \frac{2\alpha_2\sqrt{f_2^2(\alpha_2, \beta) - \pi^2}}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}}.$$

Отсюда и из (25) получаем Conj_2^1 .

В силу (21) область значений каждой из функций $f_1(\alpha_2, \beta)$, $v_1(\alpha_2, \beta)$ есть действительная прямая $\mathbb{R}$ и

$$f_1(\alpha_2, \beta) + \frac{1}{2}v_1(\alpha_2, \beta) = f_2(\alpha_2, \alpha_2 + \beta) \in \mathbb{R} \setminus [-\pi, \pi].$$

Отсюда получаем Conj_1^1 . $\square$

Предложение 6. При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\tilde{\gamma}_i(t) = \exp(t\alpha_2 e_2)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, — метрическая прямая, т. е. для любых $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ отрезок $\tilde{\gamma}_i(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — кратчайшая.

Доказательство. Из теорем 3, 4 следует, что длина аномальной экстремали в $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, соединяющей Id и (A, B, v) , $0 \neq v \in \mathbb{R}$, равна $|v|$, а длина дуги нормальной геодезической $\tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, соединяющей эти элементы, равна $|v/\alpha_2| > |v|$. $\square$

Предложение 7. 1. Геодезическая $\tilde{\gamma}_1(t) = \tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, -\alpha_2; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$ — метрическая прямая.

2. Геодезическая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, 0; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$ — метрическая прямая.

Доказательство. Докажем п. 2. Пусть $\alpha_2^* \neq \pm 1$, $\varphi_0^* \in \mathbb{R}$, $T > 0$. Обозначим $(A, B, v) := \tilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, 0; T)$. Из теоремы 3 следует, что

$$A = \mathrm{ch} \frac{T\sqrt{1-\alpha_2^{*2}}}{2}, \quad |B| = \mathrm{sh} \frac{T\sqrt{1-\alpha_2^{*2}}}{2}, \quad v = \alpha_2^* T \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{v^2 + 4 \operatorname{arsh}^2 |B|}. \quad (26)$$

Предположим, что Id и (A, B, v) можно соединить еще одной геодезической субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, т. е. $(A, B, v) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t_0)$. Тогда $\beta \neq 0$ в силу (26) и (18). На основании теоремы 3

$$|B| = |m_2(t_0)|\sqrt{1-\alpha_2^2}, \quad v = \alpha_2 t_0. \quad (27)$$

Вследствие (26), (27)

$$|t_0| > T \quad \Leftrightarrow \quad |t_0|\sqrt{1-\alpha_2^2} > 2 \operatorname{arsh} |B|. \quad (28)$$

Лемма 1. Пусть $|B| > 0$, $0 < \mu < 1$, $0 < \eta \leq 1/|B|$. Тогда справедливы неравенства

$$\frac{|B|}{\sqrt{1+|B|^2}} < \operatorname{arsh} |B| < |B|, \quad \operatorname{arsh}(\mu|B|) > \mu \cdot \operatorname{arsh} |B|, \quad \arcsin(\eta|B|) > \eta \cdot \operatorname{arsh} |B|.$$

Доказательство. Для доказательства первого неравенства достаточно заметить, что функции $f_1(\varkappa) = \varkappa - \operatorname{arsh} \varkappa$, $f_2(\varkappa) = \operatorname{arsh} \varkappa - \frac{\varkappa}{\sqrt{1+\varkappa^2}}$ возрастают на луче $[0, +\infty)$ и $f_1(0) = f_2(0) = 0$.

Для доказательства второго неравенства достаточно заметить, что заданная на отрезке $[0, 1]$ функция $F_2(\varkappa) = \operatorname{arsh}(\varkappa|B|) - \varkappa \operatorname{arsh} |B|$ возрастает на $[0, \varkappa_0]$ и убывает на $[\varkappa_0, 1]$, где $\varkappa_0 = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{arsh}^2 |B|} - \frac{1}{|B|^2}} \in (0, 1)$, и $F_2(0) = F_2(1) = 0$.

Для доказательства третьего неравенства достаточно заметить, что заданная на $[0, 1/|B|]$ функция $F_3(\varkappa) = \arcsin(\varkappa|B|) - \varkappa \operatorname{arsh} |B|$ возрастает и $F_3(0) = 0$, поскольку

$$F_3'(\varkappa) = \frac{|B|}{\sqrt{1-\varkappa^2|B|^2}} - \operatorname{arsh} |B| > |B| - \operatorname{arsh} |B| > 0. \quad \square$$

Пусть $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$. В силу (14) и (27) $|t_0| = \frac{2|B|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$. Отсюда, из (28) и леммы 1 следует, что $|t_0| > T$.

Пусть $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$. Обозначим $\varkappa = \sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}$. Из (15), (27), (28) следует, что

$$|t_0| = \frac{2}{\varkappa} \operatorname{arsh} \frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\varkappa^2 + \beta^2}} > T \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{arsh} \frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\varkappa^2 + |B|^2}} > \frac{\varkappa}{\sqrt{\varkappa^2 + |B|^2}} \operatorname{arsh} |B|.$$

Последнее неравенство выполнено на основании леммы 1.

Пусть $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$. Обозначим $\varkappa = \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}$. Из (16), (27), (28) следует, что

$$|t_0| = \frac{2}{\varkappa} \arcsin \frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\beta^2 - \varkappa^2}} > T \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin \frac{\varkappa|B|}{\sqrt{\beta^2 - \varkappa^2}} > \frac{\varkappa}{\sqrt{\beta^2 - \varkappa^2}} \operatorname{arsh} |B|.$$

Последнее неравенство выполнено на основании леммы 1.

П. 1 предложения 7 доказывается аналогичным образом. $\square$

Нам понадобится следующее известное

Предложение 8. Если в группе Ли с левоинвариантной субримановой метрикой две точки соединяются двумя разными параметризованными длиной дуги нормальными геодезическими одинаковой длины, то каждая из этих геодезических либо не является кратчайшей, либо не может быть частью более длинной кратчайшей.

Предложение 9. Если отрезок $\tilde{\gamma}_i(t) = \tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, геодезической субриманова пространства $(\mathrm{SU}(1, 1), d_i)$, $i = 1, 2$, является кратчайшей и $w_i > 0$, то $T \leq 2\pi/w_i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (25) следует, что $\tilde{\gamma}_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; 2\pi/w_i)$ не зависит от φ_0 . Остается применить предложение 8. $\square$

Предложение 10. Множество разреза Cut_2 в $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, соответствующее Id , есть $\mathrm{Cut}_2 = \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$, где

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R} \mid A \neq 1, B = 0, v \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}} = \{(A, B, v) \in \mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R} \mid \operatorname{Re}(A) < -1, \operatorname{Im}(A) = 0, v \in \mathbb{R}\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \subset \mathrm{Cut}_2$. Пусть $g = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}}$. В силу теоремы 3, предложения 6 и теоремы Кон-Фоссена о существовании кратчайших существует кратчайшая $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, соединяющая Id и g . Так как $B = 0$, то $m_2(T) = 0$ по теореме 3. Тогда $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$ и $T = \frac{2\pi}{w_2}$ (см. предложение 9); при этом в силу (25) $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T) = \tilde{\gamma}_2(\varphi, \alpha_2, \beta; T)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$. Значит, $g \in \mathrm{Cut}_2$ в силу предложения 8.

Покажем, что $\mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}} \subset \mathrm{Cut}_2$. Пусть $g = (A, B, v) \in \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ и $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая, соединяющая Id и g . Из (17) и (26) следует, что $A = -\sqrt{n_2^2(T) + \beta^2 m_2^2(T)}$, $\beta \neq 0$. Отсюда, из (18) и нечетности функции $m_2(t)$ вытекает, что

$$\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T) = \tilde{\gamma}_2(\beta T + \varphi_0 + \pi, \alpha_2, \beta; -T).$$

Поэтому $g \in \mathrm{Cut}_2$ на основании предложения 8.

Из теоремы 3 и предложений 6, 8 следует, что $(1, 0, v) \notin \mathrm{Cut}_2$, $v \in \mathbb{R}$. Предположим, что для некоторого $g = (A, B, v) \notin \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{loc}} \cup \mathrm{Cut}_2^{\mathrm{glob}}$ существуют две различные кратчайшие $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \leq t \leq T$, в $(\mathrm{SU}(1, 1), d_2)$,

соединяющие Id и g . Вследствие предложения 7 $\beta \neq 0$ и $\beta^* \neq 0$. Поскольку $v = \alpha_2 T = \alpha_2^* T$, то $\alpha_2 = \alpha_2^*$. Из (18) следует, что

$$m_2(\alpha_2, \beta, T) = m_2(\alpha_2, \beta^*, T). \quad (29)$$

Согласно (14)–(16) знак функции $m_2(\alpha_2, \beta, t) - \frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, совпадает со знаком числа $1 - \alpha_2^2 - \beta^2$. Тем самым числа $1 - \alpha_2^2 - \beta^2$ и $1 - \alpha_2^2 - \beta^{*2}$ имеют одинаковые знаки. Если эти числа равны нулю, то $|\beta| = |\beta^*|$. Если $1 - \alpha_2^2 - \beta^2 > 0$, то $|\beta| = |\beta^*|$ в силу (29), (15) и возрастания функции $\frac{\text{sh } x}{x}$ при $x > 0$.

Если $1 - \alpha_2^2 - \beta^2 < 0$, то $T < \frac{2\pi}{w_2}$ в силу предложения 9 и условия $g \notin \text{Cut}_2^{\text{loc}}$. Тогда $|\beta| = |\beta^*|$ на основании (29), (16) и убывания функции $\frac{\sin x}{x}$ на интервале $(0, \pi)$.

Пусть $\beta = \beta^*$. Из (18) и (29) следует, что либо $\varphi_0^* = \varphi_0 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $B = 0$. В первом случае кратчайшие $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \leq t \leq T$, совпадают, что невозможно. Во втором случае $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$ и $T = \frac{2\pi}{w_2}$, т. е. $g \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$ на основании следствия 1.

Пусть $\beta^* = -\beta$, $\beta > 0$. Из (14)–(16), (17) следует, что $\text{Im}(A)$ нечетна относительно β . Поэтому $\text{Im}(A) = 0$.

Если $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$, то в силу (14) равенство $\text{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде $\text{tg } \frac{\beta T}{2} = \frac{\beta T}{2}$. Тогда $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$ и с учетом (17) $\text{Re}(A) = \cos \frac{\beta T}{2} + \frac{\beta T}{2} \sin \frac{\beta T}{2} < 0$.

Если $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$, то в силу (15) равенство $\text{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде

$$\text{tg } kx = k \text{th } x, \quad k = \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}} > 0, \quad x = \frac{T\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}}{2} > 0. \quad (30)$$

Заметим, что функция $f(x) = \text{tg } kx - k \text{th } x$ возрастает на $(0, +\infty)$, $f(\frac{\pi}{k}) < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2k} - 0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2k} + 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2k} - 0} f(x) = +\infty.$$

Поэтому $f(x) > 0$ при $x \in (0, \frac{\pi}{2k})$, $f(x) < 0$ при $x \in (\frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{k}]$ и $f(x)$ имеет единственный нуль на интервале $(\frac{\pi}{k}, \frac{3\pi}{2k})$. Тогда $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$. С учетом (15), (17) и равенства $\text{Im}(A) = 0$

$$\sin \frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta m_2}{\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2}}, \quad \cos \frac{\beta T}{2} = \frac{-n_2}{\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2}} \Rightarrow \text{Re}(A) = -\sqrt{\beta^2 m_2^2 + n_2^2} < 0. \quad (31)$$

Пусть $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$. Если $n_2(T) = 0$, то $T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$, $m_2(T) = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$ в силу (16). Из равенства $\text{Im}(A) = 0$ вытекает, что $\cos \frac{\beta T}{2} = 0$, т. е. $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}} = 1 + 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Если $l = 1$, то $\text{Re}(A) = \beta m_2(T) \sin \frac{\beta T}{2} < 0$.

Если $l > 1$, то $\frac{\beta}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < \frac{3}{2\sqrt{2}}$ и $T > \frac{3\pi}{\beta}$. Из дальнейших рассуждений будет следовать, что в этом случае отрезок геодезической $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, не является кратчайшей.

Если $n_2(T) \neq 0$, то в силу (16) равенство $\text{Im}(A) = 0$ можно переписать в виде

$$\text{tg } kx = k \text{tg } x, \quad k = \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}} > 1, \quad x = \frac{T\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}{2} \in (0, \pi). \quad (32)$$

В доказательстве теоремы 6 в [8] показано, что уравнение (32) не имеет решений при $k \in (1, 2]$ и $k = 3$. Наименьший положительный корень этого уравнения принадлежит интервалу $(\frac{3\pi}{2k}, \frac{\pi}{k-1})$ при $2 < k < 3$, $(\frac{\pi}{k-1}, \frac{3\pi}{2k})$ при $k > 3$. Следовательно, $\cos x < 0$, $\cos kx > 0$ при $2 < k < 3$ и $\cos x > 0$, $\cos kx < 0$ при $k > 3$. Отсюда, учитывая (16), (17) и равенство $\text{Im}(A) = 0$, снова получаем (31). Тогда $g \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$, что невозможно. $\square$

Предложение 11. Пусть $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$. Тогда $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Верно и обратное.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $g_1 = (A, B, v) = \tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T)$. По теореме 4 $v = \alpha_2 T$. Тогда $g_2 := \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; T) = (Ae^{iv/2}, Be^{-iv/2}, v)$ на основании предложения 2 и (13). Предположим, что $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t)$, $0 \leq t \leq T_1 < T$, — кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, соединяющая Id и g_2 ; $v = \alpha_2^* T_1$ по теореме 4. В силу предложения 2 отрезок геодезической $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^* - \alpha_2^*; t)$, $0 \leq t \leq T_1$, в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$ соединяет Id и g_1 , что невозможно. Следовательно, $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Легко проверить, что если отрезок геодезической $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \leq t \leq T_2$, $T_2 > T$, — кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, то $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T)$, $0 \leq t \leq T_2$, $T_2 > T$, является кратчайшей в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$, что невозможно. Таким образом, $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$.

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом. $\square$

Предложение 12. Множество разреза Cut_1 в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$, соответствующее Id , есть $\text{Cut}_1 = \text{Cut}_1^{\text{loc}} \cup \text{Cut}_1^{\text{glob}}$, где

$$\text{Cut}_1^{\text{loc}} = \{(A, B, v) \in \text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R} \mid A \neq e^{-iv/2}, B = 0, v \in \mathbb{R}\},$$

$$\text{Cut}_1^{\text{glob}} = \{(A, B, v) \in \text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R} \mid B \neq 0, \pi - v/2 \in \text{Arg}(A), v \in \mathbb{R}\},$$

где $\text{Arg}(A)$ — множество всех значений аргумента комплексного числа A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множества разреза, предложений 2 и 11, теоремы 4 следует, что

$$g_2 = (A, B, v) \in \text{Cut}_2 \Leftrightarrow g_1 = (A, B, v) \exp(-vE_3) = (Ae^{-iv/2}, Be^{iv/2}, v) \in \text{Cut}_1.$$

Отсюда и из следствия 1 вытекает, что $g_2 \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$ тогда и только тогда, когда $g_1 \in \text{Cut}_1^{\text{loc}}$.

Если $g_2 \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$, т. е. $\text{Im}(A) = 0$, $\text{Re}(A) < -1$ на основании предложения 10, то $Ae^{-iv/2} = |\text{Re}(A)|e^{i(\pi-v/2)}$, $|B|^2 = \text{Re}^2(A) - 1 > 0$, поэтому $g_1 \in \text{Cut}_1^{\text{glob}}$.

Обратно, если $g_1 := (A_0, B_0, v_0) \in \text{Cut}_1^{\text{glob}}$, т. е. $B_0 \neq 0$, $\pi - \frac{v_0}{2} \in \text{Arg}(A_0)$, то $B = B_0 e^{-iv_0/2} \neq 0$, $A = A_0 e^{iv_0/2} = |A_0|e^{i(\pi-v_0/2)}e^{iv_0/2} = |A_0|e^{i\pi} = -|A_0| < -1$, следовательно, $g_2 = (A, B, v) \in \text{Cut}_1^{\text{glob}}$. $\square$

§ 5. Непродолжаемые кратчайшие в группе Ли $\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}$

Вследствие предложения 4 для поиска кратчайших в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, $i = 1, 2$, достаточно исследовать отрезки геодезических $\tilde{\gamma}_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, где $\tilde{\gamma}_i(0) = \text{Id}$.

Теорема 5. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ и $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Тогда

1. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$.
2. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = 1$, то $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\cos \frac{\beta T}{2} = \frac{-2}{\sqrt{4 + \beta^2 T^2}}, \quad \sin \frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta T}{\sqrt{4 + \beta^2 T^2}}.$$

3. Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < 1$, то $T \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right)$ удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

где k и x определены формулами (30).

4. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $T = \frac{3\pi}{|\beta|}$.

5. Если $\frac{3}{2\sqrt{2}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $\frac{3\pi}{|\beta|} < T < \frac{2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{4\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k и x определены формулами (32).

6. Если $1 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{2\sqrt{2}}$, то $\frac{2\pi}{|\beta|} < \frac{2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < T < \frac{3\pi}{|\beta|}$ и T удовлетворяет системе уравнений

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}} < 0,$$

где k и x определены формулами (32).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ и $\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая. В силу предложения 10 $g = (A, B, v) := \tilde{\gamma}_2(T)$ принадлежит объединению множеств $\operatorname{Cut}_2^{\operatorname{loc}}$ и $\operatorname{Cut}_2^{\operatorname{glob}}$.

Если $g \in \operatorname{Cut}_2^{\operatorname{loc}}$, то $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$, $m_2(T) = 0$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$ в силу теоремы 3.

Пусть теперь $g \in \operatorname{Cut}_2^{\operatorname{glob}}$. Тогда в силу (17)

$$n_2 \sin \frac{\beta T}{2} - \beta m_2 \cos \frac{\beta T}{2} = 0, \quad n_2 \cos \frac{\beta T}{2} + \beta m_2 \sin \frac{\beta T}{2} < 0. \quad (33)$$

Если $\beta^2 = 1 - \alpha_2^2$, то с учетом (14) условия (33) можно переписать в виде $\operatorname{tg} \frac{\beta T}{2} = \frac{\beta T}{2}$, $\cos \frac{\beta T}{2} < 0$, откуда следует $\pi < \frac{\beta T}{2} < \frac{3\pi}{2}$. Тогда

$$\cos \frac{\beta T}{2} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\beta T/2)}} = \frac{-2}{\sqrt{4 + \beta^2 T^2}}, \quad \sin \frac{\beta T}{2} = \frac{-\beta T}{\sqrt{4 + \beta^2 T^2}}$$

и п. 2 доказан.

Если $\beta^2 < 1 - \alpha_2^2$, то с учетом (15) условия (33) можно переписать в виде (30), причем $\cos kx < 0$. В доказательстве предложения 10 показано, что тогда $\pi < kx = \frac{|\beta|T}{2} < \frac{3\pi}{2}$, поэтому

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{th}^2 x}},$$

и п. 3 доказан.

Пусть $\beta^2 > 1 - \alpha_2^2$. Если $n_2(T) = 0$, то, как показано в доказательстве предложения 10, $T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}$ и $\frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}} = 3$. Отсюда следует п. 4.

Пусть $n_2(T) \neq 0$. С учетом (16) условия (33) можно переписать в виде (32), причем $\cos kx < 0$. В доказательстве теоремы 6 в [8] показано, что уравнение (32) не имеет решений при $1 < k \leq 2$ и $k = 3$.

Если $2 < k < 3$, то наименьший положительный корень уравнения (32) принадлежит интервалу $(\frac{3\pi}{2k}, \frac{\pi}{k-1})$. С учетом (32) это означает, что

$$\frac{3}{2\sqrt{2}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \frac{3\pi}{|\beta|} < T < \frac{2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < \frac{4\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x < 0$, $\operatorname{tg} x < 0$, $\cos kx > 0$ и на основании (33)

$$\cos kx = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}.$$

П. 5 доказан.

Если $k > 3$, то наименьший положительный корень уравнения (32) принадлежит интервалу $(\frac{\pi}{k-1}, \frac{3\pi}{2k})$. С учетом (32) это означает, что

$$1 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < \frac{3}{2\sqrt{2}}, \quad \frac{2\pi}{|\beta|} < \frac{2\pi(|\beta| + \sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{1 - \alpha_2^2}} < T < \frac{3\pi}{|\beta|}.$$

Тогда $\cos x > 0$, $\cos kx < 0$ и на основании (33)

$$\cos kx = \frac{-1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 kx}} = \frac{-1}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}, \quad \sin kx = \frac{-k \operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + k^2 \operatorname{tg}^2 x}}.$$

П. 6 доказан. $\square$

Из предложения 11 вытекает, что если $\tilde{\gamma}_1(\varphi_0, \alpha, \beta, t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\operatorname{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_1)$, то T удовлетворяет пп. 1–6 теоремы 5 после замены β на $\beta + \alpha_2$.

Следующее предложение непосредственно следует из предложений 2, 11.

Предложение 13. Для любого $(A, B, v) \in \operatorname{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}$

$$d_1(\operatorname{Id}, (A, B, v)) = d_2(\operatorname{Id}, (Ae^{iv/2}, Be^{-iv/2}, v)).$$

Доказательство следующей теоремы повторяет доказательство теоремы 7 в [8].

Теорема 6. Пусть $\beta \neq 0$ и $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\operatorname{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$. Тогда

1. Функция $T = T(|\beta|)$ строго убывает на $(0, \frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}}]$, $[\frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}}, +\infty)$ и строго возрастает на отрезке $[\frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}}]$.
2. Функция $T = T(|\beta|)$ непрерывна, кусочно вещественно аналитична и $T(0, +\infty) = (0, +\infty)$.
3. Функция $T = T(|\beta|)$ имеет локальный минимум $\frac{2\sqrt{2}\pi}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$ при $\frac{3\sqrt{1-\alpha_2^2}}{2\sqrt{2}}$ и локальный максимум $\frac{2\sqrt{3}\pi}{\sqrt{1-\alpha_2^2}}$ при $\frac{2\sqrt{1-\alpha_2^2}}{\sqrt{3}}$.

В работе [13] доказана следующая

Теорема 7. Пусть $\mathbb{H} \times \mathbb{R}$ — связная $(n+1)$ -мерная группа Ли (с единицей $\text{Id} = (e, 1)$) и алгеброй Ли $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_1$ с левоинвариантной субримановой метрикой d , порожденной вполне неголономным распределением D с

$$D(\text{Id}) = \text{span}(e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}) \subset \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}_1, \quad e_1, \dots, e_{n-1} \in \mathfrak{g}, \quad e_{n+1} = 1 \in \mathfrak{g}_1,$$

и заданным на $D(\text{Id})$ скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ с ортонормированным базисом $e_1, \dots, e_{n-1}, e_{n+1}$. Тогда $d^2(\text{Id}, (g, e^v)) = v^2 + d^2(\text{Id}, (g, 1))$ для любого $(g, e^v) \in \mathbb{H} \times \mathbb{R}$.

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы 7 и (9).

Предложение 14. Для любого $(A, B, v) \in SU(1, 1) \times \mathbb{R}$ выполнено

$$d_2^2(\text{Id}, (A, B, v)) = v^2 + d_2^2(\text{Id}, (A, B, 0)).$$

Из замечания 1 следует, что $d_2(\text{Id}, (A, B, v)) = d_2(\text{Id}, \tilde{\Omega}(A, B, v))$, где левоинвариантная внутренняя метрика d_2 в правой части равенства определена на $SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ теоремой 3. В [9] найдены точные формулы для $d_2(\text{Id}, \tilde{\Omega}(A, B, 0))$. Используя их и предложения 13, 14, можно легко получить точные формулы для $d_i(\text{Id}, (A, B, v))$, $i = 1, 2$.

§ 6. Субримановы геодезические на $\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{E}^{2,1}$ есть векторное пространство $\mathbb{R}^3$ с псевдоскалярным произведением $\{x, y\} := -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$. Группа Лоренца $\text{SO}_0(2, 1)$ — компонента связности единицы группы $P(2, 1)$ всех линейных сохраняющих псевдоскалярное произведение $\{ \cdot, \cdot \}$ преобразований пространства $\mathbb{E}^{2,1}$. Она состоит из тех элементов группы $P(2, 1)$, которые одновременно сохраняют и направление времени (первой координаты), и ориентацию пространства $\mathbb{E}^{2,1}$. Таким образом,

$$\text{SO}_0(2, 1) = \{g \in \text{GL}(3, \mathbb{R}) \mid g^T J g = J, \quad J = \text{diag}(-1, 1, 1), \quad \det(g) = 1, \quad g_{11} > 0\}.$$

Ее алгебра Ли есть $\mathfrak{so}(2, 1) = \{A \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R}) \mid A^T J + J A = 0, \quad J = \text{diag}(-1, 1, 1)\}$.

Будем работать с тривиальным абелевым расширением группы $\text{SO}_0(2, 1)$:

$$\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R} = \left\{ (C, v) := \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix} \mid C \in \text{SO}_0(2, 1), \quad v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Алгебра Ли $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$ группы Ли $\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$ имеет базис E_1, E_2, E_3, E_4 , удовлетворяющий (1):

$$E_1 = e_{13} + e_{31}, \quad E_2 = e_{12} + e_{21}, \quad E_3 = e_{23} - e_{32}, \quad E_4 = e_{44}, \quad (34)$$

где через e_{ij} , $i, j = 1, \dots, 4$, здесь обозначена матрица четвертого порядка, у которой в i -й строке и в j -м столбце стоит 1, а все остальные элементы равны нулю.

Для удобства обозначим через ρ_i , $i = 1, 2$, левоинвариантную субриманову метрику на $\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$ (с единицей Id), задаваемую вполне неголономным левоинвариантным распределением Δ_i с $\Delta_i(\text{Id}) = \text{span}(e_1, e_2, e_3)$, где векторы e_1, e_2, e_3 заданы формулами (2) при $i = 1$ и (9) при $i = 2$; на $\Delta_i(\text{Id})$ определено скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, относительно которого векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис.

Теорема 8. Пусть

$$\mu_2 = t, \quad \nu_2 = t^2/2, \quad \text{если } \beta^2 = 1 - \alpha_2^2;$$

$$\mu_2 = \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2})}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}}, \quad \nu_2 = \frac{\operatorname{ch}(t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}) - 1}{1 - \alpha_2^2 - \beta^2}, \quad \text{если } \beta^2 < 1 - \alpha_2^2;$$

$$\mu_2 = \frac{\sin(t\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}}, \quad \nu_2 = \frac{1 - \cos(t\sqrt{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\beta^2 + \alpha_2^2 - 1}, \quad \text{если } \beta^2 > 1 - \alpha_2^2.$$

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\gamma_2(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\operatorname{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, задаваемая формулой (10), равна $(C, v)(t)$, где $v(t) = \alpha_2 t$ и столбцы $C_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, матрицы $C(t) \in \operatorname{SO}_0(2, 1)$ имеют вид

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 + \nu_2(1 - \alpha_2^2) \\ \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \cos \varphi_0 - \beta \nu_2 \sin \varphi_0) \\ \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \sin \varphi_0 + \beta \nu_2 \cos \varphi_0) \end{pmatrix}, \\ C_2(t) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) + \beta \nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0)) \\ (1 - \beta^2 \nu_2) \cos \beta t + \beta \mu_2 \sin \beta t + (1 - \alpha_2^2) \nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) \cos \varphi_0 \\ -(1 - \beta^2 \nu_2) \sin \beta t + \beta \mu_2 \cos \beta t + (1 - \alpha_2^2) \nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix}, \\ C_3(t) &= \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) - \beta \nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0)) \\ (1 - \beta^2 \nu_2) \sin \beta t - \beta \mu_2 \cos \beta t + (1 - \alpha_2^2) \nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) \cos \varphi_0 \\ (1 - \beta^2 \nu_2) \cos \beta t + \beta \mu_2 \sin \beta t + (1 - \alpha_2^2) \nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_1 &= \sqrt{1 - \alpha_2^2} \sin \varphi_0, \quad \alpha_3 = \sqrt{1 - \alpha_2^2} \cos \varphi_0. \end{aligned} \quad (35)$$

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\operatorname{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, определяемая формулой (10), равна $\gamma_2(t) = (E, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где E — единичная квадратная матрица третьего порядка, $v(t) = \alpha_2 t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$. Используя (4), (9), (34), нетрудно получить, что

$$\begin{aligned} &\exp(t(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \beta e_4)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (1 - \alpha_2^2) \nu_2 & \alpha_3 \mu_2 + \alpha_1 \beta \nu_2 & \alpha_1 \mu_2 - \alpha_3 \beta \nu_2 & 0 \\ \alpha_3 \mu_2 - \alpha_1 \beta \nu_2 & 1 + (\alpha_3^2 - \beta^2) \nu_2 & \alpha_1 \alpha_3 \nu_2 - \beta \mu_2 & 0 \\ \alpha_1 \mu_2 + \alpha_3 \beta \nu_2 & \alpha_1 \alpha_3 \nu_2 + \beta \mu_2 & 1 + (\alpha_1^2 - \beta^2) \nu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 t \end{pmatrix}, \\ &\exp(-t \beta e_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta t & \sin \beta t & 0 \\ 0 & -\sin \beta t & \cos \beta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На основании (10) осталось перемножить эти матрицы.

Утверждение теоремы 8 для $\alpha_2 = \pm 1$ следует из предложения 3, (9), (34). $\square$

Следующая теорема сразу вытекает из теоремы 8, предложений 2 и 3.

Теорема 9. Пусть

$$\mu_1 = t, \quad \nu_1 = t^2/2, \quad \text{если } (\beta + \alpha_2)^2 = 1 - \alpha_2^2;$$

$$\mu_1 = \frac{\operatorname{sh}(t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\beta + \alpha_2)^2})}{\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\beta + \alpha_2)^2}}, \quad \nu_1 = \frac{\operatorname{ch}(t\sqrt{1 - \alpha_2^2 - (\beta + \alpha_2)^2}) - 1}{1 - \alpha_2^2 - (\beta + \alpha_2)^2},$$

если $(\beta + \alpha_2)^2 < 1 - \alpha_2^2$;

$$\mu_1 = \frac{\sin(t\sqrt{(\beta + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 - 1})}{\sqrt{(\beta + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 - 1}}, \quad \nu_1 = \frac{1 - \cos(t\sqrt{(\beta + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 - 1})}{(\beta + \alpha_2)^2 + \alpha_2^2 - 1},$$

если $(\beta + \alpha_2)^2 > 1 - \alpha_2^2$.

При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическая $\gamma_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, задаваемая формулой (3), равна $(C, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $v(t) = \alpha_2 t$ и столбцы $C_j(t)$, $j = 1, 2, 3$, матрицы $C(t) \in \mathrm{SO}_0(2, 1)$ имеют вид

$$C_1(t) = \begin{pmatrix} 1 + \nu_2(1 - \alpha_2^2) \\ \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \cos \varphi_0 - \beta \nu_2 \sin \varphi_0) \\ \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \sin \varphi_0 + \beta \nu_2 \cos \varphi_0) \end{pmatrix},$$

$$C_2(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) + (\beta + \alpha_2)\nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0)) \\ (1 - (\beta + \alpha_2)^2 \nu_2) \cos \beta t + (\beta + \alpha_2)\mu_2 \sin \beta t + (1 - \alpha_2^2)\nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) \cos \varphi_0 \\ -(1 - (\beta + \alpha_2)^2 \nu_2) \sin \beta t + (\beta + \alpha_2)\mu_2 \cos \beta t + (1 - \alpha_2^2)\nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix},$$

$$C_3(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \alpha_2^2}(\mu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) - (\beta + \alpha_2)\nu_2 \cos(\beta t + \varphi_0)) \\ (1 - (\beta + \alpha_2)^2 \nu_2) \sin \beta t - (\beta + \alpha_2)\mu_2 \cos \beta t + (1 - \alpha_2^2)\nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) \cos \varphi_0 \\ (1 - (\beta + \alpha_2)^2 \nu_2) \cos \beta t + (\beta + \alpha_2)\mu_2 \sin \beta t + (1 - \alpha_2^2)\nu_2 \sin(\beta t + \varphi_0) \sin \varphi_0 \end{pmatrix},$$

причем выполнено (35).

В случае $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая субриманова пространства $(\mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, определяемая формулой (3), равна $\gamma_1(t) = (C, v)(t)$, $t \in \mathbb{R}$, где $v(t) = \alpha_2 t$,

$$C(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_2 t & -\sin \alpha_2 t \\ 0 & \sin \alpha_2 t & \cos \alpha_2 t \end{pmatrix}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $\alpha_2 \neq \pm 1$ геодезическую $\gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)$ будем также обозначать через $\gamma_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, если выполнено (35).

§ 7. Множество разреза и первая каустика в $\mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$

Группа Ли $\mathrm{SU}(1, 1)$ есть односвязная накрывающая группы $\mathrm{SO}_0(2, 1)$; двулистное накрытие $\Pi : \mathrm{SU}(1, 1) \rightarrow \mathrm{SO}_0(2, 1)$ можно задать следующим образом:

$$\Pi(A, B) = \begin{pmatrix} A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 & 2(A_1 B_2 - A_2 B_1) & 2(A_1 B_1 + A_2 B_2) \\ 2(A_1 B_2 + A_2 B_1) & A_1^2 - A_2^2 - B_1^2 + B_2^2 & 2(A_1 A_2 + B_1 B_2) \\ 2(A_1 B_1 - A_2 B_2) & 2(B_1 B_2 - A_1 A_2) & A_1^2 - A_2^2 + B_1^2 - B_2^2 \end{pmatrix},$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 определены формулами (22). Тогда отображение

$$\tilde{\Pi} : \mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \quad \tilde{\Pi}(A, B, v) = (\Pi(A, B), v),$$

есть двулистное накрытие группы Ли $\mathrm{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}$ группой Ли $\mathrm{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}$.

Нетрудно проверить, что дифференциал $d\tilde{\Pi}(\text{Id})$ есть изоморфизм алгебр Ли $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathbb{R}$ и $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$, переводящий базис E_1, E_2, E_3, E_4 алгебры Ли $\mathfrak{su}(1, 1) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами (13), в одноименный базис алгебры Ли $\mathfrak{so}(2, 1) \oplus \mathbb{R}$, заданный формулами (34). Поэтому на основании теорем 1, 2 отображение $\tilde{\Pi} : (\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i) \rightarrow (\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, является локальной изометрией и для любых $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{S}^2$, $\beta, t \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t)) = \gamma_i(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta; t), \quad i = 1, 2. \quad (37)$$

Отсюда, из (36) и из следствия 1 вытекает

Следствие 2. 1. n -е сопряженное время t_{conj}^n вдоль геодезической $\gamma_i(t) = \gamma_i(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, где $w_i > 0$ (w_i определены формулами (21)), субриманова пространства $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$t_{\text{conj}}^{2m-1} = \frac{2\pi m}{w_i}, \quad t_{\text{conj}}^{2m} = \frac{2x_m}{w_i}, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\{x_1, x_2, \dots\}$ — упорядоченные по возрастанию положительные корни уравнения $\text{tg } x = x$.

2. Первая каустика Conj_i^1 субриманова пространства $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, имеет вид

$$\text{Conj}_j^1 = \left\{ (C, v) \in \text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R} \mid C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \psi, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 9 в [13].

Предложение 15. Пусть $\gamma_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, причем $\gamma_i(0) = \text{Id}$. Существует единственная кратчайшая $\tilde{\gamma}_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_i)$, такая, что $\tilde{\gamma}_i(0) = \text{Id}$ и $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_i(t)) = \gamma_i(t)$ для каждого $t \in [0, T]$.

Следующее предложение — непосредственное следствие (37) и предложений 6, 7.

Предложение 16. 1. При $\alpha_2 = \pm 1$ геодезическая $\gamma_i(t) = \exp(t\alpha_2 e_2)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, — метрическая прямая.

2. Геодезическая $\gamma_1(t) = \gamma_1(\varphi_0, \alpha_2, -\alpha_2; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$ — метрическая прямая.

3. Геодезическая $\gamma_2(t) = \gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, 0; t)$, $t \in \mathbb{R}$, субриманова пространства $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$ — метрическая прямая.

Предложение 17. Множество разреза Cut_2 в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, соответствующее Id , есть $\text{Cut}_2 = \text{Cut}_2^{\text{loc}} \cup \text{Cut}_2^{\text{glob}}$, где

$$\begin{aligned} \text{Cut}_2^{\text{loc}} &= \{\tilde{\Pi}(A, 0, v) \mid (A, 0, v) \in \text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, A \neq \pm 1, B = 0, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ (C, v) \in \text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R} \mid C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \psi \in (0, 2\pi), v \in \mathbb{R} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cut}_2^{\text{glob}} &= \{\tilde{\Pi}(A, B, v) \mid (A, B, v) \in \text{SU}(1, 1), \text{Re}(A) = 0, B \neq 0, v \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(C, v) \in \text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R} \mid c_{21} = -c_{12}, c_{31} = -c_{13}, c_{23} = c_{32}, c_{22} + c_{33} < -2, v \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\text{Cut}_2^{\text{loc}} \subset \text{Cut}_2$. Пусть $g \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$ и $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, соединяющая Id и g . В силу предложения 15 существует единственная кратчайшая $\tilde{\gamma}_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$ такая, что $\tilde{\gamma}_2(0) = \text{Id}$ и $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(t)) = \gamma_2(t)$, $t \in [0, T]$. Из следствия 2 и доказательства предложения 10 вытекает, что $\tilde{g} := \tilde{\gamma}_2(T)$ принадлежит множеству разреза субриманова пространства $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$, соответствующему Id , и существует отличная от $\tilde{\gamma}_2(t)$ кратчайшая $\tilde{\gamma}_2^*(t)$, $0 \leq t \leq T$, соединяющая Id и $\tilde{g}$, $\tilde{\Pi}(\tilde{g}) = g$. Тогда отрезок геодезической $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2^*(t)) \neq \gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$ является кратчайшей, соединяющей Id и g , и $g \in \text{Cut}_2$ в силу предложения 8.

Покажем, что $\text{Cut}_2^{\text{glob}} \subset \text{Cut}_2$. Пусть $g \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$ и $\gamma_2(t)$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, соединяющая Id и g . В силу предложения 15 существует единственная кратчайшая $\tilde{\gamma}_2(t) = \tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, в $(\text{SU}(1, 1) \times \mathbb{R}, d_2)$ такая, что $\tilde{\gamma}_2(0) = \text{Id}$ и $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(t)) = \gamma_2(t)$ для каждого $t \in [0, T]$. Обозначим $\tilde{\gamma}_2(T) = (A, B, v)$. Так как $\text{Re}(A) = 0$, то $\beta \neq 0$. Из (17), (18) вытекает, что тогда

$$\tilde{\gamma}_2(\pi + \varphi_0 + \beta T, \alpha_2, -\beta; T) = (\bar{A}, -B, v) = (-A, -B, v).$$

Отсюда и из (36), (37) следует, что $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(\pi + \varphi_0 + \beta T, \alpha_2, -\beta; T)) = \gamma_2(T) = g$, т. е. точки Id и g в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$ соединяются двумя разными параметризованными длиной дуги кратчайшими. По предложению 8 $g \in \text{Cut}_2$.

Из теоремы 3 и предложений 8, 16 следует, что $(E, v) \notin \text{Cut}_2$, где $v \in \mathbb{R}$, E — единичная матрица третьего порядка. Предположим, что для некоторого $g \notin \text{Cut}_2^{\text{loc}} \cup \text{Cut}_2^{\text{glob}}$ существуют две различные кратчайшие $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t))$, $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2^*(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; t))$, $0 \leq t \leq T$, в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$, соединяющие Id и g . Пусть $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; T) := (A, B, v)$, $\tilde{\gamma}_2^*(\varphi_0^*, \alpha_2^*, \beta^*; T) := (A^*, B^*, v^*)$. На основании (36) $(A, B, v) = (A^*, B^*, v^*)$ или $(A, B, v) = (-A^*, -B^*, v^*)$. В первом случае $g \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$, что невозможно. Во втором случае без ограничения общности можно считать, что $\text{Re}(A) < 0$. Поскольку $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, соединяет Id и (A, B, v) , причем $\text{Re}(A) < 0$, то найдется $t_1 \in (0, T)$ такое, что $\text{Re}(A_1) = 0$, где $\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t_1) = (A_1, B_1, v_1)$. Тогда $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t_1)) \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$. Это противоречит тому, что $\tilde{\Pi}(\tilde{\gamma}_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t))$, $0 \leq t \leq T$, — кратчайшая. $\square$

Доказательство следующего предложения аналогично доказательству предложения 11.

Предложение 18. Пусть $\gamma_1(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$. Тогда $\gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta + \alpha_2; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$. Верно и обратное.

Предложение 19. Множество разреза Cut_1 в $(\text{SO}_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, соответствующее Id , есть $\text{Cut}_1 = \text{Cut}_1^{\text{loc}} \cup \text{Cut}_1^{\text{glob}}$, где

$$\text{Cut}_1^{\text{loc}} = \left\{ (C, v) \mid C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}, \psi \neq v + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$\text{Cut}_1^{\text{glob}} = \left\{ (C^*, v) \mid C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cos v + c_{13} \sin v & c_{13} \cos v - c_{12} \sin v \\ c_{21} & c_{22} \cos v + c_{23} \sin v & c_{23} \cos v - c_{22} \sin v \\ c_{31} & c_{32} \cos v + c_{33} \sin v & c_{33} \cos v - c_{32} \sin v \end{pmatrix}, \right.$$

$$C = (c_{ij}) \in SO_0(2, 1), c_{21} = -c_{12}, c_{31} = -c_{13}, c_{23} = c_{32}, c_{22} + c_{33} < -2, v \in \mathbb{R} \left. \vphantom{C = (c_{ij}) \in SO_0(2, 1)} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения множества разреза, предложений 2, 18 и теоремы 4 следует, что $g_2 = (C, v) \in \text{Cut}_2$ тогда и только тогда, когда

$$g_1 = (C, v) \exp(-vE_3) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cos v + c_{13} \sin v & c_{13} \cos v - c_{12} \sin v \\ c_{21} & c_{22} \cos v + c_{23} \sin v & c_{23} \cos v - c_{22} \sin v \\ c_{31} & c_{32} \cos v + c_{33} \sin v & c_{33} \cos v - c_{32} \sin v \end{pmatrix} \in \text{Cut}_1.$$

Отсюда и из предложения 17 вытекает, что $g_2 \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$ ($g_2 \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$) тогда и только тогда, когда $g_1 \in \text{Cut}_1^{\text{loc}}$ (соответственно $g_1 \in \text{Cut}_1^{\text{glob}}$). $\square$

§ 8. Непродолжаемые кратчайшие в группе Ли $SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$

В силу предложения 4 для поиска кратчайших в $(SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_i)$, $i = 1, 2$, достаточно исследовать отрезки геодезических $\gamma_i(t)$, $0 \leq t \leq T$, где $\gamma_i(0) = \text{Id}$.

Теорема 10. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ и $\gamma_2(t) = \gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_2)$.

1. Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < 1$, то $T \in (\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \cos \frac{|\beta|T}{2} &= -\frac{|\beta| \text{sh}(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)}{\sqrt{(1-\alpha_2^2) \text{ch}^2(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2) - \beta^2}}, \\ \sin \frac{|\beta|T}{2} &= \frac{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2} \text{ch}(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2)}{\sqrt{(1-\alpha_2^2) \text{ch}^2(T\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}/2) - \beta^2}}. \end{aligned}$$

2. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = 1$, то $T \in (\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\cos \frac{\beta T}{2} = -\frac{\beta T/2}{\sqrt{1+\beta^2 T^2/4}}, \quad \sin \frac{\beta T}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 T^2/4}}.$$

3. Если $1 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T \in (\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$ удовлетворяет системе уравнений

$$\cos \frac{|\beta|T}{2} = -\frac{|\beta| \sin(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2 - (1-\alpha_2^2) \cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}}, \quad (38)$$

$$\sin \frac{|\beta|T}{2} = \frac{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1} \cos(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}{\sqrt{\beta^2 - (1-\alpha_2^2) \cos^2(T\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}/2)}}. \quad (39)$$

4. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $T = \frac{2\pi}{|\beta|}$.

5. Если $\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $T \in (\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|})$ удовлетворяет системе уравнений (38), (39).

6. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_2 \neq \pm 1$, $\beta \neq 0$ и $\gamma_2(t) = \gamma_2(\varphi_0, \alpha_2, \beta; t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая. В силу предложения 17 $g = \gamma_2(T)$

принадлежит объединению множеств $\text{Cut}_2^{\text{loc}}$ и $\text{Cut}_2^{\text{glob}}$. Из теоремы 3 следует, что

- 1) если $g \in \text{Cut}_2^{\text{loc}}$, то $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$ и $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}$ вследствие (14)–(16);
- 2) если $g \in \text{Cut}_2^{\text{glob}}$, то выполнено

$$n_2(T) \cos \frac{\beta T}{2} + \beta m_2(T) \sin \frac{\beta T}{2} = 0. \quad (40)$$

Пусть T_0 — наименьший положительный корень уравнения (40). Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \leq 1$, то $T = T_0$. Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$, то $T = \min\{T_0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}\}$.

Пусть $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < 1$. Определим на отрезке $[0, \frac{2\pi}{|\beta|}]$ функцию

$$F_1(t) = \text{ch} \frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2} \cos \frac{|\beta|t}{2} + \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}} \text{sh} \frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2} \sin \frac{|\beta|t}{2},$$

которая в силу (15) есть левая часть уравнения (40). Нетрудно видеть, что

$$F_1(0) = 1, \quad F_1\left(\frac{2\pi}{|\beta|}\right) < 0, \quad F_1'(t) = \frac{(1-\alpha_2^2) \cos \frac{|\beta|t}{2} \text{sh} \frac{t\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}{2}}{2\sqrt{1-\alpha_2^2-\beta^2}}.$$

Функция $F_1(t)$ возрастает на отрезке $[0, \frac{\pi}{|\beta|}]$, убывает на отрезке $[\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}]$ и имеет единственный нуль $T_0 \in (\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$. Отсюда следует п. 1.

Пусть $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = 1$. В силу (14) уравнение (40) запишется в виде

$$\cos \frac{|\beta|T}{2} + \frac{|\beta|T}{2} \sin \frac{|\beta|T}{2} = 0.$$

Легко видеть, что наименьший положительный корень этого уравнения принадлежит интервалу $(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$. Отсюда следует п. 2.

Пусть $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > 1$. Определим на отрезке $[0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}]$ функцию

$$F_2(t) = \cos \frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2} \cos \frac{|\beta|t}{2} + \frac{|\beta|}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}} \sin \frac{t\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}{2} \sin \frac{|\beta|t}{2}, \quad (41)$$

которая в силу (16) есть левая часть в (40). Нетрудно видеть, что $F_2(0) = 1$,

$$F_2\left(\frac{2\pi}{|\beta|}\right) = -\cos \frac{\pi\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}{|\beta|}, \quad F_2'(t) = \frac{(1-\alpha_2^2) \cos \frac{|\beta|t}{2} \sin \frac{t\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}{2}}{2\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}.$$

Ясно, что $F_2(t)$ возрастает на отрезках $[0, \frac{\pi}{|\beta|}]$, $[\frac{2\pi}{|\beta|}, \min\{\frac{3\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}\}]$ и убывает на отрезке $[\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|}]$.

Если $0 < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2(\frac{2\pi}{|\beta|}) < 0$. Следовательно, наименьший положительный корень T_0 уравнения (40) принадлежит интервалу $(\frac{\pi}{|\beta|}, \frac{2\pi}{|\beta|})$ и $T = T_0$. Отсюда и из (41) следует п. 3.

Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2(\frac{2\pi}{|\beta|}) = 0$. Отсюда следует п. 4.

Если $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} > \frac{2}{\sqrt{3}}$, то $F_2\left(\frac{2\pi}{|\beta|}\right) > 0$ и функция $F_2(t)$ положительна на отрезке $[0, \frac{2\pi}{|\beta|}]$. Если при этом $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} \leq \frac{3\pi}{|\beta|}$, т. е. $\frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}$, то $F_2(t) > 0$ на отрезке $[0, \frac{2\pi}{\sqrt{\beta^2+\alpha_2^2-1}}]$. Поэтому $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}}$, и п. 6 доказан.

Если же $\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} > \frac{3\pi}{|\beta|}$, т. е. $\frac{2}{\sqrt{3}} < \frac{|\beta|}{\sqrt{1-\alpha_2^2}} < \frac{3}{\sqrt{5}}$, то

$$F_2\left(\frac{3\pi}{|\beta|}\right) = -\cos \frac{\pi|\beta|}{\sqrt{\alpha_2^2+\beta^2-1}} < 0, \quad T_0 \in \left(\frac{2\pi}{|\beta|}, \frac{3\pi}{|\beta|}\right).$$

Отсюда и из (41) следует п. 5. $\square$

Из предложения 18 вытекает, что если $\gamma_1(\varphi_0, \alpha, \beta, t)$, $0 \leq t \leq T$, — непродолжаемая кратчайшая в $(SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}, \rho_1)$, то T удовлетворяет пп. 1–6 теоремы 7 после замены β на $\beta + \alpha_2$.

Следующее предложение непосредственно следует из предложений 2, 18.

Предложение 20. Для любого $(C, v) \in SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_1(\text{Id}, (C, v)) = \rho_2(\text{Id}, (\tilde{C}, v)),$$

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cos v - c_{13} \sin v & c_{13} \cos v + c_{12} \sin v \\ c_{21} & c_{22} \cos v - c_{23} \sin v & c_{23} \cos v + c_{22} \sin v \\ c_{31} & c_{32} \cos v - c_{33} \sin v & c_{33} \cos v + c_{32} \sin v \end{pmatrix}.$$

Следующее предложение — непосредственное следствие теоремы 7 и (9).

Предложение 21. Для любого $(C, v) \in SO_0(2, 1) \times \mathbb{R}$

$$\rho_2^2(\text{Id}, (C, v)) = v^2 + \rho_2^2(\text{Id}, (C, 0)).$$

В [7] найдены точные формулы для $\rho_2(\text{Id}, (C, 0))$. Используя их и предложения 20, 21, можно легко получить точные формулы для $\rho_i(\text{Id}, (C, v))$, $i = 1, 2$.

Благодарность. Автор благодарит В. Н. Берестовского за полезные дискуссии и замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. 1963. № 1. С. 114–123.
2. Biggs R., Remsing C. On the classification of real four-dimensional Lie groups // J. Lie Theory. 2016. V. 26. P. 1001–1035.
3. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.
4. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышев. сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 43–64.
5. Boscain U., Rossi F. Invariant Carnot–Carathéodory metrics on $\mathbb{S}^3$, $SO(3)$, $SL(2)$, and lens spaces // SIAM J. Control Optim. 2008. V. 47, N 4. P. 1851–1878.
6. Берестовский В. Н. (Локально) кратчайшие специальной субримановой метрики на группе $SO_0(2, 1)$ // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 1. С. 3–22.
7. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Субриманово расстояние в группе Ли $SO_0(2, 1)$ // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 4. С. 62–79.
8. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 527–542.
9. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Субриманово расстояние в группе Ли $SL(2)$ // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 22–35.

10. Сачков Ю. Л. Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификация и задачи, интегрируемые в элементарных функциях // Успехи. мат. наук. 2022. Т. 77, № 1. С. 109–176.
11. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Субриманово расстояние в группах Ли $SU(2)$ и $SO(3)$ // Мат. тр. 2015. Т. 18, № 2. С. 1–19.
12. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия, группы Ли и симметрические пространства. М.: Факториал Пресс, 2005.
13. Зубарева И. А. Геодезические и кратчайшие некоторых субримановых метрик на группах Ли $SU(2) \times \mathbb{R}$ и $SO(3) \times \mathbb{R}$ с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 521–539.

Поступила в редакцию 11 мая 2023 г.

После доработки 3 декабря 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Зубарева Ирина Александровна (ORCID 0000-0001-6937-9985)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

i.gribanova@mail.ru

АЛГЕБРЫ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ
ДЛЯ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ МИНИМАЛЬНЫХ
ТЕОРИЙ С ТРИВИАЛЬНЫМ
ОПРЕДЕЛИМЫМ ЗАМЫКАНИЕМ

Б. Ш. Кулпешов

Аннотация. Описываются алгебры бинарных формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и тривиальное определенное замыкание. Найден критерий коммутативности таких алгебр.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.207

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, счетно категоричная теория, слабая циклическая минимальность, циклически упорядоченная структура.

1. Предварительные сведения

Алгебры бинарных формул являются инструментом для описания связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определенных множеств. Будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [1, 2], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$ такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S_1(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, можно также найти в [1, 2]. В последние годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в [3–9].

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду далее рассматриваются L -структуры и предполагается, что L содержит символ тернарного отношения K , интерпретируемый как циклический порядок в этих структурах (если не оговорено противное).

Пусть $M = \langle M, < \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Если соединить две концевые точки множества M (возможно, ими являются $-\infty$ и $+\infty$), то получим циклический порядок. Более формально, *циклический порядок* описывается тернарным отношением K , удовлетворяющим следующим условиям:

- (co1) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow K(y, z, x))$;
- (co2) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \wedge K(y, x, z) \Leftrightarrow x = y \vee y = z \vee z = x)$;
- (co3) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \rightarrow \forall t [K(x, y, t) \vee K(t, y, z)])$;
- (co4) $\forall x \forall y \forall z (K(x, y, z) \vee K(y, x, z))$.

Следующее наблюдение связывает линейные и циклические порядки.

Данные исследования поддержаны Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP19674850).

Факт 1.1 [10, теорема 11.9]. (i) Если $\langle M, \leq \rangle$ — линейное упорядочение и K — тернарное отношение, получаемое из $\leq$ по правилу

$$K(x, y, z) := (x \leq y \leq z) \vee (z \leq x \leq y) \vee (y \leq z \leq x),$$

то K — отношение циклического порядка на M .

(ii) Если $\langle N, K \rangle$ — циклическое упорядочение и $a \in N$, то отношение $\leq_a$, определяемое на $M := N \setminus \{a\}$ по правилу

$$y \leq_a z := K(a, y, z),$$

является отношением линейного порядка на M .

Таким образом, любая линейно упорядоченная структура является циклически упорядоченной, поскольку отношение циклического порядка $\emptyset$ -определимо в произвольной линейно упорядоченной структуре. Однако обратное неверно. Следующий пример показывает, что существуют циклически упорядоченные структуры, не являющиеся линейно упорядоченными (в том смысле, что отношение линейного порядка не является $\emptyset$ -определимым в произвольной циклически упорядоченной структуре).

Пример 1.2 [11, 12]. Пусть $\mathbb{Q}_2^* := \langle \mathbb{Q}_2, K, L \rangle$ — циклически упорядоченная структура, где $L = \{\sigma_0^2, \sigma_1^2\}$, для которой выполняются следующие условия:

(i) носитель $\mathbb{Q}_2$ является счетным плотно упорядоченным подмножеством единичной окружности и при этом никакие две точки не образуют центральный угол π ;

(ii) для различных $a, b \in \mathbb{Q}_2$

$$(a, b) \in \sigma_0 \Leftrightarrow 0 < \arg(a/b) < \pi, \quad (a, b) \in \sigma_1 \Leftrightarrow \pi < \arg(a/b) < 2\pi,$$

где $\arg(a/b)$ означает величину центрального угла между a и b по часовой стрелке.

Действительно, можно проверить, что отношение линейного порядка не является $\emptyset$ -определимым в данной структуре. Ранее в [13] было установлено, что $\mathbb{Q}_2^*$ является счетно категоричной 1-транзитивной слабо циклически минимальной структурой.

Понятие слабой циклической минимальности было первоначально изучено в [13]. Пусть $A \subseteq M$, где $\mathcal{M}$ — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ справедливо $c \in A$. Структура $\mathcal{M}$ называется *слабо циклически минимальной*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является конечным объединением выпуклых множеств. Исследование слабо циклически минимальных структур было продолжено в работах [14–20].

Пусть $\mathcal{M}$ — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \text{Aut}(\mathcal{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группу G будем называть *k-однородной*, где $k \in \omega$, если для любых двух k -элементных множеств $A, B \subseteq M$ существует $g \in G$, для которого $g(A) = B$. Группа G называется *сильно однородной*, если G k -однородна для всех $k \in \omega$. Группа G называется *k-транзитивной*, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \dots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \dots, g(a_k) = b_k$. *Конгруэнцией* на $\mathcal{M}$ называется любое G -инвариантное отношение эквивалентности на $\mathcal{M}$. Группа G

называется *примитивной*, если G 1-транзитивна и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на $\mathcal{M}$.

Далее понадобится понятие определимого пополнения циклически упорядоченной структуры, введенное в [13]. Ее линейный аналог был введен в [21]. Сечением $C(x)$ в циклически упорядоченной структуре M является максимальное непротиворечивое множество формул вида $K(a, x, b)$, где $a, b \in M$. Сечение называется *алгебраическим*, если существует $c \in M$, реализующий его. В противном случае такое сечение называется *неалгебраическим*. Пусть $C(x)$ — неалгебраическое сечение. Если существует некоторый $a \in M$ такой, что либо $K(a, x, b) \in C(x)$ для всех $b \in M$, либо $K(b, x, a) \in C(x)$ для всех $b \in M$, то $C(x)$ называется *рациональным*. В противном случае такое сечение называется *иррациональным*. *Определимым сечением* в M называется сечение $C(x)$ со следующим свойством: существуют $a, b \in M$ такие, что $K(a, x, b) \in C(x)$ и множество $\{c \in M \mid K(a, c, b), K(a, x, c) \in C(x)\}$ определимое. *Определимое пополнение* $\overline{M}$ структуры M состоит из M вместе со всеми определимыми сечениями в M , являющимися иррациональными (по существу $\overline{M}$ состоит из концевых точек определимых подмножеств структуры M).

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1.3. (1) $K_0(x, y, z) := K(x, y, z) \wedge y \neq x \wedge y \neq z \wedge x \neq z$.

(2) $K(u_1, \dots, u_n)$ обозначает формулу, согласно которой все подкортежи длины 3 кортежа $\langle u_1, \dots, u_n \rangle$ (в возрастающем порядке) удовлетворяют K ; аналогичные обозначения для K_0 .

(3) Пусть A, B, C — попарно не пересекающиеся выпуклые подмножества циклически упорядоченной структуры M . Будем писать $K(A, B, C)$, если для любых $a, b, c \in M$ всякий раз, когда $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, имеем $K(a, b, c)$. Распишем данное обозначение естественным образом, например, употребляя запись $K_0(A, d, B, C)$, если $d \notin A \cup B \cup C$ и выполняется $K_0(A, d, B)$ и $K_0(d, B, C)$.

ОБОЗНАЧЕНИЯ 1.4 [13]. Пусть $F(x, y)$ — L -формула такая, что $F(M, b)$ — выпуклое бесконечное ко-бесконечное множество для каждого $b \in M$. Пусть $F^\ell(y)$ — формула, сообщающая, что y — левая (начальная) концевая точка множества $F(M, y)$:

$$\begin{aligned} \exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, y, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, y) \wedge t_1 \neq y \rightarrow \neg F(t_1, y)) \\ \wedge \forall t_2 (K(y, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq y \rightarrow F(t_2, y))]. \end{aligned}$$

Будем говорить, что $F(x, y)$ *выпуклая вправо*, если

$$M \models \forall y \forall x [F(x, y) \rightarrow F^\ell(y) \wedge \forall z (K(y, z, x) \rightarrow F(z, y))].$$

Очевидно, что если $F(x, y)$ выпуклая вправо, то $M \models \forall y F(y, y)$. Если $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — произвольные выпуклые вправо формулы, то говорят, что F_2 *больше чем* F_1 , если $F_1(M, a) \subset F_2(M, a)$ для любого $a \in M$. Если M 1-транзитивна и последнее условие имеет место для некоторого a , то оно имеет место для всех a . Это дает полное упорядочение конечного множества всех выпуклых вправо формул $F(x, y)$ (с точностью до эквивалентности в $\text{Th}(M)$).

Предположим, что для некоторого $a \in M$ формула $F(M, a)$ имеет правую концевую точку в M , и пусть $F^r(z)$ — формула, согласно которой z — правая концевая точка множества $F(M, a)$:

$$\begin{aligned} \exists z_1 \exists z_2 [K_0(z_1, z, z_2) \wedge \forall t_1 (K(z_1, t_1, z) \wedge t_1 \neq z \rightarrow F(t_1, a)) \\ \wedge \forall t_2 (K(z, t_2, z_2) \wedge t_2 \neq z \rightarrow \neg F(t_2, a))]. \end{aligned}$$

В общем случае правая концевая точка множества $F(M, a)$ может не лежать в M . Например, если для некоторого $a \in M$ выполняется $\text{del}(a) = \{a\}$, то для любой выпуклой вправо формулы $F(x, y)$ и любого $a \in M$ формула $F(M, a)$ не имеет правой концевой точки в M . Будем писать $f(y) := \text{rend } F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ — правая концевая точка множества $F(M, y)$, которая лежит в общем случае в определенном пополнении $\overline{M}$ структуры M . Тогда f является функцией, отображающей M в $\overline{M}$.

Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула. Будем говорить, что $F(x, y)$ — эквивалентность-генерирующая, если для любых $a, b \in M$ таких, что $M \models F(b, a)$, имеет место следующее:

$$M \models \forall x (K(b, x, a) \wedge x \neq a \rightarrow [F(x, a) \leftrightarrow F(x, b)]).$$

Лемма 1.5 [22]. Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $F(x, y)$ — выпуклая вправо (влево) эквивалентность-генерирующая формула. Тогда $E(x, y) := F(x, y) \vee F(y, x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.6. Пусть $E(x, y)$ — $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на бесконечные выпуклые классы. Предположим, что y лежит в $\overline{M}$ (необязательно в M). Тогда

$$E^*(x, y) := \exists y_1 \exists y_2 [y_1 \neq y_2 \wedge \forall t (K(y_1, t, y_2) \rightarrow E(t, x)) \wedge K_0(y_1, y, y_2)].$$

В общем случае отношение E^* не является формульным. Но если y — концевая точка определенного подмножества структуры M , то отношение E^* формульное, однако его запись в исходном языке будет чрезмерно громоздкой. Аналогично для следующей формулы.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.7. Пусть $E(x, y)$ — $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на конечное число бесконечных выпуклых классов, $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула, $f(y) := \text{rend } F(M, y)$ и $k \in \omega$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi_k^f(x) := & \neg E^*(x, f(x)) \wedge \exists u_1 \dots \exists u_k \\ & \left[\bigwedge_{i \neq j} \neg E(u_i, u_j) \wedge \bigwedge_{i=1}^k \{ \neg E(u_i, x) \wedge \neg E^*(u_i, f(x)) \} \right. \\ & \left. \wedge K_0(x, u_1, \dots, u_k, f(x)) \wedge \forall t \left[K(x, t, f(x)) \rightarrow \bigvee_{i=1}^k E(t, u_i) \vee E(t, x) \vee E^*(t, f(x)) \right] \right]. \end{aligned}$$

Формула $\Phi_k^f(x)$ влечет, что x и $f(x)$ не лежат в одном E -классе, и между E -классами, содержащими x и $f(x)$, имеется в точности k классов эквивалентности по E .

Пусть $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ — циклически упорядоченные структуры. Назовем 2-редуктом структуры $\mathcal{M}$ циклически упорядоченную структуру с тем же носителем, что и $\mathcal{M}$, имеющую предикатный символ для каждого $\emptyset$ -определимого отношения на $\mathcal{M}$ арности не более 2, а также тернарный предикатный символ K для циклического порядка, но не имеющую других предикатных символов большей арности. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ изоморфна $\mathcal{N}$ с точностью до бинарности, если 2-редукт структуры $\mathcal{M}$ изоморфен 2-редукту структуры $\mathcal{N}$.

Пусть f — унарная функция из M в $\overline{M}$. Будем говорить, что f монотонна вправо (влево) на M , если она сохраняет (обращает) отношение K_0 ,

т. е. для любых $a, b, c \in M$ таких, что $K_0(a, b, c)$, имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$ ($K_0(f(c), f(b), f(a))$).

Пусть $F(x, y)$ — выпуклая вправо формула. Рассмотрим следующую формулу:

$$F'(x, y) := \exists t[F(t, y) \wedge F(x, t)].$$

Пусть $f^2(y) := \text{rend } F'(M, y)$.

Лемма 1.8 [14]. Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная слабо циклически минимальная структура, $F(x, y)$ — выпуклая вправо, так что $f(y) := \text{rend } F(M, y)$ — монотонная влево на M . Тогда $f^2(a) = a$ для любого $a \in M$.

Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория имеет *ранг выпуклости* 1, если не существует определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

Следующая теорема полностью характеризует счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 с тривиальным определимым замыканием с точностью до бинарности.

Теорема 1.9 [14]. Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $\text{dcl}(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда M изоморфна с точностью до бинарности одной из следующих структур:

- $M'_n := \langle M, K^3, E^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без конечных точек ($n \geq 2$);

- $M'_* := \langle M, K^3, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, $R(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M, a)$ не имеет правой конечной точки в M для всех $a \in M$ и $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ — монотонная влево на M ;

- $M_{n,k}^3 := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без конечных точек, $R(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M, a)$ не имеет правой конечной точки в M для всех $a \in M$ и $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ — монотонная вправо на M , $\neg E^*(a, r(a))$ и существует $k \geq 0$ с условием $\Phi_k^r(a)$ для всех $a \in M$, $k+1$ делит n ($n \geq 2$);

- $M_{n,k}^4 := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ — циклически упорядоченная структура, M плотная, E — отношение эквивалентности, разбивающее M на n бесконечных выпуклых классов без конечных точек, $R(x, y)$ — выпуклая вправо формула такая, что $R(M, a)$ не имеет правой конечной точки в M для всех $a \in M$, $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ — монотонная влево на каждом E -классе, r — монотонная вправо на M/E , $\neg E^*(a, r(a))$ и существует $k \geq 0$ с условием $\Phi_k^r(a)$ для всех $a \in M$, $k+1$ делит n , n четно ($n \geq 4$).

В [7] описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий с примитивной группой автоморфизмов. В [8] описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и нетривиальное определимое замыкание. В настоящей работе описаны алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных

теорий ранга выпуклости 1, имеющих 1-транзитивную непримитивную группу автоморфизмов и тривиальное определимое замыкание.

2. Коммутативный случай

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим структуру $M'_2 := \langle M, K^3, E^2 \rangle$ из теоремы 1.9. Утверждается, что $\text{Th}(M'_2)$ имеет четыре бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := E(x, y) \wedge x \neq y \wedge \forall t [K(x, t, y) \rightarrow E(x, t)],$$

$$\theta_2(x, y) := E(x, y) \wedge x \neq y \wedge \forall t [K(y, t, x) \rightarrow E(x, t)],$$

$$\theta_3(x, y) := \neg E(x, y).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

метка k для $\theta_k(x, y)$, где $0 \leq k \leq 3$.

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M'_2}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3
0	{0}	{1}	{2}	{3}
1	{1}	{1}	{0, 1, 2}	{3}
2	{2}	{0, 1, 2}	{2}	{3}
3	{3}	{3}	{3}	{0, 1, 2}

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M'_2}$ коммутативна.

Теорема 2.2. Алгебра $\mathfrak{P}_{M'_n}$ бинарных изолирующих формул имеет $n + 2$ меток и является коммутативной для всех допустимых значений n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное множество M структуры M'_n разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Возьмем произвольный элемент $a \in M$. Он попадает в один из этих выпуклых классов, в котором возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := E(x, y) \wedge x \neq y \wedge \forall t [K(x, t, y) \rightarrow E(x, t)],$$

$$\theta_{n+1}(x, y) := E(x, y) \wedge x \neq y \wedge \forall t [K(y, t, x) \rightarrow E(x, t)].$$

Остаются еще $n - 1$ выпуклых классов, где нет элементов, лежащих в алгебраическом замыкании элемента a , определяя дополнительно $n - 1$ бинарных изолирующих формул. Эти формулы определяются следующим образом:

$$\theta_i(x, y) := \neg E(x, y) \wedge \forall t \left[K(x, t, y) \wedge \neg E(t, y) \rightarrow \bigvee_{s=1}^{i-1} \theta_s(x, t) \right], \quad 2 \leq i \leq n.$$

Таким образом, получается $3 + (n - 1) = n + 2$ бинарных изолирующих формул, причем формулы определены так, что для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a, M), \theta_1(a, M), \theta_2(a, M), \dots, \theta_n(a, M), \theta_{n+1}(a, M)).$$

Докажем коммутативность. Во-первых, очевидно, что $0 \cdot k = k \cdot 0 = \{k\}$ для любого $0 \leq k \leq n+1$. Предположим, что $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$.

СЛУЧАЙ 1. $k_1 + k_2 = n + 2$. Если $k_1 = 1$, то $k_2 = n + 1$. Тогда каждая из формул $\theta_{k_1}(x, y)$ и $\theta_{k_2}(x, y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $E(x, y)$, т. е. формула $E(x, y)$ совместна с $\exists t[\theta_{k_1}(x, t) \wedge \theta_{k_2}(t, y)]$. Имеем: для любого t , удовлетворяющего формуле $\theta_{k_1}(x, t)$, следует, что $t \in E(x, M)$ и t находится правее элемента x ; рассматривая произвольный y , удовлетворяющий формуле $\theta_{k_2}(t, y)$, получаем, что $y \in E(t, M)$ и y находится левее элемента t , т. е. получаем, что формула $\exists t[\theta_{k_1}(x, t) \wedge \theta_{k_2}(t, y)]$ совместна с любой формулой из списка формул с метками $\{0, 1, n+1\}$. Следовательно, $k_1 \cdot k_2 = \{0, 1, n+1\}$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot k_1 = \{0, 1, n+1\}$.

Пусть $k_1 > 1$ и $k_1 \neq n+1$. Тогда $k_2 \neq n+1$ и $k_2 > 1$. Следовательно, каждая из формул $\theta_{k_1}(x, y)$ и $\theta_{k_2}(x, y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $\neg E(x, y)$. Имеем: t лежит в $(k_1 - 1)$ -м E -классе от $E(x, M)$; y лежит в $(k_2 - 1)$ -м E -классе от $E(t, M)$. Тогда получаем, что y лежит в $(k_1 + k_2 - 2)$ -м E -классе от $E(x, M)$. Но $k_1 + k_2 - 2 = n$, т. е. y попадает в $E(x, M)$. Поэтому $k_1 \cdot k_2 = k_2 \cdot k_1 = \{0, 1, n+1\}$.

СЛУЧАЙ 2. $k_1 + k_2 < n + 2$. Вначале предположим, что $k_1 = 1$. Если $k_2 = 1$, то $\exists t[\theta_{k_1}(x, t) \wedge \theta_{k_2}(t, y)]$ совместна с формулой $E(x, y)$. Имеем: t лежит в одном E -классе с x и правее него; y лежит в одном E -классе с t и правее него. Следовательно, y лежит в одном E -классе с x и правее него, т. е. $1 \cdot 1 = \{1\}$.

Пусть $k_2 \neq 1$. Ясно, что $k_2 \neq n+1$ (поскольку $k_1 + k_2 < n+2$). Имеем: t лежит в одном E -классе с x и правее него; y лежит в $(k_2 - 1)$ -м E -классе от $E(t, M)$. Следовательно, y лежит в $(k_2 - 1)$ -м E -классе от $E(x, M)$, т. е. $1 \cdot k_2 = \{k_2\}$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot 1 = \{k_2\}$.

Предположим, что $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$. Ясно, что $k_1 < n+1$ и $k_2 < n+1$. Тогда каждая из формул $\theta_{k_1}(x, y)$ и $\theta_{k_2}(x, y)$ содержит в качестве конъюнктивного члена формулу $\neg E(x, y)$. Имеем: t лежит в $(k_1 - 1)$ -м E -классе от $E(x, M)$; y лежит в $(k_2 - 1)$ -м E -классе от $E(t, M)$. Тогда получаем, что y лежит в $(k_1 + k_2 - 2)$ -м E -классе от $E(x, M)$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = \{k_1 + k_2 - 1\}$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot k_1 = \{k_1 + k_2 - 1\}$.

СЛУЧАЙ 3. $k_1 + k_2 > n + 2$. В этом случае $k_1 > 1$ и $k_2 > 1$ (поскольку иначе получили бы $k_1 + k_2 \leq n+2$). Имеем: t лежит в $(k_1 - 1)$ -м E -классе от $E(x, M)$; y лежит в $(k_2 - 1)$ -м E -классе от $E(t, M)$, но при этом y перескакивает через $E(x, M)$, совместный с тремя бинарными изолирующими формулами. Поэтому y лежит в $(k_1 + k_2)[\bmod n+2]$ -м E -классе от $E(x, M)$. Следовательно, формула $\exists t[\theta_{k_1}(x, t) \wedge \theta_{k_2}(t, y)]$ однозначно определяет формулу $\theta_{(k_1+k_2+1)[\bmod n+2]}(x, y)$. Аналогично показывается, что $k_2 \cdot k_1 = (k_1 + k_2 + 1)[\bmod n+2]$. $\square$

ПРИМЕР 2.3. Рассмотрим структуру $M_{4,1}^3 := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ из теоремы 1.9. Утверждаем, что $\text{Th}(M_{4,1}^3)$ имеет семь бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge E(x, y),$$

$$\theta_2(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge \neg E(x, y) \wedge \neg E^*(r(x), y),$$

$$\theta_3(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge E^*(r(x), y),$$

$$\theta_4(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge E^*(r(x), y),$$

$$\theta_5(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge \neg E(x, y) \wedge \neg E^*(r(x), y),$$

$$\theta_6(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge E(x, y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a, M), \theta_1(a, M), \theta_2(a, M), \dots, \theta_5(a, M), \theta_6(a, M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

$$\text{метка } k \text{ для } \theta_k(x, y), \text{ где } 0 \leq k \leq 6.$$

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M_{4,1}^3}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
1	{1}	{1}	{2}	{3, 4}	{4}	{5}	{6, 0, 1}
2	{2}	{2}	{3, 4}	{5}	{5}	{6, 0, 1}	{2}
3	{3}	{3, 4}	{5}	{6}	{6, 0, 1}	{2}	{3}
4	{4}	{4}	{5}	{6, 0, 1}	{1}	{2}	{3, 4}
5	{5}	{5}	{6, 0, 1}	{2}	{2}	{3, 4}	{5}
6	{6}	{6, 0, 1}	{2}	{3}	{3, 4}	{5}	{6}

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M_{4,1}^3}$ коммутативна.

Теорема 2.4. Алгебра $\mathfrak{P}_{M_{n,k}^3}$ бинарных изолирующих формул имеет $n + \frac{n}{k+1} + 1$ меток и коммутативна для всех допустимых значений n, k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное множество M структуры $M_{n,k}^3$ разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Возьмем произвольный элемент $a \in M$. Он попадает в один из этих выпуклых классов, в котором возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)),$$

$$\theta_{n+\frac{n}{k+1}}(x, y) := E(x, y) \wedge K_0(r^{\frac{n}{k+1}-1}(x), y, x).$$

Каждый из $\frac{n}{k+1} - 1$ выпуклых классов, куда попадает $r^s(a)$ для некоторого $1 \leq s \leq \frac{n}{k+1} - 1$, разбивается на две бинарные изолирующие формулы:

$$E^*(r^s(x), y) \wedge K_0(r^s(x), y, r^{s+1}(x)), \quad E^*(r^s(x), y) \wedge K_0(r^{s-1}(x), y, r^s(x)).$$

Остаются еще $n - \frac{n}{k+1}$ выпуклых классов, где нет $r^s(a)$ для любого $0 \leq s \leq \frac{n}{k+1} - 1$, определяя дополнительно $n - \frac{n}{k+1}$ бинарных изолирующих формул. Заметим, что число k определяет число таких выпуклых классов, лежащих между E -классами, содержащими $r^s(x)$ и $r^{s+1}(x)$ для каждого $0 \leq s \leq \frac{n}{k+1} - 1$. Например, выпуклые классы между E -классами, содержащими x и $r(x)$, определяются следующим образом:

$$\theta_i(x, y) := \neg E(x, y) \wedge \neg E^*(r(x), y) \wedge K_0(x, y, r(x))$$

$$\wedge \forall t \left[K(x, t, y) \wedge \neg E(t, y) \rightarrow \bigvee_{j=1}^{i-1} \theta_j(x, t) \right], \quad 2 \leq i \leq k+1.$$

Таким образом, получается $3 + 2(\frac{n}{k+1} - 1) + n - \frac{n}{k+1} = n + \frac{n}{k+1} + 1$ бинарных изолирующих формул.

Докажем коммутативность. Возьмем произвольные метки s_1 и s_2 и докажем, что $s_1 \cdot s_2 = s_2 \cdot s_1$. Во-первых, очевидно, что $0 \cdot s = s \cdot 0 = \{s\}$ для любого $0 \leq s \leq n + \frac{n}{k+1} + 1$. Пусть $m := \frac{n}{k+1}$. В силу леммы 2.14 и следствия 2.15 из [14] $r^m(a) = a$ для любого $a \in M$. Предположим, что $s_1 \neq 0$ и $s_2 \neq 0$. Бинарными изолирующими формулами в этом случае могут быть формулы следующего вида:

$$\begin{aligned} E^*(r^s(x), y) \wedge K_0(r^s(x), y, r^{s+1}(x)), \quad 0 \leq s \leq m-1, \\ \neg E^*(r^s(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s+1}(x), y) \wedge K_0(r^s(x), y, r^{s+1}(x)) \wedge D_j^s(x, y), \\ 0 \leq s \leq m-1, 1 \leq j \leq k, \end{aligned}$$

где формула $D_j^s(x, y)$ означает, что y лежит в j -м E -классе от $E^*(r^s(x), M)$.

Рассмотрим вначале формулы

$$E^*(r^{s_1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_1}(x), y, r^{s_1+1}(x)), \quad E^*(r^{s_2}(x), y) \wedge K_0(r^{s_2}(x), y, r^{s_2+1}(x)).$$

Нетрудно убедиться, что формулы

$$\begin{aligned} \exists t [E^*(r^{s_1}(x), t) \wedge K_0(r^{s_1}(x), t, r^{s_1+1}(x)) \wedge E^*(r^{s_2}(t), y) \wedge K_0(r^{s_2}(t), y, r^{s_2+1}(t)), \\ \exists t [E^*(r^{s_2}(x), t) \wedge K_0(r^{s_2}(x), t, r^{s_2+1}(x)) \wedge E^*(r^{s_1}(t), y) \wedge K_0(r^{s_1}(t), y, r^{s_1+1}(t))] \end{aligned}$$

однозначно определяют формулу

$$E^*(r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\text{mod } m]}(x)).$$

Если же в качестве второй формулы взять

$$E^*(r^{s_2}(x), y) \wedge K_0(r^{s_2-1}(x), y, r^{s_2}(x)),$$

то возможны следующие подслучаи.

Если $(s_1 + s_2)[\text{mod } m] \neq 0$, то формулы

$$\begin{aligned} \exists t [E^*(r^{s_1}(x), t) \wedge K_0(r^{s_1}(x), t, r^{s_1+1}(x)) \wedge E^*(r^{s_2}(t), y) \wedge K_0(r^{s_2-1}(t), y, r^{s_2}(t)), \\ \exists t [E^*(r^{s_2}(x), t) \wedge K_0(r^{s_2-1}(x), t, r^{s_2}(x)) \wedge E^*(r^{s_1}(t), y) \wedge K_0(r^{s_1}(t), y, r^{s_1+1}(t))] \end{aligned}$$

совместны с формулами

$$\begin{aligned} E^*(r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\text{mod } m]}(x)), \\ E^*(r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2-1)[\text{mod } m]}(x), y, r^{(s_1+s_2)[\text{mod } m]}(x)). \end{aligned}$$

Если же $(s_1 + s_2)[\text{mod } m] = 0$, то эти формулы совместны с формулами

$$x = y, E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)) \text{ и } E(x, y) \wedge K_0(r^{m-1}(x), y, x).$$

Рассмотрим в качестве второй формулы

$$\neg E^*(r^{s_2}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_2}(x), y, r^{s_2+1}(x)) \wedge D_j^{s_2}(x, y)$$

для некоторого $1 \leq j \leq k$. Тогда формула

$$\begin{aligned} \exists t [E^*(r^{s_1}(x), t) \wedge K_0(r^{s_1}(x), t, r^{s_1+1}(x)) \\ \wedge \neg E^*(r^{s_2}(t), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(t), y) \wedge K_0(r^{s_2}(t), y, r^{s_2+1}(t)) \wedge D_j^{s_2}(x, t)] \end{aligned}$$

однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x)) \wedge D_j^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону.

Рассмотрим формулы

$$\neg E^*(r^{s_1}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s_1+1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_1}(x), y, r^{s_1+1}(x)) \wedge D_{j_1}^{s_1}(x, y) \\ \neg E^*(r^{s_2}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(x), y) \wedge K_0(r^{s_2}(x), y, r^{s_2+1}(x)) \wedge D_{j_2}^{s_2}(x, y)$$

для некоторых $1 \leq j_1, j_2 \leq k$.

СЛУЧАЙ 1. $j_1 + j_2 \leq k$. В этом случае

$$\exists t [\neg E^*(r^{s_1}(x), t) \wedge \neg E^*(r^{s_1+1}(x), t) \wedge K_0(r^{s_1}(x), t, r^{s_1+1}(x)) \wedge D_{j_1}^{s_1}(x, t) \\ \wedge \neg E^*(r^{s_2}(t), y) \wedge \neg E^*(r^{s_2+1}(t), y) \wedge K_0(r^{s_2}(t), y, r^{s_2+1}(t)) \wedge D_{j_2}^{s_2}(t, y)]$$

однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x)) \wedge D_{j_1+j_2}^{s_1+s_2}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону.

СЛУЧАЙ 2. $j_1 + j_2 > k$.

ПОДСЛУЧАЙ 2а. $(j_1 + j_2)[\bmod k + 1] = 0$. Если при этом $(s_1 + s_2 + 1)[\bmod m] = 0$, то исследуемая формула совместна с формулами

$$x = y, \quad E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)), \quad E(x, y) \wedge K_0(r^{m-1}(x), y, x).$$

Если же $(s_1 + s_2 + 1)[\bmod m] \neq 0$, то наша формула совместна с формулами

$$E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2)[\bmod m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x)),$$

$$E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y) \wedge K_0(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+2)[\bmod m]}(x)).$$

ПОДСЛУЧАЙ 2б. $(j_1 + j_2)[\bmod k + 1] \neq 0$. В этом случае наша формула однозначно определяет формулу

$$\neg E^*(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y) \wedge \neg E^*(r^{(s_1+s_2+2)[\bmod m]}(x), y) \\ \wedge K_0(r^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x), y, r^{(s_1+s_2+2)[\bmod m]}(x)) \wedge D_{(j_1+j_2)[\bmod k+1]}^{(s_1+s_2+1)[\bmod m]}(x, y).$$

Аналогично показывается в обратную сторону. $\square$

3. Некоммутативный случай

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим структуру $M'_* := \langle M, K^3, R^2 \rangle$ из теоремы 1.9. Поскольку функция $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ монотонна влево на M , то в силу леммы 2.2 из [14] возникает $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности, разбивающее M на два выпуклых класса и определяемое следующим образом:

$$E(x, y) := R'(x, y) \vee R'(y, x),$$

где $R'(x, y) := R(x, y) \wedge \forall z (R(z, x) \rightarrow R(z, y))$.

Утверждаем, что $\text{Th}(M_*)$ имеет пять бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge E(x, y),$$

$$\theta_2(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge \neg E(x, y),$$

$$\theta_3(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge \neg E(x, y),$$

$$\theta_4(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge E(x, y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a, M), \theta_1(a, M), \theta_2(a, M), \theta_3(a, M), \theta_4(a, M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

метка k для $\theta_k(x, y)$, где $0 \leq k \leq 4$.

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M_*'}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}
1	{1}	{1}	{2}	{2, 3}	{4, 0, 1}
2	{2}	{2, 3}	{4, 0, 1}	{1}	{2}
3	{3}	{3}	{4}	{4, 0, 1}	{2, 3}
4	{4}	{4, 0, 1}	{2, 3}	{3}	{4}

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M_*'}$ некоммутативна.

Предложение 3.2. Алгебра $\mathfrak{P}_{M_*'}$ бинарных изолирующих формул имеет пять меток и некоммутативна.

Пример 3.3. Рассмотрим структуру $M_{4,1}^4 := \langle M, K^3, E^2, R^2 \rangle$ из теоремы 1.9. Утверждаем, что $\text{Th}(M_{4,1}^4)$ имеет семь бинарных изолирующих формул:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge E(x, y),$$

$$\theta_2(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge \neg E(x, y) \wedge \neg E^*(r(x), y),$$

$$\theta_3(x, y) := K_0(x, y, r(x)) \wedge E^*(r(x), y),$$

$$\theta_4(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge E^*(r(x), y),$$

$$\theta_5(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge \neg E(x, y) \wedge \neg E^*(r(x), y),$$

$$\theta_6(x, y) := K_0(r(x), y, x) \wedge E(x, y),$$

причем для любого $a \in M$ выполняется

$$K_0(\theta_0(a, M), \theta_1(a, M), \theta_2(a, M), \dots, \theta_5(a, M), \theta_6(a, M)).$$

Определим метки для этих формул следующим образом:

метка k для $\theta_k(x, y)$, где $0 \leq k \leq 6$.

Нетрудно проверить, что для алгебры $\mathfrak{P}_{M_{4,1}^4}$ таблица Кэли имеет следующий вид:

$\cdot$	0	1	2	3	4	5	6
0	{0}	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
1	{1}	{1}	{2}	{3}	{3, 4}	{5}	{6, 0, 1}
2	{2}	{2}	{3, 4}	{5}	{5}	{6, 0, 1}	{2}
3	{3}	{3, 4}	{5}	{6, 0, 1}	{1}	{2}	{3}
4	{4}	{4}	{5}	{6}	{6, 0, 1}	{2}	{3, 4}
5	{5}	{5}	{6, 0, 1}	{2}	{2}	{3, 4}	{5}
6	{6}	{6, 0, 1}	{2}	{3, 4}	{4}	{5}	{6}

Согласно таблице Кэли алгебра $\mathfrak{P}_{M_{4,1}^4}$ некоммутативна.

Теорема 3.4. Алгебра $\mathfrak{P}_{M_{n,k}^4}$ бинарных изолирующих формул имеет $n + \frac{n}{k+1} + 1$ меток и некоммутативна для всех допустимых значений n, k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное множество M структуры $M_{n,k}^4$ разбивается отношением эквивалентности E на n бесконечных выпуклых классов. Произвольный элемент $a \in M$ попадает в один из этих выпуклых классов, при этом в нем возникают три бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_0(x, y) := x = y,$$

$$\theta_1(x, y) := E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)),$$

$$\theta_{n+\frac{n}{k+1}}(x, y) := E(x, y) \wedge K_0(r^{\frac{n}{k+1}-1}(x), y, x).$$

Каждый из $\frac{n}{k+1} - 1$ выпуклых классов, куда попадает $r^s(a)$ для некоторого $1 \leq s \leq \frac{n}{k+1} - 1$, разбивается на две бинарные изолирующие формулы:

$$E^*(r^s(x), y) \wedge K_0(r^s(x), y, r^{s+1}(x)), \quad E^*(r^s(x), y) \wedge K_0(r^{s-1}(x), y, r^s(x)).$$

Остается еще $n - \frac{n}{k+1}$ выпуклых классов, где нет $r^s(a)$ для любого $0 \leq s \leq \frac{n}{k+1} - 1$, определяя дополнительно $n - \frac{n}{k+1}$ бинарных изолирующих формул. Таким образом, получаются $3 + 2(\frac{n}{k+1} - 1) + n - \frac{n}{k+1} = n + \frac{n}{k+1} + 1$ бинарных изолирующих формул.

Рассмотрим следующие бинарные изолирующие формулы:

$$\theta_{k_1}(x, y) := E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)), \quad \theta_{k_2}(x, y) := E^*(r(x), y) \wedge K_0(x, y, r(x)).$$

Поскольку f монотонна влево на каждом E -классе, то

$$\exists t[E(x, y) \wedge K_0(x, y, r(x)) \wedge E^*(r(t), y) \wedge K_0(t, y, r(t))]$$

однозначно определяет формулу $E^*(r(x), y) \wedge K_0(x, y, r(x))$.

С другой стороны, поскольку для любого $a \in M$ выполняется $K_0(a, r(a), r^2(a), \dots, r^{m-1}(a))$, то

$$\exists t[E^*(r(x), t) \wedge K_0(x, t, r(x)) \wedge E(t, y) \wedge K_0(t, y, r(t))]$$

совместна с формулами

$$E^*(r(x), y) \wedge K_0(x, y, r(x)) \text{ и } E^*(r(x), y) \wedge K_0(r(x), y, x)$$

независимо от поведения функции r .

Следовательно, $k_1 \cdot k_2 \neq k_2 \cdot k_1$, т. е. алгебра $\mathfrak{P}_{M_{n,k}^4}$ некоммутативна. $\square$

Следствие 3.5. Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непермитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $\text{dcl}(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда алгебра $\mathfrak{F}_M$ бинарных изолирующих формул коммутативна в том и только в том случае, если для любой выпуклой вправо формулы $R(x, y)$, не являющейся эквивалентность-генерирующей, функция $r(y) := \text{rend } R(M, y)$ монотонна вправо на M .

ЛИТЕРАТУРА

1. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1, 2. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018.
2. Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Sib. Electron. Math. Rep. 2014. V. 11. P. 380–407.
3. Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2015. Т. 300, № 2. С. 5–13.
4. Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 1. С. 20–54.
5. Байкалова К. А., Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Палютин Е. А., Судоплатов С. В. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул теорий абелевых групп и их упорядоченных обогащений // Изв. вузов. Математика. 2018. Т. 4. С. 3–15.
6. Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 6. С. 662–683.
7. Емельянов Д. Ю., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Алгебры бинарных формул для композиций теорий // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 432–457.
8. Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of binary formulas for weakly circularly minimal theories with non-trivial definable closure // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 12. P. 3532–3540.
9. Алтаева А. Б., Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω -категоричных слабо о-минимальных теорий // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 4. С. 369–399.
10. Bhattacharjee M., Macpherson H. D., Möller R. G., Neumann P. M. Notes on infinite permutation groups. Berlin: Springer, 1998. (Lect. Notes Math.; V. 1698).
11. Cameron P. J. Orbits of permutation groups on unordered sets. II // J. London Math. Soc. 1981. V. 2. P. 249–264.
12. Droste M., Giraudet M., Macpherson H. D., Sauer N. Set-homogeneous graphs // J. Combinat. Theory. Ser. B. 1994. V. 62, N 1. P. 63–95.
13. Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D. Minimality conditions on circularly ordered structures // Math. Logic Quart. 2005. V. 51, N 4. P. 377–399.
14. Kulpeshov B. Sh. On $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Math. Logic Quart. 2006. V. 52, N 6. P. 555–574.
15. Кулпешов Б. Ш. Определимые функции в $\aleph_0$ -категоричных слабо циклически минимальных структурах // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 356–379.
16. Kulpeshov B. Sh., Verbovskiy V. V. On weakly circularly minimal groups // Math. Logic Quart. 2015. V. 61, N 1-2. P. 82–90.
17. Кулпешов Б. Ш. О неразличимости множества в циклически упорядоченных структурах // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 255–266.
18. Кулпешов Б. Ш., Алтаева А. Б. Бинарные формулы в счетно категоричных слабо циклически минимальных структурах // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 3. С. 341–365.
19. Kulpeshov B. Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Euras. Math. J. 2016. V. 7, N 2. P. 38–49.
20. Алтаева А. Б., Кулпешов Б. Ш. О почти бинарности счетно-категоричных слабо циклически минимальных структур // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 6. С. 803–823.
21. Macpherson H. D., Marker D., Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields // Trans. Amer. Math. Soc. 2000. V. 352, N 12. P. 5435–5483.

22. Кулпешов Б. Ш., Алтаева А. Б. Эквивалентность-генерирующие формулы в слабо циклически минимальных структурах // Докл. НАН РК. 2014. Т. 2. С. 5–10.

Поступила в редакцию 23 ноября 2022 г.

После доработки 15 мая 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Кулпешов Бейбут Шайыкович (ORCID 0000-0002-4242-0463)

Казахстанско-Британский технический университет,

ул. Толе би, 59, Алматы 050000, Казахстан;

Институт математики и математического моделирования,

ул. Шевченко, 28, Алматы 050010, Казахстан

b.kulpeshov@kbtu.kz, kulpesh@mail.ru

ОЦЕНКИ НОРМ ОПЕРАТОРА ХАРДИ В ОПЕРАТОРНЫХ ИДЕАЛАХ

Е. Н. Ломакина, М. Г. Насырова

Аннотация. Найдены условия, при которых компактный оператор Харди, действующий в пространствах Лоренца, принадлежит операторным идеалам, порожденным последовательностями s -чисел. Получены оценки норм оператора Харди в данных идеалах через интегральные выражения, зависящие от весовых функций оператора.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.208

Ключевые слова: операторный идеал, оператор Харди, пространства Лоренца, аппроксимативные числа, s -числа.

§ 1. Введение

1.1. Пусть X, Y — банаховы пространства. Множество всех ограниченных линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами, обозначим через $\mathcal{B}(X, Y)$.

Для оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ его n -е *аппроксимативное число*, $n \in \mathbb{N}$, определяется как

$$a_n(T) = \inf_{L \in \mathcal{B}(X, Y)} \{\|T - L\|_{X \rightarrow Y} : \text{rank } L \leq n - 1\},$$

где $\text{rank } L = \dim \mathcal{R}(L)$ (см. [1, § 11.2]). Основы теории s -чисел, представителями которых являются аппроксимативные числа, а также числа Колмогорова, Гельфанда и др. (определения которых приведены далее в § 2), заложены в [1–5].

Один из способов построения операторных идеалов связан с s -числами операторов: последовательность s -чисел определяет (квази)норму оператора в идеале. Операторными идеалами являются, например, класс всех конечномерных операторов (наименьший операторный идеал), класс всех компактных операторов и др. Теория операторных идеалов подробно изложена в [1].

Оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется $\mathbb{L}_\alpha^{(a)}$ -*оператором*, где $0 < \alpha < \infty$, если последовательность его аппроксимативных чисел $\{a_n(T)\}$ суммируема со степенью α . Обозначим

$$\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(a)}} = \|\{a_n(T)\}\|_{\ell_\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^\alpha(T) \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (1.1)$$

Класс операторов $\mathbb{L}_\alpha^{(a)}$ с квазинормой (1.1) образует квазинормированный операторный идеал [1, § 14.2.1]. Идеал $\mathbb{L}_\alpha^{(a)}$ компактных операторов $T \in \mathcal{B}(H, H)$

с нормой (1.1) в гильбертовых пространствах есть идеал Шаттена — фон Неймана [2].

Оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется *оператором аппроксимационного типа* $\ell_{r,\alpha}$, если последовательность $\{n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}} a_n(T)\}$ принадлежит ℓ_α . Множество всех таких операторов обозначим через $\mathbb{L}_{r,\alpha}^{(a)}$. Для $T \in \mathbb{L}_{r,\alpha}^{(a)}$ определим

$$\|T\|_{\mathbb{L}_{r,\alpha}^{(a)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{\alpha}} a_n(T))^\alpha \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < r, \alpha < \infty. \quad (1.2)$$

Класс операторов $T \in \mathbb{L}_{r,\alpha}^{(a)}$ с квазинормой (1.2) также образует квазинормированный операторный идеал (см. [3, с. 80] или [5, § 2.1]).

1.2. Пусть ν — положительная σ -аддитивная мера на $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Функция распределения f_* измеримой функции f относительно меры ν определяется так:

$$f_*(\tau) = \nu\{x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \tau\} = \int_{\{x \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| > \tau\}} d\nu, \quad \tau > 0.$$

Пусть $1 \leq p, q < \infty$ и $d\nu = \omega(x) dx$, где ω — положительная весовая функция. Пространство Лоренца $L_{\omega}^{p,q} \equiv L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ состоит из всех ν -измеримых функций f таких, что

$$\|f\|_{L_{\omega}^{p,q}} = \left(\int_0^{\infty} q f_*(t)^{\frac{q}{p}} t^{q-1} dt \right)^{\frac{1}{q}} < \infty. \quad (1.3)$$

Заметим также, что

$$\|\chi_{(0,t)}\|_{L_{\omega}^{p,q}} = \left(\int_0^t \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Пространство Лоренца в случае $1 \leq q \leq p < \infty$ является банаховым функциональным пространством с нормой (1.3), в случае $1 < p < q < \infty$ функционал (1.3) есть только квазинорма, но $L_{\omega}^{p,q}$ является банаховым функциональным пространством с другой нормой, эквивалентной квазинорме $\|f\|_{L_{\omega}^{p,q}}$ (см. [6, с. 219]).

Неравенство треугольника в пространствах Лоренца имеет вид

$$\left\| \sum_{k=1}^N f_k \right\|_{L_{\omega}^{p,q}} \leq c_{pq} \sum_{k=1}^N \|f_k\|_{L_{\omega}^{p,q}},$$

где наилучшая константа [7, с. 5572]

$$c_{pq} = \begin{cases} 1, & 1 < q \leq p < \infty, \\ (p/q)^{1/q} (p'/q')^{1/q'}, & 1 < p < q < \infty. \end{cases} \quad (1.4)$$

Для функций $f \in L_{\omega}^{p,q}$, $g \in L_{\omega}^{p',q'}$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ выполнено неравенство Гёльдера

$$\left| \int_0^{\infty} f(x)g(x)\omega(x) dx \right| \leq \|f\|_{L_{\omega}^{p,q}} \|g\|_{L_{\omega}^{p',q'}},$$

где $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ (см. [6, с. 220]).

Двойственное пространство для $L_{\omega}^{p,q}$ определяется как

$$L_{\omega}^{p',q'} = \left\{ g : \left| \int_0^{\infty} f(x)g(x)\omega(x) dx \right| < \infty \text{ для всех } f \in L_{\omega}^{p,q} \right\}$$

с нормой

$$\|g\|_{L_{\omega}^{p',q'}} = \sup_{\|f\|_{L_{\omega}^{p,q}} \leq 1} \left| \int_0^{\infty} f(x)g(x)\omega(x) dx \right|. \quad (1.5)$$

В пространствах Лоренца с параметрами $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$ рассмотрим оператор Харди $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x u(\tau)f(\tau)v(\tau) d\tau, \quad x > 0, \quad (1.6)$$

с положительными весовыми функциями $u \in L_v^{r',s'}(0, x)$, $v \in L^1(0, x)$ для любого $x > 0$. Обозначим $\|T\|_{L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{R}^+)} =: \|T\|$.

1.3. Исследования поведения различных типов s -чисел операторов Харди, действующих в пространствах Лебега $L^p \rightarrow L^q$ с параметрами $1 \leq p, q \leq \infty$, представлены в статьях [8–12]. Поведение аппроксимативных чисел оператора Харди в пространствах Лоренца $L_v^{r,s} \rightarrow L_{\omega}^{p,q}$ в области $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$ изучалось в статье [13]. Полученные в [13] результаты были обобщены в работе [14] на случай банаховых функциональных пространств X , Y с дополнительным ℓ -условием Бережного. Выполнение этого условия соответствует соотношению параметров $p \leq q$ для лебеговых пространств $L^p \rightarrow L^q$ и $\max(r, s) \leq \min(p, q)$ в случае пространств Лоренца $L_v^{r,s} \rightarrow L_{\omega}^{p,q}$ [14, с. 169].

Данное исследование обобщает полученные ранее результаты [11, 15] в одно-весовом случае для a -чисел, дополняя их новыми соотношениями параметров $1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$ пространств Лоренца. В работе найдены условия, при которых компактный оператор Харди (1.6), действующий в пространствах Лоренца, принадлежит операторным идеалам, порожденным последовательностями характеристических чисел (s -чисел). Получены оценки норм оператора Харди в данных идеалах через интегральные выражения, зависящие от весовых функций исходного оператора.

Статья состоит из трех частей. В первой части (введении) даны основные определения, а также критерий ограниченности и компактности оператора Харди. Во второй части приведены двусторонние оценки аппроксимативных чисел рассматриваемого оператора в пространствах Лоренца при $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, даны определения чисел Колмогорова, Гельфанда, Бернштейна и Митягина. В третьей части введены последовательности $\{\sigma_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ и $\{\delta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, в терминах которых характеризуется ограниченность и компактность нашего оператора Харди, а также секвенциальные нормы которых позволяют оценить норму оператора (1.6) в операторных идеалах $\mathbb{L}^{(s)}$.

В статье под соотношениями $A \ll B$ подразумеваются неравенства $A \leq cB$, выполненные с некоторой константой $c > 0$, зависящей только от параметров r, s, p, q . Будем писать $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$. Характеристическую функцию интервала I обозначаем через χ_I .

1.4. В дальнейшем будут применяться следующие известные результаты — критерии ограниченности и компактности оператора (1.6).

Теорема 1 [16, 17]. Пусть $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$ и $1 < p < \infty$, оператор $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ задан формулой (1.6) и весовые функции $u \in L_v^{r',s'}(0, x)$, $v \in L^1(0, x)$, $x > 0$, положительны.

(i) Оператор T ограничен тогда и только тогда, когда

$$A = \sup_{t>0} A(t) = \sup_{t>0} \|\chi_{(0,t)} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}} < \infty.$$

Более того, $A \leq \|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq 4A$.

(ii) Оператор T компактен тогда и только тогда, когда

$$A < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow 0+} A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты теоремы 1(i) об ограниченности оператора сохраняются при сужении на конечный интервал $I = (a, b) \subset \mathbb{R}^+$, т. е. срезаем характеристической функцией интервала I функцию f , на которую действует оператор, и сужаем область значений оператора до интервала I умножением на χ_I . Суженный оператор $T_I : L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}$ вида

$$T_I f(x) = \chi_I(x) \int_a^x u(\tau) \chi_I(\tau) f(\tau) v(\tau) d\tau$$

ограничен тогда и только тогда, когда

$$A_I = \sup_{a < t < b} A_I(t) = \sup_{a < t < b} \|\chi_I u \chi_{(0,t)}\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_I \chi_{(t,\infty)}\|_{L_\omega^{p,q}} < \infty$$

и $A_I \leq \|T_I\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq 4A_I$.

§ 2. Оценки аппроксимативных чисел

Далее всюду предполагаем, что рассматриваемый оператор T вида (1.6) компактен и $\|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} = \|T\|$.

2.1. Приведем результаты [17], которые используются далее.

Пусть $0 < a < b < \infty$. На интервале $I = (a, b)$ зададим меру

$$\mu(I) = \int_I d\mu = \int_I g(x) \omega(x) dx,$$

где функция $g(x)$ на I определяется из условия

$$\int_I g(x) \omega(x) dx \geq (1 - \delta) \|\chi_I\|_{L_\omega^{p,q}} \|\chi_I g\|_{L_\omega^{p',q'}},$$

что возможно в силу формулы (1.5) с некоторым $0 < \delta < 1$.

Обозначим для $x \in I$

$$Ff(x) = T_I f(x) = \int_a^x u(y) f(y) v(y) dy, \quad F_I f = \frac{1}{\mu(I)} \int_I Ff(x) d\mu(x).$$

Зададим оператор $\mathcal{T}_I : L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}$ формулой

$$\mathcal{T}_I f(x) = \chi_I(x)(Ff(x) - F_I f). \quad (2.1)$$

Покажем, что норма оператора (2.1) непрерывно зависит от интервала I . Действительно, применяя неравенство Гёльдера, видим, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_I\| &:= \|\mathcal{T}_I\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} = \sup_{\|\chi_I f\|_{L_v^{r,s}} \leq 1} \|\mathcal{T}_I f\|_{L_\omega^{p,q}} = \sup_{\|\chi_I f\|_{L_v^{r,s}} \leq 1} \|\chi_I(Ff - F_I f)\|_{L_\omega^{p,q}} \\ &\leq \sup_{\|\chi_I f\|_{L_v^{r,s}} \leq 1} \|\chi_I f\|_{L_v^{r,s}} \|\chi_I u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_I\|_{L_\omega^{p,q}} \leq \|\chi_I u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_I\|_{L_\omega^{p,q}}, \end{aligned}$$

что влечет

$$\|\mathcal{T}_I\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq \|\chi_I u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_I\|_{L_\omega^{p,q}} \rightarrow 0$$

при $\mu(I) \rightarrow 0$.

Теорема 2 [17]. Пусть $1 < \max\{r, s\} \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $I = (a, b)$. Тогда для оператора $\mathcal{T}_I : L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}$, определенного формулой (2.1), найдется точка $c \in I$ такая, что

$$c_{pq}^{-1} \max(A_{(a,c)}^*, A_{(c,b)}) \leq \|\mathcal{T}_I\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq 16c_{pq} \max(A_{(a,c)}^*, A_{(c,b)}),$$

где

$$\begin{aligned} A_{(a,c)}^* &= \sup_{a \leq x \leq c} \|\chi_{[x,c]} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{[a,x]}\|_{L_\omega^{p,q}}, \\ A_{(c,b)} &= \sup_{c \leq x \leq b} \|\chi_{[c,x]} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{[x,b]}\|_{L_\omega^{p,q}}. \end{aligned}$$

Возьмем произвольное ε такое, что $0 < \varepsilon < \|T\|_{L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)}$. Теоремы 1 и 2 позволяют выбрать промежутки $I_k = [c_k, c_{k+1})$, $k = 0, \dots, N$, разбиения полуоси точками $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_{N-1} < c_N < c_{N+1} = \infty$ следующим образом:

$$A_{I_0} = A_{I_N} = \frac{\varepsilon}{4}, \quad \|\mathcal{T}_{I_k}\| = \varepsilon, \quad k = 1, \dots, N-2, \quad \text{и, возможно, } \|\mathcal{T}_{I_{N-1}}\| \leq \varepsilon, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_{I_0} &= A_{(0,c_1)} = \sup_{0 < t < c_1} \|\chi_{(0,t)} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(t,c_1)}\|_{L_\omega^{p,q}}, \\ A_{I_N} &= A_{[c_N, \infty)} = \sup_{c_N < t < \infty} \|\chi_{[c_N, t)} u\|_{L_v^{r',s'}} \|\chi_{(t, \infty)}\|_{L_\omega^{p,q}}. \end{aligned}$$

Число построенных промежутков зависит от ε , т. е. $N = N(\varepsilon)$.

Оценки поведения последовательности аппроксимативных чисел оператора T получены в следующей теореме.

Теорема 3 [17]. Пусть $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$. Предположим, что оператор $T : L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}$, определенный формулой (1.6), компактен. Для заданного $0 < \varepsilon < \|T\|$ и целого числа $N = N(\varepsilon) > 2$ пусть промежутки $I_k = [c_k, c_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, N$, выбраны так, что выполнены соотношения (2.2). Тогда

$$\frac{1}{2c_{pq}} \varepsilon (N+1)^{\frac{1}{\max(p,q)} - \frac{1}{\min(r,s)}} \leq a_{N+1}(T); \quad (2.3)$$

$$a_N(T) \leq \varepsilon, \quad \text{если} \quad \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty,$$

$$a_N(T)(N+1)^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} \leq \varepsilon \quad \text{в случае, когда}$$

$1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$. Константа c_{pq} определена формулой (1.4).

2.2. Аппроксимативные числа тесно связаны с другими характеристическими числами линейных ограниченных операторов. Следуя [18] и [1, § 12; 2], приведем определения.

Для банаховых пространств X и Y пусть B_X , B_Y — единичные шары в них; $M \subseteq X$, $N \subseteq Y$ — подпространства; J_M^X — каноническая инъекция M в X , Q_N^Y — каноническая сюръекция Y на фактор-пространство Y/N . Для оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ определим модуль инъективности

$$j(T) = \sup\{\rho \geq 0 : \|Tx\|_Y \leq \rho\|x\|_X \text{ для всех } x \in X\}$$

и модуль сюръективности

$$q(T) = \sup\{\rho \geq 0 : T(B_X) \supset \rho B_Y\}.$$

Для оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ и $n \in \mathbb{N}$ числа Гельфанда $c_n(T)$, Колмогорова $d_n(T)$, Бернштейна $b_n(T)$ и Митягина $m_n(T)$ определяются как

$$c_n(T) = \inf\{\|TJ_M^X\| : M \subseteq X, \text{ codim}(M) < n\},$$

$$d_n(T) = \inf\{\|Q_N^Y T\| : N \subseteq Y, \text{ dim}(N) < n\},$$

$$b_n(T) = \sup\{j(TJ_M^X) : M \subseteq X, \text{ dim}(M) \geq n\},$$

$$m_n(T) = \sup\{q(Q_N^Y T) : N \subseteq Y, \text{ codim}(N) \geq n\}.$$

Получив оценки для аппроксимативных чисел в пространствах Лоренца и используя соотношения между различными числами оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ (см. [1, с. 184, 196; 5, 18]), можно выписать подобные оценки и для других характеристических чисел оператора (1.6).

§ 3. Оценки норм оператора

3.1. Введем вспомогательные последовательности. Числовая $\{\xi_j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, определяется формулой

$$U(\xi_j) = \int_0^{\xi_j} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau = 2^j \quad (3.1)$$

и порождает интервалы $J_j = (\xi_j, \xi_{j+1})$, а также последовательность $\{\sigma_j\}$,

$$\sigma_j = \left(\int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{(j-1)}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.2)$$

где $u_*(\tau) = \int_{\{x>0: |u(x)|>\tau\}} v(x) dx$ — функция распределения веса $u \in L_v^{r', s'}$. Из формулы (3.2) следует, что

$$\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz = \frac{2^{p/s'} \sigma_j^p}{2^{jp/s'}}. \quad (3.3)$$

Аналогично вводятся для $j \in \mathbb{Z}$ последовательности $\{\eta_j\}$, $\{\mathcal{J}_j\}$, $\{\delta_j\}$:

$$W(\eta_j) = \int_{\eta_j}^{\infty} \omega(z) dz = 2^{-j+1}, \quad \mathcal{J}_j = (\eta_j, \eta_{j+1}),$$

$$\delta_j = \left(\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= 2^{-\frac{j}{p}} \left(\int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}}.$$

Положим для $I = (a, b)$ и $t \in I$

$$A_I(t) = \left(\int_a^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^b \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма 1. (i) Пусть $a \in J_{j_1}$, $b \in J_{j_2}$, $j_1 < j_2$, и $I = (a, b) \subset \bigcup_{j=j_1}^{j_2} J_j$. Тогда

$$A_I = \sup_{a < t < b} A_I(t) \leq \frac{2^{3/s'}}{(2^{1/s'} - 1)} \max_{j_1 \leq j \leq j_2} \sigma_j,$$

(ii) Пусть $a \in \mathcal{J}_{j_1}$, $b \in \mathcal{J}_{j_2}$, $j_1 < j_2$, и $I = (a, b) \subset \bigcup_{j=j_1}^{j_2} \mathcal{J}_j$. Тогда

$$A_I = \sup_{a < t < b} A_I(t) \leq \frac{2^{2/p}}{(2^{1/p} - 1)} \max_{j_1 \leq j \leq j_2} \delta_j.$$

Доказательство. (i) Пусть $t \in J_j$, где $j_1 \leq j \leq j_2$. Согласно замечанию 1, условиям леммы и в силу задания последовательностей $\{\xi_j\}$ и $\{\sigma_j\}$ по формулам (3.1), (3.2) заключаем, что

$$A_I(t) = \left(\int_a^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^b \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_{\xi_{j_1}}^{\xi_{j+1}} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j_2+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 2^{(j+1)/s'} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz + \dots + \int_{\xi_{j_2}}^{\xi_{j_2+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Применяя неравенство Йенсена с $p > 1$ и формулу (3.3), оцениваем

$$A_I(t) \leq 2^{(j+1)/s'} \left(\frac{\sigma_j^p}{2^{(j-1)p/s'}} + \dots + \frac{\sigma_{j_2}^p}{2^{(j_2-1)p/s'}} \right)^{1/p}$$

$$\leq 2^{2/s'} \max_{j_1 \leq j \leq j_2} \sigma_j \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{l/s'}} \right) \leq \frac{2^{3/s'}}{(2^{1/s'} - 1)} \max_{j_1 \leq j \leq j_2} \sigma_j. \quad (3.4)$$

Следовательно, $A_I = \sup_{a < t < b} A_I(t) \leq \frac{2^{3/s'}}{(2^{1/s'} - 1)} \max_{j_1 \leq j \leq j_2} \sigma_j$.

Доказательство п. (ii) аналогично доказательству п. (i). $\square$

Лемма 2. Пусть $\alpha = \max\{r', s'\}$, $\theta = \max\{p, q\}$, интервалы $I_k = (a_k, b_k)$, $k = 1, \dots, m$, дизъюнкты и $\bigcup_{k=1}^m I_k \subset J_j$. Тогда при $\beta = \frac{\alpha\theta}{\alpha+\theta} \geq 1$

$$\sum_{k=1}^m A_{I_k}^\beta \leq 2^{\frac{\beta}{s'}} \sigma_j^\beta. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть $t_k \in I_k$ для $k = 1, \dots, m$. Используя монотонность нормы и применяя неравенство Гёльдера для сумм с показателями $(\alpha + \theta)/\theta$ и $(\alpha + \theta)/\alpha$, заключаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \left(\int_{a_k}^{t_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\beta}{s'}} \left(\int_{t_k}^{b_k} \omega(z) dz \right)^{\frac{\beta}{p}} \\ & \leq \sum_{k=1}^m \left(\int_{I_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\beta}{s'}} \left(\int_{I_k} \omega(z) dz \right)^{\frac{\beta}{p}} \\ & \leq \left(\sum_{k=1}^m \left(\int_{I_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\alpha}{s'}} \right)^{\frac{\beta}{\alpha}} \left(\sum_{k=1}^m \left(\int_{I_k} \omega(z) dz \right)^{\frac{\theta}{p}} \right)^{\frac{\beta}{\theta}} \\ & \leq \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\beta}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{\beta}{p}} \\ & = \left(2 \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\beta}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{\beta}{p}} = 2^{\frac{\beta}{s'}} \sigma_j^\beta. \end{aligned}$$

В результате в силу произвольности $t_k \in I_k$ имеем

$$\sum_{k=1}^m \sup_{t_k \in I_k} \left(\int_{a_k}^{t_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{\beta}{s'}} \left(\int_{t_k}^{b_k} \omega(z) dz \right)^{\frac{\beta}{p}} \leq 2^{\frac{\beta}{s'}} \sigma_j^\beta,$$

что приводит к формуле (3.5). $\square$

Через последовательности $\{\sigma_j\}$ и $\{\delta_j\}$ можно охарактеризовать ограниченность и компактность оператора (1.6).

Теорема 4. Пусть $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$. Оператор $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида (1.6) ограничен тогда и только тогда, когда последовательность $\{\sigma_j\}$ принадлежит ℓ^∞ , при этом норма оператора удовлетворяет неравенству

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j \leq \|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq \frac{2^{3/s'+2}}{(2^{1/s'} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $t \in (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})$. Поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\varepsilon}^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ = \left(\int_0^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\infty} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

выполнено

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\varepsilon < t < \frac{1}{\varepsilon}} \left(\int_{\varepsilon}^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ = \sup_{t > 0} \left(\int_0^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\infty} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

В силу леммы 1 имеем

$$A_{(\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon})} = \sup_{\varepsilon < t < \frac{1}{\varepsilon}} \left(\int_{\varepsilon}^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\frac{1}{\varepsilon}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{3/s'}}{(2^{1/s'} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j,$$

следовательно,

$$A = \sup_{t > 0} A(t) = \sup_{t > 0} \left(\int_0^t s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_t^{\infty} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{2^{3/s'}}{(2^{1/s'} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j.$$

Согласно оценке нормы оператора в теореме 1 заключаем, что

$$\|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_{\omega}^{p,q}} \leq 4A \leq \frac{2^{3/s'+2}}{(2^{1/s'} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j.$$

С другой стороны, используя (3.2), получаем

$$\sigma_j \leq 2^{j/s'} \left(\int_{\xi_j}^{\infty} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} = A(\xi_j), \quad (3.7)$$

что влечет $\sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j \leq \sup_{j \in \mathbb{Z}} A(\xi_j) \leq A$. В силу оценки нормы оператора в теореме 1 имеем эквивалентность $\|T\| \approx \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\infty}$. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Утверждение теоремы 4 остается справедливым при замене последовательности σ_j на δ_j . При этом для нормы оператора выполняется оценка

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j \leq \|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_{\omega}^{p,q}} \leq \frac{2^{2/p+2}}{(2^{1/p} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \delta_j.$$

Теорема 5. Пусть $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$. Оператор $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида (1.6) компактен тогда и только тогда, когда

$$\|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\infty} < \infty \text{ (или } \|\{\delta_j\}\|_{\ell^\infty} < \infty)$$

и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{j \geq k} \sigma_j = \lim_{k \rightarrow -\infty} \sup_{j \leq k} \delta_j = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ДОСТАТОЧНОСТЬ. Оценка нормы оператора в теореме 1 и неравенство (3.5) позволяют записать

$$A \leq \|T\|_{L_v^{r,s} \rightarrow L_\omega^{p,q}} \leq \frac{2^{3/s'+2}}{(2^{1/s'} - 1)} \sup_{j \in \mathbb{Z}} \sigma_j,$$

что влечет $A < \infty$. Используя равенство (3.2), при $k \in \mathbb{Z}$ имеем

$$\begin{aligned} A(\xi_k) &= \left(\int_0^{\xi_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} = (2^k)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{1/s'} \left(\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Применяя оценку (3.4) леммы 1 и выбирая k_ε таким, чтобы $1/\varepsilon \in J_{k_\varepsilon}$, заключаем

$$\begin{aligned} A(\xi_k) &= 2^{1/s'} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\xi_{k-1}}^{\xi_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_k}^{1/\varepsilon} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{2^{4/s'}}{2^{1/s'} - 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{k \leq j \leq k_\varepsilon} \sigma_j \leq \frac{2^{4/s'}}{2^{1/s'} - 1} \sup_{j \geq k} \sigma_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A(\xi_k) = 0, \text{ если } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{j \geq k} \sigma_j = 0.$$

Аналогичными рассуждениями для η_k , $k \in \mathbb{Z}$, получим

$$\begin{aligned} A(\eta_k) &= \left(\int_0^{\eta_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\eta_k}^\infty \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{1/p} \left(\int_0^{\eta_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Далее применяем оценку (ii) леммы 1:

$$\begin{aligned} A(\eta_k) &= 2^{1/p} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_\varepsilon^{\eta_k} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\eta_k}^{\eta_{k+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{2^{3/p}}{2^{1/p} - 1} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{k_\varepsilon \leq j \leq k} \delta_j \leq \frac{2^{3/p}}{2^{1/p} - 1} \sup_{j \leq k} \delta_j. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\lim_{k \rightarrow -\infty} A(\eta_k) = 0$ в том случае, если $\lim_{k \rightarrow -\infty} \sup_{j \leq k} \delta_j = 0$, что согласно теореме 1 влечет компактность оператора (1.6).

НЕОБХОДИМОСТЬ условия теоремы следует из неравенства (3.7). $\square$

Лемма 3. Пусть $I = (a, b)$, $I \subset \mathbb{R}^+$, и

$$A_I^* = \sup_{a \leq x \leq b} \left(\int_x^b s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_a^x \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$A_I = \sup_{a \leq x \leq b} \left(\int_a^x s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_x^b \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда для любого $j \in \mathbb{Z}$ выполнено $A_{J_j \cup J_{j+1}}^* > \sigma_j$ и $A_{J_j \cup J_{j+1}} \geq \sigma_{j+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулы (3.1) и (3.3), получаем

$$\begin{aligned} A_{J_j \cup J_{j+1}}^* &= \sup_{\xi_j \leq x \leq \xi_{j+2}} \left(\int_x^{\xi_{j+2}} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^x \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\int_{\xi_{j+1}}^{\xi_{j+2}} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= [U(\xi_{j+2}) - U(\xi_{j+1})]^{1/s'} \left(\frac{2^{1/s'} \sigma_j}{2^{j/s'}} \right) = 4^{\frac{1}{s'}} \sigma_j > \sigma_j. \end{aligned}$$

Аналогично для второй константы

$$\begin{aligned} A_{J_j \cup J_{j+1}} &= \sup_{\xi_j \leq x \leq \xi_{j+2}} \left(\int_{\xi_j}^x s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_x^{\xi_{j+2}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left(\int_{\xi_j}^{\xi_{j+1}} s' \tau^{s'-1} u_*(\tau)^{\frac{s'}{r'}} d\tau \right)^{\frac{1}{s'}} \left(\int_{\xi_{j+1}}^{\xi_{j+2}} \omega(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} = \sigma_{j+1}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 4. Пусть $0 \leq a \leq b < \infty$, $I = [a, b]$, оператор T вида (1.6) и оператор $\mathcal{T}_I$ вида (2.1). Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$ и $S_I(\varepsilon) = \{j \in \mathbb{Z} : J_j \subset I, \sigma_j > c_{pq}\varepsilon\}$. Если $\text{card}(S_I(\varepsilon)) \geq 4$, то $\|\mathcal{T}_I\| > \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем точку $c \in I$ согласно теореме 2. Так как $\text{card}(S_I(\varepsilon)) \geq 4$, хотя бы одна из частей $[a, c]$ или $(c, b]$ промежутка I содержит два элемента разбиения $\{J_j\}$ целиком.

В первом случае, обозначая $j_1 = \min\{j : j \in S_I(\varepsilon)\}$, получаем вложение $J_{j_1} \cup J_{j_1+1} \subset [a, c]$, и по лемме 3 оцениваем

$$A_{(a,c)}^* \geq A_{J_{j_1} \cup J_{j_1+1}}^* \geq 4^{\frac{1}{s'}} \sigma_{j_1} > \sigma_{j_1} > c_{pq}\varepsilon.$$

Иначе, если два элемента разбиения J_j попадают в промежуток $(c, b]$, полагаем $j_2 = \max\{j : j \in S_I(\varepsilon)\}$. В этом случае $J_{j_2-1} \cup J_{j_2} \subset (c, b]$ и

$$A_{(c,b)} \geq A_{J_{j_2-1} \cup J_{j_2}} \geq \sigma_{j_2} > c_{pq}\varepsilon.$$

Следовательно, $D_I = \max(A_{(a,c)}^*, A_{(c,b)}) > c_{pq}\varepsilon$. Оценка снизу в теореме 2 показывает, что $\|\mathcal{T}_I\| \geq \frac{1}{c_{pq}} D_I$, откуда получаем $\|\mathcal{T}_I\| > \varepsilon$. $\square$

Лемма 5. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$. Если в соответствии с формулами (2.2) определены промежутки $I_i = [c_i, c_{i+1})$, $i = 0, 1, \dots, N$, $N = N(\varepsilon)$, то

$$\text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > c_{pq}\varepsilon\} \leq 6N(\varepsilon).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как

$$\text{card}\{j \in \mathbb{Z} : c_i \in J_j \text{ для некоторых } i, 1 \leq i \leq N\} \leq 2N, \quad (3.8)$$

то для $j \in \mathbb{Z}$, не содержащихся в (3.8), $J_j \subset I_i = [c_i, c_{i+1})$ при $1 \leq i \leq N$. По выбору $\|\mathcal{T}_{I_i}\| = \varepsilon$, поэтому из леммы 4 следует, что

$$\text{card}\{j \in \mathbb{Z} : J_j \subset I_i, \sigma_j > c_{pq}\varepsilon\} \leq 3.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > c_{pq}\varepsilon\} &= \sum_{i=0}^N \text{card}\{j \in \mathbb{Z} : J_j \subset I_i, \sigma_j > c_{pq}\varepsilon\} + 2N \\ &\leq 3(N+1) + 2N \leq 6N. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 6. Для любого $t > 0$ справедливо неравенство

$$\text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > c_{pq}t\} \leq 6 \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geq \frac{t}{2c_{pq}}\right\},$$

где константа c_{pq} определена формулой (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.3) для номеров $n = 1, \dots, N$ с подходящим $\varepsilon(n)$ выполняется оценка $\frac{1}{2c_{pq}}\varepsilon(n) \leq a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}}$. Выбирая $\varepsilon = \min \varepsilon(n)$, имеем

$$\text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geq \frac{\varepsilon}{2c_{pq}}\right\} \geq N(\varepsilon).$$

Применяя неравенство, доказанное в лемме 5, получаем

$$\begin{aligned} \text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > c_{pq}t\} &\leq 6N(t) \\ &\leq 6 \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geq \frac{t}{2c_{pq}}\right\}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 7. Для $\alpha \in (0, \infty)$ выполняется неравенство

$$\|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})} \leq 2c_{pq}^2 6^{1/\alpha} \left\| \left\{ a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \right\} \right\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя то, что квазинорму пространства ℓ^α можно представить через функцию распределения $\text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > \tau\}$ последовательности $\{\sigma_j\}$ (см. [19, предложение 1.1.4]), и применяя лемму 6, находим

$$\begin{aligned} \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha &= \alpha \int_0^\infty \tau^{\alpha-1} \text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > \tau\} d\tau \\ &= \alpha c_{pq}^\alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \text{card}\{j \in \mathbb{Z} : \sigma_j > c_{pq}t\} dt \\ &\leq 6c_{pq}^\alpha \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \text{card}\left\{n \in \mathbb{N} : a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \geq \frac{t}{2c_{pq}}\right\} dt \\ &= 6 \cdot (2c_{pq}^2)^\alpha \left\| \left\{ a_n(T)n^{\frac{1}{\min(r,s)} - \frac{1}{\max(p,q)}} \right\} \right\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}^\alpha. \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 6. Пусть $1 < \max(r, s) \leq q < \infty$, $1 < p < \infty$, $\beta = \frac{\max\{r', s'\} \max\{p, q\}}{\max\{r', s'\} + \max\{p, q\}}$, $\alpha > \beta$ и оператор $T : L_v^{r, s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p, q}(\mathbb{R}^+)$ вида (1.6) компактен. Тогда

(i) в случае $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$

$$\|\{a_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \leq C_1 \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}, \quad (3.9)$$

(ii) если $1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$, то

$$\|\{a_n(T) n^{\frac{1}{\max(r, s)} - \frac{1}{p}}\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} \leq C_2 \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}, \quad (3.10)$$

где константы C_1, C_2 зависят только от параметров p, q, r, s .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0 < \varepsilon < \|T\|$, $N = N(\varepsilon)$ определены формулами (2.2). С учетом взаимного расположения на оси промежутков дизъюнктивных разбиений семействами промежутков типа $I_i = [c_i, c_{i+1})$, $i = 0, \dots, N-1$, и типа $J_j = (\xi_j, \xi_{j+1})$, $j \in \mathbb{Z}$, имеются только две возможности.

В случае, когда $c_i \in J_l$, $c_{i+1} \in J_{l+m}$ для некоторых $l \in \mathbb{Z}$, $m \geq 1$, имеем $I_i = [c_i, c_{i+1}) \subset \bigcup_{j=l}^{l+m} J_j$. Используя замечание 1 к теореме 1 и лемму 1, заключаем, что

$$\varepsilon = \|\mathcal{T}_{I_i}\| \leq \|T_{I_i}\|_{L_v^{r, s} \rightarrow L_\omega^{p, q}} \leq 4A(I_i) \leq \frac{2^{3/s'+2}}{(2^{1/s'} - 1)} \max_{l \leq j \leq l+m} \sigma_j = C_2 \sigma_{j_i}$$

для некоторого $j_i \in [j_l, j_{l+m}]$.

Иначе имеем $\bigcup_{i=l}^{l+m_j-1} I_i \subset J_j$, $l \in \mathbb{N}$, $m_j \geq 1$, тогда, применяя результаты леммы 2, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^\beta m_j &= \sum_{i=l}^{l+m_j-1} \|\mathcal{T}_{I_i}\|^\beta \leq \sum_{i=l}^{l+m_j-1} \|T_{I_i}\|_{L_v^{r, s} \rightarrow L_\omega^{p, q}}^\beta \\ &\leq 4^\beta \sum_{i=l}^{l+m_j-1} A(I_i)^\beta \leq 4^{\frac{\beta}{s'} + \beta} \sigma_j^\beta = C_3^\beta \sigma_j^\beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} N(\varepsilon) &= \text{card}\left\{i : \sigma_{j_i} \geq \frac{\varepsilon}{C_2}\right\} + \sum_{j: m_j \geq 1} \text{card}\left\{j : \sigma_j \geq \frac{\varepsilon m_j^{1/\beta}}{C_3}\right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \text{card}\left\{j : \sigma_j \geq \frac{k^{1/\beta} \varepsilon}{C_4}\right\}, \end{aligned}$$

где $C_4 = \min\{C_2, C_3\}$.

Верхняя оценка аппроксимативных чисел в теореме 3 при соотношении параметров $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$ показывает, что

$$\text{card}\{n \in \mathbb{N} : a_n(T) > \varepsilon\} \leq N(\varepsilon).$$

Следовательно,

$$\|\{a_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}^\alpha = \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \text{card}\{n \in \mathbb{N} : a_n(T) > t\} dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} N(t) dt \leq \alpha \int_0^\infty \sum_{k=1}^\infty t^{\alpha-1} \text{card} \left\{ j \in \mathbb{Z} : \sigma_j \geq \frac{k^{1/\beta} t}{C_4} \right\} dt \\
&= C_4^\alpha \left(\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{\alpha/\beta}} \right) \int_0^\infty \alpha \tau^{\alpha-1} \text{card} \{ j : \sigma_j \geq \tau \} d\tau = C_5^\alpha \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha,
\end{aligned}$$

что доказывает неравенство (3.9).

Также в случаях $1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$ верхняя оценка a -чисел в теореме 3 показывает, что

$$\text{card} \{ n \in \mathbb{N} : a_n(T) n^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} > \varepsilon \} \leq N(\varepsilon).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$\begin{aligned}
\| \{ a_n(T) n^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} \} \|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})}^\alpha &= \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} \text{card} \{ n \in \mathbb{N} : a_n(T) n^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} > t \} dt \\
&\leq \alpha \int_0^\infty t^{\alpha-1} N(t) dt \ll \|\{\sigma_j\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{Z})}^\alpha,
\end{aligned}$$

что влечет выполнение неравенства (3.10). $\square$

3.2. Обозначим

$$\begin{aligned}
\mathbb{J}_\alpha &= \left(\int_0^\infty \left(\int_0^x s' t^{s'-1} u_*(t)^{\frac{s'}{r'}} dt \right)^{\frac{\alpha}{s'}} \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}} \\
&= \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_v^{r',s'}}^\alpha \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Основной результат работы содержится в следующей теореме.

Теорема 7. Пусть $\beta = \frac{\max\{r',s'\} \max\{p,q\}}{\max\{r',s'\} + \max\{p,q\}}$, $\alpha > \beta$ и $\mathbb{J}_\alpha < \infty$. Тогда компактный оператор $T : L_v^{r,s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x f(\tau) u(\tau) v(\tau) d\tau, \quad x > 0,$$

(i) принадлежит операторному идеалу $\mathbb{L}_\alpha^{(a)}$ и выполнена оценка

$$\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(a)}} = \left(\sum_{n=1}^\infty a_n^\alpha(T) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_v^{r',s'}}^\alpha \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

в случае $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$;

(ii) принадлежит операторному идеалу $\mathbb{L}_{\max(r,s),p}^{(a)}$, т. е. является аппроксимационным оператором типа $\ell_{\max(r,s),p}$ и выполнена оценка

$$\|T\|_{\mathbb{L}_{\max(r,s),p}^{(a)}} = \left(\sum_{n=1}^\infty \left(n^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} a_n(T) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_v^{r',s'}}^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

в области параметров $1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем оценку

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha \right)^{1/\alpha} \ll \mathbb{J}_\alpha$$

при $0 < \alpha < \infty$. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_\alpha^\alpha &= \sum_k \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \left(\int_0^x s' t^{s'-1} u_*(t)^{\frac{s'}{r'}} dt \right)^{\frac{\alpha}{s'}} \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \\ &\geq \frac{p}{\alpha} \sum_k \|\chi_{(0, \xi_k)} u\|_{L_{v'}^{r', s'}}^\alpha \int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} d \left(- \int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}} \\ &\geq \frac{p}{\alpha} \sum_k \|\chi_{(\xi_{k-1}, \xi_k)} u\|_{L_{v'}^{r', s'}}^\alpha \left[\left(\int_{\xi_k}^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}} - \left(\int_{\xi_{k+1}}^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}} \right] \\ &\geq \frac{p}{\alpha} \sum_k \|\chi_{(\xi_{k-1}, \xi_k)} u\|_{L_{v'}^{r', s'}}^\alpha \left(\int_{\xi_k}^{\xi_{k+1}} \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}} = \frac{p}{\alpha} \sum_k \sigma_k^\alpha. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \sigma_k^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{p} \right)^{1/\alpha} \mathbb{J}_\alpha, \quad 0 < \alpha < \infty. \quad (3.11)$$

Применяя неравенства (3.9) и (3.10) теоремы 6 к оценке (3.11), получаем требуемый результат теоремы 7. $\square$

Пусть $\mathbf{s}_n(T)$ — одна из последовательностей характеристических чисел оператора T , т. е. одна из $c_n(T)$, $d_n(T)$, $b_n(T)$, $m_n(T)$. Соответствующий этой последовательности операторный идеал, следуя монографии [5], обозначаем через $\mathbb{L}_\alpha^{(\mathbf{s})}$ с (квази)нормой

$$\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(\mathbf{s})}} = \|\{\mathbf{s}_k(T)\}\|_{\ell_\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^\infty \mathbf{s}_n^\alpha(T) \right)^{1/\alpha}, \quad 0 < \alpha < \infty.$$

Применяя соотношения между характеристическими числами оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ из [18, теорема 8.1]

$$a_n(T) \geq c_n(T) \geq b_n(T), \quad a_n(T) \geq d_n(T) \geq m_n(T),$$

получаем следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $\alpha > \beta = \frac{\max\{r', s'\} \max\{p, q\}}{\max\{r', s'\} + \max\{p, q\}}$ и $\mathbb{J}_\alpha < \infty$; пусть $\mathbf{s}_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, — одна из последовательностей $c_n(T)$, $d_n(T)$, $b_n(T)$, $m_n(T)$. Тогда компактный оператор $T : L_v^{r, s}(\mathbb{R}^+) \rightarrow L_\omega^{p, q}(\mathbb{R}^+)$ вида

$$Tf(x) = \int_0^x f(\tau) u(\tau) v(\tau) d\tau, \quad x > 0,$$

(i) принадлежит операторному идеалу $\mathbb{L}_\alpha^{(s)}$ и выполнена оценка

$$\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(s)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^\alpha(T) \right)^{\frac{1}{\alpha}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_{v'}^{r',s'}}^\alpha \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

в случае $1 < \max(r, s) \leq \min(p, q) < \infty$;

(ii) принадлежит операторному идеалу $\mathbb{L}_{\max(r,s),p}^{(s)}$ и выполнена оценка

$$\|T\|_{\mathbb{L}_{\max(r,s),p}^{(s)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{\frac{1}{\max(r,s)} - \frac{1}{p}} s_n(T) \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_{v'}^{r',s'}}^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

в области параметров $1 < p \leq r < s \leq q < \infty$, $1 < r < p < s \leq q < \infty$, $1 < p \leq s < r \leq q < \infty$, $1 < s < p < r \leq q < \infty$.

С s -числами оператора тесно связаны энтропийные числа. Для оператора $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ его n -е энтропийное число $e_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$, определено как

$$e_n(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \exists y_1, \dots, y_m \in Y, m \leq 2^{n-1} : T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^m \{y_j + \varepsilon B_Y\} \right\},$$

где $B_X := \{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ — единичный шар в X , B_Y — единичный шар в Y (см. [1, § 13.1]).

Оператор $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ называется $\mathbb{L}_\alpha^{(e)}$ -оператором, $0 < \alpha < \infty$, если последовательность его энтропийных чисел суммируема со степенью α и

$$\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(e)}} = \|\{e_n(T)\}\|_{\ell^\alpha(\mathbb{N})} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^\alpha(T) \right)^{1/\alpha}.$$

Класс таких операторов $\mathbb{L}_\alpha^{(e)}$ с квазинормой $\|T\|_{\mathbb{L}_\alpha^{(e)}}$, $0 < \alpha < \infty$, есть квазинормированный операторный идеал (см. [1, § 14.3.1] или [5, § 1.6]).

Из вложения $\mathbb{L}_\alpha^{(a)} \subseteq \mathbb{L}_{\alpha_1}^{(e)}$ при $0 < \alpha \leq \alpha_1 < \infty$, доказанного в [1, § 14.3.11–14.3.12], и основного результата статьи — теоремы 7, получаем

Следствие 1. В условиях теоремы 7(i) компактный оператор T принадлежит операторному идеалу $\mathbb{L}_{\alpha_1}^{(e)}$ и выполнена оценка

$$\|T\|_{\mathbb{L}_{\alpha_1}^{(e)}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^{\alpha_1}(T) \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \ll \left(\int_0^\infty \|\chi_{(0,x)} u\|_{L_{v'}^{r',s'}}^\alpha \left(\int_x^\infty \omega(\tau) d\tau \right)^{\frac{\alpha}{p}-1} \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Пич А. Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
2. König H. Eigenvalue distribution of compact operators. Basel: Birkhäuser Verl., 1986.
3. Pietsch A. Eigenvalues and S -numbers. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1986.
4. Edmunds D. E., Evans W. D. Spectral theory and differential operators. Oxford: Oxford Univ. Press, 1987.
5. Carl B., Stephani I. Entropy, compactness and the approximation of operators. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990.
6. Bennett C., Sharpley R. Interpolation of operators. Boston: Acad. Press, 1988.

7. Barza S., Kolyada V., Soria J. Sharp constants related to the triangle inequality in Lorentz spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 2009. V. 361, N 10. P. 5555–5574.
8. Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. Approximation numbers of certain Volterra integral operators // J. London Math. Soc. (2). 1988. V. 38. P. 471–489.
9. Edmunds D. E., Stepanov V. D. On the singular numbers of certain Volterra integral operators // J. Funct. Anal. 1995. V. 134, N 1. P. 222–246.
10. Edmunds D. E., Evans W. D., Harris D. Two-sided estimates of the approximation numbers of certain Volterra integral operators // Studia Math. 1997. V. 124, N 1. P. 59–80.
11. Lomakina E., Stepanov V. On asymptotic behaviour of the approximation numbers and estimates of Schatten–von Neumann norms of Hardy-type integral operators // Function spaces and applications. New Delhi: Narosa Publ. House, 2000. P. 153–187.
12. Lifshits M. A., Linde W. Approximation and entropy numbers of Volterra operators with application to Brownian motion // Mem. Amer. Math. Soc. 2002. V. 745. P. 1–87.
13. Lomakina E., Stepanov V. On the compactness and approximation numbers of Hardy type integral operators in Lorentz spaces // J. London Math. Soc. (2). 1996. V. 53. P. 369–382.
14. Lomakina E., Stepanov V. On the Hardy-type integral operators in Banach function spaces // Publ. Mat. 1998. V. 42. P. 165–194.
15. Ломакина Е. Н. Об оценках норм оператора Харди, действующего в пространствах Лоренца // Дальневосточ. мат. журн. 2020. Т. 20, № 2. С. 191–211.
16. Sawyer E. T. Weighted Lebesgue and Lorentz norm inequalities for the Hardy operator // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 281. P. 329–337.
17. Ломакина Е. Н., Насырова М. Г., Насыров В. В. О некоторых числах оператора Харди в пространствах Лоренца // Дальневосточ. мат. журн. 2021. Т. 21, № 1. С. 71–88.
18. Pietsch A. s -Numbers of operators in Banach spaces // Studia Math. 1974. V. 51. P. 201–223.
19. Grafakos L. Classical Fourier analysis. New York: Springer, 2008.

Поступила в редакцию 16 августа 2023 г.

После доработки 25 октября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Ломакина Елена Николаевна (ORCID 0000-0002-2301-8380)

Насырова Мария Георгиевна (ORCID 0000-0001-6150-6652)

Вычислительный Центр ДВО РАН,

ул. Ким Ю Чена, 65, Хабаровск 680000

enlomakina@mail.ru, nassm@mail.ru

УДК 510.6

ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЕ СВОЙСТВО КРЕЙГА В ПРЕДТАБЛИЧНЫХ ЛОГИКАХ

Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн

Аннотация. Ранее были описаны все предтабличные расширения минимальной логики и решена проблема табличности. Всего над минимальной логикой оказалось семь предтабличных логик. Доказано, что четыре из них имеют интерполяционное свойство Крейга CIP и две не имеют. В данной статье решается вопрос о свойстве CIP в седьмой логике. Доказано, что она обладает интерполяционным свойством Крейга.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.209

Ключевые слова: минимальная логика, табличность, предтабличная логика, интерполяционное свойство.

Введение

В статье исследуется проблема интерполяции в расширениях минимальной логики J Йохансона [1]. Мы рассматриваем интерполяционное свойство Крейга [2] в предтабличных логиках.

Для класса суперинтуиционистских логик, которые составляют подкласс класса J-логик, проблема интерполяции подробно изучена. В [3] доказана разрешимость интерполяционного свойства Крейга CIP в расширениях интуиционистской логики Int и описаны все суперинтуиционистские логики с этим свойством. При этом оказалось, что существуют точно восемь суперинтуиционистских логик со свойством CIP, включая тривиальную логику For. При переходе к более широкому классу J-логик задача существенно усложняется. Известно, что сама логика J и наиболее важные ее расширения обладают свойством CIP [4]. В то же время неизвестно, конечно или бесконечно число J-логик с этим свойством.

Будем рассматривать предтабличные расширения минимальной логики J. Логика является *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны. Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью.

В [5] доказана разрешимость над J проблемы табличности: доказано существование алгоритма, который для любой конечно аксиоматизируемой логики, содержащей J, устанавливает, является ли эта логика табличной. Для решения проблемы табличности над минимальной логикой потребовалось описание предтабличных логик над J. В [5] описаны все предтабличные логики над минимальной логикой, их оказалось семь. Найдены их аксиоматизация и семантическая характеристикация в терминах шкал Крипке, доказана узнаваемость над J.

Работа выполнена в рамках FWNF-2022-0011.

© 2024 Максимова Л. Л., Юн В. Ф.

В [6] исследовалась проблема интерполяции для предтабличных логик. Доказано, что четыре из семи предтабличных логик обладают интерполяционным свойством Крейга CIP и две не имеют CIP. Вопрос об интерполяционном свойстве Крейга CIP в седьмой логике PJ7 был открыт.

В данной работе решается о свойстве CIP в логике PJ7. Из [6] следует, что логика PJ7 является конечнослойной предгейтинговой логикой, т. е. конечнослойным расширением логики $Od = J + \neg\neg(\perp \rightarrow p)$. В [7] исследовалась проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках. Для этого использовались алгебраические критерии и была введена новая серия алгебр. Доказано, что существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством CIP. Мы докажем, что логика PJ7 совпадает с одной из них и, следовательно, обладает интерполяционным свойством Крейга.

1. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \rightarrow, \perp, \top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \rightarrow \perp$; $(A \leftrightarrow B) = (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\perp$. *Длиной формулы A* называем число вхождений символа импликации в формулу A.

Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление Int^+ , и единственное правило вывода *modus ponens*.

Под J-логикой понимается любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно *modus ponens* и правила подстановки. Если A — произвольная формула, через $L + A$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Обозначаем

$$Int = J + (\perp \rightarrow p), \quad Neg = J + \perp,$$

$$LC = Int + ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)), \quad NC = Neg + ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)),$$

$$NE = Neg + (p \vee (p \rightarrow q)), \quad Od = J + \neg\neg(\perp \rightarrow p).$$

Суперинтуиционистской логикой (с.и.л.) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg. Логика называется *предгейтинговой*, если она содержит логику Od.

Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если формула A выводима из $L \cup \Gamma$ посредством правила *modus ponens*: $B, B \rightarrow C / C$.

В [8] введена классификация J-логик с помощью слоев, продолжающая классификацию суперинтуиционистских логик [9]. Обозначим

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \rightarrow \pi_n).$$

Будем говорить, что L есть логика $(n+1)$ -го слоя, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \not\vdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя. L — логика *конечного слоя* (или *конечнослойная логика*), если $L \vdash \pi_n$ для некоторого n, и логика *бесконечного слоя* в противном случае. Заметим, что все слои непусты и попарно не пересекаются.

В [8] доказано, что любая конечнослойная J-логика финитно аппроксимируема, т. е. характеризуется некоторым классом конечных моделей. Характеризация J-логик бесконечного слоя также найдена в [8].

Напомним, что логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью. Логика называется *предтабличной*, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны. Известно, что логика над J является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик.

Следующая теорема, доказанная в [5], дает аксиоматизацию предтабличных J-логик.

Теорема 1.1. *Существуют точно семь предтабличных логик над J, а именно:*

- *три предтабличные суперинтуиционистские логики:*

$$PJ1 = LC = \text{Int} + ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)),$$

$$PJ2 = LP_2 = \text{Int} + \pi_2,$$

$$PJ3 = LQ_3 = \text{Int} + \pi_3 + (\neg p \vee \neg \neg p),$$

- *две предтабличные негативные логики:*

$$PJ4 = NC = \text{Neg} + ((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)),$$

$$PJ5 = NP_2 = \text{Neg} + \pi_2,$$

$$\bullet PJ6 = J + \pi_2 + (\perp \rightarrow \pi_1) + (p \vee \neg p),$$

$$\bullet PJ7 = J + \pi_2 + (\perp \rightarrow \pi_1) + \neg(\perp \rightarrow p) + (\neg p \vee \neg \neg p).$$

Там же найдена семантическая характеристика всех предтабличных логик в терминах шкал Крипке и доказана узнаваемость предтабличных логик над минимальной логикой J.

Напомним, что конечно аксиоматизируемая логика $L_1 \supseteq L_0$ *узнаваема над* L_0 [10], если и только если существует алгоритм, который по любой формуле A узнает, верно ли равенство $L_0 + A = L_1$.

Если $\mathbf{p}$ — список переменных, то через $A(\mathbf{p})$ обозначаем формулу, все переменные которой входят в $\mathbf{p}$.

Говорят, что логика L обладает *интерполяционным свойством Крейга CIP* [4, 11], если она удовлетворяет следующему условию (здесь списки $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ попарно не пересекаются).

CIP. Если $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$, то существует такая формула $C(\mathbf{p})$, что $\vdash_L A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rightarrow C(\mathbf{p})$ и $\vdash_L C(\mathbf{p}) \rightarrow B(\mathbf{p}, \mathbf{r})$.

Формула $C(\mathbf{p})$ называется *интерполянт*ом.

В [6] доказана

Теорема 1.2. *Логики PJ1, PJ2, PJ4, PJ6 имеют интерполяционное свойство Крейга CIP; логики PJ3, PJ5 не имеют CIP.*

Вопрос об интерполяционном свойстве CIP для логики PJ7 был открыт. Однако легко видеть, что логика PJ7 является конечнослойной предгейтинговой логикой. В [7] доказано, что существует лишь конечное число конечнослойных предгейтинговых логик со свойством CIP. В разд. 4 будет доказано, что логика PJ7 совпадает с одной из них.

2. Модифицированная семантика Крипке, характеристика логик PJ1–PJ7

Семантика типа Крипке для логики J была предложена Сегербергом [12]. Мы используем модифицированную семантику, введенную в [13].

Подмножество X частично упорядоченного множества W называем *конусом*, если оно удовлетворяет условию

$$x \in X, x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под *J-шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где W — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент ∞ , Q — конус множества W , содержащий ∞ .

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если W_1 — конус множества W , $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Элемент $x \in W$ называем *нормальным*, если $x \in W - Q$, и *ненормальным* в противном случае. Элементы из $W - \{\infty\}$ называем *существенными*, а элемент ∞ — *несущественным*. *Высота шкалы* $h(\mathbf{W})$ определяется как супремум длин конечных цепей в $W - \{\infty\}$.

Моделью называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества W и формулами, удовлетворяющее условиям:

- (1) $x \models p, x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной p ;
- (2) $\infty \models p$ для любой переменной p ;
- (3) $x \models \perp \iff x \in Q$;
- (4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A \text{ и } x \models B)$;
- (5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A \text{ или } x \models B)$;
- (6) $x \models (A \rightarrow B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Будем говорить, что *модель* $M = (W, \leq, Q, \models)$ *основана на шкале* $(W, \leq, Q)$. Известна следующая

Лемма 2.1. *Для любой модели M верно:*

- (1) $\infty \models A$ для любой формулы A ;
- (2) $x \models A, x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы A .

Формула A называется *истинной*, или *общеэзначимой*, в модели M , если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Будем говорить, что формула A *общеэзначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и писать $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели M , основанной на $\mathbf{W}$.

Заметим, что модифицированные модели отличаются от моделей Сегерберга [12] лишь добавлением элемента ∞ . Это усложнение позволяет определить понятие p -морфизма и устанавливать соответствие между p -морфизмами и подалгебрами J -алгебр.

Шкала $\mathbf{W}$ *удовлетворяет логике* L , если $\mathbf{W} \models L$. Логика L *полна относительно класса шкал* (характеризуется классом шкал) K , если она совпадает с множеством формул, общеэзначимых в шкалах из K .

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n^0 &= (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } V_n = \{0, 1, \dots, n\}, xRy \iff (x = 0 \text{ или } x = y \text{ или } y = \infty), Q = V_n \cup \{\infty\}, \\ \mathbf{V}_n^1 &= (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } Q = \{1, \dots, n, \infty\}, \\ \mathbf{V}_n^2 &= (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } n > 0, Q = \{2, \dots, n, \infty\}, \\ \mathbf{V}_n^t &= (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } Q = \{\infty\}, \\ \mathbf{U}_{n+1}^t &= (U_{n+1} \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } U_{n+1} = \{0, 1, \dots, n, n+1\}, xRy \iff \\ &(x = 0 \text{ или } y = n+1 \text{ или } 1 \leq x = y \leq n \text{ или } y = \infty), Q = \{\infty\}, \\ \mathbf{Z}_n^0 &= (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } Z_n = \{1, \dots, n\}, xRy \iff (x \leq y \text{ или } y = \infty), Q = Z_n \cup \{\infty\}, \\ \mathbf{Z}_n^1 &= (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } Q = \{2, \dots, n, \infty\}, \\ \mathbf{Z}_n^t &= (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \text{ где } Q = \{\infty\}. \end{aligned}$$

Верхний индекс указывает на число нормальных элементов. Если все существенные элементы нормальны, то верхний индекс есть t ("total").

Теорема 2.2 [5]. *Логики PJ1–PJ7 полны соответственно относительно классов шкал:*

- (1) $\mathbf{Z}_n^t$, $n \geq 1$,
- (2) $\mathbf{V}_n^t$, $n \geq 1$,
- (3) $\mathbf{U}_n^t$, $n \geq 2$,
- (4) $\mathbf{Z}_n^0$, $n \geq 1$,
- (5) $\mathbf{V}_n^0$, $n \geq 1$,
- (6) $\mathbf{V}_n^1$, $n \geq 1$,
- (7) $\mathbf{V}_n^2$, $n \geq 1$.

В частности, доказано

Предложение 2.3. Пусть A — формула длины k , зависящая от n переменных. Тогда

$$\text{PJ7} \vdash A \iff \mathbf{V}_{k+1}^2 \models A.$$

В [5] доказана узнаваемость логик PJ1–PJ7 над J, в частности верно

Предложение 2.4. Для любой J-логики L

$$L \supseteq \text{PJ7} \iff (\mathbf{Z}_2^0 \not\models L \text{ и } \mathbf{Z}_2^1 \not\models L \text{ и } \mathbf{V}_2^t \not\models L \text{ и } \mathbf{Z}_3^t \not\models L).$$

3. Алгебраическая семантика и специальные алгебры $G_{m,n}$

Алгебраическая семантика минимальной логики строится с помощью так называемых J-алгебр, т. е. алгебр $\mathbf{A} = \langle A; \&, \vee, \rightarrow, \perp, \top \rangle$, удовлетворяющих следующим условиям:

$\langle A; \&, \vee, \rightarrow, \perp, \top \rangle$ есть решетка относительно $\&, \vee$ с наибольшим элементом $\top$,

$$z \leq x \rightarrow y \iff z \& x \leq y,$$

$\perp$ — произвольный элемент в A .

J-алгебра называется *гейтинговой*, или *псевдобулевой алгеброй*, если $\perp$ — наименьший элемент множества A , и *негативной алгеброй*, если $\perp$ — наибольший элемент множества A .

Если B — формула, $\mathbf{A}$ — алгебра, то говорят, что в $\mathbf{A}$ *общезначима формула* B , и пишут $\mathbf{A} \models B$, если тождество $B = \top$ выполняется в $\mathbf{A}$.

Известно [14], что класс всех J-алгебр образует многообразие (т. е. может быть задан системой тождеств [15]) и существует взаимно однозначное соответствие между логиками, содержащими логику J, и многообразиями J-алгебр. Для любой J-логики L через $V(L)$ обозначается многообразие J-алгебр, в которых общезначимы все формулы из L :

$$V(L) = \{\mathbf{A} \mid \mathbf{A} \models L\}.$$

Любая логика характеризуется многообразием $V(L)$. Широко известна

Теорема 3.1 (теорема о полноте). Пусть L — J-логика. Тогда $L + A \vdash B$, если и только если для любой алгебры $\mathbf{A} \in V(L)$ из $\mathbf{A} \models A$ следует $\mathbf{A} \models B$.

Напомним [16], что J-алгебра $\mathbf{A}$ является *подпрямо неразложимой* тогда и только тогда, когда она имеет опремум, т. е. наибольший элемент в множестве $\mathbf{A} - \{\top\}$. Алгебра $\mathbf{A}$ *финитно неразложима*, если удовлетворяет условию

$$x \vee y = \top \Rightarrow (x = \top \text{ или } y = \top).$$

Говорят, что класс алгебр порождает логику L , если он порождает многообразие $V(L)$.

Хорошо известно (см., например, [15]), что любая логика L порождается классом всех финитно неразложимых конечно порожденных алгебр, удовлетворяющих L .

Рассмотрим алгебры $G_{m,n}$, описанные в [7].

Пусть $0 < m + n < \omega$. Обозначим через $G_{m,n}$ J -алгебру, полученную из конечной булевой алгебры с множеством атомов $At_{m,n} = \{a_1, \dots, a_{m+n}\}$ добавлением нового наибольшего элемента $\top_{m,n}$. При этом каждый элемент, отличный от $\top_{m,n}$, представим в виде суммы атомов, опремум $\Omega_{m,n}$ есть сумма всех атомов, $\perp_{m,n} = \bigvee_{m+1 \leq i \leq m+n} a_i$.

Через $0_{m,n} = \bigvee_{i \in \emptyset} a_i$ обозначаем наименьший элемент алгебры $G_{m,n}$.

Имеет место

Лемма 3.2 [7]. (1) Алгебра $G_{m,n}$ имеет $m + n$ атомов $a_1, \dots, a_{m+n}$, где $\perp_{m,n} = \bigvee_{m+1 \leq i \leq m+n} a_i$, и любой элемент, отличный от $\top_{m,n}$ и $0_{m,n}$, единственным образом представим в виде суммы атомов.

(2) Пусть $I, J \subseteq K = \{1, \dots, m+n\}$, $0_{m,n} = \bigvee_{i \in \emptyset} x_i$. Тогда в алгебре $G_{m,n}$

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \& \left(\bigvee_{j \in J} x_j\right) = \left(\bigvee_{j \in I \cap J} x_j\right), \quad \left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \vee \left(\bigvee_{j \in J} x_j\right) = \left(\bigvee_{j \in I \cup J} x_j\right);$$

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \rightarrow \left(\bigvee_{j \in J} x_j\right) = \top \text{ при } I \subseteq J,$$

$$\left(\bigvee_{i \in I} x_i\right) \rightarrow \left(\bigvee_{j \in J} x_j\right) = \left(\bigvee_{j \in (K-I) \cup J} x_j\right) \text{ при } I \not\subseteq J.$$

4. СР в логике PJ7

Через E, B_0, L_2^- обозначаем соответственно одноэлементную, двухэлементную булеву и двухэлементную негативную алгебры.

Рассмотрим класс алгебр $K_0 = \{E, B_0, L_2^-, G_{1,n} (n \geq 0)\}$. Заметим, что все алгебры из K_0 являются финитно неразложимыми конечно порожденными алгебрами. Известно, что любая логика порождается классом всех финитно неразложимых конечно порожденных алгебр, ей удовлетворяющих. Пусть L_0 — логика, порожденная классом K_0 . Как следует из [7], логика L_0 обладает интерполяционным свойством Крейга СР.

Цель данного раздела — доказать, что логика PJ7 совпадает с логикой L_0 и, следовательно, имеет СР.

Напомним связь между алгебраической семантикой и семантикой Крипке [8, 17]. Для данной шкалы $\mathbf{W}$ обозначим через $W^\#$ множество непустых конусов с операциями

$$X \rightarrow Y = \{x \mid (\forall y \geq x)(y \in X \Rightarrow y \in Y)\},$$

$$X \& Y = X \cap Y, \quad X \vee Y = X \cup Y, \quad \perp = Q,$$

Тогда $W^\#$ является J -алгеброй. Легко видеть, что общезначимость формулы в шкале $\mathbf{W}$ равносильна ее общезначимости в алгебре $W^\#$.

Предложение 4.1. $L_0 \subseteq \text{PJ7}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда существует формула A такая, что $A \in L_0$ и $A \notin \text{PJ7}$, т. е. $\text{PJ7} \not\models A$. По предложению 2.3 тогда существует шкала $\mathbf{V}_{k+1}^2$ (где k — длина формулы A) такая, что $\mathbf{V}_{k+1}^2 \not\models A$.

Ввиду конечной высоты существует взаимно однозначное соответствие между конечными шкалами и конечно порожденными алгебрами [8]. Заметим, что шкале $\mathbf{V}_{k+1}^2$ соответствует алгебра $G_{1,k}$.

Действительно, шкала $\mathbf{V}_{k+1}^2$ имеет $k+1$ несравнимых элементов $1, \dots, k+1$, наименьший элемент 0 и наибольший ∞ . Множество $Q = \{2, \dots, k+1, \infty\}$. Перечислим все непустые конусы шкалы $\mathbf{V}_{k+1}^2$. Это множество $\{\infty\}$; несравнимые по включению конусы $a_1 = \{1, \infty\}$, $a_2 = \{2, \infty\}, \dots, a_{k+1} = \{k+1, \infty\}$; наибольший по включению конус $\{0, 1, \dots, k+1, \infty\}$; все конусы, отличные от наибольшего и $\{\infty\}$, можно представить как объединение некоторых несравнимых конусов. В частности, $Q = \{2, \dots, k+1, \infty\} = \bigcup_{2 \leq i \leq k+1} a_i$.

Таким образом, в алгебре $(V_{k+1}^2)^\#$ имеется $k+1$ атомов $a_1, \dots, a_{k+1}$. Наибольший элемент $\top$ алгебры $(V_{k+1}^2)^\#$ — это конус $\{0, 1, \dots, k+1, \infty\}$, $\{\infty\} = \bigvee_{i \in \emptyset} a_i$ — наименьший, и каждый элемент алгебры, отличный от $\top$, представим в виде суммы атомов. При этом опремум Ω есть сумма всех атомов, $\perp = \bigvee_{2 \leq i \leq k+1} a_i$, т. е. алгебра $(V_{k+1}^2)^\#$ изоморфна алгебре $G_{1,k}$.

Так как $\mathbf{V}_{k+1}^2 \not\models A$, то $(V_{k+1}^2)^\# \not\models A$, следовательно, формула A опровергается в алгебре $G_{1,k}$.

Однако $G_{1,k} \in K_0$ и $K_0 \subseteq V(L_0)$, т. е. алгебра $G_{1,k}$ удовлетворяет логике L_0 . Таким образом $G_{1,k} \models A$, так как $A \in L_0$. Получаем противоречие, и предложение доказано. $\square$

Предложение 4.2. $L_0 \supseteq \text{PJ7}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложению 2.4 достаточно доказать, что

$$\mathbf{Z}_2^0 \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{Z}_2^1 \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{V}_2^t \not\models L_0 \text{ и } \mathbf{Z}_3^t \not\models L_0.$$

Заметим, что данные шкалы имеют конечную высоту. Поймем, какие алгебры им соответствуют.

В шкале $\mathbf{Z}_2^0$ следующие непустые конусы: $a = \{\infty\}$, $b = \{2, \infty\}$, $c = \{1, 2, \infty\} = Q$. В алгебре $(Z_2^0)^\#$ имеем $a < b < c$ и $\perp = c = \top$. Таким образом, алгебра $(Z_2^0)^\#$ изоморфна трехэлементной негативной алгебре L_3^- .

В шкале $\mathbf{Z}_2^1$ конус ненормальных элементов $Q = \{2, \infty\}$, следовательно, алгебра $(Z_2^1)^\#$ изоморфна трехэлементной алгебре с носителем $\{a, b, c\}$, $a < b < c$, где $\perp = \{2, \infty\} = b$. Обозначим эту алгебру через C .

Перечислим все непустые конусы шкалы $\mathbf{Z}_3^t$. Это множества $\{\infty\}$, $\{3, \infty\}$, $\{2, 3, \infty\}$, $\{1, 2, 3, \infty\}$, причем $Q = \{\infty\}$. Таким образом, алгебра $(Z_3^t)^\#$ изоморфна четырехэлементной гейтинговой алгебре L_4 .

Поймем, что шкале $\mathbf{V}_2^t$ соответствует алгебра $G_{2,0}$. В шкале $\mathbf{V}_2^t$ два несравнимых элемента $1, 2$; ∞ — наибольший, 0 — наименьший элементы; $Q = \{\infty\}$. Непустые конусы шкалы $\mathbf{V}_2^t$: множества $\{\infty\}$, $a_1 = \{1, \infty\}$, $a_2 = \{2, \infty\}$, $\{1, 2, \infty\}$, $\{0, 1, 2, \infty\}$.

Таким образом в алгебре $(V_2^t)^\#$ два несравнимых элемента a_1, a_2 , $\{0, 1, 2, \infty\}$ — наибольший элемент, опремум $\Omega = a_1 \vee a_2$ и $\perp = Q = \{\infty\}$ — наименьший элемент алгебры.

Заметим, что в алгебре $G_{2,0}$ два несравнимых атома b_1, b_2 , опремум $\Omega_{2,0} = b_1 \vee b_2$ и $\perp_{2,0} = \bigvee_{2+1 \leq i \leq 2} b_i$ совпадает с наименьшим элементом $0_{2,0} = \bigvee_{i \in \emptyset} b_i$.

Получаем, что алгебра $(V_2^t)^\#$ изоморфна алгебре $G_{2,0}$.

Таким образом, предложение 2.4 можно сформулировать в терминах алгебраической семантики следующим образом:

$L \supseteq \text{PJ7} \iff L_3^- \not\models L$ и $C \not\models L$ и $L_4 \not\models L$ и $G_{2,0} \not\models L$, где C — трехэлементная алгебра с носителем $\{a, b, c\}$ и $a < b < c$, $\perp = b$.

Заметим, что все рассматриваемые алгебры L_3^- , C , L_4 , $G_{2,0}$ являются конечными (следовательно, конечно порожденными) и финитно неразложимыми алгебрами. Кроме того, ни одна из них не принадлежит классу K_0 . Класс K_0 содержит все конечно порожденные финитно неразложимые алгебры, удовлетворяющие логике L_0 . Следовательно, $L_3^- \not\models L_0$ и $C \not\models L_0$ и $L_4 \not\models L_0$ и $G_{2,0} \not\models L_0$. Таким образом, $L_0 \supseteq \text{PJ7}$, и предложение доказано. $\square$

Из предложений 4.1, 4.2 сразу следует, что логика PJ7 совпадает с логикой L_0 . Так как L_0 обладает СР [7], то верна

Теорема 4.3. Предтабличная логика PJ7 обладает интерполяционным свойством Крейга СР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Johansson I. Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compositio Math. 1937. N 4. P. 119–136.
2. Craig W. Three uses of Herbrand–Gentzen theorem in relating model theory and proof theory // J. Symbol. Logic. 1957. V. 22. P. 269–285.
3. Максимова Л. Л. Теорема Крейга в суперинтуиционистских логиках и амальгамируемые многообразия // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 6. С. 643–681.
4. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Расширения минимальной логики и проблема интерполяции // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 863–878.
5. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Проблема табличности над минимальной логикой // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 6. С. 1320–1332.
6. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Предтабличность и интерполяционное свойство Крейга над минимальной логикой // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 245–250.
7. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Проблема интерполяции в конечнослойных предгейтинговых логиках // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 2. С. 210–228.
8. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Слои над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 4. С. 449–464.
9. Hosoi T. On intermediate logics I // J. Faculty Sci. Univ. Tokyo, Sec. Ia. 1967. V. 14. P. 293–312.
10. Максимова Л. Л., Юн В. Ф. Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 252–274.
11. Максимова Л. Л. Интерполяционная теорема Крейга и амальгамируемые многообразия // Докл. АН СССР. 1977. Т. 237, № 6. С. 1281–1284.
12. Segerberg K. Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.
13. Максимова Л. Л. Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.
14. Rautenberg W. Klassische und nicht-classische Aussagenlogik. Braunschweig: Vieweg, 1979.
15. Мальцев А. И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.
16. Максимова Л. Л. Неявная определимость и позитивные логики // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 65–93.
17. Odintsov S. Logic of classic refutability and class of extensions of minimal logic // Logic and

Logical Philosophy. 2001. V. 9. P. 91–107.

Поступила в редакцию 13 июля 2023 г.

После доработки 13 июля 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Максимова Лариса Львовна (ORCID 0000-0002-4061-3982),

Юн Вета Федоровна (ORCID 0000-0002-4871-6281)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

lmaksi@math.nsc.ru, yun@math.nsc.ru

УДК 515.145.2+515.148

РАССЛОЕНИЯ БИРМАН — ХИЛЬДЕНА. II

А. В. Малютин

Аннотация. Изучается структура групп автогомеоморфизмов расслоенных многообразий. Расслоенное топологическое пространство называется пространством Бирман — Хильдена, если в каждой паре послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) изотопных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны. В работе доказывается, в частности, что к классу Бирман — Хильдена относятся все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью многообразия размерности не выше трех (включая неориентируемые и с непустым краем), а также все локально тривиально расслоенные над окружностью с ориентируемым хаковым слоем замкнутые четырехмерные многообразия (включая неориентируемые).

DOI 10.33048/smzh.2024.65.210

Ключевые слова: расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность, многообразие.

1. Введение

Настоящая работа продолжает исследование структуры групп автогомеоморфизмов расслоенных многообразий и развитие теории расслоений Бирман — Хильдена на основе результатов [1]. Расслоенное топологическое пространство называется *пространством Бирман — Хильдена*, если в каждой паре изотопных послойных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны (здесь и далее в работе под *послойными* отображениями понимаются отображения, переводящие каждый слой в некоторый — не обязательно исходный — слой, а под *изотопиями* автогомеоморфизмов понимаются изотопии в классе автогомеоморфизмов, а не в классе вложений). *Расслоениями Бирман — Хильдена* называются расслоения, тотальные пространства которых являются пространствами Бирман — Хильдена. Если расслоенное пространство (расслоение) является пространством (расслоением) Бирман — Хильдена, то говорим также, что оно *обладает свойством* Бирман — Хильдена или *относится к классу* Бирман — Хильдена.

Вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена относится к задаче изучения групп автогомеоморфизмов. Для расслоенного пространства E обозначим через $Fib(E)$ подгруппу послойных автогомеоморфизмов в (снабженной компактно-открытой топологией) группе $Homeo(E)$ всех автогомеоморфизмов пространства E , а содержащие тождественное отображение id_E компоненты линейной связности групп $Fib(E)$ и $Homeo(E)$ обозначим через $Fib_1(E)$ и

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, <https://rscf.ru/project/22-11-00299/>.

$\text{Homeo}_1(E)$ соответственно. Тогда принадлежность к классу Бирман — Хильдена эквивалентна совпадению подгрупп $\text{Homeo}_1(E) \cap \text{Fib}(E)$ (подгруппа изотопных тождественному и при этом послойных автогомеоморфизмов) и $\text{Fib}_1(E)$ (подгруппа автогомеоморфизмов, послойно изотопных тождественному) или, что то же самое, линейной связности подгруппы $\text{Homeo}_1(E) \cap \text{Fib}(E)$. Иными словами, в терминах компонент линейной связности: расслоенное пространство E относится к классу Бирман — Хильдена, если и только если включение $\text{Fib}(E) \subset \text{Homeo}(E)$ дает мономорфизм на уровне π_0 , т.е. компонента $\text{Homeo}_1(E)$ группы $\text{Homeo}(E)$ кроме компоненты $\text{Fib}_1(E)$ подгруппы $\text{Fib}(E)$ не содержит ни одной другой компоненты из $\text{Fib}(E)$.

В работах [2–17] вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена изучался для случая разветвленных накрытий поверхностей (обзор и дополнительные ссылки на литературу по этому направлению имеются в [15]). В [18, 19] этот вопрос исследовался для случая слоений Зейферта, а также для случая накрытий трехмерных многообразий. В теории узлов и трехмерных многообразий возникает вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена для расслоенных над окружностью трехмерных многообразий. В работе [1] доказывалась серия теорем о достаточных условиях принадлежности к классу Бирман — Хильдена для локально тривиальных расслоений над окружностью. В настоящей работе с помощью достаточных условий из [1] доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *При $n \in \{1, 2, 3\}$ все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью n -мерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) обладают свойством Бирман — Хильдена.*

Теорема 2. *Все локально тривиально расслоенные над окружностью с ориентируемым хаковым слоем замкнутые четырехмерные многообразия (включая неориентируемые) обладают свойством Бирман — Хильдена.*

Теорему 1 дополняет следующий результат.

Теорема 3. *Если $n \in \{1, 2\}$, а M — замкнутое расслоенное n -мерное многообразие из теоремы 1, то включение $\text{Fib}_1(M) \subset \text{Homeo}_1(M)$ является гомотопической эквивалентностью.*

Требования о компактности и связности в теоремах 1 и 2 существенны. К примеру, локально тривиальное расслоение над окружностью, каждая компонента связности которого есть лента Мёбиуса, обладает свойством Бирман — Хильдена, если и только если связно. Локально тривиальное расслоение $\mathbb{R}^n \rightarrow S^1$ со слоями, состоящими из гиперплоскостей, обладает свойством Бирман — Хильдена, если и только если $n = 1$. По-видимому, требование о компактности в теоремах 1 и 2 можно ослабить до требования о компактности компонент связности слоя, но это направление в настоящей работе не развивается. Теорема 2 обобщается на обширный класс 4-мерных многообразий с краем, — мы не приводим описания, поскольку оно объемно и в настоящий момент неполно. В рамках используемых методов доказательства первым препятствием к экстраполяции теорем 1 и 2 на случай нехакова слоя и на высшие размерности являются многообразия, допускающие гомотопные, но не изотопные автогомеоморфизмы (см., в частности, [20]).

Теорема 1 имеет ряд актуальных следствий. В частности, она применима в доказательстве того, что в локально тривиально расслоенном над окружностью

связном компактном трехмерном многообразии изотопные трансверсальные зацепления трансверсально изотопны. Это существенно обобщает известный результат о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [21; 22, теорема 1; 23, предложение 10.16; 24, теорема 2.1]). Доказательство упомянутого обобщения предполагается дать в отдельной работе.

Оставшаяся часть статьи ориентирована на доказательство теорем 1–3. Структура статьи такова. В §2 содержится ряд предварительных сведений, включая формулировки доказанных в [1] достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена. В §3 доказываются утверждения, использующиеся в последующих доказательствах для сведения ситуации к случаю расслоений со связным слоем. В §4 теоремы 1 и 3 доказываются в случае $n = 1$. В §5 теорема 1 доказывается в случае $n = 2$. В §6 теорема 3 доказывается в случае $n = 2$. В §7 теорема 1 доказывается в случае $n = 3$. В §8 доказывается теорема 2.

2. Предварительные сведения

2.1. Достаточные условия. Приведем формулировки доказанных в [1] и использующихся в доказательствах теорем 1–3 достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена.

Для топологического пространства X через $\text{Map}(X, X)$ обозначается пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \rightarrow X$. Если Z — подпространство в X , то через $\text{Map}(X, X; [Z])$ обозначается подпространство в $\text{Map}(X, X)$, состоящее из отображений, тождественных на Z . Через $\text{Homeo}(X; [Z])$ обозначается подгруппа $\text{Homeo}(X) \cap \text{Map}(X, X; [Z])$. Через $\text{Map}_1(X, X)$, $\text{Map}_1(X, X; [Z])$ и $\text{Homeo}_1(X; [Z])$ обозначаются компоненты линейной связности тождественного отображения в $\text{Map}(X, X)$, $\text{Map}(X, X; [Z])$ и $\text{Homeo}(X; [Z])$ соответственно.

Теорема 4 [1]. Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Предположим, что у X не имеется гомотопных но не изотопных автогомеоморфизмов и что либо группа $\text{Homeo}_1(X)$ односвязна, либо ее включение в моноид $\text{Map}_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что расслоение $p : E \rightarrow B$ обладает свойством эпиморфности, если включение $\text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E)$ индуцирует эпиморфизм на уровне фундаментальных групп.

Теорема 5 [1]. Пусть $p : E \rightarrow S^1$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X , где X — связное компактное многообразие с непустым краем ∂X . Предположим, что выполнены следующие условия:

- у X не имеется пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией,
- либо группа $\text{Homeo}_1(X; [\partial X])$ односвязна, либо ее включение в $\text{Map}_1(X, X; [\partial X])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп,
- сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

2.2. Спорадические сведения. Приведем ряд сведений, использующихся в дальнейших доказательствах многократно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Топологическая группа называется *польской*, если она сепарабельна и допускает полную метрику.

Следующее хорошо известное (см., например, [25, следствие 2] и [26, § 5, I]) утверждение приводится для удобства ссылок.

Утверждение 1. Группы автогомеоморфизмов метрических компактов с компактно-открытой топологией польские. Замкнутые подгруппы польских групп польские.

Утверждение 2. Если M — компактное многообразие, то подгруппа $\text{Homeo}_1(M)$ замкнута в (снабженной компактно-открытой топологией) группе $\text{Homeo}(M)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы Чернавского [27, 28] группа $\text{Homeo}(M)$ локально стягиваема и, значит, локально линейно связна. Отсюда следует, что компоненты линейной связности в $\text{Homeo}(M)$ замкнуты. $\square$

Утверждение 3. Если $p : E \rightarrow B$ — расслоение метрических компактов, то подгруппа послойных автогомеоморфизмов $\text{Fib}(E)$ замкнута в $\text{Homeo}(E)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $f : \text{Homeo}(E) \rightarrow \mathbb{R}$, полагая для гомеоморфизма $h \in \text{Homeo}(E)$ значение $f(h)$ равным супремуму (по всем слоям расслоения) диаметров проекций в B образов $h(F)$ слоев F расслоения. Иными словами,

$$f(h) := \sup_{b \in B} \text{diam}(p(h(p^{-1}(b)))) ,$$

где $\text{diam}(Y)$ — диаметр подмножества $Y \subset B$ в фиксированной на B метрике.

Тогда, как нетрудно видеть, f непрерывно и $\text{Fib}(E) = f^{-1}(\{0\})$, так что $\text{Fib}(E)$ замкнуто как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении. $\square$

Следующая лемма доказывается, к примеру, в [29, теорема А.3] (см. также [30, 27.Vx] для случая полупрямых произведений):

Лемма 1. Если G — польская группа, а A и B — такие замкнутые подгруппы в G , что $G = AB$ и $A \cap B = 1_G$, то групповая операция индуцирует гомеоморфизм между $A \times B$ и G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $\mathcal{C}$ — класс топологических пространств. Говорят, что топологическое пространство X является *абсолютным окрестностным ретрактом* (АОР) для класса $\mathcal{C}$, если X является окрестностным ретрактом всякого пространства из класса $\mathcal{C}$, содержащего X в качестве замкнутого подпространства.

Утверждение 4. Если $f_1 : A \rightarrow B$ — гомотопическая эквивалентность и $f_2 : B \rightarrow C$ — такое отображение, что композиция $f_2 \circ f_1$ является гомотопической эквивалентностью, то и f_2 является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что f_2 гомотопно композиции гомотопических эквивалентностей:

$$f_2 = f_2 \circ \text{id}_B \simeq f_2 \circ (f_1 \circ g) = (f_2 \circ f_1) \circ g,$$

где $g : B \rightarrow A$ — гомотопическая эквивалентность такая, что $g \circ f_1 \simeq \text{id}_A$ и $f_1 \circ g \simeq \text{id}_B$. $\square$

Утверждение 4 связывает стандартную формулировку классической теоремы Уайтхеда о гомотопической эквивалентности клеточных комплексов со следующей вариацией этой теоремы.

Теорема 6 [31]. *Непрерывное отображение между топологическими пространствами, имеющими гомотопический тип клеточных комплексов, является слабой гомотопической эквивалентностью, если и только если оно является гомотопической эквивалентностью.*

Теорема 7 [32, 33]. *Топологическое пространство имеет гомотопический тип счетного клеточного комплекса, если и только если оно имеет гомотопический тип сепарабельного метрического пространства, являющегося АОР для класса сепарабельных метрических пространств.*

3. Сведение к случаю связного слоя

В настоящем разделе доказываются утверждения, сводящие общий случай в теоремах 1–3 к случаю расслоения со связным слоем.

Утверждение 5. *Каждое локально тривиальное расслоение локально связного секвенциально компактного пространства (например, компактного многообразия) есть композиция локально тривиального расслоения со связными слоями и конечнолистного накрытия базы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва заметим, что у расслоения указанного вида число связных компонент в каждом слое конечно. Действительно, из определения топологии прямого произведения стандартным образом выводится, что у локально тривиального расслоения с локально связным секвенциально компактным пространством и база, и слои также локально связны и секвенциально компактны, а у пространства с этими свойствами число компонент связности конечно (поскольку в противном случае, воспользовавшись секвенциальной компактностью и выбрав сходящуюся последовательность точек, пробегающую бесконечное множество компонент, мы получили бы, что у предельной точки этой последовательности отсутствуют связные окрестности).

Далее, для произвольного расслоения $p : E \rightarrow B$ определим пространство Q_p и отображение $p_1 : E \rightarrow Q_p$ как факторпространство и факторотображение, отвечающие отождествлению всех точек в каждой компоненте связности каждого слоя расслоения p . Тогда p разлагается в композицию расслоений

$$E \xrightarrow{p_1} Q_p \xrightarrow{p_2} B,$$

причем p_1 и p_2 локально тривиальны, если p таково. У расслоения p_1 слои связны в силу определения. Заметим, что если у p количество связных компонент в каждом слое конечно, то слои у p_2 конечны и дискретны (поскольку конечность числа связных компонент в слое F расслоения p делает отвечающие этим компонентам подмножества в произвольной тривиально расслоенной окрестности $U \times F$ слоя F не только замкнутыми, но и открытыми в $U \times F$, что дает дискретность соответствующего слоя в p_2). Таким образом, у p_1 слои всегда связны, а в условиях доказываемого утверждения у p_2 слои конечны и дискретны, т. е. p_2 является конечнолистным накрытием. $\square$

Следствие 1. *Локально тривиальное расслоение $p : M \rightarrow S^1$ связного компактного многообразия над окружностью раскладывается в композицию*

$$M \xrightarrow{p_1} S^1 \xrightarrow{c} S^1,$$

где p_1 — локально тривиальное расслоение со связным слоем, а c — накрытие.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из утверждения 5, поскольку многообразия локально связны, а факторпространство связного пространства связно. $\square$

В дальнейшем, одновременно рассматривая два расслоения p и $c \circ p$ на одном и том же пространстве M , мы обозначаем подгруппы послойных автогомеоморфизмов в $\text{Homeo}(M)$, отвечающих слоям расслоений $c \circ p$ и p , через $\text{Fib}^{cop}(M)$ и $\text{Fib}^p(M)$ соответственно, а компоненты линейной связности этих подгрупп, содержащие тождественное отображение id_M , обозначаются через $\text{Fib}_1^{cop}(M)$ и $\text{Fib}_1^p(M)$.

Предложение 1. Пусть $p : M \rightarrow S^1$ — локально тривиальное расслоение с компактным связным метризуемым слоем F , а $c : S^1 \rightarrow S^1$ — накрытие. Тогда $\text{Fib}^{cop}(M)$ содержится в $\text{Fib}^p(M)$, а включения $\text{Fib}^{cop}(M) \subset \text{Fib}^p(M)$ и $\text{Fib}_1^{cop}(M) \subset \text{Fib}_1^p(M)$ являются гомотопическими эквивалентностями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $\text{Fib}^{cop}(M)$ лежит в $\text{Fib}^p(M)$, обусловлено связностью слоя F : слои расслоения p суть в точности компоненты связности слоев расслоения $c \circ p$, так что каждый $c \circ p$ -послойный автогомеоморфизм еще и p -послоен.

Покажем, что включение $\text{Fib}^{cop}(M) \subset \text{Fib}^p(M)$ есть гомотопическая эквивалентность. Обозначим через S_p^1 и S_c^1 базовые окружности расслоений p и $c \circ p$ соответственно. Пусть ρ — произвольная (из совместимых с топологией) внутренняя метрика на S_c^1 . Обозначим через $I^\rho(M)$ подгруппу тех элементов из $\text{Fib}^{cop}(M)$, у которых индуцированные автоморфизмы $S_c^1 \rightarrow S_c^1$ являются изометриями по отношению к ρ . Возникает цепочка включений

$$I^\rho(M) \subset \text{Fib}^{cop}(M) \subset \text{Fib}^p(M) \subset \text{Homeo}(M).$$

Покажем, что включение $I^\rho(M) \subset \text{Fib}^{cop}(M)$ является гомотопической эквивалентностью. Для этого зафиксируем произвольный слой $\tilde{F}_0$ расслоения $c \circ p$ и произвольную непрерывную сюръекцию

$$\phi : \tilde{F}_0 \times [0, 1] \rightarrow M,$$

гомеоморфно отправляющую каждый слой $\tilde{F}_0 \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$, в тот или иной слой расслоения $c \circ p$ и такую, что композиция $c \circ p \circ \phi$ индуцирует гомеоморфизм между фактор-пространством $[0, 1]/\{0, 1\}$ и окружностью S_c^1 . Обозначим через L подгруппу $\text{id}_{\tilde{F}_0} \times \text{Homeo}_1([0, 1])$ в $\text{Homeo}_1(\tilde{F}_0 \times [0, 1])$. Заметим, что L изоморфна стягиваемой группе $\text{Homeo}_1([0, 1])$, а отображение ϕ индуцирует мономорфизм $\phi_* : L \rightarrow \text{Fib}_1^{cop}(M)$. Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I^\rho(M)$ и $\phi_*(L)$ замкнуты в $\text{Fib}^{cop}(M)$, а любой элемент $g \in \text{Fib}^{cop}(M)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I^\rho(M)$ и $b \in \phi_*(L)$. Из указанных свойств в силу утверждения 1 и леммы 1 вытекает, что отображение

$$I^\rho(M) \times \phi_*(L) \rightarrow \text{Fib}^{cop}(M), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом. Отсюда в силу стягиваемости $\phi_*(L)$ следует, что включение $I^\rho(M) \subset \text{Fib}^{cop}(M)$ есть гомотопическая эквивалентность.

Покажем, что и включение $I^\rho(M) \subset \text{Fib}^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью. Пусть $\tilde{\rho}$ — метрика на S_p^1 , индуцированная накрытием $c : S_p^1 \rightarrow S_c^1$ и метрикой ρ на S_c^1 , а $I^{\tilde{\rho}}(M)$ — подгруппа тех элементов в $\text{Fib}^p(M)$, у

которых проекция в S^1_p является изометрией по отношению к $\tilde{\rho}$. Из условия о связности слоя F элементарными рассуждениями выводится, что $\tilde{I}^{\tilde{\rho}}(M)$ совпадает с $I^{\rho}(M)$. Применяя к включению $I^{\rho}(M) = \tilde{I}^{\tilde{\rho}}(M) \subset Fib^p(M)$ ту же схему рассуждений, что и к включению $I^{\rho}(M) \subset Fib^{cop}(M)$, видим, что оно является гомотопической эквивалентностью.

Отсюда в силу утверждения 4 вытекает, что и включение $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью.

Из того, что включение $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью, следует, что и включение $Fib_1^{cop}(M) \subset Fib_1^p(M)$ — гомотопическая эквивалентность, поскольку $Fib_1^{cop}(M)$ и $Fib_1^p(M)$ определены как компоненты подгрупп $Fib^{cop}(M)$ и $Fib^p(M)$, содержащие тождественное отображение. $\square$

Следствие 2. Пусть $p : M \rightarrow S^1$ — локально тривиальное расслоение с компактным связным метризуемым слоем, а $s : S^1 \rightarrow S^1$ — накрытие. Тогда

- (1) расслоение p обладает свойством Бирман — Хильдена тогда и только тогда, когда им обладает $s \circ p$,
- (2) включение $Fib_1^p(M) \subset Homeo_1(M)$ есть гомотопическая эквивалентность, если и только если включение $Fib_1^{cop}(M) \subset Homeo_1(M)$ таково.

Доказательство. Поскольку расслоенное пространство E относится к классу Бирман — Хильдена тогда и только тогда, когда компонента $Homeo_1(E)$ группы $Homeo(E)$ кроме компоненты $Fib_1(E)$ подгруппы $Fib(E)$ не содержит ни одной другой компоненты этой подгруппы, первое утверждение следствия вытекает из того, что $Fib^{cop}(M)$ лежит в $Fib^p(M)$ и включение $Fib^{cop}(M) \subset Fib^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью (предложение 1), что указывает, в частности, на наличие естественной биекции между компонентами подгрупп $Fib^{cop}(M)$ и $Fib^p(M)$.

Второе утверждение следствия вытекает из того, что $Fib_1^{cop}(M)$ лежит в $Fib_1^p(M)$ и включение $Fib_1^{cop}(M) \subset Fib_1^p(M)$ является гомотопической эквивалентностью (в силу того же предложения 1), и утверждения 4. $\square$

4. Доказательство теорем 1 и 3 в случае $n = 1$

Для расслоения-гомеоморфизма $p : S^1 \rightarrow S^1$, когда слой является точкой, утверждения теорем 1 и 3 выполняются, поскольку каждая изотопия между автогомеоморфизмами расслоенной на точки окружности автоматически послойна, т. е. в этом случае $Homeo_1(M) = Fib_1(M)$. Случай неоднолистного накрытия $S^1 \rightarrow S^1$ вытекает отсюда в силу следствия 2: утверждения теорем 1 и 3 для случая накрытия следуют из пп. (1), (2) следствия 2 соответственно.

5. Доказательство теоремы 1 в случае $n = 2$

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят ситуацию к случаю расслоения со связным слоем, так что для доказательства теоремы 1 при $n = 2$ достаточно рассмотреть случай слоя, гомеоморфного окружности, и случай слоя, гомеоморфного отрезку.

5.1. Случай слоя, гомеоморфного окружности. Этот случай выводится из теоремы 4. Тот факт, что гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны, т. е.

$$Map_1(S^1, S^1) \cap Homeo(S^1) = Homeo_1(S^1),$$

хорошо известен и вытекает из многих классических конструкций (см., к примеру, [34, 35]). Из второго (двойного) условия теоремы 4 выполняется вторая часть условия — о том, что включение $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (см. нижеследующее предложение 2).

Предложение 2. Включение $\text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$ является гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим естественное вложение

$$SO(2) \subset \text{Homeo}_1(S^1) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1),$$

где под $SO(2)$ понимаются евклидовы повороты евклидовой окружности. То, что вложение $SO(2) \subset \text{Homeo}_1(S^1)$ есть гомотопическая эквивалентность, доказывается, например, в [36, предложение 4.2] (также см. [37, лемма 3.3]). То, что вложение $SO(2) \subset \text{Map}_1(S^1, S^1)$ есть гомотопическая эквивалентность, следует, например, из результатов о так называемых H_* -пространствах, доказанных в [38] (см. также [39; 40, теорема (2.2); 41, 42; 43, теорема 5.1]). Отсюда в силу утверждения 4 получаем требуемое. $\square$

5.2 Случай слоя, гомеоморфного отрезку. В этой части утверждение теоремы 1 выводится из теоремы 5. Укажем результаты, из которых следует, что в случае, когда слой есть отрезок, в теореме 1 выполняются условия теоремы 5.

То, что у отрезка не имеется пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией, доказывается трюком Александра (см. [44] и [45, теорема 1.1.1]). Трюк Александра показывает, что пространство группы $\text{Homeo}([0, 1])$ состоит из двух компонент: компонента $\text{Homeo}_1([0, 1])$ включает автогомеоморфизмы, тождественные на концах отрезка, вторая компонента — автогомеоморфизмы, меняющие концы местами; и остается заметить, что автогомеоморфизмы из разных компонент очевидно не связаны тождественной на крае гомотопией.

Односвязность (более того, стягиваемость) пространства группы $\text{Homeo}_1([0, 1])$ также доказывается применением трюка Александра (см. [45, теорема 1.1.1] и [44]).

То, что сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности, вытекает из рассмотренного выше случая $n = 1$ теорем 1 и 3 соответственно.

6. Доказательство теоремы 3 в случае $n = 2$

При $n = 2$ замкнутое расслоенное n -мерное многообразие из теоремы 3 — это тор либо бутылка Клейна, а слой расслоения — набор окружностей. Следствия 1 и 2 (п. (2)) сводят ситуацию к случаю связного слоя, т. е. достаточно провести доказательство только для случая, когда слой — это окружность.

Итак, пусть дано расслоение $p : E \rightarrow S^1$ со слоем окружность (а пространство E есть тор или бутылка Клейна). Введем на E локально евклидову метрику так, чтобы все слои расслоения p являлись геодезическими, обозначим через $I_1(E)$ содержащую тождественное отображение компоненту группы изометрий пространства E и рассмотрим тождественные включения

$$I_1(E) \subset \text{Fib}_1(E) \subset \text{Homeo}_1(E).$$

В случае тора $E = T = S^1 \times S^1$ пространство группы $I_1(E)$ гомеоморфно тору, а в случае бутылки Клейна $E = K$ группа $I_1(K)$ изоморфна группе $SO(2)$

(проходу вдоль окружности $SO(2)$ отвечает двойной поворот вдоль базы расслоения). В [46] и в [47] доказывалось, что включения $I_1(T) \subset Homeo_1(T)$ и $I_1(K) \subset Homeo_1(K)$ являются слабыми гомотопическими эквивалентностями; задействованные пространства сепарабельны, метризуемы (утверждение 1) и являются АОР для класса метрических пространств (см. [48]); отсюда в силу теорем 6 и 7 следует, что указанные включения являются и гомотопическими эквивалентностями. Убедимся в том, что в каждом из случаев $E = T$ и $E = K$ включение $I_1(E) \subset Fib_1(E)$ является гомотопической эквивалентностью. Доказываемое утверждение о том, что $Fib_1(E) \subset Homeo_1(E)$ есть гомотопическая эквивалентность, следует отсюда в силу утверждения 4.

СЛУЧАЙ ТОРА. Покажем, что включение $I_1(T) \subset Fib_1(T)$ есть гомотопическая эквивалентность.

Для этого заметим сперва, что группа $Fib_1(T)$ замкнута в $Homeo(T)$, поскольку в силу доказанного выше случая $n = 2$ теоремы 1 выполняется равенство $Fib_1(T) = Homeo_1(T) \cap Fib(T)$,¹⁾ а группы $Homeo_1(T)$ и $Fib(T)$ замкнуты в $Homeo(T)$ в силу утверждений 2 и 3. Отсюда следует, что группа $Fib_1(T)$ польская, будучи замкнутой подгруппой польской группы $Homeo(T)$ (см. утверждение 1).

Далее, выберем в T произвольную точку x и обозначим через $Fib_1(T, x)$ подгруппу в $Fib_1(T)$, образованную гомеоморфизмами, переводящими x в x . Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I_1(T)$ и $Fib_1(T, x)$ замкнуты в $Fib_1(T)$, а любой элемент $g \in Fib_1(T)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I_1(T)$ и $b \in Fib_1(T, x)$, т. е.

$$I_1(T)Fib_1(T, x) = Fib_1(T), \quad I_1(T) \cap Fib_1(T, x) = \{id_T\}.$$

Отсюда в силу леммы 1 получаем, что отображение

$$I_1(T) \times Fib_1(T, x) \rightarrow Fib_1(T), \quad a \times b \mapsto ab,$$

является гомеоморфизмом.

Теперь покажем, что пространство группы $Fib_1(T, x)$ стягиваемо. Для этого зафиксируем какое-нибудь проходящее через точку x сечение γ расслоения $T = E \rightarrow S^1$ и рассмотрим следующие подгруппы G_1 , G_2 и G_3 в $Fib_1(T, x)$:

G_1 — подгруппа, состоящая из всех тождественных на γ внутрислойных²⁾ автогомеоморфизмов из $Fib_1(T, x)$,

G_2 — подгруппа тех внутрислойных автогомеоморфизмов из $Fib_1(T, x)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужениям на слои исходной локально евклидовой метрики на E),

G_3 — подгруппа тех элементов из $Fib_1(T, x)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией (по отношению к сужениям на слои исходной локально евклидовой метрики на E) между слоями и при этом переводящих γ в γ .

¹⁾Заметим, что в случае локально тривиально расслоенного над окружностью многообразия N с компактным слоем M подгруппа $Fib_1(N)$ замкнута безотносительно к принадлежности расслоения к классу Бирман — Хильдена. Это можно доказать, пользуясь локальной стягиваемостью (теорема Чернавского [27]) пространства группы автогомеоморфизмов слоя M : из локальной односвязности пространства $Homeo(M)$ выводится локальная линейная связность подгруппы $Fib_1(N)$.

²⁾Послойный автогомеоморфизм расслоенного пространства называется *внутрислойным* или *внутрислойевым*, если каждый слой переводится этим автогомеоморфизмом в тот же слой.

Из определений ясно, что пространства групп G_1 , G_2 и G_3 гомеоморфны (очевидно, стягиваемым) пространству свободных петель в $\text{Homeo}_1([0, 1])$, пространству петель в $\mathbb{R}^1$ с базовой точкой в нуле и пространству $\text{Homeo}_1([0, 1])$ соответственно. Таким образом, каждая из подгрупп G_1 , G_2 и G_3 стягиваема. Кроме того, как следует из простых соображений, каждая из подгрупп G_1 , G_2 и G_3 замкнута в $\text{Fib}_1(T, x)$, а каждый элемент $g \in \text{Fib}_1(T, x)$ единственным образом представим в виде произведения $g = abc$ с $a \in G_1$, $b \in G_2$ и $c \in G_3$. Отсюда в силу утверждения 1 и леммы 1 вытекает, что пространство группы $\text{Fib}_1(T, x)$ стягиваемо.

Таким образом, группа $\text{Fib}_1(T)$ тривиально расслаивается над подгруппой $I_1(T)$ со стягиваемым слоем, так что включение $I_1(T) \subset \text{Fib}_1(T)$ есть гомотопическая эквивалентность.

СЛУЧАЙ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА K . Покажем, что включение $I_1(K) \subset \text{Fib}_1(K)$ есть гомотопическая эквивалентность. Схема доказательства следует схеме для случая тора.

Заметим сперва, что группа $\text{Fib}_1(K)$ польская, будучи замкнутой подгруппой польской группы $\text{Homeo}(K)$ (см. утверждение 1). (Как и в случае тора, группа $\text{Fib}_1(K)$ замкнута в $\text{Homeo}(K)$, поскольку в силу рассмотренного выше случая $n = 2$ теоремы 1 выполняется равенство $\text{Fib}_1(K) = \text{Homeo}_1(K) \cap \text{Fib}(K)$, а группы $\text{Homeo}_1(K)$ и $\text{Fib}(K)$ замкнуты в $\text{Homeo}(K)$ в силу утверждений 2 и 3.)

Далее, выберем и обозначим через m один из слоев расслоения p . Пусть $\text{Fib}_1(K, m)$ — подгруппа в $\text{Fib}_1(K)$, образованная элементами, переводящими m в m с сохранением ориентации. Как нетрудно удостовериться, подгруппы $I_1(K)$ и $\text{Fib}_1(K, m)$ замкнуты в $\text{Fib}_1(K)$, а каждый элемент $g \in \text{Fib}_1(K)$ единственным образом представляется в виде произведения $g = ab$ с $a \in I_1(K)$ и $b \in \text{Fib}_1(K, m)$.

Для проверки стягиваемости подгруппы $\text{Fib}_1(K, m)$ по аналогии со случаем тора зафиксируем какое-нибудь сечение γ расслоения $K = E \rightarrow S^1$ и рассмотрим следующие подгруппы в $\text{Fib}_1(K, m)$:

G'_1 — подгруппа, состоящая из всех тождественных на γ внутрислойных автогомеоморфизмов из $\text{Fib}_1(K, m)$,

G'_2 — подгруппа тех внутрислойных автогомеоморфизмов из $\text{Fib}_1(K, m)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией,

G'_3 — подгруппа тех элементов из $\text{Fib}_1(K, m)$, у которых сужение на каждый из слоев является изометрией между слоями и при этом переводящей γ в γ .

Пространство группы G'_1 гомеоморфно пространству тождественных на крае послойных автогомеоморфизмов расслоенной над окружностью (со слоем отрезок) ленты Мёбиуса. Пространство группы G'_2 гомеоморфно пространству сечений расслоенной над окружностью открытой ленты Мёбиуса (со слоем, гомеоморфным вещественной прямой, возникающей здесь как универсальное накрывающее окружности — слоя расслоения p). Пространство группы G'_3 гомеоморфно пространству $\text{Homeo}_1([0, 1])$. Проверка стягиваемости этих пространств — несложное упражнение.

Дальнейшая аргументация дословно повторяет финальные рассуждения в случае тора с точностью до замены подгруппы $\text{Fib}_1(T, x)$ подгруппой $\text{Fib}_1(K, m)$.

7. Доказательство теоремы 1 в случае $n = 3$

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят ситуацию к случаю расслоения со связным слоем. Перейдем к анализу подслучаев.

7.1. Случай слоя — замкнутой поверхности. В случае, когда слой расслоения из теоремы 1 есть замкнутая связная поверхность, утверждение теоремы выводится из теоремы 4. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия теоремы 4 здесь выполняются.

То, что гомотопные автогомеоморфизмы замкнутой поверхности изотопны, доказывается в [35]³⁾. (В [35] изложение ведется в рамках кусочно-линейной категории. Результат распространяется и на топологическую категорию. Действительно, пусть два автогомеоморфизма замкнутой поверхности гомотопны; поскольку всякий автогомеоморфизм поверхности изотопен кусочно-линейному [35, теорема A4], проблема сводится к случаю гомотопных кусочно-линейных автогомеоморфизмов; гомотопные кусочно-линейные автогомеоморфизмы кусочно-линейно гомотопны и, следовательно, кусочно-линейно изотопны [35, теоремы 6.3 и 6.4].)

То, что для всякой замкнутой связной поверхности X включение

$$\text{Homeo}_1(X) \subset \text{Map}_1(X, X)$$

индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, вытекает из следующего предложения.

Предложение 3. Если связная замкнутая поверхность F не является ни сферой S^2 , ни проективной плоскостью P^2 , то включение

$$\text{Homeo}_1(F) \subset \text{Map}_1(F, F)$$

является гомотопической эквивалентностью. Если $F \in \{S^2, P^2\}$, то указанное включение индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является ни гомотопической эквивалентностью, ни слабой гомотопической эквивалентностью.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сводится к сопоставлению известных результатов о пространствах групп $\text{Homeo}_1(F)$ и $\text{Map}_1(F, F)$. Необходимые результаты о $\text{Homeo}_1(F)$ содержатся в основном в серии работ [50–52, 46, 47] а о $\text{Map}_1(F, F)$ — в [53–55] (покрывающих случаи асферических поверхностей, сферы и проективной плоскости соответственно). Ниже приведена более подробная информация по каждому классу.

Напомним, что, поскольку для компактной поверхности F пространства $\text{Homeo}_1(F)$ и $\text{Map}_1(F, F)$ сепарабельны, метризуемы (см. утверждение 1 и, например, [56] соответственно) и являются АОР для класса метрических пространств (см. [48] и, например, [57, теорема 2.4, с. 186] соответственно), то в силу теорем 6 и 7 включение $\text{Homeo}_1(F) \subset \text{Map}_1(F, F)$ является гомотопической эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно является слабой гомотопической эквивалентностью.

СЛУЧАЙ $\chi(F) < 0$. В случае замкнутой связной поверхности F отрицательной эйлеровой характеристики пространства групп $\text{Homeo}_1(F)$ и $\text{Map}_1(F, F)$

³⁾Для случая замкнутой ориентируемой поверхности рода выше 1 этот факт доказан уже в [34, 49].

гомотопически тривиальны, так что включение $\text{Homeo}_1(F) \subset \text{Map}_1(F, F)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность. Гомотопическая тривиальность для $\text{Homeo}_1(F)$ доказывается в [50]⁴⁾. Гомотопическая тривиальность для $\text{Map}_1(F, F)$ следует из [53, следствие III.2], где утверждается, что для линейно связного асферического полиэдра X , у которого центр фундаментальной группы тривиален, пространство группы $\text{Map}_1(X, X)$ стягиваемо.

СЛУЧАЙ ТОРА. В случае тора $T = S^1 \times S^1$ имеется естественное вложение

$$T \subset \text{Homeo}_1(T) \subset \text{Map}_1(T, T),$$

доставляемое изометриями тора, снабженного локально евклидовой метрикой. В [46] доказывается, что включение $T \subset \text{Homeo}_1(T)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность. Слабая гомотопическая эквивалентность для включения $T \subset \text{Map}_1(T, T)$ следует из известной теоремы [53, теорема III.2], дающей описание слабого гомотопического типа для асферических (локально конечных линейно связных симплициальных) полиэдров.⁵⁾ (Для отображений в пространства Эйленберга — Маклейна с абелевой группой описание слабого гомотопического типа было известно и ранее (см. [58]); подробности см. в обзорах [59, разд. 2.1; 60, разд. 2.1.2].) Следовательно, включение $\text{Homeo}_1(T) \subset \text{Map}_1(T, T)$ есть слабая гомотопическая эквивалентность.

СЛУЧАЙ БУТЫЛКИ КЛЕЙНА. В случае бутылки Клейна K имеется естественное вложение

$$SO(2) \subset \text{Homeo}_1(K) \subset \text{Map}_1(K, K),$$

где вложение $SO(2) \subset \text{Homeo}_1(K)$ отвечает двойному повороту вдоль базы при представлении бутылки Клейна в виде расслоения над окружностью со слоем окружность (см. [47, разд. 4]). В [47] доказывается, что включение $SO(2) \subset \text{Homeo}_1(K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Из конструкции доказательства вышеупомянутой теоремы III.2 в [53] следует, что включение $SO(2) \subset \text{Map}_1(K, K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Таким образом, включение $\text{Homeo}_1(K) \subset \text{Map}_1(K, K)$ является слабой гомотопической эквивалентностью.

СЛУЧАЙ СФЕРЫ. В случае сферы S^2 имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset \text{Homeo}_1(S^2) \subset \text{Map}_1(S^2, S^2),$$

где под $SO(3) \subset \text{Homeo}_1(S^2)$ понимаются евклидовы повороты. Кнезер показал [61], что образ включения $SO(3) \subset \text{Homeo}_1(S^2)$ является деформационным ретрактом для $\text{Homeo}_1(S^2)$, а Хансен доказывает [54, с. 364; 62, с. 44], что включение $SO(3) \subset \text{Map}_1(S^2, S^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп, не будучи при этом гомотопической эквивалентностью (и, следовательно, поскольку мы имеем дело с АОР, не будучи и слабой гомотопической эквивалентностью;

⁴⁾ Таким образом, в случае замкнутой поверхности отрицательной эйлеровой характеристики выполняются оба альтернативных условия теоремы 4: и об индуцированном включением $\text{Homeo}_1(X) \subset \text{Map}_1(X, X)$ изоморфизме фундаментальных групп, и об односвязности пространства группы $\text{Homeo}_1(X)$.

⁵⁾ Здесь и далее в аналогичных случаях непосредственно в формулировках указываемых утверждений речь как правило идет лишь об изоморфизмах групп, а то, что эти изоморфизмы индуцированы интересующими нас вложениями пространств, видно из конструкций доказательств.

см. теоремы 6 и 7). Отсюда следует, что и $\text{Homeo}_1(S^2) \subset \text{Map}_1(S^2, S^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп, не являясь при этом слабой гомотопической эквивалентностью.

СЛУЧАЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ. В случае проективной плоскости P^2 имеется естественное вложение

$$SO(3) \subset \text{Homeo}_1(P^2) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2).$$

В [47] показано (см. доказательство теоремы 3.2 и разд. 5 в [47]), что вложение $SO(3) \subset \text{Homeo}_1(P^2)$ является слабой гомотопической эквивалентностью. В [55] доказывается, что включение $SO(3) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$ не является гомотопической эквивалентностью (и, следовательно, поскольку имеем дело с АОР, не является и слабой гомотопической эквивалентностью; см. теоремы 6 и 7), однако из результатов [55] следует (см. пояснения с вычислениями фундаментальной группы $\pi_1(\text{Map}_1(P^2, P^2))$ в [63, замечание 3.2]), что включение $SO(3) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$ дает изоморфизм фундаментальных групп. Отсюда следует, что и $\text{Homeo}_1(P^2) \subset \text{Map}_1(P^2, P^2)$ индуцирует изоморфизм на уровне фундаментальных групп, но не является слабой гомотопической эквивалентностью. $\square$

7.2. Случай, когда слой есть поверхность с краем. Этот случай теоремы 1 выводится из теоремы 5. Укажем результаты, из которых следует, что в случае, когда слой есть связная компактная поверхность с непустым краем, в теореме 1 выполняются условия теоремы 5.

То, что автогомеоморфизмы поверхности с краем, связанные тождественной на крае гомотопией, связаны и тождественной на крае изотопией, доказывается в [35, теоремы 6.3 и 6.4].⁷⁾

В случае, когда X — связная компактная поверхность с непустым краем, односвязность (более того, стягиваемость) пространства группы $\text{Homeo}_1(X; [\partial X])$ доказывается в серии работ [50–52, 46, 47] (конечно же, случай диска следует уже из результатов Александера [44]).

То, что сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности, вытекает из рассмотренного выше случая $n = 2$ в теоремах 1 и 3 соответственно.

8. Доказательство теоремы 2

Следствия 1 и 2 (п. (1)) сводят общий случай теоремы 2 к случаю расслоения со связным слоем. В случае связного слоя утверждение теоремы 2 следует из теоремы 4 в силу результатов из [64, 65]. В [64] доказывается, среди прочего, что гомотопные автогомеоморфизмы ориентируемого замкнутого хакова многообразия M изотопны (первое условие для слоя из теоремы 4), а в [65] доказывается, что включение $\text{Homeo}_1(M) \subset \text{Map}_1(M, M)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп (второе условие для слоя из теоремы 4). См. также [66], где доказывается более сильный результат о гомотопической эквивалентности. В указанных работах используются кусочно-линейная и гладкая категории; как указано в [66, с. 343], переход между ними и топологической

⁷⁾В формулировках теорем 6.3 и 6.4 в [35] речь идет о гомотопиях и изотопиях без ограничения тождественности на крае, но в приведенном в [35] доказательстве этих теорем ситуация сводится именно к случаю тождественных на крае и нужный нам факт доказывается.

категорией обеспечивается триангуляционными теоремами Бинга и Мойза и доказанной Хэтчером в [67] гипотезой Смейла.

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Малютин А. В. Расслоения Бирман — Хильдена. I // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 1. С. 127–141.
2. Birman J. S., Hilden H. M. On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces // Ann. Math. Stud. 1971. V. 66. P. 81–115.
3. Birman J. S., Hilden H. M. Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin’s braid group // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78. P. 1002–1004.
4. Birman J. S., Hilden H. M. Lifting and projecting homeomorphisms // Arch. Math. (Basel). 1972. V. 23. P. 428–434.
5. Birman J. S., Hilden H. M. On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces // Ann. Math. (2). 1973. V. 97. P. 424–439.
6. Birman J. S., Hilden H. M. Erratum to ‘On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces’ // Ann. Math. (2). 2017. V. 185. P. 345.
7. Zieschang H. On the homeotopy group of surfaces // Math. Ann. 1973. V. 206. P. 1–21.
8. MacLachlan C., Harvey W. J. On mapping-class groups and Teichmüller spaces // Proc. Lond. Math. Soc. 1975. V. 30. P. 496–512.
9. Berstein I., Edmonds A. L. On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 247. P. 87–124.
10. Fuller T. On fiber-preserving isotopies of surface homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 1247–1254.
11. Aramayona J., Leininger C. J., Souto J. Injections of mapping class groups // Geom. Topol. 2009. V. 13. P. 2523–2541.
12. Winarski R. R. Symmetry, isotopy, and irregular covers // Geom. Dedicata. 2015. V. 177. P. 213–227.
13. Ghaswala T., Winarski R. R. Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres // Michigan Math. J. 2017. V. 66. P. 885–890.
14. Atalan F., Medetogullari E. The Birman–Hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces // Ukrain. Mat. Zh. 2020. V. 72, N 3. P. 307–315.
15. Margalit D., Winarski R. R. Braids groups and mapping class groups: The Birman–Hilden theory // Bull. London Math. Soc. 2021. V. 53, N 3. P. 643–659.
16. Kolbe B., Evans M. E. Isotopic tiling theory for hyperbolic surfaces // Geom. Dedicata. 2021. V. 212. P. 177–204.
17. Dey S., Dhanwani N. K., Patil H., Rajeevsarathy K. Generating the liftable mapping class groups of regular cyclic covers. 2021. 14 p. arXiv:2111.01626v1 [math.GT].
18. Vogt E. Projecting isotopies of sufficiently large P^2 -irreducible 3-manifolds // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29, N 6. P. 635–642.
19. Ohshika K. Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39, N 3. P. 447–454.
20. Friedman J. L., Witt D. M. Homotopy is not isotopy for homeomorphisms of 3-manifolds // Topology. 1986. V. 25, N 1. P. 35–44.
21. Artin E. Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
22. Morton H. R. Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.
23. Burde G., Zieschang H. Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math.; V. 5).
24. Kassel C., Turaev V. Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
25. McCoy R. A. Completely metrizable spaces of embeddings // Proc. Amer. Math. Soc. 1982. V. 84, N 3. P. 437–442.
26. Kuratowski C. Evaluation de la classe borélienne ou projective d’un ensemble de points à l’aide des symboles logiques // Fund. Math. 1931. V. 17. P. 249–272.

27. Чернавский А. В. Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 3. С. 307–356.
28. Чернавский А. В. Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов $\mathbb{R}^n$ // Геометрия, топология и математическая физика. I. Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова. Труды МИАН. Т. 263. М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2008. С. 201–215.
29. Rosendal C. Coarse geometry of topological groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2021. (Camb. Tracts Math.; V. 223).
30. Viro O. Ya., Ivanov O. A., Netsvetaev N. Yu., Kharlamov V. M. Elementary topology: Problem textbook. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2008.
31. Whitehead J. H. C. Combinatorial homotopy. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 213–245.
32. Milnor J. On spaces having the homotopy type of a CW-complex // Trans. Amer. Math. Soc. 1959. V. 90, N 2. P. 272–280.
33. Hanner O. Some theorems on absolute neighborhood retracts // Arkiv Mat. 1951. V. 1. P. 389–408.
34. Baer R. Kurventypen auf Flächen // J. Reine Angew. Math. 1927. V. 156. P. 231–246.
35. Epstein D. B. A. Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.
36. Ghys É. Groups acting on the circle // Enseign. Math. (2). 2001. V. 47, N 3–4. P. 329–407.
37. McCarty (Jr.) G. S. Homeotopy groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106. P. 293–304.
38. Wada H. On the space of mappings of a sphere on itself // Ann. of Math. (2). 1956. V. 64. P. 420–435.
39. Wada H. Note on some mapping spaces // Tohoku Math. J. (2). 1958. V. 10, N 2. P. 143–145.
40. Koh S. S. Note on the homotopy properties of the components of the mapping space X^{Sp} // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 896–904.
41. Adams J. F. On the nonexistence of elements of Hopf invariant one // Bull. Amer. Math. Soc. 1958. V. 64. P. 279–282.
42. Adams J. F. On the non-existence of elements of Hopf invariant one // Ann. Math. (2). 1960. V. 72. P. 20–104.
43. Hansen V. L. The homotopy problem for the components in the space of maps on the n -sphere // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). 1974. V. 25. P. 313–321.
44. Alexander J. W. On the deformation of an n -cell // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 1923. V. 9. P. 406–407.
45. Hamstrom M.-E. Homotopy in homeomorphism spaces, TOP and PL // Bull. Amer. Math. Soc. 1974. V. 80. P. 207–230.
46. Hamstrom M.-E. The space of homeomorphisms on a torus // Illinois J. Math. 1965. V. 9. P. 59–65.
47. Hamstrom M.-E. Homotopy properties of the space of homeomorphisms on P^2 and the Klein bottle // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. V. 120. P. 37–45.
48. Luke R., Mason W. K. The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 164. P. 275–285.
49. Baer R. Isotopie von Kurven auf orientierbaren, geschlossenen Flächen und ihr Zusammenhang mit der topologischen Deformation der Flächen // J. Reine Angew. Math. 1928. V. 159. P. 101–116.
50. Hamstrom M.-E. Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold // Illinois J. Math. 1966. V. 10. P. 563–573.
51. Hamstrom M.-E., Dyer E. Regular mappings and the space of homeomorphisms on a 2-manifold // Duke Math. J. 1958. V. 25. P. 521–531.
52. Hamstrom M.-E. Some global properties of the space of homeomorphisms on a disc with holes // Duke Math. J. 1962. V. 29. P. 657–662.
53. Gottlieb D. H. A certain subgroup of the fundamental group // Amer. J. Math. 1965. V. 87. P. 840–856.
54. Hansen V. L. The homotopy groups of a space of maps between oriented closed surfaces // Bull. London Math. Soc. 1983. V. 15, N 4. P. 360–364.
55. Yamanoshita T. On the space of self-homotopy equivalences of the projective plane // J. Math. Soc. Japan. 1993. V. 45. P. 489–494.
56. Arens R. A topology for spaces of transformations // Ann. Math. 1946. V. 47. P. 480–495.
57. Hu S. T. Theory of retracts. Detroit: Wayne State Univ. Press, 1965.

58. *Thom R.* L'homologie des espaces fonctionnels // Colloque de topologie algébrique (Louvain, 1956). Georges Thone, Liège. Paris: Masson, 1957. P. 29–39.
59. *Rutter J. W.* Spaces of homotopy self-equivalences. Berlin: Springer-Verl., 1997. (Lect. Notes Math.; V. 1662).
60. *Smith S. B.* The homotopy theory of function spaces: A survey // Homotopy theory of function spaces and related topics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2010. (Contemp. Math.; V. 519). P. 3–39.
61. *Kneser H.* Die Deformationssätze der einfach zusammenhängenden Flächen // Math. Z. 1926. V. 25, N 1. P. 362–372.
62. *Hansen V. L.* The space of self-maps on the 2-sphere // Groups of self-equivalences and related topics (Montreal, PQ, 1988). Berlin: Springer, 1990. (Lect. Notes Math.; V. 1425). P. 40–47.
63. *Gonçalves D. L., Spreafico M.* The fundamental group of the space of maps from a surface into the projective plane // Math. Scand. 2009. V. 104, N 2. P. 161–181.
64. *Waldhausen F.* On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large // Ann. Math. (2). 1968. V. 87. P. 56–88.
65. *Laudenbach F.* Topologie de la dimension trois: homotopie et isotopie. Paris: Sot. Math. de France, 1974. (Astérisque; V. 12).
66. *Hatcher A.* Homeomorphisms of sufficiently large P^2 -irreducible 3-manifolds // Topology. 1976. V. 15, N 4. P. 343–347.
67. *Hatcher A.* A proof of the Smale conjecture, $\text{Diff}(S^3) \simeq O(4)$ // Ann. Math. (2). 1983. V. 117, N 3. P. 553–607.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.

После доработки 27 ноября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
 Математический институт им. В. А. Стеклова
 Российской академии наук,
 ул. Губкина, 8, Москва 119991;
 Санкт-Петербургское отделение
 математического института им. В. А. Стеклова РАН,
 наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
 malyutin@pdmi.ras.ru

УДК 517.956.22:517.958

ОСРЕДНЕНИЕ СКАЛЯРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТОНКОМ ПЕРИОДИЧЕСКИ ИЗЛОМАННОМ ЦИЛИНДРЕ

С. А. Назаров, А. С. Слуцкий

Аннотация. В результате осреднения задачи Неймана для дифференциального уравнения в часто периодически изломанном многомерном цилиндре появляется обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Исследуется асимптотика коэффициента осредненного оператора в случае малых поперечных сечений. Главный член асимптотики выражается через «площади» сечений звеньев, их длины и матрицу коэффициентов исходного оператора. Найдены характеристики зон изломов, которые проявляются в поправочном члене, а асимптотический остаток приобретает экспоненциальную малость. Обоснование асимптотик опирается на неравенство Фридрихса с множителем, не зависящим от обоих малых параметров — периода изломов и относительного диаметра сечений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.211

Ключевые слова: асимптотика, осреднение, предельное обыкновенное дифференциальное уравнение, пограничный слой, коэффициент поляризации.

1. Постановка задачи. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, зафиксируем декартову систему координат $x = (x_1, \dots, x_n)$ с началом $\mathcal{O}$ и отрезок $\mathcal{J}$ на оси абсцисс, имеющий единичную длину и центр в точке $\mathcal{O}$. Введем параметры $h > 0$ и $l > 0$, малый и фиксированный, а также области $\omega^\pm \subset \mathbb{R}^{n-1}$, ограниченные кусочно-гладкими замкнутыми $(n-2)$ -мерными поверхностями $\partial\omega^\pm$, и тонкие цилиндры

$$\mathcal{Q}^\pm(h) = \{x^\pm = (y^\pm, z^\pm) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} : \eta^\pm := h^{-1}y^\pm \in \omega^\pm, 0 < z^\pm < l\}. \quad (1)$$

Здесь $x^\pm$ — такие системы декартовых координат с общим началом P° , что концы $P^{\bullet\pm} = (\pm 1/2, 0, \dots, 0)$ отрезка $\mathcal{J}$ приобретают координаты $y_\pm = 0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $z^\pm = \pm l$ (рис. 1(a)). При этом $l > 1/2$, а ось x_n проходит через точку $P^\circ = (0, \dots, 0, (l^2 - 1/4)^{1/2})$. Тонкое тело $Q(h)$ (рис. 1(b)) образовано объединением цилиндров $\mathcal{Q}^\pm(h)$ и узлов

$$G_h^\circ = \{x : \xi^\circ := h^{-1}(x - P^\circ) \in G^\circ\}, \quad G_h^{\bullet\pm} = \{x : \xi^{\bullet\pm} := h^{-1}(x - P^{\bullet\pm}) \in G^{\bullet\pm}\},$$

полученных сжатием в h раз областей $G^\circ \subset \mathbb{R}^n$ и $G^{\bullet+} = G^{\bullet-} \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкими границами и компактными замыканиями. При $h \rightarrow +0$ область $Q(h)$ стягивается к ломаной Λ , соединяющей точки $P^{\bullet-}$, P° и $P^{\bullet+}$. Множества G_h°

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00046).

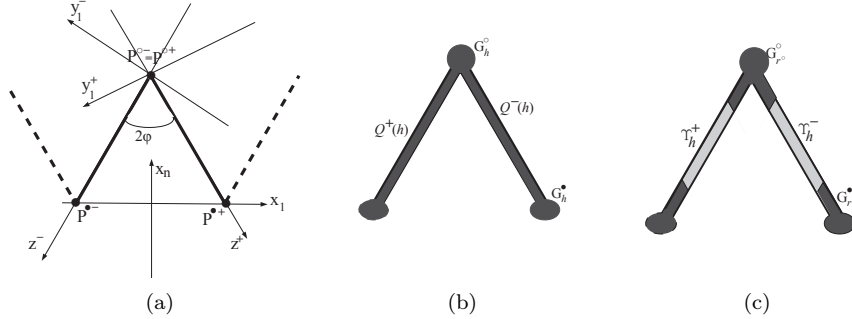


Рис. 1. (а) Скелет $\mathfrak{S}$ множества $Q(h)$. (б) Множество $Q_1(h)$. (с) Расширенные узлы $G_r^{\circ}, G_r^{\bullet}$ (тонируются) и усеченные стержни $\Upsilon_h^{\pm}$ (высветлены).

и $G_h^{\bullet\pm}$ подберем так, чтобы в них оказались погруженными соответствующие торцы стержней

$$\tau^{\circ\pm} := \{x^{\pm} : h^{-1}y^{\pm} \in \omega^{\pm}, z^{\pm} = 0\}, \quad \tau^{\bullet\pm} := \{x^{\pm} : h^{-1}y^{\pm} \in \omega^{\pm}, z^{\pm} = l\}. \quad (2)$$

Пусть N — большое число и $\varepsilon = (2N+1)^{-1}$ — малый параметр. Тонкое тело $Q^{\varepsilon}(h) = \{x : \varepsilon^{-1}x \in Q(h)\}$ в форме литеры Λ состоит из малых узлов $G_h^{\varepsilon b} = \{x : \varepsilon^{-1}x \in G_h^b\}$, $b = \circ, \bullet, \pm$, и тонких цилиндров $\mathcal{Q}^{\varepsilon\pm}(h) = \{x : \varepsilon^{-1}x \in Q^{\pm}(h)\}$. Кроме того, определим сдвиги вдоль оси x_1

$$\Xi_{(k)}^{\varepsilon} = \{x : (x_1 - k\varepsilon, x_2, \dots, x_n) \in \Xi^{\varepsilon}\}, \quad k \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (3)$$

какой-либо области Ξ^{ε} , а также ε -периодическое множество («пружина» на рис. 2(a))

$$\Omega^{\varepsilon}(h) = Q_{(-N)}^{\varepsilon}(h) \cup \dots \cup Q_{(N)}^{\varepsilon}(h). \quad (4)$$

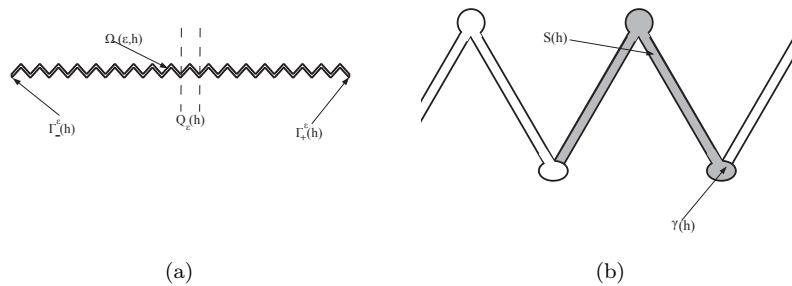


Рис. 2. (а) Множество $\Omega(\varepsilon, h)$. (б) Ячейка периодичности $S(h)$.

В объединении (4) нижние узлы фигурируют дважды, поскольку соседние тела $Q_{(k)}^{\varepsilon}(h)$ и $Q_{(k+1)}^{\varepsilon}(h)$ пересекаются по множеству $G_{h(k)}^{\varepsilon\bullet+} = G_{h(k+1)}^{\varepsilon\bullet-}$. Поэтому ячейка периодичности (рис. 2(b)) и часть ее поверхности, на которой будут назначены условия периодичности, выглядят так:

$$S^{\varepsilon}(h) = Q^{\varepsilon}(h) \setminus G_h^{\varepsilon\bullet-} \quad \text{и} \quad \gamma^{\varepsilon}(h) = \overline{S^{\varepsilon}(h)} \cap \partial G_h^{\varepsilon\bullet-}. \quad (5)$$

Наконец, на поверхностях $\partial\Omega^{\varepsilon}(h) \cap \partial G_{h(\pm N)}^{\varepsilon\bullet\pm}$ зафиксируем множества $\Gamma_{\pm}^{\varepsilon}(h)$, у которых $(n-1)$ -мерная площадь имеет порядок $h\varepsilon$.

В области (4) рассмотрим дифференциальное уравнение

$$L(\nabla_x)u^\varepsilon(h, x) := -\nabla_x^\top A \nabla_x u^\varepsilon(h, x) = f^\varepsilon(h, x), \quad x \in \Omega^\varepsilon(h). \quad (6)$$

Градиент-оператор ∇_x интерпретируем как столбец $(\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)^\top$, т. е. $\top$ — знак транспонирования, а числовая матрица $A = (A_{jk})_{j,k=1}^n$ симметричная и положительно определенная. Назначим условие Дирихле

$$u^\varepsilon(h, x) = 0, \quad x \in \Gamma^\varepsilon(h) := \Gamma_+^\varepsilon(h) \cup \Gamma_-^\varepsilon(h), \quad (7)$$

на поверхностях $\Gamma_\pm^\varepsilon(h)$, а на остальной части границы — условие Неймана

$$\nu(x)^\top A \nabla_x u^\varepsilon(h, x) = 0, \quad x \in \Sigma^\varepsilon(h) := \partial\Omega^\varepsilon(h) \setminus \overline{\Gamma^\varepsilon(h)}. \quad (8)$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^\top$ — единичный вектор (столбец) внешней нормали к липшицевой границе тела $\Omega^\varepsilon(h)$.

Обобщенная постановка смешанной краевой задачи (6)–(8), т. е. интегральное тождество [1]

$$(A \nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon(h)} = (f^\varepsilon, \psi^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon(h)} \quad \forall \psi^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon(h); \Gamma^\varepsilon(h)),$$

включает скалярное натуральное произведение $(\cdot, \cdot)_{\Omega^\varepsilon(h)}$ в пространстве Лебега $L^2(\Omega^\varepsilon(h))$ и пространство Соболева $H_0^1(\Omega^\varepsilon(h); \Gamma^\varepsilon(h))$ функций, удовлетворяющих соотношению (7).

Лемма 1. При $f^\varepsilon(h, \cdot) \in L^2(\Omega^\varepsilon(h))$ существует единственное (обобщенное) решение $u^\varepsilon(h, \cdot) \in H_0^1(\Omega^\varepsilon(h); \Gamma^\varepsilon(h))$ задачи (6)–(8) и верна оценка

$$\|u^\varepsilon; H^1(\Omega^\varepsilon(h))\| \leq c \|f^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon(h))\|,$$

причем множитель c не зависит от f^ε и $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $h \leq h_0$ при некоторых $\varepsilon_0, h_0 > 0$.

Проверка свойства независимости множителя c приведена в п. 7.

2. Предварительное описание результатов. Осреднению краевых задач с быстроосциллирующими коэффициентами или в областях с мелкозернистой границей в разнообразных постановках посвящена обширнейшая литература — упомянем лишь несколько монографий [2–6] (список существенно неполный). Помимо проверки общепринятых теорем о сходимости в разных метриках, обычно выявляющих главные асимптотические члены, приводилось и изучение явления пограничного слоя, однако в этом направлении публикаций значительно меньше и все они относятся к задачам в областях с примитивной предельной геометрией — отрезок, прямой цилиндр, прямоугольник (см., в частности, [7–9]). Рассматриваемой задаче также придана простая предельная Λ -образная форма и пограничным слоям присуща важнейшая роль, однако не в основной задаче, а в модельной задаче на ячейке периодичности, зависящей только от одного малого параметра h . Построение главного члена асимптотики решения модельной задачи, а значит, и такого же члена коэффициента осредненного уравнения — элементарная задача ввиду практически полного исследования задачи Неймана для уравнения второго порядка в тонких областях и даже на их сочленениях. Легко убедиться (ср. п. 2) в том, что в таких простых асимптотических формулах отсутствует зависимость от формы и размера узлов. Основная цель данной работы — найти характеристики узлов, в основном обнаруживаемые в названном коэффициенте. Авторы немало удивлены, что среди этих характеристик нет первичного — объема узлов, а асимптотический

остаток приобретает экспоненциальную малость¹⁾. Основную роль играют так называемые коэффициенты поляризации m_o и $m_\bullet$, описанные в п. 4. Остальная часть работы посвящена построению и обоснованию асимптотик, а формулы для обсуждаемого коэффициента приведены в теоремах 1 и 5.

Среди известных авторам работ по выводу асимптотических моделей сочленений тонких цилиндрических тел многие (см. [11–15] и др.) узлы играют второстепенную роль, так как в них исследуются только главные асимптотические члены. В работах [16–18] влияние узлов принималось во внимание при построении младших асимптотических членов, однако их учет в задаче осреднения проводится, по-видимому, впервые в данной работе.

Ставшая уже классической процедура осреднения (см. указанные выше монографии и многочисленные другие публикации) ставит в соответствие задаче (6)–(8) задачу с параметром $x_1 \in (-1/2, 1/2)$ на ячейке (5)

$$\begin{aligned} L(\nabla_y)W_h(y; x_1) &= -\nabla_y^\top A \nabla_y W_h(y; x_1) =: F_h(y; x_1), \quad y \in S(h), \\ B(y, \nabla_y)W_h(y; x_1) &= \nu(y)^\top A \nabla_y W_h(y; x_1) =: G_h(y; x_1), \quad y \in \sigma(h), \end{aligned} \quad (9)$$

с условиями периодичности

$$\begin{aligned} W_h(y; x_1) &= W_h(y_1 \pm 1, y_2, \dots, y_n; x_1), \\ \nabla_y W_h(y; x_1) &= \nabla_y W_h(y_1 \pm 1, y_2, \dots, y_n; x_1), \quad y \in \gamma(h). \end{aligned} \quad (10)$$

Множества $S(h)$ и $\gamma(h)$ заданы формулами (5) при $\varepsilon = 1$, а $\sigma(h) := \partial S(h) \setminus \overline{\gamma(h)}$. Обобщенное решение задачи (9), (10) — функция $W_h \in H_{per}^1(S(h))$, удовлетворяющая интегральному тождеству [1]

$$(A \nabla_y W_h, \nabla_y \Psi_h)_{S(h)} = (F_h, \Psi_h)_{S(h)} + (G_h, \Psi_h)_{\sigma_h} \quad \forall \Psi_h \in H_{per}^1(S(h)). \quad (11)$$

Функции из $H_{per}^1(S(h))$ подчинены первому условию периодичности (10).

Следующее утверждение известно (см., например, [1, 19]).

Лемма 2. Задача (11) имеет решение $W_h \in H_{per}^1(S(h))$ тогда и только тогда, когда для ее правых частей $F_h \in L^2(S(h))$ и $G_h \in L^2(\sigma(h))$ выполнено соотношение

$$\langle F_h \rangle_{S(h)} + \langle G_h \rangle_{\sigma(h)} = 0 \quad (12)$$

(здесь $\langle Z \rangle_\Xi = (Z, 1)_\Xi$ для разных областей Ξ). Решение определено с точностью до постоянного слагаемого, но, будучи подчинено условию

$$\langle W_h \rangle_{S(h)} = 0,$$

становится единственным и при выполнении требований

$$N(F_h, G_h) := \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^K \left(\left\| \frac{\partial^k F_h}{\partial x_1^k}; L^2(S(h)) \right\| + \left\| \frac{\partial^k G_h}{\partial x_1^k}; L^2(\sigma(h)) \right\| \right) dx_1 < \infty,$$

с некоторым $K \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ для него справедлива следующая оценка с не зависящим от F_h и G_h множителем C_K :

$$\sum_{k=0}^K \int_{-1/2}^{1/2} \left\| \frac{\partial^k W_h}{\partial x_1^k}; L^2(S(h)) \right\| dx_1 \leq C_K N(F_h, G_h).$$

¹⁾Столь же поразительную точность удалось достичь в работе [10] при моделировании течения Стокса в разветвляющемся тонком кровеносном сосуде.

Воспроизведем классический анзац теории осреднения

$$u^\varepsilon(h, x) = \mathbf{v}(x_1) + \varepsilon \mathcal{Y}_h(y) \partial_{x_1} \mathbf{v}(x_1) + \varepsilon^2 \mathfrak{W}_h(y; x_1) + \dots, \quad (13)$$

где $\partial_{x_1} = \partial/\partial x_1$, а многоточие замещает младшие асимптотические члены. Известная процедура дает освобожденный от быстрых переменных дифференциальный оператор $\mathfrak{L}(h, \partial_{x_1}) = -\mathbf{a}(h) \partial_{x_1}^2$ с коэффициентом

$$\mathbf{a}(h) = \langle A_{11} \rangle_{S(h)} + \langle e_{(1)}^\top A \nabla_y \mathcal{Y}_h \rangle_{S(h)}. \quad (14)$$

Здесь $e_{(j)}$ — орт оси x_j в $\mathbb{R}^n$, а $\mathcal{Y}_h$ — решение задачи (9), (10) с подчиненными требованием (12) правыми частями

$$F_h = 0, \quad G_h(y) = -\nu(y) A e_{(1)}. \quad (15)$$

Известно (см. любую из приведенных ссылок), что $\mathbf{a}(h) > 0$.

Сформулируем простейшее утверждение о предельной задаче

$$\mathfrak{L}(h, \partial_{x_1}) \mathfrak{V}(x_1) = \mathfrak{F}(x_1), \quad x_1 \in (-1/2, 1/2), \quad \mathfrak{V}(\pm 1/2) = 0. \quad (16)$$

Лемма 3. Если $\mathfrak{F} \in H^K(-1/2, 1/2)$ при $K \in \mathbb{N}_0$, то существует единственное решение $\mathfrak{V} \in H^{K+2}(-1/2, 1/2)$ задачи (16) и верна оценка

$$\|\mathfrak{V}; H^{K+2}(-1/2, 1/2)\| \leq C_K \|\mathfrak{F}; H^K(-1/2, 1/2)\|. \quad (17)$$

После вычисления асимптотики коэффициента $\mathbf{a}(h)$ станет понятно, что множитель C_K в неравенстве (17) не зависит от малого параметра h .

3. Старшие члены асимптотик. Исследуем поведение решения $\mathcal{Y}_h$ задачи (9), (10) с правыми частями (15) при $h \rightarrow +0$. Старший член асимптотики удастся найти в явном виде при помощи простого, но все-таки нового трюка. Рассечем цилиндр $\mathcal{Q}_-(h)$ надвое и положим $\Lambda_-(h) = \{y \in \mathcal{Q}_-(h) \cap S(h) : z^- > l/2\}$, а также

$$\mathcal{T}(y) = \begin{cases} y_1 + 1/2 & \text{при } y \in \Lambda_-(h), \\ y_1 - 1/2 & \text{при } y \in \Lambda_+(h) = S(h) \setminus \overline{\Lambda_-(h)}. \end{cases} \quad (18)$$

Сумма $\mathcal{X}_h = \mathcal{Y}_h + \mathcal{T}$ остается y_1 -периодической функцией, но на сечении $\tau(h) := \partial \Lambda_-(h) \cap \partial \Lambda_+(h)$ приобретает скачок (он далее обозначается квадратными скобками), т. е. функция $\mathcal{X}_h$ удовлетворяет соотношениям (10) и

$$L(\nabla_y) \mathcal{X}_h(y) = 0, \quad y \in S(h), \quad B(\nabla_y) \mathcal{X}_h(y) = 0, \quad y \in \sigma(h), \\ [\mathcal{X}_h]_{\tau(h)} = 1, \quad [\partial_{z^-} \mathcal{X}_h]_{\tau(h)} = 0. \quad (19)$$

Как обычно (см. [21, гл. 1, § 2 и гл. 7, § 1] и др.), для построения асимптотики решения задачи (19), (10) в тонкой области $S(h)$ введем растянутые координаты $\eta^\pm = h^{-1}y^\pm$ и получим следующие расщепления дифференциальных операторов, суженных на множества $\mathcal{Q}^\pm(h)$ и $\partial \mathcal{Q}^\pm(h)$:

$$\mathbf{L}^\pm(h^{-1} \nabla_{\eta^\pm}, \partial_{z^\pm}) := L(\nabla_y) = h^{-2} \nabla_{\eta^\pm}^\top \mathbf{A}^\pm \nabla_{\eta^\pm} + h^{-1} (\nabla_{\eta^\pm}^\top \mathbf{a}^\pm \partial_{z^\pm} + \partial_{z^\pm} \mathbf{a}^{\pm\top} \nabla_{\eta^\pm}) + h^0 \partial_{z^\pm} \mathbf{A}_{nn}^\pm \partial_{z^\pm}, \\ \mathbf{B}^\pm(\eta^\pm, h^{-1} \nabla_{\eta^\pm}, \partial_{z^\pm}) := B(y, \nabla_y) = h^{-1} \nu^{\pm\top} \mathbf{A}^\pm \nabla_{\eta^\pm} + h^0 \nu^{\pm\top} \mathbf{a}^\pm \partial_{z^\pm}. \quad (20)$$

Коэффициенты расщеплений обозначим через $\mathbf{L}_q^\pm$ и $\mathbf{B}_q^\pm$, $q \geq 0$. При этом $\nu^\pm$ — единичный вектор (столбец) внешней нормали к границе области $\omega^\pm$, а

$\mathbf{A}^\pm = \{\mathbf{A}_{jk}^\pm\}_{j,k=1}^{n-1}$ — урезанная матрица²⁾ $\mathbf{A}_\square^\pm = \{\mathbf{A}_{jk}^\pm\}_{j,k=1}^n := (\theta^\pm)^\top A \theta^\pm$ (вычеркнуты строка и столбец с номером n), $\mathbf{a}^\pm = (\mathbf{A}_{1n}^\pm, \dots, \mathbf{A}_{n-1,n}^\pm)^\top$ — столбец, а $\theta^\pm$ — ортогональная матрица преобразования координат $x \mapsto x^\pm = \theta^\pm x$, которая приобретает простое строение: в середине стоит единичная матрица $\mathbb{I}_{n-2}$ размером $(n-2) \times (n-2)$, а угловые элементы образуют ортогональную (2×2) -матрицу

$$\begin{pmatrix} -\cos \varphi & \mp \sin \varphi \\ \pm \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}, \text{ где } \sin \varphi = \frac{1}{2l}, \cos \varphi = \frac{1}{2l} \sqrt{4l^2 - 1}. \quad (21)$$

На $\mathcal{Q}_\pm(h)$ старшие члены разложения функции $\mathcal{X}_h$ ищем в виде

$$\mathcal{X}_{h0}^\pm(y) = w^\pm(z^\pm) + h \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) \partial_{z^\pm} w^\pm(z^\pm) + h^2 \mathcal{W}^\pm(\eta^\pm, z^\pm) + \dots, \quad (22)$$

где $\mathcal{V}^\pm$ — решения задач Неймана на сечениях $\omega^\pm$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^\pm(\nabla_{\eta^\pm}) \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) &:= -\nabla_{\eta^\pm}^\top \mathbf{A}^\pm \nabla_{\eta^\pm} \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) = 0, \quad \eta^\pm \in \omega^\pm, \\ \mathbf{B}_0^\pm(\nabla_{\eta^\pm}) \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) &:= \nu^{\pm\top} \mathbf{A}^\pm \nabla_{\eta^\pm} \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) = -\nu^{\pm\top} \mathbf{a}^\pm, \quad \eta^\pm \in \partial\omega^\pm, \end{aligned} \quad (23)$$

с главными членами $\mathbf{L}_0^\pm$ и $\mathbf{B}_0^\pm$ расщеплений (20). Имеем

$$\mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) = -(\det \mathbf{A}^\pm)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \det \mathbf{A}_{(k)}^\pm \eta_k^\pm + \mathbf{c}^\pm. \quad (24)$$

Здесь $\mathbf{A}_{(k)}^\pm$ — матрица, полученная из $\mathbf{A}^\pm$ заменой ее столбца с номером k столбцом $\mathbf{a}^\pm$, т. е. $-\det \mathbf{A}_{(k)}^\pm$ — минор элемента $\mathbf{A}_{kn}^\pm$, а постоянные $\mathbf{c}^\pm$ зафиксированы условием ортогональности $\langle \mathcal{V}^\pm \rangle_{\omega^\pm} = 0$.

Подставим разложения (20) и (22) в задачу (19), соберем множители при одинаковых степенях параметра h и приравняем их суммы нулю. Суммы при степенях h с отрицательными показателями аннулируются. Выделив слагаемые порядка $h^0 = 1$ в уравнении и порядка h в краевом условии, приходим к следующей задаче для составляющих $\mathcal{W}^\pm$:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0^\pm(\nabla_{\eta^\pm}) \mathcal{W}^\pm(\eta^\pm) &= \mathbf{f}^\pm(\eta^\pm) := \nabla_{\eta^\pm}^\top \mathbf{a}^\pm \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) \partial_{z^\pm}^2 w^\pm(z^\pm) \\ &\quad + \partial_{z^\pm} \mathbf{a}^{\pm\top} \nabla_{\eta^\pm} \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) \partial_{z^\pm} w^\pm(z^\pm) + \mathbf{A}_{nn}^\pm \partial_{z^\pm}^2 w^\pm(z^\pm), \quad \eta^\pm \in \omega^\pm, \\ \mathbf{B}_0^\pm(\nabla_{\eta^\pm}) \mathcal{W}^\pm(\eta^\pm) &= \mathbf{g}^\pm(\eta^\pm) := -\nu^{\pm\top} \mathbf{a}^\pm \mathcal{V}_\pm(\eta^\pm) \partial_{z^\pm} w^\pm(z^\pm), \quad \eta^\pm \in \partial\omega^\pm. \end{aligned} \quad (25)$$

Условие разрешимости $\langle \mathbf{f}^\pm \rangle_{\omega^\pm} + \langle \mathbf{g}^\pm \rangle_{\partial\omega^\pm} = 0$ этой задачи принимает вид

$$-\alpha_\pm \partial_{z^\pm}^2 w^\pm(z^\pm) = 0. \quad (26)$$

При этом $|\omega^\pm|$ — $(n-1)$ -мерная «площадь» сечения $\omega^\pm$ и

$$\alpha_\pm := \int_{\omega^\pm} (\mathbf{A}_{nn}^\pm + \mathbf{a}^{\pm\top} \nabla_{\eta^\pm} \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm)) d\eta^\pm = |\omega^\pm| \frac{\det \mathbf{A}_\square^\pm}{\det \mathbf{A}^\pm} = |\omega^\pm| \frac{\det A}{\det \mathbf{A}^\pm}. \quad (27)$$

Перенесем к уравнениям (26) из задачи (19) условия скачков:

$$[w^-]_{z^-=-l/2} = 1, \quad [\partial_{z^-} w^-]_{z^-=-l/2} = 0. \quad (28)$$

²⁾Для краткости удобно обозначить через $\mathbf{A}^\pm$ усеченную $((n-1) \times (n-1))$ -матрицу, а полную снабдить значком $\square$.

Кроме того, функции $w^\pm$ должны в главном совпасть на узле G_h° , а сам узел находится в равновесии. Последнее означает, что сумма интегралов от конормальных производных по сечениям (2) обращается в нуль:

$$\sum_{\pm} \int_{\omega^\pm} (\nu^{\pm\top} \mathbf{a}^\pm \mathcal{V}^\pm(\eta^\pm) \partial_{z^\pm} w^\pm(0) + \mathbf{A}_{nn}^\pm \partial_{z^\pm} w^\pm(0)) d\eta^\pm = 0.$$

Таким образом, в силу формулы (27) имеем

$$w^+(0) = w^-(0), \quad \alpha_+ \partial_{z^+} w^+(0) + \alpha_- \partial_{z^-} w^-(0) = 0. \quad (29)$$

Аналогичные соотношения для узла $G_h^\bullet$ выглядят так:

$$w^+(l) = w^-(l), \quad -\alpha_+ \partial_{z^+} w^+(l) - \alpha_- \partial_{z^-} w^-(l) = 0. \quad (30)$$

Задача (26), (28)–(30) имеет кусочно-линейное решение

$$\begin{aligned} C_+ z^+ + \mathbf{c} \text{ на } z^+ \in (0, l), \quad C_- z^- + 1 + \mathbf{c} \text{ на } z^- \in (l/2, l), \\ C_- z^- + \mathbf{c} \text{ на } z^- \in (0, l/2). \end{aligned} \quad (31)$$

Оно непрерывно в точке $z^\pm = 0$ и удовлетворяет условиям скачков (28) при любых $C_\pm$ и $\mathbf{c}$, а вторые равенства в (29) и (30) не различаются. Итак, из соотношений (29) и (30) сначала выводим связи $C_+ - C_- = l^{-1}$ и $|\omega^+|(\det \mathbf{A}^+)^{-1} C_+ + |\omega^-|(\det \mathbf{A}^-)^{-1} C_- = 0$, а затем находим коэффициенты

$$C_\pm = \frac{\pm |\omega^\mp| \det \mathbf{A}^\pm}{l(|\omega^+| \det \mathbf{A}^- + |\omega^-| \det \mathbf{A}^+)}.$$

Слагаемое $\mathbf{c}$ выбираем из условия равенства нулю среднего по $(0, l) \times (0, l)$ решения $\{w^-, w^+\}$.

Функции $w^\pm$ определены и построение конгломерата (22) закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Дифференцирование уничтожает зависимости от $z^\pm$ в задаче (25), т. е. слагаемое $\mathcal{W}_\pm$ не оставляет невязок в задаче (9).

Следующая формула для коэффициента (14) получается очень легко: нужно учесть, что согласно (18) выполнено равенство

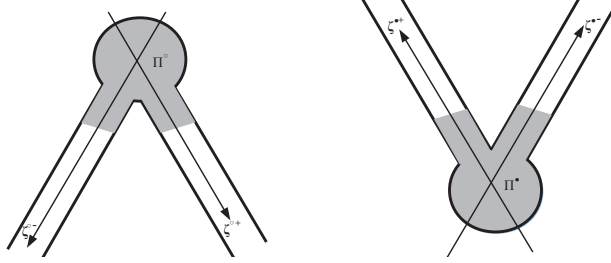
$$\langle e_{(1)}^\top A \nabla_y \mathcal{X}_h \rangle_{\mathcal{S}_h} = -\langle e_{(1)}^\top A \nabla_y (\mathcal{J} - \mathcal{X}_h) \rangle_{\mathcal{S}_h} = -\langle A_{11} \rangle_{\mathcal{S}_h} + \langle e_{(1)}^\top A \nabla_y \mathcal{X}_h \rangle_{\mathcal{S}_h}, \quad (32)$$

заменить ячейку $\mathcal{S}_h$ двумя цилиндрами (1), а функцию $\mathcal{X}_h$ — главными членами (24) и (31) ее асимптотики (22). Важно то, что объемы тел G_h° , $G_h^{\bullet\pm}$ и $\mathcal{Q}^+(h) \cap \mathcal{Q}^-(h)$ суть бесконечно малые более высокого порядка $O(h^n)$, а подынтегральные выражения ограничены. Такие действия оправданы результатами из п. 8 и п. 9.

Теорема 1. Справедливо представление $\mathbf{a}(h) = h^{n-1} \mathbf{a}_0 + O(h^n)$, где $\mathbf{a}_0$ — произведение дроби $1/2l$ и гармонического среднего величин $\alpha_\pm$:

$$\mathbf{a}_0 = \frac{1}{l} \frac{|\omega^+| |\omega^-| \det A}{|\omega^+| \det \mathbf{A}^- + |\omega^-| \det \mathbf{A}^+} = \frac{1}{l} \frac{\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ + \alpha_-}.$$

4. Пограничный слой. Как упоминалось в п. 2, для изучения влияния узлов на асимптотику решения исходной задачи (6)–(8) необходимо детальное исследование задачи о пограничном слое. Ограничимся рассмотрением узла

Рис. 3. Области Π^o и $\Pi^\bullet$ с расширенными узлами (тонируются).

G_h^o — узел $G_h^\bullet$ обрабатывается точно так же. Укажем статью [18], где рассмотрены сочленения более сложного строения.

В результате замены $y \mapsto \xi^o$ и формального перехода к $h = 0$ сочленение $\mathcal{Q}(h)$ трансформируется в бесконечную область $\Pi^o = G_1^o \cup \varpi^- \cup \varpi^+$, образованную узлом G_1^o и двумя полубесконечными цилиндрами

$$\varpi^{\circ\pm} = \{\xi^{\circ\pm} : \zeta^{\circ\pm} > 0, \eta^{\circ\pm} \in \omega^\pm\}. \quad (33)$$

Здесь $\xi^o = h^{-1}(x - P^o)$ и $\xi^{\circ\pm} = (\eta^{\circ\pm}, \zeta^{\circ\pm}) = (\eta^\pm, h^{-1}z^\pm)$ — растянутые координаты, глобальные и локальные. Задача (9) принимает вид

$$L(\nabla_{\xi^o} \mathcal{Z}(\xi^o)) = \mathcal{F}(\xi^o), \quad \xi^o \in \Pi^o, \quad B(\xi^o, \nabla_{\xi^o}) \mathcal{Z}(\xi^o) = \mathcal{G}(\xi^o), \quad \xi^o \in \partial\Pi^o, \quad (34)$$

с теми же операторами L и B . Вариационная постановка сформированной задачи (34) о пограничном слое

$$(A\nabla_{\xi^o} \mathcal{Z}, \nabla_{\xi^o} \Psi)_{\Pi^o} = (\mathcal{F}, \Psi)_{\Pi^o} + (\mathcal{G}, \Psi)_{\partial\Pi^o} \quad \forall \Psi \in \mathcal{H}^1(\Pi^o)$$

осуществляется на пространстве $\mathcal{H}^1(\Pi^o)$, полученном пополнением линейного множества $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Pi^o})$ (бесконечно дифференцируемые функции с компактными носителями) по естественной энергетической норме

$$||| \mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o) ||| = (\|\nabla_{\xi^o} \mathcal{Z}; L^2(\Pi^o)\|^2 + \|\mathcal{Z}; L^2(G_1^o)\|^2)^{1/2},$$

которая эквивалентна весовой норме

$$\|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o)\| = (\|\nabla_{\xi^o} \mathcal{Z}; L^2(\Pi^o)\|^2 + \|(1 + |\xi|)^{-1} \mathcal{Z}; L^2(\Pi^o)\|^2)^{1/2}$$

в силу одномерного неравенства Харди

$$\int_0^{+\infty} t^{-2} |\mathcal{Z}(t)|^2 dt \leq 4 \int_0^{+\infty} \left| \frac{d\mathcal{Z}}{dt}(t) \right|^2 dt \quad \forall \mathcal{Z} \in C_c^1(0, +\infty). \quad (35)$$

Правая часть соотношения эквивалентности

$$c \|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o)\| \leq ||| \mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o) ||| \leq C \|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o)\|$$

с положительными множителями c и C очевидна, а левая получается применением проинтегрированного по $\omega^\pm \ni \eta^{\circ\pm}$ неравенства (35) к произведению $\chi^\pm \mathcal{Z}$, где $\chi^\pm$ — гладкая срезка переменной $\zeta^{\circ\pm}$, равная нулю на множестве $G_1^o \cup \omega^\mp$ и единице в полуцилиндре $\omega^\pm$ при $\zeta^{\circ\pm} > \text{diam } G_1^o$ (напоминаем, что торцы полуцилиндров (33) лежат внутри узла G_1^o). Понятно, что выполнено весовое следовое неравенство $\|(1 + |\xi|)^{-1} \mathcal{Z}; L^2(\partial\Pi^o)\| \leq c_\Pi \|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^o)\|$. Теперь альтернатива Фредгольма и теорема Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве дают такое утверждение.

Лемма 4. Если для правых частей задачи (34) выполнены включения $(1 + |\xi|)\mathcal{F} \in L^2(\Pi^\circ)$, $(1 + |\xi|)\mathcal{G} \in L^2(\partial\Pi^\circ)$ и условие ортогональности

$$\langle \mathcal{F} \rangle_{\Pi^\circ} + \langle \mathcal{G} \rangle_{\partial\Pi^\circ} = 0, \quad (36)$$

то существует решение $\mathcal{Z} \in \mathcal{H}^1(\Pi^\circ)$, определенное с точностью до постоянного слагаемого. Условие ортогональности $\langle \mathcal{Z} \rangle_{\Pi^\circ} = 0$ делает его единственным и обеспечивает оценку $\|\mathcal{Z}; \mathcal{H}^1(\Pi^\circ)\| \leq \mathcal{C}\mathcal{N}$, где множитель $\mathcal{C}$ не зависит от функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, а $\mathcal{N}$ — сумма их весовых норм.

Введем весовое пространство $W_\beta^1(\Pi^\circ)$ (экспоненциальное пространство Кондратьева [23]) как пополнение линейного множества $C_c^\infty(\overline{\Pi^\circ})$ по весовой соболевской норме

$$\|Z; W_\beta^1(\Pi^\circ)\| = \|\nabla_\xi Z; L_\beta^2(\Pi^\circ)\| + \|Z; L_\beta^2(\Pi^\circ)\|,$$

где $\beta \in \mathbb{R}$ — весовой показатель, а $L_\beta^2(\Pi^\circ)$ — весовое пространство Лебега с нормой $\|Z; L_\beta^2(\Pi^\circ)\| = \|e^{\beta|\zeta|} Z; L^2(\Pi^\circ)\|$. При $\beta > 0$ элементам пространства $W_\beta^1(\Pi^\circ)$ свойственно экспоненциальное затухание, а при $\beta < 0$ — экспоненциальный рост, причем их скорости регулируются показателем β .

Обобщенное решение задачи (34) в пространстве $W_{-\beta}^1(\Pi^\circ)$ — функция $\mathcal{Z} \in W_{-\beta}^1(\Pi^\circ)$, удовлетворяющая интегральному тождеству (см. [20, § 3] и др.)

$$(A\nabla_\xi \mathcal{Z}, \nabla_\xi \mathcal{V})_{\Pi^\circ} = \mathbf{F}(\mathcal{V}) \quad \forall \mathcal{V} \in W_\beta^1(\Pi^\circ), \quad (37)$$

где $\mathbf{F} \in (W_\beta^1(\Pi))^\ast$ — линейный функционал на пространстве $W_\beta^1(\Pi)$, например, $\mathbf{F}(\mathcal{V}) = (\mathcal{F}, \mathcal{V})_{\Pi^\circ} + (\mathcal{G}, \mathcal{V})_{\partial\Pi^\circ}$ при $\mathcal{F} \in L_{-\beta}^2(\Pi^\circ)$ и $\mathcal{G} \in L_{-\beta}^2(\partial\Pi^\circ)$.

Интегральное тождество (37) порождает отображение

$$W_{-\beta}^1(\Pi^\circ) \ni \mathcal{Z} \mapsto \mathcal{B}_{-\beta}^\circ \mathcal{Z} = \mathbf{F} \in W_\beta^1(\Pi^\circ)^\ast.$$

Известно (см. [23] и [24, гл. 5; 20, § 4]) существование такого $\beta_{\mathcal{B}}^\circ > 0$, что при $\beta \in (0, \beta_{\mathcal{B}}^\circ)$ операторы $\mathcal{B}_{\pm\beta}^\circ$ фредгольмовы. В случае $\beta = 0$ это свойство теряется (ср. лемму 4). Операторы $\mathcal{B}_\beta^\circ$ и $\mathcal{B}_{-\beta}^\circ$ взаимно сопряжены.

Лемма 5. При $\beta \in (0, \beta_{\mathcal{B}}^\circ)$ оператор $\mathcal{B}_{+\beta}^\circ$ — фредгольмов мономорфизм с двумерным коядром, а значит, $\mathcal{B}_{-\beta}^\circ$ — фредгольмов эпиморфизм.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить утверждение для оператора $\mathcal{B}_\beta^\circ$. Заметим, что $\mathcal{H}^1(\Pi^\circ) \subset W_{-\beta}^1(\Pi^\circ)$, а значит, функционал $\mathbf{F} \in W_{-\beta}^1(\Pi^\circ)^\ast$ попадает в сопряженное пространство $\mathcal{H}^1(\Pi^\circ)^\ast$. Таким образом, по лемме 4 лишь при одном условии ортогональности $\mathbf{F}(1) = 0$ задача (37) с правой частью $\mathbf{F}$ имеет решение $\mathcal{Z}^\circ \in \mathcal{H}^1(\Pi^\circ)$. Кроме того, по теореме Кондратьева об асимптотике [23] (см. также [24, теоремы 3.1.4 и 5.1.4] и [20, § 4]) справедливо представление

$$\mathcal{Z}^\circ(\xi^\circ) = \sum_{\pm} \chi_{\pm}(\zeta_{\pm}^\circ) \mathcal{C}_{\pm}^\circ + \widetilde{\mathcal{Z}}^\circ(\xi^\circ), \quad \widetilde{\mathcal{Z}}^\circ \in W_\beta^1(\Pi^\circ),$$

где $\mathcal{C}_{\pm}^\circ$ — некоторые постоянные. Поскольку решение определено с точностью до постоянного слагаемого, считаем, что $\mathcal{C}_{\pm}^\circ = \pm \mathcal{C}_0^\circ$, т. е. для включения $\mathcal{Z}^\circ \in W_\beta^1(\Pi^\circ)$ нужно еще одно равенство $\mathcal{C}_0^\circ = 0$.

В итоге для разрешимости задачи в классе $W_\beta^1(\Pi^\circ)$ нужно соблюсти два возникших равенства. Именно в этом и требовалось убедиться³⁾. $\square$

³⁾ $\mathcal{C}_0^\circ$ — линейный непрерывный функционал от $\mathbf{F} \in W_{-\beta}^1(\Pi^\circ)^\ast$ (см. замечание 2).

Опишем ядро оператора $\mathcal{B}_{-\beta}^{\circ}$. В дополнение к очевидному решению $Z_0 = \text{const}$ однородной задачи (34), которое содержится в $W_{-\beta}^1(\Pi^{\circ})$, построим ее решение с линейным ростом на бесконечности

$$Z_1^{\circ}(\xi^{\circ}) = \sum_{\pm} \pm \chi^{\pm}(\xi^{\circ}) (\alpha_{\pm}^{-1} Y^{\pm}(\xi^{\circ\pm}) + m^{\circ}) + \tilde{Z}_1^{\circ}(\xi^{\circ}). \quad (38)$$

При этом $\tilde{Z}_1^{\circ} \in W_{\beta}^1(\Pi^{\circ})$, а m° — общая для обоих выходов на бесконечность постоянная (при ней появился знак $\pm$, см. выше). Сумма

$$Y^{\pm}(\xi^{\circ\pm}) = \zeta^{\circ\pm} + \mathcal{V}^{\pm}(\eta^{\circ\pm}) \quad (39)$$

аннулируется операторами $\mathbf{L}^{\pm}(\nabla_{\xi^{\circ\pm}})$ и $\mathbf{B}^{\pm}(\eta^{\circ\pm}, \nabla_{\xi^{\circ\pm}})$ (см. формулы (20) и (23), (24)). Ограниченная часть $\hat{Z}_1^{\circ} := \tilde{Z}_1^{\circ} + \sum_{\pm} \pm \chi^{\pm} m^{\circ}$ функции (38) удовлетворяет задаче (34) с правыми частями

$$\mathcal{F} = \sum_{\pm} \mp [L, \chi^{\pm}] (\alpha_{\pm}^{-1} Y^{\pm} + m^{\circ}), \quad \mathcal{G} = \sum_{\pm} \mp [B, \chi^{\pm}] (\alpha_{\pm}^{-1} Y^{\pm} + m^{\circ}), \quad (40)$$

где $[D, \chi^{\pm}]$ — коммутатор дифференциального оператора D со срезкой $\chi^{\pm}$. Применив формулу Грина в полубесконечном цилиндре $\varpi^{\circ\pm}(R) = \omega^{\pm} \times (-\infty, R)$ с торцом $\tau^{\circ\pm}(R)$, при учете равенства (27) получим

$$\begin{aligned} & \int_{\varpi^{\circ\pm}(R)} [L, \chi^{\pm}] Y^{\pm} d\xi^{\circ\pm} + \int_{\partial\varpi^{\circ\pm}(R) \setminus \tau^{\circ\pm}(R)} [B, \chi^{\pm}] Y^{\pm} ds_{\xi^{\circ\pm}} \\ &= \int_{\varpi^{\circ\pm}(R)} L(\chi^{\pm} Y^{\pm}) d\xi^{\circ\pm} + \int_{\partial\varpi^{\circ\pm}(R) \setminus \tau^{\circ\pm}(R)} B(\chi^{\pm} Y^{\pm}) ds_{\xi^{\circ\pm}} \\ &= - \int_{\omega^{\pm}} \mathbf{e}_{(n)}^{\top} \mathbf{A}_{\square}^{\pm} \nabla_{\xi^{\circ\pm}} Y^{\pm} \big|_{\eta^{\circ\pm}=R} d\eta^{\circ\pm} = - \int_{\omega^{\pm}} (\mathbf{A}_{nn}^{\pm} + \mathbf{a}^{\pm\top} \nabla_{\eta^{\circ\pm}} \mathcal{V}^{\pm}) d\eta^{\circ\pm} = -\alpha_{\pm}. \end{aligned} \quad (41)$$

Итак, для функций (40) выполнено условие (36) и составляющая $\hat{Z}^1 \in \mathcal{H}^1(\Pi)$ существует. Коэффициент $m_{\circ}$ определен однозначно.

Лемма 6. При $\beta \in (0, \beta_{\mathcal{B}}^{\circ})$ выполнено включение $e^{-\sigma|\xi^{\circ}|} \tilde{Z}_1^{\circ} \in H^1(\Pi^{\circ})$. Кроме того, при достаточно большом R справедливо равенство

$$\int_{\omega^{\pm}} (e_n^{\pm})^{\top} \mathbf{A}^{\pm} \nabla_{\xi^{\circ\pm}} \tilde{Z}_1^{\circ}(\xi^{\circ\pm}) \big|_{\zeta^{\circ\pm}=R} d\eta^{\circ\pm} = 0. \quad (42)$$

Доказательство. Экспоненциальное затухание остатка обеспечено теоремой Кондратьева [23] о поведении решений в цилиндрических областях (см., например, [27, гл. 1 и 3]). Формула Грина, примененная к функциям Z_0 и $\tilde{Z}^1$ в цилиндре $\omega^{\pm} \times (R_1, R_2)$, показывает, что интеграл из левой части (42) не зависит от параметра R , а значит, обращается в нуль ввиду исчезновения подынтегрального выражения на бесконечности.

Замечание 2. Согласно методу [22] (см. также [24, теорема 4.3.9]) выкладка (41) приводит к равенству $\mathcal{C}_0^{\circ} = (\mathcal{F}, Z^1)_{\Pi^{\circ}} + (\mathcal{G}, Z^1)_{\partial\Pi^{\circ}}$.

По аналогии с введенной в [18] матрицей поляризации сочленения полуцилиндров называем коэффициент m° из (38) и определяемый аналогично коэффициент $m^\bullet$ коэффициентами поляризации узлов G_h° и $G_h^\bullet$.

Сдвинем начало координат $(\eta^{\circ\pm}, \zeta^{\circ\pm})$ вдоль оси полуцилиндра $\varpi^{\circ\pm}$, т. е. положим $\zeta^{\circ\pm} = \zeta^{\circ\pm} - \varrho_\pm$ и $\xi^{\circ\pm} = (\eta^{\circ\pm}, \zeta^{\circ\pm})$. При этом $\varrho_\pm = \mathbf{r}\varrho_\pm^\circ$ с положительными сомножителями $\mathbf{r}$ и $\varrho_\pm^\circ$. Добавив к (38) подходящую постоянную $\mathbf{c}$, получаем новое решение однородной задачи (34)

$$\mathbf{Z}_r^\circ(\zeta^\circ) = \sum_{\pm} \pm \chi^\pm(\zeta^{\circ\pm}) \left(\frac{1}{\alpha_\pm} Y^\pm(\xi^{\circ\pm}) + \mathbf{m}_r^\circ \right) + \tilde{\mathbf{Z}}_r^\circ(\zeta^\circ), \quad \tilde{\mathbf{Z}}_r^\circ \in \mathcal{H}^1(\Pi), \quad (43)$$

в котором остаток $\tilde{\mathbf{Z}}_r^\circ(\zeta^\circ)$ затухает на бесконечности с экспоненциальной скоростью $O(e^{-\sigma|\zeta^\circ|})$ с некоторым положительным показателем σ и

$$\mathbf{m}_r^\circ = m^\circ + \frac{1}{2} \left(\frac{\varrho_+}{\alpha_+} + \frac{\varrho_-}{\alpha_-} \right) = m^\circ + \frac{\mathbf{r}}{2} \left(\frac{\varrho_+^\circ}{\alpha_+} + \frac{\varrho_-^\circ}{\alpha_-} \right). \quad (44)$$

При достаточно большом $\mathbf{r} > 0$ величина (44) становится положительной. Для краткости формул положим $\varrho_\pm^0 = 1$, т. е. пренебрежем возможностью отсекать рукава $\varpi^{\circ\pm}$ на разных расстояниях от центра. Зафиксировав размер $\rho_\pm = \mathbf{r}^\circ > 0$ большим, изменим определение ядра:

$$\mathbf{G}_r^\circ = G_1^\circ \cup \bigcup_{\pm} \{ \zeta^\circ \in \varpi^{\circ\pm} : \zeta^{\circ\pm} < \varrho_\pm = \mathbf{r}^\circ \}. \quad (45)$$

Аналогично определим расширенный узел $\mathbf{G}_r^\bullet$ (тонирован на рис. 3). Причины необходимости «правильного» определения (45) узла объясняются во введении к статье [18]. Для удобства считаем, что $\mathbf{r}^\bullet = \mathbf{r}^\circ =: r$.

Введем еще одну (промежуточную — см. замечания 3 и 5) характеристику $\mathbf{M}_r^\circ = \langle e_{(1)}^\top A \nabla_{\xi^\circ} \hat{\mathbf{Z}}_r^\circ \rangle_{\Pi^\circ}$ сочленения Π° после фиксации расширенного узла (45). Считаем, что $\hat{\mathbf{Z}}_r^\circ(\zeta^\circ) = \mathbf{Z}_1^\circ(\zeta^\circ)$ при $\zeta^\circ \in \mathbf{G}_r^\circ$, но

$$\hat{\mathbf{Z}}_r^\circ(\zeta^\circ) = \mathbf{Z}_1^\circ(\zeta^\circ) - \sum_{\pm} \pm (\alpha_\pm^{-1} Y^\pm(\xi^{\circ\pm}) + \mathbf{m}_r^\circ) \quad \text{при } \xi^\circ \in \omega^\pm, \zeta^\circ > 0. \quad (46)$$

Формула (46) отличается от (43) отсутствием срезов, т. е. функция $\mathbf{Z}_r^\circ$ имеет скачки на сечениях $\tau^\pm(r) := \partial \mathbf{G}_r^\circ \cap \omega^\pm$.

Лемма 7. *Справедливо соотношение*

$$\mathbf{M}_r^\circ = -\frac{r}{l} + \mu := -\frac{r}{l} + \frac{1}{2l} \sqrt{4l^2 - 1} \sum_{\pm} \pm \frac{1}{|\omega^\pm|} \int_{\omega^\pm} \eta_1^{\circ\pm} d\eta^{\circ\pm}. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Интегрируя по частям при учете скачка конормальной производной, находим, что величина (47) равна

$$\int_{\Pi^\circ} (\nabla_{\xi^\circ} \xi_1^\circ)^\top A \nabla_{\xi^\circ} \tilde{\mathbf{Z}}_r^\circ(\xi^\circ) d\xi^\circ = \sum_{\pm} \mp \frac{1}{\alpha_\pm} \int_{\tau^\pm(r)} \xi_1^\circ (\mathbf{e}_n^\pm)^\top \mathbf{A}_{\square}^\pm \nabla_{\xi^{\circ\pm}} Y^\pm(\xi^{\circ\pm}) d\eta^{\circ\pm}.$$

Здесь $\mathbf{e}_n^\pm$ — орт оси $\zeta^{\circ\pm} = \xi_n^{\circ\pm}$. Согласно (39) и (24) справедливо равенство

$$\nabla_{\xi^{\circ\pm}} Y^\pm(\xi^{\circ\pm}) = \mathbf{e}_n^\pm - (\det \mathbf{A}^\pm)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \det \mathbf{A}_{(k)}^\pm \mathbf{e}_k^\pm. \quad (48)$$

В силу определения (27) чисел $\alpha_{\pm}$ имеем

$$(\mathbf{e}_n^{\pm})^{\top} \mathbf{A}_{\square}^{\pm} \left(\mathbf{e}_n^{\pm} - (\det \mathbf{A}^{\pm})^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \det \mathbf{A}_{(k)}^{\pm} \mathbf{e}_k^{\pm} \right) = \frac{\det A}{\det \mathbf{A}^{\pm}} = \frac{\alpha_{\pm}}{|\omega^{\pm}|}. \quad (49)$$

Отсюда и из соотношения (48) выводим равенство (47), заметив, что в силу формулы (21)

$$\xi_1^{\circ} = \pm \zeta^{\circ \pm} \sin \varphi - \xi_1^{\pm} \cos \varphi. \quad \square \quad (50)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Поскольку в формуле (50) для узла $\mathbf{G}_r^{\bullet}$ нужна замена $\varphi \mapsto \varphi + \pi$, перенаправляющая оси координат, коэффициент $\mathbf{M}_r^{\bullet}$ равен $-\mathbf{M}_r^{\circ}$. Общее слагаемое μ зависит только от сечений полуцилиндров $\varpi^{\circ \pm}$. Оно заведомо аннулируется в двух ситуациях: равны нулю абсциссы центров тяжести тел $\omega^{\pm}$ или сечения $\omega^{\pm}$ одинаковы.

5. Построение поправочных членов асимптотики. Благодаря условиям сопряжения Кирхгофа (29) и (30) в качестве продолжений функций $w^{\pm}$ из анзаца (30) со стержней $\mathcal{Q}_{\pm}(h)$ на узлы G_h° и $G_h^{\bullet}$ можно в главном взять постоянные $w^+(0) = w^-(0)$ и $w^+(l) = w^-(l)$. В то же время при построении поправочных членов представлений

$$\mathcal{Y}_h^{\pm}(y) = \mathcal{X}_{h0}^{\pm}(y) - \mathcal{T}(y) + h\mathcal{Y}_h'(y) + \dots \text{ на } \mathcal{Q}^{\pm}(h) \quad (51)$$

нужно учесть явление пограничного слоя. Применим метод сращиваемых асимптотических разложений (см. [25, 26; 27, гл. 2] и др.), интерпретируя разложения (51) как внешние, а внутренние — приемлемые в малых окрестностях узлов — отыскиваем в виде

$$\mathcal{Y}_h^{\pm}(y) = \begin{cases} w^{\pm}(0) - \mathcal{T}(y) + hb_{\circ}Z^{1^{\circ}}(\xi^{\circ}) + hc_{\circ} + \dots & \text{на } G_h^{\circ}, \\ w^{\pm}(l) - \mathcal{T}(y) + hb_{\bullet}Z^{1^{\bullet}}(\xi^{\bullet}) + hc_{\bullet} + \dots & \text{на } G_h^{\bullet}. \end{cases}$$

Представления (22) и (38), переписанные как суммы

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{h0}^{\pm}(y) &= w^{\pm}(0) + z^{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0) + h \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0) \mathcal{V}^{\pm}(\eta^{\pm}) + \dots \\ &= w^{\pm}(0) + h \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0) (\zeta^{\pm} + \mathcal{V}^{\pm}(\eta^{\pm})) + \dots, \\ hb_{\circ}Z^{1^{\circ}}(\xi^{\circ}) + hc_{\circ} &= \pm hb_{\circ} \alpha_{\pm}^{-1} (\zeta^{\pm} + \mathcal{V}^{\pm}(\eta^{\pm})) \pm hb_{\circ} m^{\circ} + hc_{\circ} + \dots, \end{aligned} \quad (52)$$

после процедуры сращивания в промежуточной зоне $z^{\pm} = O(\sqrt{h})$ (т. е. в непосредственной близости от узла G_h°) приводят к равенству $b_{\circ} = \pm \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0)$. Сравнение последнего слагаемого в (52) и похожего на (22) разложения члена

$$\mathcal{Y}_h'(y) = w^{\pm'}(z^{\pm}) + h \partial_{z^{\pm}} w^{\pm'}(z^{\pm}) \mathcal{V}^{\pm}(\eta^{\pm}) + \dots$$

анзаца (51) приводит к соотношениям $w^{\pm'}(0) = c_{\circ} + m^{\circ} \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0)$ и как следствие — к условию скачка

$$w^{+'}(0) - w^{-'}(0) = m^{\circ} \sum_{\pm} \pm \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0) = \pm 2m^{\circ} \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(0). \quad (53)$$

Независимость от знаков $\pm$ обеспечена вторым условием сопряжения (29). Аналогичные действия около узла $G_h^{\bullet}$ дают еще одну пару равенств

$$b_{\bullet} = \mp \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(l), \quad w^{+'}(l) - w^{-'}(l) = \mp 2m^{\bullet} \alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}} w^{\pm}(l). \quad (54)$$

Поскольку правые части (15) задачи (9), (10) для $\mathcal{X}_h$ уже были компенсированы при построении анзаца (22), выполнены уравнения

$$-\alpha_{\pm} \partial_{z^{\pm}}^2 w^{\pm'}(z^{\pm}) = 0, \quad z^{\pm} \in (0, l), \quad (55)$$

и условия сопряжения

$$\alpha_{+} \partial_{z^{+}} w^{+'}(0) + \alpha_{-} \partial_{z^{-}} w^{-'}(0) = 0, \quad -\alpha_{+} \partial_{z^{+}} w^{+'}(l) - \alpha_{-} \partial_{z^{-}} w^{-'}(-l) = 0. \quad (56)$$

Алгебраические вычисления показывают, что решение задачи (55), (53), (54), (56) имеет следующий вид с произвольной постоянной c' :

$$\begin{aligned} w^{\pm'}(z^{\pm}) &= -2\mathbf{a}_0(m^{\circ} + m^{\bullet})C_{\pm}z^{\pm} \pm m^{\circ}\alpha_{+}C_{+} + c' \\ &= -2\mathbf{a}_0(m^{\circ} + m^{\bullet})C_{\pm}z^{\pm} \mp m^{\circ}\alpha_{-}C_{-} + c'. \end{aligned}$$

Процедуру построения асимптотики можно продолжить и даже соорудить бесконечный асимптотический ряд, однако в п. 6 мы пойдем иным путем (ср. [10]).

6. Уточненная одномерная модель. Приведенное в п. 3 и п. 5 построение асимптотики решения $\mathcal{X}_h$ задачи (9) с правыми частями (15) при помощи метода сращиваемых разложений традиционно, но требует введения сложных конструкций при оправдании построенных асимптотик (например, «склеивание» внутренних и внешних разложений в «промежуточных» зонах и коммутирования срезов с дифференциальными операторами; ср. комментарии в п. 8). К тому же такие конструкции несложно обрабатывать лишь при вычислении главного члена асимптотики коэффициента (14) (см. теорему 1), однако учет уже первой асимптотической поправки встречает серьезные затруднения. Применим иной подход, связанный с определением новых размеров элементов сочленения и построением уточненной одномерной модели [10, 18]. Как станет понятно далее, этот подход делает элементарными и выкладки, нужные для оценивания асимптотических остатков, а дополнительные осложнения относятся исключительно к алгебраическим вычислениям.

Согласно новому определению (45) узлов $\mathbf{G}_r^{\circ}$ и $\mathbf{G}_r^{\bullet}$ осуществим разбиение сочленения $\mathcal{S}(h)$ так, как указано на рис. 1(с). Изменяются и стержневые элементы сочленения, а именно, их осями теперь служат отрезки

$$\Upsilon_r^h = (hr, l - hr) =: (v_{hr}^{\circ}, v_{hr}^{\bullet}) \ni z^{\pm}. \quad (57)$$

Сузим уравнения (26) для новых ингредиентов $w_h^{\pm}$ анзацев (22) на укороченные стержни с осями (57). Составим условия сопряжения в концах отрезков Υ_r^h , приняв на $\mathbf{G}_r^b$ такие разложения решения задачи (19):

$$\mathcal{X}_h(y) = \mathbf{C}_0^b(h) + h\mathbf{C}_1^b(h)\widehat{\mathbf{Z}}_r^b(\xi^b) + \dots, \quad b = \circ, \bullet. \quad (58)$$

Функции (58) (см. определение (46)) претерпевают скачки на торцах $\tau_b^{\pm}(r)$ узлов $\mathbf{G}_r^b$, для компенсации которых (скачков) придадим функциям $w_h^{\pm}$ и их производным соответствующие значения в концевых точках. Так, в случае $b = \circ$ сравнение постоянных и линейных по переменной $z^{\pm} = h\zeta^{\circ\pm}$ слагаемых в анзацах (58) и (22) приводит к равенствам

$$w_h^{\pm}(v_{hr}^{\circ}) = \mathbf{C}_0^{\circ}(h) \pm h\mathbf{C}_1^{\circ}(h)\mathbf{m}_r^{\circ} \quad \text{и} \quad \partial_{z^{\pm}} w_h^{\pm}(v_{hr}^{\circ}) = \pm\alpha_{\pm}^{-1}\mathbf{C}_1^{\circ}(h). \quad (59)$$

Исключив из четырех соотношений (59) два ($q = 0, 1$) коэффициента $\mathbf{C}_q^\circ$, получаем пару условий сопряжения Кирхгофа — Робэна

$$w_h^+(v_{hr}^\circ) - w_h^-(v_{hr}^\circ) = h\mathbf{m}_r^\circ(\alpha_+\partial_{z^+}w_h^+(v_{hr}^\circ) - \alpha_-\partial_{z^-}w_h^-(v_{hr}^\circ)), \quad (60)$$

$$\alpha_+\partial_{z^+}w_h^+(v_{hr}^\circ) + \alpha_-\partial_{z^-}w_h^-(v_{hr}^\circ) = 0. \quad (61)$$

Рассматривая узел $\mathbf{G}_r^\bullet$, выводим аналогичные соотношения

$$w_h^+(v_{hr}^\bullet) - w_h^-(v_{hr}^\bullet) = -h\mathbf{m}_r^\bullet(\alpha_+\partial_{z^+}w_h^+(v_{hr}^\bullet) - \alpha_-\partial_{z^-}w_h^-(v_{hr}^\bullet)), \quad (62)$$

$$\alpha_+\partial_{z^+}w_h^+(v_{hr}^\bullet) + \alpha_-\partial_{z^-}w_h^-(v_{hr}^\bullet) = 0. \quad (63)$$

Знак минус в (62) обусловлен разными направлениями осей $z^\pm$ и $\zeta^{\bullet\pm}$.

Итак, функции $w_h^\pm$ должны удовлетворять уравнениям

$$-\alpha_\pm\partial_{z^\pm}^2w_h^\pm(z^\pm) = 0, \quad z^\pm \in (v_{hr}^\circ, v_{hr}^\bullet), \quad (64)$$

условиям сопряжения (60)–(63) и условиям скачков (28). Неоднородность присутствует только в первом условии (28), однако ее можно устранить подходящей заменой $w_h^\pm \mapsto \mathbf{w}_h^\pm$, порождающей уравнения

$$-\alpha_\pm\partial_{z^\pm}^2\mathbf{w}_h^\pm(z^\pm) = \mathbf{f}_h^\pm(z^\pm), \quad z^\pm \in (v_{hr}^\circ, v_{hr}^\bullet), \quad (65)$$

Теорема 2. Пусть $\mathbf{f}_h^\pm \in L^2(\Upsilon_r^h)$ и $\langle \mathbf{f}_h^+ \rangle_{\Upsilon_r^h} + \langle \mathbf{f}_h^- \rangle_{\Upsilon_r^h} = 0$. При положительных коэффициентах поляризации $\mathbf{m}_r^\circ$ и $\mathbf{m}_r^\bullet$ задача (65), (60)–(63) имеет решение $\{\mathbf{w}_h^\pm\} \in H^2(\Upsilon_r^h)^2$, которое определено с точностью до общего постоянного слагаемого $\mathbf{c}_h$, причем выполнена оценка

$$\sum_{\pm} \left\| \frac{d\mathbf{w}_h^\pm}{dz^\pm}; H^1(\Upsilon_r^h) \right\|^2 + \frac{1}{h} \sum_{b=\circ, \bullet} |\mathbf{w}_h^+(v_{hr}^b) - \mathbf{w}_h^-(v_{hr}^b)|^2 \leq C \sum_{\pm} \|\mathbf{f}_h^\pm; L^2(\Upsilon_r^h)\|^2$$

с множителем C , не зависящим от $\mathbf{f}_h^\pm$ и $h \in (0, 1]$.

Доказательство. Для проверки разрешимости указанной задачи достаточно применить теорему Рисса о представлении непрерывного функционала к ее вариационной постановке. Последняя возникает после применения формулы Грина, в которой внеинтегральные члены преобразуются при помощи связей (60)–(63). Поясним такое преобразование:

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \psi_{\pm}^h(v_{hr}^\circ) \alpha_{\pm} \partial_{z^\pm} \mathbf{w}_h^\pm(v_{hr}^\circ) &= \alpha_- (\psi_-^h(v_{hr}^\circ) - \psi_+^h(v_{hr}^\circ)) \partial_{z^-} \mathbf{w}_h^-(v_{hr}^\circ) \\ &= \frac{1}{2} (\psi_-^h(v_{hr}^\circ) - \psi_+^h(v_{hr}^\circ)) \sum_{\pm} \mp \alpha_{\pm} \partial_{z^\pm} \mathbf{w}_h^\pm(v_{hr}^\circ) \\ &= (2h\mathbf{m}_r^\circ)^{-1} (\psi_-^h(v_{hr}^\circ) - \psi_+^h(v_{hr}^\circ)) (\mathbf{w}_h^-(v_{hr}^\circ) - \mathbf{w}_h^+(v_{hr}^\circ)). \end{aligned}$$

Сначала дважды применили равенство (61), а затем и равенство (60). Итак, при положительных коэффициентах поляризации внеинтегральные члены порождают симметричные и неотрицательные добавки к симметричной и неотрицательной билинейной форме $\sum_{\pm} (\partial_{z^\pm} \mathbf{w}_h^\pm, \partial_{z^\pm} \psi_{\pm}^h)_{\Upsilon_r^h}$. Утверждения теоремы стали очевидными. $\square$

Решение $w_h^\pm$ задачи (64), (60)–(63), (28) представимо в виде

$$w_h^+(z^+) = B^+(h)z^+ + hb^+(h) \text{ при } z^+ \in (v_{hr}^\circ, v_{hr}^\bullet),$$

$$w_h^-(z^-) = \begin{cases} B^-(h)z^- + hb^0(h) & \text{при } z^- \in (v_{hr}^\circ, l/2), \\ B^-(h)z^- + hb^-(h) & \text{при } z^- \in (l/2, v_{hr}^\bullet). \end{cases} \quad (66)$$

Коэффициенты линейных функций находятся путем решения системы алгебраических уравнений. Далее понадобятся только формулы

$$B^\pm(h) = \pm \frac{\alpha_\mp}{\alpha_+ + \alpha_-} \frac{1}{l - 2h(r - l\mathbf{a}_0(\mathbf{m}_r^\circ + \mathbf{m}_r^\bullet))},$$

а также выражения для коэффициентов внутренних разложений (58):

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1^\circ(h) = -\mathbf{C}_1^\bullet(h) &= \alpha_\pm^{-1} B^\pm(h) = l\mathbf{a}_0(l - 2h(r - l\mathbf{a}_0(\mathbf{m}_r^\circ + \mathbf{m}_r^\bullet)))^{-1} \\ &= l\mathbf{a}_0(l + 2h(m^\circ + m^\bullet))^{-1}. \end{aligned} \quad (67)$$

Предпоследнее равенство в (67) следует из тождества $l\mathbf{a}_0 = (\alpha_+^{-1} + \alpha_-^{-1})^{-1}$, а в последнем учтена также формула (44) при $\varrho_\pm^0 = 1$ и $\mathbf{r} = r$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. При построении уточненной модели удобно добиться равенств $\mathbf{m}_r^\circ = \mathbf{m}_r^\bullet$, преобразующих условия сопряжения в классические условия Кирхгофа. Возможность сделать это — открытый вопрос даже для оператора Лапласа.

7. Априорная оценка решения исходной задачи. Обоснование асимптотик требует проверки неравенства Фридрихса в области (4), равномерного относительно малых параметров h и ε . Нужны геометрические построения.

Внутри стержня $\mathcal{Q}^{\pm}(h)$ выделим n -мерный параллелепипед $\mathbb{K}^{\pm}(h)$ с кубическим (квадратным при $n = 3$) сечением $\mathbb{K}^\varepsilon(h) = \{y^\pm : |y_j^\pm - \varepsilon h y_j^{0\pm}| < \rho \varepsilon h\}$ и высотой $l - 2R\varepsilon h$, направленной вдоль оси $z^\pm$; здесь $y^{0\pm} = (y_1^{0\pm}, \dots, y_{n-1}^{0\pm})$ — точка внутри области $\omega^\pm \subset \mathbb{R}^{n-1}$, а множитель $\rho > 0$ достаточно мал. При $R = 0$ пересечение $\mathbb{K}^{\varepsilon+}(h) \cap \mathbb{K}^{\varepsilon-}(h)$ может быть непустым, но выберем параметр $R > 0$ и положение параллелепипедов так, чтобы они не пересекались с узлами. Соединим мелкие грани параллелепипедов $\mathbb{K}^{\varepsilon+}(h)$ и $\mathbb{K}^{\varepsilon-}(h)$, расположенные около верхнего узла, перемычкой $\mathbb{T}^{\varepsilon\circ}(h)$ в форме усеченной призмы (рис. 4(a)), которая заведомо оказывается невырожденной, так как оси z^+ и z^- расположены под острым углом одна к другой. Далее будем иметь дело именно с объединением $\mathbb{K}^{\varepsilon+}(h) \cup \mathbb{T}^{\varepsilon\circ} \cup \mathbb{K}^{\varepsilon-}(h)$ и его сдвигами (3) при $k = -N, \dots, N$ — при учете периодичности, отождествляющей узлы $G_h^{\varepsilon\bullet+}$ и $G_h^{\varepsilon\bullet-}$. То же самое можно проделать и с нижними мелкими гранями параллелепипедов.

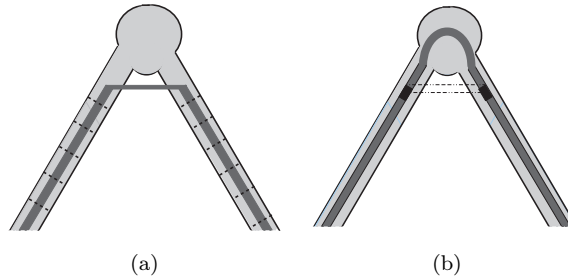


Рис. 4. (a) Окрестность узла с малыми параллелепипедами и прямой перемычкой или (b) искривленным рукавом.

Далее понадобятся следующие несложные утверждения.

Лемма 8. Пусть $\Theta \subset \Xi$ — непустые области в $\mathbb{R}^n$ с компактными липшицевыми границами, а $\Theta_{\varepsilon h}$ и $\Xi_{\varepsilon h}$ — их (εh) -сжатия.

1. Если u — функция из пространства $H^1(\Theta_{\varepsilon h})$, то существует ее продолжение $\mathbf{u} \in H^1(\Xi_{\varepsilon h})$, для которого выполнено неравенство

$$\|\nabla_x \mathbf{u}; L^2(\Xi_{\varepsilon h})\|^2 \leq c \|\nabla_x u; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2. \quad (68)$$

2. Для функции $u \in H^1(\Theta_{\varepsilon h})$ справедливо неравенство

$$\varepsilon^2 h^2 \|\nabla_x u; L^2(\Xi_{\varepsilon h})\|^2 + \|u; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2 \geq C \|u; L^2(\Xi_{\varepsilon h})\|^2, \quad C > 0. \quad (69)$$

Множители c и C зависят от Ξ и Θ , но не от малых ε и h .

Доказательство. Проверку первого утверждения начнем с формул

$$u(x) = u_0 + u_{\perp}(x), \quad u_0 \in \mathbb{R}, \quad \langle u_{\perp} \rangle_{\Theta_{\varepsilon h}} = 0 \quad (70)$$

и после растяжения координат продолжим полученную функцию $u_{\perp}$ с Θ на Ξ в классе $H^1(\Xi)$ при соблюдении для продолжения $\mathbf{u}_{\perp}$, переписанного в исходных координатах, следующих оценок:

$$\begin{aligned} \|\nabla_x \mathbf{u}_{\perp}; L^2(\Xi_{\varepsilon h})\|^2 + (\varepsilon h)^{-2} \|\mathbf{u}_{\perp}; L^2(\Xi_{\varepsilon h})\|^2 &\leq c \|\nabla_x u_{\perp}; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2 \\ + (\varepsilon h)^{-2} \|u_{\perp}; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2 &\leq C \|\nabla_x u_{\perp}; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2 = C \|\nabla_x u; L^2(\Theta_{\varepsilon h})\|^2. \end{aligned}$$

Пояснения: множитель $(\varepsilon h)^{-2}$ обусловлен сжатием координат, при оценке $L^2(\Theta_{\varepsilon h})$ -нормы составляющей $u_{\perp}$ использовано неравенство Пуанкаре, опирающееся на условие ортогональности из списка (70), а последнее равенство учитывает исчезновение постоянной u_0 при дифференцировании. Для проверки соотношения (68) осталось положить $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\perp} + u_0$ на $\Xi \setminus \Theta$, сохранив $\mathbf{u} = u$ на Θ .

Во второй части леммы заметим, что в силу неравенства Фридрихса C — первое собственное число $\mu_1 > 0$ задачи Неймана для уравнения

$$-\Delta_{\xi} U(\xi) + \Psi_{\Theta}(\xi) U(\xi) = \mu U(\xi), \quad \xi \in \Xi,$$

где Ψ_{Θ} — функция множества $\Theta \subset \Xi$, т. е. $\Psi(\xi) = 1$ при $\xi \in \Theta$, но $\Psi(\xi) = 0$ при $\xi \notin \Theta$. Оценка (69) и вся лемма доказаны. $\square$

Пусть $u^{\varepsilon}(h, \cdot)$ — функция из пространства $H_0^1(\Omega(\varepsilon, h); \Gamma(\varepsilon, h))$. Далее параметры ε и h не пишем для краткости. Благодаря условиям Дирихле (7) и неравенству Фридрихса на крайних узлах, верны соотношения

$$\|u; L^2(G_{h(\pm N)}^{\varepsilon \bullet \pm})\|^2 \leq c \varepsilon h \|\nabla_x u; L^2(G_{h(\pm N)}^{\varepsilon \bullet \pm})\|^2. \quad (71)$$

Образуем ломаные $b_h^{\varepsilon}(y)$, $y \in \mathbb{K}^{\varepsilon}(h)$, начинающиеся внутри $G_{h(-N)}^{\varepsilon \bullet -}$ и заканчивающиеся внутри $G_{h(+N)}^{\varepsilon \bullet +}$, заполняющие параллелепипеды $\mathbb{K}_{(k)}^{\varepsilon \pm}(h)$ и проходящие через перемычки $\mathbb{T}_{(k)}^{\varepsilon \circ}(h)$ и $\mathbb{T}_{(k)}^{\varepsilon \bullet}(h)$ при $k = -N, \dots, N$. Кроме того, ломаные можно провести так, чтобы $b_h^{\varepsilon}(y^1) \cap b_h^{\varepsilon}(y^2) = \emptyset$ при $y^1 \neq y^2$ и объединение B_h^{ε} всех ломаных, в частности, совпало с объединением всех введенных параллелепипедов и перемычек вне малых окрестностей крайних узлов «пружины».

По лемме 8 п. 1 продолжим функцию u на множество B_h^{ε} . С этой целью соединим внутри ячейки $S^{\varepsilon}(h)$ мелкие грани параллелепипедов $\mathbb{K}^{\varepsilon+}(h)$ и $\mathbb{K}^{\varepsilon-}(h)$ изогнутым «рукавом» $\mathcal{T}^{\varepsilon}(h)$ внутри ячейки $S^{\varepsilon}(h)$ (см. рис. 4(b)) и применим упомянутую лемму, в которой $\Theta_{\varepsilon h} = \mathcal{T}^{\varepsilon}(h) \cup \mathcal{K}^{\varepsilon+}(h) \cup \mathcal{K}^{\varepsilon-}(h)$ и $\Xi_{\varepsilon h} = \mathcal{T}^{\varepsilon}(h) \cup \mathcal{K}^{\varepsilon+}(h) \cup \mathcal{K}^{\varepsilon-}(h) \cup \mathbb{T}^{\varepsilon \circ}(h)$, где $\mathcal{K}^{\varepsilon \pm}(h) \subset \mathbb{K}^{\varepsilon \pm}(h)$ — n -мерные

кубы с высотой $\rho \varepsilon h$, примыкающие к упомянутым граням, и проделаем это для всех «внутренних» узлов «пружины» (4). Обозначим через $\mathbf{u}$ полученное продолжение, которое дополнительно умножим на срезки, равные нулю на концах ломаных и единице вне малых окрестностей узлов $G_{h(\pm N)}^{\varepsilon \bullet \pm}$. Теперь оценки (68) и (71) показывают, что

$$\|\nabla_x \mathbf{u}; L^2(B_h^\varepsilon)\|^2 \leq c \|\nabla_x u; L^2(\Omega^\varepsilon(h))\|^2. \quad (72)$$

Выполнено одномерное неравенство Фридрихса

$$\int_{b_h^\varepsilon(y)} |\mathbf{u}(x)|^2 ds \leq \frac{L_h^\varepsilon(y)^2}{\pi^2} \int_{b_h^\varepsilon(y)} |\partial_s \mathbf{u}(x)|^2 ds \leq \frac{L_{max}^2}{\pi^2} \int_{b_h^\varepsilon(y)} |\nabla_x \mathbf{u}(x)|^2 ds, \quad (73)$$

где $s \in (0, L_h^\varepsilon(y))$ — длина дуги на ломаной $b_h^\varepsilon(y)$, причем $L_h^\varepsilon(y) \leq L_{max}$ равномерно относительно $y \in \mathbb{K}^\varepsilon(h)$. Наконец, проинтегрируем неравенство (73) по y и при учете формулы (72) получим оценку

$$\int_{B_h^\varepsilon} |\mathbf{u}(x)|^2 ds \leq C \int_{\Omega^\varepsilon(h)} |\nabla_x u(x)|^2 dx. \quad (74)$$

Перенесем оценку (72) с множества B_h^ε на всю «пружину» $\Omega^\varepsilon(h)$, что, как обычно (см. [21, гл. 2, § 2]), делается посредством приема из леммы 8 п. 2. Именно, разобьем $\Omega^\varepsilon(h)$ на малые области так, как сделано на рис. 4(а), штрихпунктирными линиями, т. е. разобьем цилиндры $\mathcal{Q}_{(k)}^{\varepsilon \pm}$ на фрагменты высотой $H\varepsilon h = lh/N$ и «окрестности» узлов $G_{(k)}^{\varepsilon \circ}(h)$ и $G_{(k)}^{\varepsilon \bullet \pm}(h)$, пересекающиеся с соседними параллелепипедами $\mathbb{K}_{(j)}^{\varepsilon \pm}(h)$. Отметим, что при применении неравенства (69) малый множитель $\varepsilon^2 h^2$ в левой части приходится игнорировать, так как в (74) такой множитель отсутствует.

Сформулируем полученное утверждение, использованное в лемме 1.

Теорема 3. Множитель c_0 в неравенстве

$$\|u^\varepsilon(h, \cdot); L^2(\Omega(\varepsilon, h))\|^2 \leq c_0 \|\nabla_x u^\varepsilon(h, \cdot); L^2(\Omega(\varepsilon, h))\|^2 \quad (75)$$

для функций из пространства $H_0^1(\Omega(\varepsilon, h); \Gamma(\varepsilon, h))$ не зависит от малых параметров $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $h \in (0, h_0]$ при некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $h_0 > 0$.

8. Обоснование асимптотик. К сожалению, реализованный в данной работе способ компенсации скачков экспоненциально затухающих функций типа пограничного слоя (46) не был придуман авторами при написании более ранних работ (см. [13, 15, 18] и др.), где применялась громоздкая как в асимптотических конструкциях, так и при оценивании невязок процедура «склеивания» разнотипных асимптотических разложений решений при помощи подходящих срезов. Распирение узлов $\mathbf{G}_r^b$, $b = \circ, \bullet$, укорочение перемычек $\mathcal{Q}_r^\pm(h) = \mathcal{Q}^\pm(h) \setminus \mathbf{G}_r^\circ \cup \mathbf{G}_r^\bullet$ и формирование уточненной модели для функций $w_h^\pm$ в п. 6 позволяют упростить процедуру обоснования асимптотики во всех ее аспектах. Продемонстрируем это на примере задачи (9) для вспомогательной функции $\mathcal{U}_h$, фигурирующей в анзаце (13) для решения $u^\varepsilon(h, \cdot)$ задачи (6)–(8) в тонкой изломанной области (4). Именно информация о функции $\mathcal{U}_h$ понадобится в следующем пункте для вывода асимптотики коэффициента $\mathbf{a}(h)$, а обоснование асимптотики самого решения следует обычной схеме благодаря неравенству (75), проверенному в теореме 3.

Представим упомянутое решение в виде

$$\mathcal{Y}_h(y) = \widetilde{\mathcal{Y}}_h(y) - \mathcal{T}(y) + \begin{cases} \mathbf{C}_0^b(h) + h\mathbf{C}_1^b(h)\mathbf{Z}_r^b(\xi^b), & x \in \mathbf{G}_r^b, \quad b = \circ, \bullet, \\ w_h^\pm(z^\pm) + h\mathcal{V}^\pm(\eta^\pm)\partial_{z^\pm}w_h^\pm(z^\pm) + \mathfrak{Z}_h(x), & x \in \mathcal{Q}_r^\pm(h), \end{cases} \quad (76)$$

где $\mathbf{Z}_r^b$ — функции (43), $\{w_h^\pm\}$ и $\mathbf{C}_q^b(h)$ — функции и числа, найденные из уточненной модели (см. формулы (66) и (67)), а слагаемое $\mathfrak{Z}_h$ на множестве $\mathcal{Q}_r^+(h) \cup \mathcal{Q}_r^-(h)$ — сумма членов типа пограничного слоя

$$\mathfrak{Z}_h^b(x) = \chi_b(x)h\mathbf{C}_1^b(h)\widehat{\mathbf{Z}}_r^b(\xi^b), \quad b = \circ, \bullet. \quad (77)$$

Здесь $\widehat{\mathbf{Z}}_r^\circ$ — функция (46), $\chi_\circ$ — гладкая срезка, равная единице в $(l/6)$ -окрестности точки P° и нулю вне $(l/3)$ -окрестности, а в силу периодичности такие же определения годятся для $b = \bullet$. Удобно считать, что срезки χ^b на множестве $\mathcal{Q}^\pm(h) \cap \text{supp} |\nabla_y \chi^b|$ зависят только от координаты $z^\pm$.

Согласно построениям из п. 6 и пп. 3, 4 подлежащий оцениванию остаток $\widetilde{\mathcal{Y}}_h$ непрерывно дифференцируемый на искусственно образованных сечениях цилиндров (1) в точках $z^\pm = v_h^\circ$, $z^\pm = v_h^\bullet$ и $z^- = l/2$. Кроме того, его невязка в задаче (9), (10) с правыми частями (15) появляется исключительно по причине умножения членов типа пограничного слоя (77) на срезающие функции χ^b . Итак, получаем соотношения

$$L(\nabla_y)\widetilde{\mathcal{Y}}_h(y) = -h \sum_{b=\circ, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h)[L(\nabla_y), \chi^b(y)]\widehat{\mathbf{Z}}_r^b(y), \quad y \in \mathcal{S}(h),$$

$$B(y, \nabla_y)\widetilde{\mathcal{Y}}_h(y) = -h \sum_{b=\circ, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h)[B(y, \nabla_y), \chi^b(y)]\widehat{\mathbf{Z}}_r^b(y), \quad y \in \partial\mathcal{S}(h) \setminus \overline{\gamma(h)},$$

дополненные условиями периодичности (10) и включающими коммутаторы операторов и срезок. Умножим дифференциальное уравнение на $\widetilde{\mathcal{Y}}_h$ и проинтегрируем по частям на ячейке $\mathcal{S}(h)$ при учете краевого условия и условий квазипериодичности. В результате приходим к равенству

$$\begin{aligned} (A\nabla_y\widetilde{\mathcal{Y}}_h, \nabla_y\widetilde{\mathcal{Y}}_h)_{\mathcal{S}(h)} \\ = -h \sum_{b=\circ, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h)((\widehat{\mathbf{Z}}_r^b A\nabla_y\chi^b, \nabla_y\widetilde{\mathcal{Y}}_h)_{\mathcal{S}(h)} - (A\nabla_y\widehat{\mathbf{Z}}_r^b, \widetilde{\mathcal{Y}}_h \nabla_y\chi^b)_{\mathcal{S}(h)}). \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства оценивается снизу величиной $c_A \|\nabla_y\widetilde{\mathcal{Y}}_h; L^2(\mathcal{S}(h))\|^2$ с множителем $c_A > 0$. Поскольку экспоненциально затухающие остатки $\widehat{\mathbf{Z}}_r^b$ и $\widetilde{\mathbf{Z}}_1^b$ в разложениях (43) и (38) совпадают, из леммы 6 вытекают следующие оценки для первых слагаемых I_1^{hb} в правой части:

$$|I_q^{hb}| \leq c_q^b h^{(n+1)/2} e^{-\sigma/h} \|\nabla_y\widetilde{\mathcal{Y}}_h; L^2(\mathcal{S}(h))\|. \quad (78)$$

Здесь $q = 1$ и c_q^b , $\sigma > 0$ — числа, не зависящие от параметра $h \in (0, h_0]$ при некотором $h_0 > 0$. Оценка второго слагаемого чуть сложнее. Благодаря определению срезок вторые слагаемые I_2^{hb} принимают вид

$$I_2^{hb} = \mathbf{C}_1^b(h) \sum_{\pm} \int_{\mathcal{Q}^\pm(h) \cap \text{supp} |\nabla_y \chi^b|} \mathcal{Y}_h(x) \partial_{z^\pm} \chi^b(z^\pm) (e_n^\pm)^\top \mathbf{A}_{\square}^\pm \nabla_{\xi^{b\pm}} \widehat{\mathbf{Z}}_r^b(\xi^{b\pm}) dx. \quad (79)$$

Теперь соотношение (42) позволяет в подынтегральном выражении из (79) сделать замену $\mathcal{Y}_h \mapsto \mathcal{Y}_h^\perp = \mathcal{Y}_h - \mathcal{Y}_h^0$, где $\mathcal{Y}_h^0$ — среднее функции $\mathcal{Y}_h$ на сечении $\omega_h^\pm$, а затем применить неравенство Пуанкаре

$$\frac{1}{h^2} \int_{\omega_h^\pm} |\mathcal{Y}_h^\perp(x^\pm)|^2 dy^\pm \leq c_\omega^\pm \int_{\omega_h^\pm} |\nabla_{y^\pm} \mathcal{Y}_h^\perp(x^\pm)|^2 dy^\pm = c_\omega^\pm \int_{\omega_h^\pm} |\nabla_{y^\pm} \mathcal{Y}_h(x^\pm)|^2 dy^\pm.$$

В итоге получаем оценку (78) с $q = 2$, а также следующее утверждение.

Теорема 4. Для остатка $\widetilde{\mathcal{Y}}_h$ в асимптотическом представлении (76) решения $\mathcal{Y}_h$ задачи (9), (10) с правыми частями (15) верна оценка

$$\|\nabla_y \widetilde{\mathcal{Y}}_h; L^2(\mathcal{S}(h))\| \leq Ch^{(n+1)/2} e^{-\sigma/h}, \quad (80)$$

в которой множитель C и показатель $\sigma > 0$ не зависят от малого параметра $h \in (0, h_{\mathcal{Y}}]$ с некоторым $h_{\mathcal{Y}} > 0$.

9. Асимптотика коэффициента осредненного оператора. Воспользуемся выражением (14), линейно зависящим от решения $\mathcal{Y}_h$, и представлением (76) последнего. В силу соотношений (80) и (32) вклады асимптотического остатка $\widetilde{\mathcal{Y}}_h$ и кусочно-постоянного слагаемого (18) равны $O(h^n e^{-\sigma/h})$ и $-A_{11}|\mathcal{S}(h)|$ соответственно. Сравнивая формулы (77), (76) и (46), (43), обнаруживаем в (14) следующие слагаемые, которые обрабатываем при помощи леммы 7 и замечания 3:

$$\begin{aligned} h \sum_{b=o, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h) \langle e_{(1)}^\top A \nabla_y \widehat{\mathbf{Z}}_r^b \rangle_{\mathcal{S}(h)} &= h^n \sum_{b=o, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h) \int_{\Pi_b} e_{(1)}^\top A \nabla_{\xi^b} \widehat{\mathbf{Z}}_r^b(\xi^b) d\xi^b + O(h^n e^{-\frac{\sigma}{h}}) \\ &= h^n \sum_{b=o, \bullet} \mathbf{C}_1^b(h) \mathbf{M}_r^b + O(h^n e^{-\frac{\sigma}{h}}) = 2h^n \mathbf{C}_1^o(h) \left(\mu - \frac{r}{l} \right) + O(h^n e^{-\frac{\sigma}{h}}). \end{aligned}$$

Бесконечно малая $O(h^n e^{-\frac{\sigma}{h}})$ появилась из-за экспоненциального затухания остатков $\widehat{\mathbf{Z}}_r^b$ в разложениях типа (43).

Осталось вычислить слагаемые на «укороченных» стержнях $\mathcal{Q}_r^\pm(h)$ объемом $h^{n-1}|\omega^\pm|(l - 2hr)$ в соответствии с определениями (1) и (57). При учете формул (21), (76) и (49), (66) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\pm} \langle e_{(1)}^\top A \nabla_y (w_h^\pm + h\mathcal{V}^\pm \partial_{z^\pm} w_h^\pm) \rangle_{\mathcal{Q}_r^\pm(h)} \\ = \frac{1}{2l} \sum_{\pm} \pm \left\langle \mathbf{e}_n^{\pm\top} (\mathbf{e}_n^\pm - (\det \mathbf{A}^\pm)^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} \det \mathbf{A}_{(k)}^\pm \mathbf{e}_k^\pm) \partial_{z^\pm} w_h^\pm \right\rangle_{\omega_h^\pm \times \Upsilon_r^h} \\ = h^n \mathbf{C}_1^o(h) \left(1 - 2\frac{r}{l} \right). \end{aligned}$$

Подведем итог вычислениям.

Теорема 5. Существуют такие положительные h_a , C_a и σ_a , что при любом $h \in (0, h_a]$ для коэффициента $\mathbf{a}$ осредненного дифференциального оператора $\mathcal{L}(h, \partial/\partial x_1)$ верна асимптотическая формула

$$\left| \mathbf{a}(h) - \frac{h^n(2\mu + 1)l\mathbf{a}_0}{l - 2h(r - l\mathbf{a}_0(\mathbf{m}_r^\bullet + \mathbf{m}_r^\bullet))} \right| \leq c_a e^{-\frac{\sigma_a}{h}}. \quad (81)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Согласно формуле (67) знаменатель дроби в (81) равен $l + 2h(m^\circ + m^\bullet)$ и, разумеется, не зависит от выбора параметра r , однако положительность коэффициентов поляризации нужна для корректной постановки уточненной одномерной модели сочленения (см. теорему 2), которая и позволила вычислить коэффициент $\alpha(h)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
2. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.
3. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. А. Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.
4. Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: Изд-во МГУ, 1990.
5. Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А. Усреднение дифференциальных операторов. М.: Наука, 1993.
6. Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С. Усреднение. Методы и приложения. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007.
7. Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задачи Штурма — Лиувилля с быстроосциллирующими коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1985. Т. 6. С. 37–46.
8. Panasenکو G. P. Asymptotic analysis of bar systems. I // Russ. J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 3. P. 325–352; II. Russ. J. Math. Phys. 1996. V. 4, N 1. P. 87–116.
9. Назаров С. А. Асимптотика решения задачи Дирихле для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами в прямоугольнике // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 692–722.
10. Назаров С. А., Козлов В. А. Одномерная модель течения в сочленении тонких каналов в том числе артериальных деревьев // Мат. сб. 2017. Т. 208, № 8. С. 56–105. Исправление: Мат. сб. 2018. Т. 209, № 6. С. 146.
11. Cioranescu D., Saint Jean Paulin J. Homogenization of reticulated structures. Berlin e.a.: Springer, 1999.
12. Жиков В. В. Усреднение задач теории упругости на сингулярных структурах // Изв. РАН. Сер. мат. 2002. Т. 66, № 2. С. 81–148.
13. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Произвольные плоские системы анизотропных балок // Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 234–261.
14. Жиков В. В., Пастухова С. Е. Усреднение задач теории упругости на периодических сетках критической толщины // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 5. С. 61–96.
15. Назаров С. А., Слуцкий А. С. Асимптотический анализ произвольной пространственной системы тонких стержней // Тр. Санкт-Петербургского мат. о-ва. 2004. Т. 10. С. 63–117.
16. Panasenکو G., Pileckas K. Asymptotic analysis of the nonsteady viscous flow with a given flow rate in a thin pipe // Appl. Anal. 2012. V. 91, N 3. P. 559–574.
17. Panasenکو G., Pileckas K. Asymptotic analysis of the non-steady Navier–Stokes equations in a tube structure. I. The case without boundary-layer-in-time // Nonlinear Anal. 2015. V. 122. P. 125–168.
18. Назаров С. А. Об одномерных асимптотических моделях тонких решеток Неймана // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 362–382.
19. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1968.
20. Назаров С. А. Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов // Успехи мат. наук. 1999. Т. 54, № 5. С. 77–142.
21. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Научная книга, 2001.
22. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками // Math. Nachr. 1977. V. 76. P. 29–60.
23. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1967. Т. 16. С. 209–298.
24. Назаров С. А., Пламеневский Б. А. Эллиптические задачи в областях с кусочно-гладкой границей. М.: Наука, 1991.

- 25. Ван-Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967.
- 26. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
- 27. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991. V. 2.

Поступила в редакцию 24 августа 2023 г.

После доработки 24 августа 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264),
Слуцкий Андрей Семенович (ORCID 0000-0003-3233-7567)
Институт проблем машиноведения РАН,
лаборатория «Математические методы механики материалов»,
ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178
nsa@ipme.ru, srgnazarov@yahoo.co.uk; sas@ipme.ru

СЕМЕЙСТВО С ЕДИНСТВЕННОЙ
МИНИМАЛЬНОЙ,
НО НЕ НАИМЕНЬШЕЙ НУМЕРАЦИЕЙ
М. Х. Файзрахманов

Аннотация. Доказывается существование семейства вычислимо перечислимых множеств, обладающего единственной с точностью до эквивалентности вычислимой минимальной, но не наименьшей нумерацией.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.212

Ключевые слова: минимальная нумерация, вычисляемая нумерация, вычислимое семейство, дискретное семейство.

1. Введение

Одной из основных проблем теории нумераций является алгебраическая классификация полурешеток вычислимых нумераций семейств вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. С ней тесно связана ставшая классической и до сих пор открытая проблема Ю. Л. Ершова о возможном (с точностью до эквивалентности) числе минимальных вычислимых нумераций семейств в.п. множеств, сформулированная им в конце 60-х годов прошлого столетия (см. [1, 2]). С момента ее формулировки и по настоящее время она интенсивно исследуется многими авторами. Это привело в том числе и к результатам, имеющим самостоятельный для теории нумераций интерес (см. [3–7]) и приложения в других разделах математической логики (см. [8, 9]).

Для семейств (графиков) вычислимых функций эта проблема была решена С. С. Марченковым.

Теорема 1 [3]. *Вычислимое семейство всюду определенных функций обладает либо наименьшей, либо бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций.*

Обе альтернативы в формулировке этой теоремы реализуемы. Так, любое конечное семейство в.п. множеств обладает наименьшей вычислимой нумерацией [10] (поэтому проблема о числе минимальных вычислимых нумераций исследуется только для бесконечных семейств). Семейства всюду определенных функций, обладающие бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций, были найдены Ю. Л. Ершовым.

Работа поддержана грантом Российского научного фонда (проект № 23-21-00181) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

Теорема 2 [11]. Семейство всех примитивно рекурсивных функций обладает бесконечным числом минимальных вычислимых нумераций.

Важные классы минимальных нумераций образуют однозначные и позитивные нумерации. Для них проблема Ершова была решена С. С. Гончаровым, что также привело к многочисленным важным следствиям в теории вычислимых моделей (см., например, [8, 9, 12]).

Теорема 3 [4, 5]. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует семейство в.п. множеств, имеющее точно n однозначных (позитивных) вычислимых нумераций.

Для $n = 1$ им было доказано, что единственная однозначная (позитивная) вычислимая нумерация может не быть наименьшей [6, 7].

Продвижение в решении проблемы в общей постановке получили в своих работах С. А. Бадаев [13, 14], В. В. Вьюгин [15], С. С. Гончаров, А. Яхнис, В. Яхнис [16] и др. В процитированных работах [13, 15] среди прочего были построены вычислимые семейства, не обладающие минимальными вычислимыми нумерациями.

Проблема Ершова также исследовалась и для обобщенно вычислимых семейств [17] как относительно классической [18–22] так и более общих позитивных сводимостей [23, 24]. Так, в совместной работе С. А. Бадаева и С. С. Гончарова [18] было доказано, что любое бесконечное Σ_n^0 -вычислимое семейство ($n > 1$) обладает бесконечным числом минимальных Σ_n^0 -вычислимых нумераций. В [20–22] было установлено, что это также верно для всех A -вычислимых семейств, где тьюрингова степень оракула A является высокой или ограничивает ненулевую в.п. степень.

В XXI веке наиболее близко к решению этой проблемы подошли С. А. Бадаев и Лемпп. Из основного результата их совместной работы [19] следует существование Σ_2^{-1} -вычислимого семейства, обладающего ровно двумя минимальными Σ_2^{-1} -вычислимыми нумерациями.

Теорема 4 [19]. Существует семейство 2-в.п. множеств $\mathcal{F}$, обладающее двумя однозначными Σ_2^{-1} -вычислимыми нумерациями μ и ν такими, что для любой Σ_2^{-1} -вычислимой нумерации π семейства $\mathcal{F}$ либо $\mu \leq \pi$, либо $\pi \leq \nu$.

В настоящей работе эти исследования продолжают и решается вопрос, сформулированный С. С. Гончаровым в середине 80-х годов прошлого столетия: будет ли единственная минимальная вычислимая нумерация наименьшей? Основным результатом, теорема 5, позволяет получить отрицательный ответ на этот вопрос.

Теорема 5. Существует дискретное семейство $\mathcal{A}$, обладающее минимальной вычислимой нумерацией μ такой, что $\mu \leq \alpha$ для любой минимальной вычислимой нумерации $\alpha \in H(\mathcal{A})$ и $\mu \not\leq \beta$ для некоторой вычислимой нумерации $\beta \in H(\mathcal{A})$.

Отметим, что полурешетку вычислимых нумераций такого семейства $\mathcal{A}$ можно рассматривать как пример степенной структуры, обладающей нетривиальным определенным синглетоном.

2. Предварительные сведения

В обозначениях и терминологии будем придерживаться монографий [10] (и статьи [25]) и [26, 27]. Для не более чем счетного непустого множества S любое сюръективное отображение $\alpha : \mathbb{N} \rightarrow S$ называется его *нумерацией*. Множество

всех нумераций S будем обозначать через $H(S)$. Если $\alpha, \beta \in H(S)$, то будем говорить, что α *сводится* к β (в этом случае используется обозначение $\alpha \leq \beta$), если существует такая вычислимая функция f , что $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех x . Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются *эквивалентными* (в этом случае используется запись $\alpha \equiv \beta$). Назовем нумерацию α *позитивной*, если ее нумерационная эквивалентность

$$\eta_\alpha = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \alpha(x) = \alpha(y)\}$$

в.п., и *однозначной*, если она совпадает с отношением равенства. Нумерация μ множества S называется *минимальной*, если $\mu \leq \alpha$ для любой нумерации $\alpha \leq \mu$ множества S .

Нумерация α семейства в.п. множеств $\mathcal{A}$ называется *вычислимой*, если множество пар $G_\alpha = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y \in \alpha(x)\}$ в.п. Семейства, обладающие вычислимыми нумерациями, будем также называть *вычислимыми*.

Через φ_e и W_e будем обозначать соответственно ч.в. функцию и в.п. множество с геделевским номером e . Для каждого e обозначим через α_e вычислимую нумерацию, для которой

$$G_{\alpha_e} = W_e.$$

Зафиксируем тройную сильно вычислимую последовательность конечных множеств $\{\alpha_{e,s}(x)\}_{e,s,x \in \mathbb{N}}$ такую, что для всех e, s, x выполняются условия

- $\alpha_{e,s}(x) \subseteq \alpha_{e,s+1}(x)$;
- $\alpha_{e,s}(x) = \emptyset$, если $e > s$;
- $\alpha_e(x) = \bigcup_t \alpha_{e,t}(x)$.

Для частичной функции ψ ее область определения обозначается через $\text{dom } \psi$. Используем запись $\psi(x) \downarrow$, если $x \in \text{dom } \psi$, и $\psi(x) \uparrow$ в противном случае. Область значений ψ будем обозначать через $\text{ran } \psi$. Через $c(x, y)$ обозначим вычислимую биекцию $\langle x, y \rangle \mapsto 2^x(2y + 1) - 1$ из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ на $\mathbb{N}$.

Для двух строк $\sigma, \tau \in 2^{<\mathbb{N}}$ используем запись $\sigma \preceq \tau$, если σ является началом τ , и $\sigma \prec \tau$, если $\sigma \preceq \tau$ и $\sigma \neq \tau$. Если существует i , меньшее длины каждой из строк σ и τ , для которого $\sigma(i) = 0$ и $\tau(i) = 1$, а также $\sigma(j) = \tau(j)$ для всех $j < i$, то будем использовать запись $\sigma <_L \tau$. Длину строки σ обозначим через $\text{lh}(\sigma)$.

3. Доказательство теоремы 5

Для доказательства теоремы достаточно определить дискретное семейство в.п. множеств $\mathcal{A}$, построив его вычислимые нумерации μ и β , удовлетворяющие для всех $n \in \mathbb{N}$ требованиям

- R_n : $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$ минимальна $\Rightarrow \mu \leq \alpha_n$,
- M_n : φ_n всюду определена & $(\mu \circ \varphi_n) \in H(\mathcal{A}) \Rightarrow \mu \leq (\mu \circ \varphi_n)$,
- P_n : φ_n всюду определена $\Rightarrow \mu \neq (\beta \circ \varphi_n)$.

Чтобы выполнить требование P_n , зафиксируем числа w_0, a_0 и определим

$$\mu(w_0) = \beta(w_0) = \{a_0\}.$$

Если на некотором шаге построения будет иметь место $\varphi_n(w_0) = w_0$, то определим

$$\begin{aligned} \mu(w_0) &= \{a_0 < a_1 < a_2\}, & \mu(w) &= \{a_0 < a'_1 < a'_2\}, \\ \beta(w_0) &= \{a_0 < a'_1 < a'_2\}, & \beta(w) &= \{a_0 < a_1 < a_2\} \end{aligned}$$

для новых попарно различных чисел a_1, a_2, a'_1, a'_2 и w .

Для выполнения требования M_n в построении нумерации μ обеспечим, чтобы для каждого x можно было эффективно указать такое z , что $\mu(x) = \mu(\varphi_n(z))$ при условии, что $\mu(\varphi_n(\mathbb{N})) = \mathcal{A}$.

Для выполнения требования R_n в построении будем определять вычислимые функции $g_n(x)$, $f_n(x)$ и $d(n, s)$ такие, что существует предел $\lim_s d(n, s)$ и если $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$, то

- $\alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \mathcal{A}$;
- $\alpha_n \neq \alpha_n \circ g_n \circ \varphi_i$ для всех $i < \lim_s d(n, s)$; в частности, если $\lim_s d(n, s) = \infty$, то $\alpha_n \not\leq \alpha \circ g_n$ и, стало быть, α_n не минимальна;
- $\mu = \alpha_n \circ f_n$, если α_n минимальна.

Основное препятствие для выполнения этого требования будет заключаться в том, что на некотором шаге s построения может иметь место

$$\mu(w_0) = \{a_0 < a_1 < a_2\} \neq \alpha_n(f_n(w_0)).$$

В этом случае зафиксируем $i = d(n, s)$ и положим $d(n, s+1) = d(n, s) + 1$. Будем добиваться выполнения условий $\alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \mathcal{A}$ и $\alpha_n \neq \alpha_n \circ g_n \circ \varphi_i$. Для этого выберем число r_n такое, что

$$\alpha_n(r_n) \notin \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$$

и $\alpha_n(r_n) = \mu(w_0)$ на одном из последующих шагов (существование такого числа r_n будет обеспечено в построении), а также новые номера x_n, x'_0 , на которых определим

$$\mu(x_n) = \{b_0^n < b_1^n\}, \quad \mu(x'_0) = \{b_0 < b_1\}$$

для новых попарно различных чисел b_0^n, b_1^n, b_0, b_1 . Затем выберем y^n , для которого на одном из последующих шагов будет выполняться

$$\alpha_n(y^n) = \mu(x_n),$$

и определим $g_n(w) = y_n$ для первого числа w , на котором значение $g_n(w)$ на предыдущем шаге не определено. После этого начинаем последовательное добавление элементов в множества $\mu(x'_0)$, $\mu(x_n)$ и $\mu(w_0)$, ожидая перед добавлением каждого следующего элемента выполнения на некотором шаге равенств

$$\alpha_n(y^n) = \mu(x_n), \quad \alpha_n(r_n) = \mu(w_0).$$

Организуем этот процесс таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x'_0)$, $\mu(x_n)$ и $\mu(w_0)$ были попарно несравнимы по включению, но наибольшее число k , для которого

$$\mu(x'_0) \upharpoonright k = \mu(x_n) \upharpoonright k = \mu(w_0) \upharpoonright k,$$

в рамках работы процесса возрастало. Если на одном из последующих шагов t будет иметь место $\varphi_{i,t}(r_n) \downarrow \in \text{dom } g_n$, то перестаем добавлять элементы в $\mu(w_0)$, но продолжаем их добавлять в $\mu(x'_0)$ и $\mu(x_n)$ таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x'_0)$ и $\mu(x_n)$ были попарно несравнимы по включению, но наибольшее число k , для которого

$$\mu(x'_0) \upharpoonright k = \mu(x_n) \upharpoonright k,$$

в рамках работы процесса возрастало. Поскольку на шаге t выполняется

$$\alpha_n(r_n) \notin \alpha_n(g_n(\mathbb{N})) \& \varphi_i(r_n) \downarrow \in \text{dom } g_n,$$

получим, что

$$\alpha_n(r_n) \neq \alpha(g_n(\varphi_i(r_n))).$$

Стало быть, нумерация α_n не сводится к нумерации $\alpha_n \circ g_n$ посредством φ_i . Затем полагаем $g_n(w) = r_n$ для наименьшего w , на котором значение $g(w)$ на шаге t не определено. Если же $\varphi_{i,t}(r_n) \uparrow$ на всех шагах t , то тривиальным образом α_n не сводится к нумерации $\alpha_n \circ g_n$ посредством φ_i . При этом в конечном итоге будут иметь место равенства

$$\mu(x'_0) = \mu(x_n) = \mu(w_0).$$

Стало быть, $\mu(w_0) = \mu(x_n) = \alpha_n(y^n) \in \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$.

В процессе построения обеспечим, чтобы нумерация μ удовлетворяла следующему условию:

$$\forall X \in \mathcal{A} [\mu^{-1}(X) \text{ конечно}]. \quad (1)$$

На каждом шаге построения, как это часто делается в подобного рода конструкциях (см., например, [26, гл. VII, теорема 3.1]), также будут определяться вспомогательные двухместные вычислимые функции длины l и m . Для произвольных n и s значение $l(n, s)$ будем полагать равным такому наибольшему $r \leq s$, что

$$\forall x \leq r \exists y \leq s [\mu_s(y) \neq \emptyset \ \& \ \alpha_{n,s}(x) \upharpoonright r = \mu_s(y) \upharpoonright r],$$

$$\forall y \leq r \exists x \leq s [\mu_s(y) \upharpoonright r = \alpha_{n,s}(x) \upharpoonright r].$$

Если $\mathcal{A}$ — дискретное семейство и μ — его вычислимая нумерация, удовлетворяющая (1), то для каждого n имеет место

$$\limsup_s l(n, s) = \infty \Rightarrow \alpha_n(\mathbb{N}) \subseteq \mu(\mathbb{N}) \text{ в силу (1) и } \mu(\mathbb{N}) \subseteq \alpha_n(\mathbb{N}) \text{ в силу}$$

$$\text{дискретности } \mathcal{A} \Rightarrow \alpha_n(\mathbb{N}) = \mathcal{A} \Rightarrow \lim_s l(n, s) = \infty.$$

Значение $m(n, s)$ будем полагать равным такому наибольшему $r \leq s$, что

$$\forall x \leq r \exists y \leq s [\varphi_{n,s}(x) \downarrow \ \& \ \varphi_{n,s}(y) \downarrow \ \& \ \mu_s(x) \upharpoonright r = \mu_s(\varphi_n(y)) \upharpoonright r].$$

Если $\mathcal{A}$ — дискретное семейство и μ — его вычислимая нумерация, то для всех n имеет место

$$\limsup_s m(n, s) = \infty \Rightarrow (\varphi_n \text{ тотальна} \ \& \ \mathcal{A} = \mu(\varphi_n(\mathbb{N}))) \Rightarrow \lim_s m(n, s) = \infty.$$

Далее, для каждой строки $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ определим понятие σ -шага. Как это свойственно для $\mathbf{0}''$ -приоритетных построений все требования для семейства $\mathcal{A}$ и его нумерации μ будут удовлетворяться на таких σ -шагах, что σ является наименьшей относительно лексикографического порядка строкой среди всех строк длины $\text{lh}(\sigma)$, для которой множество σ -шагов бесконечно. Кроме того, если этим свойством обладает другая строка τ , $\text{lh}(\tau) > \text{lh}(\sigma)$, то по нижеприведенному определению будем иметь, что $\sigma \prec \tau$. Все вместе строки с таким свойством $\sigma_0 \prec \sigma_1 \prec \sigma_2 \prec \dots$ в пределе образуют элемент $T \in 2^{\mathbb{N}}$, который принято называть *истинным путем* построения (см. [26, гл. XIV, § 2]) и построение «вдоль» которого обеспечивает удовлетворение всех требований для $\mathcal{A}$ и μ . Множество всех σ -шагов будем обозначать через S_σ . Для пустой строки λ любое число $s \in \mathbb{N}$ будем называть λ -шагом. Предположим по индукции, что для строки σ

понятие σ -шага определено. Пусть $\text{lh}(\sigma) = 2n$ ($\text{lh}(\sigma) = 2n + 1$). Тогда σ -шаг s будем называть $\sigma 0$ -шагом, если выполняется

$$\forall t < s [t \in S_\sigma \Rightarrow l(n, s) > l(n, t) \ (m(n, s) > m(n, t))],$$

и $\sigma 1$ -шагом в противном случае.

Одновременно с построением нумераций μ и β для каждого n будем строить частично вычислимые функции f_n и g_n такие, что

- (а) если нумерация $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$ минимальна, то для всех (за исключением конечного числа) x имеет место $f_n(x) \downarrow$ и $\mu(x) = \alpha_n(f(x))$;
- (б) если $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$, то g_n всюду определена и семейство $\mathcal{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечно.

Также для каждой строки σ длины $2n + 2$ будем строить двухместную частично вычислимую функцию d_σ , с помощью которой будем контролировать минимальность нумераций α_e , $e \leq n$ (подобно тому, как это делалось в неформальном описании конструкции с помощью функции d). Дополнительно в построении обеспечим, что для любых различных $X, Y \in \mathcal{A}$ выполняется $|X \setminus Y| \geq 2$.

В начале построения положим $\mu_0(x) = \beta_0(x) = \emptyset$ для всех $x \in \mathbb{N}$, функции $f_{n,0}$, $g_{n,0}$ нигде не определенными и $d_\sigma(n, 0) = 0$ для всех $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ и $n \in \mathbb{N}$. На каждом шаге $s + 1$ построения для всех $x, n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}$ если не указано иное, то будем считать, что $\mu_{s+1}(x) = \mu_s(x)$, $\beta_{s+1}(x) = \beta_s(x)$, $f_{n,s+1}(x) = f_{n,s}(x)$, $g_{n,s+1}(x) = g_{n,s}(x)$ и $d_\sigma(n, s + 1) = d_\sigma(n, s)$.

Также на каждом шаге s для всех x будем считать, что значение $\beta_s(x)$ определяется равным $\mu_s(x)$, если явно не указано иное определение $\beta_s(x)$. Кроме того, в построении обеспечим, что $\mu_s(x) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\beta_s(x) \neq \emptyset$.

Построение осуществляется одновременным выполнением процедур $P(\sigma)$ для всех непустых строк σ четной длины. Каждая процедура $P(\sigma)$, $\text{lh}(\sigma) = 2n + 2$, нацелена на удовлетворение требований R_e , M_e , $e \leq n$, и P_n , если σ будет являться начальным сегментом истинного пути. Не оговаривая это в дальнейшем, будем считать, что все определяемые в ней числа, принадлежащие элементам семейства $\mathcal{A}$, будут иметь вид $c(x, \sigma)$, где $x \in \mathbb{N}$ и σ отождествляется с числом, двоичным представлением которого она является. В каждой процедуре $P(\sigma)$ будут определяться значения $\mu(x)$, где x принадлежит некоторому множеству N_σ . Для различных строк σ и τ множества N_σ и N_τ имеют пустое пересечение. Кроме того, $\bigcup_{\sigma \in 2^{<\mathbb{N}}} N_\sigma = \mathbb{N}$. Таким образом, фрагменты построения, осуществляемые разными процедурами $P(\sigma)$, не будут нарушать друг друга, а в процессе их одновременной работы будет построена искомая нумерация μ .

ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ $P(\sigma)$, $\text{lh}(\sigma) = 2n + 2$. Работа процедуры происходит пошагово на всех шагах

$$s = c(0, \sigma), c(1, \sigma), c(2, \sigma), \dots$$

Пусть $c(u, \sigma)$ — последний шаг, на котором работа процедуры $P(\sigma)$ была прервана, и $u = 0$, если она запускается впервые. Для каждого шага

$$s = c(u + 1, \sigma), c(u + 2, \sigma), \dots$$

проверяем, существует ли σ -шаг t такой, что $c(u, \sigma) < t \leq s$ (т. е. ждем появления первого не превышающего s σ -шага, большего $c(u, \sigma)$) и обозначим первый

такой шаг s через v , если он существует (в противном случае в процедуре не совершается никаких действий, пока она не будет прервана). Затем выберем *новое* (большее всех ранее использованных в построении и принадлежащих $\bigcup_{e,x} \alpha_{e,v}(x)$ чисел) число a_0 и определим

$$\mu_{v+1}(w_0) = \beta_{v+1}(w_0) = \{a_0\},$$

где w_0 — такой наименьший номер, что множество $\mu(w_0)$ (и тем самым $\beta(w_0)$) пусто на шаге v . Пусть

$$R = \{e \leq n : \sigma(2e) = 0\}, \quad M = \{e \leq n : \sigma(2e + 1) = 0\}.$$

Чтобы обеспечить минимальность μ , для каждого $e \in M$, $e > 0$, ждем появления шага, на котором существует такое z , что

$$\varphi_{e-1}(z) = w_0. \quad (2)$$

Затем для каждого $e \in R$ ждем появления шага, на котором для некоторого u_e имеет место

$$\alpha_e(u_e) = \{a_0\},$$

и, если такой шаг существует, определим

$$f_e(w_0) = g_e(w) = u_e,$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено. Для каждого $e \leq n$ выберем новые числа $b_0^e < b_1^e$ и определим

$$\mu(x_e) = \{b_0^e, b_1^e\},$$

где x_0 — первый номер, на котором значение $\mu(x_0)$ на предыдущем шаге не определено, и $x_e = x_0 + e$ для всех $e \leq n$. Далее, выберем наименьшее x'_0 , на котором значение $\mu(x'_0)$ не определено, новые числа $b_0 < b_1$ и определим

$$\mu(x'_0) = \{b_0, b_1\}.$$

После этого для каждого $e \leq n$ начинаем одновременное выполнение *процессов* 1 и 2. Опишем их работу для произвольно выбранного $e \leq n$.

ПРОЦЕСС 1. Если $e > 0$, то чтобы обеспечить минимальность μ ждем появления шага, на котором существуют числа $z_{e-1}^{e-1}, \dots, z_n^{e-1}$ такие, что

$$(e-1) \in M \Rightarrow \varphi_{e-1}(z_{e-1}^{e-1}) \in \{x'_0, x_0, \dots, x_{e-1}\} \& \varphi_{e-1}(z_i^{e-1}) = x_i \quad (3)$$

для всех $i = e, \dots, n$. Далее, если $e = 0$ или желаемые числа $z_{e-1}^{e-1}, \dots, z_n^{e-1}$ найдены, то ждем появления некоторого шага и таких чисел $y_e^e, \dots, y_n^e$, что на этом шаге имеет место

$$e \in R \Rightarrow \alpha_e(y_i^e) = \{b_0^i, b_1^i\} = \mu(x_i)$$

для всех $i = e, \dots, n$. Если $e \in R$ и желаемые числа $y_e^e, \dots, y_n^e$ также найдены, то для тех же $i = e, \dots, n$ и всех $j < e$ полагаем

$$f_e(x_i) = y_i^e, \quad f_e(x_j) = y_e^e, \quad g_e(w'_i) = y_i^e,$$

где w'_0 — наименьшее число, на котором значение $g_e(w'_0)$ на предыдущем шаге не определено, и $w'_i = w'_0 + i$. Определим также

$$f_e(x'_0) = y_e^e.$$

Затем ожидаем появления шага s , множеств B_0 , B и попарно различных чисел $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$, для которых на шаге s выполняются условия

$$\mu(x'_0) = B_0 \cup \{p_0, p_1\}, \quad \mu(x_e) = B \cup \{q_0, q_1\}, \quad (4)$$

$$\forall k \leq e [k \in R \Rightarrow \alpha_k(y_e^k) = \mu(x_e)], \quad (5)$$

$$\forall b \in B_0 [b < p_0] \& \forall b \in B [b < q_0], \quad (6)$$

а затем для новых чисел $c_0 > p_1$ и $c_1 > q_1$ определим

$$\mu_{s+1}(x'_0) = \mu_s(x'_0) \cup \{\min(\mu_s(x_e) \setminus \mu_s(x'_0))\} \cup \{c_0\}, \quad (7)$$

$$\mu_{s+1}(x_e) = \mu_s(x_e) \cup \{\min(\mu_s(x'_0) \setminus \mu_s(x_e))\} \cup \{c_1\}. \quad (8)$$

Для выбранного e продолжаем поиск новых шага s , множеств B_0 , B и попарно различных чисел $p_0 < p_1$, $q_0 < q_1$, удовлетворяющих условиям (4)–(6), и в случае их появления выполняем действия (7), (8) для новых чисел $c_0 > p_1$ и $c_1 > q_1$. Заметим, что непрерывное выполнение этих циклических действий приводит к равенству $\mu(x_e) = \mu(x'_0)$. Этим описание работы процесса 1 завершается.

Если в процессе работы процедуры встретится τ -шаг $t > 0$, для которого $\tau <_L \sigma$, то *инициализируем* ее, выполняя следующие действия:

1) прерываем ее работу;

2) для каждого x , использованного в качестве аргумента μ в процессе работы процедуры, определяем значение $\mu_t(x)$ равным объединению всех значений $\mu_{t-1}(y)$, где y также использовалось в качестве аргумента μ в процессе ее работы; если в процедуре было определено значение a_0 , то для каждого $e \leq n$ после появления шага, на котором $a_0 \in \alpha_e(z)$ для некоторого z , определим $f_e(x) = z$, если на предыдущем шаге значение $f_e(x)$ не определено, и $g_e(w) = z$, где w — наименьшее число, на котором значение g_e на предыдущем шаге не определено;

3) для всех e полагаем

$$d_\sigma(e, t) = \max(\{d_\rho(e, t-1) : \rho <_L \sigma \& \text{lh}(\rho) = \text{lh}(\sigma)\} \cup \{d_\rho(e, t) : \rho \prec \sigma\}).$$

Этим описание инициализации завершается.

Далее, если на некотором шаге будет иметь место

$$\varphi_n(w_0) = w_0, \quad (9)$$

то инициализируем процедуры $P(\tau)$ для всех таких строк τ четной длины, что либо $\sigma \prec \tau$, либо $\sigma <_L \tau$, и полагаем

$$\mu(w_0) = \{a_0 < a_1 < a_2\}, \quad \mu(w) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\}, \quad (10)$$

$$\beta(w_0) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\}, \quad \beta(w) = \{a_0 < a_1 < a_2\} \quad (11)$$

для новых попарно различных чисел a_1, a_2, a'_1, a'_2 и первого w , для которого значение $\mu(w)$ на предыдущем шаге не определено. Выполнение в построении этих действий обеспечит справедливость неравенства $\mu \neq (\beta \circ \varphi_n)$. Для каждого $e \in R$ если на некотором шаге (любой из процедур) появится такое x , что

$$\alpha_e(x) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\},$$

то полагаем

$$f_e(w) = x, \quad g_e(w') = x, \quad (12)$$

где w' — наименьшее число, на котором значение g_e не определено на предыдущем шаге.

ПРОЦЕСС 2. Действия процесса направлены на выполнение условия

$$\exists r_e [\alpha_e(r_e) \in \alpha_e(g_e(\mathbb{N})) \& \alpha_e(r_e) \neq \alpha_e(g_e(\varphi_{d_\sigma(e,v)}(r_e)))],$$

если $e \in R$ является наименьшим элементом R таким, что $\alpha_e(u_e) \neq \mu(w_0)$ и выполняется (14), которое, в свою очередь, нацелено на то, чтобы нумерация α_e не была минимальной при условии, что она нумерует $\mathcal{A}$ и $\mu \not\leq \alpha_e$. Если $e \in R$, то ждем появления шага $s \geq v$, на котором для всех $e' \leq e$ если $e' \in R$, то определены элементы $y_{e'}^{e'}, \dots, y_n^{e'}$, и если $e' > 0$ и $(e' - 1) \in M$, то определены элементы $z_{e'-1}^{e'-1}, \dots, z_n^{e'-1}$, а также выполняется

$$|\alpha_e(u_e) \setminus \mu(w_0)| \geq 2. \quad (13)$$

Если такой шаг s найден, то рассмотрим два случая.

(1) Число e не является наименьшим элементом R , удовлетворяющим на некотором шаге $s' = v, \dots, s$ условию (13) и условию

$$\min D = c(e, d_\sigma(e, v)), \text{ где } D = \{c(k, d_\sigma(k, v)) : k \in R\}. \quad (14)$$

Тогда для каждого r , удовлетворяющего на одном из последующих шагов условию

$$\alpha_e(r) = \mu(w_0),$$

будем определять

$$g_e(w) = r, \quad (15)$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено.

(2) Число e является наименьшим элементом R , удовлетворяющим на некотором шаге $s' = v, \dots, s$ условию (13) и условию (14). Тогда для всех остальных $e' \in R$, удовлетворяющих (с e' вместо e) на одном из шагов $s' = v, \dots, s$ условию (13), определим

$$d_\sigma(e', s + 1) = d_\sigma(e', v). \quad (16)$$

Для каждого r , удовлетворяющего на одном из последующих шагов условию

$$\alpha_{e'}(r) = \mu(w_0),$$

будем определять

$$g_{e'}(w) = r, \quad (17)$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_{e'}(w)$ на предыдущем шаге не определено. Выполнение для e' всех следующих действий процесса 2 прерывается. Далее, определим

$$d_\sigma(e, s + 1) = d_\sigma(e, v) + 1 \quad (18)$$

и инициализируем процедуры $P(\tau)$ для всех строк четной длины τ таких, что либо $\sigma \prec \tau$, либо $\sigma <_L \tau$. Затем ожидаем появления шага t и, если оно не было зафиксировано ранее, числа r_e , для которых

$$\alpha_e(r_e) = \mu(w_0) \quad (19)$$

на этом шаге. Пусть $i = d_\sigma(e, v)$. Если $\varphi_{i,t}(r_e) \uparrow$, а также существуют множества B_0, B и попарно различные числа $p_0 < p_1, q_0 < q_1$ такие, что на шаге t выполняются условия

$$\mu(x'_0) = B_0 \cup \{p_0, p_1\}, \quad (20)$$

$$\mu(w_0) = B \cup \{q_0, q_1\}, \quad (21)$$

$$\forall b \in B_0 [b < p_0] \ \& \ \forall b \in B [b < q_0]. \quad (22)$$

то для новых чисел $c_0 > p_1$, $c_1 > q_1$ определим

$$\mu_{t+1}(x'_0) = \mu_t(x'_0) \cup \{\min(\mu_t(w_0) \setminus \mu_t(x'_0))\} \cup \{c_0\}, \quad (23)$$

$$\mu_{t+1}(w_0) = \mu_t(w_0) \cup \{\min(\mu_t(x'_0) \setminus \mu_t(w_0))\} \cup \{c_1\}. \quad (24)$$

Если $\varphi_{i,t}(r_e) \downarrow \in \text{dom } g_e$, то прерываем выполнение действий процесса, связанных с e , и полагаем

$$g_e(w) = r_e, \quad (25)$$

где w — наименьшее число, на котором значение $g_e(w)$ на предыдущем шаге не определено. Иначе возвращаемся к ожиданию шага t , на котором имеет место (19), и в случае его появления выполняем ту же последовательность действий уже для нового t . Заметим, что если $\varphi_i(r_e) \downarrow$ и процесс не прерывается, то будет справедливо равенство $\alpha_e(r_e) = \mu(w_0)$. Этим завершается описание работы процесса 2 и процедуры $P(\sigma)$.

Непосредственно из построения следует, что любые два различных элемента семейства $\mathcal{A}$ несравнимы по включению и что любые два его различных бесконечных элемента не пересекаются, а также для любого $X \in \mathcal{A}$ существует лишь конечное число элементов $\mathcal{A}$, имеющих с X непустое пересечение. Отсюда следует, что $\mathcal{A}$ дискретно. Также из построения следует, что в каждой из процедур $P(\sigma)$ определяется лишь конечное число значений нумерации μ и значения, определенные в разных процедурах, не пересекаются. Стало быть, справедливо условие (1).

Покажем, что для каждого n требования R_n , M_n и P_n удовлетворены. Нам понадобится следующая

Лемма 1. Для любого n если $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$, то разность $\mathcal{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$ и T — истинный путь построения. Согласно построению функция g_n всюду определена. Покажем, что семейство $\mathcal{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ конечно. Выберем произвольное число $m \geq n$ и строку σ длины $2m + 2$, для которой $T \upharpoonright (2n + 2) \preceq \sigma$. Рассмотрим работу процедуры $P(\sigma)$ начиная с наименьшего шага u , после которого она уже не инициализируется. Если такого шага не существует, то согласно п. 2 ее инициализации каждое из построенных при ее выполнении множеств семейства $\mathcal{A}$ имеет α_n -номер, принадлежащий $\text{ran } g_n$. В противном случае определено значение u_n и $u_n \in \text{ran } g_n$. Также в процессе 1 обеспечивается, что

$$y_n^n, \dots, y_m^n \in \text{ran } g_n.$$

Непрерывные циклически выполняемые в процессе 1 проверки (4)–(6) и действия (7), (8) приводят к равенствам

$$\alpha(y_n^n) = \mu(x_e)$$

для всех $e \leq n$ и

$$\alpha(y_{n+1}^n) = \mu(x_{n+1}), \dots, \alpha(y_m^n) = \mu(x_m).$$

Если в дальнейшей работе процедуры будут определены равенства (10), то действия (12) обеспечат существование α_n -номера множества $\mu(w)$, принадлежащего $\text{gal } g_n$. Предположим, что $\alpha_n(u_n) \neq \mu(w_0)$. Согласно построению это равносильно условию $|\alpha_e(u_n) \setminus \mu(w_0)| \geq 2$. Тогда в процессе 2 обеспечивается, что либо в силу действий (15), (17), (25) существует α_n -номер множества $\mu(w_0)$, либо в силу непрерывного циклического выполнения проверок (20)–(22) и действий (23), (24) имеет место

$$\alpha_n(y_n^n) = \mu(w_0).$$

Таким образом, каждое из множеств семейства $\mathcal{A}$, построенных при выполнении процедур $P(\sigma)$, где $T \upharpoonright (2n+2) \preceq \sigma$, принадлежат также семейству $\alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$. Разность $\mathcal{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N}))$ содержит лишь конечное число множеств, определенных при работе процедур $P(\tau)$, где $\tau <_L T \upharpoonright (2n+2)$. Этим завершается доказательство леммы.

Лемма 2. Для любого n если $\alpha_n \in H(\mathcal{A})$ и α_n минимальна, то $\mu \leq \alpha_n$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} \setminus \alpha_n(g_n(\mathbb{N})) = \{Y_0, \dots, Y_k\}$. Определим сводимую к α_n нумерацию γ , для каждого x положив

$$\gamma(x) = \begin{cases} Y_x, & \text{если } x \leq k, \\ \alpha_n(g_n(x-k-1)), & \text{если } x > k. \end{cases}$$

Из построения следует, что для любых строк σ и τ четной длины существует конечный предел $\widehat{d}_\sigma(e) = \lim_s d_\sigma(e, s)$ и $\widehat{d}_\sigma(e) \leq \widehat{d}_\tau(e)$ при $\sigma \preceq \tau$. Согласно определениям (16) и (18) процесса 2 каждой из процедур $P(\sigma)$ если для некоторого e' на некотором шаге s имеет место $d_\sigma(e', s+1) < d_\sigma(e', s)$, то найдется e , для которого

$$c(e, d_\sigma(e, v)) \leq c(e', d_\sigma(e', v)), \quad d_\sigma(e, v) < d_\sigma(e', s+1).$$

Отсюда и из п.3 инициализации процедур $P(\sigma)$ следует, что для каждого e существует предел $\lim_m \widehat{d}_{T \upharpoonright (2m+2)}(e)$. Если $\alpha_e(\mathbb{N}) = \mathcal{A}$ и этот предел бесконечен, то для каждой всюду определенной функции φ_i с учетом проверок (19)–(22) и действий (23), (24) найдется число r_e , для которого

$$\gamma(\varphi_i(r_e)) \neq \alpha_e(r_e),$$

поскольку множество $\alpha_e(r_e)$ получает γ -номер только в действии (25). Стало быть, $\alpha_e \not\leq \gamma$ и, следовательно, нумерация α_e не минимальна. Пусть $\alpha_n(\mathbb{N}) = \mathcal{A}$ и $\lim_m \widehat{d}_{T \upharpoonright (2m+2)}(n) = i < \infty$. Из построения следует, что для всех (за исключением конечного числа) x значение $f_n(x)$ определено. Если существует бесконечно много $x \in \text{dom } f_n$, для которых имеет место

$$\mu(x) \neq \alpha_n(f_n(x)),$$

то для бесконечно многих m в процедуре $P(T \upharpoonright (2m+2))$ выполняется $\mu(w_0) \neq \alpha_n(u_n)$. Значит, выполнение действий (18) при работе вторых процессов этих процедур приводит к неравенству

$$\lim_m \widehat{d}_{T \upharpoonright (2m+2)}(n) > i.$$

Полученным противоречием завершается доказательство леммы.

Таким образом, для каждого n требование R_n удовлетворено.

Лемма 3. Нумерация μ минимальна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем произвольное $e > 0$, для которого φ_{e-1} всюду определена и $\mu(\varphi_{e-1}(\mathbb{N})) = \mathcal{A}$. Пусть $\sigma = T \upharpoonright (2e + 2)$. Тогда по определению T множества $\bigcup_{\tau <_L \sigma} N_\tau$ и $\bigcup_{\tau < \sigma} N_\tau$ конечны. Для любой строки τ , если номер x выбирается в процессе работы процедуры $P(\tau)$ и после этого она инициализируется на некотором шаге, то согласно первой части п. 2 инициализации по этому x можно эффективно указать конечное множество, состоящее из всех y , для которых $\mu(y) = \mu(x)$. Поскольку $\mu(\varphi_{e-1}(\mathbb{N})) = \mathcal{A}$, для одного из таких y выполняется $y \in \text{ran } \varphi_{e-1}$. Отметим, что для каждого множества семейства $\mathcal{A}$ вида $\{a_0 < a'_1 < a'_2\}$ найдется z , для которого $\mu(\varphi_{e-1}(z)) = \{a_0 < a'_1 < a'_2\}$.

Для каждого $n \geq e$ рассмотрим работу процедуры $P(T \upharpoonright (2n+2))$, начиная с шага, после которого она не инициализируется. Теперь сводимость $\mu \leq \mu \circ \varphi_{e-1}$ следует из проверок (2), (3) и справедливости равенств

$$\mu(x_0) = \dots = \mu(x_{e-1}) = \mu(x'_0),$$

которые в свою очередь следуют из проверок (4)–(6) и действий (7), (8). В силу произвольности выбора e нумерация μ минимальна. Этим завершается доказательство леммы.

Наконец, для завершения доказательства теоремы остается заметить, что в силу выполнения проверок (9) и действий (10), (11) для каждого n требование P_n удовлетворено.

4. Заключение

В [2] среди прочего был сформулирован вопрос о существовании семейства с единственной минимальной вычислимой нумерацией, которая не является ни наименьшей, ни позитивной. В построение нумерации μ из доказательства последней теоремы несложно интегрировать, чтобы гарантировать ее непозитивность, процесс для выполнения требований

$$N_n : \eta_\mu \neq W_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

основанный на следующей стратегии. Зафиксировав различные числа x и y , начинаем последовательно добавлять элементы в множества $\mu(x)$ и $\mu(y)$ таким образом, чтобы на каждом шаге значения $\mu(x)$ и $\mu(y)$ были несравнимы по включению, но наибольшее число k , для которого $\mu(x) \upharpoonright k = \mu(y) \upharpoonright k$, при этом возрастало. Если в рамках работы этого процесса пара $\langle x, y \rangle$ перечислится в W_n , то прерываем его работу, что приводит к выполнению неравенства $\mu(x) \neq \mu(y)$.

Благодарности. Автор признателен рецензенту за глубокое проникновение в работу и за неоценимые замечания, рекомендации и предложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Badaev S. A., Goncharov S. S. On computable minimal enumerations // Algebra. Proc. third Int. Conf. Algebra, memory M. I. Kargopolov. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1995. P. 21–32.
2. Badaev S. A., Goncharov S. S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications, P. Cholak (ed.) et al. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2000. P. 23–38. (Contemp. Math. 257).
3. Марченков С. С. О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 588–607.

4. Гончаров С. С. Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 5. С. 507–551.
5. Гончаров С. С. Позитивные вычислимые нумерации // Докл. АН СССР. 1993. Т. 332, № 2. С. 142–143.
6. Гончаров С. С. Семейство с единственной однозначной, но не наименьшей нумерацией // Тр. Ин-та математики. 1988. Т. 8. С. 42–58.
7. Гончаров С. С. Семейства с единственной позитивной нумерацией // Вычисл. системы. 1992. № 146. С. 96–104.
8. Goncharov S. S., Harizanov V., Knight J., McCoy C., Miller R., Solomon R. Enumerations in computable structure theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2005. V. 136, N 3. P. 219–246.
9. Hirschfeldt D. R. Degree spectra of relations on computable structures // Bull. Symb. Logic. 2000. V. 6, N 2. P. 197–212.
10. Ершов Ю. Л. Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
11. Ершов Ю. Л. Нумерации семейств общерекурсивных функций // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 5. С. 1015–1025.
12. Semukhin P. Prime models of finite computable dimension // J. Symb. Logic. 2009. V. 74, N 1. P. 336–348.
13. Бадаев С. А. Минимальные нумерации // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1993. Т. 25. С. 3–34.
14. Бадаев С. А. Минимальные нумерации позитивно вычислимых семейств // Алгебра и логика. 1994. Т. 33, № 3. С. 233–254.
15. Вьюгин В. В. О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 5. С. 512–529.
16. Goncharov S. S., Yakhnis A., Yakhnis V. Some effectively infinite classes of enumerations // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 60, N 3. P. 207–235.
17. Гончаров С. С., Сорби А. Обобщенно-вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерс // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.
18. Бадаев С. А., Гончаров С. С. О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.
19. Badaev S. A., Lempp S. A decomposition of the Rogers semilattice of a family of d.c.e. sets // J. Symb. Logic. 2009. V. 74, N 2. P. 618–640.
20. Файзрахманов М. Х. Минимальные обобщенно вычислимые нумерации и высокие степени // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 710–716.
21. Faizrahmanov M. Kh. Extremal numberings and fixed point theorems // Math. Logic Quart. 2022. V. 68, N 4. P. 398–408.
22. Файзрахманов М. Х. Две теоремы о минимальных обобщенно-вычислимых нумерациях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2023. № 3. С. 28–35.
23. Файзрахманов М. Х. О p -универсальных и p -минимальных нумерациях // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 440–449.
24. Файзрахманов М. Х. Сводимость по перечислимости и позитивная сводимость нумераций семейств арифметических множеств // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 204–212.
25. Ershov Yu. L. Theory of numberings // E. R. Griffor (ed.), Handbook of computability theory. Amsterdam: Elsevier, 1999. P. 473–503. (Stud. Logic Found. Math.; V. 140).
26. Soare R. I. Recursively enumerable sets and degrees. A study of computable functions and computably generated sets. Perspectives in mathematical logic. Berlin; Heidelberg; New York, etc.: Springer-Verl., 1987.
27. Soare R. I. Turing computability: theory and applications (theory and applications of computability). Berlin: Springer, 2016.

Поступила в редакцию 27 апреля 2023 г.

После доработки 1 октября 2023 г.

Принята к публикации 28 января 2024 г.

Файзрахманов Марат Хайдарович (ORCID 0000-0002-4519-9696)

Казанский (Приволжский) федеральный университет,

ул. Кремлевская, 18, Казань 420008

marat.faizrahmanov@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

А. А. Щеглова

Аннотация. Рассматривается нелинейная дескрипторная система с дискретным временем. Для такой системы построена структурная форма и доказана локальная теорема существования решений. Предположения теоремы обеспечивают для системы первого приближения наличие обратимого слева линейного оператора, преобразующего ее к удобной для анализа структурной форме. Получены достаточные условия устойчивости нелинейной системы по линейному приближению в предположениях приводимости и правильности соответствующей части системы первого приближения. Попутно рассмотрены вопросы о приводимости и правильности линейных дискретных дескрипторных систем.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.213

Ключевые слова: дескрипторные системы, дискретные системы, нестационарные, нелинейные, устойчивость, правильные системы, приводимые системы.

1. Введение

Рассматривается нестационарная нелинейная дискретная система

$$g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \quad k \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}, \quad (1.1)$$

где $x^{[k]} \in \mathbf{R}^n$ — искомые векторы; n -мерная вектор-функция $g(k, \alpha, \beta)$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}^n$) определена на множестве $\mathbf{N} \times \mathcal{V}(0)$ ($\mathcal{V}(0)$ — некоторая окрестность точки $(\alpha, \beta) = 0$). Кроме того, на указанном множестве $g(k, \alpha, \beta)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным α и β :

$$g(k, \alpha, \beta) \in C_{\alpha, \beta}^1(\mathbf{N} \times \mathcal{V}(0)).$$

Предполагается, что система (1.1) имеет тривиальное решение

$$g(k, 0, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}. \quad (1.2)$$

Допускается случай

$$\det \frac{\partial g(k, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \equiv 0 \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathcal{V}(0). \quad (1.3)$$

Математические модели, построенные в виде вырожденных дискретных систем (1.1), (1.3) (называемых также дискретными дескрипторными системами), описывают природные и технические процессы во многих прикладных областях: биологии, экономике, робототехнике, астрофизике, моделировании летательных аппаратов, электрических сетях, механике и др. [1–7].

Большинство известных результатов по устойчивости вырожденных систем с дискретным временем получены для линейного случая (см. например, [8–12]).

Активно изучаются и нелинейные системы [13–19]. Обычно рассматриваются системы, представляющие собой сумму главной линейной части и нелинейного слагаемого, при различных предположениях относительно обеих составляющих. Во многих работах линейная часть полагается стационарной с регулярным пучком матричных коэффициентов [13–16]. В статьях [17, 18] анализ устойчивости нелинейных систем проводится с использованием линейных матричных неравенств. В работе [19] с этой целью применяется второй метод Ляпунова.

Данная статья посвящена исследованию устойчивости тривиального решения нелинейной системы вида (1.1) по ее линейному приближению. В п. 2 для системы (1.1) построена структурная форма как часть компонента неявной функции, удовлетворяющей уравнениям вида (1.1) при $k = \overline{\kappa, \kappa + r}$ ($0 \leq r \leq n$). На этой основе доказана локальная теорема о существовании решений. В п. 3 рассматривается система линейного приближения. Показано, что предположения теоремы существования из п. 2 обеспечивают для системы первого приближения существование линейного оператора, преобразующего ее к структурной форме, удобной для анализа устойчивости. В пп. 4 и 5 изучаются приводимость и правильность линейных дескрипторных систем. В п. 6 доказаны теоремы об асимптотической устойчивости тривиального решения нелинейной системы (1.1) по линейному приближению в предположениях приводимости и правильности той части системы первого приближения, которая определяет ее асимптотическое поведение. В п. 7 приведен пример, иллюстрирующий построенную теорию.

2. Существование решения нелинейной дескрипторной системы

Этот раздел посвящен поиску условий существования решений системы (1.1).

Положим

$$B_k = \frac{\partial g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]})}{\partial x^{[k-1]}}, \quad A_k = \frac{\partial g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]})}{\partial x^{[k]}}.$$

Для некоторого фиксированного r , $1 \leq r \leq n$, определим $n(r+1) \times n$ -матрицы

$$\mathcal{B}_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = \text{col}(B_k, O, \dots, O), \quad (2.1)$$

$$\Gamma_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}, x^{[k+1]}) = \text{col}(A_k, B_{k+1}, O, \dots, O), \quad (2.2)$$

$n(r+1) \times nr$ -матрицу

$$\Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) = \begin{pmatrix} O & O & \dots & O & O \\ A_{k+1} & O & \dots & O & O \\ B_{k+2} & A_{k+2} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & B_{k+r} & A_{k+r} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

и матрицу

$$\mathcal{D}_r(k, \overline{x}_{k,r}) = (\mathcal{B}_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \mid \Gamma_r(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}, x^{[k+1]}) \parallel \Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]})) \quad (2.4)$$

размера $n(r+1) \times n(r+2)$, здесь и далее

$$\overline{x}_{k,r} = (x^{[k-1]}, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}). \quad (2.5)$$

Теорема 1. Пусть для некоторого r , $1 \leq r \leq n$, при всех значениях $k \in \mathbf{N}$ выполняются условия

(1) $\text{rank } \Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) = \lambda = \text{const}$ при всех $x^{[j]}$ из соответствующих окрестностей $\mathcal{V}_j(0)$ точки $0 \in \mathbf{R}^n$ ($j = \overline{k, k+r}$);

(2) в матрице $\mathcal{D}_r(k, 0)$ имеется обратимая подматрица $\mathcal{M}_r(k, 0)$ порядка $n(r+1)$, включающая в себя все столбцы матрицы $\Gamma_r(k, 0, 0)$ и λ столбцов матрицы $\Lambda_r(k, 0, \dots, 0)$;

(3) в матрице $\mathcal{D}_{r+1}(k, 0)$ найдется обратимая подматрица $\mathcal{M}_{r+1}(k, 0)$ порядка $n(r+2)$, включающая в себя все столбцы, в которых расположены матрицы $\mathcal{M}_r(k, 0)$ и $\mathcal{M}_r(k+1, 0)^{1)}$.

Если величина $\|x_1^{[0]}\| \neq 0^{2)}$ достаточно мала (вектор $x_1^{[0]}$ определен ниже в (2.8)), то система (1.1) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее уравнениям

$$x_2^{[k-1]} = f_1(k, x_1^{[k-1]}), \quad (2.6)$$

$$x_1^{[k]} = f_2(k, x_1^{[k-1]}), \quad k \in \mathbf{N}, \quad (2.7)$$

где

$$x^{[k]} = Q \text{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}), \quad x_1^{[k]} \in \mathbf{R}^{n-d}, \quad x_2^{[k]} \in \mathbf{R}^d, \quad k \in \mathbf{N} \cup \{0\}, \quad (2.8)$$

Q — матрица перестановок строк; $d = nr - \lambda$ — число столбцов матрицы $\mathcal{B}_r(k, 0, 0)$, входящих в $\mathcal{M}_r(k, 0)$;

$$f_i(k, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}; \quad (2.9)$$

$$f_i(k, x_1^{[k-1]}) \in C_{x_1^{[k-1]}}^1(\mathbf{N} \times \mathcal{V}_{k,1}(0)), \quad i = 1, 2, \quad (2.10)$$

$\mathcal{V}_{k,1}(0)$ — окрестность точки $x_1^{[k-1]} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем значение $k \in \mathbf{N}$. Рассмотрим систему (1.1) на конечном горизонте

$$g(i, x^{[i-1]}, x^{[i]}) = 0, \quad i = \overline{k, k+r}. \quad (2.11)$$

В силу условия 2 теоремы найдется неявная функция [20, гл. 1, § 1.5, теорема 1.53]

$$x_2^{[k-1]} = f_1(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}), \quad (2.12)$$

$$x^{[k]} = \varphi_1(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}), \quad (2.13)$$

$$z_1^{[k]} = \varphi_2(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}) \quad (2.14)$$

(см. (2.8)), которая определена в некоторой окрестности точки $(x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}) = 0$ и удовлетворяет уравнениям (2.11). Здесь

$$Q_r \text{col}(z_1^{[k]}, z_2^{[k]}) = \text{col}(x^{[k+1]}, \dots, x^{[k+r]}), \quad (2.15)$$

Q_r — соответствующая матрица перестановок строк. При этом в указанной окрестности функции (2.12)–(2.14) непрерывны и имеют непрерывные частные производные по переменным $x_1^{[k-1]}$ и $z_2^{[k]}$.

¹⁾ $\mathcal{M}_r(k+1, 0)$ — обратимая подматрица порядка $n(r+1)$, которая в силу предположения 2 теоремы присутствует в матрице $\mathcal{D}_r(k+1, 0)$ и включает в себя λ столбцов матрицы $\Lambda_r(k+1, 0, \dots, 0)$ и все столбцы матрицы $\Gamma_r(k+1, 0, 0)$.

²⁾ Здесь и далее под нормой вектора из пространства $\mathbf{R}^n$ понимается евклидова норма, а под нормой $n \times n$ -матрицы — спектральная матричная норма.

Заметим, что матрица $\mathcal{M}_r(k, \bar{x}_{k,r})$, фигурирующая в предположении 2, остается обратимой и в некоторой окрестности $\bar{\mathcal{V}}_{k,r}(0)$ точки $\bar{x}_{k,r} = 0$, в силу чего

$$(\mathcal{M}_r(k, \bar{x}_{k,r}))^{-1} \mathcal{D}_r(k, \bar{x}_{k,r}) \operatorname{diag}\{Q, Q, Q_r\} = \left(\begin{array}{c|c} J_1(k, \bar{x}_{k,r}) E_d & O \\ J_2(k, \bar{x}_{k,r}) & E_n \\ J_3(k, \bar{x}_{k,r}) & O \end{array} \left\| \begin{array}{c} O \\ O \\ E_\lambda \end{array} \right. \begin{array}{c} \Psi_1(k, \bar{x}_{k,r}) \\ \Psi_2(k, \bar{x}_{k,r}) \\ \Psi_3(k, \bar{x}_{k,r}) \end{array} \right),$$

где $J_j(k, \bar{x}_{k,r})$, $\Psi_j(k, \bar{x}_{k,r})$ ($j = 1, 2, 3$) — некоторые матрицы соответствующих размеров. По построению ранг матрицы $\Lambda_r(k, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]})$ равен рангу матрицы, расположенной правее двойной вертикальной линии. С учетом последнего обстоятельства и в соответствии с предположением 1 теоремы $\Psi_1(k, \bar{x}_{k,r}) \equiv O$, $\Psi_2(k, \bar{x}_{k,r}) \equiv O$ при $\bar{x}_{k,r} \in \bar{\mathcal{V}}_{k,r}(0)$. Следовательно, по теореме о производной неявной функции [20, гл. 1, § 1.5, теорема 1.55] в некоторой окрестности нуля

$$\begin{pmatrix} \partial f_1 / \partial x_1^{[k-1]} & \partial f_1 / \partial z_2^{[k]} \\ \partial \varphi_1 / \partial x_1^{[k-1]} & \partial \varphi_1 / \partial z_2^{[k]} \\ \partial \varphi_2 / \partial x_1^{[k-1]} & \partial \varphi_2 / \partial z_2^{[k]} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_1(k, \bar{x}_{k,r}) & O \\ J_2(k, \bar{x}_{k,r}) & O \\ J_3(k, \bar{x}_{k,r}) & \Psi_3(k, \bar{x}_{k,r}) \end{pmatrix}.$$

Это означает, что функции (2.12) и (2.13) не зависят от переменной $z_2^{[k]}$:

$$x_2^{[k-1]} = f_1(k, x_1^{[k-1]}), \quad (2.16)$$

$$x^{[k]} = \varphi_1(k, x_1^{[k-1]}), \quad (2.17)$$

Добавим к системе (2.11) еще одно уравнение

$$g(k+r+1, x^{[k+r]}, x^{[k+r+1]}) = 0. \quad (2.18)$$

Построим неявную функцию, удовлетворяющую системе (2.11), (2.18). Для этого подставим выражения (2.14), (2.16), (2.17) в (2.18), в результате чего получим уравнение

$$\widehat{g}(k, x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}) = 0. \quad (2.19)$$

В соответствии со свойствами обратимых блочных матриц [21, гл. 11, § 5] в матрице $(\partial \widehat{g} / \partial z_2^{[k]} \quad \partial \widehat{g} / \partial x^{[k+r+1]})$ при $(x_1^{[k-1]}, z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}) = 0$ в силу предположения 3 найдется обратимая подматрица порядка n . Тогда в некоторой окрестности нуля существует неявная функция

$$z_3^{[k]} = \varphi_3(k, x_1^{[k-1]}, z_4^{[k]}), \quad (2.20)$$

удовлетворяющую уравнению (2.19). В (2.20)

$$\widehat{Q}_r \operatorname{col}(z_3^{[k]}, z_4^{[k]}) = \operatorname{col}(z_2^{[k]}, x^{[k+r+1]}),$$

$\widehat{Q}_r$ — соответствующая матрица перестановок строк.

Таким образом, неявная функция (2.14), (2.16), (2.17), (2.20) определена в некоторой окрестности нуля и при подстановке обращает в тождества уравнения (2.11), (2.18).

Найдем другую неявную функцию, удовлетворяющую системе (2.11), (2.18). Для этого рассмотрим уравнения

$$g(i, x^{[i-1]}, x^{[i]}) = 0, \quad i = \overline{k+1, k+r+1}, \quad (2.21)$$

и построим для нее матрицы $\mathcal{B}_r(k+1, x^{[k]}, x^{[k+1]})$, $\Gamma_r(k+1, x^{[k]}, x^{[k+1]}, x^{[k+2]})$, $\Lambda_r(k+1, x^{[k+1]}, \dots, x^{[k+r+1]})$ и $\mathcal{D}_r(k+1, \bar{x}_{k+1,r})$, аналогичные (2.1)–(2.4).

Так же, как это сделано выше, можно показать, что в соответствующей окрестности нуля определена неявная функция вида

$$x_2^{[k]} = f_1(k+1, x_1^{[k]}), \quad (2.22)$$

$$x^{[k+1]} = \varphi_1(k+1, x_1^{[k]}), \quad (2.23)$$

$$z_1^{[k+1]} = \varphi_2(k+1, x_1^{[k]}, z_2^{[k+1]}), \quad (2.24)$$

удовлетворяющая системе (2.21). В (2.22)–(2.24) векторы $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ определяются соотношением (2.8), $Q_r \operatorname{col}(z_1^{[k+1]}, z_2^{[k+1]}) = \operatorname{col}(x^{[k+2]}, \dots, x^{[k+r+1]})$, Q_r — матрица перестановок из (2.15).

Добавим к системе (2.21) уравнение

$$g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0. \quad (2.25)$$

Подставив (2.22) в (2.25), получим уравнение

$$\tilde{g}(k, x^{[k-1]}, x_1^{[k]}) = 0. \quad (2.26)$$

Существование в $\mathcal{D}_{r+1}(k, 0)$ обратной подматрицы $\mathcal{M}_{r+1}(k, 0)$ порядка $n(r+2)$ гарантирует, что при $(x^{[k-1]}, x_1^{[k]}) = 0$

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \partial \tilde{g} / \partial x^{[k-1]} & \partial \tilde{g} / \partial x_1^{[k]} \end{pmatrix} = n.$$

Согласно предположению 3 матрица $\mathcal{M}_{r+1}(k, 0)$ включает в себя все столбцы матрицы $\mathcal{D}_{r+1}(k, 0)$, в которых расположена матрица $\mathcal{M}_r(k, 0)$. Отсюда в силу свойств обратимых блочных матриц следует, что в $(\partial \tilde{g} / \partial x^{[k-1]} \quad \partial \tilde{g} / \partial x_1^{[k]})$ найдется обратимая в нуле подматрица порядка n такая, что соответствующая неявная функция, обращающая (2.26) в тождество, будет иметь вид

$$x_2^{[k-1]} = \varphi_0(k, x_1^{[k-1]}), \quad (2.27)$$

$$x_1^{[k]} = f_2(k, x_1^{[k-1]}). \quad (2.28)$$

Таким образом, построена неявная функция (2.22)–(2.24), (2.27), (2.28), удовлетворяющая системе (2.21), (2.25) или, что то же, (2.11), (2.18).

Известно, что неявные функции, отвечающие одной и той же системе уравнений, совпадают на пересечении областей определения. По этой причине в результате подстановки выражений (2.20) и (2.28) соответственно в равенства (2.14) и (2.22)–(2.24) из представлений (2.14), (2.16), (2.17), (2.20) и (2.22)–(2.24), (2.27), (2.28) получим одинаковые неявные функции. Это, в частности, означает, что в соответствующей окрестности нуля функции $f_1(k, x_1^{[k-1]})$ и $\varphi_0(k, x_1^{[k-1]})$ из (2.16) и (2.27) совпадают, а функции (2.22), (2.28) при подстановке обращают в тождество уравнение (2.17).

По построению функции (2.16), (2.17) удовлетворяют уравнению (2.25), поэтому это уравнение обращают в тождество и функции (2.16), (2.22), (2.28).

В сделанных предположениях функции $f_i(k, x_1^{[k-1]})$ ($i = 1, 2$) из (2.16), (2.28) обладают свойствами (2.9) и (2.10).

Полагая в (2.16), (2.28) $k = 1, 2, \dots$, можно получить систему (2.6), (2.7).

Из изложенного выше следует, что если существует решение системы (1.1), достаточно близкое к нулю, то оно удовлетворяет уравнениям (2.6), (2.7). С другой стороны, система (2.6), (2.7) в том случае, когда вектор $x_1^{[0]} \neq 0$ достаточно

мал по норме, будет иметь нетривиальное решение, которое располагается в достаточно малой окрестности нулевого решения. Это решение будет обращать в тождество и все уравнения (1.1). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В предположениях теоремы 1 матрица перестановок Q из (2.8) находится следующим образом. Допустим, что обратимая подматрица $\mathcal{M}_r(k, 0)$, фигурирующая в условии 2 теоремы, найдена. Рассмотрим матрицу $\mathcal{B}_r(k, 0, 0)$ (см. (2.1)), представляющую собой первые n столбцов матрицы $\mathcal{D}_r(k, 0)$. Объединим все ее столбцы, входящие в $\mathcal{M}_r(k, 0)$, в блок $\mathcal{B}_{r,2}(k, 0, 0)$, а столбцы, которые не входят в $\mathcal{M}_r(k, 0)$, — в блок $\mathcal{B}_{r,1}(k, 0, 0)$. Тогда Q будет матрицей, которая переставляет столбцы матрицы $\mathcal{B}_r(k, 0, 0)$ так, что

$$\mathcal{B}_r(k, 0, 0)Q = (\mathcal{B}_{r,1}(k, 0, 0) \quad \mathcal{B}_{r,2}(k, 0, 0)).$$

Поставим для (1.1) задачу Коши

$$x^{[0]} = a, \quad (2.29)$$

где $a \in \mathbf{R}^n$ — заданный вектор.

Разобьем вектор a на подвекторы: $a = Q \operatorname{col}(a_1, a_2)$, где Q — матрица перестановок из (2.8), $a_1 \in \mathbf{R}^{n-d}$, $a_2 \in \mathbf{R}^d$.

Следствие 1. Пусть выполнены все предположения теоремы 1 и величина $\|a_1\| \neq 0$ достаточно близка к нулю. Задача (1.1), (2.29) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$a_2 = f_1(1, a_1), \quad (2.30)$$

где $f_1(k, x_1^{[k-1]})$ — функция из (2.6).

Справедливость следствия вытекает непосредственно из доказательства теоремы 1. Условие (2.30) получается из (2.6) при $k = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Соотношение (2.30) будем называть *условием согласования* начальных данных (2.29) с системой (1.1). Начальные условия (2.29), удовлетворяющие условию (2.30), называются *согласованными с системой* (1.1).

3. Система линейного приближения

Введем обозначения

$$A(k) = \frac{\partial g}{\partial x^{[k]}}(k, 0, 0), \quad B(k) = \frac{\partial g}{\partial x^{[k-1]}}(k, 0, 0).$$

Линеаризуем уравнение (1.1) по переменным $x^{[k-1]}$ и $x^{[k]}$ в окрестности точки $(x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0$:

$$A(k)x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]} + h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0. \quad (3.1)$$

Тогда система линейного приближения будет иметь вид

$$A(k)x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.2)$$

где в силу предположения (1.3) $\det A(k) \equiv 0$. Из свойства (1.2) следует

$$h(k, 0, 0) = 0 \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

В предположениях теоремы 1 исследуем внутреннюю структуру системы (3.2). Обозначим через $\mathbf{d}$ оператор «сдвига»

$$\mathbf{d}[f^{[k]}] = f^{[k+1]}, \quad k \in \mathbf{N},$$

так что

$$\mathbf{d}^j[f^{[k]}] = f^{[k+j]}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad j \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

Лемма 1. Пусть

$$\text{rank } \Lambda_r(k, 0, \dots, 0) = \lambda = \text{const} \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad (3.3)$$

и выполнено предположение 2 теоремы 1. Тогда существует линейный оператор

$$\mathcal{R} = R_0(k) + R_1(k)\mathbf{d} + \dots + R_r(k)\mathbf{d}^r \quad (3.4)$$

такой, что

$$\mathcal{R}[A(k)x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]}] = \begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d \\ J_2(k) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]} \\ x_2^{[k-1]} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

где $J_1(k)$, $J_2(k)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров, векторы $x_1^{[k]}$ и $x_2^{[k]}$ определены в (2.8).

При этом $(n \times n)$ -матрицы $R_j(k)$ находятся по формуле

$$(R_0(k) \ R_1(k) \ \dots \ R_r(k)) = (E_n \ O \ \dots \ O) \mathcal{M}_r^{-1}(k, 0). \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Систему

$$\mathcal{D}_r(k, 0) \text{col}(x^{[k-1]}, x^{[k]}, \dots, x^{[k+r]}) = 0 \quad (3.7)$$

умножим слева на матрицу $\mathcal{M}_r^{-1}(k, 0)$ и осуществим замену переменных (2.8), (2.15). Из доказательства теоремы 1 следует, что

$$\mathcal{M}_r^{-1}(k, 0) \mathcal{D}_r(k, 0) \text{diag}\{Q, Q, Q_r\} = \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d & O & O & O & O \\ J_2(k) & O & E_{n-d} & O & O & O \\ J_3(k) & O & O & E_d & O & O \\ J_4(k) & O & O & O & E_\lambda & \Psi(k) \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где $J_j(k)$ ($j = \overline{1, 4}$) и $\Psi(k)$ — некоторые матрицы соответствующих размеров.

Действие оператора $\mathcal{R}$ (3.4) на систему (3.2) равносильно умножению (3.7) слева на матрицу $(R_0(k) \ R_1(k) \ \dots \ R_r(k))$. Будем вычислять коэффициенты оператора $\mathcal{R}$ по формуле (3.6). Тогда с учетом (2.8) из (3.8) вытекает тождество (3.5). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условие (3.3) выполнено, если имеет место предположение 1 теоремы 1.

Теорема 2. Допустим, что справедливо тождество (3.3) и выполнены предположения 2 и 3 теоремы 1. Тогда оператор $\mathcal{R}$ имеет левый обратный оператор

$$\mathcal{L} = L_0(k) + L_1(k)\mathbf{d}, \quad (3.9)$$

где $L_0(k)$, $L_1(k)$ — некоторые $(n \times n)$ -матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коэффициенты операторов (3.4) и (3.9) должны удовлетворять тождеству

$$(L_0(k) \ L_1(k)) \overline{\mathcal{R}}_r(k) = (E_n \ O \ \dots \ O), \quad (3.10)$$

где

$$\overline{\mathcal{R}}_r(k) = \begin{pmatrix} R_0(k) & R_1(k) & \dots & R_r(k) & O \\ O & R_0(k+1) & \dots & R_{r-1}(k+1) & R_r(k+1) \end{pmatrix}.$$

Теорема справедлива, если алгебраическая система (3.10) имеет решение $L_0(k)$, $L_1(k)$ при всех $k \in \mathbf{N}$. Покажем это.

Согласно предположениям 2 и 3 теоремы 1

$$\overline{\mathcal{R}}_r(k) \mathcal{M}_{r+1}(k, 0) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} E_d & O & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O & O \\ \hline O & J_1(k+1) & E_d & O & O \\ O & J_2(k+1) & O & E_{n-d} & O \end{array} \right), \quad (3.11)$$

где $\text{col}(J_1(k+1), J_2(k+1)) = R_0(k+1)B_1(k+1)$,

$$B(k)Q = (B_1(k) \ B_2(k)), \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.12)$$

матрицы $B_2(k)$ и $B_1(k)$ состоят из d и $n-d$ столбцов соответственно. При этом блок $\text{col}(B_2(k), O, \dots, O)$ входит, а блок $\text{col}(B_1(k), O, \dots, O)$ не входит в матрицу $\mathcal{M}_r(k, 0)$.

Из (3.11) вытекает представление

$$\overline{\mathcal{R}}_r(k) = (\mathcal{E}(k) \ O) \mathcal{M}_{r+1}^{-1}(k), \quad (3.13)$$

$$\mathcal{E}(k) = \left(\begin{array}{c|cc|c} E_d & O & O & O \\ O & E_{n-d} & O & O \\ \hline O & J_1(k+1) & E_d & O \\ O & J_2(k+1) & O & E_{n-d} \end{array} \right). \quad (3.14)$$

Результатом подстановки (3.13) в (3.10) и последующего умножения обеих частей полученного уравнения справа на $\mathcal{M}_{r+1}(k, 0)$ будет равенство

$$(L_1(k) \ L_2(k)) (\mathcal{E}(k) \ O) = (E_n \ O \ \dots \ O) \mathcal{M}_{r+1}(k). \quad (3.15)$$

Принимая во внимание (3.12), нетрудно убедиться, что по построению правая часть уравнения (3.15) представляет собой матрицу $(B_2(k) \ A(k)Q \ O)$. Учитывая вид (3.14) матрицы $\mathcal{E}(k)$, легко видеть, что необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (3.15)

$$\text{rank} \left(\begin{array}{c|c} \mathcal{E}(k) & O \\ \hline (B_2(k) \ A(k)Q \ O) & O \end{array} \right) = 2n$$

при каждом $k \in \mathbf{N}$ выполняется.

Из (3.15) можно найти коэффициенты оператора (3.9) по формуле

$$(L_0(k) \ L_1(k)) = (B_2(k) \ A(k)Q \ O) \mathcal{E}^{-1}(k). \quad \square$$

Отметим, что из (3.10), в частности, вытекают соотношения

$$L_0(k)R_0(t) = E_n, \quad L_0(k)R_1(k) + L_1(k)R_0(k) = O,$$

откуда

$$L_0(k) = R_0(k)^{-1}, \quad L_1(k) = -R_0(k)^{-1}R_1(k)R_0(k)^{-1}.$$

Существование операторов $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ гарантирует, что любое решение системы (3.1) будет решением системы

$$x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} + h_1(k, \overline{x}_{k,r}) = 0, \quad (3.16)$$

$$x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} + h_2(k, \overline{x}_{k,r}) = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.17)$$

и наоборот. Здесь $\overline{x}_{k,r}$ определено в (2.5),

$$\text{col}(J_1(k), J_2(k)) = R_0(k)B_1(k),$$

$$\begin{pmatrix} h_1(k, \bar{x}_{k,r}) \\ h_2(k, \bar{x}_{k,r}) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^r R_j(k) h(k+j, x^{[k+j-1]}, x^{[k+j]}),$$

$$x_1^{[k]} \in \mathbf{R}^{n-d}, h_2(k, \bar{x}_{k,r}) \in \mathbf{R}^{n-d}, x_2^{[k]} \in \mathbf{R}^d, h_1(k, \bar{x}_{k,r}) \in \mathbf{R}^d.$$

В свою очередь, система

$$x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} = 0, \quad (3.18)$$

$$x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.19)$$

эквивалентна в смысле решений системе (3.2). Строго говоря, решения систем (3.1) и (3.16), (3.17), а также (3.2) и (3.18), (3.19), связаны матрицей перестановок строк Q (см. (2.8)).

При $k = 1$ из (3.18) получаем условие согласования начальных данных для системы (3.2)

$$x_2^{[0]} + J_1(1)x_1^{[0]} = 0.$$

Для выделения единственного решения достаточно задать $x_1^{[0]} = a$, где $a \in \mathbf{R}^{n-d}$.

4. Приводимые системы

Напомним, квадратная матрица $V(k)$ является *матрицей Ляпунова* тогда и только тогда, когда она ограничена и ее определитель отделен от нуля, т. е. $|\det V(k)| \geq \delta = \text{const} > 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Будем говорить, что система (3.2) *приводима*, если существуют оператор (3.4), обладающий левым обратным оператором, и матрица Ляпунова $U(k)$ такие, что действие оператора $\mathcal{R}$ и замена переменной

$$x^{[k]} = U(k) \text{col}(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]})$$

преобразует систему (3.2) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k]} \\ \xi_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & E_d \\ H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k-1]} \\ \xi_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0, \quad (4.1)$$

где H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$ -матрица.

Применительно к невырожденным системам вида $x^{[k]} + B(k)x^{[k-1]} = 0$ это определение переходит в определение приводимости относительно группы Ляпунова [22, гл. 2, § 6, 7], поскольку в этом случае $\mathcal{R} = E_n$, $d = 0$.

Лемма 2. Для того чтобы система

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d \\ J_2(k) & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{[k-1]} \\ x_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (4.2)$$

была приводимой, необходимо и достаточно, чтобы

(1) некоторая фундаментальная матрица решений $X_1(k, \varkappa)$ подсистемы

$$x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} = 0 \quad (4.3)$$

была представима в виде

$$X_1(k, \varkappa) = V(k)(-H)^{k-\varkappa}V^{-1}(\varkappa), \quad k \geq \varkappa \geq 0, \quad (4.4)$$

где $V(k)$ — матрица Ляпунова, H — постоянная $(n-d) \times (n-d)$ -матрица;

(2) матрица $J_1(k+1)V(k)$ была ограниченной:

$$\sup_{k \in \mathbf{N}} \|J_1(k+1)V(k)\| < \infty. \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ДОСТАТОЧНОСТЬ. Условие (4.4) обеспечивает приводимость системы (4.3) [22, гл. 2, § 6, теорема 6.1]. В этом случае найдется матрица Ляпунова $V(k)$ такая, что замена переменных

$$\begin{pmatrix} x_1^{[k]} \\ x_2^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ O & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix}$$

и умножение второго уравнения слева на $V^{-1}(k)$ преобразует (4.2) к виду

$$\begin{pmatrix} O & O \\ E_{n-d} & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(k)V(k-1) & E_d \\ H & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{[k-1]} \\ y_2^{[k-1]} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.6)$$

Последующая замена переменных

$$\begin{pmatrix} y_1^{[k]} \\ y_2^{[k]} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1^{[k]} \\ \xi_2^{[k]} \end{pmatrix}$$

переводит (4.6) в систему вида (4.1). Таким образом, (4.1) получается из (4.2) в результате действия оператора $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} E_{n-d} & O \\ O & V^{-1}(k) \end{pmatrix}$ и подстановки

$$\text{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}) = U(k) \text{col}(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]}), \quad (4.7)$$

где

$$U(k) = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

В силу предположения (4.5) $U(k)$ будет матрицей Ляпунова. Согласно определению 2 это означает, что система (4.2) приводима.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть система (4.2) приводима. Из структуры этой системы следует, что ее подсистема (4.3) также должна быть приводима. В этом случае выполняется предположение 1 леммы [22, гл. 2, § 6, теорема 6.1].

Приводимость системы (4.2) означает, что существует матрица Ляпунова

$$U(t) = \begin{pmatrix} V(k) & O \\ V_1(k) & V_2(k) \end{pmatrix}$$

($V(k)$ из условия (4.4)) такая, что замена переменных

$$\text{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]}) = U(t) \text{col}(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]})$$

преобразует (4.2) к виду (4.1). Следовательно, матрицы $V_1(k)$ и $V_2(k)$ должны удовлетворять равенствам

$$V_1(k) = -J_1(k+1)V(k), \quad V_2(k) = E_d.$$

В свою очередь, $U(k)$ как матрица Ляпунова должна быть ограниченной, поэтому ограничен будет и ее блок $J_1(k+1)V(k)$. $\square$

Теорема 3. Пусть для системы (3.2) выполнены все предположения теоремы 2. Система (3.2) приводима тогда и только тогда, когда существует матрица Ляпунова $V(t)$ размера $(n-d) \times (n-d)$ такая, что

- (а) выполнено условие (4.5), в котором $J_1(k)$ — это $d \times (n-d)$ -матрица из (4.2);
- (б) одна из фундаментальных матриц системы (3.2) представима в виде

$$X(k, \varkappa) = QU(k) \begin{pmatrix} (-H)^{k-\varkappa} & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{-1}(\varkappa)Q^{-1}, \quad k \geq \varkappa \geq 0, \quad (4.9)$$

где $U(k)$ имеет вид (4.8), Q — матрица перестановок из (2.8), H — квадратная постоянная матрица порядка $n-d$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2 существует оператор $\mathcal{R}$ (3.4), преобразующий систему (3.2) к виду (4.2). Обозначим через $X(k, \varkappa)$ и $\tilde{X}(k, \varkappa)$ фундаментальные матрицы решений систем (3.2) и (4.2) соответственно. Поскольку оператор $\mathcal{R}$ обладает левым обратным оператором, решения этих систем связаны матрицей перестановок строк Q из (2.8): $x^{[k]} = Q \operatorname{col}(x_1^{[k]}, x_2^{[k]})$. При этом $X(k, \varkappa) = Q\tilde{X}(k, \varkappa)Q^{-1}$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть система (3.2) приводима. Очевидно, что в этом случае приводимой будет и система (4.2). Следовательно, выполнены предположения 1 и 2 леммы 2. Из доказательства леммы следует, что одна из фундаментальных матриц решений системы (4.2) имеет вид

$$\tilde{X}(k, \varkappa) = U(k) \begin{pmatrix} (-H)^{k-\varkappa} & O \\ O & O \end{pmatrix} U^{-1}(\varkappa), \quad k \geq \varkappa \geq 0. \quad (4.10)$$

Отсюда очевидным образом вытекает представление (4.9).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Допустим, что найдется матрица Ляпунова $V(t)$ такая, что выполнены предположения (а) и (б) теоремы. Заметим, что в этом случае $U(k)$ из (4.8) также будет матрицей Ляпунова.

Из (4.9) следует соотношение (4.10). С другой стороны, матрицу $\tilde{X}(k, \varkappa)$ можно найти непосредственно из системы (4.2):

$$\tilde{X}(k, \varkappa) = \begin{pmatrix} X_1(k, \varkappa) & O \\ -J_1(k+1)X_1(k, \varkappa) & O \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где $X_1(k, \varkappa)$ — некоторая фундаментальная матрица решений подсистемы (4.3). Приравняв правые части равенств (4.10) и (4.11), в частности, получим представление (4.4), которое означает приводимость системы (4.3).

Осуществив в (4.2) замену переменных (4.7), получим уравнение (4.1). Таким образом, система (4.2) приводима. Следовательно, приводима и система (3.2). $\square$

5. Правильные системы

Множество всех характеристических показателей ненулевых решений дескрипторной системы (3.2) будем называть ее *спектром*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Система (3.2) называется *правильной*, если выполняются условия:

- (1) существует оператор $\mathcal{R}$ (3.4), имеющий левый обратный оператор и обладающий свойством (3.5);

(2) спектр системы (3.2) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\eta$ ($\eta \leq n$) состоит из конечных чисел и сумма $S = \sum_{j=1}^{\eta} \alpha_j$ совпадает с величиной

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=\kappa}^{k-1} \ln |\det \mathcal{R}[B(j)]|, \quad (5.1)$$

где $1 \leq \kappa < k$, $\mathcal{R}[B(j)] = R_0(j)B(j) + R_1(j)B(j+1) + \dots + R_r(j)B(j+r)$.

Отметим, что в невырожденном случае это определение переходит в определение правильной дискретной системы, приведенное в [22, гл. 1, § 4].

Лемма 3. Пусть выполнены все предположения теоремы 2 и в системе (4.2)

- (1) матрица $J_2(k)$ обратима и $\|J_2^{\pm 1}(k)\| \leq c = \text{const}$ при всех $k \in \mathbf{N}$;
- (2) матрица $J_1(k)$ имеет строгий характеристический показатель равный нулю, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|J_1(k)\| = 0.$$

Тогда для числа элементов спектра системы (3.2) справедливо неравенство $\eta \leq n - d$. Кроме того, спектры систем (3.2), (4.2), (4.3) совпадают и состоят из конечных чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположения 1 леммы следует, что спектр системы (4.3) состоит из не более чем $n - d$ различных элементов [22, гл. 1, § 3, теорема 3.2].

В (4.2) $x_2^{[k]} = -J_1(k)x_1^{[k]}$ ($k = 0, 1, \dots$), поэтому условие 2 гарантирует, что спектр системы (4.2) совпадает со спектром ее подсистемы (4.3). Идентичность спектров систем (3.2) и (4.2) вытекает из того факта, что решения систем (3.2) и (4.2) связаны матрицей перестановок.

Из предположения 1 леммы 3 следует, что спектр системы (4.3) состоит из конечных чисел [22, гл. 1, § 3, теорема 3.1]. По доказанному выше тем же свойством обладают и спектры систем (3.2) и (4.2). $\square$

Теорема 4. В предположениях леммы 3 система (3.2) правильная тогда и только тогда, когда

$$(1) \text{ существует } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=\kappa}^{k-1} \ln |\det J_2(j)| = \sigma;$$

$$(2) \text{ сумма характеристических показателей системы (4.3) } \tilde{S} = \sigma.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [22, гл. 1, § 4], что система (4.3) правильна тогда и только тогда, когда выполняются предположения (1) и (2) теоремы.

Поскольку $\mathcal{R}[B(k)] = \begin{pmatrix} J_1(k) & E_d \\ J_2(k) & O \end{pmatrix} Q^{-1}$, имеем

$$|\det \mathcal{R}[B(k)]| = \frac{|\det J_2(k)|}{|\det Q|} = |\det J_2(k)|,$$

где Q — матрица перестановок из (2.8). В силу последнего обстоятельства из предположений (1) и (2) вытекает существование предела (5.1), значение которого совпадает с величиной $\tilde{S}$. Согласно лемме 3 спектры систем (3.2) и (4.3) совпадают, следовательно, $S = \tilde{S}$. По определению 3 это равносильно правильности системы (3.2). $\square$

Следствие 2. Пусть выполнены все предположения леммы 3. Если система (3.2) правильна, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|J_2^{\pm 1}(k)\| = 0. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказательства теоремы 4 следует, что в предположениях леммы 3 система (3.2) правильная тогда и только тогда, когда правильна подсистема (4.3). Известно [22, гл. 1, § 3, теорема 3.2], что для правильной системы (4.3) выполняется соотношение (5.2). Таким образом, условие (5.2) необходимо для правильности системы (3.2). $\square$

Теорема 5. Пусть выполнены все предположения леммы 3. Для того чтобы система (3.2) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы она была приводима с матрицей

$$U(k) = Q \begin{pmatrix} V(k) & O \\ -J_1(k+1)V(k) & E_d \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где $V(k)$ — обратимая для всех $k \in \mathbf{N}$ матрица порядка $n - d$ такая, что

$$\chi[V^{\pm 1}(k)] = 0, \quad (5.4)$$

где $\chi[V^{\pm 1}(k)] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|V^{\pm 1}(k)\|$ — характеристический показатель матрицы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть система (3.2) правильная. По доказанному выше это возможно тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает система (4.3). В сделанных предположениях (4.3) правильна в том и только том случае, когда она приводима с обратимой матрицей $V(k)$, удовлетворяющей условию (5.4) [22, гл. 2, § 9, теорема 9.1].

С учетом свойства приводимости подсистемы (4.3) нетрудно убедиться, что в результате действия на (3.2) оператора $\mathcal{R}$ (3.4) и замены переменных $x^{[k]} = U(k) \operatorname{col}(\xi_1^{[k]}, \xi_2^{[k]})$, получим систему (4.1). Другими словами, система (3.2) приводима с матрицей (5.3).

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Из приводимости системы (3.2) с матрицей (5.3) следует приводимость системы (4.3) с обратимой на $\mathbf{N}$ матрицей $V(k)$, обладающей свойством (5.4). Тогда в предположениях теоремы система (4.3) правильная [22, гл. 2, § 9, теорема 9.1]. По теореме 4 тем же свойством будет обладать и система (3.2). $\square$

6. Устойчивость по линейному приближению

Из доказательства теоремы 1 следует, что в достаточно малой окрестности тривиального решения системы (1.1) и (2.6), (2.7) имеют одно и то же множество решений. Линеаризуем уравнения (2.6), (2.7) в окрестности точки $x_1^{[k-1]} = 0$:

$$x_2^{[k-1]} = G_1(k)x_1^{[k-1]} - \rho_1(k, x_1^{[k-1]}), \quad (6.1)$$

$$x_1^{[k]} = G_2(k)x_1^{[k-1]} - \rho_2(k, x_1^{[k-1]}), \quad (6.2)$$

где

$$G_1(k) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0), \quad G_2(k) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0). \quad (6.3)$$

Тогда система первого приближения для (2.6), (2.7) будет иметь вид

$$x_2^{[k-1]} = G_1(k)x_1^{[k-1]}, \quad (6.4)$$

$$x_1^{[k]} = G_2(k)x_1^{[k-1]}, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (6.5)$$

Лемма 4. Пусть выполнены все предположения теоремы 1. Тогда системы (3.18), (3.19) и (6.4), (6.5) совпадают, а функции $\rho_i(k, x_1^{[k-1]})$, $i = 1, 2$, получаются из $h_i(k, \bar{x}_{k,r})$ (см. (3.16), (3.17)) подстановкой неявной функции (2.14), (2.16), (2.17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем систему (2.11) в виде

$$\mathcal{F}_r(k, \bar{x}_{k,r}) = 0, \quad (6.6)$$

где $\mathcal{F}_r(k, \bar{x}_{k,r}) = \text{col}(g(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}), \dots, g(k+r, x^{[k+r-1]}, x^{[k+r]}))$.

Предположение 1 теоремы 1 гарантирует выполнение условия (3.3). В этом случае справедливо тождество (3.8), из которого следует, что

$$\begin{pmatrix} J_1(k) & O \\ J_2(k) & O \\ J_3(j) & O \\ J_4(k) & \Psi(k) \end{pmatrix} = \mathcal{M}_r^{-1}(k, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial z_2^{[k]}}(k, 0) \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

В процессе доказательства теоремы 1 было показано, что системе (6.6) удовлетворяет неявная функция (2.14), (2.16), (2.17). При этом часть компонент функции (2.17) имеет вид (2.28). Обозначим оставшиеся компоненты этой функции через

$$x_2^{[k]} = f_3(k, x_1^{[k-1]}). \quad (6.8)$$

По теореме о производной неявной функции производные функции (2.14), (2.16), (2.28), (6.8) удовлетворяют уравнению

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & O \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & O \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & O \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2^{[k]}}(k, 0) \end{pmatrix} = -\mathcal{M}_r^{-1}(k, 0) \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0) & \frac{\partial \mathcal{F}_r}{\partial z_2^{[k]}}(k, 0) \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Из (6.7) и (6.9) с учетом (6.3) вытекают равенства

$$J_1(k) = -G_1(k), \quad J_2(k) = -G_2(k), \quad (6.10)$$

$$J_3(k) = -\frac{\partial f_3}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0), \quad J_4(k) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1^{[k-1]}}(k, 0), \quad \Psi(k) = -\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2^{[k]}}(k, 0), \quad k \in \mathbf{N}. \quad (6.11)$$

Тождества (6.10) гарантируют совпадение систем первого приближения (3.18), (3.19) и (6.4), (6.5).

Линеаризуем уравнения (2.14), (2.16), (2.28), (6.8). Принимая во внимание равенства (6.10), (6.11), получим систему

$$\begin{aligned} x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} + \rho_1(k, x_1^{[k-1]}) &= 0, \\ x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} + \rho_2(k, x_1^{[k-1]}) &= 0, \\ x_2^{[k]} + J_3(k)x_1^{[k-1]} + \rho_3(k, x_1^{[k-1]}) &= 0, \\ z_1^{[k]} + J_4(k)x_1^{[k-1]} + \Psi(k)z_2^{[k]} + \rho_4(k, x_1^{[k-1]}, z_1^{[k]}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Линеаризация системы (6.6) приводит к уравнениям (3.1) при $k = \overline{1, r}$. Осуществим в полученной системе замену переменных (2.8), (2.15) и умножим

ее слева на $\mathcal{M}_r^{-1}(k, 0)$. В силу (3.8) получим уравнения

$$\begin{pmatrix} x_2^{[k-1]} + J_1(k)x_1^{[k-1]} \\ x_1^{[k]} + J_2(k)x_1^{[k-1]} \\ x_2^{[k]} + J_3(k)x_1^{[k-1]} \\ z_1^{[k]} + J_4(k)x_1^{[k-1]} + \Psi(k)z_2^{[k]} \end{pmatrix} + \mathcal{M}_r^{-1}(k, 0) \begin{pmatrix} h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \\ \vdots \\ h(k+r, x^{[k+r-1]}, x^{[k+r]}) \end{pmatrix} = 0. \quad (6.13)$$

По построению подстановка функций (6.12) в систему (6.13) обращает последнюю в тождество в соответствующей окрестности нуля. Ввиду последнего обстоятельства $\rho_1(k, x_1^{[k-1]})$ и $\rho_2(k, x_1^{[k-1]})$ из (6.12) получаются подстановкой в

$$\begin{pmatrix} h_1(k, \bar{x}_{k,r}) \\ h_2(k, \bar{x}_{k,r}) \end{pmatrix} = (E_n \quad O \quad \dots \quad O) \mathcal{M}_r^{-1}(k, 0) \begin{pmatrix} h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) \\ \vdots \\ h(k+r, x^{[k+r-1]}, x^{[k+r]}) \end{pmatrix}$$

неявной функции (2.14), (2.16), (2.28), (6.8) (или, что то же, (2.14), (2.16), (2.17)). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма остается справедливой, если в функции $h_i(k, \bar{x}_{k,r})$ ($i = 1, 2$) предварительно подставить выражения для $x_2^{[k-1]}$, $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ и $z_1^{[k]}$, найденные из уравнений (6.13).

Докажем теоремы об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1). Определения устойчивости, асимптотической устойчивости и т. п. для вырожденных систем формулируются аналогично определениям для невырожденного случая [22, гл. 1, § 2, гл. 2, § 11] за исключением того, что все начальные данные предполагаются согласованными.

Теорема 6. Пусть выполнены все предположения теоремы 1. Кроме того:
1) система (3.19) приводима [22, гл. 2, § 7] и асимптотически устойчива;
2) в системе (3.16), (3.17)

$$\chi[J_1(k)] \leq 0, \quad (6.14)$$

$$\frac{\lim_{\|x_2^{[k-1]}\| \rightarrow 0, \|x^{[j]}\| \rightarrow 0 (j=\overline{k, k+r})} \|h_2(k, \bar{x}_{k,r})\|}{\|x_1^{[k-1]}\|} \rightarrow 0 \quad (6.15)$$

при $\|\bar{x}_{k,r}\| \rightarrow 0$ равномерно по k ; в некоторой окрестности нуля выполняется условие

$$\lim_{\|x_2^{[k-1]}\| \rightarrow 0, \|x^{[j]}\| \rightarrow 0 (j=\overline{k, k+r})} \|h_1(k, \bar{x}_{k,2})\| \leq \mu(k) \|x_1^{[k-1]}\|^m, \quad (6.16)$$

где $m = \text{const} > 1$, $\chi[\mu(k)] \leq 0$.

Тогда тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно [22, гл. 2, § 11, п. 2], что тривиальное решение системы (6.2) асимптотически устойчиво, если выполнены следующие условия:

(а) система первого приближения (6.5) приводима и асимптотически устойчива;

(б) $\frac{\|\rho_2(k, x_1^{[k-1]})\|}{\|x_1^{[k-1]}\|} \rightarrow 0$ при $\|x_1^{[k-1]}\| \rightarrow 0$ равномерно по k .

По лемме 4 системы (3.19) и (6.5) совпадают, поэтому условие (а) вытекает из предположения 1 теоремы.

Рассмотрим соотношение (6.15). Подставив в $h_2(k, \bar{x}_{k,r})$ неявную функцию (2.14), (2.16), (2.17), согласно лемме 4 из (6.15) получим условие (б). Таким

образом, предположения 1 и (6.15) теоремы обеспечивают асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (6.2).

Обратимся к уравнению (6.1). Поскольку в силу леммы 4 $G_1(k) \equiv -J_1(k)$, из (6.14) следует неравенство

$$\chi[G_1(k)] \leq 0. \quad (6.17)$$

В результате подстановки в $h_1(k, \bar{x}_{k,r})$ функций (2.14), (2.16), (2.17) из (6.16) получим условие

$$\|\rho_1(k, x_1^{[k-1]})\| \leq \mu(k) \|x_1^{[k-1]}\|^m, \quad (6.18)$$

где $\mu(k)$ и m такие же, как в (6.16). В случае, когда $\|x_1^{[k]}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, неравенства (6.17) и (6.18) гарантируют, что в (6.1) $\|x_2^{[k]}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Из изложенного выше следует, что в условиях теоремы тривиальное решение системы (6.1), (6.2) асимптотически устойчиво.

В свою очередь, согласно теореме 1 тривиальные решения систем (1.1) и (2.6), (2.7) асимптотически устойчивы одновременно. По построению устойчивость нулевого решения системы (2.6), (2.7) следует из устойчивости тривиального решения системы (6.1), (6.2). Теорема доказана. $\square$

Теорема 7. Пусть выполнены все предположения теоремы 1, а также условия 1 и 2 леммы 3. Кроме того:

- 1) система (3.19) правильная [22, гл. 1, § 4] и все ее характеристические показатели $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-d}$ отрицательны;
- 2) для системы (3.16), (3.17) справедливо соотношение (6.16) и в некоторой окрестности нуля имеет место оценка

$$\lim_{\|x_2^{[k-1]}\| \rightarrow 0, \|x^{[j]}\| \rightarrow 0 (j=\overline{k, k+r})} \|h_2(k, \bar{x}_{k,2})\| \leq \tilde{\mu}(k) \|x_1^{[k-1]}\|^{\tilde{m}}, \quad (6.19)$$

где $\tilde{m} = \text{const} > 1$, $\chi[\tilde{\mu}(k)] \leq 0$.

Тогда тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно лемме 4 из предположения 1 теоремы следует, что система (6.5) правильная и все ее характеристические показатели отрицательны. Если в $h_2(k, \bar{x}_{k,2})$ из соотношения (6.19) подставить функции (2.14), (2.16), (2.17), то получим условие

$$\|\rho_2(k, x_1^{[k-1]})\| \leq \tilde{\mu}(k) \|x_1^{[k-1]}\|^{\tilde{m}},$$

в котором $\tilde{m}$ и $\chi[\tilde{\mu}(k)]$ такие же, как в (6.19). В этом случае тривиальное решение системы (6.2) асимптотически устойчиво [22, гл. 2, § 11, теорема 11.2].

На основании леммы 4 и предположения 2 леммы 3 можно заключить, что $\chi[G_1(k)] = 0$. При доказательстве теоремы 6 было показано, что из условия (6.16) следует оценка (6.18). Это означает, что если $\|x_1^{[k]}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, то в (6.1) $\|x_2^{[k]}\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, тривиальное решение системы (6.1), (6.2) будет асимптотически устойчиво. Доказательство завершается аналогично доказательству теоремы 6. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Теорема останется справедливой, если в условии (6.19) в функцию $h_2(k, \bar{x}_{k,2})$ подставить выражения для $x_2^{[k-1]}$, $x_1^{[k]}$, $x_2^{[k]}$ и $z_1^{[k]}$, найденные из уравнений (6.13). То же самое можно сказать о теореме 6 и ее предположениях (6.15), (6.16). Такая подстановка имеет смысл, если в результате прямой проверки условий возникают неопределенности.

7. Иллюстративный пример

Рассмотрим пример, простота которого обеспечивает легкость проверки выкладок,

$$s(k)x_{(1)}^{[k-1]} + x_{(3)}^{[k-1]} + e^{-k}x_{(1)}^{[k-1]}x_{(2)}^{[k-1]} = 0, \quad (7.1)$$

$$q(k)x_{(1)}^{[k-1]} + (1 + x_{(1)}^{[k-1]})x_{(1)}^{[k]} = 0, \quad (7.2)$$

$$x_{(2)}^{[k]} + x_{(3)}^{[k]} + p(k)x_{(2)}^{[k-1]} + 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]} = 0, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (7.3)$$

$s(k)$, $q(k)$, $p(k)$ — вещественнозначные функции, которые будут определены ниже, $x^{[k]} = \text{col}(x_{(1)}^{[k]}, x_{(2)}^{[k]}, x_{(3)}^{[k]})$.

Удостоверимся, что для этой системы выполняются все предположения теоремы 1. Выписав матрицу $\mathcal{D}_1(k, \bar{x}_{k,1})$, нетрудно убедиться, что при $r = 1$ выполняется предположение 1 теоремы 1, а именно,

$$\text{rank } \Lambda_1(k, x^{[k]}, x^{[k+1]}) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 + x_{(1)}^{[k]} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \forall k \in \mathbf{N},$$

если $x_{(1)}^{[k]}$ удовлетворяет условию малости $|x_{(1)}^{[k]}| < 1$.

Рассмотрим матрицу $\mathcal{D}_2(k, 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|ccc|ccc|ccc} \hline s(k) & 0 & \boxed{1} & & 0 & 0 & 0 & & & & \\ q(k) & 0 & 0 & & \boxed{1} & 0 & 0 & & & & \\ 0 & p(k) & 0 & & 0 & \boxed{1} & 1 & & & & \\ \hline & & & & s(k+1) & 0 & \boxed{1} & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & q(k+1) & 0 & 0 & & \boxed{1} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & p(k+1) & 0 & & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline & & & & & & & & s(k+2) & 0 & \boxed{1} \\ & & & & & & & & q(k+2) & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & p(k+1) & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & \boxed{1} & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \hline \end{array} \right).$$

Очевидно, что в матрице $\mathcal{D}_1(k, 0)$ (она обведена пунктирной линией) имеется обратимая подматрица $\mathcal{M}_1(k, 0)$ шестого порядка. Столбцы этой подматрицы отмечены выделенными рамками единицами, так что условие 2 также выполняется.

В $\mathcal{D}_2(k, 0)$ матрица $\mathcal{M}_2(k, 0)$ 9-го порядка со свойством, сформулированным в условии 3 теоремы, также существует. Она состоит из столбцов, в которых присутствуют обведенные рамками единицы.

Таким образом, все предположения теоремы 1 имеют место при $r = 1$.

Линеаризуем систему (7.1)–(7.3) (ср. (3.1)):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} x^{[k]} + \begin{pmatrix} s(k) & 0 & 1 \\ q(k) & 0 & 0 \\ 0 & p(k) & 0 \end{pmatrix} x^{[k-1]} + h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = 0, \quad (7.4)$$

где $h(k, x^{[k-1]}, x^{[k]}) = \text{col}(e^{-k}x_{(1)}^{[k-1]}x_{(2)}^{[k-1]}, x_{(1)}^{[k-1]}x_{(1)}^{[k]}, 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]})$.

Для системы линейного приближения оператор $\mathcal{R}$ (3.4), (3.5) имеет вид

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & s(k+1) & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{d}.$$

Его действие преобразует систему (7.4) к виду (3.16), (3.17), где $d = 1$, $x_2^{[k-1]} = x_{(3)}^{[k-1]}$, $x_1^{[k]} = \text{col}(x_{(1)}^{[k]}, x_{(2)}^{[k]})$,

$$J_1(k) = \begin{pmatrix} s(k) & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2(k) = \begin{pmatrix} q(k) & 0 \\ s(k+1)q(k) & p(k) \end{pmatrix},$$

$$h_1(k, \bar{x}_{k,r}) = e^{-k} x_{(1)}^{[k-1]} x_{(2)}^{[k-1]}, \quad (7.5)$$

$$h_2(k, \bar{x}_{k,r}) = \begin{pmatrix} x_{(1)}^{[k-1]} x_{(1)}^{[k]} \\ 2x_{(2)}^{[k-1]} x_{(3)}^{[k-1]} + s(k+1)x_{(1)}^{[k-1]} x_{(1)}^{[k]} - e^{-(k+1)} x_{(1)}^{[k]} x_{(2)}^{[k]} \end{pmatrix}.$$

Перейдем к проверке предположений теоремы 6. Предварительно уточним вид параметров системы (7.1)–(7.3). Пусть $\{\phi_j\}_{j=0}^\infty$ — некоторая последовательность. Положим

$$s(k) = \frac{6}{(2 + \cos \phi_k)^2}, \quad q(k) = \frac{2 + \cos \phi_{k+1}}{2(2 + \cos \phi_k)}, \quad p(k) = \frac{2 + \cos \phi_k}{4(2 + \cos \phi_{k+1})}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Легко проверить, что система (3.19) будет приводима к виду

$$\xi_1^{[k]} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 3 & 1/4 \end{pmatrix} \xi_1^{[k-1]} = 0 \quad (7.6)$$

с помощью матрицы Ляпунова

$$U(k) = \begin{pmatrix} 2 + \cos \phi_{k+1} & 0 \\ 0 & 1/(2 + \cos \phi_{k+1}) \end{pmatrix}$$

Очевидно, что характеристические показатели системы (7.6) равны $-\ln 2$ и $-\ln 4$ [22, гл. 1, § 2, теорема 2.3], вследствие чего система (7.6) асимптотически устойчива. Поэтому асимптотически устойчива будет и система (3.19). Условие 1 теоремы 6 выполнено.

Ввиду того, что

$$\chi[J_1(k)] = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln \|J_1(k)\| = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |s(k)| = 0,$$

неравенство (6.14) также справедливо.

Прямое вычисление предела (6.15) приводит к неопределенности. По замечанию 4 теорема остается справедливой, если в функцию $h_2(k, \bar{x}_{k,r})$ подставить выражения

$$x_{(3)}^{[k-1]} = -x_{(1)}^{[k-1]}(s(k) + e^{-k} x_{(2)}^{[k-1]}), \quad x_{(1)}^{[k]} = -x_{(1)}^{[k-1]}(q(k) + x_{(1)}^{[k]}),$$

$$x_{(2)}^{[k]} = -s(k+1)q(k)x_{(1)}^{[k-1]} - p(k)x_{(2)}^{[k-1]} - 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]} - s(k+1)x_{(1)}^{[k-1]}x_{(1)}^{[k]} + e^{-(k+1)}x_{(1)}^{[k]}x_{(2)}^{[k]},$$

найденные из уравнений (6.13). В результате такой подстановки получим функцию $g(k, \bar{x}_{k,r}) = \text{col}(g_1(k, \bar{x}_{k,r}), g_2(k, \bar{x}_{k,r}))$, где

$$g_1(k, \bar{x}_{k,r}) = -(x_{(1)}^{[k-1]})^2 (q(k) + x_{(1)}^{[k]}),$$

$$g_2(k, \bar{x}_{k,r}) = -2x_{(1)}^{[k-1]}x_{(2)}^{[k-1]}(s(k) + e^{-k}x_{(2)}^{[k-1]}) - s(k+1)(x_{(1)}^{[k-1]})^2(q(k) + x_{(1)}^{[k]})$$

$$- e^{-(k+1)} x_{(1)}^{[k-1]} (q(k) + x_{(1)}^{[k]}) (s(k+1)q(k)x_{(1)}^{[k-1]} + p(k)x_{(2)}^{[k-1]} + 2x_{(2)}^{[k-1]}x_{(3)}^{[k-1]} + s(k+1)x_{(1)}^{[k-1]}x_{(1)}^{[k]} - e^{-(k+1)}x_{(1)}^{[k]}x_{(2)}^{[k]}).$$

Нетрудно найти оценку

$$\begin{aligned} \|g(k, \bar{x}_{k,r})\| &\leq 2e^{-k} \|x_1^{[k-1]}\|^3 + \|x_1^{[k-1]}\|^2 (|q(k)| + |x_{(1)}^{[k]}| + 2|s(k)| \\ &\quad + |s(k+1)|(|q(k)| + |x_{(1)}^{[k]}|)) \\ &+ e^{-(k+1)} (|q(k)| + |x_{(1)}^{[k]}|) \|x_1^{[k-1]}\|^2 (|s(k+1)|(|q(k)| + |x_{(1)}^{[k]}|) + |p(k)| + 2|x_{(3)}^{[k-1]}|) \\ &\quad + e^{-2(k+1)} \|x_1^{[k-1]}\| (|q(k)| + |x_{(1)}^{[k]}|) |x_{(1)}^{[k]}| |x_{(2)}^{[k]}|. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Вычислим предел от обеих частей неравенства (7.7) при $x_{(3)}^{[k-1]} \rightarrow 0$, $x_{(1)}^{[k]} \rightarrow 0$, $x_{(2)}^{[k]} \rightarrow 0$, в результате чего получим

$$\begin{aligned} \|g(k, \bar{x}_{k,r})\| &\rightarrow 2e^{-k} \|x_1^{[k-1]}\|^3 + \|x_1^{[k-1]}\|^2 (|q(k)| + 2|s(k)| + |s(k+1)||q(k)|) \\ &\quad + e^{-(k+1)} |q(k)| \|x_1^{[k-1]}\|^2 (|s(k+1)||q(k)| + |p(k)|), \end{aligned} \quad (7.8)$$

откуда с учетом того, что $|s(k)| \leq 6$, $|q(k)| \leq 3/2$, $|p(k)| \leq 3/4$,

$$\lim_{x_{(3)}^{[k-1]} \rightarrow 0, \|x_1^{[k]}\| \rightarrow 0} \|g(k, \bar{x}_{k,r})\| \leq 2e^{-k} \|x_1^{[k-1]}\|^3 + \frac{9}{2} \|x_1^{[k-1]}\|^2 \left(5 + \frac{13}{4} e^{-(k+1)}\right). \quad (7.9)$$

Если в условии (6.15) заменить функцию $h_2(k, \bar{x}_{k,r})$ функцией $g(k, \bar{x}_{k,r})$, то в силу (7.9) оно будет выполнено.

В свою очередь, с учетом (7.5)

$$\lim_{\|x_2^{[k-1]}\| \rightarrow 0, \|x_{(1)}^{[k]}\| \rightarrow 0} \|h_1(k, \bar{x}_{k,2})\| = |e^{-k} x_{(1)}^{[k-1]} x_{(2)}^{[k-1]}| \leq e^{-k} \|x_1^{[k-1]}\|^2,$$

откуда вытекает оценка (6.16). Таким образом, все предположения теоремы 6 выполнены. Согласно этой теореме тривиальное решение системы (7.1)–(7.3) асимптотически устойчиво.

Обратимся к теореме 7. Положим

$$s(k) = \sin \phi_k, \quad q(k) = 1/2, \quad p(k) = 1/4.$$

Очевидно, что в этом случае матрица

$$J_2(k) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ \sin \phi_{k+1}/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

обратима и ограничена вместе со своей обратной при всех $k \in \mathbf{N}$. Матрица $J_1(k) = (\sin \phi_k \ 0)$ имеет строгий характеристический показатель, равный нулю. Так что имеют место предположения 1 и 2 леммы 3. Кроме того, в соответствии с критерием правильности треугольных систем [22, гл. 1, § 4, п. 3] система (3.19) правильная, а ее характеристические показатели равны $-\ln 2$ и $-\ln 4$.

Справедливость соотношения (6.16) установлена выше.

Рассмотрим условие (6.19). Из (7.8) следует, что

$$\lim_{x_{(3)}^{[k-1]} \rightarrow 0, \|x_1^{[k]}\| \rightarrow 0} \|g(k, \bar{x}_{k,r})\| \leq \|x_1^{[k-1]}\|^2 \left(3 + \frac{3}{8} e^{-(k+1)}\right) + 2e^{-k} \|x_1^{[k-1]}\|^3. \quad (7.10)$$

В соответствии с замечанием 4 функцию $h_2(k, \bar{x}_{k,r})$ в (6.19) можно заменить на $g(k, \bar{x}_{k,r})$. При $\|x_{(1)}^{[k-1]}\| < 1$ из (7.10) вытекает оценка

$$\lim_{x_{(3)}^{[k-1]} \rightarrow 0, \|x_1^{[k]}\| \rightarrow 0} \|g(k, \bar{x}_{k,r})\| \leq \tilde{\mu}(k) \|x_1^{[k-1]}\|^2,$$

где $\tilde{\mu}(k) = 3 + \frac{3}{8}e^{-(k+1)} + 2e^{-k}$. Легко видеть, что $\chi[\tilde{\mu}(k)] \leq 0$.

Таким образом, все предположения теоремы 7 выполняются, вследствие чего тривиальное решение системы (7.1)–(7.3) асимптотически устойчиво.

8. Заключение

В статье рассмотрены нелинейные дескрипторные системы с дискретным временем в общих предположениях.

Для исследования устойчивости тривиального решения была построена структурная форма (2.6), (2.7), любое решение которой, начинающееся в достаточно малой окрестности нуля, является решением исходной системы (1.1), и наоборот. Эта структурная форма представляет собой уже невырожденную систему и является частью компонент неявной функции (2.14), (2.16), (2.17), удовлетворяющей системе (2.11).

Одним из преимуществ использованного подхода является то, что для исследования устойчивости нет необходимости находить эту неявную функцию, чтобы затем изучать соответствующие свойства ее линейного приближения (6.4), (6.5). Лемма 4 позволяет делать вывод об устойчивости тривиального решения системы (1.1), исходя из свойств линеаризованной системы (3.1).

Для системы (1.1) (или, что то же, (3.1)) строится система линейного приближения (3.2). С помощью оператора (3.4) система (3.2) преобразуется к невырожденной структурной форме (3.18), (3.19), которая эквивалентна системе (3.2) в смысле решений (теорема 2). Оператор (3.4) приводит линеаризованную систему (3.1) к виду (3.16), (3.17). По построению в некоторой окрестности нуля системы (3.1) (или (1.1)) и (3.16), (3.17) имеют одно и то же множество решений. На основании свойств системы (3.16), (3.17) делается вывод об асимптотической устойчивости тривиального решения системы (1.1) (теоремы 6 и 7).

В статье также получены новые критерии правильности и приводимости для линейных дескрипторных систем вида (3.2) (теоремы 3, 4 и 5).

Предложенный подход не только позволяет исследовать внутреннюю структуру вырожденных систем с дискретным временем, но и автоматически решает проблему согласования начальных данных. В дальнейшем он может быть использован для исследования других качественных свойств линейных и нелинейных дискретных дескрипторных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Luenberger A., Arbel D. G. Singular dynamic Leontief systems // *Econometrica*. 1977. V. 45. P. 991–995.
2. Hemami H., Wyman B. F. Modeling and control of constrained dynamic systems with application to biped locomotion in the frontal plane // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1979. V. 24. P. 526–535.
3. Stevens B. L., Lewis F. L. Aircraft modelling, dynamics and control. New York: John Wiley & Sons, 1991.
4. Zhai D., Zhang Q. L., Li J. H. Fault detection for singular multiple time-delay systems with application to electrical circuit // *J. Franklin Inst.* 2014. V. 351. P. 5411–5436.
5. Zhao F., Zhang Q., Zhang Y. H_∞ filtering for a class of singular biological systems // *IET Control Theory Appl.* 2015. N 9. P. 2047–2055.

6. Zerrougui M., Darouach M., Boutat-Baddas L., Ali H. S. H_∞ filtering for singular bilinear systems with application to a single-link flexible-joint robot // Int. J. Control Autom. Syst. 2014. N 12. P. 590–598.
7. Balaji S. A new Bernoulli wavelet operational matrix of derivative method for the solution of nonlinear singular Lane–Emden type equations arising in astrophysics // J. Comput. Nonlinear Dynam. 2016. V. 11, N 5. 051013-11.
8. Белов А.А., Курдюков А.П. Дескрипторные системы и задачи управления. М.: Физматлит, 2015.
9. Debeljkovic D., Buzurovic I., Simeunovic G. Stability of linear discrete descriptor systems in the sense of Lyapunov // Int. J. Inform. Systems Sci. 2012. V. 7, N 4. P. 303–322.
10. Fang C.-H., Lee L. Stability robustness analysis of uncertain discrete-time descriptor systems // IFAC Proc. Vol. 2002. V. 35, N 1. P. 71–76.
11. Zhang Q., Lam J., Zhang L. On analyzing the stability of discrete descriptor systems via generalized Lyapunov Equations // Multi-objective programming and goal programming. Advance in soft computing. 2003. V. 21. P. 295–300.
12. Mao W.-J. Robust stability and stabilization of discrete-time descriptor systems with uncertainties in the difference matrix // IET Control Theory & Appl. 2012. V. 6, N 17. P. 2676–2685.
13. Kaczorek T., Ruszewski A. Global stability of discrete-time nonlinear systems with descriptor standard and fractional positive linear parts and scalar feedbacks // Arch. Control Sci. 2020. V. 30, N 4. P. 667–681.
14. Wang H.-S., Yung C.-F. Discrete-time H_∞ control problem for nonlinear descriptor systems // IEEE Trans. Aut. Control. 2008. V. 53, N 4. P. 1051–1057.
15. Kaczorek T. Fractional descriptor standard and positive discrete-time nonlinear systems // Bull. Polish Acad. Sci. Techn. Sci. 2015. V. 63, N 3. P. 651–655.
16. Liu Y., Wang T., Gao C., Tang S., Gao Z. Input-to-state stability for a class of discrete-time nonlinear input-saturated switched descriptor systems with unstable subsystems // Neural Comput. & Appl. 2018. V. 29. P. 417–424.
17. Arceo C., Sanchez M., Estrada-Manzo V., Bernal M. Convex stability analysis of nonlinear singular systems via linear matrix inequalities // IEEE Trans. Aut. Control. 2018. V. 64, N 4. P. 1740–1745.
18. Yang C., Zhang Q., Zhou L. Stability of descriptor systems with sector and slope restricted nonlinearities // Int. J. Inform. Systems Sci. 2007. V. 3, N 4. P. 693–707.
19. Zhang J., Zhao Y. Asymptotic stability of nonlinear singular discrete systems // Proc. Intern. Conf. on Multimedia Technol. Hangzhou, 2011. P. 2411–2413.
20. Шилов Г. Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972.
21. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
22. Гайшун И.В. Системы с дискретным временем. Минск: Изд-во Ин-та математики НАН Беларуси, 2001.

Поступила в редакцию 24 июля 2023 г.

После доработки 14 ноября 2023 г.

Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Щеглова Алла Аркадьевна (ORCID 0009-0007-8418-0140)

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН,

ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033

shchegla@icc.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$,
the American Mathematical Society's $\mathrm{T}\mathrm{E}\mathrm{X}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 29.02.2024. Уч.-изд. л. 16,4. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 28.03.2024. Объем файла 1.9 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.