ISSN 2310–001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 65 1 2024

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

Том 65, № 1 (383) **Январь—февраль, 2024**

СОДЕРЖАНИЕ

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2024

Адрес редакции:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 519.6+515.127

ОЦЕНКИ АЛЕКСАНДРОВСКОГО n–ПОПЕРЕЧНИКА КОМПАКТА C^{∞}–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ

В. Н. Белых

Аннотация. Получены двусторонние оценки александровского n-поперечника компакта бесконечно гладких функций, ограниченно вложенного в пространство непрерывных на конечном отрезке функций.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.101

Ключевые слова: компакт, n-поперечник, бесконечно дифференцируемая функция, класс Жевре.

При конструировании алгоритмов численного решения краевых задач речь всегда идет об аппроксимации континуальных объектов X конечномерными и о построении аналогов последних, отправляясь от понятий, допускающих финитную формализацию [1]. Содержательное представление об X извлекается при этом средствами теории приближений, если найден и исследован подходящий для X аппроксимационный аппарат. Процедура финитизации X — этап вынужденный и необходимый, и без потери информации не обходится, причем наилучшее финитное описание объекта X, определенным образом организованного в метрический компакт, приводит к понятию александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ [2, гл.1, § 2, п. 4].

Асимптотика $\alpha_n(X)$, сыграв ключевую роль в оценке предельных аппроксимационных возможностей функционального компакта X, указывает точность, с которой компакт X исчерпывается (с ростом n) компактами топологической размерности n. При этом скорость убывания $\alpha_n(X)$ к нулю тем выше, чем больше «запас» гладкости X. Для компактов X функций конечной и бесконечной гладкости эти асимптотики различаются принципиально: если в первом случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю происходит как некоторая фиксированная степень числа $1/n$, то во втором случае убывание $\alpha_n(X)$ к нулю осуществляется быстрее любой конечной степени $1/n$ (см. [2]).

Таким образом, оказавшись глубоким математическим фактом, понятие александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ привело к переосмыслению самого статуса значимости для реальных вычислений дополнительной (в том числе бесконечной) гладкости компакта X решений задач. В итоге введение числового параметра $\alpha_n(X)$ в обиход компьютерной практики привело (см. [3, гл. 3, § 2, п. 5]) к открытию принципиально новых — *ненасыщаемых* — вычислительных

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0008).

методов, практическая эффективность которых напрямую связана с асимптотикой убывания $\alpha_n(X)$ к нулю при $n \to \infty$.

Отличительная черта ненасыщаемых численных методов — способность автоматически с ростом параметра n подстраиваться к любым аппроксимационным возможностям компакта X решений задач, т. е. с ростом «запаса» гладкости X ненасыщаемый численный метод (при прочих равных условиях) самосовершенствуется, черпая приращение своей практической эффективности непосредственно в дифференциальной природе X (*феномен ненасыщаемости* [4]). Так что экстраординарная гладкость решений задач, прежде находившаяся на периферии насущных интересов цифровых вычислений, становится их активным персонажем. При этом пик эффективности ненасыщаемого численного метода — *экспоненциальная сходимость* — достигается на классе бесконечно гладких X. И это принципиально отличает ненасыщаемые численные методы от методов насыщаемых, т. е. имеющих главный член погрешности: конечно разностных, конечных элементов, квадратур и др.

Существуют классы задач (например, эллиптические [5, 6]), компакты X решений которых состоят из неаналитических C^{∞}-гладких функций различной природы. Классы таких функций, занимающих промежуточное положение между функциями аналитическими и функциями конечной гладкости, задаются обычно указанием мажоранты роста их k-х производных при $k \to \infty$. При этом формулировка основных допущений на рост мажоранты становится одним из способов их классификации.

В работе получены двусторонние оценки (снизу и сверху) александровского n-поперечника $\alpha_n(X)$ компакта C^{∞}-гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на конечном отрезке функций. Получение результата основано на новой характеризации класса C^{∞}-гладких функций, апеллирующей к его наилучшему чебышёвскому описанию полиномами [4].

1. Компакт: ε-покрытие, размерность, александровский n-поперечник

Пусть X — компакт в банаховом пространстве B и Υ — его конечное открытое покрытие. Выбор конечного покрытия Υ всегда неоднозначен, поскольку согласно теореме Бореля — Лебега у рассматриваемой задачи есть много решений. Каково, однако, должно быть топологическое свойство элементов покрытия Υ, чтобы оно могло быть положено в основу процедуры однозначного отбора нужного покрытия?

Из совокупности общих топологических свойств элементов покрытия Υ уместно выделить следующее. Пусть $m \geq 0$ — целое число. Покрытие Υ имеет *кратность* m, если любые $(m+1)$ его элементов не пересекаются и существуют m элементов, имеющих непустое пересечение.

Ранее, говоря о финитизации компакта X, мы несколько неопределенно характеризовали ее, указывая лишь на то, что элементы X определяются конечным набором числовых независимых параметров. Априори вовсе не очевидно, что идею числа измерений (или размерности) можно математически сформулировать для столь общих объектов, как функциональный компакт. Понятие кратности можно вполне однозначно связать с аппроксимационной размерностью компакта X, что делает восприятие числа измерений внутренне непротиворечивым.

Определение (см. [7, гл. 1, § 1.7, п. 1.7.3]). Компакт X *имеет тополо-*

гическую размерность m ($\dim X = m$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-покрытие X открытыми множествами диаметра $< \varepsilon$ и кратности $\leq m + 1$ и m есть минимальное целое число, обладающее этим свойством.

Таким образом, с каждым ε-покрытием компакта X можно всегда связать некое натуральное число, а именно число m, для которого в X существует точка, принадлежащая m различным элементам покрытия Υ. Это определение размерности вполне соответствует интуитивному представлению о размерности куба $\mathbb{I}^m$ с ребром $d > 0$,

$$\mathbb{I}^m \equiv \mathbb{I}^m_d = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m : |\xi_r| \leq d/2, r = 0, 1, \ldots, m-1\},$$

поскольку его содержательность подкреплена теоремой Лебега — Брауэра: $\dim \mathbb{I}^m = m$.

Александровский m-поперечник компакта X определяется так [2, гл. 1, § 2, п. 4]:

$$\alpha_m(X, B) = \inf_{(X^m,\nu)} \sup_{f \in X \subset B} \|f - \nu(f)\|, \tag{1.1}$$

где inf берется по всевозможным парам (X^m, ν), состоящим из лежащего в банаховом пространстве B компакта X^m топологической размерности m и непрерывного отображения $\nu : X \to X^m$.

Введение П. С. Александровым [8] понятия m-поперечника свидетельствует о принципиально важной связи компакта X в банаховом пространстве B с элементарными геометрическими образованиями X^m в нем. Иными словами, каждую точку f компакта $X \subset B$ можно задавать с точностью ε непременно m «координатами», если желать, чтобы эти координаты непрерывно зависели от точки, а сама точка — от координат.

Пусть $m \geq 0$ — целое число и

$$l^m_\infty = \{\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbb{R}^m,\ |\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max_{r=0,1,\ldots,m-1} |\xi_r|\}.$$

Справедлива следующая важная для дальнейшего (см. [1])

Лемма 1. *Если $\mathbb{I}^m_d$ — куб с длиной ребра d и $\dim \mathbb{I}^m_d = m$, то $\alpha_{m-1}(\mathbb{I}^m_d, l^m_\infty) = d/2$.*

Согласно следствию теоремы 1.4 из работы [1] справедливость леммы вытекает из теоремы 2 (см. [7, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.1]) и следствия теоремы 4 (см. [7, гл. 4, § 4.1, п. 4.1.2]).

2. Периодический случай: основные факты, определения и результат

Проведению оценок $\alpha_m(X)$ предпошлем ряд вспомогательных результатов, связанных непосредственно с приближением C^∞-гладких периодических функций тригонометрическими многочленами. Начнем с определений.

Пусть $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси R функций с нормой $\|\varphi\| = \max_{t \in [0,2\pi]} |\varphi(t)|$. Пространство $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ будем трактовать как пространство $C \equiv C[S]$ непрерывных на единичной окружности S функций, которые остаются непрерывными при 2π-периодическом их продолжении на всю ось R.

Пусть $\mathscr{T}^m \subset \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс тригонометрических полиномов порядка $\leq m$ и

$$e_m(\varphi) = \inf_{\iota_m \in \mathscr{T}^m} \|\varphi - \iota_m\|, \quad m \geq 0,\ \varphi \in C. \tag{2.1}$$

При этом inf всегда достигается на некотором элементе (полиноме) из $\mathscr{T}^m$.

Пространство 2π-периодических бесконечно дифференцируемых на S функций обозначим через $C^\infty \equiv C^\infty[S]$; оно обладает абсолютным топологическим базисом [9]:

$$\{\pi_p(t)\} \equiv \{\pi_0(t) = 1/2,\ \pi_{2p-1}(t) = \sin pt,\ \pi_{2p}(t) = \cos pt\ \forall p > 0\}.$$

Наличие базиса означает, что в C^∞ допустимо рассмотрение рядов $\sum\limits_{p=0}^{\infty} c_p \pi_p(t)$ со следующим соглашением о сходимости: ряд абсолютно сходится, т. е.

$$\sum_{p=0}^{\infty} \|c_p \pi_p^{(k)}\| < \infty \quad \forall k \geq 0,$$

и своей суммой имеет элемент φ из C^∞. Здесь $\pi_p^{(k)}(t) = d^k \pi_p(t)/dt^k$.

Таким образом, любую периодическую C^∞-гладкую функцию $\varphi(t)$ можно отождествить с ее тригонометрическим рядом

$$\varphi(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} c_p \pi_p(t) \equiv \frac{c_0}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} (c_{2p} \cos pt + c_{2p-1} \sin pt). \tag{2.2}$$

Ряд (2.2) равномерно сходится в C, сходится он и в смысле гильбертова пространства $L_2[S]$, а в силу полноты и ортогональности функций $\{\pi_p(t)\}$ является рядом Фурье своей суммы $\varphi(t)$:

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt, \quad \begin{pmatrix} c_{2p} \\ c_{2p-1} \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \varphi(t) \begin{pmatrix} \cos pt \\ \sin pt \end{pmatrix} dt \quad \forall p \geq 1.$$

Как было отмечено, компакты C^∞-гладких функций задаются указанием мажоранты роста их k-х производных, зависящей от целого параметра $k \geq 0$, причем формулировка основных допущений на рост мажоранты $G(k)$ при $k \to \infty$ является одним из способов классификации классов бесконечно гладких функций. При этом замкнутые ограниченные части пространства C^∞ компактны [10], т. е. множество

$$\widetilde{K}_G^\infty \equiv \{f \in C^\infty : \|f\| \leq G(0),\ \|f^{(k)}(t)\| \leq G(k)\ \forall k > 0\} \tag{2.3}$$

с положительной числовой последовательностью $\{G(k)\}$ является компактом в C^∞, а в силу классической теоремы Арцела $\widetilde{K}_G^\infty$ — компакт и в пространстве C.

Рассмотрим новый подход к описанию периодических C^∞-гладких функций. Он базируется на учете классических неравенств Джексона (см. [4])

$$e_m(f) \leq \Lambda_k \cdot \frac{\|f^{(k)}\|}{m^k} \quad (m > 0),\ k \geq 0,\ \Lambda_k = \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \leq \pi/2, \tag{2.4}$$

и состоит в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(k)\}$ монотонных функций $\mu(r)$ и $\vartheta(r)$ вещественного аргумента r, обладающих на полуоси $r \geq 0$ рядом полезных свойств.

Пусть $\{G(k)\}$ — последовательность положительных чисел и

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty. \tag{2.5}$$

Сопоставим последовательности $\{G(k)\}$ функции числового аргумента $r \in [0, \infty)$:

$$\mu(r) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \le r < 1, \\ \inf\limits_{k \ge 0} \frac{G(k)}{r^k} & \text{при} \quad r \ge 1, \end{cases}$$

$$\vartheta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \le r < 1, \\ \max\{k \mid \mu(r) = \frac{G(k)}{r^k}\} & \text{при} \quad r \ge 1. \end{cases}$$

Знак inf в определении $\mu(r)$ в силу (2.5) всегда можно заменить на min и потому

$$\mu(r) = \min_{k \ge 0} \frac{G(k)}{r^k} = \frac{G[\vartheta(r)]}{r^{\vartheta(r)}} \quad \text{и} \quad e_m(f) \le \frac{\pi}{2}\mu(m). \tag{2.6}$$

Справедлива (см. [4])

Теорема 1. *При $r \ge 1$ функция $\vartheta(r)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r. Функция $\mu(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна и стремится к нулю при $r \to \infty$. При этом*

$$\mu(r) = G(0) e^{-\int\limits_1^r \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt}, \quad r \ge 1. \tag{2.7}$$

Следствие 1. *Функция $\mu(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ быстрее любой степени числа r, т. е. для любого $p \ge 0$ справедливо равенство $\lim\limits_{r\to\infty} r^p \mu(r) = 0$.*

Упомянутые классы периодических C^∞-гладких функций непусты: им принадлежат, например, известные классы Жевре, имеющие мажоранту $H(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($\alpha > 1, c > 0,\ A \ge 1$ — константы).

К формальным достоинствам представления (2.2) следует отнести то обстоятельство, что оно нелокально и допускаемая им форма приближенного задания элемента $\varphi(t)$ из C^∞ осуществляется частичной суммой Фурье $\varphi_N(t)$, включающей конечное число элементов базиса $\{\pi_p(t)\}$. Практическая польза такого представления характеризуется количеством ассоциированных с ним коэффициентов разложения $\varphi(t)$ по базису и потому определяется лишь ограничениями общематематической природы самого класса C^∞. Перейдем к формулировке такого рода ограничений.

Поскольку компакт $\widetilde{K}_G^\infty \subset C^\infty$ задается (см. (2.3)) указанием мажоранты k-х производных его элементов и при этом вкладывается в пространство равномерно сходящихся рядов (2.2), возникает вопрос: насколько порядки убывания к нулю коэффициентов c_p разложения элементов φ из $\widetilde{K}_G^\infty$ по тригонометрическому базису $\{\pi_p(t)\}$ согласованы с порядком роста мажоранты $G(k)$, задающей компакт $\widetilde{K}_G^\infty$?

Справедлива следующая

Лемма 2 [10]. *Если функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$, то*

$$|c_0| \le 2G(0), \quad |c_{2p-1}| \le 2\mu(p), \quad |c_{2p}| \le 2\mu(p) \quad \forall p \ge 1.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции φ из C^∞ удовлетворяют

$$|c_0| \le G(0), \quad |c_{2p-1}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2}, \quad |c_{2p}| \le \frac{1}{8}\frac{\mu(p)}{p^2} \quad \forall p \ge 1,$$

то функция φ принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$ (*см.* (2.3)).

Отождествив компакт $\widetilde{K}_G^\infty$ с множеством тригонометрических рядов (2.2), мы создаем конструктивный аппарат для получения нужных оценок.

Но прежде обратим внимание на то, что приближение периодических функций тригонометрическими многочленами порядка не выше $m-1$ определяет подпространство $\mathscr{T}^{m-1} \subset C$ многочленов топологической размерности $\dim \mathscr{T}^{m-1} = 2m-1$.

Оценка сверху для $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ следует из определений (1.1), (2.1) и (2.6):

$$\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C) \le \inf_{(\mathscr{T}^{m-1},\nu)} \sup_{f\in\widetilde{K}_G^\infty\subset C} \|f-\nu(f)\| = \sup_{f\in\widetilde{K}_G^\infty\subset C} e_{m-1}(f) \le \frac{\pi}{2}\mu(m-1). \tag{2.8}$$

Для величины $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ найдем оценку снизу. Соображения об использовании свойств монотонности поперечника $\alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C)$ по включению множеств и невозрастания его величины как функции индекса m сыграли здесь необходимую роль. Так что если некоторый компакт X_0 можно линейно и изометрично отобразить в компакт $\widetilde{K}_G^\infty$, то

$$\alpha_{2m}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(X_0, C) \le \alpha_{2m-1}(\widetilde{K}_G^\infty, C).$$

В качестве X_0 выберем куб $\mathbb{Q}^{2m+1} \subset \widetilde{K}_G^\infty$, для которого величина $\alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C)$ оценивается снизу.

Действительно, пусть f из $\widetilde{K}_G^\infty$ и $f(t) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} c_r\pi_r(t)$. Тогда для любого $k \ge 0$

$$\|f^{(k)}\| \le G(k), \quad \mu(r) = \min_{k\ge 0}\frac{G(k)}{r^k}, \quad \big\|\pi_r^{(k)}(t)\big\| = \left\|\begin{pmatrix}\cos rt\\ \sin rt\end{pmatrix}^{(k)}\right\| \le r^k.$$

Введя функции

$$\phi_r(t) \equiv \frac{\mu(m)}{2(m+1)}\pi_r(t) = \frac{\mu(m)}{2(m+1)}\begin{pmatrix}\cos rt\\ \sin rt\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\phi_r^c(t)\\ \phi_r^s(t)\end{pmatrix}, \quad 0 \le r \le m,$$

получаем

$$\begin{aligned}\big\|\phi_r^{(k)}(t)\big\| &= \frac{\mu(m)}{2(m+1)}\big\|\pi_r^{(k)}(t)\big\| \le \frac{G(k)\mu(m)}{2(m+1)}\cdot\frac{r^k}{G(k)} \le \frac{G(k)\mu(m)}{2(m+1)}\cdot\left(\min_{k\ge 0}\frac{G(k)}{r^k}\right)^{-1}\\ &= \frac{G(k)\mu(m)}{2(m+1)}\cdot(\mu(r))^{-1} \le \frac{G(k)}{2(m+1)}\cdot\frac{\mu(m)}{\mu(r)} \le \frac{G(k)}{2(m+1)} \quad \forall k \ge 0.\end{aligned}$$

Функции $\phi_r(t)$ линейно независимы и принадлежат $\widetilde{K}_G^\infty$; их линейная комбинация $\omega(t) = \sum\limits_{r=0}^{m}\big(\xi_r\phi_r^c(t) + \eta_r\phi_r^s(t)\big)$ при $|\xi_r|, |\eta_r| \le 1$ также принадлежит компакту $\widetilde{K}_G^\infty$:

$$\|\omega^{(k)}(t)\| \le \sum_{r=0}^{m}\big(|\xi_r|\big\|\phi_r^{c(k)}(t)\big\| + |\eta_r|\big\|\phi_r^{s(k)}(t)\big\|\big) \le \sum_{r=0}^{m}\frac{G(k)}{m+1} \le G(k) \quad \forall k \ge 0.$$

В компакте $\widetilde{K}_G^\infty$ определим семейство функций

$$\mathbb{Q}^{2m+1} = \left\{\omega(t) = \sum_{r=0}^{m}(\xi_r\cos rt + \eta_r\sin rt) : |\xi_r|, |\eta_r| \le \frac{\mu(m)}{2(m+1)}, r = 0, 1, \dots, m\right\}, \tag{2.9}$$

где $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_m; \eta_1, \dots, \eta_m$ — вещественные числа.

Пусть $|\boldsymbol{\xi}|_\infty = \max\{|\xi_0|/2, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|\}$, $|\boldsymbol{\eta}|_\infty = \max\{|\eta_1|, |\eta_2|, \dots, |\eta_m|\}$.

Куб

$$\mathbb{I}^{2m+1} = \left\{\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^{2m+1} : |\zeta_r| \le \frac{\mu(m)}{2(m+1)},\ r = 0, 1, \dots, 2m\right\}$$

топологической размерности $2m+1$ с длиной ребра $d = \frac{\mu(m)}{m+1}$ линейно и гомеоморфно с не уменьшением расстояния (т. е. изометрично (см. [3, гл. 3, § 7, предложение 3]) вкладывается в компакт $\widetilde{K}^\infty_G$, и его образом является множество (2.9), поскольку

$$|\boldsymbol{\zeta}|_\infty \equiv \max(|\boldsymbol{\xi}|_\infty, |\boldsymbol{\eta}|_\infty) \le \sqrt{2}\left\|\xi_0/2 + \sum_{r=1}^{m}(\xi_r \cos rt + \eta_r \sin rt)\right\|. \qquad (*)$$

Оценка $(*)$ легко получается из неравенства Бесселя (см. [3, гл. 2, § 3, п. 1]):

$$|\boldsymbol{\zeta}|^2_\infty \equiv \left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{2}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2 \le \left(\max\left\{\frac{|\xi_0|}{\sqrt{2}}, |\xi_1|, \dots, |\xi_m|, |\boldsymbol{\eta}|_\infty\right\}\right)^2$$
$$\le \frac{\xi_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{m}\left(\xi_r^2 + \eta_r^2\right) \le \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \omega^2(t)\,dt \le 2\max_{t\in[0,2\pi]}|\omega(t)|^2 = 2\|\omega\|^2.$$

Согласно сказанному выше и лемме 1 приходим к нужной оценке снизу:

$$\alpha_{2m}\bigl(\widetilde{K}^\infty_G, C\bigr) \ge \alpha_{2m}(\mathbb{Q}^{2m+1}, C) \ge \frac{1}{\sqrt{2}}\alpha_{2m}\bigl(\mathbb{I}^{2m+1}, l^{2m+1}_\infty\bigr) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu(m)}{2(m+1)}. \qquad (2.10)$$

Теорема 2. *Верны следующие оценки александровских поперечников компакта $\widetilde{K}^\infty_G$ периодических C^∞-гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на окружности S периодических функций* (см. (2.8), (2.10), (2.7))*:*

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\mu(m)}{(m+1)} \le \alpha_{2m}\bigl(\widetilde{K}^\infty_G, C\bigr) \le \alpha_{2m-1}\bigl(\widetilde{K}^\infty_G, C\bigr) \le \frac{\pi}{2}\mu(m-1), \quad m \ge 1 \text{ целое}.$$

Следствие 2. *Классы Жевре с мажорантой $H(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($\alpha > 1$, $c > 0$, $A \ge 1$) обладают следующими оценками их поперечников* (*подробности см. в* [4])*:*

$$\frac{c}{2\sqrt{2}}\frac{1}{(m+1)}e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m}} \le \alpha_{2m}\bigl(\widetilde{K}^\infty_H, C\bigr) \le \alpha_{2m-1}\bigl(\widetilde{K}^\infty_H, C\bigr) \le \pi\frac{c}{2}\beta e^{-\varrho\sqrt[\alpha]{m-1}}.$$

Здесь $\varrho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A}$ и $\beta = \exp(\alpha e\sqrt[\alpha]{A}/2)$ — вещественные постоянные.

3. Непериодический случай: определения и результат

Что касается класса C^∞-гладких непериодических на отрезке $I \equiv [-1, 1]$ функций, то здесь ситуация отчасти похожа на уже рассмотренный периодический случай.

Для получения оценок поперечника $\alpha_n(X, C)$ компакта X непериодических C^∞-гладких на отрезке I функций использован ряд фактов, связанных с их приближением алгебраическими многочленами. Начнем с определений.

Пусть $C \equiv C[I]$ — пространство непериодических непрерывных на отрезке I вещественных функций $\psi(t)$ с нормой $\|\psi\| = \max\limits_{t\in[-1,1]} |\psi(t)|$; $\mathscr{P}^n \subset C$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше n ($n \geq 0$ целое); $C^k \equiv C^k[I]$ — пространство функций, k раз непрерывно дифференцируемых на отрезке I.

Обозначим через $E_n(\psi) \equiv \inf\limits_{\upsilon_n\in\mathscr{P}^n} \|\psi - \upsilon_n\|$ наилучшее чебышёвское приближение функции ψ из C многочленом, причем inf всегда достигается на подпространстве $\mathscr{P}^n$.

Через $C^\infty \equiv C^\infty[I]$ обозначим пространство непериодических бесконечно дифференцируемых на I функций. Известно [9, 11], что набор функций

$$\{T_n(t)\} \equiv \{T_n(t) = \cos(n \arccos t)\ \forall n \geq 0\}$$

составляет абсолютный топологический базис пространства C^∞, т. е. любая функция $\psi(t)$ из C^∞ представима своим разложением по базису $\{T_n(t)\}$:

$$\psi(t) = \frac{c_0}{2} T_0(t) + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n T_n(t). \tag{3.1}$$

Ряд (3.1) равномерно сходится в C и в гильбертовом пространстве $L_2[I, \phi]$ с весом $\phi(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ и потому в силу полноты и ортогональности функций $\{T_n(t)\}$ является рядом Фурье — Чебышёва своей суммы $\psi(t)$, т. е. выполняются равенства

$$c_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\psi(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad c_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} \frac{\psi(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \quad \forall n > 0.$$

Для конструктивного описания функций ψ из пространства C^k алгебраическими многочленами воспользуемся теоремой Джексона — Зинвела [12]:

$$E_n(\psi) \leq \Lambda_k \|\psi^{(k)}\| \frac{(n-k)!}{n!}, \ n \geq k \geq 0, \quad \Lambda_k = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{(k+1)\nu}}{(2\nu+1)^{k+1}} \leq \frac{\pi}{2}. \tag{3.2}$$

Здесь Λ_k — классические постоянные Фавара: $2/\pi \leq \Lambda_k \leq \pi/2$.

Правую часть неравенства (3.2) удобно преобразовать к следующему виду (см. [11]):

$$E_n(\psi) \leq \frac{\pi}{2}\left(\sqrt[k]{\frac{n^k(n-k)!}{n!}}\right)^k \frac{\|\psi^{(k)}\|}{n^k} \leq \frac{\pi}{2}\frac{e^k\|\psi^{(k)}\|}{n^k}, \quad n \geq k \geq 0. \tag{3.3}$$

Как было отмечено, одним из факторов, классифицирующим C^∞-гладкие функции на конечном отрезке I, является характер роста их мажоранты $G(k)$:

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty. \tag{3.4}$$

В работе [4] указан новый способ описания непериодических C^∞-гладких функций, состоящий в указании пары эффективно конструируемых по набору $\{G(k)\}$ монотонных функций $\lambda(r)$ и $\theta(r)$ вещественного аргумента $r \geq 0$, связанных посредством неравенства (3.3) с мажорантой $G(k)$. Напомним определения этих функций.

Пусть $f \notin \mathscr{P}^n$, $\|f\| \le G(0)$, $\|f^{(k)}\| \le G(k)$ и выполнено условие (3.4). Сопоставим последовательности $\{G(k)\}$ следующие функции числового аргумента $r \ge 0$:

$$\lambda(r) = \begin{cases} G(0), & 0 \le r < 1, \\ \min\limits_{0 \le k \le r} \frac{G(k)}{r^k}, & r \ge 1, \end{cases}$$

$$\theta(r) = \begin{cases} 0, & 0 \le r < 1, \\ \max\bigl\{k \mid 1 \le k \le r \ \&\ \lambda(r) = \frac{G(k)}{r^k}\bigr\}, & r \ge 1. \end{cases}$$

Теорема 3 [4]. *При $r \ge 1$ функция $\theta(r)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с r. Функция $\lambda(r)$ строго монотонно убывает, непрерывна справа и стремится к нулю при $r \to \infty$. Точками, где функция $\lambda(r)$ терпит разрывы слева, являются точки разрыва $r = r_i$ функции $\theta(r)$. При этом для любого $r \ge 0$ справедливо представление*

$$\lambda(r) = G(0) e^{-\int\limits_1^r \frac{\theta(t)}{t}\,dt} e^{-\sum\limits_{1<r_i\le r} |\sigma_i|}, \quad r \ge 1. \tag{3.5}$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln\lambda(r_i - 0) - \ln\lambda(r_i)$ для всех $i > 0$.

Следствие 3. *Функция $\lambda(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$ быстрее любой степени r, т. е. для любого $p \ge 0$ верно предельное соотношение $\lim\limits_{r\to\infty} r^p \lambda(r) = 0$.*

Неравенство (3.3) наряду со сказанным выше переписывается так:

$$E_n(f) \le \frac{\pi}{2}\lambda\left(\frac{n}{e}\right) \quad \text{и} \quad \lambda(x) = \min_{0\le k\le x} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}}. \tag{3.6}$$

Здесь функция $\theta(x)$ указывает (с ростом числа x) порядок убывания к нулю чебышёвского аппроксимационного процесса, а функция $\lambda(x)$ определяет его точность.

Упомянутые классы C^∞-гладких функций непусты: им принадлежат известные классы Жевре с мажорантой $H(k) = cA^k k^{\alpha k}$ ($\alpha > 1$, $c > 0, A \ge 1$ — константы).

Замкнутое ограниченное множество в C^∞ есть компакт [10, 11], т. е. множество

$$K_G^\infty \equiv \{f \in C^\infty : \|f\| \le G(0),\ \|f^{(k)}\| \le G(k)\ \forall k > 0\} \tag{3.7}$$

с заданной числовой последовательностью $\{G(k)\}$, — компакт в пространстве C^∞ и потому в силу теоремы Арцела множество K_G^∞ — компакт и в пространстве C.

Получению оценок александровского поперечника $\alpha_n\bigl(K_G^\infty, C\bigr)$ предпошлем ряд результатов, связанных с разложением функций ψ по базису в C^∞. Как было отмечено, практическая польза Фурье-разложения функции $\psi(t)$ по базису определяется количеством слагаемых, присутствующим в частичной сумме $\psi_N(t)$ и потому определяется ограничениями общематематической природы самого класса C^∞.

Перейдем к формулировке этих ограничений, описав компакт K_G^∞ в терминах коэффициентов разложения его элементов по многочленам Чебышёва $\{T_n(t)\}$ (см. (3.1)).

Справедлива нетривиальная

Лемма 4 [11]. *Если функция ψ принадлежит компакту K_G^∞, то*

$$|c_0| \le G(0), \quad |c_n| \le \pi\lambda\left(\frac{n}{e}\right) \quad \forall n > 0.$$

Обратно, если коэффициенты разложения функции ψ из C^∞ удовлетворяют

$$|c_0| \le \frac{1}{2}G(0), \quad |c_n| \le \frac{3}{\pi^2}\frac{\lambda(n^2)}{p^2} \quad \forall n > 0,$$

то функция ψ принадлежит компакту K_G^∞.

Оценка сверху александровского поперечника $\alpha_n\bigl(K_G^\infty, C\bigr)$ извлекается из его определения (1.1). В самом деле, последовательно находим (см. (3.6))

$$\alpha_n(K_G^\infty, C) = \inf_{(X^n,\nu)} \sup_{f\in K_G^\infty\subset C} \|f-\nu(f)\| \le \sup_{f\in K_G^\infty\subset C} E_n(f) \le \frac{\pi}{2}\lambda\left(\frac{n}{e}\right). \tag{3.8}$$

Для оценки величины $\alpha_n\bigl(K_G^\infty, C\bigr)$ снизу построим $(n+1)$-мерный куб $\mathbb{F}^{n+1}$ в компакте K_G^∞. Действительно, пусть f из K_G^∞ и выполнены условия (см. [13]):

$$f(t) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty c_n T_n(t), \quad \|f^{(k)}\| \le G(k), \quad \lambda(r) = \min_{0\le k\le r}\frac{G(k)}{r^k}, \quad \bigl\|T_r^{(k)}(t)\bigr\| \le r^{2k}.$$

Тогда если $n \ge r \ge 0$, то, поскольку для функций $\phi_r(t) = \lambda(n^2)(n+1)^{-1}T_r(t)$ производные порядков $k > r$ равны тождественно нулю, можно считать $k \le r$ и получить

$$\begin{aligned}\bigl\|\phi_r^{(k)}(t)\bigr\| &= \frac{\lambda(n^2)}{n+1}\bigl\|T_r^{(k)}(t)\bigr\| \le \frac{G(k)\lambda(n^2)}{n+1}\frac{r^{2k}}{G(k)} = \frac{G(k)\lambda(n^2)}{n+1}\left(\frac{G(k)}{r^{2k}}\right)^{-1}\\ &\le \frac{G(k)\lambda(n^2)}{n+1}\left(\min_{0\le k\le r^2}\frac{G(k)}{(r^2)^k}\right)^{-1} \le \frac{G(k)\lambda(n^2)}{n+1}(\lambda(r^2))^{-1} \le \frac{G(k)}{n+1}\frac{\lambda(n^2)}{\lambda(r^2)} \le \frac{G(k)}{n+1}.\end{aligned}$$

Функции $\phi_r(t)$ $(0 \le r \le n)$ линейно независимы и принадлежат K_G^∞; их линейная комбинация $\varkappa(t) = \sum\limits_{r=0}^n \varpi_r\phi_r(t)$ при $|\varpi_r| \le 1$ также принадлежит компакту K_G^∞:

$$\|\varkappa^{(k)}(t)\| \le \sum_{r=0}^n |\varpi_r|\bigl\|\phi_r^{(k)}(t)\bigr\| \le \sum_{r=0}^n \frac{G(k)}{n+1} \le G(k).$$

Следуя схеме доказательства теоремы 2, определим в K_G^∞ множество функций

$$\mathbb{F}^{n+1} = \left\{\varkappa(t) = \sum_{r=0}^n \varpi_r T_r(t) : |\varpi_r| \le \frac{\lambda(n^2)}{n+1},\ r = 0,1,\dots,n\right\}, \tag{3.9}$$

где $\varpi_0, \varpi_1, \dots, \varpi_n$ — вещественные числа.

Пусть $|\boldsymbol{\varpi}|_\infty = \max(|\varpi_0|/2, |\varpi_1|, \dots, |\varpi_n|)$.

Куб $\mathbb{J}^{n+1} = \bigl\{\boldsymbol{\varpi} \in \mathbb{R}^{n+1} : |\varpi_r| \le \frac{\lambda(n^2)}{n+1},\ r = 0,1,\dots,n\bigr\}$ топологической размерности $n+1$ с ребром $d = 2\frac{\lambda(n^2)}{n+1}$ линейно и гомеоморфно с не уменьшением расстояния, т. е. изометрично (см. [3, гл. 3, § 7, предложение 3]), вкладывается в компакт K_G^∞, и его образом является множество (3.9), поскольку

$$|\boldsymbol{\varpi}|_\infty \le \sqrt{2}\left\|\frac{\varpi_0}{2} + \sum_{r=1}^n \varpi_r T_r(t)\right\|. \tag{$**$}$$

Оценка $(**)$ следует из неравенства Бесселя для ортогональны с весом рядов:

$$|\boldsymbol{\varpi}|_\infty^2 \equiv (\max\{|\varpi_0|/2, ||\varpi_1|, \dots, |\varpi_n|\})^2 \le (\max\{|\varpi_0|/\sqrt{2}, |\varpi_1|, \dots, |\varpi_n|\})^2$$
$$\le \frac{\varpi_0^2}{2} + \sum_{r=1}^{n} \varpi_r^2 \le \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\varkappa^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \le 2 \max_{t\in[-1,1]} |\varkappa(t)|^2 = 2\|\varkappa\|^2.$$

Отсюда с учетом сказанного выше и леммы 1 приходим к оценке снизу:

$$\alpha_n\big(K_G^\infty, C\big) \ge \alpha_n(\mathbb{F}^{n+1}, C) \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha_n\big(\mathbb{J}^{n+1}, l_\infty^{n+1}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\lambda(n^2)}{n+1}, \quad n \ge 0. \tag{3.10}$$

Теорема 4. *Оценки александровского поперечника $\alpha_n(K_G^\infty, C)$ компакта K_G^∞ непериодических C^∞-гладких функций, ограниченно вложенного в пространство C непрерывных на отрезке $I = [-1, 1]$ функций, имеют такой вид* (*см.* (3.8), (3.10), (3.5))*:*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{n+1} \lambda(n^2) \le \alpha_n\big(K_G^\infty, C\big) \le \frac{\pi}{2} \lambda\left(\frac{n}{e}\right), \quad n \ge 0 \text{ целое.}$$

Следствие 4. *Классы Жевре с мажорантой $H(k) = cA^k k^{\alpha k}$ $(\alpha > 1,\ c > 0,\ A \ge 1)$ обладают следующими оценками их поперечника* (*подробности см. в* [4])*:*

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \frac{1}{n+1} e^{-\varrho \sqrt[\alpha]{n^2}} \le \alpha_n\big(K_H^\infty, C\big) \le \pi \frac{c}{2} \beta e^{-\varrho \sqrt[\alpha]{n/e}}, \quad n \ge 0 \text{ целое.}$$

Здесь $\varrho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A}$ и $\beta = \exp\big(\alpha e \sqrt[\alpha]{A}/2\big)$ — вещественные константы.

Замечание. Теорема 4, будучи весьма общей, применима и в случае компактов аналитических функций; ее доказательство не использует аналитичность.

Компакт $K_H^\infty \subset C^\infty$, состоящий из жевреевских функций, интересен тем, что при условии $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} < \infty$, где $\sigma_n = \inf\limits_{k\ge n} \sqrt[k]{H(k)}$, он состоит из финитных функций [14].

Благодарность. Автор выражает особую признательность и благодарность рецензенту за его полезные замечания и предложения, способствующие улучшению окончательного варианта статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Babenko K. I.* Estimating the quality of computational algorithms. P. 1, 2 // Computer methods in applied and engineering. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1976. V. 7. P. 47–73, 135–152.
2. *Анучина Н. Н., Бабенко К. И., Годунов С. К. и др.* Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики. М.: Наука, 1977.
3. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.; Ижевск: РХД, 2002.
4. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 483–499.
5. *Белых В. Н.* Сверхсходящиеся алгоритмы численного решения уравнения Лапласа в гладких осесимметричных областях // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2020. Т. 60, № 4. С. 553–566.
6. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые алгоритмы численного решения эллиптических краевых задач в гладких осесимметричных областях // Мат. тр. 2022. Т. 25, № 1. С. 3–50.

7. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976.
8. *Александров П. С.* Uber die Urysonsche Konstanten // Fundam. Math. 1933. N 20. P. 140–150.
9. *Митягин Б. С.* Аппроксимативная размерность и базисы в ядерных пространствах // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 4. С. 63–132.
10. *Белых В. Н.* Об абсолютной ε-энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых периодических функций // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 3. С. 485–501.
11. *Белых В. Н.* Об абсолютной ε-энтропии одного компакта бесконечно дифференцируемых непериодических функций // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1197–1213.
12. *Sinwel H. F.* Uniform approximation of differentiable functions by algebraic polynomials // J. Approx. Theory. 1981. N 1. P. 1–8.
13. *Бернштейн С. Н.* О теореме В. А. Маркова. Собрание сочинений. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1954. Т. 2. С. 281–286.
14. *Carleman T.* Les fonctions quasi analytiques. Paris: Gauthier-Villars, 1926.

Поступила в редакцию 6 декабря 2022 г.
После доработки 5 сентября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Белых Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 513.81

РАДИУС ИНЪЕКТИВНОСТИ И КРАТЧАЙШИЕ СПЛЮСНУТОГО ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ

В. Н. Берестовский, А. Мустафа

Аннотация. Найдены геодезические, кратчайшие, множества раздела и радиус инъективности сплюснутого эллипсоида вращения в трехмерном евклидовом пространстве.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.102

Ключевые слова: геодезическая, кратчайшая, множество раздела, правило Клеро, радиус инъективности, эллипсоид вращения.

§ 1. Введение

В следствии 4.14 из [1] доказано, что радиус инъективности $i(M)$ компактного риманова многообразия M равен

$$i(M) = \min\{t_0, l_0/2\}, \tag{1}$$

где t_0 — минимум первых сопряженных значений вдоль всевозможных геодезических на M, параметризованных длиной дуги, l_0 — минимум длин нетривиальных геодезических петель на M.

Один из рецензентов предварительной версии книги [2] задал вопрос о существовании компактных римановых многообразий M таких, что $i(M) = t_0 < l_0/2$.

В теореме 1.5.55 из [2] доказано, что эллипсоид вращения

$$x^2 + y^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1, \quad a > 0, \tag{2}$$

обладает этим свойством, если $a < 4/(3\pi)$.

Максимум гауссовой кривизны такого эллипсоида достигается на его экваторе и равен $1/a^2$. Поэтому вследствие известных результатов римановой геометрии t_0 равно πa, т. е. первому сопряженному значению вдоль экватора. Неравенство $l_0/2 > \pi a$ для $0 < a < 4/3\pi$ получается в [2] простой, но достаточно грубой нижней оценкой для l_0 через длины некоторых вписанных ломаных для ортогональных проекций геодезических эллипсоида на плоскость его экватора.

Эллипсоид вращения (2) называется *сплюснутым* (соответственно *вытянутым*), если $0 < a < 1$, $a > 1$.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282 от 05.04.2022.

Главный результат этой статьи состоит в том, что $i(M) = \pi a < l_0/2$, если M — эллипсоид (2), $0 < a < 1$, с индуцированной из объемлющего евклидова трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$ метрикой. Он доказан в теореме 2.

В теореме 3 найдены кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения, а в следствии 6 — множества раздела для всех его точек.

Ясно, что рассмотренный здесь эллипсоид (метрически) подобен с коэффициентом c сплюснутому эллипсоиду вращения с полуосями $0 < b < c$, где $b/c = a$.

Отметим две статьи, результаты которых связаны со следствием 6.

В [3] доказано, что множество раздела каждой точки на любом эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$ есть некоторый отрезок линии кривизны, проходящей через диаметрально противоположную точку. Также доказано, что сопряженное множество для каждой точки эллипсоида с тремя разными полуосями имеет ровно четыре острия, что известно как последнее геометрическое утверждение Якоби.

Заметим, что линии кривизны на эллипсоиде вращения (отличном от сферы) — (только) меридианы и параллели.

В [4] рассматривается поверхность вращения M (класса C^∞) в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, диффеоморфная 2-сфере с полюсами p и q, зеркально симметричная относительно некоторой параллели (экватора). В основной теореме доказано, что если гауссова кривизна поверхности является неубывающей (соответственно невозрастающей) функцией расстояния до p вдоль меридиана от p до экватора, то множество раздела C_x для каждой точки $x \in M \setminus \{p, q\}$ есть $\{-x\}$ или некоторый отрезок параллели (соответственно меридиана), проходящего через $-x$. Более того, если $C_x = \{-x\}$ для некоторой такой точки x, то гауссова кривизна поверхности M постоянна. Заметим, что гауссова кривизна M в p и q неотрицательна.

В отличие от нашей статьи, размеры отрезков C_x для рассматриваемого нами случая не указаны ни в [3], ни в [4].

§ 2. Основные результаты

Эллипсоид вращения (2) задается параметрическими уравнениями

$$R(u,\varphi) = (\cos u \cos\varphi, \cos u \sin\varphi, a \sin u), \quad 0 < a,\ -\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \tag{3}$$

Верхнюю половину эллипсоида можно задать уравнением

$$z = a\sqrt{1-r^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \cos u, \quad 0 \le r \le 1. \tag{4}$$

Гауссова кривизна поверхности вращения вида $z = z(r)$ вычисляется как в разд. 2.7 из [5]:

$$K(r) = \frac{z'(r)z''(r)}{r(1+z'^2(r))^2}. \tag{5}$$

Для эллипсоида (4) получаем

$$z'(r) = -ar(1-r^2)^{-1/2}, \quad z''(r) = -a(1-r^2)^{-3/2},$$

$$1 + z'^2(r) = (1+(a^2-1)r^2)(1-r^2)^{-1}, \quad z'(r)z''(r) = a^2 r(1-r^2)^{-2},$$

$$K(r) = \frac{a^2}{(1+(a^2-1)r^2)^2}, \tag{6}$$

$$a^2 = K(0) \le K(r) \le K(1) = \frac{1}{a^2}, \quad 0 < a < 1, \tag{7}$$

$$K(r) \equiv 1, \quad a = 1,$$

$$\frac{1}{a^2} = K(1) \le K(r) \le K(0) = a^2, \quad 1 < a. \tag{8}$$

Классическое *правило* (*теорема*) *Клеро* утверждает [5, (2.12.101)], что для любой геодезической $\gamma = \gamma(t)$ на произвольной поверхности вращения

$$r(t)\cos\psi(t) = \frac{r^2(t)\varphi'(t)}{|\gamma'(t)|} = \text{const} := \mathrm{I}\,. \tag{9}$$

Здесь $r(t)$ — радиус параллели (поверхности), проходящей через точку $\gamma(t)$, $\psi(t)$ — угол между касательным вектором геодезической и параллелью в той же точке, $\varphi(t)$ — полярный угол вокруг оси вращения поверхности; мы будем предполагать, что $\varphi'(t) \ge 0$.

Следствие 1. *Каждая геодезическая* $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *на эллипсоиде* (2) *с* $|\gamma'(t)| \equiv 1$, $\mathrm{I} := r_0 > 0$ *и* $\phi'(t) > 0$ *однозначно определяется по* r_0 *— минимальному радиусу параллелей, пересекающих геодезическую — с точностью до сдвига параметра* t. *Эта геодезическая совпадает с экватором при* $r_0 = 1$, *но пересекает экватор и касается обеих параллелей радиусом* r_0 *при* $r_0 \in (0, 1)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что все утверждения этого следствия вытекают из правила Клеро и того факта, что вращения вокруг оси z и зеркальные отражения относительно экваториальных и меридиональных плоскостей — изометрии эллипсоидов. □

Определение 1. Пусть $\gamma = \gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — параметризованная длиной дуги геодезическая на полном римановом многообразии (M, g) с началом $\gamma(0) = p$. Точка $\gamma(t)$, $t \ne 0$, называется *сопряженной точкой к* p *вдоль* γ, если дифференциал $d(\mathrm{Exp}_p)_{t\gamma'(0)}(\cdot)$ (Exp_p— экспоненциальное отображение в точке p) — вырожденное линейное отображение. *Первым сопряженным значением к* p *вдоль* γ называется точная нижняя граница чисел $t > 0$, для которых $\gamma(t)$ — сопряженная точка к p вдоль γ.

Следствие 2. *Для любой точки геодезической эллипсоида* (2) *расстояние по этой геодезической до ближайшей сопряженной* (*по отношению к геодезической*) *точки меньше* $\frac{\pi}{a}$ *и не меньше* πa, *если* $0 < a < 1$, *и больше* $\frac{\pi}{a}$ *и не больше* πa, *если* $a > 1$; *оно равно* πa *только для одной геодезической — экватора. Длина любой замкнутой геодезической, состоящей из двух противоположных меридианов* (*двойного меридиана*), *меньше* 2π *и больше* 4, *если* $0 < a < 1$, *и больше* 2π, *если* $a > 1$.

Доказательство. Из (6)–(8) следует, что секционная кривизна эллипсоида является возрастающей положительной функцией от r, достигает максимального значения $\frac{1}{a^2}$ на экваторе, минимального значения a^2 в полюсах, если $0 < a < 1$, и является убывающей положительной функцией от r, достигает минимального значения $\frac{1}{a^2}$ на экваторе, максимального значения a^2 в полюсах, если $a > 1$. Из этого наблюдения, следствия 1 и теоремы 1.5.26 в [2] вытекают обе части первого утверждения.

Последнее утверждение является следствием того, что любой двойной меридиан является замкнутой геодезической по правилу Клеро, проходит через полюсы при $r_0 = 0$, а один из удвоенных меридианов — эллипс $x^2 + \frac{z^2}{a^2} = 1$, выпуклая плоская кривая, вписанная в окружность единичного радиуса с длиной 2π при $0 < a < 1$ и описанная вокруг этой окружности при $a > 1$. Кроме того, длина двойного меридиана всегда больше 4, удвоенной длины его ортогональной проекции на плоскость экватора. $\square$

Теорема 1. *Рассмотрим любую геодезическую на эллипсоиде* (2), *отличную от экватора и двойных меридианов. Тогда разность двух последующих значений полярного угла* φ *при пересечении этой геодезической с экватором меньше* π, *если* $0 < a < 1$, *и больше* π, *если* $a > 1$.

Доказательство. Для простоты предположим, что эта геодезическая параметризована длиной дуги, т. е. $|\gamma'(t)| = 1$. Так как $z = a\sqrt{1 - r^2}$, достаточно найти ортогональную проекцию геодезической на плоскость $z = 0$ с полярными координатами (r, ϕ), другими словами, найти функцию $r = r(\varphi)$ вдоль геодезической. Из (9) следует, что

$$r\cos\psi = r_0 \Rightarrow \cos\psi = \frac{r_0}{r}, \quad \sin\psi = \frac{\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r}, \quad \varphi' = \frac{\cos\psi}{r} = \frac{r_0}{r^2}. \tag{10}$$

Кроме того,

$$\gamma'(t) = R'_\varphi(u(t), \varphi(t))\varphi'(t) + R'_u(u(t), \varphi(t))u'(t), \quad \langle R'_\varphi, R'_u\rangle \equiv 0, \tag{11}$$

$$\sin^2\psi{=}|R'_u|^2u'^2{=}(\sin^2 u + a^2\cos^2 u)u'^2{=}(1 + (a^2 - 1)r^2)u'^2, \ u'{=}\frac{-\sin\psi}{\sqrt{1 + (a^2 - 1)r^2}},$$

если $u = u(t) > 0$ и $r(t) = \cos u(t)$ возрастает от r_0 до 1. Тогда

$$r' = -\sin u \cdot u' = \frac{\sqrt{1 - r^2}\sqrt{r^2 - r_0^2}}{r\sqrt{1 + (a^2 - 1)r^2}}, \quad \frac{dr}{d\varphi} = \frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\varphi} = \frac{r\sqrt{(1 - r^2)(r^2 - r_0^2)}}{r_0\sqrt{1 + (a^2 - 1)r^2}}.$$

Последнее выражение больше (меньше) $\frac{r\sqrt{(1-r^2)(r^2-r_0^2)}}{r_0}$ (т. е. $dr/d\varphi$ при $a = 1$ — для единичной сферы), если $0 < a < 1$ ($a > 1$). Поскольку для единичной сферы указанная в теореме разность равна π, теорема 1 доказана. $\square$

Предложение 1. *Пусть геодезическая* $\gamma = \gamma(t) = R(u(t), \varphi(t))$ *на эллипсоиде* (2), *отличная от экватора и двойных меридианов, начинается на экваторе при* $\varphi_0 = 0$. *Тогда при возрастании* φ *эта геодезическая первый раз пересечет экватор при* φ_1, *где* $\pi a < \varphi_1 < \pi$, *если* $0 < a < 1$, *и* $\pi < \varphi_1 < \pi a$, *если* $a > 1$.

Доказательство. Неравенство $\varphi_1 < \pi$ при $0 < a < 1$ и неравенство $\varphi_1 > \pi$ при $a > 1$ доказаны в теореме 1. Пусть $\varphi = \varphi(r)$ и $\theta = \theta(r)$ — полярные углы для геодезической из предложения при $a \neq 1$ и аналогичной геодезической при $a = 1$, т. е. на единичной сфере $z = \sqrt{1 - r^2}$, с начальными данными $\varphi(r = 1) = \theta(r = 1) = 0$. Вследствие доказательства теоремы 1 при убывании r от 1 до r_0

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{-r\sqrt{(1 - r^2)(r^2 - r_0^2)}}{r_0\sqrt{1 + (a^2 - 1)r^2}}, \quad \frac{dr}{d\theta} = \frac{-r\sqrt{(1 - r^2)(r^2 - r_0^2)}}{r_0}.$$

Следовательно, можно рассматривать функцию $\varphi(\theta) := \varphi(r(\theta))$. Для нее

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}\Big/\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{1 + (a^2 - 1)r^2}. \tag{12}$$

Последнее выражение больше (меньше), чем $\sqrt{1+(a^2-1)} = \sqrt{a^2} = a$, если $0 < a < 1$ $(a > 1)$. Хорошо известно, что при уменьшении r от 1 до r_0 получим $\theta(r_0) = \pi/2$ и далее при увеличении r от r_0 до 1 получим $\theta_1 = \theta(1) = \pi$. Тогда

$$\varphi_1 = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}\,d\theta = \int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}\,d\theta, \tag{13}$$

что вследствие сказанного больше πa при $0 < a < 1$ и меньше πa при $a > 1$. $\square$

Лемма 1. *Если* $0 < r_0 < 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, *то* $r(\theta) = r_0\big(1+\big(r_0^2-1\big)\cos^2\theta\big)^{-1/2}$.

Доказательство. По теореме косинусов сферической геометрии для прямоугольного сферического треугольника с катетами θ, $u(\theta)$ и гипотенузой l получаем

$$\cos l = \cos u(\theta)\cdot\cos\theta = r(\theta)\cos\theta.$$

По теореме синусов сферической геометрии

$$\sin l = \sqrt{1-r^2(\theta)\cos^2\theta} = \frac{\sin u(\theta)}{\sin\psi_0} = \frac{\sqrt{1-r^2(\theta)}}{\sqrt{1-r_0^2}}.$$

Отсюда получаем

$$1-r^2(\theta) = (1-r_0^2)(1-r^2(\theta)\cos^2\theta)$$

и затем формулу из леммы 1. $\square$

Следствие 3. *Число* $\varphi_1 = \varphi_1(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, *может быть любым числом в указанных в предложении* 1 *интервалах.*

Доказательство. Из леммы 1 и формулы (13) следует, что $\varphi_1(r_0)$, $0 \le r_0 \le 1$, — непрерывная функция. Теперь следствие 3 вытекает из того, что по лемме 1, $r(\theta) \equiv 0$ при $r_0 = 0$ и $r(\theta) \equiv 1$ при $r_0 = 1$. $\square$

Из леммы 1 прямым вычислением следует

Лемма 2. *Если* $0 < r_0 < 1$, $0 \le \theta \le \pi/2$, *то*

$$\frac{\partial r(\theta)}{\partial r_0} = \sin^2(\theta)(1+(r_0^2-1)\cos^2\theta)^{-3/2},$$

что равно 0 *при* $\theta = 0$ *и положительно при* $0 < \theta \le \pi/2$.

Далее будет использоваться обозначение $v = \varphi_1$. Ясно, что $v = v(r_0)$.

Лемма 3. *Функция* $v = v(r_0)$ *непрерывно дифференцируема, ее производная* $v'(r_0)$ *отрицательна при* $0 < a < 1$ *и положительна при* $a > 1$. *Существует обратная непрерывно дифференцируемая убывающая (возрастающая) функция* $r_0 = r_0(v)$, *где* $a\pi < v < \pi$ *при* $0 < a < 1$ *(и* $\pi < v < a\pi$ *при* $a > 1$*).*

Доказательство. Вследствие формулы (13) и лемм 1, 2

$$v'(r_0) = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial r_0}\big(\sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}\big)\,d\theta$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} (1+(a^2-1)r^2(\theta))^{-1/2}(a^2-1)r(\theta)\frac{\partial r(\theta)}{\partial r_0}\,d\theta$$

$$= 2\int\limits_0^{\pi/2}(1+(a^2-1)r^2(\theta))^{-1/2}(a^2-1)r(\theta)\sin^2(\theta)\big(1+\big(r_0^2-1\big)\cos^2\theta\big)^{-3/2}\,d\theta.$$

Отсюда непосредственно вытекают все утверждения леммы 3. $\square$

Лемма 4. *Пусть отрезок параметризованной длиной дуги геодезической* $\gamma=\gamma(t)$ *на эллипсоиде* (2), *отличной от двойных меридианов и экватора, начинается и заканчивается на экваторе;* $\gamma(0)=R(0,0)$, $\gamma(t(r_0))=R(0,v(r_0))$, *где*

$$0<\cos\psi_0=r_0<1,\quad \psi_0=\angle(\gamma'(0),R'_\varphi(0,0)),\quad v(r_0)>0.$$

Тогда длина этого отрезка равна

$$l(r_0)=t(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{r_0}{1-\big(1-r_0^2\big)\cos^2\theta}\sqrt{1+\frac{(a^2-1)r_0^2}{1-\big(1-r_0^2\big)\cos^2\theta}}\,d\theta. \qquad (14)$$

Доказательство. Последние равенства в (10), равенство (12), лемма 1 влекут

$$\frac{dt}{d\theta}=\frac{dt}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{r^2(\theta)}{r_0}\sqrt{1+(a^2-1)r^2(\theta)}$$
$$=\frac{r_0}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}\sqrt{1+\frac{(a^2-1)r_0^2}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}}.$$

Отсюда вытекает (14). $\square$

Замечание 1. Используя (14) и неопределенный интеграл **1** в разд. 5.14 из [6], получаем

$$l(r_0)=t(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{r_0\,d\theta}{1-(1-r_0^2)\cos^2\theta}=\frac{-2r_0}{\sqrt{r_0^2}}\operatorname{arctg}\big(\sqrt{r_0^2}\operatorname{ctg}\theta\big)\big|_0^{\pi/2}$$
$$=-2\operatorname{arctg}(r_0\operatorname{ctg}\theta)|_0^{\pi/2}=2(\operatorname{arctg}(+\infty)-\operatorname{arctg}(0))=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi,$$

если $0<r_0<1$, $a=1$, как и должно быть.

Замечание 2. Формулу (14) можно записать в следующем кратком виде:

$$l(r_0)=2\int\limits_0^{\pi/2}r_0\big(\sin^2\theta+r_0^2\cos^2\theta\big)^{\frac{-3}{2}}\big(\sin^2\theta+(a^2-\sin^2\theta)r_0^2\big)^{\frac12}\,d\theta. \qquad (15)$$

Предложение 2. *Геодезические отрезки эллипсоида* (2)

$$\gamma(t,r_0)=\operatorname{Exp}_p\big(t\big(r_0R'_\varphi(0,0)+\big(\sqrt{1-r_0^2}/a\big)R'_u(0,0)\big)\big),\quad 0\le t\le l(r_0), \qquad (16)$$

где $p=R(0,0)$, $0<r_0<1$, *параметризованы длиной дуги, составляют семейство класса* C^∞, *начинаются и заканчиваются на экваторе.*

Доказательство. Прежде всего, $R'_\varphi(0,0)=(0,1,0)$, $R'_u(0,0)=(0,0,a)$. Отсюда следует, что геодезические отрезки (16) параметризованы длиной дуги. Ясно, что эллипсоид (2) с индуцированной из $\mathbb{R}^3$ метрикой есть компактное вещественно-аналитическое риманово многообразие. Поэтому вследствие предложения 10.5 из [7] экспоненциальное отображение Exp_p вещественно аналитично. Из формулы (15) нетрудно увидеть, что $l(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, — функция класса C^∞. Следовательно, (16) — семейство класса C^∞. Вследствие определения $l(r_0)$ все отрезки семейства (16) начинаются и заканчиваются на экваторе (а их внутренности располагаются внутри верхней половины) эллипсоида (2). $\square$

Следствие 4. *Семейство $\gamma(t,v) = \gamma(t, r_0(v))$, $0 \le t \le l(r_0(v))$, где $\pi a < v < \pi$ при $0 < a < 1$ и $\pi < v < \pi a$ при $a > 1$, определяемых посредством* (16) *и функцией $r_0(v)$ из леммы 3 геодезических отрезков — отображение класса C^∞. При этом $l(v) = l(r_0(v))$ — длина геодезического отрезка $\gamma(\cdot, v)$.*

Доказательство. Вследствие предложения 2 $v(r_0) = \varphi(\gamma(l(r_0), r_0))$ — C^∞-функция. Тогда определенная по лемме 3 на соответствующем интервале обратная функция $r_0(v)$ бесконечно дифференцируема. Второе утверждение — следствие того, что геодезическая $\gamma(\cdot, v)$ параметризована длиной дуги. $\square$

Замечание 3. На самом деле функция $l(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, и геодезические отрезки из предложения 2 и следствия 4 вещественно аналитические.

Предложение 3. *Существуют производные $l'(v) = r_0(v) > 0$ при $0 < a < 1$, $\pi a < v < \pi$ и $l'(v) = r_0(v) > 0$ при $a > 1$ и $\pi < v < \pi a$.*

Доказательство. Выберем произвольно $v_0 \in (\pi a, \pi)$ при $0 < a < 1$ и $v_0 \in (\pi, \pi a)$ при $a > 1$. Определим семейство параметризованных пропорционально длине дуги геодезических $\gamma(t,v)$, $0 \le t \le l(v_0)$, такое, что касательное векторное поле $X = X(t,v) = \frac{\partial \gamma(t,v)}{\partial t} = \gamma_t(t,v)$ к геодезической $\gamma(t,v)$ (при фиксированном v) имеет длину $|X(t,v)| = |\gamma_t(t,v)| = c(v) = l(v)/l(v_0) > 0$. На основании следствия 4 семейство $\gamma(t,v)$, векторное поле $X(t,v)$ и функция $l(v)$ бесконечно дифференцируемы. Ясно, что и векторное поле $Y = Y(t,v) = \frac{\partial \gamma(t,v)}{\partial v} = \gamma_v(t,v)$ вдоль семейства $\gamma(t,v)$ бесконечно дифференцируемо.

По формуле первой вариации длины кривой ((1.58) из [2]) получаем

$$l'(v) = \frac{1}{c(v)} \langle Y, X\rangle\Big|_{t=0}^{t=l(v_0)} - \frac{1}{c(v)} \int\limits_0^{l(v_0)} \langle Y(t,v), \nabla_X X(t,v)\rangle\, dt.$$

При этом $Y(0,v) = 0$ для всех рассматриваемых v, так как $\gamma(0,v) = R(0,0)$, и $\nabla_X X(t,v) = 0$, так как $\gamma(\cdot, v)$ — геодезические. Поэтому

$$l'(v) = \frac{1}{c(v)} \langle Y(l(v_0), v), X(l(v_0), v)\rangle = \cos\psi_0(v) = r_0(v) > 0$$

для $0 < a < 1$ и для $a > 1$. $\square$

Напомним некоторые понятия римановой геометрии.

Определение 2. Пусть (M,g) — полное риманово многообразие с метрическим тензором g. *Радиус инъективности* $i_p(M)$ *многообразия* (M,g) *в точке* $p \in M$ определяется как точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что экспоненциальное отображение Exp_p многообразия (M,g) в точке p является диффеоморфизмом на открытом шаре $U(0,r) \subset (M_p, g_p)$, где (M_p, g_p) — касательное евклидово пространство к (M,g) в точке p. По определению *радиус инъективности* $i(M)$ *многообразия* (M,g) есть $i(M) = \inf\limits_{p \in M} i_p(M)$.

Определение 3. Пусть (M, g) — полное риманово многообразие, $p \in M$. По определению $t_0(p)$ — точная верхняя граница чисел $r > 0$ таких, что дифференциал $(\mathrm{dExp}_p)_v(\cdot)$ — невырожденное линейное отображение для каждого вектора $v \in U(0, r) \subset (M_p, g_p)$ и $t_0 = \inf\limits_{p \in M} t_0(p)$.

Замечание 4. $t_0(p) > 0$ и $t_0 > 0$, если M компактно.

Теорема 2. *Пусть* $0 < a < 1$. *Тогда длина каждой геодезической петли на эллипсоиде* (2) *больше* $2\pi a$, *а его радиус инъективности равен* πa.

Доказательство. Вследствие (7) гауссова кривизна эллипсоида (2) достигает максимума $1/a^2$ только при $r = 1$. Поэтому вследствие теоремы 1.5.26 из [2] первое сопряженное значение достигает минимума πa на геодезическом луче $R(0, \varphi(t) = t)$, $t \geq 0$, и всякий экваториальный геодезический отрезок $R(0, t)$, $0 \leq t \leq v$, где $v > \pi a$, — не кратчайшая вследствие предложения 1.5.29 из [2].

В доказательстве следствия 3 установлено, что убывающая по лемме 3 функция $v = v(r_0)$, $0 < r_0 < 1$, непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и $v(r_0 = 0) = \pi$, $v(r_0 = 1) = \pi a$. Следовательно, определена обратная убывающая непрерывная функция $r_0(v)$, $v \in [\pi a, \pi]$, причем $r_0(\pi a) = 1$, $r_0(\pi) = 0$.

Из сказанного, предложения 2 и следствия 4 имеем $l(v) = d(R(0,0), R(0,v))$ для $v \in (\pi a, \pi)$, где d — внутренняя метрика на эллипсоиде (2). Тогда

$$d(R(0,0), R(0,\pi a)) = l(\pi a) = \pi a, \quad d(R(0,0), R(0,\pi)) = l(\pi) < \pi,$$

так как d непрерывна. Заметим, что здесь $l(\pi)$ — длина меридиана (половины двойного меридиана). Вследствие предложения 3

$$\pi a < l(v) < l(\pi) < \pi, \quad \pi a < v < \pi,$$

минимальная длина геодезической петли на эллипсоиде (2) $l_0 > 2l(v) > 2\pi a$ и ввиду (1) его радиус инъективности равен $\pi a < l_0/2$. $\square$

Вычислим длину l меридиана эллипсоида (2). Полагая $\varphi = 0$ в (3), получаем

$$l = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{(x'_u)^2 + (z'_u)^2}\, du = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 u + a^2\cos^2 u}\, du$$
$$= 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2-1)\cos^2 u}\, du = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2-1) r^2(u)}\, du.$$

Если $a = 1$, то $l = \pi$. Вычислим l при $a > 0$, $a \neq 1$.

Пусть $a > 1$. Тогда с учетом последних двух равенств

$$l = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + (a^2-1)(1-\sin^2 u)}\, du = 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - (a^2-1)\sin^2 u}\, du$$
$$= 2a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (1 - 1/a^2)\sin^2 u}\, du = 2a\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2\sin^2 u}\, du = 2aE(\pi/2, k),$$

где $k^2 = (1-1/a^2) = (a^2-1)/a^2$, $E(u,k)$— *нормальный эллиптический интеграл Лежандра второго рода* ((21.6-30) в [8]), $2aE(\pi/2,k) := 2aE(k)$, а

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)\frac{k^{2n}}{1-2n} \tag{17}$$

— *полный эллиптический интеграл второго рода* ((21.6-33) в [8]) и $0! = 0^0 := 1$.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда

$$l = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+(a^2-1)\cos^2 u}\,du = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+(a^2-1)\sin^2(\pi/2-u)}\,du$$

$$= -2\int_{\pi/2}^{0}\sqrt{1+(a^2-1)\sin^2(\pi/2-u)}\,d(\pi/2-u) = 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-(1-a^2)\sin^2\theta}\,d\theta$$

$$= 2\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta = 2E(\pi/2,k) = 2E(k),$$

где $k^2 = 1 - a^2$.

§ 3. Кратчайшие сплюснутого эллипсоида вращения

Теорема 3. *Для эллипсоида* (2), $0 < a < 1$, *верны такие утверждения.*

1. *Каждый отрезок геодезической, отличной от экватора, расположенный в верхней или нижней части эллипсоида, т. е. при* $[0 \le u \le \pi/2]$ *или при* $[-\pi/2 \le u \le 0]$ *в уравнении* (3), *является кратчайшей. При этом отрезок — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда хотя бы один из концов отрезка не лежит на экваторе.*

2. *Отрезок экватора — (единственная) кратчайшая (с данными концами) тогда и только тогда, когда его длина не больше* πa.

3. *Отрезок двойного меридиана — кратчайшая тогда и только тогда, когда его длина не больше* $2E(k)$, $k^2 = 1 - a^2$, (17); *он — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда его длина меньше* $2E(k)$.

4. *Геодезический отрезок длины* l *с концами* $p_1 = R(u_1,\varphi_1)$, $p_2 = R(u_2,\varphi_2)$:

$$-\pi/2 < u_1 < 0 < u_2 < \pi/2, \quad 0 < |\varphi_1 - \varphi_2| = \omega < \pi, \tag{18}$$

является кратчайшей тогда и только тогда, когда геодезическая отвечает некоторому параметру r_0, *где*

$$0 < r_0 \le \min(\cos u_1, \cos u_2), \quad \omega \le v(r_0), \quad l \le l(r_0). \tag{19}$$

При этом равносильны следующие равенства:

$$v(r_0) = \omega, \quad l = l(r_0). \tag{20}$$

Этот отрезок — единственная кратчайшая с данными концами тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих (не)равенств:

$$\cos u_1 \ne \cos u_2, \quad \omega < v(r_0), \quad l < l(r_0), \quad r_0 = \cos u_1 = \cos u_2. \tag{21}$$

Доказательство. 1. На основании предложения 1, следствия 3, леммы 3, следствия 4 и инвариантности эллипсоида относительно вращений вокруг оси z и отражения относительно экваториальной плоскости любые две точки на экваторе, являющиеся концами отрезка экватора длины v, где $\pi a < v \leq \pi$, можно соединить только двумя неэкваториальными геодезическими отрезками равной длины $l(v)$, зеркально симметричными друг другу относительно экваториальной плоскости. Отсюда следует нужное утверждение.

Утверждение 2 — следствие второй фразы из доказательства теоремы 2.

Утверждение 3 вытекает из равенств $l(v=\pi) = 2E(k)$ и (7).

4. Применяя, если это необходимо, зеркальное отражение от плоскости, содержащей меридиан с $\varphi = \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$, можно считать, что $\varphi_1 < \varphi_2$.

Существует хотя бы одна кратчайшая, соединяющая точки p_1 и p_2; пусть $\gamma = \gamma(t)$, $0 \leq t \leq l$, — одна такая кратчайшая, параметризованная длиной дуги. Заметим, что вследствие условий (18) точки p_1 и p_2 не лежат на экваторе и не могут лежать одновременно на одном двойном меридиане. Поэтому геодезический отрезок γ отвечает некоторому параметру r_0, где $0 < r_0 \leq \min(\cos u_1, \cos u_2)$.

Кроме того, $\omega \leq v(r_0)$. Иначе $\omega > v(r_0)$ и $l(r_0) < l$. Возможны следующие случаи: (a) $r_0 < \min(\cos u_1, \cos u_2)$ или (b) $r_0 = \min(\cos u_1, \cos u_2)$.

В случае (a) рассмотрим кратчайшую

$$\gamma_1 = \gamma(t) = R(u(t), \varphi(t)), \quad 0 \leq t \leq l(r_0). \tag{22}$$

Тогда $\cos(u(l(r_0))) = \cos(u(0))$ и для некоторого $t_1 \in (0, l(r_0))$ будет (α) $r_0 = \cos(u(t_1))$, $u(t_1) < 0$ или (β) $r_0 = \cos(u(t_1))$, $u(t_1) > 0$.

В случае (α) имеем $u(2t_1) = u_1$ и формулы $\gamma_2(t) = R(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t))$, где

$$(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t))) = (u(t+2t_1), \varphi(t+2t_1) + \varphi_1 - \varphi(2t_1)),\ 0 \leq t \leq l(r_0) - 2t_1,$$

$$(\widetilde{u}(t), \widetilde{\varphi}(t)) = (-u(t - l(r_0) + 2t_1), \varphi(l(r_0)) + \varphi(t - l(r_0) + 2t_1) - \varphi(2t_1)),$$

если $l(r_0) - 2t_1 \leq t \leq l(r_0 q)$, определяют другую непрерывную кривую той же длины $l(r_0)$ с теми же концами $\gamma(0)$, $\gamma(l(r_0))$, что и у γ_1, т. е. кратчайшую. Тогда геодезический отрезок γ не может быть кратчайшей.

Случай (β) рассматривается аналогично.

Пусть выполнено условие (b). Применяя, если это необходимо, композицию зеркальных отражений относительно экваториальной плоскости и некоторой вертикальной плоскости, включающей ось z, можно считать, что $r_0 = \cos u_1$. Пусть $0 < \delta < \min(l(r_0)/2, l - l(r_0))$. Тогда геодезический отрезок

$$\gamma_3(t) = \gamma(t+\delta) = R(u_3(t), \varphi_3(t)), \quad 0 \leq t \leq l(r_0),$$

является кратчайшей и

$$-\pi/2 < u_3(0) < 0 < u_3(l(r_0)) < \pi/2, \quad r_0 < \cos u_3(0) = \cos u_3(l(r_0)).$$

Тем самым эта кратчайшая удовлетворяет условию (a). Было уже доказано, что это невозможно. Таким образом, $\omega \leq v(r_0)$ и $l \leq l(v(r_0)) = l(r_0)$.

Ясно, что при условиях (19) два равенства (20) равносильны.

Докажем, что при условиях (20) соединяющий точки p_1 и p_2 геодезический отрезок с параметром r_0, $0 < r_0 < 1$, вида (22) — кратчайшая.

Заметим прежде всего, что тогда $\cos u_1 = \cos u_2$ и из проведенных рассуждений легко вывести, что существует самое большее два таких геодезических отрезка с параметром r_0 и только один, если и только если $r_0 = \cos u_1 = \cos u_2$.

Предположим, что существует соединяющая точки p_1 и p_2 параметризованная длиной дуги кратчайшая $\gamma_4 = \gamma_4(t) = R(u_4(t), \varphi_4(t))$, $0 \le t \le l_4$, где $l_4 \le l(r_0)$, с параметром $r_4 \ne r_0$, $0 < r_4 < 1$. Вследствие доказанного должно быть $v(r_0) = \omega \le v(r_4)$ и вследствие леммы 3 $v(r_0) = \omega < v(r_4)$, $0 < r_4 < r_0$. На основании предложения 3 $l(r_0) = l(v(r_0)) < l(v(r_4)) = l(r_4)$ и $l_4 < l(r_4)$.

Рассуждая, как выше, можно считать, что $u_1'(0) \ge 0$, $u_4'(0) \ge 0$. Вследствие этого, неравенств $0 < r_4 < r_0 < 1$ и правила Клеро $u_4'(0) > u_1'(0) \ge 0$. Тогда на основании утверждения 1 геодезические отрезки γ_1 и γ_4 пересекаются только в точках p_1 и p_2, а в остальном γ_4 расположена выше γ_1. Поэтому, так как $u_1'(l(r_0)) \le 0$, по правилу Клеро должно быть $u_4'(l_4) < u_1'(l(r_0)) \le 0$. Следовательно, существует $\overline{t}$ такое, что $0 < \overline{t} < l_4$, $u_4(\overline{t}) = u_2$ и $r(\gamma((\overline{t} + l_4)/2)) = r_4$. Отсюда следует, что $u_4(\overline{t}/2) = 0$ и длины геодезических отрезков $\gamma_4(t)$, $0 \le t \le \overline{t}/2$, и $\gamma_4(t)$, $\overline{t}/2 \le t \le \overline{t}$, равны.

Поэтому $l_4 = l(r_4)$; противоречие.

Таким образом, высказанное выше утверждение верно.

Из доказанного следует, что геодезический отрезок с условиями (19) — кратчайшая, и последнее утверждение теоремы доказано. $\square$

Следствие 5. *Отрезок геодезической с параметром r_0 на эллипсоиде вращения* (2)*, $0 < a < 1$, является кратчайшей тогда и только тогда, когда его длина не больше $l(r_0)$, где $l(1) = \pi a$, $l(0) = 2E(k)$, $k^2 = 1 - a^2$.*

Определение 4. Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие, $p \in M$, $0 \ne w \in M_p$, $\mu(w)$ — максимум положительных чисел μ таких, что $\mathrm{Exp}_p(tw)$, $0 \le t \le \mu$, — кратчайшая; $\widetilde{C}_p = \{\mu(w)w,\ 0 \ne w \in M_p\}$ называется *множеством раздела в* M_p, а $C_p = \mathrm{Exp}_p(\widetilde{C}_p)$ — множеством раздела для точки p.

Следствие 6. *Если $p = R(\varphi_0, u_0)$ — точка эллипсоида* (2)*, $0 < a < 1$, то*

$$C_p = \{R(\varphi, -u_0),\ \varphi \in [\varphi_0 - \pi, \varphi_0 - v(\cos u_0)] \cup [\varphi_0 + v(\cos u_0), \varphi_0 + \pi]\}$$

при условиях $u_0 \ne \pm\pi/2$, $v(\cos 0) = \pi a$; $C_p = \{(0, 0, \mp a)\}$, если $p = (0, 0, \pm a)$.

Замечание 5. При небольших изменениях теорема 3, следствия 5, 6 и данные здесь доказательства, в том числе утверждений, на которые они опираются, справедливы и для поверхностей из [4], если $v'(r_0) < 0$ для параллелей, отличных от экватора, и гауссова кривизна — неубывающая функция от r_0.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sakai T. Riemannian geometry. Transl. Math. Monogr. 1996. V. 149.
2. *Berestovskii V., Nikonorov Yu.* Riemannian manifolds and homogeneous geodesics. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. (Springer Monogr. Math.).
3. *Itoh J., Kiyohara K.* The cut loci and the conjugate loci on ellipsoids // Manuscripta Math. 2004. V. 114. P. 247–264.
4. *Sinclair R., Tanaka M.* The cut locus of a two sphere of revolution and Toponogov's comparison theorem // Tohoku Math. J. 2007. V. 59. P. 379–399.
5. *Топоногов В. А.* Дифференциальная геометрия кривых и поверхностей. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2012.
6. *Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П.* Таблицы неопределенных интегралов. М.: Физматлит, 2003.

7. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

8. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука, 1974.

Поступила в редакцию 29 июня 2023 г.
После доработки 29 июня 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vberestov@inbox.ru

Мустафа Али
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
alimostafa19967777@gmail.com

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.955

УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ ОРНШТЕЙНА — УЛЕНБЕКА

В. И. Богачев, С. В. Шапошников

Аннотация. Рассмотрены операторы Колмогорова с постоянными матрицами диффузии и линейными сносами, т. е. операторы Орнштейна — Уленбека, и показано, что все решения соответствующих стационарных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова (в том числе знакопеременные) являются инвариантными мерами порожденных полугрупп. Это дает также относительно явное описание всех решений.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.103

Ключевые слова: уравнение Колмогорова, уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова, оператор Орнштейна — Уленбека.

1. Введение

В теории уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова простейшим является случай постоянной матрицы диффузии и линейного сноса, т. е. случай оператора Орнштейна — Уленбека. Если матрица диффузии невырожденная, то в этом случае основные рассматриваемые объекты (решения стационарных уравнений и задач Коши, полугруппы) допускают явные представления, стационарные решения совпадают с инвариантными мерами полугрупп и единственны. Однако ситуация усложняется для вырожденной матрицы диффузии. Здесь некоторые из известных в невырожденном случае фактов оставались невыясненными, и цель данной работы — их обоснование. Хотя справедливость установленных ниже результатов вполне ожидаема для специалистов, доказательства оказываются довольно неочевидными.

Пусть $A = (a^{ij})_{i,j \le d}$ — неотрицательно определенная симметричная постоянная матрица, b — гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^d$. Напомним, что для дифференциального оператора (называемого *оператором Колмогорова*)

$$L_{A,b} f(x) = \mathrm{trace}(AD^2 f(x)) + \langle b(x), \nabla f(x) \rangle = a^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j} f(x) + b^i(x) \partial_{x_i} f(x),$$

где подразумевается стандартное правило суммирования по повторяющимся индексам, возникает стационарное уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова

$$L^*_{A,b} \mu = 0 \tag{1.1}$$

Работа поддержана грантом РНФ 22-11-00015 (выполняемым при МГУ имени М. В. Ломоносова).

относительно ограниченных борелевских мер μ на $\mathbb{R}^d$. Это уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} L_{A,b} f \, d\mu = 0 \qquad (1.2)$$

для функций f из класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ гладких функций с ограниченными носителями, т. е. равенства

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\mu) - \partial_{x_i}(b^i\mu) = 0$$

в смысле обобщенных функций. Если матрица A невырожденная, то мера μ задается гладкой плотностью ϱ относительно меры Лебега и эта плотность удовлетворяет уравнению

$$\partial_{x_i}\partial_{x_j}(a^{ij}\varrho) - \partial_{x_i}(b^i\varrho) = 0$$

в обычном смысле.

Если поле b линейно, т. е. $b(x) = Bx$, где B — линейный оператор, то будем писать $L_{A,B}$ вместо $L_{A,b}$. Такие операторы называют операторами Орнштейна — Уленбека, им посвящено много работ, в связи с ними возникают весьма нетривиальные вопросы (см., например, [1–4], где можно найти дополнительные ссылки).

Случай невырожденной матрицы A заменой координат сводится к случаю $A = I$. Особый интерес представляет ситуация, когда есть вероятностное решение μ, т. е. $\mu \geq 0$ и $\mu(\mathbb{R}^d) = 1$. Даже для $A = I$ и гладкого отображения b остается неизвестным, всегда ли наличие ненулевого знакопеременного решения влечет наличие вероятностного решения. Ниже показано, что ответ положительный для линейного коэффициента b и всякой матрицы A.

Если вероятностное решение существует, то даже для $A = I$ и гладкого нелинейного отображения b оно может быть неединственным (см. [5, 6; 7, гл. 4]). Если b линейно и оператор A невырожденный, то вероятностное решение единственно (если оно существует), см. [7, теорема 4.1.6]; более того, нет знакопеременных решений (см. [7, § 4.3]). В случае вырожденного A это неверно. Например, для $A = 0$ и $b = 0$ все меры являются решениями. Если $d = 2$, $A = 0$ и b — поворот на $\pi/2$, т. е. $b(x) = (-x_2, x_1)$, то всякая мера, инвариантная относительно вращений, удовлетворяет уравнению. В самом деле, равенство $\operatorname{div}(b\mu) = b^1\partial_{x_1}\mu + b^2\partial_{x_2}\mu = 0$ верно, если μ имеет гладкую плотность, зависящую от $|x|^2$. Поэтому это равенство справедливо для сверток $\mu * p_\varepsilon$, где $p_\varepsilon = (2\pi\varepsilon)^{-1}\exp(-|x|^2/(2\varepsilon^2))$. При $\varepsilon \to 0$ получаем равенство и для μ. Из доказанного ниже вытекает, что в данном случае все решения исчерпываются мерами, инвариантными относительно вращений.

В случае общего гладкого b и невырожденной матрицы A существование вероятностного решения μ влечет существование сильно непрерывной полугруппы операторов T_t в $L^1(\mu)$ со следующими свойствами:

(1) генератор полугруппы является продолжением оператора $L_{A,b}$ на $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$,

(2) $\|T_t\| \leq 1$,

(3) операторы T_t субмарковские, т. е. $0 \leq T_t f \leq 1$ при $0 \leq f \leq 1$.

Неизвестно, единственна ли полугруппа с перечисленными свойствами, однако если отказаться от (2) и (3), то единственности нет в случае неединственности вероятностного решения уравнения (1.1) (см. [7, гл. 5]). Так называемая каноническая полугруппа $\{T_t^\mu\}_{t\geq 0}$, ассоциированная с $L_{A,b}$, определяется тем, что для ее генератора $L_{A,b}^\mu$ оператор $\bigl(I - L_{A,b}^\mu\bigr)^{-1}$ задается так: $\bigl(I - L_{A,b}^\mu\bigr)^{-1} f$ при

$f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ есть предел решений задач Дирихле $u - L_{A,b}u = f$ с нулевыми граничными условиями на шарах радиуса n с центром в нуле. В случае линейного сноса имеется явно заданная переходная полугруппа $\{T_t\}_{t\geq 0}$ (см. формулу (1.4) ниже).

Появление канонической полугруппы приводит к вопросу об инвариантности меры μ относительно нее, т. е. о справедливости тождества

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} T_t^\mu f\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f\, d\mu$$

для всех функций $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$ (в данном случае это равносильно равенству для всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$). Однако такая инвариантность имеет место лишь в случае единственности вероятностного решения уравнения (1.1). В этой работе показано, что для линейного коэффициента сноса все решения уравнения (1.1) (в том числе знакопеременные) всегда инвариантны относительно переходной полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$.

Оператор Колмогорова порождает задачу Коши для эволюционного уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L_{A,b}^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu,$$

на отрезке $[0, T]$ с заданным $T > 0$ и начальным условием ν, являющимся ограниченной мерой. *Решением* называется семейство ограниченных мер μ_t (возможно, знакопеременных), борелевски зависящих от t, т. е. функции $t \mapsto \mu_t(E)$ должны быть борелевскими для всех борелевских множеств E, для которого полная вариация $\|\mu_t\|$ меры μ_t интегрируема по t на $[0, T]$ и выполнено равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\mu_t - \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi\, d\nu = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^d} L_{A,b}\varphi\, d\mu_s\, ds \tag{1.3}$$

для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. *Вероятностным* называется решение, для которого меры μ_t вероятностные.

С оператором Колмогорова $L_{A,b}$ связано также стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = \sqrt{2A}\, dw_t + b(\xi_t)\, dt$$

с винеровским процессом w_t, которое в случае линейного b имеет линейный вид

$$d\xi_t = \sqrt{2A}\, dw_t + B\xi_t\, dt. \tag{1.4}$$

Напомним (см., например, [8, § 8.1; 9, § 5.1]), что для произвольных линейных операторов S и B и винеровского процесса w_t в $\mathbb{R}^d$ стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi_t = S\, dw_t + B\xi_t\, dt, \quad \xi_0 = x,$$

с неслучайным начальным значением x имеет единственное решение

$$\xi_{t,x} = e^{tB}x + \int\limits_0^t e^{(t-s)B} S\, dw_s,$$

где векторный стохастический интеграл является гауссовским вектором с нулевым средним и ковариационным оператором

$$K_t = \int_0^t e^{sB} SS^* e^{sB^*}\, ds.$$

Обозначим через G_t центрированную гауссовскую меру с этим ковариационным оператором, т. е. распределение указанного стохастического интеграла в момент t. Переходная полугруппа процесса задается на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$T_t f(x) = \mathrm{E}(f(\xi_{t,x})) = \int_{\mathbb{R}^d} f(e^{tB}x + y)\, G_t(dy). \tag{1.4}$$

Эта полугруппа является сжимающей на $C_b(\mathbb{R}^d)$, но не сильно непрерывной (см. [7, пример 5.1.2]). Симметричный неотрицательный оператор $A = SS^*/2$ задает дифференциальный оператор $L_{A,B}$, для которого при всех $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ выполнено равенство

$$\partial_t T_t f = L_{A,B} T_t f = T_t L_{A,B} f.$$

Полугруппа $\{T_t\}_{t\ge 0}$ порождает полугруппу $\{T_t^*\}_{t\ge 0}$ на пространстве ограниченных мер по формуле

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d(T_t^*\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t f\, d\nu,$$

иначе говоря, с помощью свертки имеем

$$T_t^*\nu = (\nu\circ S_t^{-1}) * G_t, \quad S_t x = e^{tB},$$

где $\nu\circ S_t^{-1}$ — образ меры ν при отображении S_t. Семейство мер $T_t^*\nu$ дает решение задачи Коши для уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

$$\partial_t \mu_t = L_{A,B}^* \mu_t, \quad \mu_0 = \nu.$$

Известно (см. [10; 7, § 9.8(iii)]), что для всякой вероятностной меры ν эта задача Коши имеет единственное решение, состоящее из вероятностных мер, а ниже в замечании 3.2 пояснена единственность и в классе знакопеременных решений.

Для невырожденного оператора A в случае существования вероятностного решения μ уравнения $L_{A,B}^*\mu = 0$ упомянутая выше каноническая полугруппа $\{T_t^\mu\}_{t\ge 0}$ совпадает на $C_b(\mathbb{R}^d)$ с указанной явно заданной полугруппой $\{T_t\}_{t\ge 0}$. В самом деле, давно известно (см. [11]), что задача Коши для прямого уравнения

$$\partial_t u(x,t) = L_{A,B} u(x,t), \quad u(x,0) = u_0(x),$$

с невырожденным оператором A имеет единственное решение в классе $C_b(\mathbb{R}^d)$ для всякой начальной функции из этого класса (единственность есть даже в гораздо более широком классе функций с оценкой $|u(x,t)| \le C\exp(k|x|^2)$). Совпадение полугрупп вытекает также из единственности решений задачи Коши для уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова, так как обе полугруппы порождают сопряженные полугруппы на пространстве ограниченных мер, дающие решения для этой задачи Коши. Сопряженная к канонической полугруппе действует на меры по формуле

$$(T_t^\mu)^*\nu(E) = \int_{\mathbb{R}^d} T_t^\mu I_E\, d\nu,$$

где используется непрерывная версия функции $T_t^\mu I_E$ (которая существует по свойствам канонических полугрупп, см. [7, теорема 5.4.5]). Действие T_t^* было определено выше. Значит, сопряженные полугруппы равны, что равносильно равенству самих полугрупп.

В общем случае (для нелинейного b) не всякое решение стационарного уравнения $L_{A,b}^*\mu = 0$ инвариантно относительно полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$, но в данном случае эти два свойства равносильны, в чем и состоит один из основных результатов работы.

В [12] получено полное описание всех стационарных вероятностных мер процесса $\xi_{x,t}$. Общий вид стационарных распределений процесса таков: $\sigma * G$, где G — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K = \int\limits_0^\infty e^{sB} SS^* e^{sB^*}\, ds,$$

равным пределу операторов K_t при $t \to \infty$ в случае существования стационарных распределений, σ — вероятностная мера, инвариантная для процесса с нулевой диффузией, т. е. для детерминированной динамической системы $x'(t) = Bx(t)$, иначе говоря, вероятностная мера, инвариантная относительно всех операторов e^{tB}. Это равносильно тождеству $\widetilde{\sigma}(y) = \widetilde{\sigma}(e^{tB^*}y)$ для ее преобразования Фурье. Согласно [12] существование стационарных распределений равносильно существованию неотрицательного симметричного оператора Q, удовлетворяющего равенству

$$BQ + QB^* = -2A = -SS^*. \tag{1.6}$$

В [12, 13] приведены равносильные алгебраические условия. В приведенных результатах оператор S не обязан быть симметричным, но возникающий в уравнении (1.1) оператор $A = SS^*/2$ всегда симметричен и неотрицательно определен, поэтому для наших целей можно считать, что $S = \sqrt{2A}$.

2. Основные результаты

Далее рассматривается уравнение $L_{A,B}^*\mu = 0$ в случае, когда $A = (a^{ij})_{i,j\leq d}$ и $B = (b^{ij})_{i,j\leq d}$ — постоянные линейные операторы на $\mathbb{R}^d$, причем A симметричен и неотрицательно определен.

Основные результаты работы состоят в следующем.

Теорема 2.1. *Ограниченная борелевская мера μ на $\mathbb{R}^d$ (возможно, знакопеременная) удовлетворяет уравнению $L_{A,B}^*\mu = 0$ в точности тогда, когда мера μ инвариантна относительно введенной выше полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$ на пространстве $C_b(\mathbb{R}^d)$.*

Следствие 2.2. *Всякое вероятностное решение уравнения $L_{A,B}^*\mu = 0$ имеет вид*

$$\mu = \sigma * G, \tag{2.1}$$

где G — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K = 2\int\limits_0^\infty e^{sB} A e^{sB^*}\, ds,$$

σ — вероятностная мера, инвариантная относительно всех операторов e^{tB}, причем все меры такого вида удовлетворяют данному уравнению.

Если оператор A невырожденный, то, как уже отмечалось, вероятностное решение уравнения $L^*_{A,B}\mu = 0$ единственно (с точностью до множителя это единственное решение в классе ограниченных мер), поэтому это мера G. Необходимое и достаточное условие существования и единственности вероятностного решения — отрицательность вещественных частей собственных чисел оператора B (см. [12] и более общий результат для непостоянной матрицы A в [14]).

Следствие 2.3. *Знакопеременная борелевская мера μ удовлетворяет уравнению $L^*_{A,B}\mu = 0$ в точности тогда, когда она имеет вид $\mu = c_1\mu_1 - c_2\mu_2$, где c_1 и c_2 — неотрицательные постоянные, μ_1 и μ_2 — вероятностные меры, удовлетворяющие тому же уравнению и потому имеющие вид* (2.1).

Следствие 2.4. *Существование ненулевого* (*а тогда и вероятностного*) *решения уравнения $L^*_{A,B}\mu = 0$ равносильно существованию неотрицательного симметричного оператора Q, удовлетворяющего равенству* (1.6).

Из сказанного ясно, что полная вариация $|\mu|$ решения уравнения $L^*_{A,B}\mu = 0$ также является решением. Отметим, что если уравнение $L^*_{I,b}\mu = 0$ имеет два разных вероятностных решения μ_1 и μ_2, то мера $|\mu_1 - \mu_2|$ не может быть решением, ибо меры μ_1 и μ_2 имеют гладкие плотности ϱ_1 и ϱ_2, поэтому $|\mu_1 - \mu_2|$ задается непрерывной плотностью $|\varrho_1 - \varrho_2|$, причем эта плотность не имеет нулей (см. [7, § 3.4]), что невозможно, так как функция $\varrho_1 - \varrho_2$ имеет нулевой интеграл по всему пространству.

Доказательства даны в следующем разделе.

3. Вспомогательные результаты и доказательства

Приведем сначала простое прямое обоснование частного случая следствия (1.6), а именно покажем, что существование вероятностного решения с конечным вторым моментом равносильно условию (1.1). Предположим, что μ — вероятностное решение (1.1) с конечным вторым моментом, т. е. имеется неотрицательный симметричный оператор $Q = (Q^{jk})_{j,k\le d}$, для которого

$$\langle Qu, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \langle u, x\rangle\langle v, x\rangle\,\mu(dx), \quad u, v \in \mathbb{R}^d.$$

Тогда, как легко видеть (см. доказательство теоремы) в определяющее тождество (1.2) можно подставлять функции $\varphi(x) = \langle Cx, x\rangle$, где C — симметричный оператор, что в силу равенства

$$L_{A,B}\varphi(x) = 2\,\mathrm{trace}(AC) + 2\langle Bx, Cx\rangle$$

приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}\mathrm{trace}(AC) &= -\int_{\mathbb{R}^d} \langle Bx, Cx\rangle\,\mu(dx)\\ &= -\frac{1}{2}\,\mathrm{trace}[Q(CB + B^*C)] - \frac{1}{2}\,\mathrm{trace}[(BQ + QB^*)C],\end{aligned}$$

из которых вытекает равенство (1.1). Таким образом, существование неотрицательно определенного оператора Q, удовлетворяющего этому равенству, является необходимым условием существования вероятностного решения с конечным вторым моментом. Обратно, если такой оператор существует, то симметричная гауссовская мера σ_Q с ковариационным оператором Q удовлетворяет уравнению (1.1). В самом деле, для гауссовской меры тождество (1.2) достаточно проверить на функциях вида $\varphi(x) = \exp(i\langle x, y\rangle)$, так как это влечет равенство для функций φ, представляющих собой периодические продолжения гладких функций с носителями в кубах, откуда нетрудно вывести равенство для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Для функций указанного вида

$$L_{A,B}\varphi(x) = -\langle Ay, y\rangle \exp(i\langle x, y\rangle) + i\exp(i\langle x, y\rangle)\langle Bx, y\rangle,$$

причем интеграл от первого слагаемого равен $-\langle Ay, y\rangle\widetilde{\sigma_T}(y)$. Поэтому остается вычислить интеграл

$$i\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y\rangle)\langle Bx, y\rangle\, \sigma_Q(dx),$$

который равен

$$i\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y\rangle)\langle x, B^*y\rangle\, \sigma_Q(dx) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int\limits_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle x, y + tB^*y\rangle)\, \sigma_Q(dx)$$
$$= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp\left(-\frac{1}{2}\langle Q(y + tB^*y), y + tB^*y\rangle\right) = -\frac{1}{2}\widetilde{\sigma_T}(y)[\langle Qy, B^*y\rangle + \langle QB^*y, y\rangle].$$

В силу равенства (1.6) сумма интегралов от слагаемых в указанном выражении для $L_{A,B}\varphi(x)$ равна нулю.

Если оператор B отрицательно определен, т. е. $\langle Bx, x\rangle \le -\alpha|x|^2$, где $\alpha > 0$, то существует единственное вероятностное решение, причем оно имеет все моменты. В общем случае это не так, например, как уже было сказано, если $d = 2$, $A = 0$ и B — оператор поворота на $\pi/2$, то все инвариантные относительно вращений меры являются решениями, так что есть и решения, не имеющие моментов. В следствии 2.4 утверждается равносильность условия (1.6) и существования ненулевого и возможно знакопеременного решения, относительно которого $|x|^2$ может и не быть интегрируемым. В этом случае приведенное выше простое рассуждение не годится и требуется иное обоснование (1.6). Оно будет состоять в следующем: покажем, что, хотя не все решения имеют второй момент, наличие какого-то ненулевого решения дает гауссовское решение.

Нам понадобится следующее очевидное утверждение. Через $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ обозначим пространство непрерывных функций на $\mathbb{R}^d$ с нулевым пределом на бесконечности, наделенное sup-нормой, через $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ — стандартное пространство гладких быстро убывающих функций.

Лемма 3.1. (i) *Пусть γ — гауссовская мера на $\mathbb{R}^d$, Λ и T — линейные операторы на $\mathbb{R}^d$, причем Λ обратим, f — борелевская функция на $\mathbb{R}^d$ и*

$$|f(x)| \le C(1 + |x|)^{-k}$$

при некоторых $C, k > 0$. Тогда функция

$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(\Lambda x + Ty)\, \gamma(dy)$$

удовлетворяет оценке

$$|g(x)| \le C_1(1 + |x|)^{-k}, \quad C_1 = C2^{k+1}(1 + \|\Lambda^{-1}\|)^k(1 + I_k), \quad I_k = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |Ty|^k\, \gamma(dy).$$

Если $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$, то $g \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, то $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(ii) *Если дано семейство операторов Λ_t на $\mathbb{R}^d$ с равномерно ограниченными обратными Λ_t^{-1}, то для соответствующих функций g_t число C_1 можно выбрать общим. В частности, если $\Lambda_t = e^{tB}$, где B — линейный оператор и $t \in [0,T]$, то для всякой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ полученная функция $g_t(x)$ на $\mathbb{R}^d \times [0,T]$ дважды непрерывно дифференцируема, причем ее первые и вторые производные по x оцениваются через функции вида $C_m(1+|x|)^{-m}$ при всех $m > 0$.*

Доказательство. (i) Пусть $|Ty| \le |\Lambda x|/2$. Тогда $|\Lambda x + Ty| \ge |\Lambda x|/2$ и

$$|f(\Lambda x + Ty)| \le C(1 + |\Lambda x|/2)^{-k}.$$

Значит,

$$|g(x)| \le C(1 + |\Lambda x|/2)^{-k} + C\gamma(y : |Ty| \ge |\Lambda x|/2).$$

Первое слагаемое не больше $C2^k(1+|\Lambda x|)^{-k}$. Второе слагаемое при $|\Lambda x| \ge 1$ по неравенству Чебышёва оценивается через $C2^k|\Lambda x|^{-k}I_k \le C2^{k+1}I_k(1+|\Lambda x|)^{-k}$. При $|\Lambda x| \le 1$ второе слагаемое не превосходит $C2^k(1+|\Lambda x|)^{-k}$. Таким образом, имеем

$$|g(x)| \le C2^{k+1}(1 + I_k)(1 + |\Lambda x|)^{-k}.$$

Поскольку справедливо неравенство $|x| \le \|\Lambda^{-1}\||\Lambda x|$, получаем

$$\frac{1}{1+|\Lambda x|} \le (1 + \|\Lambda^{-1}\|)\frac{1}{1+|x|},$$

что дает объявленную оценку.

Аналогично получаем $g \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$ при $f \in C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, то

$$\partial_{x_i} g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla f(\Lambda x + Ty), Se_i\rangle\, \gamma(dy),$$

где $\{e_i\}$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^d$, откуда по индукции заключаем, что $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Утверждение (ii) очевидно из доказательства. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Пусть μ — ограниченная мера на $\mathbb{R}^d$, $L^*_{A,B}\mu = 0$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. В силу формулы (1.4) и леммы 3.1, применяемой к обратимому оператору $\Lambda = e^{tB}$, имеем $\psi = T_t\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Проверим, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} L_{A,B}\psi\, d\mu = 0.$$

Возьмем функцию $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, равную 1 на единичном шаре. Положим $\eta_n(x) = \eta(x/n)$. Интегралы от функций $L_{A,B}(\eta_n\psi)$ по мере μ равны нулю. При этом

$$L_{A,B}(\eta_n\psi) = \eta_n L_{A,B}\psi + \psi L_{A,B}\eta_n + 2\langle A\nabla\psi, \nabla\eta_n\rangle.$$

Функция $L_{A,B}\psi$ ограничена и интеграл от $\eta_n L_{A,B}\psi$ по мере μ стремится к интегралу от $L_{A,B}\psi$. Функции $\psi L_{A,B}\eta_n$ поточечно сходятся к нулю и равномерно ограничены, ибо $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$. Поэтому интеграл от $\psi L_{A,B}\eta_n$ по мере μ стремится к нулю. Это неверно и для равномерно ограниченных функций $2\langle A\nabla\psi, \nabla\eta_n\rangle$. Итак, интеграл от $L_{A,B}T_t\varphi$ по мере μ равен нулю. Из этого следует, что интеграл от $T_t\varphi$ постоянен, так как $\partial_t(T_t\varphi) = L_{A,B}T_t\varphi$, причем функции $L_{A,B}T_t\varphi = T_tL_{A,B}\varphi$ равномерно ограничены из-за компактности носителя φ. В силу произвольности φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ можно заключить, что меры μ и

$T_t^*\mu$ равны. Из этих же рассуждений видно, что из тождества $T_t^*\mu = \mu$ следует равенство $L_{A,B}^*\mu = 0$. $\square$

Доказательство следствия 2.2. Пусть μ — вероятностная мера, удовлетворяющая уравнению $L_{A,B}^*\mu = 0$, G_t — центрированная гауссовская мера с ковариационным оператором

$$K_t = 2\int_0^t e^{sB}Ae^{sB^*}\,ds.$$

В силу теоремы интегралы от функций $\exp(i\langle x, y\rangle)$ по мерам $T_t^*\mu$ не зависят от t, т. е. для преобразования Фурье меры μ имеет место тождество

$$\begin{aligned}\widetilde{\mu}(y) &= \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle e^{tB}x + u, y\rangle)\, G_t(du)\,\mu(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle e^{tB}x, y\rangle)\widetilde{G_t}(y)\,\mu(dx) = \widetilde{G_t}(y)\widetilde{\mu}(e^{tB^*}y).\end{aligned}$$

Покажем, что операторы K_t при $t \to +\infty$ стремятся к некоторому неотрицательному симметричному оператору K. Достаточно убедиться, что возрастающие неотрицательные квадратичные формы $\langle K_t y, y\rangle$ имеют конечный предел при каждом $y \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что при некотором y предел бесконечен. Тогда

$$\widetilde{G_t}(y) = \exp(-\langle K_t y, y\rangle/2) \to -\infty.$$

Поскольку $|\widetilde{\mu}(e^{tB^*}y)| \le 1$, из полученного выше тождества заключаем, что $\widetilde{\mu}(y) = 0$. Это остается в силе и для всех векторов αy с $\alpha > 0$. Итак, $\widetilde{\mu}(\alpha y) = 0$, откуда при $\alpha \to 0$ получаем $\widetilde{\mu}(0) = 0$; противоречие, ибо $\widetilde{\mu}(0) = 1$.

Обозначим через G центрированную гауссовскую меру с ковариационным оператором K. Из доказанного вытекает, что функции $\widetilde{\mu}(e^{tB^*}y)$, т. е. преобразования Фурье мер $\mu \circ S_t^{-1}$, поточечно сходятся к непрерывной функции $\widetilde{\mu}(y)\exp(\langle Ky, y\rangle/2)$. Значит, по теореме Бохнера эта функция есть преобразование Фурье некоторой вероятностной меры ν (см. [15, теорема 7.13.1]). Итак, $\widetilde{\mu}(y) = \widetilde{\nu}(y)\widetilde{G}(y)$, откуда $\mu = \nu * G$. При этом мера ν инвариантна для уравнения с нулевой матрицей диффузии, т. е. $\widetilde{\nu}(e^{tB^*}y) = \widetilde{\nu}(y)$ при всех $y \in \mathbb{R}^d$, $t \ge 0$. В самом деле,

$$\widetilde{\nu}(e^{tB^*}y) = \frac{\widetilde{\mu}(e^{tB^*}y)}{\widetilde{G}(e^{tB^*}y)} = \frac{\widetilde{\mu}(e^{tB^*}y)\widetilde{G_t}(y)}{\widetilde{G}(e^{tB^*}y)\widetilde{G_t}(y)} = \frac{\widetilde{\mu}(y)}{\widetilde{G}(y)} = \widetilde{\nu}(y),$$

так как

$$\begin{aligned}\widetilde{G}(e^{tB^*}y)\widetilde{G_t}(y) &= \exp\left(-\int_0^\infty \langle e^{sB}Ae^{sB^*}e^{tB^*}y, e^{tB^*}y\rangle\,ds - \int_0^t \langle e^{sB}Ae^{sB^*}y, y\rangle\,ds\right)\\ &= \exp\left(-\int_0^\infty \langle e^{sB}Ae^{sB^*}y, y\rangle\,ds\right)\end{aligned}$$

в силу равенства

$$\int_0^\infty \langle e^{sB}Ae^{sB^*}e^{tB^*}y, e^{tB^*}y\rangle\,ds = \int_0^\infty \langle e^{(s+t)B}Ae^{(s+t)B^*}y, y\rangle\,ds = \int_t^\infty \langle e^{sB}Ae^{sB^*}y, y\rangle\,ds,$$

полученного заменой переменной. □

Доказательство следствия 2.3. В силу теоремы мера μ инвариантна относительно полугруппы $\{T_t\}_{t\geq 0}$, поэтому ее положительная и отрицательная части также инвариантны (см. [7, лемма 5.1.4(iii)]). Следовательно, они пропорциональны вероятностным мерам указанного вида. □

Доказательство следствия 2.4. Ввиду уже доказанного наличие ненулевого решения уравнения (1.1) влечет существование гауссовского решения, что в силу сказанного в начале этого раздела дает соотношение (1.6). Конечно, здесь можно было бы просто сослаться на [12], поскольку показано, что это гауссовское решение инвариантно для полугруппы, но данное нами обоснование доказывает (1.6) непосредственно. □

Замечание 3.2. Для всякой меры ν на $\mathbb{R}^d$ задача Коши (1.3) на отрезке $[0,1]$ имеет единственное решение в классе мер ограниченной вариации на $\mathbb{R}^d \times [0,1]$ вида $\mu(dx\,dt) = \mu_t(dx)\,dt$. Это вытекает из более общего результата о единственности знакопеременных решений, доказанного в нашей отдельной работе, но в рассматриваемом частном случае доказывается более просто. Для этого заметим, что при $\nu = 0$ в силу [7, предложение 6.1.2] для всякой непрерывной функции ψ на $\mathbb{R}^d \times [0,1]$ с двумя непрерывными производными, равной нулю для всех x вне некоторого шара, верно равенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi(x,t)\,\mu_t(dx) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_s \psi(x,s) + L_{A,B}\psi(x,s)]\,\mu_s(dx)\,ds.$$

Это равенство остается в силе и для дважды непрерывно дифференцируемых функций ψ, для которых условие ограниченности носителя по x заменено оценками через $C_2(1+|x|)^{-2}$ для самой функции и первых и вторых производных по x. Действительно, как и выше, с помощью этих оценок в равенстве для функций $\eta_n(x)\psi(x,t)$ можно перейти к пределу при $n\to\infty$ и воспользоваться тем, что интегралы с членами $\psi(x,t)L_{A,B}\eta_n(x)$ и $\langle A\nabla_x\psi, \nabla\eta_n\rangle$ стремятся к нулю. В частности, в силу леммы в качестве ψ можно брать функции $\psi(x,t) = T_{\tau-t}\varphi(x)$, где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\tau\in[0,1]$. Тогда правая часть равна нулю, значит, интеграл от $\psi(x,\tau) = \varphi(x)$ по мере μ_τ равен нулю, что в силу произвольности τ дает равенство $\mu_\tau = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Arnold A., Schmeiser C., Signorello B.* Propagator norm and sharp decay estimates for Fokker–Planck equations with linear drift // Commun. Math. Sci. 2022. V. 20, N 4. P. 1047–1080.
2. *Богачев В. И.* Операторы и полугруппы Орнштейна — Уленбека // Успехи мат. наук. 2018. Т. 73, № 2. С. 3–74.
3. *Metafune G., Pallara D., Priola E.* Spectrum of Ornstein–Uhlenbeck operators in L^p spaces with respect to invariant measures // J. Funct. Anal. 2002. V. 196, N 1. P. 40–60.
4. *Metafune G., Prüss J., Rhandi A., Schnaubelt R.* The domain of the Ornstein–Uhlenbeck operator on an L^p-space with invariant measure // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5). 2002. V. 1, N 2. P. 471–485.
5. *Bogachev V. I., Röckner M., Stannat W.* Uniqueness of invariant measures and maximal dissipativity of diffusion operators on L^1 // Infinite Dimensional Stochastic Analysis (Proceedings of the Colloquium, Amsterdam, 11–12 February, 1999), Ph. Clément, F. den Hollander, J. van Neerven and B. de Pagter eds., Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, pp. 39–54, Amsterdam, 2000.
6. *Богачев В. И., Рёкнер М., Штаннат В.* Единственность решений эллиптических уравнений и единственность инвариантных мер диффузий // Мат. сб. 2002. Т. 197, № 7. С. 3–36.

7. *Bogachev V. I., Krylov N. V., Röckner M., Shaposhnikov S. V.* Fokker–Planck–Kolmogorov equations. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2015.
8. *Da Prato G.* Introduction to stochastic analysis and Malliavin calculus. Pisa: Edizioni della Normale, 2014.
9. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. 2nd ed.. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2014.
10. *Bogachev V. I., Röckner M., Shaposhnikov S. V.* Uniqueness problems for degenerate Fokker–Planck–Kolmogorov equations // J. Math. Sci. (New York). 2015. V. 20, N 2. P. 147–165.
11. *Смирнова Г. Н.* Задачи Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности // Мат. сб. 1966. Т. 112, № 4. С. 591–604.
12. *Zakai M., Snyders J.* Stationary probability measures for linear differential equations driven by white noise // J. Differ. Equ. 1970. V. 8. P. 27–33.
13. *Snyders J., Zakai M.* On nonnegative solutions of the equation $AD + DA' = -C$ // SIAM J. Appl. Math. 1970. V. 18. P. 704–714.
14. *Zhang X. S.* Existence and uniqueness of invariant probability measure for uniformly elliptic diffusion // Dirichlet forms and stochastic processes (Beijing, 1993), pp. 417–423, de Gruyter, Berlin, 1995.
15. *Bogachev V. I.* Measure theory. Berlin: Springer, 2007. V. 1, 2.

Поступила в редакцию 4 сентября 2023 г.
После доработки 4 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Богачев Владимир Игоревич (ORCID 0000-0001-5249-2965),
Шапошников Станислав Валерьевич (ORCID 0000-0002-3281-7061)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Ленинские горы, 1, Москва 119991;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
факультет математики,
ул. Усачева, 6, Москва 119048
vibogach@mail.ru,

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.518.822

ОБ АППРОКСИМАТИВНЫХ СВОЙСТВАХ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ПОЛИНОМАМ ЛАГЕРРА — СОБОЛЕВА

Р. М. Гаджимирзаев

Аннотация. Рассмотрена задача о приближении функций f из пространства Соболева посредством частичных сумм ряда Фурье по системе полиномов, ортогональной по Соболеву и порожденной системой классических полиномов Лагерра. Получена оценка скорости сходимости частичных сумм к f.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.104

Ключевые слова: полином Лагерра, ряд Фурье, аппроксимативные свойства, скалярное произведение типа Соболева.

§ 1. Введение

Пусть $\alpha > -1$, $r \in \mathbb{N}$, $\rho(x) = e^{-x}x^\alpha$ — весовая функция, $1 \le p < \infty$, L^p_ρ — пространство измеримых функций f, определенных на полуоси $[0,\infty)$ и таких, что

$$\|f\|_{L^p_\rho} = \left(\int\limits_0^\infty |f(x)|^p \rho(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

$W^r_{L^p_\rho}$ — пространство функций f, непрерывно дифференцируемых $r-1$ раз, для которых $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна на произвольном сегменте $[a,b] \subset [0,\infty)$, а $f^{(r)} \in L^p_\rho$. Далее через W^r обозначаем функции f из $W^r_{L^2_\rho}$, для которых $|f^{(r)}(x)|e^{-\frac{x}{2}} \le 1$. В пространстве $W^r_{L^2_\rho}$ определим скалярное произведение типа Соболева

$$\langle f, g\rangle_S = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)g^{(\nu)}(0) + \int\limits_0^\infty f^{(r)}(x)g^{(r)}(x)\rho(x)\,dx. \tag{1}$$

В работе [1] была введена система полиномов

$$l^\alpha_{r,r+n}(x) = \frac{1}{(r-1)!\sqrt{h^\alpha_n}} \int\limits_0^x (x-t)^{r-1} L^\alpha_n(t)\,dt, \quad n = 0,1,\dots,$$

$$l^\alpha_{r,n}(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad n = 0,1,\dots,r-1,$$

ортонормированная при $\alpha > -1$ относительно скалярного произведения (1) и порожденная системой полиномов Лагерра $\{L^\alpha_n(x)\}_{n=0}^\infty$. В [2] показано, что система $\{l_{r,k}^{\alpha}(x)\}_{k=0}^{\infty}$ полна в $W^r_{L^2_\rho}$. Ряд Фурье функции $f \in W^r_{L^2_\rho}$ по этой системе имеет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \widehat{f}_{r,k}^{\alpha} l_{r,k}^{\alpha}(x), \tag{2}$$

где

$$\widehat{f}_{r,k}^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{h_{k-r}^{\alpha}}} \int\limits_0^{\infty} f^{(r)}(t) L_{k-r}^{\alpha}(t)\rho(t)\,dt, \quad k = r, r+1, \dots . \tag{3}$$

В той же работе была доказана следующая

Теорема A. *Пусть $-1 < \alpha < 1$, $f \in W^r_{L^2_\rho}$, $0 \le A < \infty$. Тогда для произвольного $x \in [0,\infty)$ имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{r-1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=r}^{\infty} \widehat{f}_{r,k}^{\alpha} l_{r,k}^{\alpha}(x),$$

в котором ряд Фурье функции f по полиномам $l_{r,k}^{\alpha}(x)$ сходится равномерно относительно $x \in [0, A]$.

Относительно параметра p теорема A обобщена в работе [3].

Теорема B. *Пусть $-1 < \alpha < 1$. Тогда если $f \in W^r_{L^p_\rho}$, то при $p \ge 2$ ряд (2) сходится равномерно к f на любом отрезке $[0, A]$. Если $1 \le p < 2$, то существует функция $f \in W^r_{L^p_\rho}$, ряд Фурье которой расходится в точке $x = \pi^2$.*

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. В этом случае для полиномов $l_{r,r+n}^{0}(x)$ имеет место равенство [2, следствие 3.1]

$$l_{r,r+n}^{0}(x) = \frac{x^r L_n^r(x)}{(n+r)^{[r]}},$$

где $(n+r)^{[r]} = (n+r)(n+r-1)\dots(n+1)$. Тогда ряд Фурье (2) примет следующий вид:

$$f(x) \sim \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widehat{f}_{r,k+r}^{0}}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(x).$$

Частичную сумму этого ряда обозначим через $S_{r,n+r}(f,x)$:

$$S_{r,n+r}(f,x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} f^{(\nu)}(0)\frac{x^k}{k!} + x^r \sum_{k=0}^{n} \frac{\widehat{f}_{r,k+r}^{0}}{(k+r)^{[r]}} L_k^r(x). \tag{4}$$

Из (4) следует, что для $S_{n+r}(f,x)$ имеют место равенства

$$(S_{r,n+r}(f,0))^{(\nu)} = f^{(\nu)}(0), \quad 0 \le \nu \le r-1.$$

Кроме того, если $f(x) = p_{n+r}(x)$ — алгебраический полином степени $n+r$, то

$$S_{r,n+r}(p_{n+r},x) \equiv p_{n+r}(x). \tag{5}$$

Используя свойство (5), авторы работы [2] исследовали аппроксимативные свойства частичных сумм $S_{r,n+r}(f,x)$. В частности, для $f \in W^r_{L^2_\omega}$, $\omega(x) = e^{-x}$ было показано, что [2, теорема 5.2]

$$e^{-x/2}x^{-r/2+1/4}|f(x) - S_{r,n+r}(f,x)| \le (1 + \lambda_{r,n}(x))E_{n+r}^r(f),$$

где

$$\lambda_{r,n}(x) \le c(r)\begin{cases} \ln(n+1), & x\in[0,\varkappa/2];\\ \ln(n+1)+(x/(\varkappa^{1/3}+|x-\varkappa|))^{1/4}, & x\in[\varkappa/2,3\varkappa/2];\\ n^{-r/2+5/4}e^{-x/4}, & x\in[3\varkappa/2,\infty). \end{cases}$$

Здесь $c(r)$ — положительная константа, зависящая только от r, $\varkappa = 4n+2r+2$. Величина $E^r_{n+r}(f)$ определяется равенством

$$E^r_{n+r}(f) = \inf_{q_{n+r}}\sup_{x>0}|q_{n+r}(x)-f(x)|e^{-x/2}x^{-r/2+1/4},$$

где нижняя грань берется по всем алгебраическим полиномам q_{n+r} степени $n+r$, для которых $f^{(\nu)}(0)=q^{(\nu)}_{n+r}(0)$, $\nu=\overline{0,r-1}$.

Вышеприведенные оценки для разности $|f(x)-S_{r,n+r}(f,x)|$ содержат величину наилучшего приближения $E^r_{n+r}(f)$, поведение которой еще не исследовано. В настоящей работе для случая $r=1$ получена оценка скорости сходимости частичных сумм $S_{1,n+1}(f,x)$ к функции $f(x)$, не содержащая величины наилучшего приближения $E^r_{n+r}(f)$. Точнее, справедлива

Теорема 1. *Пусть $f\in W^1$, $x\in[0,\infty)$. Тогда имеет место оценка*

$$\frac{x^{-\frac14}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x+1}}|f(x)-S_{1,n+1}(f,x)| \le c\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac14}}.$$

где c — положительная константа.

Доказательство теоремы 1 приведено в разд. 4.

Аналогичные задачи о приближении функций из пространства Соболева алгебраическими полиномами были исследованы в работах различных авторов (см. [4–7] и цитированную в них литературу). Приведем некоторые результаты, полученные в этих работах. В [4] при $1\le p<\infty$ было рассмотрено пространство

$$W^r_{L^p_w} = W^r_{L^p_w}[-1,1] = \{f\in C^{r-1}[-1,1] : f^{(r)}\in L^p_w\},$$

$w(x)=w_{\alpha,\beta}(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, с нормой

$$\|f\|_{W^r_{L^p_w}} = \left(\sum_{k=0}^r \|f^{(k)}\|^p_{L^p_w}\right)^{1/p}.$$

Для функций из этого пространства были доказаны следующие теоремы.

Теорема C. *Пусть $\alpha,\beta>-1$. Предположим, что $f\in W^r_{L^p_w}$ при $1\le p<\infty$ или $f\in C^r[-1,1]$ при $p=\infty$. Тогда существует полином p_n такой, что*

$$\|f-p_n\|_{W^r_{L^p_w}} \le cE_n(f^{(r)})_{L^p_w},$$

где $E_n(f^{(r)})_{L^p_w} = \inf\limits_{p\in\Pi_n}\|f^{(r)}-p\|_{L^p_w}$ — величина наилучшего приближения в метрике L^p_w.

Теорема D. *Пусть $\alpha,\beta>-1$. Предположим, что $f\in W^r_{L^p_w}$ при $1\le p<\infty$ или $f\in C^r[-1,1]$ при $p=\infty$. Тогда существует полином p_n такой, что*

$$\left\|f^{(k)}-p_n^{(k)}\right\|_{L^p_w} \le cn^{-r+k}E_n(f^{(r)})_{L^p_w}$$

при условии, что либо $\alpha = 0$, *либо* $\beta = 0$.

Далее, в работе [6] было рассмотрено пространство

$$H^r_\omega = H^r_\omega(a,b) = \{f \in L^2_\omega(a,b) : f^{(m)} \in L^2_\omega(a,b),\ 1 \le m \le r\}$$

с нормой

$$\|f\|_{H^r_\omega} = \left(\sum_{m=0}^{r} \|f^{(m)}\|^2_{L^2_w}\right)^{1/2}.$$

Здесь $(a,b) = \mathbb{R}$ при $\omega(x) = e^{-x^2}$, $(a,b) = (0,\infty)$ при $\omega(x) = e^{-x}x^\alpha$, $\alpha > -1$ и $(a,b) = (-1,1)$ при $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\beta > -1$. Был исследован вопрос о приближении функций из этого пространства в метрике L^2_ω посредством частичных сумм $\mathscr{S}^N_n f(x)$ ряда Фурье по системе полиномов $\{q_j(x)\}$, ортогональной относительно скалярного произведения Соболева. А именно, была доказана следующая

Теорема E. *Пусть* $r \ge N+1$ *и функция* $f \in H^r_\omega$ *такая, что* $f \in L^2_{v_{r-N-1}}$. *Тогда оценки*

$$\left\|f^{(m)} - (\mathscr{S}^N_n f)^{(m)}\right\|_{L^2_\omega} \le c \begin{cases} \frac{(-\lambda_{n-N,0})^{(m-N)/2}}{(-\lambda_{n-r,r-N-1})^{(r-N-1)/2}} E_{n-r}(f^{(r)})_{L^2_{v_{r-N-1}}}, & N \le m \le r, \\ \frac{(-\lambda_{n-N,0})^{N/2}}{(-\lambda_{n-r,r-N-1})^{(r-N-1)/2}} E_{n-r}(f^{(r)})_{L^2_{v_{r-N-1}}}, & 0 \le m \le N-1, \end{cases}$$

выполняются всегда в случае весовой функции Эрмита, для $\alpha > -1$ *в случае весовой функции Лагерра и при* $\alpha,\beta \ge 0$ *в случае весовой функции Якоби.*

§ 2. Некоторые сведения о полиномах Лагерра

Пусть α — произвольное действительное число. Тогда для полиномов Лагерра $L^\alpha_n(x)$ справедливы следующие соотношения [8]:

• формула Родрига

$$L^\alpha_n(x) = \frac{1}{n!} x^{-\alpha} e^x \left(x^{n+\alpha} e^{-x}\right)^{(n)};$$

• соотношение ортогональности

$$\int_0^\infty L^\alpha_n(x) L^\alpha_m(x) \rho(x)\, dx = h^\alpha_n \delta_{n,m}, \quad \alpha > -1,$$

где $\delta_{n,m}$ — символ Кронекера, $h^\alpha_n = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)}$;

• формула Кристоффеля — Дарбу

$$K^\alpha_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L^\alpha_k(x) L^\alpha_k(t)}{h^\alpha_k} = \frac{n+1}{h^\alpha_n} \frac{L^\alpha_n(x) L^\alpha_{n+1}(t) - L^\alpha_{n+1}(x) L^\alpha_n(t)}{x-t}; \tag{6}$$

• рекуррентная формула

$$L^\alpha_0(x) = 1, \quad L^\alpha_1(x) = -x + \alpha + 1,$$

$$nL^\alpha_n(x) = (-x + 2n + \alpha - 1) L^\alpha_{n-1}(x) - (n + \alpha - 1) L^\alpha_{n-2}(x), \quad n \ge 2; \tag{7}$$

• равенства

$$nL_n^\alpha(x) = (n+\alpha)L_{n-1}^\alpha(x) - xL_{n-1}^{\alpha+1}(x), \tag{8}$$

$$L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x); \tag{9}$$

• весовая оценка [9, 10]

$$e^{-\frac{x}{2}}|L_n^\alpha(x)| \le c(\alpha)A_n^\alpha(x), \quad \alpha > -1. \tag{10}$$

Здесь и далее c, $c(\alpha)$ — положительные числа, зависящие от указанных параметров,

$$A_n^\alpha(x) = \begin{cases} \theta^\alpha, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta}; \\ \theta^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < x \le \frac{\theta}{2}; \\ [\theta(\theta^{\frac{1}{3}} + |x-\theta|)]^{-\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < x \le \frac{3\theta}{2}; \\ e^{-\frac{x}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < x, \end{cases}$$

где $\theta = \theta_n(\alpha) = 4n + 2\alpha + 2$.

Для ортонормированных полиномов Лагерра $l_n^\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{h_n^\alpha}}L_n^\alpha(x)$ имеют место оценки

$$e^{-\frac{x}{2}}|l_{n+1}^\alpha(x) - l_{n-1}^\alpha(x)| \le c(\alpha)\begin{cases} \theta^{\frac{\alpha}{2}-1}, & 0 \le x \le \frac{1}{\theta}; \\ \theta^{-\frac{3}{4}}x^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}, & \frac{1}{\theta} < x \le \frac{\theta}{2}; \\ x^{-\frac{\alpha}{2}}\theta^{-\frac{3}{4}}(\theta^{\frac{1}{3}} + |x-\theta|)^{\frac{1}{4}}, & \frac{\theta}{2} < x \le \frac{3\theta}{2}; \\ e^{-\frac{x}{4}}, & \frac{3\theta}{2} < x. \end{cases} \tag{11}$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

Пусть $\mathscr{K}_n(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{n} L_k^1(x)L_k(t)$. Справедлива

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$(x-t)\mathscr{K}_n(x,t) = (n+1)\left(L_n^1(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}^1(x)L_n(t)\right) + \sum_{k=0}^{n} L_k(x)L_k(t). \tag{12}$$

Доказательство. Из (7) при $\alpha = 0$ имеем

$$kL_k(t) + (k-1)L_{k-2}(t) = (2k-1)L_{k-1}(t) - tL_{k-1}(t),$$

а при $\alpha = 1$

$$kL_k^1(x) + kL_{k-2}^1(x) = 2kL_{k-1}^1(x) - xL_{k-1}^1(x).$$

Отсюда получаем

$$kL_k(t) + (k-1)L_{k-2}(t) = 2kL_{k-1}(t) - tL_{k-1}(t) - L_{k-1}(t), \tag{13}$$

$$kL_k^1(x) + (k-1)L_{k-2}^1(x) = 2kL_{k-1}^1(x) - xL_{k-1}^1(x) - L_{k-2}^1(x). \tag{14}$$

Далее, умножим (13) на $L_{k-1}^1(x)$, а (14) на $L_{k-1}(t)$. Затем вычтем из первого полученного равенства второе и воспользуемся равенством (9):

$$k\left(L_{k-1}^1(x)L_k(t) - L_k^1(x)L_{k-1}(t)\right) - (k-1)\big(L_{k-2}^1(x)L_{k-1}(t) - L_{k-1}^1(x)L_{k-2}(t)\big)$$
$$= (x-t)L_{k-1}^1(x)L_{k-1}(t) - L_{k-1}(x)L_{k-1}(t).$$

Отсюда

$$(x-t)L_{k-1}^1(x)L_{k-1}(t) = L_{k-1}(x)L_{k-1}(t)$$
$$+ k\big(L_{k-1}^1(x)L_k(t) - L_k^1(x)L_{k-1}(t)\big) - (k-1)\big(L_{k-2}^1(x)L_{k-1}(t) - L_{k-1}^1(x)L_{k-2}(t)\big).$$

Суммируя это равенство по k от 1 до $n+1$ и полагая $L_{-1}^1(x) = L_{-1}(t) = 0$, получим равенство (12). $\square$

Лемма 2. *Для величины* $\mathscr{K}_n(x,t)$ *справедливо равенство*

$$(x-t)\mathscr{K}_n(x,t) = xL_n^2(x)L_n(t) - tL_n^1(x)L_n^1(t) - L_n^1(x)L_n(t) + \sum_{k=0}^{n} L_k(x)L_k(t).$$

Доказательство. Из (8) при $\alpha = 0$ имеем

$$L_{n+1}(t) = L_n(t) - \frac{t}{n+1}L_n^1(t),$$

а при $\alpha = 1$

$$L_{n+1}^1(x) = \frac{n+2}{n+1}L_n^1(x) - \frac{x}{n+1}L_n^2(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} &L_n^1(x)L_{n+1}(t) - L_{n+1}^1(x)L_n(t) \\ &\quad = L_n^1(x)\left(L_n(t) - \frac{t}{n+1}L_n^1(t)\right) - L_n(t)\left(\frac{n+2}{n+1}L_n^1(x) - \frac{x}{n+1}L_n^2(x)\right) \\ &\quad\quad = \frac{x}{n+1}L_n^2(x)L_n(t) - \frac{t}{n+1}L_n^1(x)L_n^1(t) - \frac{1}{n+1}L_n^1(x)L_n(t). \end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение леммы 2. □

Лемма 3. *Для* $K_n^0(x,t) = \sum\limits_{k=0}^{n} L_k(x)L_k(t)$ *имеет место представление*

$$\begin{aligned} K_n^0(x,t) &= \frac{n+1}{2n+1}L_n(x)L_n(t) \\ &+ \frac{n(n+1)}{2n+1}\frac{1}{t-x}[L_n(t)(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) - L_n(x)(L_{n+1}(t) - L_{n-1}(t))]. \end{aligned} \quad (15)$$

Доказательство. В самом деле, из (6) при $\alpha = 0$ имеем

$$\frac{1}{n+1}K_n^0(x,t) = \frac{1}{t-x}\left(L_{n+1}(x)L_n(t) - L_n(x)L_{n+1}(t)\right),$$

$$\frac{1}{n}K_n^0(x,t) = \frac{1}{t-x}\left(L_n(x)L_{n-1}(t) - L_{n-1}(x)L_n(t)\right) + \frac{1}{n}L_n(x)L_n(t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right)K_n^0(x,t) &= \frac{1}{n}L_n(x)L_n(t) \\ &+ \frac{1}{t-x}[L_n(t)(L_{n+1}(x) - L_{n-1}(x)) - L_n(x)(L_{n+1}(t) - L_{n-1}(t))]. \end{aligned}$$

Умножая обе части последнего равенства на $\frac{n(n+1)}{2n+1}$, получим равенство (15). □

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}L_k^1(x)}{k+1}\right)^2 = \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}}, \quad x \in [0,\infty).$$

Доказательство. В самом деле, из равенства [11. с. 623, формула 6]

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k!L_k^\alpha(x)L_k^\alpha(y)}{(\alpha+1)_k(k+1)} = \frac{\alpha}{(xy)^\alpha}e^{x+y}\gamma(\alpha,x)\Gamma(\alpha,y), \quad 0 < x \le y,$$

где $\gamma(\alpha,x)$ и $\Gamma(\alpha,y)$ — неполные гамма-функции, определяемые равенствами

$$\gamma(\alpha,x)=\int\limits_0^x t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,\quad \Gamma(\alpha,x)=\int\limits_x^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt,$$

получаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\biggl(\frac{x^{\frac34}L_k^1(x)}{k+1}\biggr)^2=x^{\frac32}\frac{1}{x^2}e^{2x}\gamma(1,x)\Gamma(1,x)$$
$$=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}\int\limits_0^x e^{-t}\,dt\cdot\int\limits_x^\infty e^{-t}\,dt=\frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}(1-e^{-x})e^{-x}=\frac{e^x-1}{\sqrt{x}}.\quad\square$$

Нам также понадобится следующая лемма, доказанная в [12, лемма 1].

Лемма 5. *Пусть $\alpha>-1$, $n\in\mathbb{N}$, $x\in[0,\infty)$. Тогда имеют место следующие оценки:*

$$e^{-x}K_n^\alpha(x,x)\le c(\alpha)\begin{cases} n^{-\alpha}, & x\in[\theta_n/2,3\theta_n/2],\\ n^{1-\alpha}(A_n^\alpha(x))^2, & x\in[0,\theta_n/2]\cup[3\theta_n/2,\infty).\end{cases}$$

§ 4. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим величину

$$I=\frac{x^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}}|\mathscr{K}_n(x,t)|\,dt$$

и оценим ее поведение при $x\in[0,\infty)$.

Лемма 6. *Пусть $\nu=\nu_n=4n+2$, $X_1=\bigl[0,\frac{3}{\nu}\bigr]$, $X_2=\bigl[\frac{3}{\nu},\frac{\nu}{2}\bigr]$, $X_3=\bigl[\frac{\nu}{2},\frac{3\nu}{2}\bigr]$, $X_4=\bigl[\frac{3\nu}{2},\infty\bigr)$. Имеют место оценки*

$$I\le c\begin{cases}\frac{x^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}\nu^{\frac32}, & x\in X_1;\\ \frac{\nu^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}\ln(n+1), & x\in X_2;\\ \nu^{\frac{7}{12}}\ln(n+1), & x\in X_3;\\ \frac{n^{\frac32}x^{\frac34}e^{-\frac{x}{4}}}{\sqrt{x+1}}, & x\in X_4.\end{cases}\tag{16}$$

Доказательство. Пусть $x\in X_1$. Тогда

$$I=\Biggl(\int\limits_0^{4/\nu}+\int\limits_{4/\nu}^{\infty}\Biggr)\frac{x^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{x+t}{2}}\,|\mathscr{K}_n(x,t)|\,dt=I_1+I_2.$$

Из (10) получаем

$$I_1\le c\frac{x^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}\int\limits_0^{4/\nu}\sum_{k=0}^{n}\nu_k\,dt\le c\frac{x^{\frac34}}{\sqrt{x+1}}\nu^2\frac{4}{\nu}=c\frac{x^{\frac34}\nu}{\sqrt{x+1}}.\tag{17}$$

Для оценки величины I_2 запишем ее в виде

$$I_2 = \left(\int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} + \int\limits_{\nu/2}^{3\nu/2} + \int\limits_{3\nu/2}^{\infty} \right) \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \mathscr{K}_n(x,t) \right| dt = I_2^1 + I_2^2 + I_2^3. \tag{18}$$

С помощью леммы 2 для I_2^1 напишем неравенство

$$I_2^1 \le I_2^{11} + I_2^{12} + I_2^{13} + I_2^{14}.$$

Величины I_2^{11}, I_2^{12} и I_2^{13} оценим с помощью (10):

$$I_2^{11} \le c\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu^2 \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}}{t-x}\,dt \le c\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu^{\frac{7}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{5}{4}}\,dt \le c\frac{\nu^2 x^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{x+1}},$$

$$I_2^{12} \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{t\nu^{\frac{1}{4}}t^{-\frac{3}{4}}}{t-x}\,dt \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu^{\frac{5}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{3}{4}}\,dt \le c\frac{\nu^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}},$$

$$I_2^{13} \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}}{t-x}\,dt \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu^{\frac{3}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{5}{4}}\,dt \le c\frac{\nu x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Для оценки величины I_2^{14} воспользуемся (15), (10) и (11):

$$I_2^{14} \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \left(\int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}}{t-x}\,dt + n\frac{1}{\nu} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}}t^{-\frac{1}{4}}}{(t-x)^2}\,dt + n \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} \frac{\nu^{-\frac{3}{4}}t^{\frac{1}{4}}}{(t-x)^2}\,dt \right) \le$$

$$c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \left(\nu^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{5}{4}}\,dt + \nu^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{9}{4}}\,dt + n^{\frac{1}{4}} \int\limits_{4/\nu}^{\nu/2} t^{-\frac{7}{4}}\,dt \right) \le c\frac{\nu x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Тогда

$$I_2^1 \le c\frac{\nu^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}. \tag{19}$$

Аналогично оцениваются величины I_2^2, I_2^3, и для них имеют место следующие оценки:

$$I_2^2 \le c\frac{\nu^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}, \quad I_2^3 \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\nu^2 e^{-\frac{3\nu}{8}}. \tag{20}$$

Из (18)–(20) выводим

$$I_2 \le c\frac{\nu^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Отсюда и из (17) получаем

$$I \le c\frac{\nu^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}, \quad x \in X_1.$$

Пусть теперь $x \in X_2$. Введем обозначения:

$$D_1 = [0, x - \sqrt{x/\nu}], \quad D_2 = (x - \sqrt{x/\nu}, x + \sqrt{x/\nu}), \quad D_3 = [x + \sqrt{x/\nu}, \infty). \tag{21}$$

Тогда величину I можно записать в виде

$$I = \left(\int\limits_{D_1} + \int\limits_{D_2} + \int\limits_{D_3} \right) \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \mathscr{K}_n(x,t) \right| \, dt = J_1 + J_2 + J_3.$$

Оценим J_2. Для этого воспользуемся леммой 5 и получим

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \int\limits_{D_2} e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \mathscr{K}_n(x,t) \right| \, dt \\ &\le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} ((n+1)e^{-x} K_n^1(x,x))^{1/2} \int\limits_{D_2} \left(e^{-t} K_n^0(t,t) \right)^{1/2} dt \\ &\le c \frac{x^{\frac{3}{4}} \sqrt{n+1}}{\sqrt{x+1}} (\nu^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}})^{1/2} \int\limits_{D_2} (n\nu^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}})^{1/2} \, dt \\ &\le c \frac{n}{\sqrt{x+1}} x^{-\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{x}{\nu}} \le c \frac{\sqrt{n} x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Перейдем к оценке J_1. Пусть $D_1^1 = \left[0, \frac{1}{\nu}\right]$, $D_1^2 = \left(\frac{1}{\nu}, x - \sqrt{\frac{x}{\nu}}\right]$. Тогда

$$J_1 = \left(\int\limits_{D_1^1} + \int\limits_{D_1^2} \right) \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \mathscr{K}_n(x,t) \right| dt = J_1^1 + J_1^2.$$

Для оценки величины J_1^2 воспользуемся леммой 2 и запишем

$$J_1^2 \le J_1^{21} + J_1^{22} + J_1^{23} + J_1^{24}.$$

Оценим J_1^{21}. Из (10) имеем

$$\begin{aligned} J_1^{21} &\le c \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} x \nu^{\frac{3}{4}} x^{-\frac{5}{4}} \int\limits_{D_1^2} \frac{\nu^{-\frac{1}{4}} t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} \, dt \\ &\le c \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}} \nu^{\frac{1}{2}} \int\limits_{D_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} \, dt = c \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}} \nu^{\frac{1}{2}} \int\limits_{1/\nu x}^{1-\sqrt{1/\nu x}} \frac{y^{-\frac{1}{4}}}{1-y} \, dy \\ &= c \frac{\sqrt{\nu} x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}} \left(\int\limits_{1/\nu x}^{1/3} y^{-\frac{1}{4}} \, dy + \int\limits_{1/3}^{1-\sqrt{1/\nu x}} \frac{1}{1-y} \, dy \right) \le c \frac{\sqrt{\nu} x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}} \ln \sqrt{\nu x}. \end{aligned}$$

Аналогично можно оценить величины J_1^{22} и J_1^{23}:

$$J_1^{22} \le c \frac{\sqrt{\nu} x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}} \ln \sqrt{\nu x}, \quad J_1^{23} \le c \frac{x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}} \ln \sqrt{\nu x}.$$

Оценим J_1^{24}. Из леммы 3 и оценок (10), (11) имеем

$$J_1^{24} \le c \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \left[\nu^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{D_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{x-t} \, dt + x^{\frac{1}{4}} \int\limits_{D_1^2} \frac{t^{-\frac{1}{4}}}{(x-t)^2} \, dt + x^{-\frac{1}{4}} \int\limits_{D_1^2} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{(x-t)^2} \, dt \right]$$

$$= c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\left[(\nu x)^{-\frac{1}{2}}\int\limits_{1/\nu x}^{1-\sqrt{1/\nu x}}\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{1-y}\,dy\right.$$

$$\left.+\frac{1}{x}\int\limits_{1/\nu x}^{1-\sqrt{1/\nu x}}\frac{y^{-\frac{1}{4}}}{(1-y)^2}\,dy+\frac{1}{x}\int\limits_{1/\nu x}^{1-\sqrt{1/\nu x}}\frac{y^{\frac{1}{4}}}{(1-y)^2}\,dy\right]$$

$$\le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\left[(\nu x)^{-\frac{1}{2}}\ln\sqrt{\nu x}+\frac{1}{x}\sqrt{\nu x}+\frac{1}{x}\sqrt{\nu x}\right]\le c\frac{\sqrt{\nu}x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Из оценок для J_1^{2i} имеем

$$J_1^2\le c\frac{\sqrt{\nu}x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}}\ln\sqrt{\nu x}.$$

Рассуждая аналогично, можно показать, что

$$J_1^1\le c\frac{\nu^{-\frac{1}{4}}x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}}.$$

Таким образом,

$$J_1\le c\frac{\sqrt{\nu}x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}}\ln\sqrt{\nu x}. \tag{23}$$

Перейдем к оценке величины J_3. Обозначим

$$D_3^1=[x+\sqrt{x/\nu},\nu/2+\sqrt{x/\nu}],\quad D_3^2=(\nu/2+\sqrt{x/\nu},3\nu/2],\quad D_3^3=(3\nu/2,\infty).$$

С учетом этих обозначений можно записать

$$J_3=\left(\int\limits_{D_3^1}+\int\limits_{D_3^2}+\int\limits_{D_3^3}\right)\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{x+t}{2}}|\mathscr{K}_n(x,t)|\,dt=J_3^1+J_3^2+J_3^3.$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к оценке для величины J_1^2, можно показать, что

$$J_3^1\le c\frac{\nu^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x+1}}(x^{\frac{1}{4}}\ln\sqrt{\nu x}+\nu^{\frac{1}{4}}),$$

$$J_3^2\le c\frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\ln(n+1),\quad J_3^3\le c\frac{x^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{3\nu}{16}}.$$

Отсюда

$$J_3\le c\frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\ln(n+1). \tag{24}$$

Из оценок (22)–(24) выводим

$$I\le c\frac{\nu^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\ln(n+1),\quad x\in X_2.$$

Перейдем к случаю, когда $x\in X_3$. Пользуясь обозначениями (21), запишем

$$I=\left(\int\limits_{D_1}+\int\limits_{D_2}+\int\limits_{D_3}\right)\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{x+t}{2}}|\mathscr{K}_n(x,t)|\,dt=H_1+H_2+H_3.$$

Для величины H_2 справедлива такая же оценка, как и для J_2:

$$H_2 \le c\frac{\sqrt{n}x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x+1}}. \tag{25}$$

Чтобы оценить H_3, разобьем D_3 на промежутки:

$$\mathscr{D}_3^1 = [x+\sqrt{x/\nu}, 3\nu/2+\sqrt{x/\nu}], \quad \mathscr{D}_3^2 = (3\nu/2+\sqrt{x/\nu}, \infty).$$

Тогда $H_3 = H_3^1 + H_3^2$. Из леммы 2 следует, что

$$H_3^1 \le H_3^{11} + H_3^{12} + H_3^{13} + H_3^{14}.$$

Для оценки величин H_3^{1i}, $i = 1,2,3,4$, обратимся к (10) и (11), из которых получим

$$H_3^{11} \le c\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}(\nu^{\frac{1}{3}}+|x-\nu|)^{\frac{1}{4}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{(t-x)(\nu^{\frac{1}{3}}+|t-\nu|)^{\frac{1}{4}}}$$
$$\le c\frac{x^{\frac{7}{4}}}{\sqrt{x+1}\nu^{\frac{1}{2}}\nu^{\frac{1}{6}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{t-x} \le cn^{\frac{7}{12}}\ln(n+1),$$

$$H_3^{12} \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\nu^{\frac{1}{2}}(\nu^{\frac{1}{3}}+|x-\nu|)^{\frac{1}{4}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{t\,dt}{(t-x)(\nu^{\frac{1}{3}}+|t-\nu|)^{\frac{1}{4}}}$$
$$\le c\frac{x^{\frac{3}{4}}\nu}{\sqrt{x+1}\nu^{\frac{2}{3}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{t-x} \le cn^{\frac{7}{12}}\ln(n+1),$$

$$H_3^{13} \le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\frac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{t-x} \le c\frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{5}{12}}},$$

$$H_3^{14} \le \frac{cx^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\Bigg[\frac{1}{\nu^{\frac{2}{3}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{t-x}$$
$$+n\frac{(\nu^{\frac{1}{3}}+|x-\nu|)^{\frac{1}{4}}}{\nu^{\frac{13}{12}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{dt}{(t-x)^2} + \frac{n}{\nu^{\frac{13}{12}}}\int\limits_{\mathscr{D}_3^1}\frac{(\nu^{\frac{1}{3}}+|t-\nu|)^{\frac{1}{4}}}{(t-x)^2}\,dt\Bigg]$$
$$\le c\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}}\left[\frac{\ln(n+1)}{\nu^{\frac{2}{3}}} + \nu^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{\nu}{x}} + \nu^{\frac{1}{6}}\sqrt{\frac{\nu}{x}}\right] \le c\nu^{\frac{5}{12}}.$$

Следовательно,

$$H_3^1 \le cn^{\frac{7}{12}}\ln(n+1).$$

Для H_3^2 справедлива такая же оценка, что и для J_3^3, поэтому

$$H_3 \le cn^{\frac{7}{12}}\ln(n+1). \tag{26}$$

Оценим H_1. Введем обозначения

$$\mathscr{D}_1^1 = [0, 1/\nu], \quad \mathscr{D}_1^2 = (1/\nu, \nu/2-\sqrt{x/\nu}], \quad \mathscr{D}_1^3 = (\nu/2-\sqrt{x/\nu}, x-\sqrt{x/\nu}]$$

и запишем $H_1 = H_1^1 + H_1^2 + H_1^3$. Почти дословно повторяя рассуждения, которые были использованы при оценке величин J_1^1 и J_1^2, можно показать, что

$$H_1^1 \le c\frac{1}{\nu^{\frac{13}{12}}}, \quad H_1^2 \le c\nu^{\frac{5}{12}} \ln(n+1), \quad H_1^3 \le c\nu^{\frac{7}{12}} \ln(n+1).$$

Тогда

$$H_1 \le c\nu^{\frac{7}{12}} \ln(n+1).$$

Отсюда и из оценок (25), (26) получаем

$$I \le c\nu^{\frac{7}{12}} \ln(n+1), \quad x \in X_3.$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $x \in X_4$. Из леммы 5 и оценки (10) имеем

$$\begin{aligned} I &\le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \left(e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\big(L_k^1(x)\big)^2\right)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty \left(e^{-t}\sum_{k=0}^{n}(L_k(t))^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\le \frac{x^{\frac{3}{4}}\sqrt{n}}{\sqrt{x+1}}\big(e^{-x}K_n^1(x,x)\big)^{\frac{1}{2}} \int\limits_0^\infty \big(e^{-t}K_n^0(t,t)\big)^{\frac{1}{2}} dt \\ &\le c\frac{x^{\frac{3}{4}}n}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{x}{4}}\left(\int\limits_0^{1/\nu} + \int\limits_{1/\nu}^{\nu/2} + \int\limits_{\nu/2}^{3\nu/2} + \int\limits_{3\nu/2}^{\infty}\right) A_n(t)\,dt \\ &\le c\frac{x^{\frac{3}{4}}n}{\sqrt{x+1}}e^{-\frac{x}{4}}\left(\frac{1}{\nu} + \nu^{-\frac{1}{4}}\nu^{\frac{3}{4}} + \nu^{-\frac{1}{4}}\nu^{\frac{3}{4}} + c\right) \le c\frac{n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{x}{4}}}{\sqrt{x+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Из (4) при $r = 1$ имеем

$$S_{1,n+1}(f,x) = f(0) + x\sum_{k=0}^{n}\frac{\widehat{f}_{1,k+1}^0}{k+1}L_k^1(x). \tag{27}$$

С учетом (3) получаем

$$\begin{aligned} R_n(f,x) &= \frac{x^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x+1}}\big(f(x) - S_{1,n+1}(f,x)\big) \\ &= \frac{x^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x+1}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{L_k^1(x)}{k+1}\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-t}L_k(t)\,dt \\ &= \frac{x^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{x}{2}}}{\sqrt{x+1}}\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-t}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{L_k^1(x)L_k(t)}{k+1}\,dt. \end{aligned} \tag{28}$$

Занесение знака суммы под знак интеграла в равенстве (28) можно объяснить следующим образом. Пусть

$$A_{r,n,m} = x^{\frac{3}{4}}e^{-\frac{x}{2}}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{L_k^1(x)L_k(t)}{k+1}, \quad A_{r,n} = \lim_{m\to\infty} A_{r,n,m}.$$

Рассмотрим разность

$$\int\limits_0^\infty f'(t)A_{r,n}e^{-t}\,dt - \int\limits_0^\infty f'(t)A_{r,n,m}e^{-t}\,dt$$

и покажем, что она стремится к нулю при $m \to \infty$. Имеем

$$\int\limits_0^\infty f'(t) A_{r,n} e^{-t}\,dt - \int\limits_0^\infty f'(t) A_{r,n,m} e^{-t}\,dt \le \|f'\|_{L^2_w} \|A_{r,n} - A_{r,n,m}\|_{L^2_w}.$$

Докажем, что $\|A_{r,n} - A_{r,n,m}\|_{L^2_w} \to 0$ при $m \to \infty$. С этой целью покажем фундаментальность последовательности $A_{r,n,m}$:

$$\|A_{r,n,m+p} - A_{r,n,m}\|^2_{L^2_w} = \int\limits_0^\infty \biggl(x^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{x}{2}} \sum_{k=m+1}^{m+p} \frac{L^1_k(x) L_k(t)}{k+1} \biggr)^2 e^{-t}\,dt$$

$$= e^{-x} \sum_{k=m+1}^{m+p} \left(\frac{x^{\frac{3}{4}} L^1_k(x)}{k+1} \right)^2 < \varepsilon,$$

так как ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \bigl(\frac{x^{\frac{3}{4}} L^1_k(x)}{k+1}\bigr)^2$ сходится (см. лемму 4).

Далее, из (28) имеем

$$|R_n(f,x)| \le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{L^1_k(x) L_k(t)}{k+1} \right| dt$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{L^1_k(x) L_k(t)}{k+1} \right| dt.$$

Воспользуемся преобразованием Абеля:

$$|R_n(f,x)| \le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}}$$

$$\times \lim_{m\to\infty} \left| \frac{\mathscr{K}_m(x,t)}{m+1} - \frac{\mathscr{K}_n(x,t)}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{m-1} \frac{\mathscr{K}_k(x,t)}{(k+1)(k+2)} \right| dt$$

$$\le \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x+1}} \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x+t}{2}} \left(\lim_{m\to\infty} \frac{|\mathscr{K}_m(x,t)|}{m+1} + \frac{|\mathscr{K}_n(x,t)|}{n+2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|\mathscr{K}_k(x,t)|}{(k+1)(k+2)} \right) dt$$

$$= \mathscr{I}_1 + \frac{1}{n+2}\mathscr{I}_2 + \mathscr{I}_3.$$

Из леммы Фату [13, с. 170] и оценок (16) следует, что

$$\lim_{m\to\infty} \mathscr{I}_1 = 0.$$

Для $\mathscr{I}_2$ справедливы оценки (16). Оценим теперь величину $\mathscr{I}_3$. Из леммы 6 имеем

$$\mathscr{I}_3 \le c \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k^{\frac{3}{4}} \ln(k+1)}{k^2} = c \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(k+1)}{k^{\frac{5}{4}}} \le c \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{1}{4}}}.$$

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шарапудинов И. И, Гаджиева З. Д, Гаджимирзаев Р. М.* Системы функций, ортогональных относительно скалярных произведений типа Соболева с дискретными массами, порожденных классическими ортогональными системами // Дагестанские электрон. мат. изв. 2016. № 6. С. 31–60.

2. *Шарапудинов И. И, Магомед-Касумов М. Г.* О представлении решения задачи Коши рядом Фурье по полиномам, ортогональным по Соболеву, порожденным многочленами Лагерра // Дифференц. уравнения. 2018. Т. 54, № 1. С. 51–68.

3. *Гаджимирзаев Р. М.* О равномерной сходимости ряда Фурье по системе полиномов, порожденной системой полиномов Лагерра // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2020. Т. 20, № 4. С. 416–423.

4. *Xu Y.* Approximation by polynomials in Sobolev spaces with Jacobi weight // J. Fourier Anal. Appl. 2018. V. 24. P. 1438–1459.

5. *Xu Y., Wang Z., Li H.* Jacobi–Sobolev orthogonal polynomials and spectral methods for elliptic boundary value problems // Commun. Appl. Math. Comput. 2019. V. 1. P. 283–308.

6. *García-Ardila J. C., Marriaga M. E.* Approximation by polynomials in Sobolev spaces associated with classical moment functionals // Numer. Algor. 2023. DOI: 10.1007/s11075-023-01572-3, Published 30 June 2023, 34 pp.

7. *Leonardo E. F.* Weighted Sobolev orthogonal polynomials and approximation in the ball. 2023. arXiv:2308.05469 [math.CA].

8. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М.: Физматгиз, 1962.

9. *Askey R, Wainger S.* Mean convergence of expansions in Laguerre and Hermite series // Amer. J. Math. 1965. V. 87, N 3. P. 695–708.

10. *Muckenhoupt B.* Mean convergence of Hermite and Laguerre series. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 147, N 2. P. 433–460.

11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. М.: Физматлит, 2003. Т. 2.

12. *Гаджимирзаев Р. М., Шах-Эмиров Т. Н.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена частичных сумм специального ряда по полиномам Лагерра // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 4. С. 483–497.

13. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

Поступила в редакцию 12 мая 2023 г.
После доработки 8 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Гаджимирзаев Рамис Махмудович
Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН,
ул. М. Гаджиева, 45, Махачкала 367032
`ramis3004@gmail.com`

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.545

О КЛАССЕ ЛЕВИ КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ ПРАВОУПОРЯДОЧИВАЕМЫХ ГРУПП

А. В. Зенков

Аннотация. Показано, что класс Леви квазимногообразия правоупорядочиваемых групп строго содержит это квазимногообразие.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.105

Ключевые слова: класс Леви, правоупорядочиваемая группа, квазимногообразие.

1. Введение

Напомним, что группа G называется *правоупорядочиваемой*, если на ней можно ввести отношение линейного порядка $\geq$, устойчивое относительно умножения справа, т. е. для любых $x, y, z \in G$ неравенство $x \geq y$ влечет $xz \geq yz$.

Непосредственно из определения правоупорядочиваемой группы вытекает, что она не имеет кручения. Также хорошо известно (см., например, [1]), что класс $\mathscr{D}_r$ всех правоупорядочиваемых групп образует квазимногообразие.

Замечание. Если в определении правоупорядочиваемой группы заменить требование устойчивости порядка при умножении справа устойчивостью при двухстороннем умножении, то получим определение *упорядочиваемой* группы. Разумеется, любая упорядочиваемая группа будет правоупорядочиваемой.

Пусть G — произвольная группа и $x \in G$. Через $G_x = (x^G)$ обозначим нормальное замыкание элемента x в группе G. Для произвольного класса групп $\mathscr{K}$ определим его *класс Леви* $L(\mathscr{K})$ следующим образом: группа G принадлежит $L(\mathscr{K})$ тогда и только тогда, когда $G_x \in \mathscr{K}$ для каждого $x \in G$.

Понятие класса Леви было введено в [2] под влиянием работы Леви [3], где изучались группы с *абелевыми* нормальными замыканиями элементов. В работе [4] показано, что класс Леви любого многообразия является многообразием. Аналогичный результат верен и для квазимногообразий [5]. Классы Леви конкретных (в основном, нильпотентных) квазимногообразий изучались В. В. Лодейщиковой в [6–8] и С. А. Шаховой [9, 10].

Непосредственно из определения класса Леви следует: 1) оператор L сохраняет отношение теоретико-множественного включения, 2) если класс $\mathscr{K}$ замкнут относительно взятия подгрупп, то $\mathscr{K} \subseteq L(\mathscr{K})$.

Стало быть, имеет место $\mathscr{D}_r \subseteq L(\mathscr{D}_r)$. Основной результат состоит в том, что последнее включение на самом деле *строгое*. Именно, существует не правоупорядочиваемая группа без кручения, нормальное замыкание каждого элемента которой правоупорядочиваемо.

Все необходимые сведения по теории правоупорядочиваемых групп можно найти в [1], по теории групп — в [11].

2. Основной результат

Рассмотрим два отображения $a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, определяемые по правилу

$$a(x, y, z) = (x + 1, 1 - y, -z), \quad b(x, y, z) = (-x, y + 1, 1 - z). \tag{1}$$

Обозначим через $\mathbb{G}$ группу преобразований пространства $\mathbb{R}^3$, порожденную этими элементами. Эта группа отмечена в [12, с. 13]. Вычислим действие отображения ab в $\mathbb{R}^3$, т. е.

$$ab(x, y, z) = a(-x, y + 1, 1 - z) = (1 - x, -y, z - 1).$$

Стало быть,

$$(ab)^2(x, y, z) = (x, y, z - 2). \tag{2}$$

Аналогично проверяется справедливость следующих формул:

$$(ba)^2(x, y, z) = (x, y, z + 2), \tag{3}$$

$$a^2(x, y, z) = (x + 2, y, z), \tag{4}$$

$$b^2(x, y, z) = (x, y + 2, z), \tag{5}$$

$$(b^2)^a(x, y, z) = (x, y - 2, z), \tag{6}$$

$$(a^2)^b(x, y, z) = (x - 2, y, z), \tag{7}$$

$$((ab)^2)^a(x, y, z) = (x, y, z + 2), \tag{8}$$

$$((ab)^2)^b(x, y, z) = (x, y, z + 2). \tag{9}$$

Пусть $c = (ab)^2$. Тогда в силу формулы (3) имеем $(ba)^2 = c^{-1}$. Из формул (2), (4), (5) следует, что элементы a^2, b^2, c попарно перестановочны, т. е.

$$[a^2, c] = [b^2, c] = [a^2, b^2] = e. \tag{10}$$

Соотношения (6)–(9) показывают, что

$$(a^2)^b = a^{-2}, \quad (b^2)^a = b^{-2}, \tag{11}$$

$$c^a = c^b = c^{-1}. \tag{12}$$

Рассмотрим произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$. В силу формулы (11) можно утверждать, что $g = g' a^{2\alpha} b^{2\beta}$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ и

$$g' = a^{\varepsilon_1} b \cdot \ldots \cdot ab^{\delta_s} \tag{13}$$

и ε_1, δ_s равны 0 или 1.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 = 1$ (несобранная часть g' элемента g начинается с a). Далее, если $\delta_s = 1$, то $g' = (ab)^s$. Пусть $s = 2\gamma + r$, r равно 0 или 1. Тогда $g' = c^\gamma (ab)^r$. Следовательно,

$$g = \begin{cases} c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta}, & \text{если } s = 2\gamma, \\ c^\gamma a^{-2\alpha} b^{-2\beta}(ab), & \text{если } s = 2\gamma + 1. \end{cases}$$

Пусть теперь $\delta_s = 0$. Тогда $g' = (ab)^s b^{-1}$ и поэтому $g = (ab)^s a^{-2\alpha} b^{2\beta-2} b$. Стало быть,

$$g = \begin{cases} c^\gamma a^{-2\alpha} b^{2\beta-2} b, & \text{если } s = 2\gamma, \\ c^\gamma a^{2\alpha} b^{-2\beta} a, & \text{если } s = 2\gamma + 1. \end{cases}$$

Аналогичные формулы можно получить и в случае, когда несобранная часть g' элемента g начинается с b ($\varepsilon_1 = 0$). Таким образом, произвольный элемент $g \in \mathbb{G}$ можно представить в виде

$$g = c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta} a^\varepsilon b^\delta, \tag{14}$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ и ε, δ равны 0 или 1.

Пусть $\mathbb{H} = gr(c, a^2, b^2)$. Из сказанного выше следует, что $\mathbb{H} = (c) \times (a^2) \times (b^2)$ и $\mathbb{H} \lhd \mathbb{G}$.

Покажем, что $[a, b] \in \mathbb{H}$. Действительно, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-2}b^2abab = cb^2a^{-2} \in \mathbb{H}$. Отсюда немедленно следует, что коммутант $\mathbb{G}'$ группы $\mathbb{G}$ содержится в $\mathbb{H}$. Поэтому $\mathbb{H}ab = \mathbb{H}ba$. Очевидно, $\mathbb{H}b = \mathbb{H}b^{-1}, \mathbb{H}a = \mathbb{H}a^{-1}$. Таким образом, имеет место следующее разложение группы $\mathbb{G}$ в объединение правых смежных классов:

$$\mathbb{G} = \mathbb{H} \cup \mathbb{H}a \cup \mathbb{H}b \cup \mathbb{H}ab. \tag{15}$$

Ясно, что для любого $g \in \mathbb{G}$ верно $g^2 \in \mathbb{H}$. Поэтому для доказательства отсутствия кручения достаточно заметить, что для всякого неединичного элемента его квадрат также отличен от единицы. Пусть, например, $g = h(ab)$, где $h = c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta} \in \mathbb{H}$. Тогда

$$g^2 = h(ab)h(ab) = c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta} c^\gamma a^{-2\alpha} b^{-2\beta} (ab)^2 = c^{2\gamma+1} \neq e.$$

Оставшиеся случаи проверяются так же.

Покажем, что $\mathbb{G}$ не правоупорядочиваема. Пусть это не так и на $\mathbb{G}$ задан правый линейный порядок $\geq$. Не ограничивая общности можно считать, что $c \geq e \geq c^{-1}$. Ввиду изолированности порядка получаем, что $ab \geq e \geq ba$. Поэтому элементы a и b имеют разные знаки. Предположим, что элемент a положителен. Тогда $a \geq b^{-1} \geq e$. Отсюда $a^2b^{-1} \geq b^{-1}ab^{-1}$. Стало быть, $b^{-1}a^{-1} \geq b^{-1}ab^{-1}a \geq e$, что ведет к противоречию: $(ab)^{-1} \geq e$. Случай $a^{-1} \geq b \geq e$ разбирается аналогично.

Стандартно через $sgr(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ обозначаем подполугруппу группы G, порожденную элементами $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Нам потребуется следующий (полугрупповой) критерий правоупорядочиваемости [1, с. 48]: *группа G правоупорядочиваема тогда и только тогда, когда для любых неединичных $y_1, y_2, \ldots, y_n \in G$ найдутся такие $\varepsilon_i = \pm 1, i = 1, \ldots, n$, что $e \notin sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$.*

Доказательство того, что для каждого $x \in \mathbb{G}$ группа $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема, распадается на четыре случая (по количеству правых смежных классов).

Случай 1: $x \in \mathbb{H}$. В этом случае $\mathbb{G}_x \leq \mathbb{H}$ и поэтому упорядочиваема.

Случай 2: $x \in \mathbb{H}a$, т. е. $x = ha$, где $h \in \mathbb{H}$. Пусть $g \in \mathbb{G}$. Тогда $x^g = (h^g[g, a^{-1}])a = h_1a$, где $h_1 = h^g[g, a^{-1}] \in \mathbb{H}$. Так как $x^{-1} = \widetilde{h}a$, где $\widetilde{h} = (h^{-1})^a a^{-2}$, то, повторяя для x^{-1} рассуждения, проведенные выше, получаем, что $(x^{\pm 1})^g = h^* a$ для подходящего $h^* \in \mathbb{H}$.

Следовательно, в рассматриваемом случае всякий элемент $y \in \mathbb{G}_x$ имеет вид

$$y = ha^\delta, \tag{16}$$

где $h = c^\gamma a^{2\alpha} b^{2\beta} \in \mathbb{H}$, δ равно 0 или 1. Более точно, выпишем y^{-1} в случае, когда $\delta = 1$. В этом случае $y = c^\gamma b^{2\beta} a^{2\alpha+1}$ и поэтому $y^{-1} = c^\gamma b^{2\beta} a^{-(2\alpha+1)}$. Если $\delta = 0$, то, очевидно, что $y^{-1} = c^{-\gamma} b^{-2\beta} a^{-2\alpha}$. В дальнейшем степень, например, элемента a в записи элемента y обозначаем через $\deg_y(a)$. Используя введенное обозначение, сказанное выше можно записать так:

$$\deg_y(a) \geq 0 \Longleftrightarrow \deg_{y^{-1}}(a) \leq 0.$$

Пусть даны неединичные элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{G}_x$. Для каждого y_i подбираем степень ε_i в следующей последовательности:

1) если $\deg_{y_i}(a) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(a) > 0$;

2) если $\deg_{y_i}(a) = 0$ и $\deg_{y_i}(b) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(b) > 0$;

3) если $\deg_{y_i}(a) = \deg_{y_i}(b) = 0$, то $\deg_{y_i}(c) \neq 0$ и тогда ε_i такое, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(c) > 0$.

Элемент $z \in sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$ имеет вид

$$z = y_{i_1}^{\varepsilon_{i_1}} \cdot \ldots \cdot y_{i_t}^{\varepsilon_{i_t}}, \tag{17}$$

где $t > 0$. Если найдется $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ такой, что $\deg_{y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}}(a) > 0$, то $\deg_z(a) > 0$ и потому $z \neq e$. Пусть теперь в записи каждого $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ отсутствует a, но есть хотя бы один элемент, в записи которого присутствует b. Тогда, конечно, $\deg_z(a) = 0$, но $\deg_z(b) > 0$. Следовательно, $z \neq e$. Наконец, если в записи каждого $y_{i_j}^{\varepsilon_{i_j}}$ отсутствуют как a, так и b, то $\deg_z(c) > 0$. Рассмотрение случая 2 закончено.

Случай 3: $x \in \mathbb{H}b$. Этот случай аналогичен предыдущему.

Случай 4: $x \in \mathbb{H}ab$. Рассуждая по аналогии со случаем 2, получаем, что при любом $g \in \mathbb{G}$ имеет место $(x^{\pm 1})^g = h^* ab$ для подходящего $h^* \in \mathbb{H}$. Поэтому элемент $y \in \mathbb{G}_x$ имеет вид

$$y = h(ab)^{\delta}, \tag{18}$$

где $h = c^{\gamma} a^{2\alpha} b^{2\beta} \in \mathbb{H}$, δ равно 0 или 1. Так как $c^{\gamma} = (ab)^{2\gamma}$, то $y = a^{2\alpha} b^{2\beta} (ab)^{2\gamma+\delta}$. Пусть даны неединичные элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{G}_x$. Выбор знаков осуществляется по аналогии со случаем 2, только в следующей последовательности:

1) если $\deg_{y_i}(ab) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(ab) > 0$;

2) если $\deg_{y_i}(ab) = 0$ и $\deg_{y_i}(a) \neq 0$, то выбираем ε_i так, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(a) > 0$;

3) если $\deg_{y_i}(ab) = \deg_{y_i}(a) = 0$, то $\deg_{y_i}(b) \neq 0$ и тогда ε_i такое, что $\deg_{y_i^{\varepsilon_i}}(b) > 0$.

Рассуждая, как и выше, видим, что $e \notin sgr(y_1^{\varepsilon_1}, \ldots, y_n^{\varepsilon_n})$, т. е. $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема.

Итак, для любого $x \in \mathbb{G}$ группа $\mathbb{G}_x$ правоупорядочиваема. Стало быть, $\mathscr{D}_r \subsetneqq L(\mathscr{D}_r)$.

Напомним, что группа локально индикабельна, если всякая ее неединичная конечно порожденная подгруппа допускает гомоморфизм на аддитивную группу целых чисел. Хорошо известно, что всякая локально индикабельная группа правоупорядочиваема и класс $\mathscr{J}$ всех локально индикабельных групп есть квазимногообразие [1]. Также образует квазимногообразие и класс $\mathscr{D}_o$ всех упорядочиваемых групп. Более того, $\mathscr{D}_o \subsetneqq \mathscr{J}$.

В этой связи представляет интерес изучение свойств квазимногообразий $\mathscr{D}_o$, $\mathscr{J}$ и $\mathscr{D}_r$ и их классов Леви как элементов решетки квазимногообразий групп без кручения.

Например, невозможно включение $\mathscr{J} \subseteqq L(\mathscr{D}_o)$, поскольку группа $\mathbb{K} = \langle a, b | a^b = a^{-1} \rangle$ локально индикабельная (допускает четыре правых порядка), но нормальное замыкание $\mathbb{K}_{ab}$ ее элемента ab неупорядочиваемо. Однако из сказанного выше следует, что $\mathscr{D}_o \subseteqq L(\mathscr{D}_o) \cap \mathscr{J}$. Возможно ли здесь совпадение или существует неупорядочиваемая локально индикабельная группа, в которой нормальное замыкание любого элемента упорядочиваемо? Аналогичные вопросы можно рассмотреть и для других случаев.

Благодарность. В заключение автор считает своим приятным долгом выразить благодарность профессору А. И. Будкину за высказанные замечания при обсуждении результатов статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Копытов В. М., Медведев Н. Я.* Правоупорядоченные группы. Новосибирск: Науч. книга, 1996.
2. *Kappe L. C.* On Levi-formations // Arch. Math. 1972. V. 23, N 6. P. 561–572.
3. *Levi F. W.* Groups in which the commutator operation satisfies certain algebraic conditions // J. Indian Math. Soc., New Ser. 1942. V. 6. P. 87–97.
4. *Morse R. F.* Levi-properties generated by varieties // W. Abikoff (ed.) et al., The mathematical legacy of Wilhelm Magnus (May 1 -3, 1992, Polytechnic Univ. Brooklin, NY, USA) Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1994. P. 467-474. (Contemp. Math.; V. 169).
5. *Будкин А. И.* Квазимногообразия Леви // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 266–270.
6. *Лодейщикова В. В.* О классах Леви, порожденных нильпотентными группами // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1359–1366.
7. *Лодейщикова В. В.* О квазимногообразиях Леви экспоненты p^s // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 1. С. 26–41.
8. *Лодейщикова В. В.* О классе Леви, порожденном квазимногообразием нильпотентных групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 4. С. 486–499.
9. *Шахова С. А.* Об аксиоматическом ранге классов Леви // Алгебра и логика. 2018. Т. 57, № 5. С. 587–600.
10. *Шахова С. А.* Классы Леви квазимногообразий групп с коммутантом экспоненты p // Алгебра и логика. 2021. Т. 60, № 5. С. 510–524.
11. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
12. *Clay A., Rolfsen D.* Ordered groups and topology. arXiv:1511.05088v1 [math.GT] 16 Nov. 2015, 126.

Поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.
После доработки 15 сентября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский государственный аграрный университет,
кафедра математики, механики и инженерной графики,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.54

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ С КОНЕЧНЫМ ИСКАЖЕНИЕМ НА ГРУППАХ КАРНО

Д. В. Исангулова

Аннотация. Доказана открытость и дискретность отображения с конечным искажением на группе Карно при условии почти прозрачности и интегрируемости коэффициента искажения. Оценена размерность по Хаусдорфу прообраза точки отображения с конечным искажением с ограниченной функцией кратности и суммируемым коэффициентом искажения на группах Карно. Построен пример, показывающий неулучшаемость оценки.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.106

Ключевые слова: группа Карно, отображение с конечным искажением, почти прозрачность, открытость, дискретность.

§ 1. Введение

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ с локально интегрируемым якобианом $J(x, f) = \det Df(x)$. Отображение f — *отображение с конечным искажением*, если $J(x, f) \geq 0$ п. в. и $Df(x) = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана. Функция

$$K_O(x) = \begin{cases} \frac{\|Df(x)\|^n}{J(x,f)}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

называется *внешним коэффициентом искажения.* (Здесь $\|Df(x)\|$ — операторная норма линейного отображения $Df(x)$.)

Если K_O — ограниченная функция и $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, то f — *отображение с ограниченным искажением.* Ю. Г. Решетняк установил основополагающие топологические свойства отображений с ограниченным искажением в евклидовом пространстве: непрерывность, открытость и дискретность [1]. С. К. Водопьянов и В. М. Гольдштейн [2] доказали непрерывность отображений с конечным искажением. Большое количество работ посвящено тому, чтобы найти условия, при выполнении которых отображения с конечным искажением будут открытыми и дискретными. В плоском случае Иванец и Шверак [3] доказали открытость и дискретность отображения с конечным искажением для $K_O \in L_1$, $f \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^2)$. Вилламор и Манфреди [4] показали открытость и

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2022-282 от 05.04.2022.

дискретность отображений с конечным искажением в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, при условии $K_O \in L_{p,\mathrm{loc}}$, $p > n-1$, $f \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$. В граничном случае $K_O \in L_{n-1}$ открытость и дискретность доказаны только при дополнительных предположениях: топологическом условии почти прозрачности [5] и интегрируемости внутреннего коэффициента искажения [6]. В случае $K_O \in L_p$, $p < n-1$, Болл [7] построил пример не открытого и не дискретного непрерывного почти прозрачного отображения класса Соболева W^1_n с конечным искажением.

Цель данной работы — исследовать топологические свойства отображений с конечным искажением на группах Карно с субримановой метрикой. Недавно С. К. Водопьянов доказал непрерывность отображений с конечным искажением на группах Карно [8]. На данный момент в субримановом случае открытость и дискретность установлены только на двухступенчатых группах Карно $\mathbb{H}$-типа для отображений с конечным искажением [9] и на двухступенчатых группах Карно для отображений с ограниченным искажением (см. [10, 11]).

Стратифицированной однородной группой или, в другой терминологии, *группой Карно* называется связная односвязная нильпотентная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой раскладывается в прямую сумму $V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ векторных пространств таких, что

$$\dim V_1 \geq 2, \quad [V_1, V_k] = V_{k+1} \text{ для } 1 \leq k \leq m-1, \quad [V_1, V_m] = \{0\}.$$

Евклидово пространство — это пример абелевой группы Карно. Зафиксируем на V скалярное произведение.

Расстояние d (внутренняя *метрика Карно — Каратеодори*) между точками $x, y \in \mathbb{G}$ определяется как точная нижняя грань длин *горизонтальных* кривых, соединяющих точки x, y. Хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно метрики Карно – Каратеодори обозначается символом ν и равна $\sum\limits_{i=1}^{m} i \dim V_i$.

Определение. Пусть Ω — область группы Карно $\mathbb{G}$, $f : \Omega \to \mathbb{G}$ — отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ с локально интегрируемым якобианом $J(x, f)$. Отображение f имеет *конечное искажение*, если $J(x, f) \geq 0$ п. в. и $D_h f(x) = 0$ п. в. на множестве нулей якобиана.

Определим *коэффициент искажения* K_p как

$$K_p(x) = \inf\{k > 0 : \|D_h f(x)\| \leq k J(x, f)^{1/p}\}.$$

Очевидно, что $(K_\nu)^\nu = K_O$, где

$$K_O(x) = \begin{cases} \frac{\|D_h f(x)\|^\nu}{J(x,f)}, & \text{если } J(x, f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

— *внешний коэффициент искажения.* Пространство Соболева, якобиан и горизонтальный дифференциал $D_h f$ определены в § 2.

Напомним, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$, $\Omega \subset \mathbb{G}$, называется *открытым*, если образ открытого множества открыт, *дискретным*, если прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in f(\Omega)$ состоит из изолированных точек, и *прозрачным* (*light*), если прообраз всякой точки из $\mathbb{G}$ вполне несвязен. Будем говорить, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ *почти прозрачное* (*quasi–light*), если для всякого $y \in \mathbb{G}$ все компоненты множества $f^{-1}(y)$ компактны.

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть Ω — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$, $f \in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ — почти прозрачное отображение с конечным искажением, непостоянное на каждой компоненте связности, $K_\nu \in L_{\nu(\nu-1),\mathrm{loc}}(\Omega)$ (или, эквивалентно, $K_O \in L_{\nu-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$). Тогда f можно переопределить на множестве нулевой меры так, что f будет*

(1) *непрерывным, открытым и дискретным;*

(2) *$\mathscr{P}$-дифференцируемым почти всюду;*

(3) *обладать $\mathscr{N}$ и $\mathscr{N}^{-1}$-свойствами Лузина;*

(4) *$J(x, f) > 0$ почти всюду.*

В недавней работе С. К. Водопьянова показано [8, предложение 19], что отображение с конечным искажением класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ можно переопределить на множестве нулевой меры так, что оно станет непрерывным, $\mathscr{P}$-дифференцируемым почти всюду и будет обладать $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Из классического доказательства теоремы Решетняка [12] известно, что если f дифференцируемо почти всюду и обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина, то прозрачность f влечет дискретность и открытость. Для доказательства теоремы 1 тоже необходимо показать прозрачность f, т. е. что $\mathscr{H}^1(f^{-1}(y)) = 0$ для всех y.

Меру прообраза точки оценивает следующая теорема, которая представляет независимый интерес.

Теорема 2. *Пусть $1 \le q < p \le \nu$, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — связное открытое множество и $f \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$ — непрерывное отображение с конечным искажением с локально суммируемым якобианом, $K_p \in L_{\varkappa,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\varkappa = \frac{pq}{p-q}$, f удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина. Предположим, что кратность f существенно ограничена в окрестности точки 0. Тогда либо $f = 0$ п. в., либо $f^{-1}(0)$ имеет нулевую $\mathscr{H}^{\nu-q}$-меру.*

В теореме 2 рассматривается более широкий класс отображений Соболева $W^1_{p,\mathrm{loc}}$, $1 \le p \le \nu$. Поэтому в формулировке добавлены условия непрерывности, суммируемости якобиана и $\mathscr{N}$-свойство Лузина.

Доказательство теоремы 2 основано на идеях работы [5], где установлен аналогичный результат в евклидовом случае. Основная техническая часть — это теорема 3 работы [5] об оценке колебаний соболевских функций. Хотя данная теорема сформулирована и доказана в $\mathbb{R}^n$, она верна и на группах Карно. Более того, она будет верна на любом однородном метрическом пространстве, где определены аналоги соболевских функций и выполняется неравенство Пуанкаре. Мы приводим ее без доказательства (см. теорему 5). Однако напрямую применять евклидову теорию нельзя. Надо отдельно показать $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина и отличие от 0 якобиана почти всюду (см. теорему 4 в § 4) и исследовать свойства соболевских функций на группах Карно (см. предложение 2 в § 3).

Отметим, что отображение из теоремы 2 порождает ограниченный оператор вложения классов Соболева по правилу композиции (см. теорему 4 в § 4). Этот класс отображений ввел и исследовал в евклидовом пространстве в серии работ С. К. Водопьянов с соавторами (см. [2, 13]). Это так называемый функциональный подход к квазиконформному анализу. На группах Карно исследованы гомеоморфизмы [14], порождающие ограниченный оператор вложения пространств Соболева. При доказательстве теоремы 4 мы опираемся на работу [13], где аналогичный результат установлен в евклидовом случае.

Также в работе построен пример отображения с конечным искажением на группе Карно, который показывает оптимальность показателей в теореме 2. Пример построен по мотивам известного примера Болла [7].

Для отображений с конечным искажением без дополнительного условия почти прозрачности исследовано «плохое множество» W. Пусть $f:\Omega\to\mathbb{G}$ — отображение с конечным искажением. Обозначим символом W множество точек из Ω, принадлежащих некоторой нетривиальной компоненте $f^{-1}(y)$ для некоторого $y\in\mathbb{G}$, т. е. $W=f^{-1}(W')$, где W' — точки из $f(\Omega)\subset\mathbb{G}$, в которых нарушается свойство дискретности: $y\in W'$, если $f^{-1}(y)$ содержит не только изолированные точки.

Теорема 3. *Пусть Ω — открытое множество на группе Карно $\mathbb{G}$, $f\in W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega,\mathbb{G})$ — непрерывное непостоянное отображение с конечным искажением, $K_O\in L_{\nu-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Тогда W — замкнутое множество в Ω и f открыто и дискретно вне W.*

Для доказательства теоремы 3 достаточно показать, что вне множества W отображение f обладает свойством почти прозрачности. В евклидовом случае аналогичный результат получен Ражала в [6, лемма 2.4].

Работа построена следующим образом. В § 2 приведены необходимые определения, обозначения и вспомогательные результаты, § 3 посвящен дробной максимальной функции. В § 4 доказывается $\mathscr{N}^{-1}$ свойство Лузина. Доказательства теорем 1–3 приведены в § 5. Пример построен в § 6.

§ 2. Определения и вспомогательные результаты

Группа Карно. Рассмотрим группу Карно $\mathbb{G}$ с алгеброй Ли V. Зафиксируем на V скалярное произведение $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и норму $\|\cdot\|$ ($\|\xi\|=\sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$, $\xi\in V$).

Пусть векторные поля $X_1,\dots,X_n$ образуют базис горизонтального пространства V_1. Поскольку они порождают все V, их можно дополнить до ортонормированного базиса всего V так, чтобы поля $X_{n+1},\dots,X_N$ были образованы коммутаторами полей из V_1. При этом будем считать, что

$$1=\sigma_1=\dots=\sigma_n<\sigma_{n+1}\le\dots\le\sigma_N=m,$$

где $\sigma_i=\{k:X_i\in V_k\}$ — *степень* поля X_i.

Отождествим элементы $g\in\mathbb{G}$ с элементами $x\in\mathbb{R}^N$ посредством экспоненциального отображения $\exp\bigl(\sum x_iX_i\bigr)=g$. При этом, очевидно, $0=(0,\dots,0)$ — единица группы, а $x^{-1}=(-x_1,\dots,-x_N)$ для $x=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{G}$.

Растяжение задается как $\delta_tx=(t^{\sigma_1}x_1,t^{\sigma_2}x_2,\dots,t^{\sigma_N}x_N)$, $t>0$. Расстояние Карно — Каратеодори однородно: $d(\delta_tx,\delta_ty)=td(x,y)$.

Меры на группе Карно. В данной работе рассматривается s-мерная мера Хаусдорфа на $\mathbb{G}$ относительно расстояния Карно — Каратеодори:

$$\mathscr{H}^s(A)=\lim_{\delta\to0}\inf\Bigl\{\sum_i(\operatorname{diam}E_i)^s\mid A\subseteq\bigcup_iE_i,\ \operatorname{diam}E_i<\delta\Bigr\},$$

где $\operatorname{diam}E_i=\sup\{d(x,y):x,y\in E_i\}$, $A\subset\mathbb{G}$.

Мы отождествили точки группы Карно с точками из $\mathbb{R}^N$ посредством экспоненциального отображения. Мера Лебега на $\mathbb{R}^N$ является биинвариантной мерой Хаара на $\mathbb{G}$ [15, предложение 1.2]. Поэтому на $\mathbb{G}$ определяется классический интеграл Лебега, который будем обозначать через $\int\limits_{\Omega} f(x)\,dx$, где Ω — измеримое множество в $\mathbb{G}$ и f — измеримая функция на Ω. Также обозначим через $L_q(\Omega)$ пространство интегрируемых в степени q функций на Ω, а через $\|\cdot\|_{q,\Omega}$ — L_q-норму функции на Ω.

Символом $|A|$ будем обозначать меру Лебега измеримого множества $A\subset\mathbb{G}$. При этом $|A|$ с точностью до множителя совпадает с ν-мерной мерой Хаусдорфа $\mathscr{H}^{\nu}(A)$.

Функции класса Соболева.

Определение. *Пространство Соболева* $W_q^1(\Omega)$ $(L_q^1(\Omega))$, $1\le q\le\infty$, *состоит из локально суммируемых в Ω функций $f:\Omega\to\mathbb{R}$, имеющих обобщенную производную $X_i f$ вдоль векторного поля X_i, $i=1,\dots,n$, и конечную норму (полунорму)*

$$\big\|f\mid W_q^1(\Omega)\big\|=\|f\|_{q,\Omega}+\|\nabla_h f\|_{q,\Omega}\quad\big(\big\|f\mid L_q^1(\Omega)\big\|=\|\nabla_h f\|_{q,\Omega}\big),$$

где $\nabla_h f=(X_1f,\dots,X_nf)$ — *субградиент* функции f.

Напомним, что локально суммируемая функция $g_i:\Omega\to\mathbb{R}$ называется *обобщенной производной функции f вдоль векторного поля X_i*, $i=1,\dots,n$, если имеет место равенство $\int\limits_{\Omega} g_i\psi\,dx=-\int\limits_{\Omega} fX_i\psi\,dx$ для любой тестовой функции $\psi\in C_0^{\infty}(\Omega)$. Если $f\in W_q^1(U)$ для каждого открытого ограниченного множества U, $\overline{U}\subset\Omega$, то говорят, что f *принадлежит классу* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Определение. Область (открытое связное множество) $\Omega\subset\mathbb{G}$ называется *областью Джона с внутренним радиусом α и внешним радиусом β*, $0<\alpha\le\beta<\infty$ [16], если существует выделенная точка $x_0\in U$ такая, что любая другая точка $x\in\Omega$ может быть соединена в Ω с точкой x_0 спрямляемой кривой $\gamma(s)$, $0\le s\le l\le\beta$, где s — длина дуги, для которой $\gamma(0)=x_0$, $\gamma(l)=x$ и

$$\operatorname{dist}(\gamma(s),\partial\Omega)\ge\frac{\alpha}{l}s\quad\text{для всех } s\in[0,l].$$

Шар $B(a,r)$ в метрике Карно — Каратеодори является областью Джона с внутренним радиусом r и внешним радиусом r. Всякое множество с гладкой границей тоже является областью Джона.

Лемма 1 (неравенство Пуанкаре). *Пусть $1\le p<\infty$, $\Omega\subset\mathbb{G}$ — область Джона. Тогда для соболевской функции $u\in W_p^1(\Omega)$ выполняется*

$$\|u-u_{\Omega}\|_{q,\Omega}\le C(\operatorname{diam}\Omega)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}}\|\nabla_h u\|_{p,\Omega},\tag{1}$$

где $1\le q\le\frac{\nu p}{\nu-p}$ при $p<\nu$, $1\le q\le\infty$ при $p=\nu$ и $1\le q\le\infty$ при $p>\nu$. Здесь $u_{\Omega}=\frac{1}{|\Omega|}\int\limits_{\Omega} u(x)\,dx$ — среднее значение u на множестве Ω.

Если $u=0$ на измеримом множестве $T\subset\Omega$ положительной меры, то

$$\|u\|_{q,\Omega}\le C\frac{|\Omega|^{\frac{1}{q}}}{|T|^{\frac{1}{q}}}(\operatorname{diam}\Omega)^{1-\frac{\nu}{p}+\frac{\nu}{q}}\|\nabla_h u\|_{p,\Omega}.\tag{2}$$

Доказательство. Неравенство Пуанкаре (1) на шарах доказано на группах Карно в работе Лу [17], на областях Джона — в работе С. К. Водопьянова и Д. В. Исангуловой [18, теорема 4].

Доказательство неравенства (2) следует схеме доказательства леммы 3 работы [19], где оно приведено для шаров при $q = p$. Обозначим $M = \frac{1}{|\Omega|^{1/q}}\|u\|_{q,\Omega} > 0$. Случай $M = 0$ тривиален. Будем считать, что $u_\Omega > 0$. Если $u_\Omega < 0$, то возьмем $-u$, если $u_\Omega = 0$, то (2) верно. Имеем

$$\|M - u_\Omega\|_{q,\Omega} = |\Omega|^{1/q}|M - u_\Omega| = |\Omega|^{1/q}\left|\frac{1}{|\Omega|^{1/q}}\|u\|_{q,\Omega} - \frac{1}{|\Omega|^{1/q}}\|u_\Omega\|_{q,\Omega}\right| \leq \|u - u_\Omega\|$$

и

$$|T|^{\frac{1}{q}} \leq \|1 - M^{-1}u\|_{q,\Omega} = \frac{1}{M}\|u - M\|_{q,\Omega}$$
$$\leq \frac{1}{M}(\|u - u_\Omega\|_{q,\Omega} + \|M - u_\Omega\|_{q,\Omega}) \leq \frac{2}{M}\|u - u_\Omega\|_{q,\Omega}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{q,\Omega} = |\Omega|^{1/q}M \leq \frac{2|\Omega|^{\frac{1}{q}}}{|T|^{\frac{1}{q}}}\|u - u_\Omega\|_{q,\Omega}$$

и в силу (1) получаем желаемое неравенство. □

Отображения класса Соболева.

Определение. Рассмотрим область $\Omega \subset \mathbb{G}$ и отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$. Отображение f *принадлежит классу Соболева* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$, если выполнены следующие условия.

(A) Для всякого $z \in \mathbb{G}$ функция $[f]_z : x \in \Omega \mapsto d(f(x), z)$ принадлежит классу $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

(B) Семейство функций $\{\nabla_h[f]_z\}_{z\in\mathbb{G}}$ имеет мажоранту, принадлежащую $L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, т. е. существует функция $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, не зависящая от z, такая, что $|\nabla_h[f]_z(x)| \leq g(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

Данное определение ввел Ю. Г. Решетняк для отображений евклидова пространства со значением на метрическом пространстве [20]. С. К. Водопьянов использовал этот подход для отображений групп Карно [21]. Рассмотрим отображение в координатах первого рода $f = (f_1, \dots, f_N) : \Omega \to \mathbb{G}$. Известно (см., например, [19]), что для отображения класса Соболева имеем $X_j f(x) \in V_1(f(x))$, $j = 1, \dots, n$, поэтому матрица $D_h f(x)$, состоящая из элементов $(X_i f_j(x))$, $i, j = 1, \dots, n$, определяет линейное отображение горизонтального пространства $V_1(x)$ в $V_1(f(x))$ для почти всех $x \in \Omega$, называемое *формальным горизонтальным дифференциалом*. Обозначим символом $\|D_h f(x)\|$ норму этого дифференциала:

$$\|D_h f(x)\| = \sup_{\xi\in V_1,\, \|\xi\|=1} \|(D_h f(x))(\xi)\|.$$

В качестве функции $g \in L_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$ из определения соболевских отображений можно взять $\|D_h f\|$ [19, 22].

В свою очередь, горизонтальный дифференциал $D_h f : V_1 \to V_1$ порождает сохраняющий градуировку гомоморфизм алгебр Ли $Df : V \to V$, называемый *формальным дифференциалом* [19]. Определитель матрицы $Df(x)$ называется (*формальным*) *якобианом* отображения f и обозначается символом $J(x, f)$.

Формула замены переменных. Пусть $f : \Omega \to \mathbb{G}$ и $E \subset \Omega$. Функция $\mathcal{N}(y, f, E) : \mathbb{G} \to \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, определяемая как

$$\mathcal{N}(y, f, E) = \begin{cases} 0, & \text{если прообраз } f^{-1}(y) \cap E \text{ пустой;} \\ \infty, & \text{если прообраз } f^{-1}(y) \cap E \text{ бесконечный;} \\ \#(f^{-1}(y) \cap E) & \text{иначе,} \end{cases}$$

называется *индикатрисой Банаха* или *функцией кратности* отображения f. Здесь символ $\#(f^{-1}(y) \cap E)$ обозначает число точек в прообразе $f^{-1}(y) \cap E$ точки y.

Напомним, что отображение *удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству Лузина*, если образ множества меры нуль имеет нулевую меру.

Определение. Пусть Ω — область в $\mathbb{G}$. Отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ называется *абсолютно непрерывным на линиях* ($f \in ACL(\Omega)$), если для любой области U, $\overline{U} \subset \Omega$, и слоения Γ_j, определяемого левоинвариантным векторным полем X_j, $j = 1, \dots, n$, отображение f абсолютно непрерывно на $\gamma \cap U$ относительно $\mathscr{H}^1$-меры Хаусдорфа для $d\gamma_j$-п. в. кривых $\gamma \in \Gamma_j$. Для такого отображения $\mathscr{H}^\nu$-п. в. в Ω существуют производные $X_j f$ вдоль горизонтальных векторных полей X_j, $j = 1, \dots, n$, такие, что $X_j f(x) \in V_1(x)$ [23, предложение 4.1].

Предложение 1 [14, предложение 3]. *Пусть $D \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, $f : D \to \mathbb{G}$ — отображение класса Соболева $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D, \mathbb{G})$ (или класса $ACL(D)$). Тогда*

(1) *существует борелевское множество $\Sigma \subset D$ нулевой меры такое, что $f : D \setminus \Sigma \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина;*

(2) *если $A \subset D \setminus \Sigma$ — измеримое множество, то верна формула площади:*

$$\int\limits_A |J(x, f)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \mathscr{N}(y, f, A)\, dy; \tag{3}$$

(3) *если измеримая функция u неотрицательна, то верна следующая формула замены переменной в интеграле Лебега:*

$$\int\limits_{D\setminus\Sigma} u(x)\, |J(x, f)|\, dx = \int\limits_{\mathbb{G}} \sum_{x \in f^{-1}(y)\setminus\Sigma} u(x)\, dy. \tag{4}$$

§ 3. Дробная максимальная функция

Пусть $\alpha \in [0, \nu)$, $g \in L_1(\mathbb{G})$, $g \geq 0$. Введем дробную максимальную функцию

$$M_\alpha g(z) := \sup_{r>0} r^\alpha \fint\limits_{B(z,r)} g\, dx.$$

Лемма 2. *Пусть $1 \leq q < p \leq \nu$, $g \in L_p(\mathbb{G})$ — неотрицательная функция на группе Карно $\mathbb{G}$. Тогда $M_{\frac{q}{p}} g(z) < \infty$ для $\mathscr{H}^{\nu - q}$-п. в. $z \in \mathbb{G}$.*

Доказательство основано на лемме 3.2 работы [24], где исследуются максимальные функции от конечных мер. Обозначим

$$S = \{z \in \mathbb{G} : M_{\frac{q}{p}} g(z) > \sigma\}, \quad \sigma > 0.$$

Для всякой точки $z \in S$ найдется число $r_z > 0$ такое, что

$$r_z^{q/p} \fint\limits_{B(z,r_z)} g\, dx > \sigma.$$

Отсюда по неравенству Гёльдера

$$\sigma < \frac{r_z^{q/p}}{|B(z,r_z)|}\Bigg(\int\limits_{B(z,r_z)} g^p\,dx\Bigg)^{1/p}|B(z,r_z)|^{1-1/p} = \frac{r_z^{(q-\nu)/p}}{|B(0,1)|^{1/p}}\Bigg(\int\limits_{B(z,r_z)} g^p\,dx\Bigg)^{1/p}$$

и, следовательно,

$$\sigma^p < \frac{r_z^{q-\nu}}{|B(0,1)|}\int\limits_{B(z,r_z)} g^p\,dx.$$

Получаем равномерную ограниченность чисел r_z:

$$r_z^{\nu-q} < \frac{1}{\sigma^p|B(0,1)|}\int\limits_{B(z,r_z)} g^p\,dx \le \frac{1}{\sigma^p|B(0,1)|}\int\limits_{\mathbb{G}} g^p\,dx.$$

По лемме Витали о покрытии из семейства $\{B(z,r_z), z \in S\}$ можно выбрать счетное семейство непересекающихся шаров $B_i = B(z_i,r_i)$ такое, что $S \subset \bigcup\limits_i 5B_i$.

Таким образом,

$$\mathscr{H}^{\nu-q}(S) \le \sum_i (10r_i)^{\nu-q} < \frac{10^{\nu-q}}{\sigma^p|B(0,1)|}\sum_i\int\limits_{B_i} g^p\,dx \le \frac{10^{\nu-q}}{\sigma^p|B(0,1)|}\int\limits_{\mathbb{G}} g^p\,dx.$$

Отсюда сразу следует, что $\mathscr{H}^{\nu-q}\{z\in\mathbb{G} : M_{\frac{q}{p}}g(z)=\infty\} = 0$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $\beta \in (0,1]$, g — неотрицательная суммируемая функция на $\mathbb{G}$. Тогда*

$$\int\limits_{B(y,r)} \frac{g(z)}{d(y,z)^{\nu-1}}\,dz \le Cr^\beta M_{1-\beta}g(y)$$

для всех $y \in \mathbb{G}$ и $r > 0$. Константа C не зависит от y, r и g.

Доказательство. Положим $r_k = 2^{-k}r$, $B_k = B(y,r_k)$. Тогда

$$\int\limits_{B(y,r)} \frac{g(z)}{d(y,z)^{\nu-1}}\,dz \le \sum_{k=0}^{\infty}(r_{k+1})^{1-\nu}\int\limits_{B_k\setminus B_{k+1}} g(z)\,dz$$
$$\le \sum_{k=0}^{\infty}(r_k/2)^{1-\nu}\int\limits_{B_k} g(z)\,dz = 2^{\nu-1}|B(0,1)|\sum_{k=0}^{\infty} r_k \fint\limits_{B_k} g(z)\,dz$$
$$\le 2^{\nu-1}|B(0,1)|M_{1-\beta}g(y)\sum_{k=0}^{\infty} r_k^\beta = Cr^\beta M_{1-\beta}g(y). \quad \square$$

Предложение 2. *Пусть $1 \le q < p \le \nu$, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество и $u \in W_p^1(\Omega)$ — непрерывная функция. Тогда для $\mathscr{H}^{\nu-q}$-п. в. $z \in \Omega$ выполняется*

$$\limsup_{r\to 0} r^{-\beta}\fint\limits_{B(z,r)} |u(x)-u(z)|\,dx < \infty, \quad \text{где} \quad \beta = 1-\frac{q}{p}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\Omega = \mathbb{G}$. Почти все точки — лебеговские точки для функции u и $M_{1-\beta}\|\nabla_h u\|(z) < \infty$ для $\mathscr{H}^{\nu-q}$-п. в. $z \in \mathbb{G}$ по лемме 2. Выберем такую точку $z \in \mathbb{G}$, что $M_{1-\beta}\|\nabla_h u\|(z) < \infty$ и z — лебегова точка u.

Положим $B = B(z, r)$. Тогда

$$|u(x) - u_B| \leq C \int\limits_{2B} \frac{\| \nabla_h u(y) \|}{d(x,y)^{\nu-1}}\, dy$$

для п. в. $x \in B$ (см., например, [25, лемма 3.1]).

Отсюда получаем, что

$$\fint\limits_{B} |u(x) - u(z)|\, dx \leq \fint\limits_{B} \big(|u(x) - u_B| + |u(z) - u_B|\big)\, dx$$

$$\leq C_1 \fint\limits_{B} dx \int\limits_{2B} \frac{\| \nabla_h u(y) \|}{d(x,y)^{\nu-1}}\, dy + C_2 \fint\limits_{B} dx \int\limits_{2B} \frac{\| \nabla_h u(y) \|}{d(z,y)^{\nu-1}}\, dy = I_1 + I_2.$$

Поскольку $x \in B = B(z, r)$, $y \in 2B = B(z, 2r)$, имеем $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq 3r$ и

$$\int\limits_{B} \frac{dx}{d(x,y)^{\nu-1}} \leq \int\limits_{B(y,3r)} \frac{dx}{d(x,y)^{\nu-1}} \leq C \int\limits_{0}^{3r} \frac{t^{\nu-1} dt}{t^{\nu-1}} = C' r.$$

По теореме Фубини

$$I_1 = \frac{C_1}{|B|} \int\limits_{2B} \| \nabla_h u(y) \|\, dy \int\limits_{B} \frac{dx}{d(x,y)^{\nu-1}}$$

$$\leq \frac{C_1' r}{|B|} \int\limits_{2B} \| \nabla_h u(y) \|\, dy \leq C_1'' r^{\beta} M_{1-\beta} \| \nabla_h u \|(z).$$

Для оценки I_2 используем лемму 2:

$$I_2 = C_2 \fint\limits_{B} dx \int\limits_{2B} \frac{\| \nabla_h u(y) \|}{d(y,z)^{\nu-1}} dy = C_2' \int\limits_{2B} \frac{\| \nabla_h u(y) \|}{d(y,z)^{\nu-1}} dy \leq C_2'' r^{\beta} M_{1-\beta} \| \nabla_h u \|(z). \quad \square$$

§ 4. Конечность искажения и ограниченность функции кратности

В данном параграфе будем рассматривать отображения с конечным искажением и с существенно ограниченной функцией кратности, т. е. ограниченной на множестве полной меры, и покажем, что такие отображения обладают $\mathscr{N}^{-1}$-свойством и их якобиан положителен почти всюду. Напомним, что отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ *обладает* $\mathscr{N}^{-1}$*-свойством*, если прообраз всякого множества нулевой меры есть множество меры нуль.

Будем следовать идее доказательства теоремы 5 из работы [13], где доказываются $\mathscr{N}^{-1}$-свойство и отличие якобиана от нуля п. в. для отображений, порождающих ограниченный оператор вложения соболевских функций в евклидовом пространстве. $\mathscr{N}^{-1}$-свойство отображений с конечным искажением и ограниченной функцией кратности в евклидовом случае получено также в теореме 1.2 работы [26].

Определение. Пусть D и D' — открытые множества на группе $\mathbb{G}$. Будем говорить, что отображение $f : D \to D'$ *порождает ограниченный оператор вложения* $f^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D)$, $1 \le q \le p \le \infty$, по правилу композиции $f^*u = u \circ f$, если существует постоянная $K < \infty$ такая, что

$$\bigl\|f^*u \mid L^1_q(D)\bigr\| \le K\bigl\|u \mid L^1_p(D')\bigr\| \text{ для любой функции } u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D').$$

Здесь $\mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D')$ — множество всех локально липшицевых функций на D'.

Обозначим $Z = \{x \in D \mid J(x,f) = 0\}$ и $\Sigma \subset D$ — борелевское множество нулевой меры такое, что $f : D \setminus \Sigma \to \mathbb{G}$ обладает $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Определим

$$H_q(y) = \begin{cases} \Bigl(\sum\limits_{x \in f^{-1}(y)\setminus(\Sigma\cup Z)} \frac{\|D_h f(x)\|^q}{|J(x,f)|}\Bigr)^{1/q}, \\ 0, \quad \{f^{-1}(y) \setminus (\Sigma \cup Z)\} = \varnothing. \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть $1 \le q \le p$, D и D' — открытые множества в $\mathbb{G}$, непостоянное на каждой компоненте связности открытого множества отображение $f : D \to D'$*

(a) *принадлежит классу $ACL(D)$;*

(b) *имеет конечное искажение;*

(c) *функция кратности $\mathscr{N}(y,f,D) \in L_\infty(D')$;*

(d) *$K_p \in L_\varkappa(D)$, $\varkappa = \frac{pq}{p-q}$ ($\varkappa = \infty$ при $p = q$).*

Тогда

(1) *функция H_q принадлежит $L_\varkappa(D')$ и $\|H_q\|_{\varkappa,D'} \le \|\mathscr{N}(\cdot,f,D)\|^{1/p}_{\infty,D'}\|K_p\|_{\varkappa,D}$;*

(2) *отображение f порождает ограниченный оператор вложения*

$$f^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D') \to L^1_q(D)$$

и

$$\bigl\|f^*u \mid L^1_q(D)\bigr\| \le \|H_q \mid L_\varkappa(D')\| \cdot \bigl\|u \mid L^1_p(D')\bigr\| \quad \forall u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(D');$$

(3) *отображение f обладает $\mathscr{N}^{-1}$-свойством Лузина и якобиан $J(x,f)$ почти всюду отличен от нуля.*

Доказательство. (1) При $p = q$ величина $\varkappa = \infty$ и оценки очевидны:

$$\begin{aligned} H^p_p(y) &= \sum_{x \in f^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)} \frac{\|D_h f(x)\|^p}{|J(x,f)|} \\ &\le \mathscr{N}(y,f,D') \left\| \frac{\|D_h f(\cdot)\|^p}{|J(\cdot,f)|} \right\|_{\infty,D} = \mathscr{N}(y,f,D')\|K_p\|^p_{\infty,D} \end{aligned}$$

для y таких, что $f^{-1}(y) \setminus (Z \cup \Sigma) \ne \varnothing$.

Рассмотрим случай $q < p$. В силу формулы замены переменных (4)

$$\begin{aligned} \|K_p\|^\varkappa_{\varkappa,D} &= \int\limits_D \left(\frac{\|D_h f(x)\|}{|J(x,f)|^{1/p}}\right)^{\frac{pq}{p-q}} dx = \int\limits_{D\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\|D_h f(x)\|^q}{|J(x,f)|}\right)^{\frac{p}{p-q}} |J(x,f)|\, dx \\ &= \int\limits_{D'} \sum_{x \in f^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)} \left(\frac{\|D_h f(x)\|^q}{|J(x,f)|}\right)^{\frac{p}{p-q}} dy. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу ограниченности функции кратности

$$\Bigg(\sum_{x\in f^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)}\frac{\|D_hf(x)\|^q}{|J(x,f)|}\Bigg)^{\frac{p}{p-q}}\leq \mathscr{N}(y,f,D)^{\frac{\varkappa}{p}}\sum_{x\in f^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)}\Bigg(\frac{\|D_hf(x)\|^q}{|J(x,f)|}\Bigg)^{\frac{p}{p-q}}$$

для п. в. $y\in D'$. Отсюда сразу получаем

$$\|H_q\|^{\varkappa}_{\varkappa,D'}\leq\|\mathscr{N}(\cdot,f,D)\|^{\frac{\varkappa}{p}}_{\infty,D'}\|K_p\|^{\varkappa}_{\varkappa,D}.$$

(2) Покажем, что наше отображение f порождает ограниченный оператор вложения пространств Соболева. Возьмем функцию $u\in L^1_p(D')\cap \mathrm{Lip}_l(D')$. Тогда $u\circ f\in ACL(D)$. По правилу дифференцирования композиции, формулы замены переменных и неравенства Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\big\|f^*u\mid L^1_q(D)\big\|^q&=\int\limits_{D\setminus(\Sigma\cup Z)}(\|\nabla_h u(f(x))\|\cdot\|D_hf(x)\|)^q\,dx\\&\overset{(4)}{=}\int\limits_{D'}\|\nabla_h u(y)\|^q\Bigg(\sum_{x\in f^{-1}(y)\setminus(Z\cup\Sigma)}\frac{\|D_hf(x)\|^q}{|J(x,f)|}\Bigg)dy\\&\leq\Bigg(\int\limits_{D'}\|\nabla_h u(y)\|^p\,dy\Bigg)^{q/p}\Bigg(\int\limits_{D'}H_q^{\varkappa}(y)\,dy\Bigg)^{q/\varkappa}=\big\|u\mid L^1_p(D')\big\|^q\,\|H_q\|^q_{\varkappa,D'}.\end{aligned}$$

Здесь в первом равенстве использована конечность искажения и то, что $|\Sigma|=0$.

(3) Докажем $\mathscr{N}^{-1}$-свойство Лузина. Без ограничения общности можно считать, что D — ограниченное множество и $q<\nu$. Построим вспомогательную функцию $\eta\in C^\infty_O(\mathbb{G})$ такую, что $\eta=1$ на шаре $B(0,1)$ и $\eta=0$ вне шара $B(0,2)$.

Рассмотрим точку $y_0\in D'$. Положим $u(y)=\eta\big(\delta_{\frac{1}{r}}\big(y_0^{-1}\cdot y\big)\big)$. Тогда $u\in L^1_p(D')$, если $\overline{B(y_0,2r)}\subset D'$, и

$$\big\|u\mid L^1_p(D')\big\|^p=\int\limits_{D'}\big\|\nabla_h\,\eta\big(\delta_{\frac{1}{r}}\big(y_0^{-1}\cdot y\big)\big)\big\|^p r^{-p}\,dy=\int\limits_{B(0,2)}\|\nabla_h\,\eta(z)\|^p r^{\nu-p}\,dz=Cr^{\nu-p}.$$

Следовательно,

$$\big\|f^*u\mid L^1_q(D)\big\|\leq\|H_q\|_{\varkappa,B(y_0,2r)}\big\|u\mid L^1_p(D')\big\|=Cr^{\frac{\nu}{p}-1}\|H_q\|_{\varkappa,B(y_0,2r)}.$$

Зафиксируем на D' множество E нулевой меры. Нужно показать, что $|f^{-1}(E)|=0$. Конечность искажения показывает, что $|D\setminus f^{-1}(E)|\neq 0$. Действительно, если предположить обратное, то $J(x,f)=0$ для п. в. $x\in D$ и в силу конечности искажения $D_hf=0$ п. в. Последнее означает, что f постоянная функция на D, что противоречит условию теоремы. Обозначим через A подмножество D с гладкой границей. Отметим, что мера множества $D\setminus A$ может быть сколь угодно малой. Тогда $|A\setminus f^{-1}(E)|>0$ и в силу теоремы Лузина найдется компакт $T\subset A\setminus f^{-1}(E)$ положительной меры такой, что f непрерывно на T. Образ $f(T)\subset D'$ компактен и $f(T)\cap E=\varnothing$.

Рассмотрим произвольное открытое множество $U\subset D'$ такое, что $E\subset U$ и $f(T)\cap U=\varnothing$. Построим счетное покрытие U шарами $B_i=B(y_i,r_i)$ такими, что $\{2B_i=B(y_i,2r_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ тоже покрытие U, причем конечнократное. Для каждого

$i \in \mathbb{N}$ обозначим $u_i(y) = \eta\big(\delta_{\frac{1}{r_i}}\big(y_i^{-1} \cdot y\big)\big)$. Тогда $f^*u_i = 1$ на множестве $f^{-1}(B_i)$ и $f^*u_i = 0$ вне множества $f^{-1}(2B_i)$. В частности, $f^*u_i = 0$ на T. В силу варианта неравенства Пуанкаре (2) из леммы 1 получаем

$$\int\limits_V |f^*u_i(x)|^{q'}\,dx \le C\bigg(\int\limits_V \|\nabla_h(f^*u_i)(x)\|^q\,dx\bigg)^{q'/q}, \quad q' = \frac{\nu q}{\nu - q}.$$

Отсюда и из (4) вытекает оценка

$$|f^{-1}(B_i) \cap V| \le C\|H_q\|^{q'}_{\varkappa,2B_i}|B_i|^{(1/p-1/\nu)q'} = C\|H_q\|^{q'}_{\varkappa,2B_i}|B_i|^{\frac{q(\nu-p)}{p(\nu-q)}}.$$

Если $q < p < \nu$, то, суммируя по всем i и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}|f^{-1}(B_i) \cap V| \le C\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|H_q\|^{\varkappa}_{\varkappa,2B_i}\right)^{\frac{\nu(p-q)}{p(\nu-q)}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|B_i|\right)^{\frac{q(\nu-p)}{p(\nu-q)}}.$$

Поскольку $\{B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ и $\{2B_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — конечнократные покрытия и $2B_i \subset U$ для всех $x \in \mathbb{N}$, то

$$|f^{-1}(E) \cap A| \le C\|H_q\|^{q'}_{\varkappa,U}|U|^{\frac{q(\nu-p)}{p(\nu-q)}}.$$

Если $q = p < \nu$, то $\varkappa = \infty$ и

$$|f^{-1}(U) \cap A| \le \sum_{i=1}^{\infty}|f^{-1}(B_i) \cap A| \le C\sum_{i=1}^{\infty}\|H_q\|^{q'}_{\infty,2B_i}|B_i| \le C\|H_q\|^{q'}_{\infty,U}|U|.$$

Если $q < p = \nu$, то $\varkappa = q'$ и

$$|f^{-1}(U) \cap A| \le \sum_{i=1}^{\infty}|f^{-1}(B_i) \cap A| \le C\sum_{i=1}^{\infty}\|H_q\|^{\varkappa}_{\varkappa,2B_i} \le C\|H_q\|^{\varkappa}_{\varkappa,U}.$$

Во всех случаях в силу произвольности выбора U имеем $|f^{-1}(E) \cap A| = 0$. Напомним, что по построению мера множества $D \setminus A$ может быть сколь угодно мала, следовательно, $|f^{-1}(E) \cap D| = 0$.

Осталось показать, что $J(x, f) \ne 0$ п. в. Предположим обратное: $|Z| > 0$, где, как и раньше, $Z = \{x \in D \mid J(x, f) = 0\}$. Поскольку $|\Sigma| = 0$, то $|Z \setminus \Sigma| > 0$. Тогда в силу $\mathscr{N}^{-1}$-свойства Лузина $|f(Z \setminus \Sigma)| > 0$, что противоречит формуле площади (3):

$$0 = \int\limits_{Z\setminus\Sigma}|J(x, f)|\,dx \ge |f(Z \setminus \Sigma)|.$$

Теорема 4 доказана. $\square$

§ 5. Доказательство теорем 1–3

Теорема 5 [5, теорема 3]. *Пусть* $1 \le q < \nu$, $\mu > 0$, $\beta \in (0, 1)$ *и* $\gamma > 0$. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{G}$ *— открытое множество и* $\varphi \in W^1_q(\Omega)$. *Предположим, что* $\varphi > 0$ *п. в. Обозначим*

$$Z = \bigg\{z \in \Omega : \limsup_{r\to 0} r^{-\beta} \fint\limits_{B(z,r)} \varphi\,dx < \gamma\bigg\}.$$

Предположим, что $\mathscr{H}^{\nu-q}(Z) > \mu$. *Тогда существует компактное множество* $F \subset \Omega \setminus Z$ *такое, что* $|F| > 0$ *и*

$$\sup_{x\in F} \varphi(x)^q \leq C \int\limits_F \| \nabla_h \varphi(x)\|^q \, dx,$$

где $C = C(\nu, q, \mu, \beta)$.

Доказательство приводить не будем, поскольку оно дословно переносится с доказательства теоремы 3 работы [5] в евклидовом случае.

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности будем считать, что Ω ограничена. Рассмотрим отображение $f \in W^1_p(\Omega, \mathbb{G})$ с конечным искажением, $K_p \in L_\varkappa(\Omega)$, $\varkappa = \frac{pq}{p-q}$, $J(x, f) \in L_1(\Omega)$, $\mathscr{N}(y, f, D) \in L_\infty(D')$. Предположим, что f отлична от 0 на множестве положительной меры. В силу теоремы 4 f отлична от 0 п. в. и $J(x, f) > 0$ п. в.

Предположим противное ($\mathscr{H}^{\nu-q}(f^{-1}(0)) > 0$) и получим противоречие.

Положим $\varphi(x) = d(f(x), 0)$. Тогда по определению соболевских отображений $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и $\| \nabla_h \varphi(x)\| \leq \|D_h f(x)\|$ [22, замечание A.3], причем $\varphi(z) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(z) = 0$. По предложению 2 для $\mathscr{H}^{\nu-q}$-п. в. $z \in \Omega$ выполняется

$$\limsup_{r\to 0} r^{-\beta} \fint\limits_{B(z,r)} |\varphi(x) - \varphi(z)| \, dx < \infty, \quad \beta = 1 - \frac{q}{p}.$$

По предположению $\mathscr{H}^{\nu-q}(f^{-1}(0)) > 0$. Поэтому существует число $\gamma \in (0, \infty)$ такое, что

$$\mathscr{H}^{\nu-q}(Z_\gamma) > 0, \quad \text{где} \quad Z_\gamma = \Big\{ z \in f^{-1}(0) : \limsup_{r\to 0} r^{-\beta} \fint\limits_{B(z,r)} \varphi(x) \, dx < \gamma \Big\}.$$

Следовательно, можно применить теорему 5. Построим рекуррентную последовательность открытых множеств Ω_k, содержащих Z_γ, и последовательность компактных множеств F_k. Положим $\Omega_1 = \Omega$.

В силу теоремы 5 для функции φ найдется компактное множество $F_1 \subset \Omega_1 \setminus Z_\gamma$ такое, что $|F_1| > 0$ и

$$\sup_{F_1} \varphi^q \leq C \int\limits_{F_1} \| \nabla_h \varphi(x)\|^q \, dx \leq C \int\limits_{F_1} \|D_h f(x)\|^q \, dx.$$

На k-м шаге, $k > 1$, выбираем $\Omega_k = \Omega_{k-1} \setminus F_{k-1}$. Опять по теореме 5 найдется компактное множество $F_k \subset \Omega_k \setminus Z_\gamma$ такое, что $|F_k| > 0$ и

$$\sup_{F_k} \varphi^q \leq C \int\limits_{F_k} \|D_h f(x)\|^q \, dx. \tag{5}$$

Константа C не зависит от k.

Обозначим $\rho_k = \sup\limits_{F_k} \varphi = \sup\limits_{x\in F_k} d(f(x), 0)$. Очевидно, что $f(F_k) \subseteq \overline{B(0, \rho_k)}$ и $|f(F_k)| \leq C\rho_k^\nu$. Поскольку множества F_k попарно не пересекаются, из (5) следует, что $\rho_k \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда найдутся числа $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\rho_0 > 0$, что $\rho_k < \rho_0$ для всех $k > k_0$. Кратность f существенно ограничена некоторой константой M на $B(0, \rho_0)$. В силу формулы площади (3) получаем, что

$$\int_{F_k} J(x,f)\,dx \le M|f(F_k)| \le C \cdot M \cdot \rho_k^{\nu}. \tag{6}$$

В силу (5) и (6), определения коэффициента искажения и неравенства Гёльдера имеем

$$\rho_k^q \le C \int_{F_k} \|D_h f(x)\|^q\,dx \le C \int_{F_k} (K_p)^q J(x,f)^{q/p}\,dx$$
$$\le C\biggl(\int_{F_k} (K_p)^{\varkappa}\,dx\biggr)^{(p-q)/p} \biggl(\int_{F_k} J(x,f)\,dx\biggr)^{q/p} \le CM^{q/p}\rho_k^{\frac{\nu q}{p}} \biggl(\int_{F_k} (K_p)^{\varkappa}\,dx\biggr)^{(p-q)/p}.$$

Поскольку $\varphi > 0$ п. в. в F_k и $|F_k| > 0$, получаем, что $\rho_k > 0$ и тем самым

$$\rho_k^{1-\frac{\nu}{p}} \le CM^{1/p}\|K_p\|_{\varkappa, F_k}.$$

Поскольку $\frac{\nu}{p} \ge 1$ и $\rho_k \to 0$, существует константа $\kappa > 0$, не зависящая от k, такая, что

$$\int_{F_k} (K_p)^{\varkappa}\,dx > \kappa.$$

Это и есть искомое противоречие, так как по построению множества F_k попарно не пересекаются. Теорема 2 доказана. □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим почти прозрачное отображение f с конечным искажением класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{G})$. В силу предложения 19 работы [8] отображение f можно переопределить на множестве меры 0 так, что f станет непрерывным и будет обладать $\mathscr{N}$-свойством Лузина. Прозрачность f и $\mathscr{N}^{-1}$ свойство Лузина вытекают из теорем 2 и 4 для $q = \nu - 1$, $p = \nu$ при условии, что почти прозрачность влечет ограниченность функции кратности.

Зафиксируем точку $x_0 \in \Omega$ и положим $y_0 = f(x_0)$. Надо показать, что функция кратности ограничена в некоторой окрестности точки y_0. Используя почти прозрачность, найдем открытое множество $\Omega' \subset \Omega$, содержащее компоненту связности $f^{-1}(y_0)$ вместе с точкой x_0, причем $y_0 \notin f(\partial\Omega')$. Возьмем $\rho > 0$, для которого $\overline{B(y_0,\rho)} \cap f(\partial\Omega') = \varnothing$, и определим Ω'' как связную компоненту $\Omega' \cap f^{-1}(\overline{B(y_0,\rho)})$, содержащую x_0. Тогда

$$\mu(y, f, \Omega'') = \begin{cases} \mu(y_0, f, \Omega''), & y \in B(y_0, \rho), \\ 0, & y \notin \overline{B(y_0,\rho)}. \end{cases}$$

Здесь $\mu(y, f, \Omega'')$ — степень отображения f в точке y.

В силу предложения 20 из [8] имеем $\mu(y, f, \Omega'') = \mathscr{N}(y, f, \Omega'')$ для п. в. $y \in B(y_0, \rho) \subset f(\Omega'') \setminus f(\partial\Omega'')$, что и означает существенную ограниченность функции кратности в окрестности точки y_0.

Таким образом, $\mathscr{H}^1(f^{-1}(y)) = 0$ для всех $y \in f(\Omega)$ в силу теоремы 2, т. е. f — прозрачное отображение. Осталось показать непрерывность и дискретность. Поскольку f сохраняет ориентацию и удовлетворяет $\mathscr{N}$-свойству

Лузина, а значит, выполняется формула замены переменной, классическое доказательство Решетняка [1] открытости и дискретности можно перенести без изменений и на случай групп Карно. $\square$

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим непрерывное отображение $f : \Omega \to \mathbb{G}$ с конечным искажением класса $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$, $K_O \in L_{\nu-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Обозначим через W' те точки из $f(\Omega) \subset \mathbb{G}$, в которых нарушается свойство дискретности: $y \in W'$, если $f^{-1}(y)$ содержит не только изолированные точки. Тогда $W = f^{-1}(W')$. Для доказательства теоремы 3 надо показать, что для всякой точки вне множества W найдется окрестность, в которой отображение почти прозрачное. Стало быть, можно применить теорему 1.

Рассмотрим область D, компактно вложенную в Ω. Можно считать, что $f \in W^1_\nu(D, \mathbb{G})$, $K_O \in L_{\nu-1}(D)$.

Зафиксируем точку $x \in D \setminus W$ и обозначим $y = f(x)$. Множество $f^{-1}(y)$ состоит из изолированных точек, компонента связности, содержащая x, совпадает с самой точкой x. Пусть U_j — компонента связности множества $f^{-1}(B(y, 1/j))$, содержащая точку x. В силу вложенности, компактности и связности множеств $\overline{U_j} \subset \mathbb{G}$ их пересечение E также связно. С другой стороны, $x \in E \setminus \partial D \subset f^{-1}(y)$, поэтому $E = \{x\}$. Отсюда следует, что $\operatorname{diam}(U_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Зафиксируем j так, чтобы U_j компактно содержалось в D.

Проверим, что f почти прозрачно в U_j для достаточно большого j, т. е. компоненты связности $f^{-1}(y) \cap U_j$ компактны для всех $y \in \mathbb{G}$. Предположим противное: существует точка $z \in U_j$ такая, что компонента связности множества $f^{-1}(f(z))$, содержащая z, пересекает ∂U_j в некоторой точке b. Поскольку $f(b) = f(z) \in B(y, 1/j)$, существует $t > 0$ такое, что $f(B(b, t)) \subset B(y, 1/j)$. Это противоречит определению U_j. Следовательно, f почти прозрачно в U_j. По теореме 1 отображение f открыто и дискретно в U_j. $\square$

§ 6. Пример

Рассмотрим группу Карно $\mathbb{G}$, которая является произведением $\mathbb{R}^n \times \mathbb{G}_0$, где $\mathbb{G}_0$ — группа Карно однородной размерности ν_0 с метрикой Карно — Каратеодори d_0. Группа $\mathbb{G}$ имеет однородную размерность $\nu = n + \nu_0$. Точки группы $\mathbb{G}$ будем записывать в виде пары (x, y), где $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{G}_0$. Обозначим евклидову норму точки $x \in \mathbb{R}^n$ через $\|x\|$, а однородную норму на $\mathbb{G}_0$ — через $\rho(y) = d_0(y, 0)$.

Пусть отображение F действует следующим образом на множестве $A = \{(x, y) \mid \|x\| < 2, \rho(y) < 1\} \subset \mathbb{G}$:

$$F(x,y) = \begin{cases} (\rho(y)x, y), & \text{если } \|x\| \le 1, \\ \big((2(\|x\|-1) + (2-\|x\|)\rho(y))\frac{x}{\|x\|}, y\big), & \text{если } 1 < \|x\| < 2. \end{cases}$$

Это непрерывное отображение, которое оставляет на месте множество A и его границу: $F(\overline{A}) = \overline{A}$, $F|_{\partial A} = \mathrm{id}$. Отображение F дифференцируемо при $y \ne 0$, $\|x\| \ne 1$, удовлетворяет условию контактности и $\|D_h F(x, y)\| \le C$ на A. Следовательно, $F \in W^1_p(A, \mathbb{G})$ для всех $p \in [1, \infty)$.

Нетрудно проверить, что в точках дифференцируемости

$$J((x, y), F) = \rho(y)^n \quad \text{при } \|x\| < 1$$

и

$$J((x,y),F) = a^n + 2a^{n-1}(1-\rho(y))\|x\|^{-1} \quad \text{при } 1 < \|x\| < 2,$$

где $a = (2(\|x\|-1) + (2-\|x\|)\rho(y))\|x\|^{-1}$.

Коэффициент искажения $K_\nu \sim \rho(y)^{-\frac{n}{\nu}}$ при $\|x\| < 1$ и $K_\nu \sim |a|^{-\frac{n-1}{\nu}}$ при $1 < \|x\| < 2$. Поскольку $a \sim \rho(y)$ при $\rho(y) \to 0$, $\|x\| \to 1$, то $K_\nu \in L_s$ для всех s, если $\frac{-ns}{n+\nu_0} > -\nu_0$ или, эквивалентно, $s < \frac{\nu_0(n+\nu_0)}{n}$. Последнее совпадает с $\varkappa = \frac{\nu q}{\nu - q}$ для $q = \nu_0$.

Функция кратности отображения F тождественно равна 1 кроме точки $(0,0)$, в частности, отображение обладает почти прозрачностью. В точках дифференцируемости якобиан не обращается в нуль, следовательно, отображение F имеет конечное искажение. Положим $M := F^{-1}\big((0,0)\big) = \big\{(x,0) \mid \|x\| \le 1\big\}$. По теореме 2 $\mathscr{H}^{\nu-q}(M) = 0$ для всех $q < \nu_0$. Поскольку M — множество размерности $n = \nu - \nu_0$ и $\mathscr{H}^n(M) = \mathscr{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0,1)) > 0$, построенный пример показывает неулучшаемость условий теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Reshetnyak Yu. G.* Space mappings with bounded distortion. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1989. (Transl. Math. Monogr.; V. 73).
2. *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.* Квазиконформные отображения и пространства функций с первыми обобщенными производными // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 3. С. 515–531.
3. *Iwaniec T., Šverák V.* On mappings with integrable dilatation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 1. P. 181–188.
4. *Manfredi J. J., Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions // Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 1995. V. 32, N 2. P. 235–240.
5. *Hencl S., Malý J.* Mappings of finite distortion: Hausdorff measure of zero sets // Math. Ann. 2002. V. 324. P. 451–464.
6. *Rajala K.* Remarks on the Iwaniec–Šverák conjecture // Indiana Univ. Math. J. 2010. V. 59, N 6. P. 2027–2039.
7. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpenetration of matter // Proc. Roy. Soc. Edinburgh: Sect. A. Mathematics. 1991. V. 88. P. 315–328.
8. *Водопьянов С. К.* Непрерывность отображения класса Соболева $W^1_{\nu,\mathrm{loc}}$ с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 912–934.
9. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1151–1159.
10. *Dairbekov N. S.* Mapping with bounded distortion of two-step Carnot groups // Proceedings on Analysis and Geometry (S. K. Vodopyanov, ed.) Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 122–155.
11. *Vodopyanov S. K.* Foundations of the theory of mappings with bounded distortion on Carnot groups // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 303–344.
12. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
13. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Изв. вузов. Математика. 2002. Т. 10. С. 11–33.
14. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.
15. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; V. 28).
16. *John F.* Rotation and strain // Commun. Pure Appl. Math. 1961. V. 14. P. 391–413.
17. *Lu G.* The sharp Poincaré inequality for free vector fields: an endpoint result // Rev. Mat. Iberoamericana. 1994. V. 10, N 2. P. 453–466.
18. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups // Eurasian Math. J. 2010. V. 1, N 2. P. 58–96.

19. *Водопьянов С. К.* О дифференцируемости отображений классов Соболева на группе Карно // Мат. сб. 2003. Т. 194, № 6. С. 67–86.

20. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657-675.

21. *Водопьянов С. К.* Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.

22. *Kleiner B., Müller S., Xie X.* Pansu pullback and exterior differentiation for Sobolev maps on Carnot groups. 2021. 70 pp. https://arxiv.org/abs/2007.06694v2.

23. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symmétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

24. *Bagby T. , Ziemer W. P.* Pointwise differentiability and absolute continuity // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 191. P. 129–148.

25. *Lu G.* Weighted Poincaré and Sobolev inequalities for vector fields satisfying Hörmander's condition and applications // Rev. Mat. Iberoamericana. 1992. V. 8, N 3. P. 367–439.

26. *Koskela P., Maly J.* Mappings of finite distortion: The zero set of the Jacobian // J. EMS. 2003. V. 5, N 2. P. 95–105.

Поступила в редакцию 14 сентября 2023 г.
После доработки 18 октября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Исангулова Дарья Васильевна (ORCID 0000-0003-0365-8695)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
d.isangulova@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВНО S–ПЕРЕСТАНОВОЧНЫМИ ПОДГРУППАМИ ШМИДТА

С. Ф. Каморников, В. Н. Тютянов, О. Л. Шеметкова

Аннотация. Подгруппа H конечной группы G называется условно S-перестановочной, если для любого $p \in \pi(G)$ существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$. В работе исследуется строение конечной группы G, у которой все подгруппы Шмидта являются условно S-перестановочными.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.107

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, подгруппа Шмидта, условно S-перестановочная подгруппа.

К 80-летию Виктора Даниловича Мазурова

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Группой Шмидта называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой нильпотентны. Простая проверка показывает, что любая ненильпотентная группа содержит по крайней мере одну подгруппу Шмидта (т. е. подгруппу, являющуюся группой Шмидта). В связи с этим естественна задача исследования строения групп, обладающих системой подгрупп Шмидта с заданными свойствами.

Группы с ограничениями на подгруппы Шмидта исследовались во многих работах. В частности, в [1] описаны группы с субнормальными подгруппами Шмидта. В [2, 3] для любого разбиения σ множества всех простых чисел исследованы группы, все подгруппы Шмидта которых σ-субнормальны. В [4] доказана разрешимость группы G с наследственно G-перестановочными подгруппами Шмидта.

В данной работе анализируется нормальное строение конечной группы, все подгруппы Шмидта которой условно S-перестановочны.

Определение 1. Подгруппа H группы G называется *условно S-перестановочной*, если для любого $p \in \pi(G)$ существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$.

Исследования Каморникова С. Ф. и Тютянова В. Н. выполнены при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований и Российского научного фонда (проект Ф23РНФ-237).

Понятие условно S-перестановочной подгруппы введено в 2007 г. в работе [5]. Это понятие развивает концепцию S-перестановочной подгруппы, предложенную Кегелем в [6] (подгруппа H группы G называется *S-перестановочной*, если она перестановочна с любой силовской подгруппой группы G).

Влияние условно S-перестановочных подгрупп на строение группы изучалось в [7, 8]. В частности, в [7] предложены достаточные признаки p-нильпотентности и сверхразрешимости группы G, у которой условно S-перестановочны все максимальные подгруппы силовских подгрупп группы G. В [8] исследовалось строение разрешимой группы, у которой условно S-перестановочны все примарные подгруппы.

Наша главная цель — доказательство теорем 1 и 2, развивающих результаты работы [4].

Теорема 1. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта условно S-перестановочны. Тогда цоколь группы G является абелевым. В частности, G не является простой неабелевой группой.*

Определение 2. Пусть A, B — подгруппы группы G. Подгруппа A называется *G-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in G$. Подгруппа A группы G называется G-перестановочной в G, если она G-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Следствие 1 [4, теорема A]. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта G-перестановочны. Тогда цоколь группы G абелев. В частности, G не является простой неабелевой группой.*

В связи с теоремой 1 естественным образом возникает следующий

Вопрос. *Будет ли группа G разрешимой, если все ее подгруппы Шмидта являются условно S-перестановочными?*

Частичный ответ на этот вопрос дает

Теорема 2. *Пусть G — группа, у которой каждая подгруппа Шмидта условно S-перестановочна в любой содержащей ее подгруппе из G. Тогда группа G разрешима.*

Определение 3. Пусть A, B — подгруппы группы G. Подгруппа A называется *наследственно G-перестановочной с B*, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in \langle A, B\rangle$. Подгруппа A группы G называется *наследственно G-перестановочной в G*, если A наследственно G-перестановочна со всеми подгруппами из G.

Следствие 2 [4, теорема B]. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта наследственно G-перестановочны. Тогда группа G разрешима.*

2. Используемая терминология и предварительные результаты

В работе используются стандартные определения и обозначения теории групп, которые могут быть найдены в [9].

Основное строение групп Шмидта (см. лемму 1) установлено в [10, 11].

Лемма 1. *Пусть S — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) $\pi(S) = \{p, q\}$;

(2) $S = [P]\langle a\rangle$, *где P — нормальная силовская p-подгруппа группы S, $\langle a\rangle$ — ее силовская q-подгруппа, $\langle a^q\rangle \subseteq Z(S)$;*

(3) *P — $\mathfrak{N}$-корадикал группы S, т. е. наименьшая нормальная подгруппа из S, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп);*

(4) *$P/\Phi(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы $S/\Phi(P)$, $\Phi(P) = P' \subseteq Z(S)$;*

(5) *$\Phi(S) = Z(S) = P' \times \langle a^q \rangle$;*

(6) *$C_P(a) = \Phi(P)$;*

(7) *если $Z(S) = 1$, то $|S| = p^m q$, где m — показатель p по модулю q.*

Далее группу Шмидта с нормальной силовской p-подгруппой и не нормальной циклической силовской q-подгруппой будем называть *$S_{\langle p,q\rangle}$-группой*.

Лемма 2 [12, лемма 2]. *Если K и D — подгруппы группы G, подгруппа D нормальна в K и K/D — $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппа, то минимальное добавление L к подгруппе D в K обладает следующими свойствами:*

(1) *L — p-замкнутая $\{p, q\}$-подгруппа;*

(2) *все собственные нормальные подгруппы из L нильпотентны;*

(3) *подгруппа L содержит $S_{\langle p,q\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в D и $L = (P : Q)^L = Q^L$.*

Лемма 3. *Если H — условно S-перестановочная подгруппа группы G и H содержится в субнормальной подгруппе N группы G, то H условно S-перестановочна в N.*

Доказательство. Пусть $p \in \pi(G)$. По условию существует силовская p-подгруппа P группы G такая, что $HP = PH$. Так как подгруппа N субнормальна в G, то $P \cap N = P_0$ — силовская p-подгруппа в N. Тогда

$$HP_0 = H(P \cap N) = HP \cap N = PH \cap N = (P \cap N)H = P_0 H.$$

Отсюда ввиду произвольного выбора $p \in \pi(G)$ имеем, что H — условно S-перестановочная подгруппа группы N.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в группе G нет p-замкнутых подгрупп Шмидта, то группа G является p-нильпотентной.*

Доказательство следует из теоремы Ито [13] о том, что любая минимальная не p-нильпотентная группа является группой Шмидта.

Лемма 5 [14, лемма 3]. *Пусть G — простая группа Шевалле, не принадлежащая списку*

$$\{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Тогда существует простой делитель порядка группы G, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы G.

Лемма 6 [15, лемма 1.6]. *Пусть G — простая группа Шевалле и U — ее унипотентная подгруппа. Если L — максимальная подгруппа группы G и $U \subseteq L$, то L — параболическая подгруппа группы G.*

Напомним, что *разрешимым графом*, соответствующим группе G (обозначается $\Gamma_{sol}(G)$), называется такой простой граф, вершины которого являются простыми делителями порядка группы G и два различных простых числа p и q соединены ребром тогда и только тогда, когда в группе G существует разрешимая подгруппа, порядок которой делится на pq. Вершина графа называется *центральной*, если она смежна со всеми другими его вершинами. Центр графа — это множество всех его центральных вершин.

Лемма 7. *Пусть G — группа, у которой все подгруппы Шмидта условно S-перестановочны и $r = \max\{p \mid p \in \pi(G)\}$. Если $r \geq 19$, то группа G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Предположим, что G — простая неабелева группа. Согласно лемме 4 группа G имеет r-замкнутую подгруппу Шмидта S. Пусть $p \in \pi(G)$ и $P \in Syl_p(G)$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $SP = PS$, а потому SP — подгруппа группы G. Очевидно, что $|\pi(SP)| \leq 3$. Предположим, что подгруппа SP не является разрешимой. Тогда она содержит простую секцию, изоморфную некоторой трипримарной группе. Простые неабелевы трипримарные группы описаны (см., например, [16, с. 20]): они принадлежат списку

$$\{L_2(5), L_2(7), L_2(8), L_2(9), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)\}.$$

Проверка групп из приведенного списка показывает, что $r \leq 17$. Пришли к противоречию с условием $r \geq 19$.

Следовательно, подгруппа SP разрешима. Поэтому вершины r и p смежны в графе $\Gamma_{sol}(G)$. Так как p — произвольный простой делитель числа $|G|$, то $r \in Z(\Gamma_{sol}(G))$. Согласно [17, теорема 1.3] группа G не является простой неабелевой группой.

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Предположим, что G содержит собственную простую неабелеву субнормальную подгруппу N. По лемме 3 все подгруппы Шмидта из N условно S-перестановочны в N. Отсюда и из $|N| < |G|$ следует, что цоколь подгруппы N абелев. Пришли к противоречию с выбором группы G.

Следовательно, G — простая неабелева группа. Опираясь на классификацию простых групп, исключим каждый из возможных случаев.

1. G — знакопеременная группа A_n, где $n \geq 5$.

Согласно лемме 7 достаточно рассмотреть случаи, когда $n \leq 18$.

(1) $G \in \{A_5, A_6\}$. Тогда группа G содержит подгруппу Шмидта $3:2$ (см., например, [18, с. 2, 4]), которая не перестановочна ни с одной силовской 5-подгруппой группы G, что противоречит условию.

(2) $G \cong A_7$. Тогда группа G содержит подгруппу Шмидта $3:2$, которая не перестановочна ни с одной силовской 7-подгруппой группы G [18, с. 10]. Снова пришли к противоречию с условием.

(3) $G \cong A_8$. Тогда группа G содержит диэдр $D \cong 5:2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $2^6 \cdot 5$, что невозможно, так как в группе A_8 нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $2^6 \cdot 5$ [18, с. 22].

(4) $G \cong A_9$. Группа A_9 содержит единственный класс максимальных подгрупп нечетного индекса, изоморфных A_8 [18, с. 37]. Теперь противоречие следует из п. (3).

(5) $G \cong A_{10}$. Группа A_{10} содержит два класса максимальных подгрупп нечетного индекса, представители которых изоморфны S_8 и $2^4 : S_5$ [18, с. 48].

Группа G содержит диэдр $D \cong 5 : 2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $2^7 \cdot 5$. Если DS содержится в подгруппе, изоморфной S_8, то последняя содержит подгруппу порядка $2^7 \cdot 5$, что невозможно (см. п. (4) и [18, с. 22]). Если DS содержится в подгруппе, изоморфной $2^4 : S_5$, то группа S_5 содержит подгруппу прядка $5 \cdot 2^3$, что также невозможно [18, с. 2].

(6) $G \cong A_{11}$. Группа G содержит диэдр $D \cong 11 : 5$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Однако в группе G нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ [18, с. 75]; противоречие.

(7) $G \cong A_{12}$. Тогда группа G содержит диэдр $D \cong 11 : 5$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^9$, что невозможно, так как в группе A_{12} нет максимальных подгрупп нечетного индекса, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^9$ [18, с. 91].

(8) $G \cong A_{13}$. Группа A_{13} содержит максимальную подгруппу $13 : 6$ [18, с. 104] и, следовательно, группа G содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 3$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $13 \cdot 3 \cdot 2^9$. Последнее невозможно, так как в группе A_{13} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $13 \cdot 3 \cdot 2^9$ [18, с. 104].

(9) $G \cong A_{14}$. Пусть H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса. Тогда ввиду [19] подгруппа H изоморфна одной из групп следующего списка:

$$\{(S_2 \times S_{12}) \cap A_{14}, (S_4 \times S_{10}) \cap A_{14}, (S_6 \times S_8) \cap A_{14}, (S_2 \wr S_7) \cap A_{14}\}.$$

Следовательно, $|G : H|$ делится на 13. Группа A_{14} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 3$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS порядка $13 \cdot 3 \cdot 2^9$, имеющая в G нечетный индекс, который не делится на 13; противоречие.

(10) $G \cong A_{15}$. Группа A_{13} содержит максимальную подгруппу $13 : 6$ [18, с. 104] и, следовательно, группа G содержит подгруппу Шмидта $D \cong 13 : 2$. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS, которая является холловой $\{2, 13\}$-подгруппой группы G, что невозможно ввиду [20].

(11) $G \cong A_{16}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна либо группе $(S_2 \wr S_8) \cap A_{16}$, либо группе $(S_4 \wr S_4) \cap A_{16}$. Следовательно, $|G : H|$ делится на 13. Далее, рассуждая по аналогии с п. (9), приходим к противоречию.

(12) $G \cong A_{17}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна группе A_{16}. Следовательно, $|G : H| = 17$. Кроме того, группа G содержит диэдр $D \cong 17 : 2$ [19, табл. 1]. Поэтому для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS, которая имеет в G нечетный индекс, не делящийся на 17, что невозможно.

(13) $G \cong A_{18}$. Если H — максимальная подгруппа группы G нечетного индекса, то ввиду [19] подгруппа H изоморфна либо группе $(S_2 \times S_{16}) \cap A_{18}$, либо группе $(S_2 \wr S_9) \cap A_{18}$. Следовательно, $|G : H|$ делится на 17. Далее, рассуждая по аналогии с п. (12), приходим к противоречию.

2. G — простая спорадическая группа.

Согласно лемме 7 группа G принадлежит списку

$$\{M_{11}, M_{12}, M_{22}, J_2, HS, M^cL, Suz, He, Fi_{22}\}.$$

Рассмотрим каждый из возможных случаев.

(1) $G \cong M_{11}$. Группа M_{11} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 18]. Тогда в G существует подгруппа DS, где S — силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $11 \cdot 5 \cdot 2^4$. Пришли к противоречию с тем, что в группе M_{11} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^4$ (см. [18, с. 18]).

(2) $G \cong M_{12}$. Группа M_{12} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 33]. Тогда по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $11 \cdot 5 \cdot 2^6$. Однако в группе M_{12} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^6$ [18, с. 33]. Снова пришли к противоречию.

(3) $G \cong M_{22}$. Группа M_{22} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 39]. Тогда по условию в G существует подгруппа DS, где S — силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы $11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Так как в M_{22} нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ [18, с. 39], приходим к противоречию.

(4) $G \cong J_2$. Группа J_2 содержит подгруппу Шмидта $D \cong 7 : 3$ [18, с. 42]. Тогда для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G существует подгруппа DS. Ее порядок равен $7 \cdot 3 \cdot 2^7$. Пришли к противоречию с тем, что в группе J_2 нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $7 \cdot 3 \cdot 2^7$ [18, с. 42].

(5) $G \cong HS$. Группа HS содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 80]. Тогда по условию в группе G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы DS равен $11 \cdot 5 \cdot 2^9$. Однако в группе HS нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^9$ [18, с. 80]; противоречие.

(6) $G \cong M^cL$. Группа M^cL содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 100]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S группы G в G существует подгруппа DS и $|DS| = 11 \cdot 5 \cdot 2^7$. Единственным классом максимальных подгрупп в M^cL, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^7$, является класс подгрупп, изоморфных M_{22}. Из п. (3) следует, что в группе M_{22} подгрупп порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ не существует. Снова пришли к противоречию.

(7) $G \cong Suz$. Группа Suz содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 131]. Тогда, как и в п. (6), показывается, что в G существует подгруппа порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^{13}$. Пришли к противоречию, так как в группе Suz нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^{13}$ (см. [18, с. 131]).

(8) $G \cong He$. Группа He содержит подгруппу Шмидта $D \cong 17 : 2$ [18, с. 104]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S в G существует подгруппа DS, порядок которой равен $17 \cdot 2^{10}$. Однако в группе He нет максимальных подгрупп, порядок которых делится на $17 \cdot 2^{10}$ [18, с. 104]; противоречие.

(9) $G \cong Fi_{22}$. Группа Fi_{22} содержит подгруппу Шмидта $D \cong 11 : 5$ [18, с. 163]. Тогда по условию для некоторой силовской 2-подгруппы S в G существует подгруппа DS и ее порядок равен $11 \cdot 5 \cdot 2^{17}$. Единственным классом

максимальных подгрупп в Fi_{22}, порядок которых делится на $11 \cdot 5 \cdot 2^{17}$, является класс подгрупп, изоморфных $2^{10} : M_{22}$. Однако из п. (3) следует, что в группе M_{22} подгрупп порядка $11 \cdot 5 \cdot 2^7$ не существует. Снова пришли к противоречию.

3. G — простая группа лиева типа над полем характеристики p.

Рассмотрим сначала случай, когда группа G не принадлежит списку

$$\{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

По лемме 5 найдется простое число $r \in \pi(G)$ такое, что r не делит порядок любой собственной параболической подгруппы группы G. Кроме того, согласно лемме 4 в группе G существует r-замкнутая подгруппа Шмидта $R : T$. По условию теоремы существует подгруппа $U(R : T)$, где U — унипотентная подгруппа группы G. В силу леммы 6 подгруппа $U(R : T)$ содержится в некоторой собственной максимальной параболической подгруппе P группы G. Если $P \neq G$, то r делит $|P|$, что невозможно. Следовательно, $U(R : T) = G$. В этом случае

$$G \in \{L_2(5), L_3(2), L_2(8), L_2(9), L_2(17), L_3(3), U_3(3), U_4(2)\}$$

(см., например, [16, с. 20]). Поскольку U — унипотентная подгруппа в соответствующей группе лиева типа, то последняя факторизация имеет место лишь в двух случаях: $L_3(2) = D_8 \cdot (7 : 3)$ $(p = 2)$ и $L_2(5) = 5 \cdot A_4$ $(p = 5)$ [18]. Простая проверка показывает, что эти группы содержат подгруппы Шмидта, которые не являются условно S-перестановочными в G.

Таким образом,

$$G \in \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Рассмотрим все возможные случаи.

(a) $G \cong SL_6(2)$. Тогда $|G| = 2^{15} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 31$. Из [21, табл. 8.24, 8.18] следует, что группа G содержит подгруппу Шмидта $L \cong 31 : 5$. Из [21, табл. 8.24] имеем, что порядок любой максимальной подгруппы группы G не делится на $31 \cdot 5 \cdot 7^2$. Поэтому подгруппа L не перестановочна ни с одной силовской 7-подгруппой группы G, что противоречит условию теоремы.

(b) $G \cong Sp_6(2)$. Тогда $|G| = 2^9 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$. Группа $Sp_6(2)$ содержит диэдр $D \cong 5 : 2$. Поэтому в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной подгруппы равен $2^9 \cdot 5$. В группе $Sp_6(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^9 \cdot 5$, является подгруппа $2^5 : S_6$ [18, с. 46]. Отсюда следует, что группа S_6 содержит подгруппу порядка $2^4 \cdot 5$, что невозможно [18, с. 4].

(c) $G \cong \Omega_8^+(2)$. Тогда $|G| = 2^{12} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$. Группа $\Omega_8^+(2)$ содержит диэдр $D \cong 5 : 2$. Поэтому по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной группы равен $2^{12} \cdot 5$. В группе $\Omega_8^+(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^{12} \cdot 5$, является подгруппа $2^6 : A_8$ [18, с. 85]. Отсюда следует, что группа A_8 имеет подгруппу порядка $2^6 \cdot 5$. Однако A_8 подгруппой такого порядка не обладает [18, с. 22]. Снова пришли к противоречию.

(d) $G \cong SU_4(2)$. Тогда $|G| = 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$. Группа $SU_4(2)$ содержит диэдр $D \cong 5 : 2$. Поэтому по условию в G существует подгруппа DS, где S — некоторая силовская 2-подгруппа группы G. Порядок данной группы равен $2^6 \cdot 5$. В группе

$SU_4(2)$ единственной максимальной подгруппой, порядок которой делится на $2^6{\cdot}5$, является подгруппа $2^4 : A_5$ [18, с. 26]. Отсюда следует, что группа A_5 имеет подгруппу порядка $2^2 \cdot 5$,что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Тогда каждая подгруппа Шмидта из G условно S-перестановочна в любой ее содержащей подгруппе и G не является разрешимой. Если M — максимальная подгруппа группы G и H — ее подгруппа Шмидта, то ввиду условия теоремы H условно S-перестановочна в любой содержащей ее подгруппе из M. Отсюда в силу выбора группы G имеем, что M разрешима.

Таким образом, G — минимальная неразрешимая группа. Простая проверка показывает, что $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [22]. Этот список содержит следующие группы:

— $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
— $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;
— $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$;
— $PSL_3(3)$;
— $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Отметим, что ввиду теоремы 1 $\Phi(G) \neq 1$.

Рассмотрим каждый из возможных случаев.

1. Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_3(3)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $3 : 2$ (см., например, [18, с. 13]). По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 3^\alpha$, $|Q| = 2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 13-подгруппа R такая, что $R(P : Q) = (P : Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P : Q)$. Очевидно, $R(P : Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 13-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Из свойств подгруппы Фраттини следует, что $R(P : Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на 26, что невозможно [18, с. 13].

2. Пусть $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$, p — простое нечетное число. Как следует из [23], $|Sz(2^p)|$ — произведение четырех попарно взаимно простых чисел 2^{2p}, $2^p - 1$, $2^p + \sqrt{2^{p+1}} + 1$ и $2^p - \sqrt{2^{p+1}} + 1$. Кроме того, группа $Sz(2^p)$ содержит подгруппу Фробениуса $2^{2p} : (2^p - 1)$. Поэтому $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, где r — некоторый простой делитель числа $2^p - 1$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 2^\alpha$, $|Q| = r^\beta$. Группа $Sz(2^p)$ содержит максимальный тор порядка $2^p + \sqrt{2^{p+1}} + 1$. Пусть t — некоторый простой делитель порядка данного тора. Ввиду условия теоремы в G существует силовская t-подгруппа T такая, что $T(P : Q) = (P : Q)T$, т. е. G содержит подгруппу $T(P : Q)$. Очевидно, $T(P : Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $T\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Из

свойств подгруппы Фраттини следует, что $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$.

Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на простые числа из $\pi(2^p-1)$ и $\pi(2^p+\sqrt{2^{p+1}}+1)$. Ввиду [23] последнее невозможно.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [24, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

3. Пусть $G/\Phi(G)\cong PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3. Отметим, что

$$|PSL_2(3^p)|=3^p\cdot(3^p-1)\cdot(3^p+1)/2.$$

Кроме того, $3^p-1=2m$, где $(2,m)=1$, и $3^p+1=4f$, где $(2,f)=1$. Группа $PSL_2(3^p)$ содержит подгруппу Фробениуса порядка $3^p\cdot(3^p-1)/2$ с дополнительным множителем, являющимся циклической группой порядка $(3^p-1)/2$. При этом число $(3^p-1)/2$ нечетно. Пусть r — некоторый простой делитель этого числа. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,r\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=3^\alpha$, $|Q|=r^\beta$. Группа $PSL_2(3^p)$ содержит циклическую подгруппу порядка $(3^p+1)/2$. Как отмечено выше, число $(3^p+1)/2$ делится на некоторое простое нечетное число t. Из условия теоремы следует, что G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Группа $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ имеет нечетный порядок. Следовательно, она является собственной подгруппой группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на нечетное простое число, делящее 3^p-1, и нечетное простое число, делящее 3^p+1, что невозможно. Снова пришли к противоречию.

4. Пусть $G/\Phi(G)\cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2+1\equiv 0 \pmod 5$. Группа $PSL_2(p)$ содержит подгруппу Шмидта, изоморфную A_4. Поэтому $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,3\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,3\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P|=2^\alpha$, $|Q|=3^\beta$.

Рассмотрим два возможных случая.

(a) Пусть $3\in\pi(p-1)$. Если $p+1$ не является степенью числа 2, то выберем нечетное число $r\in\pi(p+1)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская r-подгруппа R такая, что $R(P:Q)=(P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую r-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Поскольку порядок подгруппы $R(P:Q)$ не делится на p, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на число 3, делящее $p-1$, и нечетное простое число, делящее $p+1$, что невозможно.

Пусть теперь $p+1=2^\alpha$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 2-подгруппа R такая, что $R(P:Q)$ — подгруппа группы G. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 2-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G)\neq 1$. Если $p>7$, то $G/\Phi(G)$

содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на $3 \in \pi(p-1)$ и на порядок силовской 2-подгруппы группы $G/\Phi(G)$, что невозможно.

Таким образом, $G/\Phi(G) \cong PSL_2(7)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $3:2$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 3,2\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 3^\alpha$, $|Q| = 2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 7-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 7-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, порядок которой равен либо 14, либо 42, что невозможно.

(б) Пусть $3 \in \pi(p+1)$. Если $p-1$ не является степенью числа 2, то выберем нечетное число $r \in \pi(p-1)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская r-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую r-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. А так как Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Так как порядок подгруппы $R(P:Q)$ не делится на p, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на число 3, делящее $p+1$, и нечетное простое число, делящее $p-1$. Последнее невозможно.

Пусть $p-1 = 2^n$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 2-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 2-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Поскольку Q не содержится в $\Phi(G)$, имеем $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. В этом случае $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на $3 \in \pi(p+1)$ и на порядок силовской 2-подгруппы группы $G/\Phi(G)$.

Поскольку $p > 7$, силовская 2-подгруппа группы $G/\Phi(G)$ имеет порядок больше 8. Так как $p+1 \not\equiv 0 \pmod 4$, отсюда следует, что указанная собственная подгруппа не может содержаться ни в одной максимальной подгруппе группы $G/\Phi(G)$. Последнее невозможно.

5) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число.

Рассмотрим случаи $p=2$, $p=3$ и $p>3$.

а) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(4)$. Предположим, что $5 \notin \pi(\Phi(G))$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 5,2\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$, изоморфную $5:2$, и по лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 5,2\rangle}$-подгруппу $P:Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$ и P не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 5^\alpha$, $|Q| = 2^\beta$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 3-подгруппа R такая, что $R(P:Q) = (P:Q)R$, т. е. G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую 3-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Ясно, что $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу порядка 30, что невозможно. Следовательно, $5 \in \pi(\Phi(G))$.

Пусть $S/\Phi(G)$ — подгруппа группы $G/\Phi(G)$, имеющая порядок 3. Очевидно, $S = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 3-элемента x группы G. Предположим, что S не является нильпотентной группой. Тогда она 3-нильпотентна и содержит 3-нильпотентную подгруппу Шмидта D, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $S =$

$D\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 5-подгруппа A такая, что $AD = DA$, т. е. G содержит подгруппу DA. Очевидно, $AD\Phi(G)/\Phi(G) = AS\Phi(G)$ содержит силовскую 5-подгруппу $A\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 15, что невозможно.

Таким образом, S — нильпотентная группа. Пусть H — силовская 5-подгруппа группы $\Phi(G)$. Очевидно, $C_G(H) \trianglelefteq G$ и $C_G(H)$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(H) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Пришли к противоречию с тем, что мультипликатор Шура группы $PSL_2(4)$ имеет порядок 2 (см., например, [16]).

(б) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(8)$. Тогда $|PSL_2(8)| = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Пусть $S/\Phi(G)$ — силовская 7-подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $S = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 7-элемента x группы G. Предположим, что S не является нильпотентной группой. Тогда она 7-нильпотентна и содержит 7-нильпотентную подгруппу Шмидта D, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $S = D\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 3-подгруппа A такая, что $AD = DA$, т. е. G содержит подгруппу DA. Очевидно, $AD\Phi(G)/\Phi(G) = AS\Phi(G)$ содержит силовскую 3-подгруппу $A\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу порядка 63, что невозможно.

Таким образом, S — нильпотентная группа. Пусть H — холлова $\{2,3\}$-подгруппа группы $\Phi(G)$. Очевидно, $C_G(H) \trianglelefteq G$ и $C_G(H)$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(H) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Так как мультипликатор Шура группы $PSL_2(8)$ тривиален (см., например, [16]), то $H = 1$.

Пусть $F/\Phi(G)$ — силовская 3-подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Очевидно, что $F = \langle x\rangle\Phi(G)$ для некоторого 3-элемента x группы G. Предположим, что F не является нильпотентной группой. Тогда она 7-нильпотентна и содержит 7-нильпотентную подгруппу Шмидта B, не содержащуюся в $\Phi(G)$. Поэтому $F = B\Phi(G)$. Ввиду условия теоремы в G существует силовская 7-подгруппа L такая, что $LB = BL$, т. е. G содержит подгруппу BL. Очевидно, $BL\Phi(G)/\Phi(G) = FL\Phi(G)$ содержит силовскую 7-подгруппу $L\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на 21, что невозможно.

Таким образом, F — нильпотентная группа. Очевидно, $C_G(\Phi(G)) \trianglelefteq G$ и $C_G(\Phi(G))$ не содержится в $\Phi(G)$. Поэтому $C_G(\Phi(G)) = G$. Таким образом, $H \subseteq Z(G)$. Так как мультипликатор Шура группы $PSL_2(8)$ тривиален (см., например, [16]), то $\Phi(G) = 1$.

Теперь ввиду условия теоремы все подгруппы Шмидта группы $PSL_2(8)$ являются условно S-перестановочными. Пришли к противоречию с теоремой 1.

(в) Пусть $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число, большее 3. Отметим, что $|PSL_2(2^p)|$ — произведение трех попарно взаимно простых чисел 2^{2p}, $2^p - 1$, $2^p + 1$. Кроме того, при $p > 3$ число простых делителей порядка группы $PSL_2(2^p)$ не меньше 4 (см., например, [16, с. 20]). Группа $PSL_2(2^p)$ содержит подгруппу Фробениуса порядка $2^p \cdot (2^p - 1)$ с дополнительным множителем, являющимся циклической группой порядка $2^p - 1$. Пусть r — некоторый простой делитель этого числа. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $K/\Phi(G)$. По лемме 2 добавление L к подгруппе $\Phi(G)$ в K содержит $S_{\langle 2,r\rangle}$-подгруппу $P : Q$ такую, что Q не содержится в $\Phi(G)$, где $|P| = 2^\alpha$, $|Q| = r^\beta$. Группа $PSL_2(2^p)$ содержит циклическую подгруппу порядка $2^p + 1$. Пусть $t \in \pi(2^p + 1)$

и R — силовская t-подгруппа группы G. Из условия теоремы следует, что G содержит подгруппу $R(P:Q)$. Очевидно, $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ содержит силовскую t-подгруппу $R\Phi(G)/\Phi(G)$ группы $G/\Phi(G)$. Поскольку Q не содержится в $\Phi(G)$, то $Q\Phi(G)/\Phi(G) \neq 1$. Так как $|\pi(R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G))| \leq 3$, то $R(P:Q)\Phi(G)/\Phi(G)$ — собственная подгруппа группы $G/\Phi(G)$. Таким образом, группа $G/\Phi(G)$ содержит собственную подгруппу, порядок которой делится на нечетное простое число, делящее $2^p - 1$, и нечетное простое число, делящее $2^p + 1$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ведерников В. А.* Конечные группы с субнормальными подгруппами Шмидта // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 6. С. 669–687.

2. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Yi X.* Finite groups with σ-subnormal Schmidt subgroups // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2022. V. 45, N 5. P. 2431–2440.

3. *Йи С., Ли М., Каморников С. Ф.* Конечные группы с системой обобщенно субнормальных подгрупп Шмидта // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 89–97.

4. *Ballester-Bolinches A., Kamornikov S. F., Perez-Calabuig V., Tyutyanov V. N.* Finite groups with G-permutable Schmidt subgroups // Mediterr. J. Math. 2023. V. 20, N 3. Paper N 174, 12 p.

5. *Huang J., Guo W.* S-conditionally permutable subgroups of finite groups // Chin. Ann. Math. 2007. V. 28, N 1. P. 17–26.

6. *Kegel O. H.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen // Math. Z. 1962. V. 78. P. 205–221.

7. *Xu Y., Li X. H.* S-Conditionally permutable subgroups and p-nilpotency of finite groups // Ukr. Math. J. 2014. V. 66, N 6. P. 961–967.

8. *Mirdamadi E., Rezaeezadeh G.* Finite groups with some S-conditionally permutable subgroups // J. Algebra Appl. 2017. V. 16, N 12. Article ID 1750224. 12 p.

9. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.

10. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3. С. 366–372.

11. *Гольфанд Ю. А.* О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.

12. *Монахов В. С., Княгина И. Н.* О конечных группах с некоторыми субнормальными подгруппами Шмидта // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 6. С. 1316–1322.

13. *Ito N.* Note on (LN)-groups of finite order // Kodai Math. Seminar Report. 1951. V. 3, N 1–2. P. 1–6.

14. *Тютянов В. Н., Шеметков Л. А.* Тройные факторизации в конечных группах // Докл. НАН Беларуси. 2002. Т. 46, № 4. С. 52–55.

15. *Seitz G. M.* Flag-transitive subgroups of Chevalley groups // Ann. Math. 1973. V. 97, N 1. P. 27–56.

16. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. М.: Мир, 1985.

17. *Amberg B., Carocca A., Kazarin L. S.* Criteria for the solubility and non-simplicity of finite groups // J. Algebra. 2005. V. 285, N 1. P. 58–72.

18. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.

19. *Liebeck M. W., Praeger C. E., Saxl J.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. V. 111, N 2. P. 365–383.

20. *Вдовин Е. П., Ревин Д. О.* Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.

21. *Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougal C. M.* The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013.

22. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74, N 3. P. 383–437.

23. *Suzuki M.* On a class of double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

24. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1968.

Поступила в редакцию 15 июля 2023 г.
После доработки 4 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Каморников Сергей Федорович (ORCID 0000-0002-1464-1656)
Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,
ул. Советская, 104, Гомель 246028, Беларусь
sfkamornikov@mail.ru

Тютянов Валентин Николаевич
Гомельский филиал Международного университета «МИТСО»,
пр. Октября, 46а, Гомель 246029, Беларусь
vtutanov@gmail.com

Шеметкова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова,
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.984

ОПЕРАТОРЫ ГИЛЬБЕРТА — ПОЙА В ПРОСТРАНСТВАХ КРЕЙНА

В. В. Капустин

Аннотация. Строится класс операторов в пространствах Крейна, состоящих из функций на прямой $\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$, каждый из которых является самосопряженным в пространстве Крейна и при этом одномерным возмущением самосопряженного оператора в соответствующем гильбертовом пространстве, а все комплексные числа вида $\frac{1}{s(1-s)}$, где s пробегает множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана, являются его собственными числами.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.108

Ключевые слова: дзета-функция Римана, собственные числа оператора, возмущения самосопряженных операторов.

Оператором Гильберта — Пойа называют гипотетически существующий самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, спектр которого совпадает с множеством всех нетривиальных нулей дзета-функции Римана, развернутым на вещественную прямую. Идея построения оператора Гильберта — Пойа представляет собой один из подходов к доказательству гипотезы Римана о нулях дзета-функции. Развитие автором своих предшествовавших работ (см. [1]) по исследованию пространства де Бранжа, связанного с дзета-функцией, привело к конструкции семейства самосопряженных операторов с требуемым спектром. Однако оказалось, что пространства, в которых эти операторы действуют, не являются гильбертовыми, как это требуется в связи с гипотезой Римана, а представляют собой пространства Крейна с индефинитной метрикой. Кроме того оказалось, что описание этой конструкции может быть представлено независимо и не требует ее связи с пространством де Бранжа, с помощью которого она была построена автором изначально. Этой конструкции посвящена настоящая заметка. В работе используются несколько хорошо известных фактов, которые можно найти в книгах по общей теории дзета-функции, например в [2].

Пусть p — измеримая вещественнозначная весовая функция на прямой $\mathfrak{L} = \{s : \operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\}$. Пространство Крейна задается скалярным произведением

$$[f, g] = \int f(s)\overline{g(s)}p(s)i\,ds,$$

которое не предполагается положительно определенным; интегрирование (здесь и далее) производится по прямой $\mathfrak{L}$ в направлении сверху вниз. Скалярное произведение в соответствующем гильбертовом пространстве имеет вид $\int f(s)\overline{g(s)}|p(s)|i\,ds$; норму в пространстве Крейна можно определить равной норме этого гильбертова пространства.

Если $s \in \mathfrak{L}$, то $\overline{s} = 1-s$. Дополнительно предположим, что выполнено условие симметрии $p(1-s) = p(s)$. В построенном пространстве Крейна определим подпространство $\mathscr{K}$, состоящее из функций f, для которых $f(1-s) = f(s)$.

Определим

$$u(s) = \frac{2\xi(s)}{s(s-1)} = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

где ξ — кси-функция Римана,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s);$$

хорошо известно, что $\xi(1-s) = \xi(s)$, а множество нулей функции ξ совпадает с множеством всех нетривиальных нулей дзета-функции. Предположим, что $u \in \mathscr{K}$, и рассмотрим оператор на $\mathscr{K}$:

$$f \mapsto \frac{f}{|s|^2} - [f,u]u. \tag{$*$}$$

Оператор деления на $|s|^2 = s(1-s)$ является самосопряженным и в пространстве Крейна, и в гильбертовом пространстве, тогда как возмущающий его оператор ранга 1 самосопряжен только в пространстве Крейна.

Пусть $\alpha > 0$ — такое число, что для $s \in \mathfrak{L}$ имеет место неравенство

$$|\zeta(s)| \leq \mathrm{const} \cdot |s|^\alpha.$$

Знаменитая гипотеза Линделефа состоит в том, что это верно для всех $\alpha > 0$. Согласно классическому результату Харди и Литтлвуда такая оценка имеет место при всех $\alpha > \frac{1}{6}$. В дальнейшем эта оценка многократно улучшалась, и к настоящему времени, насколько известно автору, это неравенство доказано Бургейном для любого числа $\alpha > \frac{13}{84}$. Возьмем число

$$\beta > 2\alpha + \frac{1}{2}.$$

Теорема. *Пусть ϕ — аналитическая функция в полуплоскости $\{s : \mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}\}$ такая, что $\overline{\phi(\overline{s})} = \phi(s)$, $\phi(1) = 1$, и $|\phi(s)| \leq \frac{\mathrm{const}}{|s|^\beta}$ при $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Для $s \in \mathfrak{L}$ через граничные значения функции ϕ определим*

$$q(s) = \frac{(2\pi)^{s-2}}{\Gamma(s)}\phi(s), \quad p(s) = \frac{q(s) + q(1-s)}{2} = \mathrm{Re}\, q(s),$$

и по функции p построим соответствующее пространство Крейна. Тогда оператор $(*)$ в нем корректно определен, и если $\xi(\sigma) = 0$, то $\lambda = \frac{1}{\sigma(1-\sigma)}$ является его собственным числом.

Существование самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве с указанными собственными числами означало бы справедливость гипотезы Римана, согласно которой все нетривиальные нули дзета-функции лежат на прямой $\mathfrak{L}$. Самосопряженный оператор, точки спектра которого имеют вид $\frac{1}{\sigma(1-\sigma)}$, где $\xi(\sigma) = 0$, представляет собой линейную комбинацию двух резольвент оператора Гильберта — Пойа, формулы для которых получаются из разложения $\frac{1}{\sigma(1-\sigma)} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{1-\sigma}$. В качестве ϕ в теореме можно брать функции вида $\frac{1}{s^\beta}$ при $\beta > 2\frac{13}{84} + \frac{1}{2} = \frac{17}{21}$; в частности, можно взять $\phi(s) = \frac{1}{s}$.

Доказательство. Для выполнения условия $u \in \mathscr{K}$ достаточно, чтобы был конечным интеграл

$$\int |u(s)|^2 |q(s)| i\, ds = \int |\pi^{-s}| \left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right|^2 |\zeta(s)|^2 \frac{|(2\pi)^{s-2}|}{|\Gamma(s)|} |\phi(s)| i\, ds$$
$$\leq \text{const} \cdot \int \left| \frac{\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(s)} \right| |s|^{2\alpha-\beta} i\, ds.$$

Оценим сомножитель из подынтегрального выражения с помощью классической формулы удвоения для гамма-функции

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-s}\sqrt{\pi}\Gamma(s).$$

Имеем

$$\frac{\left(\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(s)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(s)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)} 2^{1-s}\sqrt{\pi},$$

и поскольку функция $\frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{1}{2})}$ ведет себя как $\left(\frac{s}{2}\right)^{-1/2}$, модуль этого выражения оценивается величиной $\frac{\text{const}}{\sqrt{|s|}}$. Отсюда ясно, что если выполнено условие $\beta > 2\alpha + \frac{1}{2}$, то рассматриваемый интеграл конечен и тем самым $u \in \mathscr{K}$.

Из уравнения для собственных векторов

$$\frac{f(s)}{s(1-s)} - [f,u]u(s) = \lambda f(s)$$

следует, что собственная функция f имеет вид

$$f(s) = u(s)\frac{s(1-s)}{1-\lambda s(1-s)}$$

и при этом должно выполняться условие

$$[f,u] = 1,$$

которое для доказательства теоремы требуется проверить в случае, когда $\lambda = \frac{1}{\sigma(1-\sigma)}$ для такого числа σ, что $\xi(\sigma) = 0$. Запишем

$$2[f,u] = \int f(s)u(s)q(s) i\, ds + \int f(s)u(s)q(1-s) i\, ds.$$

Для первого слагаемого из правой части, применяя формулу удвоения для гамма-функции, имеем

$$\int f(s)u(s)q(s) i\, ds$$
$$= \int \frac{s(1-s)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{1-\lambda s(1-s)} \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)\frac{(2\pi)^{s-2}}{\Gamma(s)}\phi(s) i\, ds$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\pi i}\int G(s)\frac{\zeta(s)}{s}\, ds,$$

где

$$G(s) = \frac{s^2(s-1)\zeta(s)\phi(s)}{1-\lambda s(1-s)} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}.$$

Функция G является аналитической в полуплоскости $\left\{s : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\right\}$ и ее модуль оценивается сверху величиной $\mathrm{const} \cdot |s|^{1+\alpha-\beta}|s|^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{const} \cdot |s|^{\frac{1}{2}+\alpha-\beta}$.

В классическом представлении для дзета-функции

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int\limits_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}}\, dx, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть вещественного числа x, после замены переменной $x = \frac{1}{y}$ получаем формулу

$$\frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int\limits_0^1 \left\{\frac{1}{y}\right\} y^{s-1}\, dy,$$

в которой интеграл представляет собой преобразование Меллина ограниченной функции $\left\{\frac{1}{y}\right\}$ на конечном интервале $(0, 1)$. Поскольку преобразование Меллина отображает $L^2(0, 1)$ на пространство Харди H^2 в полуплоскости $\{s : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$, интеграл задает функцию из H^2 в этой области, и с учетом оценок для модуля дзета-функции ее модуль оценивается сверху величиной $\mathrm{const} \cdot |s|^{\alpha-1}$. Из этого вытекает, что

$$\int G(s) \left(\frac{\zeta(s)}{s} - \frac{1}{s-1}\right) ds = 0.$$

Действительно, это является следствием того, что подынтегральное выражение представляет собой аналитическую функцию в области $\left\{s : \operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\right\}$, модуль которой не превосходит величины $\mathrm{const} \cdot |s|^{\frac{1}{2}+\alpha-\beta}|s|^{\alpha-1} = \frac{\mathrm{const}}{|s|^{1+\epsilon}}$, где по условию $\epsilon = \beta - 2\alpha - \frac{1}{2} > 0$. Для любой такой функции рассматриваемый интеграл равен нулю.

Тем самым функцию $\frac{\zeta(s)}{s}$ в проводимом вычислении можно заменить на $\frac{1}{s-1}$, это дает нам соотношение

$$\int f(s)u(s)q(s)i\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(s)}{s-1}\, ds,$$

и по формуле Коши получаем

$$\int f(s)u(s)q(s)i\, ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G(1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \phi(1) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = 1.$$

Заменяя λ, s на $\overline{\lambda}, \overline{s}$ соответственно и затем переходя к комплексно сопряженным выражениям, имеем

$$\int f(s)u(s)q(1-s)i\, ds = 1.$$

Наконец, складывая два последних равенства, получаем требуемое соотношение $[f, u] = 1$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капустин В. В.* Множество нулей дзета-функции Римана как точечный спектр оператора // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 4. С. 107–124.

2. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.

Поступила в редакцию 29 ноября 2022 г.
После доработки 29 ноября 2022 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Капустин Владимир Владимирович
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
kapustin@pdmi.ras.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.987

СПЕКТРАЛЬНЫЙ КРИТЕРИЙ СТЕПЕННОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ $\mathbb{Z}^d$ И $\mathbb{R}^d$ ДЕЙСТВИЙ

А. Г. Качуровский, И. В. Подвигин, В. Э. Тодиков, А. Ж. Хакимбаев

Аннотация. Доказана эквивалентность степенной скорости сходимости в L_2-норме эргодических средних для $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$ действий и степенной же оценки спектральной меры симметричных d-мерных параллелепипедов: для показателей степеней, являющихся корнями некоторого специального симметрического многочлена от d переменных. При этом в случае $d = 1$ накрывается весь возможный диапазон степенных скоростей.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.109

Ключевые слова: скорости сходимости в эргодических теоремах, симметрические полиномы.

1. Введение

1.1. Эргодические средние. Пусть $\mathscr{G}$ — группа $\mathbb{Z}^d$ или $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, и (Ω, λ) — пространство с вероятностной мерой λ, на котором действует группа $\mathscr{G}$ обратимыми сохраняющими меру λ преобразованиями $\tau_g : \Omega \to \Omega, g \in \mathscr{G}$, т. е. для всякого измеримого множества $E \subseteq \Omega$ множества $\tau_g^{-1}(E), \tau_g(E)$ также измеримы для всех $g \in \mathscr{G}$, и $\lambda\big(\tau_g^{-1}(E)\big) = \lambda(E)$. Групповое свойство (в аддитивной записи) означает, что для всех $g_1, g_2 \in \mathscr{G}$ и $\omega \in \Omega$ справедливо равенство $\tau_{g_1}(\tau_{g_2}\omega) = \tau_{g_1+g_2}\omega$. Нетрудно проверить, что группа $\{\tau_g : g \in \mathbb{Z}^d\}$ конечнопорождена попарно коммутирующими автоморфизмами $T_k := \tau_{e_{d,k}}$, где $\{e_{d,k}\}_{k=1}^d$ — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^d$, а группа $\{\tau_g : g \in \mathbb{R}^d\}$ есть произведение одномерных попарно коммутирующих потоков, т. е. $\tau_g = T_1^{t_1} T_2^{t_2} \cdots T_d^{t_d}$, где $g = \sum\limits_{k=1}^{d} t_k e_{d,k}$ и $T_k^{t_k} := \tau_{t_k e_{d,k}}$, $t_k \in \mathbb{R}$.

Подгруппы, порожденные преобразованиями $T_{j_1}, T_{j_2}, \ldots, T_{j_k}$ или соответственно одномерными потоками $T_{j_1}^{t_{j_1}}, T_{j_2}^{t_{j_2}}, \ldots, T_{j_k}^{t_{j_k}}$, будем обозначать через $\mathscr{G}_{\mathbf{j}}$, где $\mathbf{j} = \sum\limits_{n=1}^{k} e_{d,j_n}$. Множество таких мультииндексов, т. е. векторов из $\mathbb{R}^d$, с координатами 0 или 1 (являющихся отличными от нулевой вершинами стандартного единичного куба в $\mathbb{R}^d$) обозначим через $\mathscr{V}_d$. Ясно, что $\mathscr{G}_{\mathbf{j}} \simeq \mathbb{Z}^j$ или соответственно $\mathscr{G}_{\mathbf{j}} \simeq \mathbb{R}^j$, где $j = \|\mathbf{j}\|_1$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0004).

Пусть ν_d — мера Лебега на $\mathbb{R}^d$ или считающая мера на $\mathbb{Z}^d$. Пусть $\mathscr{I}$ — направленное множество индексов, нумерующих семейство подмножеств $G_\alpha \subset \mathscr{G}$, $\alpha \in \mathscr{I}$, таких, что

$$\bigcup_{\alpha\in\mathscr{I}} G_\alpha = \mathscr{G}, \quad 0 < \nu(G_\alpha) \le \nu(G_\beta) < +\infty \text{ при } \alpha \le \beta.$$

Ясно, что

$$\lim_{\alpha\in\mathscr{I}} \nu_d(G_\alpha) = +\infty.$$

Для всякой функции $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ определим эргодические средние

$$A_\alpha f(\omega) = \frac{1}{\nu_d(G_\alpha)} \int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g \omega) d\nu_d(g), \quad \omega \in \Omega,\ \alpha \in \mathscr{I}.$$

В частности, для каждой из групп $\mathbb{Z}^d$ или $\mathbb{R}^d$ средние вдоль параллелепипедов записываются в виде

$$A_{\mathbf{n}} f(\omega) = \frac{1}{n_1 n_2 \cdots n_d} \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} f(T_1^{k_1} \cdots T_d^{k_d} \omega), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d \tag{1}$$

и соответственно

$$A_{\mathbf{t}} f(\omega) = \frac{1}{t_1 t_2 \cdots t_d} \int\limits_0^{t_1} \cdots \int\limits_0^{t_d} f(T_1^{\tau_1} \cdots T_d^{\tau_d} \omega)\, d\tau_1 \ldots d\tau_d, \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{2}$$

1.2. Эргодические теоремы. В 1951 г. для функций $f \in L \log^{d-1} L(\Omega, \lambda)$ Данфорд [1] и Зигмунд [2] доказали сходимость п.в. средних (1) и соответственно (2) без условия коммутируемости образующих автоморфизмов и соответственно потоков. При этом предельная функция f^* определяется равенством (см., например, [3, § 6.1] и [4, гл. VIII, § 7])

$$f^*(\omega) = \mathbb{E}_1 \mathbb{E}_2 \cdots \mathbb{E}_d f(\omega),$$

где $\mathbb{E}_j$ — оператор условного ожидания относительно σ-алгебры измеримых T_j-инвариантных множеств (соответственно T_j^t-инвариантных). В работе Данфорда и позднее Данфорда и Шварца была доказана и сходимость в среднем в L_p, $p > 1$ для любой функции $f \in L_p(\Omega, \lambda)$ для таких средних (в более общей ситуации, чем сохраняющие меру преобразования, так называемых $L_1 - L_\infty$-сжатий). Отметим также недавнюю работу [5], в которой сходимость п.в. в теореме Данфорда — Зигмунда доказывается для функций $f \in L \log^{n-1} L(\Omega, \lambda)$, где $n \le d$ — ранг динамической системы.

Дополнительную информацию об эргодических теоремах для других групповых действий можно найти в монографии Темпельмана [6] и статье Нево [7]. Мы в этой работе исследуем скорость сходимости средних (1) и (2) в $L_2(\Omega, \lambda)$, применяя хорошо развитую спектральную теорию унитарных представлений групп $\mathbb{Z}^d$ и $\mathbb{R}^d$. Рассматриваемыми унитарными операторами являются операторы Купмана

$$U_g f(\omega) = f(\tau_g \omega), \quad g \in \mathscr{G}.$$

1.3. Спектральные меры. Для унитарного представления U_g абелевой локально-компактной группы $\mathscr{G}$ и любой функции $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ найдется (см. [8, 9]) неотрицательная борелевская спектральная мера $\sigma_f^{\mathscr{G}}$, определенная на группе $\mathscr{G}^\wedge$ характеров группы $\mathscr{G}$ и задаваемая равенствами

$$(U_g f, f)_{L_2(\Omega,\lambda)} = \int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} \chi(g)\, d\sigma_f^{\mathscr{G}}(\chi), \quad g \in \mathscr{G}.$$

Для группы $\mathbb{R}^k$ ее группа характеров есть $\mathbb{R}^k$, а для $\mathbb{Z}^k$ — тор $\mathbb{T}^k = \mathbb{R}^k/2\pi\mathbb{Z}^k = (-\pi,\pi]^k$. Следовательно, для групп $\mathscr{G}_{\mathbf{k}}$ операторов Купмана будут соответственно равенства

$$\big(f\big(T_{j_1}^{n_1} T_{j_2}^{n_2} \cdots T_{j_k}^{n_k}\omega\big), f(\omega)\big) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{Z}^k,$$

$$\big(f\big(T_{j_1}^{t_1} T_{j_2}^{t_2} \cdots T_{j_k}^{t_k}\omega\big), f(\omega)\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^k} e^{i(\mathbf{t},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{k}}}(\mathbf{s}), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^k,$$

где $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum\limits_{n=1}^{k} x_n y_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^k$. Для меры $\sigma_f^{\mathscr{G}_{\mathbf{1}}}$, $\mathbf{1} = (1,\dots,1)$, будем также использовать обозначение σ_f. Чтобы отличать числа от векторов, последние будем обозначать жирными символами. Исключением будет разве что $x \in \mathbb{R}^d$.

1.4. Описание результатов. Наша цель в этой статье — найти условия, при которых эргодические средние (1) и (2) убывают по норме степенным образом. А именно, для $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ найдутся константа $B > 0$ и $(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ такие, что

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \leq \frac{B}{t_1^{\alpha_1}\cdots t_d^{\alpha_d}}, \ \mathbf{t} > \mathbf{0}; \quad \|A_{\mathbf{n}} f\|_2^2 \leq \frac{B}{n_1^{\alpha_1}\cdots n_d^{\alpha_d}}, \ \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d. \tag{3}$$

Также для групп $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{Z}^d$ и $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ будем предполагать степенную оценку спектральной меры симметричных промежутков, т. е. для некоторых констант $A > 0$ и $(\alpha_1,\dots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ при всех $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1,\dots,\delta_d) > \mathbf{0}$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1,\dots,\delta_d)) \leq A\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_d^{\alpha_d}, \tag{4}$$

где $\Pi(\delta_1,\dots,\delta_d) := (-\delta_1,\delta_1] \times \cdots \times (-\delta_d,\delta_d]$.

Основным результатом является следующий критерий степенной скорости сходимости эргодических средних, обобщающий хорошо известную одномерную ситуацию [10, 11].

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_k \in [0,2]$, $1 \leq k \leq d$, *и выполняется условие* (3). *Тогда справедливо неравенство* (4) *с константой*

$A = B\rho(\alpha_1)\cdots\rho(\alpha_d)$ *(дискретное время);*

$A = B\frac{\rho(\alpha_1)}{2^{\alpha_1}}\cdots\frac{\rho(\alpha_d)}{2^{\alpha_d}}$ *(непрерывное время),*

где $\rho(\beta) = \inf\limits_{x>0} \frac{x^{2-\beta}}{\sin^2 x}$.

Обратно, можно явно указать семейство специальных симметрических многочленов P_d^κ *от* d *переменных с параметром* $\kappa \in [0,2)$ *такое, что если* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \geq \mathbf{0}$ *является корнем одного из них, то условие* (4) *на спектральную меру влечет неравенство* (3) *с константой*

$B = 2d!\frac{\pi^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}A}{2-\kappa}$ *(дискретное время);*

$B = 2d!\frac{2^{\alpha_1+\dots+\alpha_d}A}{2-\kappa}$ (*непрерывное время*).

Доказательство этого критерия включает в себя два шага: импликация в одну сторону есть содержание теоремы 2, а импликация в обратную сторону представлена в п. 1 теоремы 4. Симметрические многочлены, возникающие в формулировке критерия, обсуждаются в § 4, там же доказывается теорема 4. В § 3 мы подробно разбираем в теореме 3 случай $d = 2$, используя новый подход к оценке норм эргодических средних. В § 2 приводятся необходимые конструкции и доказывается теорема 2.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Проективное свойство спектральных мер. Спектральные меры $\{\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}\}_{\mathbf{j}\in\mathscr{V}_d}$ образуют проективную систему мер. Это означает следующее (см., например, [12, 9.12(i)]). Обозначим последовательную нумерацию ненулевых координат мультииндекса $\mathbf{j} \in \mathscr{V}_d$ через $\ell(\mathbf{j})_n$. Для любых мультииндексов $\mathbf{k}, \mathbf{j} \in \mathscr{V}_d$ таких, что $\mathbf{j} \le \mathbf{k}$ (т. е. $\mathbf{j}_n \le \mathbf{k}_n$ для всех $1 \le n \le d$), рассмотрим отображения проектирования

$$\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^j \text{ и } \pi_\mathbf{k} := \pi_{\mathbf{k},\mathbf{1}} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k,$$

где $k = \|\mathbf{k}\|_1$, $j = \|\mathbf{j}\|_1$, $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$, задаваемые цепочкой преобразований:

$$\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} : \sum_{n=1}^{k} x_n e_{k,n} \mapsto \sum_{n=1}^{k} x_n e_{d,\ell(\mathbf{k})_n} \mapsto \sum_{n=1}^{k} \mathbf{j}_{\ell(\mathbf{k})_n} x_n e_{d,\ell(\mathbf{k})_n} = \sum_{n=1}^{j} y_n e_{d,\ell(\mathbf{j})_n} \mapsto \sum_{n=1}^{j} y_n e_{j,n}.$$

Проектор $\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}$ каждому k-мерному вектору $\mathbf{x}$ сопоставляет j-мерный вектор $\mathbf{y}$, который получается следующим образом. Сначала k-мерный вектор $\mathbf{x}$ переводится в d-мерный, в котором координаты x_n заполняют единичные координаты мультииндекса $\mathbf{k}$. Далее в этом d-мерном векторе остаются ненулевыми лишь те координаты, которые соответствуют единицам в мультииндексе $\mathbf{j}$. Получившийся вектор $\mathbf{y}$ переводится в $\mathbb{R}^j$. Нетрудно видеть, что при $\mathbf{h} \le \mathbf{j} \le \mathbf{k}$

$$\pi_{\mathbf{h},\mathbf{j}}\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \pi_{\mathbf{h},\mathbf{k}}, \quad \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\pi_\mathbf{k} = \pi_\mathbf{j}.$$

Предложение 1. *Для любых мультииндексов* $\mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathscr{V}_d$ *таких, что* $\mathbf{j} \le \mathbf{k}$, *будет*

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}} = (\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_*\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}} := \sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}} \circ \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}^{-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим случай группы $\mathbb{Z}^d$, для группы $\mathbb{R}^d$ рассуждения аналогичны. Для любых неотрицательных целых чисел $n_1, n_2, \dots, n_j$ получим

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}(\mathbf{s}) = \bigl(f\bigl(T^{n_1}_{\ell(\mathbf{j})_1} T^{n_2}_{\ell(\mathbf{j})_2} \cdots T^{n_j}_{\ell(\mathbf{j})_j}\omega\bigr), f(\omega)\bigr)$$

$$= \bigl(f\bigl(T^{\widetilde{n}_1}_{\ell(\mathbf{k})_1} T^{\widetilde{n}_2}_{\ell(\mathbf{k})_2} \cdots T^{\widetilde{n}_k}_{\ell(\mathbf{k})_k}\omega\bigr), f(\omega)\bigr) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{t})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{t}),$$

где $\widetilde{\mathbf{n}} \in \mathbb{Z}_+^k$ определяется следующим образом. Так как $\{\ell(\mathbf{j})_p\}_{p=1}^{j} \subset \{\ell(\mathbf{k})_q\}_{q=1}^{k}$, то при равенстве $\ell(\mathbf{k})_q = \ell(\mathbf{j})_p$ полагаем $\widetilde{n}_q = n_p$. Все остальные значения $\widetilde{n}_q$ равны 0. Из этого следует, что

$$(\widetilde{\mathbf{n}}, \mathbf{t})_{\mathbb{R}^k} = (\mathbf{n}, \pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\mathbf{t}))_{\mathbb{R}^j}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}(\mathbf{s}) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\widetilde{\mathbf{n}},\mathbf{t})}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{t})$$
$$= \int\limits_{(-\pi,\pi]^k} e^{i(\mathbf{n},\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}}(\mathbf{t}))}\, d\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \int\limits_{(-\pi,\pi]^j} e^{i(\mathbf{n},\mathbf{s})}\, d(\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_*\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}(\mathbf{s}).$$

Таким образом, все коэффициенты Фурье мер $\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{j}}$ и $(\pi_{\mathbf{j},\mathbf{k}})_*\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{k}}$ совпадают, а значит, и сами меры совпадают [13, 3.8.6]. $\square$

Следствие 1. *Для любого* $1 \le j \le d$

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}(\{x_j = 0\}) = \|\mathbb{E}_j f\|_2^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}(\{x_j = 0\}) = \sigma_f^{\mathscr{G}_\mathbf{1}}\big(\pi_{e_j}^{-1}\{\mathbf{0}\}\big) = \sigma_f^{\mathscr{G}_{e_j}}(\{\mathbf{0}\}) = \|\mathbb{E}_j f\|_2^2. \quad \square$$

Отметим, что условие (4) на спектральную меру влечет при $\alpha_j > 0$ равенство $\|\mathbb{E}_j f\|_2 = 0$. Действительно,

$$\|\mathbb{E}_j f\|_2^2 = \sigma_f(\{x_j = 0\}) = \lim_{\delta_k \to \delta_\infty}\big(\lim_{\delta_j \to 0} \sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d))\big)$$
$$\le A \lim_{\delta_k \to \delta_\infty}\big(\lim_{\delta_j \to 0} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}\big) = 0.$$

Здесь $\delta_\infty = \pi$ для группы $\mathbb{Z}^d$ и $\delta_\infty = \infty$ для группы $\mathbb{R}^d$.

2.2. Спектральное представление норм. Рассмотрим два семейства функций $\mathscr{F}_n : (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}_+$ и $F_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, задаваемых равенствами

$$\mathscr{F}_n(x) = \frac{1}{n^2}\frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}},\ 0 < |x| \le \pi, \quad \mathscr{F}_n(0) = 1,\ n \in \mathbb{N};$$

$$F_t(x) = \left(\frac{\sin \frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2,\ x \ne 0, \quad F_t(0) = 1,\ t \in \mathbb{R}.$$

Функции $\mathscr{F}_n$ лишь на константу отличаются от классических ядер Фейера.

Предложение 2. *Для норм эргодических средних* (1) *и* (2) *справедливы интегральные представления*

$$\|A_\mathbf{n} f\|_2^2 = \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \mathscr{F}_{n_1}(x_1) \dots \mathscr{F}_{n_d}(x_d)\, d\sigma_f(x), \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d; \tag{5}$$

$$\|A_\mathbf{t} f\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} F_{t_1}(x_1) \cdots F_{t_d}(x_d)\, d\sigma_f(x), \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^d. \tag{6}$$

Доказательство. Дискретный вариант (формула (5)) для группы $\mathbb{Z}^d$ по существу разобран в [14], где рассматривались усреднения по кубам (см. также обсуждение в [15, лемма 4.1]). Докажем для полноты изложения равенство (6) для группы $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим общий случай, а потом перейдем к частному — усреднениям по параллелепипедам. Имеем

$$
\begin{aligned}
\|A_\alpha f\|_2^2 &= (A_\alpha f, A_\alpha f) \\
&= \left(\frac{1}{\nu_d(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g\omega)d\nu_d(g), \frac{1}{\nu_d(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha} f(\tau_g\omega)\,d\nu_d(g)\right) \\
&= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}(f(\tau_g\omega), f(\tau_{g'}\omega))\,d\nu_d(g)d\nu_d(g') \\
&= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}(f(\tau_{g-g'}\omega), f(\omega))\,d\nu_d(g)d\nu_d(g') \\
&= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{G_\alpha}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} e^{i(g-g',s)}\,d\sigma_f(s)\,d\nu_d(g)d\nu_d(g') \\
&= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge}\int\limits_{G_\alpha} e^{i(g,s)}\,d\nu_d(g)\int\limits_{G_\alpha} e^{-i(g',s)}\,d\nu_d(g')\,d\sigma_f(s) \\
&= \frac{1}{\nu_d^2(G_\alpha)}\int\limits_{\mathscr{G}^\wedge}\left|\int\limits_{G_\alpha} e^{i(g,s)}\,d\nu_d(g)\right|^2 d\sigma_f(s).
\end{aligned}
$$

Таким образом,

$$
\|A_\alpha f\|_2^2 = \int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)|^2\,d\sigma_f(s), \tag{7}
$$

где

$$
\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s) = \int\limits_{\mathscr{G}} e^{i(g,s)}\,d\nu_d|G_\alpha(g)
$$

— преобразование Фурье вероятностной меры $\nu_d|G_\alpha$,

$$
\nu_d|G_\alpha(E) = \frac{\nu_d(E\cap G_\alpha)}{\nu_d(G_\alpha)}.
$$

Для группы $\mathbb{R}^d$ это ненормированное преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$ индикатора $I_{\mathscr{G}_\alpha}$ множества $G_\alpha \subset \mathbb{R}^d$. Для усреднений по параллелепипедам будет получаться произведение кардинальных синусов

$$
\int\limits_0^{t_1}\cdots\int\limits_0^{t_d} e^{-i(g,s)}\,dg = \prod_{k=1}^{d}\int\limits_0^{t_k} e^{-ig_ks_k}\,dg_k = \frac{2\sin\left(\frac{t_1s_1}{2}\right)}{s_1}\cdots\frac{2\sin\left(\frac{t_ds_d}{2}\right)}{s_d}e^{-i(t,s)/2}.
$$

Отсюда, подставляя в общую формулу, получаем равенство (6). □

2.3. Спектральные меры окрестности нуля. Покажем, как нормы усреднений оцениваются снизу через спектральные меры окрестностей нуля в форме параллелепипедов. Нам понадобится следующее соотношение для ядер $\mathscr{F}_n, F_t$:

$$
\frac{1}{[t]^2}\frac{\sin^2\frac{[t]x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} \geq \left(\frac{\sin\frac{tx}{2}}{\frac{tx}{2}}\right)^2, \quad x\in\mathbb{R},\ t\geq 1,\ |tx|<2\pi. \tag{8}
$$

Следующее утверждение является аналогом известных одномерных оценок [16, лемма 2; 17, лемма 2] норм эргодических средних (1), (2). Для $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_d) \geq \mathbf{1}$ положим $[\mathbf{s}] := ([s_1], \dots, [s_d])$.

Предложение 3. *Для норм эргодических средних* (1) *и* (2) *справедливы оценки снизу: при любых* $\mathbf{a} \in (0, \pi]^d$, *для всех* $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{s} \geq \mathbf{1}$ *и* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d_+$

$$F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)\right) \leq \|A_{[\mathbf{s}]} f\|_2^2; \tag{9}$$

$$F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi\left(\frac{a_1}{t_1}, \dots, \frac{a_d}{t_d}\right)\right) \leq \|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2. \tag{10}$$

Доказательство. Для доказательства (9) воспользуемся представлением (5) и неравенством (8):

$$\begin{aligned}
\|A_{[\mathbf{s}]} f\|_2^2 &= \int\limits_{(-\pi,\pi]^d} \mathscr{F}_{[s_1]}(x_1) \dots \mathscr{F}_{[s_d]}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \int\limits_{\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)} \mathscr{F}_{[s_1]}(x_1) \dots \mathscr{F}_{[s_d]}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \int\limits_{\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)} F_{s_1}(x_1) \dots F_{s_d}(x_d)\, d\sigma_f(x) \\
&\geq \prod_{k=1}^d \min_{|x_k| \leq \frac{a_k}{s_k}} \left(\frac{\sin \frac{s_k x_k}{2}}{\frac{s_k x_k}{2}}\right)^2 \sigma_f \left(\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)\right) \\
&= \prod_{k=1}^d \min_{|y| \leq \frac{a_k}{2}} \left(\frac{\sin y}{y}\right)^2 \sigma_f \left(\Pi\left(\frac{a_1}{n_1}, \dots, \frac{a_d}{n_d}\right)\right) \\
&= F_1(a_1) \cdots F_1(a_d)\, \sigma_f \left(\Pi\left(\frac{a_1}{s_1}, \dots, \frac{a_d}{s_d}\right)\right).
\end{aligned}$$

Неравенство (10) доказывается аналогично. □

Для $\beta \in [0, 2]$ определим

$$\rho(\beta) = \inf_{x>0} \frac{x^{2-\beta}}{\sin^2 x}.$$

Нетрудно убедиться, что $\rho(0) = \rho(2) = 1$. Для $\beta \in (0, 2)$ инфимум достигается на первом положительном корне уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{2x}{2-\beta}$. Также ясно, что $1 \leq \rho(\beta) \leq \sin^{-2}(1)$.

Из предложения (3) вытекает

Теорема 2. *Пусть нормы эргодических средних* (1) *и* (2) *убывают степенным образом, т. е. справедлива оценка* (3) *с константами* $B > 0$ *и* $\alpha_j \in [0, 2]$, $1 \leq j \leq d$. *Тогда для спектральной меры* σ_f *выполняется неравенство*

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d)) \leq B\rho(\alpha_1) \cdots \rho(\alpha_d) \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}, \quad \boldsymbol{\delta} \in (0, \pi]^d \quad (\textit{дискретное время});$$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1, \dots, \delta_d)) \leq B \frac{\rho(\alpha_1)}{2^{\alpha_1}} \cdots \frac{\rho(\alpha_d)}{2^{\alpha_d}} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_d^{\alpha_d}, \quad \boldsymbol{\delta} > \mathbf{0} \quad (\textit{непрерывное время}).$$

Доказательство. Рассмотрим дискретный случай. Фиксируем $\boldsymbol{\delta} \in (0,\pi]^d$. Каждую координату δ_k можно представить в виде $\delta_k = \frac{a_k}{s_k}$, где $a_k \in (0,\pi]$ и $s_k \geq 1$ — варьируемые вещественные параметры. Тогда из неравенства (9) и соотношения $\frac{1}{[x]} \leq \frac{2}{x}$ при $x \geq 1$ получим

$$\begin{aligned}
\sigma_f(\Pi(\delta_1,\ldots,\delta_d)) = \sigma_f\left(\Pi\left(\frac{a_1}{s_1},\ldots,\frac{a_d}{s_d}\right)\right) \leq \frac{1}{F_1(a_1)\cdots F_1(a_d)}\|A_{[\mathbf{s}]}f\|_2^2 \\
\leq \left(\frac{a_1/2}{\sin(a_1/2)}\right)^2 \cdots \left(\frac{a_d/2}{\sin(a_d/2)}\right)^2 \frac{B}{[s_1]^{\alpha_1}\cdots[s_d]^{\alpha_d}} \\
\leq B\left(\frac{a_1/2}{\sin(a_1/2)}\right)^2 \cdots \left(\frac{a_d/2}{\sin(a_d/2)}\right)^2 \left(\frac{2}{s_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{2}{s_d}\right)^{\alpha_d} = \\
= B\frac{(a_1/2)^{2-\alpha_1}}{\sin^2(a_1/2)}\cdots\frac{(a_d/2)^{2-\alpha_d}}{\sin^2(a_d/2)}\delta_1^{\alpha_1}\cdots\delta_d^{\alpha_d}.
\end{aligned}$$

Выбирая параметры a_k таким образом, чтобы функции, их содержащие, достигали своего минимума, получим требуемую оценку для дискретного времени. Оценка для спектральной меры в случае непрерывного времени доказывается аналогично. В этом случае не нужно использовать неравенство между числом и его целой частью. □

3. Оценки сверху для норм усреднений: $d = 1$ и $d = 2$

Перепишем формулу (7) через интеграл от функции распределения [13, 2.9.3]:

$$\begin{aligned}
\|A_\alpha f\|_2^2 = \int\limits_{\mathscr{G}^\wedge} |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)|^2\,d\sigma_f(s) = 2\int\limits_0^\infty u\sigma_f(\{s\in\mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| > u\})\,du \\
= 2\int\limits_0^1 u\sigma_f(\{s\in\mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| > u\})\,du.
\end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, поскольку $|\mathcal{F}[\nu_d|G_\alpha](s)| \leq 1$. Анализ приведенного соотношения позволяет говорить об эквивалентности степенной скорости сходимости эргодических средних вдоль параллелепипедов и степенной особенности спектральной меры специальных окрестностей нуля. В хорошо изученной одномерной ситуации подходящими оказались симметричные интервалы.

3.1. Окрестности нуля в виде промежутков: $d = 1$**.** Рассмотрим одномерный случай. Для групп $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ и $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ предполагаем степенную оценку (4) спектральной меры симметричных интервалов, т. е. $\sigma_f((-\delta,\delta]) \leq A\delta^\alpha$ для некоторых констант $A > 0$ и $\alpha > 0$ при всех возможных $\delta > 0$. Тогда для непрерывного и дискретного времени имеем (см., например, [16, 17]):

	$\alpha \in [0,2)$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$\|A_t f\|_2^2$	$\mathscr{O}(t^{-\alpha})$	$\mathscr{O}(t^{-2}\ln t)$	$\mathscr{O}(t^{-2})$
$\|A_n f\|_2^2$	$\mathscr{O}(n^{-\alpha})$	$\mathscr{O}(n^{-2}\ln n)$	$\mathscr{O}(n^{-2})$

Покажем новым способом эти соотношения, используя приведенную интегральную формулу. Сначала разберем случай группы $\mathbb{R}$. Пусть $\alpha \in [0,2)$, тогда для всех $t>0$

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right)du$$
$$\le 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R} : |x| < \frac{2}{tu}\right\}\right)du \le 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu},\frac{2}{tu}\right]\right)du$$
$$\le 2A\int_0^1 u\frac{2^\alpha}{(tu)^\alpha}\,du = \frac{2^{\alpha+1}A}{(2-\alpha)t^\alpha}.$$

Если $\alpha = 2$, то для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$ получим

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right)du$$
$$\le 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\,du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu},\frac{2}{tu}\right]\right)du$$
$$\le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2A\int_\varepsilon^1 u\frac{2^2}{(tu)^2}\,du = \varepsilon^2\|f\|_2^2 - \frac{8A}{t^2}\ln\varepsilon.$$

Минимум последнего выражения достигается при $\varepsilon^2 = \frac{4A}{\|f\|_2^2 t^2}$. Используя его, для всех достаточно больших $t>0$ получаем

$$\|A_t f\|_2^2 \le \frac{4A}{t^2}\ln\left(\frac{e\|f\|_2^2 t^2}{4A}\right).$$

Если $\alpha > 2$, то для произвольного $\varepsilon \in (0,1)$

$$\|A_t f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R} : \left|\frac{\sin(tx/2)}{tx/2}\right| > u\right\}\right)du$$
$$\le 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\,du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{2}{tu},\frac{2}{tu}\right]\right)du$$
$$\le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2A\int_\varepsilon^1 u\frac{2^\alpha}{(tu)^\alpha}\,du \le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha}A}{(\alpha-2)t^\alpha}\varepsilon^{2-\alpha}.$$

Полагая $\varepsilon = 1/t$, при всех достаточно больших $t>0$ получаем

$$\|A_t f\|_2^2 \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha}A}{\alpha-2}\right)t^{-2}.$$

Похожие выкладки применимы и для дискретного времени. Рассмотрим лишь случай $\alpha \in [0,2)$, чтобы сделать акцент на небольшом отличии и в дальнейшем подробно разбирать только непрерывное время. Учитывая неравенство

$|\sin(x/2)| \geq \frac{|x|}{\pi}$ для всех $|x| \leq \pi$, получаем

$$\|A_n f\|_2^2 = \int\limits_{(-\pi,\pi]} \left(\frac{\sin(nx/2)}{n\sin(x/2)}\right)^2 d\sigma_f(x) \leq \int\limits_{(-\pi,\pi]} \left(\frac{\pi\sin(nx/2)}{nx}\right)^2 d\sigma_f(x)$$

$$= 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x \in (-\pi,\pi] : \left|\frac{\pi\sin(nx/2)}{nx}\right| > u\right\}\right) du \leq 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left\{|x| < \frac{\pi}{nu}\right\}\right) du$$

$$\leq 2\int\limits_0^1 u\sigma_f\left(\left(-\frac{\pi}{nu}, \frac{\pi}{nu}\right]\right) du \leq 2A\int\limits_0^1 u\frac{\pi^\alpha}{(nu)^\alpha}\, du = \frac{2\pi^\alpha A}{(2-\alpha)n^\alpha}.$$

Выкладки для дискретного времени отличаются (после первого неравенства) от непрерывного по сути лишь константой π вместо 2.

Отметим, что все оценки удалось получить из-за того, что множества $\{s \in \mathscr{G}^\wedge : |\mathcal{F}[\nu_d|\nu G_\alpha](s)| > u\}$ содержатся в симметричных интервалах подходящей длины. В многомерной же ситуации происходит свое разбиение области параметров. Разберем подробно конструкцию для непрерывного времени сначала в размерности $d = 2$.

3.2. Окрестности нуля в виде прямоугольников: $d = 2$**.** Для группы $\mathbb{R}^2$ и $f \in L_2(\Omega,\lambda)$ снова предполагаем степенную оценку (4) спектральной меры симметричных прямоугольников, т. е. для некоторых констант $A > 0$ и $\alpha, \beta \geq 0$ при всех $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2) > \mathbf{0}$

$$\sigma_f(\Pi(\delta_1,\delta_2)) \leq A\delta_1^\alpha \delta_2^\beta. \tag{11}$$

Для усреднений группы $\mathbb{R}^2$ по прямоугольникам $G_{t_1,t_2} = [0,t_1] \times [0,t_2]$ имеем

$$|\mathcal{F}[\nu_d|G_{t_1,t_2}](x)| = \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right|.$$

Нетрудно проверить, что для каждого $u \in (0,1)$ справедливо включение

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right| > u\right\}$$
$$\subset \bigcap_{k=1}^2 \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_k| < \frac{2}{ut_k}\right\} \subset \Pi\left(\frac{2}{ut_1}, \frac{2}{ut_2}\right).$$

Более точным включением будет

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right| > u\right\}$$
$$\subset \Pi\left(\frac{2}{ut_1}, \frac{2}{ut_2}\right) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1x_2| < \frac{4}{t_1t_2u}\right\}.$$

Обозначим множество в правой части через $\phi_{t_1,t_2}^{-1}E_u$, где $\phi_{t_1,t_2}(x) = \left(\frac{t_1x_1}{2}, \frac{t_2x_2}{2}\right)$ и $E_u = \Pi\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{u}\right) \bigcap \left\{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1x_2| < \frac{1}{u}\right\}$, $u \in (0,1)$.

Рассмотрим однопараметрическое семейство симметрических многочленов от двух переменных

$$P_2^\kappa(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \kappa(x+y), \quad \kappa \geq 0. \tag{12}$$

Нетрудно убедиться (подробное обсуждение см. в доказательстве предложения (4)), что если неотрицательные α и β будут отличными от нуля корнями многочлена P_2^κ, то найдутся числа $0 \le p, q \le 1$, $p+q=1$, такие, что

$$\alpha + \beta p = \kappa, \quad \beta + \alpha q = \kappa. \tag{13}$$

Теорема 3. *Если имеет место степенная оценка* (11) *спектральной меры прямоугольных окрестностей нуля, то*

1) *если* $P_2^\kappa(\alpha,\beta)=0,\ \kappa\in[0,2)$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$;

2) *если* $P_2^2(\alpha,\beta)=0$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\ln\big(t_1^{\alpha}t_2^{\beta}\big)\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$;

3) *если* $P_2^\kappa(\alpha,\beta)=0$, $\kappa>2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\frac{2\alpha}{\kappa}}t_2^{-\frac{2\beta}{\kappa}}\big)$ *при* $t_1,t_2\to\infty$.

Доказательство. Для произвольных чисел $0\le p,q\le 1$, $p+q=1$, вложим множество E_u в объединение двух прямоугольников:

$$E_u \subset \Pi\left(\frac{1}{u},\frac{1}{u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{1}{u^q},\frac{1}{u}\right).$$

Учитывая все включения и степенную оценку для спектральных мер прямоугольников, для любого $\varepsilon\in[0,1)$ получаем

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = 2\int_0^1 u\sigma_f\left(\left\{x\in\mathbb{R}^2 : \left|\frac{2\sin\left(\frac{t_1x_1}{2}\right)}{t_1x_1}\frac{2\sin\left(\frac{t_2x_2}{2}\right)}{t_2x_2}\right| > u\right\}\right)du$$

$$\le 2\int_0^\varepsilon u\|f\|_2^2\,du + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\phi_{t_1,t_2}^{-1}\left(\Pi\left(\frac{1}{u},\frac{1}{u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{1}{u^q},\frac{1}{u}\right)\right)\right)du$$

$$= \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2\int_\varepsilon^1 u\sigma_f\left(\Pi\left(\frac{2}{t_1u},\frac{2}{t_2u^p}\right)\cup\Pi\left(\frac{2}{t_1u^q},\frac{2}{t_2u}\right)\right)du$$

$$\le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + 2\int_\varepsilon^1 uA\left(\left(\frac{2}{t_1u}\right)^\alpha\left(\frac{2}{t_2u^p}\right)^\beta + \left(\frac{2}{t_1u^q}\right)^\alpha\left(\frac{2}{t_2u}\right)^\beta\right)du$$

$$= \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{1+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta}\int_\varepsilon^1\left(u^{1-\alpha-p\beta}+u^{1-\beta-q\alpha}\right)du.$$

Подставляя (13), получаем оценку

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 \le \varepsilon^2\|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta}\int_\varepsilon^1 u^{1-\kappa}\,du. \tag{14}$$

В зависимости от того, какой знак принимает показатель $2-\kappa$, будем подбирать подходящее ε в виде $\varepsilon = \frac{c}{t_1^a t_2^b}$ для некоторых $a,b,c\ge 0$.

Пусть $\kappa\in[0,2)$. Тогда полагаем $\varepsilon=0$ и из (14) получаем

$$\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 \le \frac{2^{2+\alpha+\beta}A}{t_1^\alpha t_2^\beta(2-\kappa)}, \quad t_1,t_2>0.$$

Таким образом, $\|A_{\mathbf{t}}f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha}t_2^{-\beta}\big)$ при $t_1,t_2\to\infty$.

Пусть $\kappa = 2$. Тогда из (14) для $\varepsilon = \frac{1}{t_1^{\alpha/2} t_2^{\beta/2}}$ имеем

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \varepsilon^2 \|f\|_2^2 - \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta} \ln \varepsilon = \|f\|_2^2 \frac{1}{t_1^\alpha t_2^\beta} + \frac{2^{1+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta} \ln\bigl(t_1^\alpha t_2^\beta\bigr), \quad t_1, t_2 > 0.$$

Таким образом,

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = \mathscr{O}\bigl(t_1^{-\alpha} t_2^{-\beta} \ln\bigl(t_1^\alpha t_2^\beta\bigr)\bigr) \quad \text{при } t_1, t_2 \to \infty.$$

Пусть теперь $\kappa > 2$. Тогда из (14) для $\varepsilon = \frac{1}{t_1^a t_2^b}$ получим

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \varepsilon^2 \|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{t_1^\alpha t_2^\beta (\kappa - 2)} \varepsilon^{2-\kappa} = \|f\|_2^2 \frac{1}{t_1^{2a} t_2^{2b}} + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{\kappa - 2} \frac{1}{t_1^{\alpha + a(2-\kappa)} t_2^{\beta + b(2-\kappa)}}.$$

Взяв параметры $a = \frac{\alpha}{\kappa}$ и $b = \frac{\beta}{\kappa}$, приходим к итоговой оценке

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 \le \left(\|f\|_2^2 + \frac{2^{2+\alpha+\beta} A}{\kappa - 2}\right) t_1^{-\frac{2\alpha}{\kappa}} t_2^{\frac{-2\beta}{\kappa}}, \quad t_1, t_2 > 0. \quad \square$$

4. Общий случай $d > 2$

4.1. Симметрические многочлены. Напомним определения некоторых стандартных симметрических многочленов в $\mathbb{R}^d$:

$$\sigma_{d,1}(x) = \sum_{j=1}^{d} x_j, \quad \sigma_{d,d-1}(x) = \sum_{j=1}^{d} x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d, \quad \sigma_{d,d}(x) = x_1 x_2 \cdots x_d.$$

Здесь выражение $\widehat{x}_j$ означает, что переменной x_j нет, а все остальные есть. Рассмотрим два семейства симметрических многочленов, заданных рекуррентно. Первая последовательность многочленов $Q_d(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, задается следующим образом:

$$Q_1(x_1) = 1, \; Q_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2, \quad Q_d(x) = \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{j=1}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_j).$$

Для произвольного $\kappa \ge 0$ определим еще одну последовательность многочленов. Положим

$$P_1^\kappa(x_1) = x_1 - \kappa, \quad P_2^\kappa(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - \kappa(x_1 + x_2)$$

и

$$P_d^\kappa(x) = \sum_{j=1}^{d} A_j^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) + B_d(x),$$

где

$$A_j^d(x) = x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \prod_{k \ne j} Q_{d-1}(\widehat{x}_k), \quad B_d(x) = \sigma_{d,d}(x) \prod_{j=1}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_j).$$

В следующих леммах рассмотрим некоторые свойства этих многочленов. Основное внимание будет уделено нулям многочленов P_d^κ.

Лемма 1. *В многочлене P_d^κ слагаемое, содержащее κ, имеет вид $-\kappa Q_d(x)$, т. е. $P_d^\kappa(x) = R_d(x) - \kappa Q_d(x)$. При этом $R_d(x), Q_d(x) \geq 0$ при $x \geq \mathbf{0}$.*

Доказательство. Для $d = 1$ и $d = 2$ утверждение очевидно из определения многочленов. Предположим, что утверждение верно для всех номеров вплоть до $d-1$, докажем его для d. Исходя из предположения и индуктивного определения многочлена P_d^κ, имеем

$$\begin{aligned} P_d^\kappa(x) &= \sum_{j=1}^d A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) - \kappa \sum_{j=1}^d A_j^d(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\ &= R_d(x) - \kappa \sum_{j=1}^d x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \prod_{k\neq j} Q_{d-1}(\widehat{x}_k,) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) \\ &= R_d(x) - \kappa \prod_{k=1}^d Q_{d-1}(\widehat{x}_k) \sum_{j=1}^d x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \\ &= R_d(x) - \kappa \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{k=1}^d Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = R_d(x) - \kappa Q_d(x). \end{aligned}$$

Из определения многочленов следует, что $Q_d(x)$ и $A_j^d(x)$ неотрицательны при $x \geq \mathbf{0}$. Поэтому и

$$R_d(x) = \sum_{j=1}^d A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \geq 0 \tag{15}$$

при $x \geq \mathbf{0}$, исходя из индуктивного предположения о неотрицательности $R_{d-1}(x)$. $\square$

Нас будут интересовать неотрицательные нули многочлена P_d^κ. Поищем такие нули сначала на координатных гиперплоскостях. Поскольку многочлены симметричны, возьмем, например, $x_1 = 0$. Тогда уравнение $P_d^\kappa(0, x_2, \ldots, x_d) = 0$ перепишется в виде $A_1^d(x) P_{d-1}^\kappa(x_2, \ldots, x_d) = 0$, так как нетрудно видеть, что остальные слагаемые занулятся. Поскольку у многочленов $Q_d(x)$ неотрицательным нулем будет только точка $\mathbf{0}$, то $A_1^d(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_2 \cdots x_d = 0$.

Таким образом, начиная с размерности $d = 3$ многочлен P_d^κ будет зануляться на $(d-2)$-мерных координатных подпространствах. Назовем такие нули тривиальными, за исключением нетривиальных нулей многочленов P_k^κ меньшей размерности $k < d$. У многочленов P_1^κ и P_2^κ нетривиальными будем считать все нули, кроме точки $\mathbf{0}$. Обозначим множество неотрицательных нетривиальных нулей многочлена P_d^κ через $\ker P_d^\kappa$. Положим также $\ker P_d^0 = \{\mathbf{0}\}$. Таким образом, неотрицательные нетривиальные нули многочлена P_d^κ, $\kappa > 0$, либо имеют все положительные координаты, либо имеют $0 < m \leq d-1$ нулевых координат, а оставшиеся положительные координаты являются корнями многочлена P_{d-m}^κ.

Лемма 2. *Множества $\ker P_d^\kappa$, $\kappa \geq 0$, расслаивают $[0, +\infty)^d$, т. е.*

$$[0, +\infty)^d = \bigsqcup_{\kappa \geq 0} \ker P_d^\kappa.$$

Доказательство. Покажем сначала, что множества нетривиальных нулей не пересекаются. Пусть, от противного, найдутся κ_1 и κ_2 и точка $x_0 \geq \mathbf{0}$, лежащая в обоих множествах. Пусть $0 \le m \le d-1$ — число нулевых координат x_0. Тогда $P^{\kappa_1}_{d-m}$ и $P^{\kappa_2}_{d-m}$ обращаются в нуль на оставшихся ненулевых координатах. Следовательно, $R_{d-m} - \kappa_1 Q_{d-m} = R_{d-m} - \kappa_2 Q_{d-m}$. Так как Q_{d-m} не равно нулю, то $\kappa_1 = \kappa_2$.

Для произвольной ненулевой точки $x_0 \ge \mathbf{0}$ необходимое значение κ находится из равенства $R_{d-m} = \kappa Q_{d-m}$, где m — число нулевых координат x_0. $\square$

Лемма 3. *Пусть $x \in \ker P^\kappa_d$. Тогда справедливы неравенства*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_d \ge \kappa, \quad x_j \le \kappa, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Доказательство. Для многочлена P^κ_2 неравенства следуют из представлений

$$P^\kappa_2(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 + x_2 - \kappa) - x_1 x_2 = 0,$$

$$P^\kappa_2(x_1, x_2) = x_1(x_1 + x_2 - \kappa) - x_2(\kappa - x_2) = x_2(x_1 + x_2 - \kappa) - x_1(\kappa - x_1) = 0.$$

В общем d-мерном случае покажем индуктивно сначала наличие аналога первого равенства, а именно

$$P^\kappa_d(x) = Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - S_d(x),$$

где $S_d(x) \ge 0$ при $x \ge \mathbf{0}$. Учитывая уже проверенные при доказательстве леммы 1 равенства

$$Q_d(x) = \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j), \quad A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) x_j = B_d(x),$$

получим

$$\begin{aligned}
P^\kappa_d(x) &= \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) P^\kappa_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x)(Q_{d-1}(\widehat{x}_j)(\sigma_{d-1,1}(\widehat{x}_j) - \kappa) - S_{d-1}(\widehat{x}_j)) + B_d(x) \\
&= \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x)(Q_{d-1}(\widehat{x}_j)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa - x_j) - S_{d-1}(\widehat{x}_j)) + B_d(x) \\
&= (\sigma_{d,1}(x) - \kappa) \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) \\
&\quad - \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) x_j - \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) \\
&= Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) - (d-1) B_d(x) \\
&= Q_d(x)(\sigma_{d,1}(x) - \kappa) - S_d(x).
\end{aligned}$$

Из предположения индукции следует, что при $x \ge \mathbf{0}$

$$S_d(x) = \sum_{j=1}^{d} A^d_j(x) S_{d-1}(\widehat{x}_j) + (d-1) B_d(x) \ge 0.$$

Покажем теперь, что выполняется и аналог второго соотношения. А именно, для любого $1 \le k \le d$ при всех $x \in \mathbb{R}^d$

$$P_d^\kappa(x) = R_d(x) - \kappa Q_d(x) = R_d(x) - x_k Q_d(x) - (\kappa - x_k) Q_d,$$

где $R_d(x) \ge x_k Q_d(x)$ при $x \ge \mathbf{0}$. Действительно, учитывая (15), по индукции имеем

$$R_d(x) = \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_j) + A_k^d(x) R_{d-1}(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$\ge x_k \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_j) + B_d(x) = x_k Q_d(x).$$

Лемма 4. *Для любого $1 \le k \le d$ справедливо представление*

$$P_d^\kappa(x) = M_d^k(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + N_d^k(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

где $M_d^k(x), N_d^k(x) \ge 0$ при $x \ge \mathbf{0}$.

Доказательство. Покажем по индукции, что

$$M_d^k(x) = \sigma_{d,d-1}(x) \prod_{j=1, j\neq k}^{d} Q_{d-1}(\widehat{x}_j),$$

а $N_d^k(x)$ будет определяться рекуррентным соотношением. Нетрудно видеть, что для $d = 2$ утверждение справедливо:

$$P_2^\kappa(x) = (x_1 + x_2)(x_1 - \kappa) + x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_2 - \kappa) + x_1^2,$$

т. е. $M_2^1(x) = M_2^2(x) = x_1 + x_2 = \sigma_{2,1}(x)$, $N_2^1(x) = x_1^2$, $N_2^2(x) = x_2^2$.

Предположим, что утверждение верно для всех номеров вплоть до $d - 1$, и докажем его для d. Исходя из предположения, получим

$$P_d^\kappa(x) = \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) + A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$= \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) \big(M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) P_{d-2}^\kappa(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + N_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j) \big) + A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + B_d(x)$$
$$= A_k^d(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k) + \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) P_{d-2}^\kappa(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x) \right)$$
$$+ \sum_{j=1, j\neq k}^{d} A_j^d(x) N_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_j).$$

Последнее слагаемое обозначим через $N_d^k(x)$, а для суммы первых двух покажем, что это $M_d^k(x) P_{d-1}^\kappa(\widehat{x}_k)$. Преобразуем произведение $A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j)$, учитывая равенство

$$M_d^k(x) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = Q_d(x).$$

Имеем

$$A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) = x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l\neq j, l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j)$$

$$= x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l \neq j, l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \Big(\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k)$$

$$\times \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big) Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_j) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j)$$

$$= x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots x_d \Big(\prod_{l \neq j, l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \Big(\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big) Q_{d-1}(\widehat{x}_j)$$

$$= x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big(x_1 \cdots \widehat{x}_j \cdots \widehat{x}_k \cdots x_d \prod_{q \neq k, q \neq j} Q_{d-2}(\widehat{x}_k, \widehat{x}_q) \Big)$$

$$= x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) A_j^{d-1}(\widehat{x}_k).$$

Подставим полученное выражение в исходную сумму и получим

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{d} A_j^d(x) M_{d-1}^k(\widehat{x}_j) P_{d-2}^{\kappa}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x)$$

$$= \sum_{j=1, j \neq k}^{d} \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) A_j^{d-1}(\widehat{x}_k) \Big) P_{d-2}^{\kappa}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x)$$

$$= \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) \sum_{j=1, j \neq k}^{d} A_j^{d-1}(\widehat{x}_k) P_{d-2}^{\kappa}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k) + B_d(x)$$

$$= \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) (P_{d-1}^{\kappa}(\widehat{x}_k) - B_{d-1}(\widehat{x}_k)) + B_d(x)$$

$$= \Big(x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \Big) P_{d-1}^{\kappa}(\widehat{x}_k).$$

В последнем равенстве использовано легко проверяемое соотношение

$$B_d(x) = x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) B_{d-1}(\widehat{x}_k).$$

Действительно,

$$x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) B_{d-1}(\widehat{x}_k)$$

$$= x_k \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \sigma_{d-1,d-1}(\widehat{x}_k) \prod_{j \neq k} Q_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k)$$

$$= \sigma_{d,d}(x) \sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) \prod_{j \neq k} Q_{d-2}(\widehat{x}_j, \widehat{x}_k)$$

$$= \sigma_{d,d}(x) \prod_{l \neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) Q_{d-1}(\widehat{x}_k) = B_d(x).$$

Осталось убедиться, что выражение перед $P_{d-1}^{\kappa}(\widehat{x}_k)$ является многочленом

$M_d^k(x)$. Действительно,

$$A_d^k(x) + x_k\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k)\prod_{l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) =$$

$$= x_1\cdots\widehat{x}_k\cdots x_d\prod_{l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) + x_k\sigma_{d-1,d-2}(\widehat{x}_k)\prod_{l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l)$$

$$= \sigma_{d,d-1}(x)\prod_{l\neq k} Q_{d-1}(\widehat{x}_l) = M_d^k(x). \quad \square$$

4.2. Итерационная система линейных уравнений. Наша цель в этом параграфе — показать, что каждая точка из множества $\ker P_d^\kappa$ нетривиальных нулей многочлена P_d^κ является решением некоторой системы линейных уравнений. При этом система получается из уравнения $x_1 - \kappa = 0$ с помощью итерационной процедуры. Опишем сначала эту линейную систему и итерационную процедуру.

Пусть уже имеется система $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1,\ldots,x_d)$, состоящая из $d!$ линейных уравнений от неизвестных $x_1,\ldots,x_d$ с параметрами $\mathscr{P}_d$. Полагаем $\mathscr{P}_1 = \varnothing$. Множество параметров $\mathscr{P}_d$, $d \geq 2$, состоит из наборов вероятностных векторов

$$p^k(m|d) = \bigl(p_1^k(m|d), p_2^k(m|d),\ldots,p_m^k(m|d)\bigr),$$

где $m = 2,\ldots,d$ — размерность вероятностного вектора, $k = 1,\ldots,\frac{d!}{m!}$ отвечает за нумерацию m-мерных векторов. Вероятностность вектора $p^k(m|d)$ означает, что все его координаты неотрицательны и в сумме дают 1.

Переход от системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1,\ldots,x_d)$ к системе $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_{d+1}}(x_1,\ldots,x_{d+1})$ состоит из двух шагов. На первом шаге к каждому из $d!$ уравнений прибавляем выражение $p^1_{d+1}(d+1|d+1)x_{d+1}$ и заменяем входящие вероятностные параметры системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1,\ldots,x_d)$ аналогичными из множества $\mathscr{P}_{d+1}$. Второй шаг состоит в симметризации полученной на первом шаге системы. А именно, добавляется еще d таких же систем уравнений, только с циклически переставленными переменными и с новыми вероятностными параметрами. Проиллюстрируем процедуру на системах малой размерности:

$$\mathscr{L}^\kappa_\varnothing(x_1)\colon\ x_1-\kappa=0 \overset{1\text{ шаг}}{\Rightarrow} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0 \overset{2\text{ шаг}}{\Rightarrow} \begin{cases} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0,\\ p_1^1(2|2)x_1 + x_2 - \kappa = 0,\end{cases}$$

$$\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_2}(x_1,x_2)\colon \begin{cases} p_2^1(2|2)x_2 + x_1 - \kappa = 0,\\ p_2^1(2|2)x_1 + x_2 - \kappa = 0\end{cases} \overset{1\text{ шаг}}{\Rightarrow} \begin{cases} p_3^1(3|3)x_3 + p_2^1(2|3)x_2 + x_1 - \kappa = 0,\\ p_3^1(3|3)x_3 + p_1^1(2|3)x_1 + x_2 - \kappa = 0\end{cases}$$

$$\overset{2\text{ шаг}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} \begin{cases} p_3^1(3|3)x_3 + p_2^1(2|3)x_2 + x_1 - \kappa = 0,\\ p_3^1(3|3)x_3 + p_1^1(2|3)x_1 + x_2 - \kappa = 0,\end{cases}\\ \begin{cases} p_2^1(3|3)x_2 + p_2^2(2|3)x_3 + x_1 - \kappa = 0,\\ p_2^1(3|3)x_2 + p_1^2(2|3)x_1 + x_3 - \kappa = 0,\end{cases}\\ \begin{cases} p_1^1(3|3)x_1 + p_2^3(2|3)x_2 + x_3 - \kappa = 0,\\ p_1^1(3|3)x_1 + p_1^3(2|3)x_3 + x_2 - \kappa = 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Отметим, что множество параметров $\mathscr{P}_{d+1}$ можно представить как объединение $(d+1)$-го множества параметров $\mathscr{P}_d^j$, $j = 1,\ldots,d+1$, и одного $(d+1)$-мерного вероятностного вектора $p^1(d+1|d+1)$. Система $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_{d+1}}(x_1,\ldots,x_{d+1})$ представляется как совокупность из $(d+1)$-й системы линейных уравнений

$$\mathscr{L}^{\kappa - p_j^1(d+1|d+1)x_j}_{\mathscr{P}_d^j}(x_1,\ldots\widehat{x}_j,\ldots,x_d).$$

Предложение 4. *Пусть $\kappa \ge 0$ и $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \ge \mathbf{0}$. Точка $\boldsymbol{\alpha}$ принадлежит $\ker P_d^\kappa$ тогда и только тогда, когда найдется набор параметров $\mathscr{P}_d$ таких, что $\boldsymbol{\alpha}$ является решением системы линейных уравнений $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \dots, x_d)$.*

Доказательство. Для $\kappa = 0$ утверждение очевидно. Для $\kappa > 0$ применим индукцию. Для $d = 1$ все очевидно. Для $d = 2$ решение системы из двух уравнений

$$p_2^1(2|2)\alpha_2 + \alpha_1 - \kappa = 0, \quad p_1^1(2|2)\alpha_1 + \alpha_2 - \kappa = 0$$

после умножения первого уравнения на α_1, второго на α_2 и сложения их вместе приводит к равенству $P_2^\kappa(\alpha_1, \alpha_2) = 0$. При этом ясно, что координаты α_1 и α_2 не зануляются одновременно. Обратно, имея равенство $P_2^\kappa(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, где координаты α_1 и α_2 не зануляются одновременно, из леммы 3 получим, что числа

$$p_2^1(2|2) = \frac{\kappa - \alpha_1}{\alpha_2}, \quad p_1^1(2|2) = \frac{\kappa - \alpha_2}{\alpha_1}$$

образуют вероятностный вектор. При этом $\boldsymbol{\alpha}$ — решение системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_2}(x_1, x_2)$.

Предположим, что утверждение верно для всех размерностей вплоть до $d-1$, и докажем его для d. Сначала будем считать, что $\boldsymbol{\alpha} \ge \mathbf{0}$ является решением системы $\mathscr{L}^\kappa_{\mathscr{P}_d}(x_1, \dots, x_d)$. Если $\alpha_j = \kappa$ для некоторого j, то все остальные координаты $\boldsymbol{\alpha}$ равны нулю и, следовательно, $\boldsymbol{\alpha}$ является нетривиальным нулем многочлена P_d^κ. Пусть теперь $0 \le \alpha_j < \kappa$ для всех j, тогда и $0 \le p_j^1(d|d)\alpha_j < \kappa$. При этом получаем d систем

$$\mathscr{L}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}_{\mathscr{P}^j_{d-1}}(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_d),$$

решением которых будет $\boldsymbol{\alpha}$. Поскольку эти системы уже размерности $d-1$, по предположению индукции получаем, что

$$(\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_d) \in \ker P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j},$$

т. е. имеем нетривиальное решение уравнений

$$P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}(\widehat{\alpha}_j) = 0, \quad j = 1, \dots, d.$$

По лемме 1 эти уравнения переписываются как

$$R_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) - (\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j)Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) = P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + p_j^1(d|d)\alpha_j Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) = 0.$$

Домножая эти равенства на $A_j^d(\boldsymbol{\alpha})$ и складывая их вместе, получим

$$\sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + \sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) p_j^1(d|d)\alpha_j Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j)$$
$$= \sum_{j=1}^d A_j^d(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + B_d(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{j=1}^d p_j^1(d|d) = P_d^\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = 0.$$

При этом $\boldsymbol{\alpha}$ является нетривиальным решением, поскольку иначе нашлись бы две координаты нулевые, а остальные могли принимать произвольные значения, но это противоречило бы нетривиальности $(\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_d)$ для многочленов меньшей размерности.

Пусть теперь $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$. Рассмотрим проекции $\boldsymbol{\alpha}$ на координатные гиперплоскости: $[\boldsymbol{\alpha}]_j = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \ldots, \alpha_d)$. По лемме 2 найдутся числа $\kappa_j \geq 0$ такие, что

$$[\boldsymbol{\alpha}]_j \in \ker P_{d-1}^{\kappa_j}, \quad j = 1, \ldots, d.$$

Из леммы 4 получим, что

$$0 = P_d^\kappa(\boldsymbol{\alpha}) = M_d^j(\boldsymbol{\alpha}) P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha}) = M_d^j\big(\boldsymbol{\alpha})(P_{d-1}^\kappa(\widehat{\alpha}_j) - P_{d-1}^{\kappa_j}([\boldsymbol{\alpha}]_j)\big) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha})$$
$$= M_d^j(\boldsymbol{\alpha})(\kappa_j - \kappa) Q_{d-1}(\widehat{\alpha}_j) + N_d^j(\boldsymbol{\alpha}).$$

Отсюда заключаем, что $\kappa_j \leq \kappa$. Поэтому найдутся числа $0 \leq p_j^1(d|d) \leq 1$ такие, что $\kappa_j = \kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j$ (мы знаем, что $0 \leq \alpha_j \leq \kappa$). Таким образом,

$$(\alpha_1, \ldots, \widehat{\alpha}_j, \ldots, \alpha_d) \in \ker P_{d-1}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}.$$

По предположению индукции найдутся d множеств параметров $\mathscr{P}_{d-1}^j$ таких, что $\boldsymbol{\alpha}$ является решением совокупности систем

$$\mathscr{L}_{\mathscr{P}_{d-1}^j}^{\kappa - p_j^1(d|d)\alpha_j}(x_1, \ldots, \widehat{x}_j, \ldots, x_d).$$

Это эквивалентно для $\boldsymbol{\alpha}$ быть решением одной системы $\mathscr{L}_{\mathscr{P}_d}^\kappa(x_1, \ldots, x_d)$ с параметрами

$$\mathscr{P}_d = \bigcup_{j=1}^d \mathscr{P}_{d-1}^j \cup \{p_j^1(d|d),\ j = 1, \ldots, d\}. \tag{16}$$

При этом вектор $p^1(d|d)$ с необходимостью вероятностный. $\square$

4.3. Основной результат. Для группы $\mathbb{R}^d$ и $f \in L_2(\Omega, \lambda)$ предполагается выполненной степенная оценка (4) спектральной меры симметричных промежутков. Рассмотрим «крестообразные» множества E_u^d, $u \in (0,1)$, определяемые как

$$E_u^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}| < 1/u,\ 1 \leq k \leq d,\ 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq d\}.$$

Для произвольной итерационной системы $\mathscr{L}_{\mathscr{P}_d}^\kappa(x_1, \ldots, x_d)$ линейных уравнений обозначим входящие в нее линейные функции без слагаемого $-\kappa$ через $\ell_{\mathscr{P}_d}^j(x)$, $j = 1, \ldots, d!$, занумерованные в произвольном порядке. Положим

$$\ell_{\mathscr{P}_d}^j(x) = \sum_{k=1}^d q_{d,k}^j x_k.$$

Ясно, что коэффициенты $q_{d,k}^j$ принадлежат множеству параметров $\mathscr{P}_d$.

Лемма 5. *Для произвольного множества параметров* $\mathscr{P}_d$

$$E_u^d \subset \bigcup_{j=1}^{d!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q_{d,1}^j}}, \ldots, \frac{1}{u^{q_{d,d}^j}}\right). \tag{17}$$

Доказательство. Применим индукцию по d. Случай $d = 1$ очевиден, а $d = 2$ фактически разобран при доказательстве теоремы 3. Предположим, что утверждение доказано для размерности $d - 1$, и докажем его для d. Представим множество параметров в виде (16).

Рассмотрим точку $\left(\frac{1}{u^{p_1^1(d|d)}}, \ldots, \frac{1}{u^{p_d^1(d|d)}}\right) \in \mathbb{R}^d$ и проведем через нее гиперплоскости, параллельные координатным гиперплоскостям. С помощью разрезов этими гиперплоскостями множества E_u^d можно увидеть, что

$$E_u^d \subset \bigcup_{n=1}^{d} E_u^{d-1}(n) \times \left(-\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}, \frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}\right], \tag{18}$$

где $E_u^{d-1}(n)$ есть $(d-1)$-мерное «крестообразное» множество, в котором нет переменной x_n, переменная x_n принадлежит $\left(-\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}, \frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}\right]$. По предположению индукции каждое множество $E_u^{d-1}(n)$ содержится в объединении $(d-1)!$ промежутков:

$$E_u^{d-1}(n) \subset \bigcup_{j=1}^{(d-1)!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q^j_{d-1,1}(n)}}, \ldots, \frac{1}{u^{q^j_{d-1,d-1}(n)}}\right), \tag{19}$$

где параметры $q^j_{d-1,k}(n) \in \mathscr{P}^n_{d-1}$ появляются в выражении функции

$$\ell^j_{\mathscr{P}^n_{d-1}}(\widehat{x}_n) = \sum_{k=1, k\neq n}^{d} q^j_{d-1,k}(n) x_k.$$

Соединив включения (18) и (19), получим

$$E_u^d \subset \bigcup_{n=1}^{d} \bigcup_{j=1}^{(d-1)!} \Pi\left(\frac{1}{u^{q^j_{d-1,1}(n)}}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{u^{p_n^1(d|d)}}}_{n\text{-я коорд.}}, \ldots, \frac{1}{u^{q^j_{d-1,d-1}(n)}}\right).$$

Остается заметить, что $\ell^j_{\mathscr{P}^n_{d-1}}(\widehat{x}_n) + p_n^1(d|d)x_n = \ell^{\widetilde{j}}_{\mathscr{P}_d}(x)$ для некоторого $1 \le \widetilde{j} \le d!$. $\square$

Для $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d_+$ положим $\phi_{\mathbf{t}}(x) = \left(\frac{t_1 x_1}{2}, \ldots, \frac{t_d x_d}{2}\right)$.

Лемма 6. *Пусть имеет место степенная оценка* (4) *спектральной меры* σ_f. *Тогда для произвольного множества параметров* $\mathscr{P}_d$

$$\sigma_f\left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d)\right) \le \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}}. \tag{20}$$

Доказательство. По лемме 5 имеем

$$\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d) \subset \bigcup_{j=1}^{d!} \phi_t^{-1}\left(\Pi\left(\frac{1}{u^{q^j_{d,1}}}, \ldots, \frac{1}{u^{q^j_{d,d}}}\right)\right) = \bigcup_{j=1}^{d!} \Pi\left(\frac{2}{t_1 u^{q^j_{d,1}}}, \ldots, \frac{2}{t_d u^{q^j_{d,d}}}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_f\left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}(E_u^d)\right) &\le \sum_{j=1}^{d!} \sigma_f\left(\Pi\left(\frac{2}{t_1 u^{q^j_{d,1}}}, \ldots, \frac{2}{t_d u^{q^j_{d,d}}}\right)\right) \\
&\le A \sum_{j=1}^{d!} \left(\frac{2}{t_1 u^{q^j_{d,1}}}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{2}{t_d u^{q^j_{d,d}}}\right)^{\alpha_d} \\
&= \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} u^{-(\alpha_1 q^j_{d,1} + \cdots + \alpha_d q^j_{d,d})} = \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}}. \quad \square
\end{aligned}$$

Сформулируем основной результат этого раздела, частным случаем которого является теорема 3.

Теорема 4. *Если имеет место степенная оценка* (4) *спектральной меры* σ_f, *то*

(1) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, $\kappa \in [0, 2)$, *то* $\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha_1} \cdots t_d^{-\alpha_d}\big)$, $t_1, \dots, t_d \to \infty$;
(2) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\alpha_1} \cdots t_d^{-\alpha_d} \ln\big(t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}\big)\big)$, $t_1, \dots, t_d \to \infty$;
(3) *если* $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, $\kappa > 2$, *то* $\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = \mathscr{O}\big(t_1^{-\frac{2\alpha_1}{\kappa}} \cdots t_d^{-\frac{2\alpha_d}{\kappa}}\big)$, $t_1, \dots, t_d \to \infty$.

Доказательство. Учитывая неравенство (20) в лемме 6, для любого $\varepsilon \in [0, 1)$ имеем

$$\|A_{\mathbf{t}} f\|_2^2 = 2 \int_0^1 u\sigma_f \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d : \left| \frac{2\sin\big(\frac{t_1 x_1}{2}\big)}{t_1 x_1} \cdots \frac{2\sin\big(\frac{t_d x_d}{2}\big)}{t_d x_d} \right| > u \right\} \right) du$$
$$\le 2 \int_0^\varepsilon u \|f\|_2^2 \, du + 2 \int_\varepsilon^1 u\sigma_f \left(\phi_{\mathbf{t}}^{-1}\big(E_u^d\big) \right) du$$
$$= \varepsilon^2 \|f\|_2^2 + 2 \int_\varepsilon^1 u \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \sum_{j=1}^{d!} \frac{1}{u^{\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha})}} \, du.$$

Поскольку $\boldsymbol{\alpha} \in \ker P_d^\kappa$, по предложению 4 для всех $j = 1, \dots, d!$ имеются равенства $\ell^j_{\mathscr{P}_d}(\boldsymbol{\alpha}) = \kappa$. Отсюда

$$\|A_t f\|_2^2 \le \varepsilon^2 \|f\|_2^2 + 2d! \frac{2^{\sigma_{d,1}(\boldsymbol{\alpha})} A}{t_1^{\alpha_1} \cdots t_d^{\alpha_d}} \int_\varepsilon^1 u^{1-\kappa} \, du.$$

Дальше применяем такие же рассуждения, как в теореме 3 для случая $d = 2$. □

4.4. Окрестности нуля в виде кубов. Для исследования степенной сходимости эргодических средних $A_{\mathbf{t}} f$ и $A_{\mathbf{n}} f$, построенных вдоль d-мерных кубов (т. е. $t_1 = \dots = t_d$ и $n_1 = \dots = n_d$), можно рассматривать степенную особенность спектральной меры только окрестностей нуля в виде d-мерных кубов. Предположим, что выполняется неравенство

$$\sigma_f((-\varepsilon, \varepsilon]^d) \le A\varepsilon^\alpha$$

для некоторых $A > 0$, $\alpha \ge 0$ при всех $\varepsilon > 0$. В этом случае степенная оценка эргодических средних с тем же показателем α получается только для $\alpha \in [0, 2)$. Покажем это снова на примере группы $\mathbb{R}^d$. Здесь воспользуемся наилучшим вложением множества $\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1} E_u^d$ в d-мерный куб:

$$\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1} E_u^d \subset \left(-\frac{2}{tu}, \frac{2}{tu} \right]^d, \quad t > 0, \ u \in (0, 1).$$

Тогда

$$\|A_{t\cdot\mathbf{1}} f\|_2^2 = 2 \int_0^1 u\sigma_f \left(\left\{ x \in \mathbb{R}^d : \left| \frac{2\sin\big(\frac{t x_1}{2}\big)}{t x_1} \cdots \frac{2\sin\big(\frac{t x_d}{2}\big)}{t x_d} \right| > u \right\} \right) du$$
$$\le 2 \int_0^1 u\sigma_f \left(\phi_{t\cdot\mathbf{1}}^{-1}\big(E_u^d\big) \right) du \le 2 \int_0^1 u\sigma_f \left(\left(-\frac{2}{tu}, \frac{2}{tu} \right]^d \right) du \le 2A \int_0^1 u \left(\frac{2}{tu} \right)^\alpha du$$

$$= \frac{2^{1+\alpha}A}{t^\alpha(2-\alpha)} = \mathscr{O}(t^{-\alpha}).$$

Если применить п. (1) теоремы 4 при $t_1 = \dots = t_d$ и $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_d = \alpha$, то также получим $\|A_{t\cdot\mathbf{1}}f\|_2^2 = \mathscr{O}(t^{-\alpha})$ при $t \to \infty$. Но при этом α может принимать значения из полуинтервала $[0, \alpha_0)$, где

$$\alpha_0 := \sup_{P_d^\kappa(\alpha_1,\dots,\alpha_d)=0,\kappa\in[0,2)} \alpha = \sup_{P_d^2(\alpha/d,\dots,\alpha/d)=0} \alpha > 2.$$

Таким образом, диапазон показателей степени особенности спектральной меры, для которых нами доказана такая же степенная скорость сходимости, показывает, что для получения оценок скорости сходимости для усреднений вдоль кубов тоже естественнее исследовать спектральную меру окрестностей нуля в виде параллелепипедов (а не кубов). С другой стороны, даже для параллелепипедов мы не получили оценки для всего возможного диапазона показателей степени скорости сходимости соответствующих эргодических средних. Например, интересны показатели, близкие к максимально возможной скорости (см. [18, 19]). Поэтому, возможно, при усреднении вдоль параллелепипедов нужно рассматривать спектральные меры более «хитрых» окрестностей нуля. Это тема для дальнейших исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dunford N.* An individual ergodic theorem for non-commutative transformations // Acta Sci. Math. (Szeged). 1951. V. 14. P. 1–4.

2. *Zygmund A.* An individual ergodic theorem for non-commutative transformations // Acta Sci. Math. (Szeged). 1951. V. 14. P. 103–110.

3. *Krengel U.* Ergodic theorems. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1985.

4. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Часть 1. Общая теория. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

5. *Karagulyan G. A., Lacey M. T., Martirosyan V. A.* On the convergence of multiple ergodic means // New York J. Math. 2022. V. 28. P. 1448–1462.

6. *Tempelman A.* Ergodic theorems for group actions. Informational and thermodynamical aspects. Dordrecht: Springer-Verl., 1992. (MAIA; V. 78).

7. *Nevo A.* Pointwise ergodic theorems for actions of groups // Handbook of dynamical systems. 2006. V. 1. Part B. P. 871–982.

8. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. Т. 1, 2. М.: Мир, 1975.

9. *Folland G. B.* A course in abstract harmonic analysis. Boca Raton: CRC Press, 1995.

10. *Качуровский А. Г.* Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, № 4. С. 73–124.

11. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В.* Оценки скоростей сходимости в эргодических теоремах фон Неймана и Биркгофа // Тр. Моск. мат. о-ва. 2016. Т. 77, № 1. С. 1–66.

12. *Богачев В. И.* Теория меры. М.; Ижевск: РХД, 2003. Т. 2.

13. *Богачев В. И.* Теория меры. М.-Ижевск: РХД, 2003. Т. 1.

14. *Качуровский А. Г.* О сходимости средних в эргодической теореме для групп $\mathbb{Z}^d$ // Зап. науч. сем. ПОМИ. 1999. Т. 256. С. 121–128.

15. *Tempelman A.* Randomized consistent statistical inference for random processes and fields // Stat. Inference Stoch. Process. 2022. V. 25. P. 599–627.

16. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Тодиков В. Э.* Uniform convergence on subspaces in von Neumann's ergodic theorem with continuous time // Сиб. электрон. мат. изв. 2023. Т. 20, № 1. С. 183–206.

17. *Качуровский А. Г., Подвигин И. В., Хакимбаев А. Ж.* Равномерная сходимость на подпространствах в эргодической теореме фон Неймана с дискретным временем // Мат. заметки. 2023. Т. 113, № 5. С. 713–730.

18. *Cohen G., Lin M.* Double coboundaries for commuting contractions // Pure Appl. Funct. Anal. 2017. V. 2, N 1. P. 11–36.

19. *Cohen G., Lin M.* Joint and double coboundaries of commuting contractions // Indiana Univ. Math. J. 2021. V. 70, N 4. P. 1355–1394.

Поступила в редакцию 28 июня 2023 г.
После доработки 28 июня 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Качуровский Александр Григорьевич (ORCID 0000-0002-2747-2660),
Подвигин Иван Викторович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
agk@math.nsc.ru, ipodvigin@math.nsc.ru

Тодиков Владислав Эдуардович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский технический государственный университет,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630073
v.todikov@g.nsu.ru

Хакимбаев Азиз Жамалатдин улы
Новосибирский государственный университет,
механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
a.khakimbaev@g.nsu.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.7

ДВЕ СЕРИИ КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2 НА ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов, С. А. Тихомиров

Аннотация. Построены две новые бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей полустабильных не локально свободных рефлексивных пучков ранга 2 на комплексном трехмерном проективном пространстве. В первой серии пучки имеют четный первый класс Черна, во второй – нечетный, при этом второй и третий классы Черна представимы как многочлены специального вида от трех целочисленных переменных. Доказана единственность компонент в этих сериях для классов Черна, представленных упомянутыми многочленами.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.110

Ключевые слова: полустабильный рефлексивный пучок, классы Черна, пространство модулей.

Введение

Построение новых серий компонент, состоящих из классов эквивалентности стабильных или полустабильных пучков, а также классов изоморфизма стабильных или полустабильных расслоений на $\mathbb{P}^3$, является одним из наиболее перспективных направлений в исследовании их пространств (схем) модулей. К настоящему времени построен и изучен ряд таких серий. При этом самостоятельный интерес представляет рассмотрение теоретико-числовых свойств таких серий и пучков (расслоений) в них. В частности, в [1] эти свойства изучены для компонент Эйна стабильных расслоений с $c_1 = 0$, в [2] получена формула для нахождения размерностей данных компонент для случаев $c_1 = 0$ и $c_1 = -1$. В [3] данные свойства изучены для расслоений, классы изоморфизма которых образуют компоненты Эйна, также получены точные формулы для нахождения спектров модифицированных инстантонных расслоений и для вычисления размерности пространства модулей данных расслоений. В [4] приведены формулы для нахождения точного числа двух типов компонент Ведерникова стабильных расслоений с $c_1 = 0$ (как частных случаев компонент Эйна) и найден критерий существования этих компонент для произвольного второго класса Черна. В [5, 6] построены бесконечные серии неприводимых компонент стабильных расслоений ранга 2 со вторым классом Черна, зависящим квадратично от одного

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2023-936).

и соответственно двух целочисленных параметров. Кроме того, в [7] построена бесконечная серия гладких неприводимых компонент пространства модулей симплектических векторных расслоений произвольного четного ранга $2r$ ($r \geq 1$) и как частный случай получена бесконечная серия неприводимых компонент пространства модулей стабильных расслоений ранга 2 на $\mathbb{P}^3$. Формулы для вычисления второго класса Черна расслоений этой серии представляют собой сложные полиномиальные выражения от растущего числа целочисленных параметров.

Отдельный интерес в этом направлении представляют работа М. Жардима, Д. Маркушевича и А. С. Тихомирова [8] и работа Ч. Алмейды, М. Жардима и А. С. Тихомирова [9], в которых, в частности, найдены новые бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей $M(e;n,m)$ полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = e \in \{-1, 0\}$, $c_2 = n$ и $c_3 = m$ на $\mathbb{P}^3$, общие точки[1)] которых являются не локально свободными рефлексивными пучками. При этом n и m являются многочленами соответственно второй и третьей степени от трех целочисленных параметров a, b и c. В работе [10] доказана рациональность неприводимых компонент пространства модулей стабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, принадлежащих построенной там же бесконечной подсерии серии неприводимых компонент, описанных в [8]. В [11] для случаев $e = 0$, $n \leq 3$, в статье [9] для случаев $e = -1$, $n \leq 2$, в [12] для пучков с максимальными значениями класса m и в [13] для случаев $e = 0$ и $e = -1$, где n и m являются многочленами соответственно второй и третьей степени от трех целочисленных параметров, исследованы примеры пространств модулей $M(e;n,m)$, где имеется не более одной неприводимой компоненты, общая точка которой соответствует рефлексивному пучку. В настоящей статье мы строим две новые бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей $M(e;n,m)$ (см. теорему 5) и доказываем (см. теорему 6) единственность компонент модулей рефлексивных пучков с классами Черна e, n и m в данных сериях.

Работа организована следующим образом.

В § 1 доказываются предварительные результаты, касающиеся числа целочисленных решений систем уравнений специального вида (теоремы 1–4). В § 2 приводятся основные результаты, а именно, в теореме 5 строятся две новые бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей $M(e;n,m)$, а в теореме 6 доказывается единственность компонент модулей рефлексивных пучков с соответствующими значениями классов Черна в данных сериях.

§ 1. Предварительные результаты

Обозначим через $\mathscr{R}(e;n,m)$ открытое подмножество $M(e;n,m)$, состоящее из стабильных рефлексивных пучков.

Для произвольного набора $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4_{\geq 0}$, удовлетворяющего условию

$$a + b + 2 = c + d, \tag{1}$$

рассмотрим семейство рефлексивных пучков F ранга 2, получаемых как коядро отображений α, локус вырождения которого

$$\delta(\alpha) = \{x \in \mathbb{P}^3 : \alpha(x) \text{ не инъективно}\}$$

0-мерный:

$$0 \to a \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus b \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \xrightarrow{\alpha} c \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus d \cdot \mathscr{O}_{\mathbb{P}^3} \to F(k) \to 0. \tag{2}$$

[1)] Здесь и далее под общей точкой неприводимой компоненты понимается замкнутая точка, принадлежащая некоторому плотному открытому подмножеству этой компоненты.

Равенство (1) позволяет выразить один из четырех параметров через остальные три, а именно:

$$d = a + b + 2 - c. \tag{3}$$

Далее все выражения будут зависеть только от a, b, c. Требование корректности (2) налагает следующие условия на тройку $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$: $(a, b) \neq (0, 0)$ и $c \leq a + b + 2$.

Элементарные вычисления с учетом (3) показывают, что

$$c_1(F) = e \in \{-1, 0\}, \quad c_2(F) = n_e(a, b, c), \quad c_3(F) = m(a, b, c), \tag{4}$$

где при $e = 0$ классы Черна $c_2(F)$ и $c_3(F)$ даются формулами (5) и (6) ниже, а при $e = -1$ — формулами (16) и (6) ниже.

Случай первого класса Черна $c_1(F) = 0$. Для $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0}$ положим

$$n_0(a, b, c) = \frac{(3a + 2b - c)^2}{4} + \frac{9a + 4b - c}{2}, \tag{5}$$

$$m(a, b, c) = \frac{(3a + 2b - c)^3}{6} + \frac{(3a + 2b - c)(9a + 4b - c)}{2} + \frac{27a + 8b - c}{3}. \tag{6}$$

Пусть также $S_0 = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} : a = c \bmod 2\}$. Ниже изучаются свойства отображения

$$(a, b, c) \mapsto (n_0(a, b, c), m(a, b, c)),$$

рассматриваемого на множестве S_0. Положим

$$k = \frac{3a + 2b - c}{2}, \quad l = \frac{9a + 4b - c}{2}. \tag{7}$$

Ясно, что если $(a, b, c) \in S_0$, то k и l — целые числа. Более того, имеем

$$n_0(a, b, c) = k^2 + l, \quad m(a, b, c) = \frac{4}{3}k^3 + 2kl - \frac{4}{3}k + 2l + 2a. \tag{8}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$n_0(a, b, c) = n, \quad m(a, b, c) = m, \tag{9}$$

где n и m — фиксированные целые числа, а $(a, b, c) \in S_0$. Число m можно считать четным, так как иначе система уравнений (9) будет очевидно неразрешимой на множестве S_0. Из равенств (7) и (8) нетрудно вывести, что все решения системы уравнений (9) на множестве S_0 даются формулой

$$(a, b, c) = (f_0(k), g_0(k), h_0(k)),$$

где выражения $f_0(k)$, $g_0(k)$, $h_0(k)$ имеют вид

$$\begin{aligned} f_0(k) &= \frac{1}{3}k^3 + k^2 + \left(\frac{2}{3} - n\right)k - n + \frac{1}{2}m, \\ g_0(k) &= -k^3 - 4k^2 + (3n - 3)k + 4n - \frac{3}{2}m, \\ h_0(k) &= -k^3 - 5k^2 + (3n - 6)k + 5n - \frac{3}{2}m, \end{aligned} \tag{10}$$

а целочисленный параметр k удовлетворяет системе неравенств

$$f_0(k) \geq 0, \quad g_0(k) \geq 0, \quad h_0(k) \geq 0. \tag{11}$$

Теорема 1. *Система уравнений (9) имеет не более двух решений $(a,b,c) \in S_0$, причем два решения будут тогда и только тогда, когда*

$$n = t^2 + 4t + 3, \quad m = \frac{4}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{44}{3}t + 8, \tag{12}$$

где $t \geq -1$ — целое число, и в этом случае $(a,b,c) \in \{(t+1,0,t+3),(0,t+1,0)\}$.

Доказательство. Пусть система неравенств (11) имеет решения $k = t$ и $k = t + s$, где t и s — некоторые целые числа, $s \geq 1$. Покажем, что $s = 1$.

Действительно, имеем $3f_0(t+s) + g_0(t) \geq 0$, $3f_0(t+s) + h_0(t+s) \geq 0$. Решив каждое из этих неравенств относительно n, получим двойное неравенство

$$t^2 + 2(s+1)t + s^2 + 2s \leq n \leq t^2 + \frac{3s^2+6s-1}{3s-1}t + \frac{s^3+3s^2+2s}{3s-1},$$

в котором разность между правой и левой частями равна $-\frac{(s-1)((3s+1)t+2s^2+4s)}{3s-1}$. Предположим теперь, что $s \geq 2$. Тогда $(3s+1)t + 2s^2 + 4s \leq 0$, откуда

$$t \leq -\frac{2s^2+4s}{3s+1}. \tag{13}$$

Кроме того, $3f_0(t) + g_0(t+s) \geq 0$, $3f_0(t+s) + h_0(t) \geq 0$, что дает еще одно двойное неравенство

$$t^2 + \frac{3s^2+8s+1}{3s+1}t + \frac{s^3+4s^2+3s}{3s+1} \leq n \leq t^2 + \frac{3s^2+6s-4}{3s-2}t + \frac{s^3+3s^2+2s}{3s-2}.$$

Здесь разность между правой и левой частями равна $\frac{(3s^2+7s-2)t+8s^2+8s}{(3s+1)(3s-2)}$. Значит, $(3s^2+7s-2)t + 8s^2 + 8s \geq 0$, откуда

$$t \geq -\frac{8s^2+8s}{3s^2+7s-2}. \tag{14}$$

Однако неравенства (13) и (14) несовместны при любом $s \geq 2$, так как

$$-\frac{2s^2+4s}{3s+1} + \frac{8s^2+8s}{3s^2+7s-2} = -\frac{2s(3s^3+s^2-4s-8)}{(3s+1)(3s^2+7s-2)} < 0.$$

Итак, $s = 1$ и система неравенств (11) имеет в точности два решения $k = t$ и $k = t + 1$. Но тогда имеет место первое из равенств (12). Далее, из неравенств $f_0(t+1) \geq 0$, $g_0(t) \geq 0$ следует двойное неравенство

$$\frac{4}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{44}{3}t + 8 \leq m \leq \frac{4}{3}t^3 + 8t^2 + \frac{44}{3}t + 8,$$

откуда получим второе из равенств (12). Наконец, подставив в равенства (10) $k = t$, найдем $(a,b,c) = (t+1,0,t+3)$, а при $k = t+1$ будем иметь $(a,b,c) = (0,t+1,0)$. Условие $t \geq -1$ необходимо и достаточно, чтобы оба решения оказались в множестве S_0. $\square$

Заметим, что при любых n и m система неравенств (11) имеет ограниченное множество решений в вещественных числах k, которое можно найти методом интервалов (при этом концы интервалов, составляющих множество решений, суть корни кубических многочленов (10), которые находятся по явным формулам).

Пример. (а) Пусть $(n,m)=(4,6)$. Тогда $k\in[-0.629,-0.279]$ и решений в целых числах нет.

(б) Если $(n,m)=(7,26)$, то $k\in[0.766,1.405]$, откуда $k=1$ и $(a,b,c)=(1,2,5)$.

(в) Пусть $(n,m)=(8,32)$. Эта пара значений n и m имеет вид (12) ($t=1$) и соответствующие (a,b,c) описаны в теореме 1.

Для нас представляет особый интерес решение системы уравнений (9) на множестве

$$S_0^*=\{(a,b,c)\in S_0:(a,b)\neq(0,0),\ c\leq a+b+2\}\subset S_0$$

в случае произвольных натуральных n и m. Здесь можно обойтись без решения системы неравенств (11) и получить явную формулу для решения (9).

Можно исключить из рассмотрения все пары (n,m), получаемые по формулам (12) при $t\geq0$ (для каждой из них возможные решения (a,b,c) приведены в теореме 1 и они все лежат в S_0^*), а также считать число m четным. В частности, далее можно считать, что число $n+1$ не является точным квадратом. Это позволяет однозначно представить число n в виде $n=K^2+L$, где целые числа K, L таковы, что $K\geq0$ и $2K\leq L\leq4K+3$. Действительно, имеем $(K+1)^2<n+1<(K+2)^2$, откуда $K=[\sqrt{n+1}]-1$, а значит, $L=n-([\sqrt{n+1}]-1)^2$. Определим отрезок $I(n)$ формулой

$$I(n)=[\max\{0,-3K+L-2\},\min\{(1/3)(L-K),(2/3)(L-2K)\}].$$

Заметим, что этот отрезок всегда содержит целые числа. В самом деле, это может быть неверно только в случае, когда $B<A$, где

$$A=\max\{0,-3K+L-2\},\quad B=\min\{(1/3)(L-K),(2/3)(L-2K)\}.$$

Поскольку $L\geq2K$, имеем $B\geq0$. Поэтому из $B<A$ вытекает, что $A=-3K+L-2>0$, а значит, $L>3K+2$. Но в таком случае $\frac13(L-K)<\frac23(L-2K)$, т. е. $B=\frac13(L-K)$. Однако неравенство $\frac13(L-K)<-3K+L-2$ равносильно неравенству $L>4K+3$, что невозможно.

Замечание. Можно показать, что длина отрезка $I(n)$ не превосходит $\frac23(K+1)\sim\frac23\sqrt{n}$ и достигает этой верхней границы при $n=K^2+3K+2$.

Следующая теорема дает критерий разрешимости системы уравнений (9) на множестве S_0^*, а также явную формулу для (единственного по теореме 1) решения (9).

Теорема 2. *Система уравнений* (9) *разрешима на множестве* S_0^* *тогда и только тогда, когда* $M\in I(n)$, *где*

$$M=-\frac{2}{3}K^3-KL+\frac{2}{3}K-L+\frac{1}{2}m.$$

При выполнении этого условия единственным решением (9) *на* S_0^* *является*

$$(a,b,c)=(M,-3M-K+L,-3M-4K+2L).\tag{15}$$

Доказательство. Заметим, что если $(a,b,c)\in S_0^*$, то переменные (7) удовлетворяют ограничениям $k\geq0$ и $l\geq1$. Более того, справедливы неравенства $2k\leq l\leq4k+3$. Действительно, левое неравенство равносильно неравенству $3a+c\geq0$, а правое — неравенству $c\leq a+\frac43b+2$, которое вытекает из неравенства $c\leq a+b+2$.

Из сказанного выше следует, что любое решение $(a,b,c) \in S_0^*$ первого из уравнений (9) должно удовлетворять системе уравнений

$$\frac{3a+2b-c}{2} = K, \quad \frac{9a+4b-c}{2} = L,$$

откуда находим $b = -3a - K + L$, $c = -3a - 4K + 2L$. Если $a = b = 0$, то $L = K$ и, значит, $K \geq 2K$, откуда $K = 0 = L$, что невозможно. Поэтому условие $(a,b) \neq (0,0)$ выполняется автоматически. Это же верно и относительно условия $a \equiv c \pmod 2$. В то же время неравенства $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ и $c \leq a + b + 2$ имеют место тогда и только тогда, когда $a \in I(n)$. Таким образом,

$$(a,b,c) = (a, -3a - K + L, -3a - 4K + 2L),$$

где a — одно из целых чисел отрезка $I(n)$. Осталось решить уравнение

$$m(a, -3a - K + L, -3a - 4K + 2L) = m$$

относительно a на отрезке $I(n)$. Это уравнение имеет вид

$$\frac{4}{3}K^3 + 2KL - \frac{4}{3}K + 2L + 2a = m,$$

откуда находим $a = M$. Итак, система уравнений (9) либо неразрешима на множестве S_0^*, либо имеет единственное решение (15) при выполнении условия $M \in I(n)$. $\square$

Пример. (а) Пусть $(n,m) = (6,24)$. Тогда $K = 1$, $L = 5$, $I(n) = [0, \frac{4}{3}]$, $M = 2$. Поскольку $2 \notin [0, \frac{4}{3}]$, система (9) неразрешима на множестве S_0^*.

(б) Если $(n,m) = (13,66)$, то $K = 2$, $L = 9$, $I(n) = [1, \frac{7}{3}]$, $M = 2$. Здесь $2 \in [1, \frac{7}{3}]$, поэтому единственное решение системы (9) на множестве S_0^* есть $(a,b,c) = (2,1,4)$.

Замечание. При любом фиксированном натуральном n все натуральные значения m, для которых система (9) разрешима на множестве S_0^*, даются выражением $\frac{4}{3}K^3 + 2KL - \frac{4}{3}K + 2L + 2a$, где a пробегает все целые числа из отрезка $I(n)$.

Случай первого класса Черна $c_1(F) = -1$. Здесь имеют место аналогичные результаты, которые далее изложим, не останавливаясь подробно на технических деталях. Положим

$$n_{-1}(a,b,c) = \frac{(3a+2b-c+1)^2}{4} + 3a + b \tag{16}$$

и будем рассматривать отображение $(a,b,c) \mapsto (n_{-1}(a,b,c), m(a,b,c))$ на множестве $S_{-1} = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3_{\geq 0} : a \neq c \bmod 2\}$. Пусть также $k = \frac{3a+2b-c+1}{2}$, $l = 3a + b$. Если $(a,b,c) \in S_{-1}$, то k и l — целые числа. Более того, $n_{-1}(a,b,c) = k^2 + l$, $m(a,b,c) = \frac{4}{3}k^3 + 2kl - \frac{1}{3}k + l + 2a$.

Рассмотрим систему уравнений

$$n_{-1}(a,b,c) = n, \quad m(a,b,c) = m \tag{17}$$

на множестве S_{-1}. Здесь можно считать, что целые числа n и m имеют одинаковую четность. Все решения системы уравнений (17) на множестве S_{-1} даются формулой $(a,b,c) = (f_{-1}(k), g_{-1}(k), h_{-1}(k))$, где выражения $f_{-1}(k)$, $g_{-1}(k)$, $h_{-1}(k)$ имеют вид

$$f_{-1}(k) = \frac{1}{3}k^3 + \frac{1}{2}k^2 + \left(\frac{1}{6} - n\right)k - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m,$$

$$g_{-1}(k) = -k^3 - \frac{5}{2}k^2 + (3n - \frac{1}{2})k + \frac{5}{2}n - \frac{3}{2}m,$$
$$h_{-1}(k) = -k^3 - \frac{7}{2}k^2 + (3n - \frac{5}{2})k + \frac{7}{2}n - \frac{3}{2}m + 1,$$

а целочисленный параметр k удовлетворяет системе неравенств

$$f_{-1}(k) \geq 0, \quad g_{-1}(k) \geq 0, \quad h_{-1}(k) \geq 0. \tag{18}$$

Теорема 3. *Система уравнений* (17) *имеет не более одного решения* $(a, b, c) \in S_{-1}$.

Доказательство. Предположим, что система неравенств (18) имеет решения $k = t$ и $k = t + s$, где t и s — некоторые целые числа, $s \geq 1$. Тогда $s = 1$.

Действительно, $3f_{-1}(t+s) + g_{-1}(t) \geq 0$, $3f_{-1}(t+s) + h_{-1}(t+s) \geq 0$. Отсюда следует двойное неравенство

$$t^2 + (2s+1)t + s^2 + s - \frac{1}{2} \leq n \leq t^2 + \frac{3s^2 + 3s}{3s - 1}\,t + \frac{s^3 + \frac{3}{2}s^2 + \frac{1}{2}s}{3s - 1},$$

в котором разность между правой и левой частями равна $-\frac{(s-1)((3s+1)t + 2s^2 + \frac{5}{2}s - \frac{1}{2})}{3s-1}$. Далее, тем же способом (см. доказательство теоремы 1) можно показать, что случай $s \geq 2$ невозможен. Но при $s = 1$ получим $n = t^2 + 3t + \frac{3}{2}$, что также невозможно, поскольку n является целым числом. $\square$

Как и выше, нас прежде всего будет интересовать решение системы уравнений (17) на множестве

$$S^*_{-1} = \{(a, b, c) \in S_{-1} : (a, b) \neq (0, 0),\ c \leq a + b + 2\} \subset S_{-1}$$

в случае произвольных натуральных n и m. Здесь также можно указать явную формулу для (единственного по теореме 3) решения (17).

Предварительно представим n в виде $n = K^2 + L$, где K, L — такие целые числа, что $K \geq 0$ и $K \leq L < 3K + 2$. Имеем $(2K+1)^2 \leq 4n + 1 < (2K+3)^2$, откуда находим $K = \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right]$ и $L = n - \left[\frac{1}{2}(\sqrt{4n+1} - 1)\right]^2$. Определим отрезок $J(n)$ формулой

$$J(n) = [\max\{0, -2K + L - 1\}, \min\{(1/3)L, (1/3)(2L - 2K + 1)\}].$$

Этот отрезок всегда содержит целые числа, а его длина не больше $\frac{1}{3}(2K+1) \sim \frac{2}{3}\sqrt{n}$ и достигает этой верхней границы при $n = K^2 + 2K + 1$.

Теорема 4. *Система уравнений* (17) *разрешима на множестве* S^*_{-1} *тогда и только тогда, когда* $M \in J(n)$, *где* $M = -\frac{2}{3}K^3 - KL + \frac{1}{6}K - \frac{1}{2}L + \frac{1}{2}m$. *При выполнении этого условия единственным решением* (17) *на* S^*_{-1} *является*

$$(a, b, c) = (M, -3M + L, -3M - 2K + 2L + 1). \tag{19}$$

Доказательство. Если $(a, b, c) \in S^*_{-1}$, то $k \geq 0$, $l \geq 1$, $k \leq l < 3k + 2$. Таким образом, любое решение $(a, b, c) \in S^*_{-1}$ первого из уравнений (17) должно удовлетворять системе уравнений

$$\frac{3a + 2b - c + 1}{2} = K, \quad 3a + b = L,$$

откуда находим $b = -3a + L$, $c = -3a - 2K + 2L + 1$. Далее, можно показать, что $(a, b, c) = (a, -3a + L, -3a - 2K + 2L + 1)$, где a — целое число из отрезка $J(n)$.

Осталось решить уравнение $m(a,-3a+L,-3a-2K+2L+1)=m$ относительно a на отрезке $J(n)$. После упрощения получим $\frac{4}{3}K^3+2KL-\frac{1}{3}K+L+2a=m$, откуда $a=M$. В итоге система (17) либо неразрешима, либо имеет единственное решение (19) при выполнении условия $M\in J(n)$. $\square$

Замечание. При любом фиксированном натуральном n все натуральные значения m, для которых система (17) разрешима на множестве S^*_{-1}, даются выражением $\frac{4}{3}K^3+2KL-\frac{1}{3}K+L+2a$, где a пробегает все целые числа из отрезка $J(n)$.

§ 2. Новые серии компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков

Построим и исследуем две новые серии неприводимых компонент пространства $M(e;n,m)$, общая точка которых является стабильным рефлексивным не локально свободным пучком (одна серия для $c_1=0$, а вторая — для $c_1=-1$).

Обозначим $G_{(a,b)}=a\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\oplus b\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)$, $E_{(c,d)}=c\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\oplus d\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}$.

Теорема 5. (i) *В случае $c_1(F)=0$ семейство из* (2) *составляет гладкую в общей точке неприводимую компоненту $\mathscr{S}(a,b,c,d)$ в $\mathscr{R}(c_1,c_2,c_3)$ ожидаемой размерности $8c_2(F)-3$ при $k:=(3a+2b-c)/2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а вторые и третьи классы Черна $c_2(F)=n_0(a,b,c)$ и $c_3(F)=m(a,b,c)$ пучков F задаются формулами* (5) *и* (6) *соответственно.*

(ii) *В случае $c_1(F)=-1$ семейство из* (2) *составляет гладкую в общей точке неприводимую компоненту $\mathscr{S}(a,b,c,d)$ в $\mathscr{R}(c_1,c_2,c_3)$ ожидаемой размерности $8c_2(F)-5$ при $k:=(3a+2b-c+1)/2\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$, а вторые и третьи классы Черна $c_2(F)=n_{-1}(a,b,c)$ и $c_3(F)=m(a,b,c)$ пучков F задаются формулами* (16) *и* (6) *соответственно.*

Точнее говоря, $\widetilde{\mathscr{S}}(a,b,c,d)$ является открытым подмножеством множества $\mathrm{Hom}(G_{(a,b)},E_{(c,d)})$, состоящим из мономорфизмов с 0-мерными локусами вырождения; тогда

$$\mathscr{S}(a,b,c,d)=\widetilde{\mathscr{S}}(a,b,c,d)/((\mathrm{Aut}(G_{(a,b)})\times\mathrm{Aut}(E_{(c,d)}))/\mathbb{C}^*).$$

Доказательство. Пусть набор $(a,b,c,d)\in\mathbb{Z}^4_{\geq 0}$ таков, что выполнено равенство (1). Рассмотрим морфизмы $\alpha: G_{(a,b)}\to E_{(c,d)}$. Если локус вырождения $\delta(\alpha)$ нульмерен, то коядро α есть рефлексивный пучок ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, который нормализуем для включения в короткую точную последовательность (2).

(i) Рассмотрим случай $e=c_1(F)=0$. Размерность семейства рефлексивных пучков ранга 2, построенных в короткой точной последовательности (2), находится по формуле

$$\dim\mathscr{S}(a,b,c,d)=\dim\mathrm{Hom}(G_{(a,b)},E_{(c,d)})-\dim\mathrm{Aut}(G_{(a,b)})-\dim\mathrm{Aut}(E_{(c,d)})+1.$$

Имеем

$$\dim\mathrm{Hom}(G_{(a,b)},E_{(c,d)})=10ac+20ad+4bc+10bd,$$

$$\dim\mathrm{Aut}(G_{(a,b)})=a^2+4ab+b^2,\quad \dim\mathrm{Aut}(E_{(c,d)})=c^2+4cd+d^2.$$

Отсюда после подстановки $d=a+b+2-c$ (см. равенство (1)) получаем

$$\dim\mathscr{S}(a,b,c,d)=18a^2+8b^2+2c^2+24ab-8bc-12ac+36a+16b-4c-3.$$

С другой стороны, с учетом равенств (4) и (5) имеем

$$
\begin{aligned}
8c_2(F)-3 &= 8\left(\frac{(3a+2b-c)^2}{4}+\frac{9a+4b-c}{2}\right)-3\\
&= 18a^2+8b^2+2c^2+24ab-8bc-12ac+36a+16b-4c-3.
\end{aligned}
$$

Теперь видно, что размерность нашего семейства в точности равна $8c_2(F)-3$. Далее, заметим, что для каждого F, задаваемого (2), имеет место равенство $\mathrm{H}^0(F(-1))=0$ и тем самым F всегда стабилен. Следовательно, для получения равенства $\dim \mathrm{Ext}^1(F,F)=8c_2(F)-3$ необходимо проверить только, что $\dim \mathrm{Ext}^2(F,F)=0$ (отсюда аналогично [8] будет следовать по теории деформаций, что данное семейство является открытым подмножеством компоненты). В самом деле, применяя функтор $\mathrm{Hom}(\cdot,F(k))$ к последовательности (2), получаем

$$
\mathrm{Ext}^1(G_{(a,b)},F(k))\to \mathrm{Ext}^2(F,F)\to \mathrm{Ext}^2(E_{(c,d)},F(k)).
$$

Группа слева зануляется, поскольку $\mathrm{H}^1(F(t))=0$ для каждого $t\in\mathbb{Z}$, в то время как группа справа зануляется, поскольку $\mathrm{H}^2(F(k))=\mathrm{H}^2(F(k+1))=0$ (все эти равенства вытекают из (2)). В итоге семейство пучков из (2) дает гладкую в общей точке неприводимую компоненту ожидаемой размерности в пространстве модулей стабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ с соответствующими классами Черна.

(ii) В случае $e=c_1(F)=-1$ рассуждения и вычисления проводятся аналогично случаю (i), но с учетом равенств (4) и (16). $\square$

Теорема 6. *Для каждой пары целых чисел $n\geq 1$, $m\geq 0$ и значений $e\in\{-1,0\}$ в построенных в предыдущей теореме сериях имеется не более одной компоненты пространства модулей $M(e;n,m)$.*

Доказательство. Этот результат является прямым следствием теорем 1 и 3, необходимо только отдельно рассмотреть указанные в теореме 1 случаи двух решений $(a,b,c)\in\{(t+1,0,t+3),(0,t+1,0)\}$ системы (9).

В случае решения $(a,b,c)=(t+1,0,t+3)$ имеем $k=\frac{3a+2b-c}{2}=t$, $d=a+b+2-c=0$. Тем самым последовательность (2) принимает вид

$$
0\to (t+1)\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)\xrightarrow{\alpha}(t+3)\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)\to F(t)\to 0.
$$

В случае решения $(a,b,c)=(0,t+1,0)$ получаем $k=\frac{3a+2b-c}{2}=t+1$, $d=a+b+2-c=t+3$. Тогда последовательность (2) будет такой:

$$
0\to (t+1)\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)\xrightarrow{\alpha}(t+3)\cdot\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}\to F(t+1)\to 0.
$$

В итоге во втором случае получаем ту же самую последовательность, что и в первом (с точностью до подкрутки на $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$), а значит, и те же самые семейства пучков. $\square$

Замечание. Нетрудно видеть, что построенные две новые бесконечные серии неприводимых компонент пространства модулей полустабильных не локально свободных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ имеют пересечения с аналогичными сериями, построенными в работах [8, 9]. А именно, при $c=0$ конструкции пучков из новых серий совпадают с конструкциями пучков из серий, построенных ранее, тем самым совпадают и соответствующие компоненты.

Благодарность. Авторы признательны рецензенту за ценные советы и замечания, позволившие существенно улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.* Нахождение компонент Эйна в пространствах модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 410–419.
2. *Kytmanov A. A., Tikhomirov A. S., Tikhomirov S. A.* Series of rational moduli components of stable rank two vector bundles on P3 // Selecta Mathematica. New Ser. 2019. V. 25, N 2. P. 29.
3. *Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А., Зыкова Т. В.* О числовых характеристиках некоторых расслоений и их пространства модулей на P3 // Сиб. электрон. мат. изв. 2022. Т. 19, № 2. С. 415–425.
4. *Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.* О числе неприводимых компонент Ведерникова — Эйна пространства модулей стабильных 2-расслоений на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 136–142.
5. *Алмейда Ч., Жардим М., Тихомиров А. С., Тихомиров С. А.* Новые компоненты пространства модулей расслоений ранга 2 на проективном пространстве // Мат. сб. 2021. Т. 212. С. 3–54.
6. *Тихомиров А. С., Тихомиров С. А., Васильев Д. А.* Построение стабильных расслоений ранга 2 на P3 посредством симплектических расслоений // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 441–460.
7. *Tikhomirov A., Vassiliev D.* Construction of symplectic vector bundles on projective space P3 // J. Geom. Phys. 2020. V. 158. 103949.
8. *Jardim M., Markushevich D., Tikhomirov A. S.* Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on P3 // Ann. Mat. Pura Appl. 2017. V. 196, N 4. P. 1573–1608.
9. *Almeida C., Jardim M., Tikhomirov A. S.* Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on projective space // Adv. Math. 2022. V. 402. 108363.
10. *Васильев Д. А.* Бесконечная серия рациональных компонент пространства модулей пучков ранга 3 на пространстве P3 // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 465–485.
11. *Chang M.-C.* Stable rank 2 bundles on $P3$ with $c1 = 0$, $c2 = 4$ and $a = 1$ // Math. Z. 1983. V. 184. P. 407–415.
12. *Hartshorne R.* Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
13. *Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.* О числе неприводимых компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на проективном пространстве // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 123–132.

Поступила в редакцию 1 августа 2023 г.
После доработки 26 ноября 2023
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Кытманов Алексей Александрович (ORCID 0000-0003-3325-099X)
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454;
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
aakytm@gmail.com

Осипов Николай Николаевич (ORCID 0000-0002-8894-609X)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nnosipov@gmail.com

Тихомиров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-7409-8464)
Ярославский государственный педагогический
университет им. К. Д. Ушинского,
ул. Республиканская, 108, Ярославль 150000
satikhomirov@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 515.145.2+515.148

РАССЛОЕНИЯ БИРМАН — ХИЛЬДЕНА. I

А. В. Малютин

Аннотация. Расслоенное топологическое пространство называется пространством Бирман — Хильдена, если в каждой паре послойных (переводящих каждый слой в некоторый слой) изотопных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны. В работе представлена серия достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена для пространств, расслоенных над окружностью.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.111

Ключевые слова: расслоение, расслоенное пространство, локально тривиальное расслоение, послойный автогомеоморфизм, группа классов отображений, изотопия, гомотопия, гомотопическая эквивалентность, многообразие.

§ 1. Введение

В работе развивается теория расслоений Бирман — Хильдена. Расслоенное топологическое пространство называется *пространством Бирман — Хильдена*, если в каждой паре изотопных послойных автогомеоморфизмов этого пространства автогомеоморфизмы еще и послойно изотопны (здесь и далее в работе под *послойными* отображениями понимаются отображения, переводящие каждый слой в некоторый — не обязательно исходный — слой, а под *изотопиями* автогомеоморфизмов понимаются изотопии в классе автогомеоморфизмов, а не в классе вложений).

Расслоениями Бирман — Хильдена называются расслоения, тотальные пространства которых являются пространствами Бирман — Хильдена. Если расслоенное пространство (расслоение) является пространством (расслоением) Бирман — Хильдена, говорят также, что оно *обладает свойством* Бирман — Хильдена или *относится к классу* Бирман — Хильдена.

Вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена естественно рассматривать в контексте семейства задач о расположении подпространств отображений, сохраняющих ту или иную структуру или обладающих теми или иными дополнительными свойствами, в пространствах отображений более общего вида того или иного объекта (ср. с гипотезой Смейла) и интерпретировать как вопрос об инъективности на уровне π_0 тождественного вложения пространства подгруппы послойных автогомеоморфизмов расслоенного пространства в группу всех его автогомеоморфизмов или, эквивалентно, как вопрос о линейной связности подгруппы, образованной изотопными тождественному отображению послойными автогомеоморфизмами.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00299, https://rscf.ru/project/22-11-00299/.

В работах [1–16] вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена изучался для случая разветвленных накрытий поверхностей (обзор и дополнительные ссылки на литературу по этой тематике имеются в [14]). В [17, 18] этот вопрос исследовался для случая слоений Зейферта, а также для случая накрытий трехмерных многообразий. В теории узлов и трехмерных многообразий возникает вопрос о принадлежности к классу Бирман — Хильдена для расслоенных над окружностью трехмерных многообразий. В настоящей работе доказывается серия теорем о достаточных условиях принадлежности к классу Бирман — Хильдена для локально тривиальных расслоений над окружностью. Содержащиеся в литературе сведения о пространствах отображений многообразий обеспечивают применимость представленных здесь достаточных условий к обширным семействам расслоенных многообразий. В частности, из результатов настоящей работы выводится, что при $n \in \{1, 2, 3\}$ все связные компактные локально тривиально расслоенные над окружностью n-мерные многообразия (включая неориентируемые и с непустым краем) обладают свойством Бирман — Хильдена. Поскольку вывод интересующих нас следствий из представленных ниже теорем о достаточных условиях сопряжен с рассмотрением значительного количества подслучаев и требует привлечения существенного объема данных из теории пространств отображений многообразий, доказательство этих следствий вынесено в отдельную работу.

Для формулировки основных результатов работы введем ряд обозначений. Для топологического пространства X обозначим через $Homeo(X)$ группу всех автогомеоморфизмов пространства X (снабженную компактно-открытой топологией). Содержащая тождественное отображение id_X компонента в $Homeo(X)$ обозначается через $Homeo_1(X)$. Через $Map_1(X, X)$ обозначается пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \to X$, гомотопных тождественному.

Теорема 1. *Пусть X — линейно связное топологическое пространство. Предположим, что у X не имеется гомотопных, но не изотопных автогомеоморфизмов (т. е. $Map_1(X, X) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$), и что либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.*

Теорема 1 допускает уточнения и обобщения по нескольким направлениям. Так, условие «либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп» (как и условия подобного типа в нижеследующих теоремах) ослабляется до более громоздкого условия, формулируемого в терминах инъективности индуцированных включением $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X)$ отображений классов сопряженности фундаментальных групп и их HNN-расширений. В частности, теорема 1 дополняется случаем, когда группа $\pi_1(Homeo_1(X))$ имеет ровно два класса сопряженности, однако мы не развиваем эту линию в данной статье. Больший интерес для нас представляет уточняющее обобщение теоремы 1 на случай пар (пространство, подпространство).

Если Z — подпространство в X, обозначим через $Map(X, X; Z)$ пространство (с компактно-открытой топологией) непрерывных отображений $X \to X$, переводящих Z в Z, а через $Map_1(X, X; Z)$ — компоненту линейной связности тождественного отображения. Подпространство Z в X назовем *h-инвариант-*

ным, если

(i) $f(Z) = Z$ для любого $f \in Homeo(X)$,

(ii) для всякого локально тривиального расслоения $p : E \to S^1$ над окружностью со слоем X и для каждого $h \in Homeo_1(E)$ выполняется условие $h(\overline{Z}) = \overline{Z}$, где $\overline{Z}$ — отвечающее подпространству Z подрасслоение в E (например, край многообразия h-инвариантен в силу теоремы об инвариантности области).

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное пространство, Z — h-инвариантное (возможно, пустое) подпространство в X. Предположим, что*

$$Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$$

(т. е. у X нет неизотопных автогомеоморфизмов, гомотопных в классе отображений, переводящих Z в Z) и что либо пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Тогда всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена.

Теорема 1 является частным случаем теоремы 2 ($Z = \varnothing$).

Для формулировки еще одного варианта достаточных условий принадлежности к классу Бирман — Хильдена дадим ряд дополнительных обозначений и определений. Если Z — подпространство в X, обозначим через $Map(X, X; [Z])$ подпространство в $Map(X, X; Z)$, состоящее из отображений, тождественных на Z, через $Homeo(X; [Z])$ — подгруппу $Homeo(X) \cap Map(X, X; [Z])$, а через $Map_1(X, X; [Z])$ и $Homeo_1(X; [Z])$ — компоненты линейной связности тождественного отображения в $Map(X, X; [Z])$ и $Homeo(X; [Z])$ соответственно.

Определение. Для расслоенного пространства E обозначим через $Fib(E)$ подгруппу послойных автогомеоморфизмов в $Homeo(E)$, а содержащую тождественное отображение id_E компоненту группы $Fib(E)$ — через $Fib_1(E)$. Будем говорить, что расслоение $p : E \to B$ *обладает свойством эпиморфности*, если включение $Fib_1(E) \subset Homeo_1(E)$ индуцирует эпиморфизм на уровне фундаментальных групп.

Теорема 3. *Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X, где X — связное компактное многообразие с непустым краем ∂X. Предположим, что выполнены следующие условия:*

— у X нет пары автогомеоморфизмов, связанных тождественной на крае гомотопией, но не связанных тождественной на крае изотопией, т. е.

$$Map_1(X, X; [\partial X]) \cap Homeo(X; [\partial X]) = Homeo_1(X; [\partial X]),$$

— либо пространство группы $Homeo_1(X; [\partial X])$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X; [\partial X]) \subset Map_1(X, X; [\partial X])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп,

— сужение расслоения p на каждую из компонент связности края ∂E обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

Оставшаяся часть работы ориентирована на доказательство теорем 2 и 3. Структура работы такова. В § 2 доказываются несколько вспомогательных лемм. В § 3 доказывается теорема 2. В § 4 доказывается предложение о продолжении послойной изотопии, используемое в доказательстве теоремы 3. В § 5 доказывается теорема 3.

§ 2. Внутрислойные гомотопии и гомотопные сечения

В настоящем разделе доказаны несколько вспомогательных лемм.

Определение. Гомотопию (в частности, изотопию) отображения произвольного пространства в тотальное пространство расслоения будем называть *внутрислойной* или *внутрислоевой*, если проекция этой гомотопии в базу расслоения дает тождественную гомотопию. Послойный автогомеоморфизм расслоенного пространства будем называть *внутрислойным* или *внутрислоевым*, если каждый слой переводится этим автогомеоморфизмом в тот же слой. Гомотопию (в частности, изотопию) отображения произвольного пространства в тотальное пространство расслоения будем называть *специальной*, если проекция в базу сужения этой гомотопии на каждую точку отображаемого пространства является стягиваемой петлей.

Лемма 1. *Два непрерывных отображения топологического пространства в пространство локально тривиального расслоения над окружностью внутрислойно гомотопны, если и только если они связаны специальной гомотопией.*

Доказательство. Внутрислойная гомотопия по определению является специальной. Для проверки обратной импликации заметим, что локально тривиальное расслоение над окружностью представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма f слоя F заданного расслоения:

$$E = \frac{F \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)}.$$

Такое представление индуцирует одномерное локально тривиальное слоение ξ на пространстве расслоения, каждый слой которого накрывает базу. Проектируя каждый путь специальной гомотопии на слой F', содержащий концевые точки пути, вдоль слоев слоения ξ, мы переводим специальную гомотопию во внутрислойную. □

Замечание. У леммы 1 имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [19, 11.7. Second covering homotopy theorem]), однако такой путь менее удобен при работе с подрасслоениями (см. шаг 1.3 в доказательстве теоремы 2).

Лемма 2. *Два сечения локально тривиального расслоения над окружностью изотопны в классе сечений, если и только если они гомотопны в классе произвольных непрерывных отображений.*

Доказательство. Сечения, изотопные в классе сечений, гомотопны в классе произвольных непрерывных отображений. Докажем обратное. Если два сечения гомотопны, то проекция в базу связывающей их гомотопии дает гомотопию тождественного отображения базы, т. е. петлю в $Map_1(S^1, S^1)$. Гомотопия тождественного отображения пространства ставит в соответствие каждой точке пространства петлю в пространстве. Для петель в окружности как для отображений из окружности в окружность выбором ориентации определена степень отображения (в одномерном случае называемая также индексом). Индекс принимает целые значения и зависит от точки непрерывно. Следовательно, у всех петель заданной гомотопии индекс одинаков. Отсюда вытекает, что заданные гомотопные сечения связаны и специальной гомотопией — такая гомотопия получается, к примеру, в результате композиции заданной гомотопии с (обратной к индексу) степенью гомотопии, «поворачивающей» кривую сечения «вдоль самой себя», т. е. являющейся, в свою очередь, композицией отображения сечения с полным поворотом базы. По лемме 1 связанные специальной гомотопией сечения внутрислойно гомотопны. Внутрислойная гомотопия сечений является изотопией в классе сечений. Лемма доказана. □

Замечание. У леммы 2, как и у леммы 1, имеется путь доказательства (причем для не обязательно локально тривиальных расслоений) через «аксиому о накрывающей гомотопии» (см. [19, 11.7. Second covering homotopy theorem]). Этот альтернативный метод доказательства обобщается на случай, когда в качестве базы расслоения выступает пространство B, обладающее следующим свойством (ср. со свойствами слоя в теоремах 1–3):

• включение $Homeo_1(B) \subset Map_1(B, B)$ индуцирует эпиморфизм фундаментальных групп.

Замечание. Лемму 2 имеет смысл рассматривать как определенного рода обобщение вырожденного до однониточных кос известного результата о том, что замкнутые косы в полнотории изотопны, если и только если они представляют один и тот же класс сопряженности группы кос (см. [20; 21, теорема 1; 22, предложение 10.16; 23, теорема 2.1]).

Лемма 3. *Пусть X — топологическое пространство, Z — подпространство в X, а $f : X \to X$ — автогомеоморфизм с $f(Z) = Z$. Пусть $\mathscr{X}_f$ — локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X, отвечающее автогомеоморфизму f, т. е. расслоение, тотальное пространство которого есть тор для f:*

$$\mathscr{X}_f = \frac{X \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)},$$

а $\mathscr{Z}_f$ — подрасслоение[1)] в $\mathscr{X}_f$, отвечающее подпространству Z. Предположим, что Z и X линейно связны. Тогда если включение $Z \subset X$ индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп, то и включение $\mathscr{Z}_f \subset \mathscr{X}_f$ индуцирует эпиморфизм (мономорфизм) фундаментальных групп.

Доказательство прямо следует из некоммутативного варианта так называемых 4-лемм (в применении к коммутативной диаграмме, образованной двумя точными последовательностями расслоений). □

Замечание. Утверждение леммы 3 обобщается на случай расслоения и подрасслоения над произвольной нормальной компактной линейно связной базой.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 включение $Z \subset X$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, то два сечения подрасслоения $\mathscr{Z}_f$ изотопны в классе сечений этого подрасслоения, если и только если они изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{X}_f$.*

Доказательство. В силу леммы 3 включение $\mathscr{Z}_f \subset \mathscr{X}_f$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп. Если два сечения подрасслоения $\mathscr{Z}_f$ изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{X}_f$, то они представляют один и тот же класс сопряженности в группе $\pi_1(\mathscr{X}_f)$, а значит, и в группе $\pi_1(\mathscr{Z}_f)$. Отсюда в силу леммы 2 следует, что эти сечения изотопны в классе сечений расслоения $\mathscr{Z}_f$. □

[1)] В некоторых случаях, как это принято, мы для краткости ссылаемся на тотальное пространство расслоения как на расслоение.

§ 3. Доказательство теоремы 2

Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем X, а $h : E \to E$ — послойный автогомеоморфизм, изотопный тождественному отображению id_E. Требуется показать, что в предположениях теоремы автогомеоморфизм h послойно изотопен тождественному.

Шаг 1.1. *Сведение к случаю внутрислойного автогомеоморфизма.*

Заметим, что послойный автогомеоморфизм пространства локально тривиального расслоения индуцирует автогомеоморфизм базы[2)]. Обозначим через h_B автогомеоморфизм базы S^1, индуцированный заданным автогомеоморфизмом h. Пусть $q : S^1 \to E$ — произвольное сечение заданного расслоения p (сечение существует в силу предположения о линейной связности слоя, см., например, [24, теорема 7.1]). Применив к q изотопию, переводящую id_E в h, и спроектировав получившуюся изотопию кривой в базу, получаем гомотопию между тождественным отображением базы (id_B) и h_B. Как следует из классических конструкций, гомотопные автогомеоморфизмы окружности изотопны. Подняв изотопию между h_B и id_B до послойной изотопии пространства E (существование такого поднятия для локально тривиального расслоения следует, например, из [19, 11.3. First covering homotopy theorem]), получаем послойную изотопию, связывающую h с автогомеоморфизмом h', дающим тождественное отображение базы. Тем самым ситуация сведена к случаю автогомеоморфизма, индуцирующего тождественное отображение на базе: поскольку h и h' связаны послойной изотопией, для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что h' и id_E послойно изотопны.

Шаг 1.2. *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с тождественным отображением* id_E *специальной*[3)] *изотопией.*

Заметим, что при всякой изотопии $E \times [0,1] \to E$, связывающей тождественное отображение id_E и внутрислойный автогомеоморфизм, проекция в базу пути каждой точки из E является петлей, причем в силу предположения о линейной связности свободный гомотопический тип этой петли и ее индекс от выбора точки не зависят (этот аргумент обсуждается в бóльших подробностях в доказательстве леммы 2). Поднимем до послойной изотопии $E \times [0,1] \to E$ полный оборот окружности (см. [19, 11.3. First covering homotopy theorem]). Дополнив h' определенным количеством таких поворотов, получаем автогомеоморфизм $h'' : E \to E$, послойно изотопный с h' и связанный с id_E изотопией, у которой проекции в S^1 всех путей являются петлями индекса 0, т. е. специальной изотопией.

Шаг 1.3. *Сведение к случаю автогомеоморфизма, связанного с* id_E *внутрислойной гомотопией.*

Поскольку полученный на предыдущем шаге автогомеоморфизм h'' и тождественный автогомеоморфизм id_E связаны специальной изотопией, в силу леммы 1 эти автогомеоморфизмы связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 в силу предполагаемой инвариантности множества Z следует, что связывающая h'' и id_E внутрислойная гомотопия

---

2) Действительно, из определения топологии прямого произведения вытекает, что локально тривиальное расслоение является открытым отображением. Отсюда следует, что автобиекция на базе, индуцированная послойным автогомеоморфизмом пространства локально тривиального расслоения, переводит открытые множества в открытые, т. е. является автогомеоморфизмом.

3) Определение специальной изотопии дано в § 2.

может быть построена таким образом, что в каждый момент в каждом слое X' эта гомотопия переводит подмножество $Z' \subset X'$, соответствующее подмножеству $Z \subset X$, в Z' (поскольку слоение ξ в конструкции доказательства леммы 1 таково, что каждый из его слоев содержится либо в подрасслоении, либо в дополнении к нему).

Шаг 2. *Переход к индуцированному расслоению со слоем* $Map_1(X, X; Z)$.

Локально тривиально расслаиваясь над окружностью, пространство E представимо в виде тора некоторого автогомеоморфизма $f : X \to X$ слоя X:

$$E = \frac{X \times [0,1]}{(x,1) \sim (f(x),0)}.$$

Автогомеоморфизму f отвечает автоморфизм A_f моноида $Map_1(X, X; Z)$, отправляющий отображение $m \in Map_1(X, X; Z)$ в отображение $f \circ m \circ f^{-1}$. Рассмотрим определяемое автоморфизмом A_f локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем $Map_1(X, X; Z)$:

$$\mathscr{E} := \frac{Map_1(X, X; Z) \times [0,1]}{(m,1) \sim (f \circ m \circ f^{-1}, 0)}.$$

Поскольку A_f переводит подпространство $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ в него же, подпространству $Homeo_1(X)$ отвечает подрасслоение в $\mathscr{E}$, которое обозначим через $\mathscr{H}_1$. Рассмотрим также подрасслоение $\mathscr{H}'$ со слоем $Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X)$ (это подрасслоение корректно определено в силу предполагаемой h-инвариантности подпространства Z). В силу условия теоремы о том, что $Map_1(X, X; Z) \cap Homeo(X) = Homeo_1(X)$, имеем $\mathscr{H}' = \mathscr{H}_1$.

Из конструкции следует, что имеется естественная биекция между сечениями расслоения $\mathscr{E}$ и непрерывными отображениями $E \to E$, переводящими каждый слой X' в тот же слой отображением, связанным с тождественным отображением $\mathrm{id}_{X'}$ гомотопией (в слое), в каждый момент переводящей подпространство $Z' \subset X'$, отвечающее инвариантному подпространству $Z \subset X$, в Z'. В частности, поскольку h'' и id_E связаны гомотопией такого вида, автогомеоморфизму h'' отвечает некоторое сечение расслоения $\mathscr{E}$ (обозначим это сечение через $\gamma_{h''}$), а гомотопии указанного вида отвечает изотопия — в классе сечений — между сечением $\gamma_{h''}$ и «*тривиальным*» сечением γ_0 (под тривиальным сечением мы понимаем сечение, состоящее из точек слоев в $\mathscr{E}$, отвечающих тождественным отображениям соответствующих слоев в E).

Поскольку точки в $\gamma_{h''}$ суть автогомеоморфизмы соответствующих слоев из E, сечение $\gamma_{h''}$ лежит в подрасслоении $\mathscr{H}'$, которое, как объясняется выше, совпадает с $\mathscr{H}_1$. Для того чтобы убедиться, что h'' и id_E связаны послойной изотопией, достаточно убедиться, что $\gamma_{h''}$ и γ_0 изотопны в классе сечений подрасслоения $\mathscr{H}_1$.

В случае, если пространство группы $Homeo_1(X)$ односвязно, $\gamma_{h''}$ и γ_0 изотопны, поскольку в таком случае любые два сечения подрасслоения $\mathscr{H}_1$ изотопны. (Любые два сечения локально тривиального расслоения изотопны, если база — окружность, а слой односвязен (см., например, [24, теорема 7.1]): в качестве базы рассмотрим пространство $S^1 \times [0,1]$, а в качестве частично определенного сечения — объединение сечений над $S^1 \times \{0\}$ и над $S^1 \times \{1\}$.)

В случае, если включение $Homeo_1(X) \subset Map_1(X, X; Z)$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп, изотопность сечений $\gamma_{h''}$ и γ_0 в классе сечений подрасслоения $\mathscr{H}_1$ следует из их изотопности в классе сечений расслоения $\mathscr{E}$ в силу леммы 4.

Итак, показано, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм h всякого локально тривиального расслоения E над окружностью со слоем X послойно изотопен автогомеоморфизму h'', который послойно изотопен тождественному отображению. Это доказывает, что всякое локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем X обладает свойством Бирман — Хильдена. Теорема доказана.

Дополнение. Для удобства ссылок сформулируем в виде отдельного предложения утверждение, частный случай которого возникает на шаге 2 приведенного выше доказательства теоремы 2.

Предложение 1. *Пусть $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем X, $h : E \to E$ — внутрислойный автогомеоморфизм. Пусть $G(X)$ — нормальная подгруппа в $Homeo(X)$ (например, $G(X) = Homeo_1(X)$ или $G(X) = Homeo_1(X, [Z])$, где Z — какое-нибудь h-инвариантное подпространство в X). Тогда если $G(X)$ односвязна, а в каждом слое X' расслоения p сужение $h|_{X'}$ гомеоморфизма h на X' лежит*[4)] *в $G(X')$, то h и id_E связаны внутрислойной изотопией, у которой сужение на каждый слой X' лежит в $G(X')$.*

Доказательство. Утверждение доказывается конструкцией из шага 2 приведенного выше доказательства теоремы 2: по расслоению p строится отвечающее ему расслоение $\mathscr{H} \to S^1$ со слоем $Homeo(X)$. В этом расслоении имеется подрасслоение $\mathscr{G}$ со слоем $G(X)$. Автогомеоморфизмам h и id_E отвечают сечения подрасслоения $\mathscr{G}$, в силу односвязности слоя $G(X)$ эти сечения изотопны в $\mathscr{G}$, изотопии между сечениями в $\mathscr{G}$ отвечает искомая внутрислойная изотопия между id_E и h. $\square$

§ 4. О продолжении послойной изотопии

Для доказательства теоремы 3 нам потребуется вариант обобщения на расслоенные пространства теоремы о продолжении изотопии (с края многообразия на все многообразие). Доказываемое в настоящем параграфе предложение 2 представляет собой такое обобщение. В литературе имеется несколько версий теоремы о продолжении изотопии для многообразий и их подмногообразий и подмножеств, эти версии имеют различные варианты обобщений на расслоенные пространства, имеется также несколько различных естественных подходов к доказательству подобных утверждений. Отметим, что в приведенном варианте утверждения (предложение 2) как уровень обобщения, так и метод доказательства выбраны в некоторой степени произвольно. С одной стороны, достаточно было бы более частных утверждений с более короткими вариантами доказательств. Например, в случае, когда база является окружностью, имеется вариант доказательства, использующий тор отображения, а если ограничиться случаем, когда база является многообразием, доказательство предложения 2 можно сократить с учетом классического результата [25, следствие 1.3] о том, что изотопия компактного многообразия раскладывается в произведение изотопий, носитель каждой из которых содержится в одном из элементов заданного открытого покрытия. С другой стороны, приведенное утверждение обобщается и на более широкие классы подмногообразий, на не обязательно компактную

[4)] Поскольку подгруппа $G(X)$ предполагается нормальной в $Homeo(X)$, подгруппа $G(X')$ и соответственно принадлежность элемента $g \in Homeo(X')$ подгруппе $G(X')$ корректно определены безотносительно к выбору гомеоморфизма между X' и X.

базу (к примеру, на случай нормальной локально компактной линделефовой[5]) базы; см. C_σ-пространства в [19], теорему [19, 11.3. First covering homotopy theorem] и метод ее доказательства) и т. п., но мы не приводим этих обобщений в настоящей работе, ориентируясь на то, что для доказательства теоремы 3 такая степень общности не требуется.

Предложение 2 (о продолжении послойной изотопии). *Пусть F — компактное многообразие с непустым краем ∂F, B — нормальное компактное пространство, $p: E \to B$ — локально тривиальное расслоение со слоем F, $E_\partial \subset E$ — подрасслоение, отвечающее краю ∂F. Тогда всякая послойная изотопия тождественного отображения подрасслоения E_∂ продолжается до послойной изотопии тождественного отображения пространства E.*

Доказательство. В настоящем доказательстве для упрощения проверки свойств конструируемых отображений удобно интерпретировать изотопии всякого подпадающего под рассмотрение пространства W как сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы произведения $W \times [0,1]$ (как в [26, 27]).

Кроме того, поскольку здесь нас интересуют исключительно изотопии тождественных отображений пространств, далее в доказательстве под изотопиями понимаются именно такие изотопии: сохраняющие вторую координату автогомеоморфизмы $W \times [0,1] \to W \times [0,1]$, тождественные на $W \times \{0\}$.

Под *произведением* изотопий $\tau : W \times [0,1] \to W \times [0,1]$ и $\rho : W \times [0,1] \to W \times [0,1]$ понимается при этом композиция этих изотопий как автогомеоморфизмов пространства $W \times [0,1]$, т. е. произведение в смысле группы $Homeo(W \times [0,1])$. Во избежание путаницы в дальнейшем будем обозначать такое произведение через $\tau \star \rho$:

$$\tau \star \rho = \tau \circ \rho.$$

Обратная изотопия понимается в соответствующем смысле — как обратный элемент в группе $Homeo(W \times [0,1])$.

Множество всех изотопий тождественного отображения пространства W (образующее с указанной операцией произведения группу) обозначим через $\Lambda_1(W)$.

Под *продолжимыми* изотопиями имеются в виду послойные изотопии из $\Lambda_1(E_\partial)$, продолжимые до послойных изотопий из $\Lambda_1(E)$.

Заметим, что произведение продолжимых изотопий является продолжимой изотопией, поскольку произведение продолжений является продолжением произведения. Таким образом, для доказательства предложения достаточно показать, что каждая послойная изотопия τ из $\Lambda_1(E_\partial)$ разлагается в произведение продолжимых.

Послойная изотопия пространства расслоения индуцирует изотопию базы. Обозначим через $\overline{\tau}$ изотопию базы B, индуцированную послойной изотопией τ. В силу классических конструкций теории расслоений (см., например, [19, 11.3. First covering homotopy theorem]), изотопия тождественного отображения базы локально тривиального расслоения с нормальной компактной базой поднимается до послойной изотопии тождественного отображения всего пространства расслоения, так что в $\Lambda_1(E)$ найдется послойная изотопия $\widetilde{\tau}$, индуцирующая изотопию $\overline{\tau}$. Исходная изотопия τ разлагается в произведение сужения изотопии $\widetilde{\tau}$ на E_∂ (эта изотопия-сужение по построению продолжима) и некоторой

[5]Пространство называется *линделефовым* или *финально компактным*, если из любого его открытого покрытия можно выделить не более чем счетное подпокрытие.

внутрислойной изотопии $\dot{\tau} \in \Lambda_1(E_\partial)$. Тем самым доказательство свелось к случаю внутрислойной изотопии $\dot{\tau}$.

В оставшейся части доказательства сначала покажем, что внутрислойные изотопии продолжимы в случае прямых произведений, а затем выведем из этого общий случай внутрислойной изотопии $\dot{\tau}$, воспользовавшись нормальностью базы и разлагая $\dot{\tau}$ в произведение внутрислойных изотопий с «достаточно малыми» носителями, продолжимость которых прямо вытекает из продолжимости в случае прямых произведений.

Итак, докажем сперва, что внутрислойные изотопии $\ddot{\tau} \in \Lambda_1(B' \times \partial F)$ продолжимы с $B' \times \partial F$ на $B' \times F$ в случае прямого произведения. (Вообще говоря, это выполняется для произвольной базы B', но нам понадобится лишь случай $B' \subset B$.) Из классического результата [28] о воротниковой окрестности края метризуемого многообразия следует, что у края ∂F найдутся открытая окрестность $U(\partial F)$ в F и переводящий $\partial F \times \{0\}$ в ∂F гомеоморфизм $h : \partial F \times [0,2) \to U(\partial F)$. Отождествим посредством h окрестность $U(\partial F)$ с произведением $\partial F \times [0,2)$, введя тем самым на $U(\partial F)$ координаты, а окрестность $B' \times U(\partial F)$ — с произведением $B' \times \partial F \times [0,2)$. Для внутрислоевой изотопии $\ddot{\tau}$ из $\Lambda_1(B' \times \partial F)$ определим отображение

$$\widehat{\tau} : B' \times \partial F \times [0,2) \times [0,1] \to B' \times \partial F \times [0,2) \times [0,1]$$

формулой

$$\widehat{\tau}(b,x,r,t) = \begin{cases} (b,x,r,t) & \text{при } t \le r, \\ \big(b, \ddot{\tau}^b_{t-r}(x), r, t\big) & \text{при } t \ge r, \end{cases} \tag{1}$$

где b, x, r, t — координаты в B', ∂F, $[0,2)$, $[0,1]$ соответственно, а через $\ddot{\tau}^b$ обозначено сужение изотопии $\ddot{\tau}$ на слой $\{b\} \times \partial F$. Из формулы ясно, что $\widehat{\tau}$ непрерывно, биективно и имеет непрерывное обратное, откуда заключаем, что $\widehat{\tau}$ есть внутрислоевая изотопия из $\Lambda_1(B' \times \partial F \times [0,2))$, продолжающая изотопию $\ddot{\tau}$. Изотопия $\widehat{\tau}$ тождественна на $B' \times \partial F \times [1,2)$, так что, дополнив ее тождественной изотопией на $B' \times (F \setminus U(\partial F))$, получаем внутрислоевую изотопию $\widehat{\tau}^+$ из $\Lambda_1(B' \times F)$, продолжающую изотопию $\ddot{\tau}$. Отметим (это используется в дальнейшем), что, как видно из определяющей формулы, проекция в базу B' носителя $\operatorname{supp}(\widehat{\tau}^+)$ полученного продолжения совпадает с проекцией носителя $\operatorname{supp}(\ddot{\tau})$ исходной изотопии.

Вернемся к внутрислоевой изотопии $\dot{\tau}$ на E_∂. Наша цель — разложить $\dot{\tau}$ в произведение изотопий, у которых носители в определенном смысле «малы» и продолжимость которых легко устанавливается. В силу компактности базы B найдется такое конечное открытое покрытие $\{U_1, \dots, U_k\}$ для B, что над каждым U_i расслоение p тривиально, а в силу нормальности найдутся такие открытые подпокрытия $\{U_1', \dots, U_k'\}$ и $\{U_1'', \dots, U_k''\}$ для B, что U_i содержит $\operatorname{clos}(U_i')$, а U_i' содержит $\operatorname{clos}(U_i'')$ для всех i (см. так называемую «сжимающую лемму» как одно из эквивалентных определяющих свойств нормального пространства в [29, с. 446]). Вдобавок в силу леммы Урысона для нормальных пространств (также см. [29, с. 446]), найдется такой набор функций $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$, $\varphi_i : B \to [0,1]$, что $\varphi_i(U_i'') = \{1\}$ и $\varphi_i(B \setminus U_i') = \{0\}$.

Представим изотопию $\dot{\tau}$ в виде произведения изотопий, проекции носителей которых содержатся в носителях функций набора $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$. Для этого введем понятие *частичной изотопии*, определяемой по изотопии и функции на пространстве. Для изотопии $\rho \in \Lambda_1(E_\partial)$ и непрерывной функции $\widetilde{\varphi} : E_\partial \to [0,1]$ определим отображение $\rho^{\widetilde{\varphi}} : E_\partial \times [0,1] \to E_\partial \times [0,1]$, полагая

$$\rho^{\widetilde{\varphi}}(e,t) = (\operatorname{pr}_{E_\partial}(\rho(e, \widetilde{\varphi}(e) \cdot t)), t),$$

где через pr_{E_∂} обозначена проекция $E_\partial \times [0,1] \to E_\partial$. В эквивалентном виде $\rho_t^{\widetilde{\varphi}}(e) = \rho_{\widetilde{\varphi}(e)\cdot t}(e)$. Отображение $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ непрерывно, поскольку его первая проекция есть сложная функция от непрерывных функций (включая произведение $(e,t) \mapsto \widetilde{\varphi}(p(e)) \cdot t$). Таким образом, $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ можно рассматривать как гомотопию. Если изотопия ρ внутрислойна, а $\widetilde{\varphi}$ постоянна на каждом слое, то отображение $\rho^{\widetilde{\varphi}}$, как нетрудно видеть, еще и биективно, а обратное отображение $E_\partial \times [0,1] \to E_\partial \times [0,1]$ описывается формулой

$$(\rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}(e,t) = (\mathrm{pr}_{E_\partial}(\rho^{-1}(e, \widetilde{\varphi}(e)\cdot t)), t).$$

Это показывает, что в оговоренном случае $(\rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}$ непрерывно, откуда заключаем, что для внутрислойной изотопии ρ и постоянной на каждом слое функции $\widetilde{\varphi}$ гомотопия $\rho^{\widetilde{\varphi}}$ является внутрислойной изотопией.

Заметим, что, как прямо следует из формулы данного определения, для внутрислойной изотопии ρ и постоянной на каждом слое функции $\widetilde{\varphi}$ выполняются условия

$$\mathrm{supp}(\rho^{\widetilde{\varphi}}) \subset \mathrm{supp}(\rho) \cap \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}), \tag{2}$$

$$\mathrm{supp}((\rho \star \rho^{\widetilde{\varphi}})^{-1}) \subset \mathrm{supp}(\rho) \setminus \widetilde{\varphi}^{-1}(1). \tag{3}$$

Вернемся к изотопии $\dot{\tau}$ и набору функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$. Определим функции $\widetilde{\varphi}_i : E_\partial \to [0,1]$ правилом $\widetilde{\varphi}_i(e) = \varphi_i(p(e))$. Поскольку изотопия $\dot{\tau}$ внутрислойна, а функции $\widetilde{\varphi}_1, \ldots, \widetilde{\varphi}_k$ в силу определения постоянны на слоях, корректно определены изотопии

$$\rho_{(0)} := \dot{\tau}, \quad \rho_{(1)} := \dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1})^{-1}, \quad \rho_{(i)} := \rho_{(i-1)} \star \bigl(\rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}\bigr)^{-1}. \tag{4}$$

Эти изотопии дают разложение

$$\dot{\tau} = (\dot{\tau} \star (\dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1})^{-1}) \star \dot{\tau}^{\widetilde{\varphi}_1} = \rho_{(1)} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1} = \rho_{(2)} \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1} = \ldots$$
$$= \rho_{(k)} \star \rho_{(k-1)}^{\widetilde{\varphi}_k} \star \cdots \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1}.$$

Из определения (4) в силу (3) получаем, что

$$\mathrm{supp}(\rho_{(i)}) \subset \mathrm{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus \widetilde{\varphi}_i^{-1}(1) = \mathrm{supp}(\rho_{(i-1)}) \setminus p^{-1}(U_i'').$$

Отсюда, так как $\{U_1'', \ldots, U_k''\}$ — покрытие базы, вытекает, что $\mathrm{supp}(\rho_{(k)}) = \varnothing$, так что $\rho_{(k)}$ есть тождественная (тривиальная) изотопия, т. е. $\dot{\tau} = \rho_{(k-1)}^{\widetilde{\varphi}_k} \star \cdots \star \rho_{(1)}^{\widetilde{\varphi}_2} \star \rho_{(0)}^{\widetilde{\varphi}_1}$. Из (2) получаем, что для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ выполняется условие

$$\mathrm{supp}\bigl(\rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}\bigr) \subset \mathrm{supp}(\widetilde{\varphi}_i) \subset p^{-1}(U_i').$$

Таким образом, изотопия $\dot{\tau}$ разлагается в произведение внутрислоевых изотопий $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}$, у каждой из которых замыкание носителя лежит в множестве вида $p^{-1}(U_i)$, на котором расслоение имеет структуру прямого произведения. Остается показать, что изотопии $\chi_{(i)}$ продолжимы. Пусть $\ddot{\chi}_{(i)}$ — сужение изотопии $\chi_{(i)}$ на $E_\partial \cap p^{-1}(U_i)$. Поскольку на $p^{-1}(U_i)$ расслоение имеет структуру прямого произведения, с помощью вышеприведенной конструкции (1) можно продолжить изотопию $\ddot{\chi}_{(i)}$ на $p^{-1}(U_i)$, причем так, что проекция в U_i носителя $\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})$ продолжения $\widehat{\chi}_{(i)}$ совпадает с проекцией в U_i носителя $\mathrm{supp}(\ddot{\chi}_{(i)})$ самой изотопии $\ddot{\chi}_{(i)}$:

$$p(\mathrm{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})) = p(\mathrm{supp}(\ddot{\chi}_{(i)})) \ \subset \ U_i'.$$

Тогда $\operatorname{supp}(\widehat{\chi}_{(i)}) \subset p^{-1}(U_i')$, так что

$$\operatorname{clos}(\operatorname{supp}(\widehat{\chi}_{(i)})) \subset \operatorname{clos}\left(p^{-1}(U_i')\right) = p^{-1}\left(\operatorname{clos}(U_i')\right) \subset p^{-1}(U_i).$$

Пусть $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — отображение, совпадающее с $\widehat{\chi}_{(i)}$ на $p^{-1}(U_i)\times[0,1]$ и тождественное на $(E\setminus p^{-1}(U_i))\times[0,1]$. Тогда $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — изотопия, поскольку непрерывны ее сужения на элементы двухэлементного открытого покрытия

$$\{p^{-1}(U_i)\times[0,1],\ (E\setminus \operatorname{clos}(\operatorname{supp}(\widetilde{\chi}_{(i)})))\times[0,1]\}.$$

Итак, $\widetilde{\chi}_{(i)}$ — внутрислойная изотопия из $\Lambda_1(E)$, продолжающая изотопию $\chi_{(i)} = \rho_{(i-1)}^{\widetilde{\varphi}_i}$. Это завершает доказательство. $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 3

Докажем теорему 3 как частный случай следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть X — линейно связное пространство, Z — непустое* h*-инвариантное подпространство в X, $p : E \to S^1$ — локально тривиальное расслоение со слоем X, а $\overline{Z}$ — отвечающее подпространству Z подрасслоение в E. Предположим, что выполнены следующие условия:*

— $Map_1(X,X;[Z]) \cap Homeo(X;[Z]) = Homeo_1(X;[Z])$ (т. е. у X нет автогомеоморфизмов, связанных тождественной на Z гомотопией, но не связанных тождественной на Z изотопией),

— либо пространство группы $Homeo_1(X;[Z])$ односвязно, либо включение $Homeo_1(X;[Z]) \subset Map_1(X,X;[Z])$ индуцирует изоморфизм фундаментальных групп.

Предположим также, что

(C1) *пара $(E,\overline{Z})$ является парой Борсука,*

(C2) *естественная проекция $Fib_1(E) \to Fib_1(\overline{Z})$ сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных группоидов,*

(C3) *количество компонент линейной связности пространства $\overline{Z}$ конечно, каждая из этих компонент компактна и как подрасслоение в $\overline{Z}$ обладает свойствами Бирман — Хильдена и эпиморфности.*

Тогда p обладает свойством Бирман — Хильдена.

Доказательство предложения 3. Требуется показать, что произвольный послойный и изотопный тождественному автогомеоморфизм $h : E \to E$ послойно изотопен тождественному.

Шаг 1.1. *Сведение ситуации к случаю гомеоморфизма $h' : E \to E$, у которого сужение на $\overline{Z}$ тождественно и который связан с id_E изотопией, при сужении на $\overline{Z}$ дающей стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю.*

Пусть $\widetilde{\lambda}$ — путь в $Homeo_1(E)$ из id_E в h, а λ — отвечающий ему путь в $Homeo_1(\overline{Z})$ из $\mathrm{id}_{\overline{Z}}$ в $h|_{\overline{Z}}$. В силу условия о свойствах Бирман — Хильдена и эпиморфности из (C3), для каждой компоненты связности $\overline{Z}^c$ пространства $\overline{Z}$ выполняется равенство $Homeo_1(\overline{Z}^c) \cap Fib(\overline{Z}^c) = Fib_1(\overline{Z}^c)$ (свойство Бирман — Хильдена), а индуцированный тождественным включением гомоморфизм $\pi_1(Fib_1(\overline{Z}^c)) \to \pi_1(Homeo_1(\overline{Z}^c))$ сюръективен (свойство эпиморфности), так что сужение λ^c изотопии λ на $\overline{Z}^c$ можно послойной изотопией продлить до стягиваемой петли λ_+^c в $Homeo_1(\overline{Z}^c)$. Поскольку слой линейно связен, а h послоен, то при всякой изотопии из id_E в h для любых двух точек x, y из

E с $p(x) = p(y)$ (и, в частности, для любых двух точек x, y из разных компонент связности пространства $\overline{Z}$, но лежащих в одном и том же слое, т. е. с $p(x) = p(y)$), проекции путей этих точек в базу S^1 связаны гомотопией с закрепленными концами. Отсюда в силу конечности числа компонент и их компактности (условие (C3)) нетрудно вывести, что продления λ_+^c для разных компонент $\overline{Z}^c$ пространства $\overline{Z}$ можно согласовать в смысле проекции на базу, так что и путь λ послойной изотопией продляется до стягиваемой петли λ_+ в $Homeo_1(\overline{Z})$. В силу (C2) путь $\widetilde{\lambda}$ можно послойной изотопией продлить до такого пути $\widetilde{\lambda}_+$ в $Homeo_1(E)$, у которого сужение на $\overline{Z}$ является петлей, гомотопной петле λ_+, т. е. стягиваемой петлей. Пусть h' — концевая точка пути $\widetilde{\lambda}_+$. Тогда по построению сужение $h'|_{\overline{Z}}$ автогомеоморфизма h' на $\overline{Z}$ тождественно и h' связан с id_E изотопией, сужение которой на $\overline{Z}$ дает стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю λ_+. Поскольку h и h' связаны послойной изотопией, для демонстрации того, что h и id_E послойно изотопны, достаточно показать, что h' и id_E послойно изотопны.

Шаг 1.2. *Переход от изотопии (между h' и id_E) к гомотопии (между теми же h' и id_E), тождественной на $\overline{Z}$.*

Пусть $\tau : E \times [0,1] \to E$ — такая изотопия с $\tau_0 = \mathrm{id}_E$ и $\tau_1 = h'$, у которой сужение на $\overline{Z}$ дает стягиваемую в $Homeo_1(\overline{Z})$ петлю (см. шаг 1.1). Условие о стягиваемости означает, что для изотопии-сужения $\tau|_{\overline{Z}}$ как для петли в $Homeo_1(\overline{Z})$ найдется неподвижная на концах гомотопия, стягивающая эту петлю в точку, т. е. найдется непрерывное отображение

$$\rho : \overline{Z} \times [0,1] \times [0,1] \to \overline{Z}$$

такое, что

— сужение отображения ρ на $\overline{Z} \times [0,1] \times \{0\}$ совпадает с сужением отображения τ на $\overline{Z} \times [0,1]$,

— обозначив через $\rho_{s,t}$ сужение отображения ρ на $\overline{Z} \times \{s\} \times \{t\}$, для каждого $r \in [0,1]$ получим $\rho_{0,r} = \rho_{r,1} = \rho_{1,r} = \mathrm{id}_{\overline{Z}}$.

Поскольку пара $(E, \overline{Z})$ является парой Борсука (условие (C1)), то и пара $(E \times [0,1], \overline{Z} \times [0,1])$ является парой Борсука (импликация видна, к примеру, из известного критерия, гласящего, что пара (S, T) является парой Борсука, если и только если подпространство $(S \times \{0\}) \cup (T \times [0,1])$ является ретрактом для пространства $S \times [0,1]$, см., например, [30, с. 14]). Отсюда следует, что для изотопии τ (рассматриваемой как отображение из $E \times [0,1]$ в E) найдется гомотопия $\kappa : E \times [0,1] \times [0,1] \to E$ такая, что

— сужение отображения κ на $E \times [0,1] \times \{0\}$ совпадает с τ,

— сужение отображения κ на $\overline{Z} \times [0,1] \times [0,1]$ совпадает с ρ.

Обозначая через $\kappa_{s,t}$ сужение отображения κ на $E \times \{s\} \times \{t\}$, определим гомотопию $\tau' : E \times [0,3] \to E$ правилом (проход по трем сторонам квадрата)

$$\tau'_t = \begin{cases} \kappa_{0,t} & \text{при } t \in [0,1], \\ \kappa_{t-1,1} & \text{при } t \in [1,2], \\ \kappa_{1,3-t} & \text{при } t \in [2,3]. \end{cases}$$

По построению τ' связывает h' и id_E и тождественна на $\overline{Z}$.

Шаг 1.3. *Переход к гомотопии (между h' и id_E), не только тождественной на $\overline{Z}$, но и внутрислойной, т. е. на всем протяжении сохраняющей каждую точку в одном слое.* (Ср. с построениями шага 1.3 в доказательстве теоремы 2.)

Заметим, что, поскольку h' переводит слои в слои, $\overline{Z}$ непусто (так как Z предполагается непустым), а слой X — линейно связен, то гомотопия, переводящая id_E в h' и тождественная на $\overline{Z}$, является специальной. Отсюда в силу леммы 1 следует, что id_E и h' связаны и внутрислойной гомотопией. При этом из конструкции доказательства леммы 1 видно, что внутрислойная гомотопия, переводящая id_E в h', может быть выбрана и тождественной на $\overline{Z}$.

Шаг 2. *Индуцированное расслоение со слоем* $Map_1(X, X; [Z])$.

Таким образом, шаги 1.1–1.3 сводят ситуацию к случаю гомеоморфизма $h' : E \to E$, у которого сужение на $\overline{Z}$ тождественно и который связан с id_E тождественной на $\overline{Z}$ внутрислойной гомотопией. (Ср. с доказательством теоремы 2, в котором ситуация сводится к случаю автогомеоморфизма $h'' : E \to E$, связанного с id_E внутрислойной гомотопией, в каждый момент переводящей подпространство $Z' \subset X'$, отвечающее инвариантному подпространству $Z \subset X$, в Z'.) Завершающий шаг доказательства воспроизводит конструкцию завершающего шага 2 из доказательства теоремы 2 с заменой моноида $Map_1(X, X; Z)$ и группы $Homeo_1(X; Z)$ моноидом $Map_1(X, X; [Z])$ и группой $Homeo_1(X; [Z])$ соответственно: по заданному расслоению p строится индуцированное расслоение со слоем $Map_1(X, X; [Z])$ и т. д. $\square$

Доказательство теоремы 3. Теорема 3 является частным случаем предложения 3. Укажем, из каких результатов вытекает, что условия предложения 3 в теореме 3 выполняются. (Мы не упоминаем условия, непосредственно оговоренные в формулировке теоремы 3.)

• То, что край многообразия является его h-инвариантным подпространством, вытекает из теоремы об инвариантности области.

• То, что пара, состоящая из многообразия и его края, является парой Борсука (условие (C1) в формулировке предложения 3), следует, например, из результата [28] о воротниковой окрестности края (см. также [30, пример 0.15]).

• То, что в теореме 3 естественная проекция $Fib_1(E) \to Fib_1(\partial E)$ сюръективна и индуцирует эпиморфизм фундаментальных группоидов (условие (C2) предложения 3), вытекает из предложения 2, в силу которого всякая послойная изотопия края локально тривиально расслоенного над окружностью многообразия с краем продолжается до послойной изотопии всего многообразия. $\square$

Благодарности. Автор признателен Ю. С. Белоусову, И. А. Дынникову, С. С. Подкорытову и Е. А. Фоминых за полезные обсуждения. Автор также благодарен рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Birman J. S., Hilden H. M.* On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces // Ann. Math. Stud. 1971. V. 66. P. 81–115.
2. *Birman J. S., Hilden H. M.* Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. V. 78, N 6. P. 1002–1004.
3. *Birman J. S., Hilden H. M.* Lifting and projecting homeomorphisms // Arch. Math. (Basel). 1972. V. 23. P. 428–434.
4. *Birman J. S., Hilden H. M.* On isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces // Ann. Math. (2). 1973. V. 97. P. 424–439.
5. *Birman J. S., Hilden H. M.* Erratum to 'Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces' // Ann. Math. (2). 2017. V. 185. P. 345.
6. *Zieschang H.* On the homeotopy group of surfaces // Math. Ann. 1973. V. 206. P. 1–21.
7. *Maclachlan C., Harvey W. J.* On mapping-class groups and Teichmüller spaces // Proc. Lond. Math. Soc. 1975. V. 30. P. 496–512.

8. *Berstein I., Edmonds A. L.* On the construction of branched coverings of low-dimensional manifolds // Trans. Amer. Math. Soc. 1979. V. 247. P. 87–124.
9. *Fuller T.* On fiber-preserving isotopies of surface homeomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc. 2001. V. 129. P. 1247–1254.
10. *Aramayona J., Leininger C. J., Souto J.* Injections of mapping class groups // Geom. Topol. 2009. V. 13. P. 2523–2541.
11. *Winarski R. R.* Symmetry, isotopy, and irregular covers // Geom. Dedicata. 2015. V. 177. P. 213–227.
12. *Ghaswala T., Winarski R. R.* Lifting homeomorphisms and cyclic branched covers of spheres // Michigan Math. J. 2017. V. 66. P. 885–890.
13. *Atalan F., Medetogullari E.* The Birman–Hilden property of covering spaces of nonorientable surfaces // Ukraïn. Mat. Zh. 2020. V. 72, N 3. P. 307–315.
14. *Margalit D., Winarski R. R.* Braids groups and mapping class groups: The Birman–Hilden theory // Bull. London Math. Soc. 2021. V. 53, N 3. P. 643–659.
15. *Kolbe B., Evans M. E.* Isotopic tiling theory for hyperbolic surfaces // Geom. Dedicata. 2021. V. 212. P. 177–204.
16. *Dey S., Dhanwani N. K., Patil H., Rajeevsarathy K.* Generating the liftable mapping class groups of regular cyclic covers. 2021. 14 p. arXiv:2111.01626v1 [math.GT].
17. *Vogt E.* Projecting isotopies of sufficiently large P^2-irreducible 3-manifolds // Arch. Math. (Basel). 1977. V. 29, N 6. P. 635–642.
18. *Ohshika K.* Finite subgroups of mapping class groups of geometric 3-manifolds // J. Math. Soc. Japan. 1987. V. 39, N 3. P. 447–454.
19. *Steenrod N. E.* The topology of fibre bundles. Princeton: Princeton Univ. Press, 1951. (Princeton Math. Ser.; V. 14).
20. *Artin E.* Theorie der Zöpfe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1925. V. 4. P. 47–72.
21. *Morton H. R.* Infinitely many fibred knots having the same Alexander polynomial // Topology. 1978. V. 17. P. 101–104.
22. *Burde G., Zieschang H.* Knots. Berlin: Walter de Gruyter, 1985. (de Gruyter Stud. Math.; V. 5).
23. *Kassel C., Turaev V.* Braid groups. New York: Springer, 2008. (Grad. Texts Math.; V. 247).
24. *Husemoller D.* Fibre bundles. 3rd ed. New York: Springer-Verl., 1994. (Grad. Texts Math.; V. 20).
25. *Edwards R. D., Kirby R.* Deformations of spaces of imbeddings // Ann. Math. (2). 1971. V. 93. P. 63–88.
26. *Epstein D. B. A.* Curves on 2-manifolds and isotopies // Acta Math. 1966. V. 115. P. 83–107.
27. *Чернавский А. В.* Локальная стягиваемость группы гомеоморфизмов многообразия // Мат. сб. 1969. Т. 79, № 3. С. 307–356.
28. *Brown M.* Locally flat imbeddings of topological manifolds // Ann. Math. (2). 1962. V. 75. P. 331–341.
29. *Schechter E.* Handbook of analysis and its foundations. San Diego: Acad. Press, Inc., 1997.
30. *Hatcher A.* Algebraic topology. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2002.

Поступила в редакцию 3 августа 2023 г.
После доработки 27 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Малютин Андрей Валерьевич (ORCID 0000-0002-4512-0124)
Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук,
ул. Губкина, 8, Москва 119991;
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, 27, Санкт-Петербург 191023
malyutin@pdmi.ras.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 517.5

СУММЫ ЗИГМУНДА — РИССА РАЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ — ЧЕБЫШЁВА И ИХ АППРОКСИМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Аннотация. Исследуются аппроксимационные свойства одной суммы Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва с ограничениями на количество геометрически различных полюсов. Получено интегральное представление введенного оператора.

Изучаются аппроксимации на отрезке $[-1,1]$ функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$. Найдены оценки сверху поточечных и равномерных приближений, асимптотическое выражение мажоранты равномерных приближений и оптимальное значение параметров аппроксимирующей функции, при которых скорость убывания мажоранты наибольшая.

Отдельной задачей исследуются аппроксимационные свойства сумм Зигмунда — Рисса полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва. Установлено асимптотическое выражение констант Лебега и оценки приближений функций $f \in H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, а также оценки поточечных и равномерных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.112

Ключевые слова: рациональные интегральные операторы Фурье — Чебышёва, суммы Зигмунда — Рисса, константы Лебега, функции класса Липшица, асимптотические оценки, точные константы.

Введение

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\varphi_n(x)$ — ряд Фурье функции f по ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$. Выражения

$$R_n^{\lambda,\delta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\lambda}\right)^{\delta} a_k(f)\varphi_k(x), \quad \delta, \lambda > 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

называются [1, 2] *суммами Рисса* ортогональных рядов Фурье.

Метод суммирования Рисса нашел широкое применение в теории рядов Дирихле и аналитической теории чисел [3], а также в теории рядов Фурье [4]. Взаимосвязи методов суммирования Чезаро и методов дискретных средних Рисса различных порядков изучались в [5, 6].

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований «Конвергенция 2020», № 20162269.

В равенстве (1) положим $\delta = 1$, $\lambda = 2$. В этом случае суммы вида

$$R_n^{2,1}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^2\right) a_k(f)\varphi_k(x), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

совпадают с нормальными средними Зигмунда $Z_{2n}^2(f,x)$ (см., например, [7–9]) и, следовательно, называются *средними Зигмунда — Рисса.* Они обладают рядом интересных свойств. Т. С. Чикина [10] использовала средние Зигмунда — Рисса для получения оценок приближений функций ограниченной p-вариации в пространстве L_p. В работе [11] изучены аппроксимационные свойства средних Зигмунда — Рисса рядов Фурье по мультипликативным системам Виленкина в пространстве L_p.

Из соотношения (2) нетрудно получить, что

$$R_n^{2,1}(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(2k+1)s_k(f,x),$$

где $s_k(f,x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — частичные суммы ортогонального ряда Фурье.

Среди методов рациональной аппроксимации выделяется ряд операторов, являющихся аналогами известных полиномиальных периодических операторов Фурье, Фейера, Джексона, Валле Пуссена [12–14]. В [15] были построены и исследованы средние Зигмунда — Рисса рациональных рядов Фурье по одной ортогональной системе рациональных дробей Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами. В частности, найдены оценки равномерных рациональных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, и установлены значения параметров, обеспечивающих наилучшую оценку этим методом.

В 1979 году Е. А. Ровба [16] ввел рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$, где a_k либо действительные и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно сопряженные. На множестве суммируемых на отрезке с весом $1/\sqrt{1-x^2}$ функций $f(x)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва — Маркова [16]:

$$s_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\sin \lambda_n(v,u)}{\sin \frac{v-u}{2}}\,dv, \quad x = \cos u, \tag{3}$$

где

$$\lambda_n(v,u) = \int_{u}^{v} \lambda_n(y)\,dy,$$

$$\lambda_n(y) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}, \quad z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |\alpha_k| < 1.$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ — множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_kx)}, \quad p_n(x) \in \mathbb{P}_n,\ a_k = \frac{2z_k}{1+z_k^2},\ k = 1, 2, \dots, n,$$

A — множество параметров $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ и $s_n(1, x) \equiv 1$. В частности, если положить $a_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, то $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье — Чебышёва.

Рациональные интегральные операторы (3) нашли широкое применение в рациональной аппроксимации [17–19]. С их помощью были открыты некоторые классы функций на отрезке $[-1, 1]$, отражающие особенности рациональной аппроксимации. В [20] изучены аппроксимации функции Маркова на отрезке $[-1, 1]$ суммами Абеля — Пуассона рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва (3). Аналогичная задача для сумм Фейера решена в [21].

Представляет интерес ввести суммы Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва (3) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов в расширенной комплексной плоскости. В работе устанавливаются интегральное представление введенного оператора и некоторые аппроксимационные свойства соответствующего ему полиномиального аналога.

Задача аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ ведет свою богатую историю с начала 20-го в., когда полиномиальная аппроксимация этого примера негладкой функции затронула интересы Лебега, Джексона и С. Н. Бернштейна [22]. Новый импульс в этом направлении придала работа Ньюмена [23] о рациональной аппроксимации функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$. Эта тема была продолжена во многих работах [24, 25]. Наиболее полный результат установил Г. Шталь [26].

Исследование приближений функции $|x|^s, s > 0$, также берет свое начало с работы С. Н. Бернштейна [27]. К настоящему времени имеется достаточно большое число работ, посвященных как наилучшим приближениям этой функции [28–31], так и конкретным методам приближений [32–34].

Отдельной задачей в работе изучаются аппроксимации функции $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, суммами Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва (3). Получены соответствующие оценки равномерных рациональных приближений и установлено, что изучаемые суммы Зигмунда — Рисса при определенном выборе параметров также доставляют равномерные приближения, лучшие в смысле порядка, чем соответствующие полиномиальные аналоги.

1. Суммы Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов

Пусть $q \in (0, n)$ — произвольное натуральное число. A_q — подмножество параметров из A таких, что среди чисел $z_1, z_2, \dots, z_n$ ровно q различных и кратность каждого параметра равна $m, n = mq$. Составим суммы

$$R_{n,q}(f, x) = \frac{1}{(m+1)^2} \sum_{k=0}^{m} (2k+1) s_{kq}(f, x), \quad x \in [-1, 1],\ m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \tag{4}$$

где $s_{kq}(f, \cdot)$, $k = 1, 2, \dots, m$, — рациональный интегральный оператор Фурье — Чебышёва (3) порядка kq. Выражение (4) естественно назвать суммами Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышева (3).

Из представления (4) следует, что суммы $R_{n,q} : f \to \mathbb{R}_n(A_q)$, где $\mathbb{R}_n(A_q)$ —

множество рациональных функций вида

$$\frac{\pi_n(x)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{q}(1+a_kx)\right)^m}, \quad \pi_n(x)\in\mathbb{P}_n,\ z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ k=1,2,\ldots,q,\ n=mq,$$

причем $R_{n,q}(1,x)\equiv 1$.

Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с q геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый. Отметим, что впервые аппроксимации с ограничениями на количество геометрически различных полюсов изучались в работах К. Н. Лунгу [35, 36].

Теорема 1. *Для рациональных функций Зигмунда — Рисса* (4) *справедливо интегральное представление*

$$R_{n,q}(f,x)=\frac{1}{8\pi(m+1)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)K_{n,q}(u,v)\,dv, \quad x\in[-1,1],\ x=\cos u, \tag{5}$$

где

$$K_{n,q}(u,v)=\frac{1}{\sin\frac{v-u}{2}\sin^2\frac{\lambda_q}{2}}\Bigg(\sin\left(\lambda_q-\frac{v-u}{2}\right)-\sin t$$
$$+(2m+3)\sin\left(\frac{v-u}{2}+m\lambda_q\right)-(2m+1)\sin\left(\frac{v-u}{2}+(m+1)\lambda_q\right)\Bigg),$$

$$\lambda_q=\lambda_q(u,v)=\int\limits_u^v\sum_{k=1}^{q}\frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2}\,dy.$$

Доказательство. Известно [16], что интегральный оператор (3) может быть представлен в виде

$$s_n(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\left(\zeta\frac{\omega_n(\zeta)}{\omega_n(\xi)}-\xi\frac{\omega_n(\xi)}{\omega_n(\zeta)}\right)\frac{dv}{\zeta-\xi}, \quad \xi=e^{iu},\ \zeta=e^{iv},\ x=\cos u,$$

где

$$\omega_n(\zeta)=\prod_{k=1}^{n}\frac{\zeta+z_k}{1+z_k\zeta}, \quad z_k=\frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}},\ |z_k|<1.$$

В случае q различных полюсов последнее интегральное представление, образом которого является рациональная функция порядка kq, $k=0,1,2,\ldots$, имеет вид

$$s_{kq}(f,x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\left(\zeta\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k-\xi\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right)\frac{dv}{\zeta-\xi}, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Подставив это представление в (4), поменяем порядок суммирования и интегрирования. Имеем

$$R_{n,q}(f,x)=\frac{1}{2\pi(m+1)^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)K_{n,q}(u,v)\,dv, \quad x\in[-1,1],\ x=\cos u,$$

где

$$K_{n,q}(u,v) = \left(\sqrt{\frac{\zeta}{\xi}}\sum_{k=0}^{m}(2k+1)\left(\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)}\right)^k - \sqrt{\frac{\xi}{\zeta}}\sum_{k=0}^{m}(2k+1)\left(\frac{\omega_q(\xi)}{\omega_q(\zeta)}\right)^k\right)\frac{1}{2i\sin\frac{v-u}{2}}.$$

Отметим, что

$$\frac{\omega_q(\zeta)}{\omega_q(\xi)} = e^{i\lambda_q(u,v)},$$

где $\lambda_q(u,v)$ определено в формулировке настоящей теоремы.

Чтобы прийти к (5), достаточно заметить, что в скобках представления $K_{n,q}(u,v)$ находится разность двух взаимно комплексно сопряженных выражений, и использовать известное равенство

$$\sum_{k=0}^{m}(2k+1)q^k = \frac{1+q-(2m+3)q^{m+1}+(2m+1)q^{m+2}}{(1-q)^2}, \quad q \neq 1. \tag{6}$$

Теорема 1 доказана.

При $z_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$, будем обозначать $R_{n,q}(f,x)$ через $R_n(f,x)$. Тогда последняя величина представляет собой суммы Зигмунда — Рисса рядов Фурье по системе полиномов Чебышёва первого рода. Отсюда получаем

Следствие 1. *Имеет место интегральное представление*

$$R_n(f,x) = \frac{1}{8\pi(n+1)^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)K_n(u,v)\,dv, \quad x = \cos u,\ x \in [-1,1], \tag{7}$$

где

$$K_n(u,v) = \frac{(2n+3)\sin(2n+1)\frac{v-u}{2} - (2n+1)\sin(2n+3)\frac{v-u}{2}}{\sin^3\frac{v-u}{2}}.$$

Интегральное представление (7) содержится в [15]. Оно получено как частный случай сумм Зигмунда — Рисса рядов Фурье по системе ортогональных рациональных функций Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

2. Исследования сумм Зигмунда — Рисса в полиномиальном случае

Выясним асимптотическое поведение при $n \to \infty$ константы Лебега оператора (7), т. е. выражения вида

$$L_n = \frac{1}{8\pi(n+1)^2}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{(2n+3)\sin(2n+1)(t/2) - (2n+1)\sin(2n+3)(t/2)}{\sin^3(t/2)}\right| dt,\ n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$L_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{x_1}\frac{\sin u}{u}\,du + \frac{4}{\pi}\int_{x_1}^{+\infty}\frac{|\sin u - u\cos u|}{u^3}\,du + O\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

где $x_1 = 4{,}493\ldots$ *— первый корень уравнения* $\psi(u) = \sin u - u\cos u = 0$ *на промежутке* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Воспользовавшись четностью подынтегральной функции, запишем

$$L_n = \frac{1}{4\pi(n+1)^2}\int\limits_0^\pi \frac{|(2n+3)\sin(2n+1)(t/2) - (2n+1)\sin(2n+3)(t/2)|}{\sin^3(t/2)}\,dt.$$

Несложными преобразованиями интеграл справа приводится к виду

$$L_n = \frac{1}{2\pi(n+1)^2}\int\limits_0^\pi \frac{|\sin(n+1)t\cos t/2 - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin t/2|}{\sin^3 t/2}\,dt.$$

Используя легко проверяемое асимптотическое равенство

$$\frac{1}{\sin^3 u} - \frac{1}{u^3} = O\left(\frac{1}{u}\right), \quad u \to 0,$$

заключаем, что

$$L_n = \frac{4}{\pi(n+1)^2}\int\limits_0^\pi \frac{|\sin(n+1)t\cos t/2 - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin t/2|}{t^3}\,dt + O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

В интеграле справа выполним замену переменного по формуле $(n+1)t \mapsto u$. Тогда

$$L_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{(n+1)\pi} \frac{\left|\sin u\cos\frac{u}{2(n+1)} - 2(n+1)\cos u\sin\frac{u}{2(n+1)}\right|}{u^3}\,du + O\left(\frac{1}{n+1}\right).$$

Поскольку равномерно по $u \in (0, (n+1)\pi)$ при $n \in \mathbb{N}$

$$\cos\frac{u}{2(n+1)} = 1 - O\bigg(\left(\frac{u}{2(n+1)}\right)^2\bigg),$$

$$\sin\frac{u}{2(n+1)} = \frac{u}{2(n+1)} - O\bigg(\left(\frac{u}{2(n+1)}\right)^3\bigg),$$

учитывая, что $|u \pm v| = |u| + \theta|v|$, $\theta \in [-1, 1]$, получим

$$\left|\sin u\cos\frac{u}{2(n+1)} - 2(n+1)\cos u\sin\frac{u}{2(n+1)}\right| = |\sin u - u\cos u| + \frac{\theta_1 u^3}{(n+1)^2},$$

где θ_1, — некоторая постоянная величина, не зависящая от n и u.

Из последнего равенства следует, что

$$L_n = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^3}\,du + O\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad n \to \infty.$$

Функция $\psi(u) = \sin u - u\cos u$ имеет на интервале $(0, (n+1)\pi)$ ровно n нулей. Обозначим их через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда

$$L_n = \frac{4}{\pi}\left[\int\limits_0^{x_1} \frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\,du + \int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^3}\,du\right] + O\left(\frac{1}{n+1}\right), \ n \to \infty.$$

Поскольку
$$\int \frac{\sin u - u\cos u}{u^3}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\sin u}{u}\,du - \frac{\sin u - u\cos u}{2u^2} + C,$$
из последнего асимптотического равенства получаем, что
$$L_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{x_1} \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{4}{\pi}\int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^3}\,du + O\left(\frac{1}{n+1}\right), \quad n\to\infty.$$
Первый интеграл справа существует. Учитывая, что
$$\int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^3}\,du \le \int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi}\frac{du}{u^3} + \int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi}\frac{du}{u^2} = \frac{1}{2x_1^2} + \frac{1}{x_1} + O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$
заключаем, что при $n\to\infty$ существует и второй интеграл. Следовательно, приходим к (8). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Из теоремы 2 следует, что константы Лебега сумм Зигмунда — Рисса полиномиального ряда Фурье — Чебышёва ограничены. Последнее, в свою очередь, означает, что исследуемые суммы Зигмунда — Рисса будут равномерно сходиться для любой функции $f\in C[-1,1]$. Теорема 2 является алгебраическим аналогом результата А. И. Степанца [37, с. 261].

Рассмотрим классы $H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma\in(0,1]$, функций $f(x)$, удовлетворяющих условию Липшица степени γ с константой единица, т. е. условию
$$|f(x_1)-f(x_2)| \le |x_1-x_2|^\gamma, \quad x_1,x_2\in[-1,1].$$

Теорема 3. *Если функция f принадлежит $H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma\in(0,1]$, то справедливы неравенства*
$$|f(x)-R_n(f,x)| \le \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)^\gamma c_1(\gamma) + O\left(\frac{(\sqrt{1-x^2})^\gamma}{n+1}\right) + \delta_n^{(\gamma)}(x), \qquad (9)$$
если $\gamma\in(0,1)$, и
$$|f(x)-R_n(f,x)| \le \frac{8}{\pi^2}\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(n+1)}{n+1} + O\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right) + \delta_n^{(1)}(x), \qquad (10)$$
если $\gamma=1$, где
$$\delta_n^{(\gamma)}(x) = \begin{cases} \frac{2^{2-\gamma}c_2(\gamma)|x|^\gamma}{(n+1)^{2\gamma}} + O\left(\frac{|x|^\gamma}{n+1}\right), & \gamma\in(0,1/2),\\ \frac{2^{\frac{5}{2}}}{\pi^2}\frac{\sqrt{|x|}\ln(n+1)}{n+1} + O\left(\frac{\sqrt{|x|}}{n+1}\right), & \gamma=1/2,\\ \frac{2^{2-\gamma}|x|^\gamma}{\pi^{2(1-\gamma)}(2\gamma-1)(n+1)} + O\left(\frac{|x|^\gamma}{(n+1)^{2\gamma}}\right), & \gamma\in(1/2,1], \end{cases}$$
$$c_1(\gamma) = \frac{1}{2-\gamma}\int\limits_0^{x_1} u^{\gamma-1}\sin u\,du + \int\limits_{x_1}^{+\infty}\frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-\gamma}}\,du,$$
$$c_2(\gamma) = \frac{1}{2-2\gamma}\int\limits_0^{x_1} u^{2\gamma-1}\sin u\,du + \int\limits_{x_1}^{+\infty}\frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-2\gamma}}\,du,$$

$x_1 = 4{,}493\ldots$ — *первый корень уравнения* $\psi(u) = \sin u - u\cos u = 0$ *на интервале* $(0, +\infty)$.

Доказательство. Ввиду точности оператора $R_n(\cdot,\cdot)$ на константах из (7) находим

$$f(x) - R_n(f,x) = \frac{1}{8\pi(n+1)^2}\int_{-\pi}^{\pi}[f(\cos u) - f(\cos(u+t))] \times \frac{(2n+3)\sin(2n+1)(t/2) - (2n+1)\sin(2n+3)(t/2)}{\sin^3(t/2)}\,dt,$$

где $x = \cos u$, $x \in [-1,1]$.

Разбивая интеграл справа на два интеграла по промежуткам $[-\pi,0]$ и $[0,\pi]$, и выполнив в первом из них замену переменного по формуле $t \mapsto -t$, получим

$$f(x) - R_n(f,x) = I_n(+u) + I_n(-u), \tag{11}$$

где

$$I_n(\pm u) = \frac{1}{4\pi(n+1)^2}\int_0^{\pi}[f(\cos u) - f(\cos(u\pm t))] \times \frac{\sin(n+1)t\cos(t/2) - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin(t/2)}{\sin^3(t/2)}\,dt.$$

Учитывая, что

$$|f(\cos u) - f(\cos(u\pm t))| \le 2^{\gamma}\left[|\sin u|^{\gamma}\sin^{\gamma}\frac{t}{2} + |\cos u|^{\gamma}\sin^{2\gamma}\frac{t}{2}\right],$$

получим

$$|I_n(\pm u)| \le \frac{2^{\gamma-2}}{\pi(n+1)^2}[|\sin u|^{\gamma}J_1 + |\cos u|^{\gamma}J_2], \quad n\in\mathbb{N}, \tag{12}$$

где

$$J_1 = \int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1)t\cos(t/2) - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin(t/2)|}{\sin^{3-\gamma}(t/2)}\,dt,$$

$$J_2 = \int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1)t\cos(t/2) - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin(t/2)|}{\sin^{3-2\gamma}(t/2)}\,dt.$$

Исследуем каждый интеграл по отдельности. Воспользовавшись в интеграле J_1 легко проверяемым асимптотическим равенством

$$\frac{1}{\sin^{3-\gamma}(t/2)} - \frac{1}{(t/2)^{3-\gamma}} = O\left(\frac{1}{t^{1-\gamma}}\right), \quad t\to 0,\ \gamma\in(0,1],$$

получим

$$J_1 = 2^{3-\gamma}\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1)t\cos(t/2) - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin(t/2)|}{t^{3-\gamma}}\,dt + O\left(\int_0^{\pi}\frac{|\sin(n+1)t\cos(t/2) - 2(n+1)\cos(n+1)t\sin(t/2)|}{t^{1-\gamma}}\,dt\right), \quad n\to\infty.$$

В интегралах справа выполним замену переменного по формуле $(n+1)t \mapsto u$. Тогда

$$J_1 = 2^{3-\gamma}(n+1)^{2-\gamma} \int\limits_0^{(n+1)\pi} \frac{\left|\sin u \cos\frac{u}{2(n+1)} - 2(n+1)\cos u \sin\frac{u}{2(n+1)}\right|}{u^{3-\gamma}}\, du + O(n+1).$$

Из последней оценки, очевидно, следует, что

$$J_1 = 2^{3-\gamma}(n+1)^{2-\gamma} \int\limits_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-\gamma}}\, du + O(n+1), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Пусть $\gamma \in (0,1)$. Поступая, как при доказательстве теоремы 2, находим, что

$$J_1 = 2^{3-\gamma}(n+1)^{2-\gamma} c_1(\gamma) + O(n+1), \quad n \to \infty, \tag{14}$$

где $c_1(\gamma)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Пусть теперь $\gamma = 1$. Тогда из (13) получим

$$J_1 = 4(n+1)\left[1 - \cos x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k \int\limits_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{\sin u - u\cos u}{u^2}\, du \right.$$
$$\left. + (-1)^n \int\limits_{x_n}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u - u\cos u}{u^2}\, du\right] + O(n+1), \quad n \to \infty.$$

Вычислив интегралы справа, придем к асимптотическому равенству

$$J_1 = 4(n+1)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cos x_k\right] + O(n+1), \quad n \to \infty. \tag{15}$$

Известно [38, с. 30], что корни x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, уравнения $\psi(u) = \sin u - u\cos u = 0$ или, что то же самое, $\operatorname{tg} u = u$ имеют следующее асимптотическое выражение:

$$x_k = \frac{\pi(2k+1)}{2} - \frac{2}{\pi(2k+1)} + o\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \to \infty.$$

При этом в равенстве (15) получим

$$J_1 = 4(n+1)\left[1 + 2\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2}{\pi(2k+1)} + c\right] + O(n+1), \quad n \to \infty,$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Воспользовавшись неравенством $\sin\theta \le \theta$, $\theta \ge 0$, будем иметь

$$J_1 \le \frac{16(n+1)}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1} + O(n+1), \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует, что

$$J_1 \le \frac{8}{\pi}(n+1)\ln(n+1) + O(n+1), \quad n \to \infty. \tag{16}$$

Объединив соотношения (14) и (16), получим при $n \to \infty$

$$J_1 \le \begin{cases} 2^{3-\gamma}(n+1)^{2-\gamma}c_1(\gamma) + O(n+1), & \gamma \in (0,1), \\ \frac{8}{\pi}(n+1)\ln(n+1) + O(n+1), & \gamma = 1. \end{cases} \tag{17}$$

Исследуем интеграл J_2 (см. (12)). Рассуждая, как в случае с интегралом J_1, приходим к выражению

$$J_2 = 2^{3-2\gamma}(n+1)^{2-2\gamma} \int\limits_0^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-2\gamma}}\, du + O(n+1).$$

Если $\gamma \in (0, 1/2)$, то

$$J_2 = 2^{3-2\gamma}(n+1)^{2-2\gamma}c_2(\gamma) + O(n+1), \tag{18}$$

где постоянная $c_2(\gamma)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Если $\gamma = 1/2$, то

$$J_2 \le \frac{8}{\pi}(n+1)\ln(n+1) + O(n+1), \quad n \to \infty. \tag{19}$$

Пусть $\gamma \in (1/2, 1]$. Тогда

$$J_2 = 2^{3-2\gamma}(n+1)^{2-2\gamma}\left[\int\limits_0^{x_1} \frac{\sin u - u\cos u}{u^{3-2\gamma}}\, du + \int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-2\gamma}}\, du\right] + O(n+1), \quad n \to \infty.$$

Учитывая равенство

$$\int\limits_0^{x_1} \frac{\sin u - u\cos u}{u^{3-2\gamma}}\, du = \frac{1}{2-2\gamma}\int\limits_0^{x_1} u^{2\gamma-1}\sin u\, du,$$

а также легко проверяемое неравенство

$$\int\limits_{x_1}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin u - u\cos u|}{u^{3-2\gamma}}\, du \le \frac{(\pi(n+1))^{2\gamma-1}}{2\gamma-1} - \frac{x_1^{2\gamma-1}}{2\gamma-1} + \frac{1}{(2-2\gamma)x_1^{2-2\gamma}} - \frac{1}{(2-2\gamma)(\pi(n+1))^{2-2\gamma}},$$

приходим к оценке

$$J_2 \le \frac{2^{3-2\gamma}\pi^{2\gamma-1}(n+1)}{2\gamma-1} + O((n+1)^{2-2\gamma}), \quad n \to \infty. \tag{20}$$

Объединив соотношения (18), (19) и (20), получим при $n \to \infty$

$$J_2 \le \begin{cases} 2^{3-2\gamma}(n+1)^{2-2\gamma}c_2(\gamma) + O(n+1), & \gamma \in (0, 1/2), \\ \frac{8}{\pi}(n+1)\ln(n+1) + O(n+1), & \gamma = 1/2, \\ \frac{2^{3-2\gamma}\pi^{2\gamma-1}(n+1)}{2\gamma-1} + O((n+1)^{2-2\gamma}), & \gamma \in (1/2, 1]. \end{cases} \tag{21}$$

Подставив оценки (17) и (21) в (12), с учетом (11) получим (9) и (10). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Из теоремы 3 следует, что приближения функций $f \in H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, суммами Зигмунда — Рисса ряда Фурье — Чебышёва существенным образом зависят от положения точки x на отрезке $[-1,1]$, причем приближения на концах отрезка имеют бóльшую скорость убывания, чем в целом на отрезке.

2. Рациональные приближения функции $|x|^s$

Изучим приближения функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, на отрезке $[-1,1]$ рациональными суммами Зигмунда — Рисса (4) с произвольным фиксированным количеством геометрически различных полюсов в расширенной комплексной плоскости. Ввиду того, что исследуемая функция имеет степенную особенность при $x = 0$ и является четной, необходимо специальным образом выбрать параметры аппроксимирующей рациональной функции. Пусть, как и прежде, $q \in (0,n)$ — произвольное натуральное число. A_{2q} представляет собой множество из $2n$ параметров, имеющих вид

$$z_k = i\alpha_k,\ z_{k+q} = -i\alpha_k, \quad k = 1,2,\ldots,q,\ n = mq.$$

Другими словами, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями вида

$$r_{2n}(x) = \frac{\pi_n(x^2)}{\left(\prod\limits_{k=1}^{q}(1 + a_k^2x^2)\right)^m}, \quad a_k = \frac{2z_k}{1 + z_k^2},$$

где $\pi_n(x^2)$ — четный полином степени не выше $2n$.

Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q}) = |x|^s - R_{2n,2q}(|\cdot|^s, x), \quad x \in [-1,1],$$
$$\varepsilon_{2n,2q}(A_{2q}) = \||x|^s - R_{2n,2q}(|\cdot|^s, x)\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 4. *Для приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, на отрезке $[-1,1]$ суммами Зигмунда — Рисса (4) имеют место:*

(1) *оценка поточечных приближений:*

$$|\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q})| \le \frac{2^{2-s}}{(m+1)^2\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1 + 2t^2\cos 2u + t^4}}$$
$$\times \frac{1 + |\chi_{2q}(t)| - (2m+3)|\chi_{2q}(t)|^{m+1} + (2m+1)|\chi_{2q}(t)|^{m+2}}{(1 - |\chi_{2q}(t)|)^2}\,dt, \quad (22)$$

$x = \cos u$, $x \in [-1,1]$, *где*

$$\chi_{2q}(t) = \prod_{k=1}^{q}\frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2};$$

(2) *оценка равномерных приближений:*

$$\varepsilon_{2n,2q}(A_{2q}) \le \varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q}), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (23)$$

где

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q}) = \frac{2^{2-s}}{(m+1)^2\pi}\sin\frac{\pi s}{2}$$
$$\times \int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\frac{1 + |\chi_{2q}(t)| - (2m+3)|\chi_{2q}(t)|^{m+1} + (2m+1)|\chi_{2q}(t)|^{m+2}}{(1 - |\chi_{2q}(t)|)^2}\,dt. \quad (24)$$

Доказательство. Из представления (4) с учетом точности сумм Зигмунда — Рисса на константах находим

$$\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q}) = \frac{1}{(m+1)^2}\sum_{k=0}^{m}(2k+1)\delta_{2k,2q}(x, A_{2q}), \quad x \in [-1,1], \quad (25)$$

где $\delta_{2k,2q}(x, A_{2q})$, $k = 0, \dots, m$, представляют собой приближения функции $|x|^s$ на отрезке $[-1, 1]$ рациональным интегральным оператором Фурье — Чебышёва (3). Известно [17], что имеет место интегральное представление:

$$\delta_{2n}(x, A) = \frac{(-1)^n 2^{1-s}}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int\limits_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \left[\frac{\xi^2 \omega_{2n}(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\overline{\omega_{2n}(\xi)}}{\xi^2+t^2} \right] \chi_{2n}(t)\, dt,$$

где

$$\omega_{2n}(\xi) = \prod_{k=1}^{n} \frac{\xi^2 + \alpha_k^2}{1 + \alpha_k^2 \xi^2}, \quad \chi_{2n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \frac{t^2 - \alpha_k^2}{1 - \alpha_k^2 t^2}, \quad \xi = e^{i\theta},\ x = \cos\theta.$$

В условиях ограничений на параметры аппроксимирующей функции последнее представление примет вид

$$\delta_{2m,2q}(x, A_{2q}) = \frac{(-1)^m 2^{1-s}}{\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \times \int\limits_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \left[\frac{\xi^2 \omega_{2q}^m(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\overline{\omega_{2q}^m(\xi)}}{\xi^2+t^2} \right] \chi_{2q}^m(t)\, dt, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Подставив последнее интегральное представление в (25) и поменяв порядок суммирования и интегрирования, получим

$$\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q}) = \frac{2^{1-s}}{(m+1)^2\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \times \int\limits_0^1 (1-t^2)^s t^{1-s} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (2k+1) \chi_{2q}^k(t) \left[\frac{\xi^2 \omega_{2q}^k(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\overline{\omega_{2q}^k(\xi)}}{\xi^2+t^2} \right] dt.$$

Слагаемые в квадратных скобках являются комплексными сопряжениями один другого. Следовательно, их сумма представляет собой действительнозначное выражение. Выполнив несложные преобразования, находим, что

$$\frac{\xi^2 \omega_{2q}^k(\xi)}{1+t^2\xi^2} + \frac{\overline{\omega_{2q}^k(\xi)}}{\xi^2+t^2} = \frac{2\cos\psi_{2qk}(x,t)}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m,$$

где

$$\psi_{2qk}(x,t) = \arg \frac{\xi^2 \omega_{2q}^k(\xi)}{1+t^2\xi^2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, m.$$

В результате будем иметь

$$\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q}) = \frac{2^{2-s}}{(m+1)^2\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \times \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (2k+1) \chi_{2q}^k(t) \cos\psi_{2qk}(x,t)\, dt. \quad (26)$$

Из последнего представления приходим к оценке

$$|\varepsilon_{2n,2q}(x, A_{2q})| \le \frac{2^{2-s}}{(m+1)^2\pi} \sin \frac{\pi s}{2} \int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u + t^4}} \sum_{k=0}^{m} (2k+1) |\chi_{2q}(t)|^k\, dt.$$

Применив к сумме в подынтегральном выражении равенство (6), докажем первое утверждение теоремы 4, т. е. оценку (22).

Оценка (23) следует из (22), если заметить, что

$$\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4} \geq 1-t^2. \quad t\in[0,1],\ u\in\mathbb{R}.$$

Теорема 4 доказана.

В теореме 4 положим $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Тогда величины $\varepsilon_{2n,2}(x, O) = \varepsilon_{2n}^{(0)}(x)$ и $\varepsilon_{2n,2}(O) = \varepsilon_{2n}^{(0)}$ представляют собой соответственно поточечные и равномерные приближения функции $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Зигмунда — Рисса полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. В этом случае из теоремы 4 получим

Следствие 2. *Для приближений функции $|x|^s$, $s \in (0, 2)$, на отрезке $[-1, 1]$ суммами Зигмунда — Рисса полиномиального ряда Фурье — Чебышёва справедливы*

(1) *поточечная оценка:*

$$|\varepsilon_{2n}^{(0)}(x)| \leq \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)^2}\sin\frac{\pi s}{2}$$
$$\times\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\,\frac{1+t^2-(2n+3)t^{2n+2}+(2n+1)t^{2n+4}}{(1-t^2)^2}\,dt, \quad x\in[-1,1]; \tag{27}$$

(2) *интегральное представление*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} = \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)^2}\sin\frac{\pi s}{2}$$
$$\times\int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\,\frac{1+t^2-(2n+3)t^{2n+2}+(2n+1)t^{2n+4}}{(1-t^2)^2}\,dt,\ n\in\mathbb{N}. \tag{28}$$

Неравенство (27) *точное. Равенство достигается при* $x = 0$.

Доказательство. Оценка (27) непосредственно следует из неравенства (22), если положить $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$. Докажем ее точность. С этой целью в неравенстве (27) положим $x = 0$. Тогда

$$|\varepsilon_{2n}(0)| \leq \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)^2}\sin\frac{\pi s}{2}$$
$$\times\int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1}t^{1-s}\,\frac{1+t^2-(2n+3)t^{2n+2}+(2n+1)t^{2n+4}}{(1-t^2)^2}\,dt. \tag{29}$$

С другой стороны, положив в соотношении (26) $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$, получим

$$\varepsilon_{2n}(x) = \frac{2^{2-s}}{\pi(n+1)^2}\sin\frac{\pi s}{2}\int\limits_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}$$
$$\times\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(2k+1)\cos\psi_{2k}(x,t)t^{2k}\,dt,\ x\in[-1,1],\ s\in(0,2),$$

где

$$\psi_{2k}(x,t) = \arg \frac{\xi^2}{1+\xi^2 t^2} + 2ku, \quad \xi = e^{iu},\ x = \cos u.$$

Подставив в последнем соотношении значение $x = 0$, убеждаемся, что в оценке (29) неравенство переходит в равенство.

Равенство (28) следует из (23) при $\alpha = 0$ с учетом того, что оценка в полиномиальном случае достижима при $x = 0$. Следствие 2 доказано.

3. Асимптотика мажоранты равномерных приближений

Найдем асимптотическое выражение при $m \to \infty$ величины (24). С этой целью в интеграле справа выполним замену переменного интегрирования по формуле $t^2 = (1-u)/(1+u)$, $dt = -du/((1+u)^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}})$. Тогда

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q}) = \frac{2}{(m+1)^2\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \int\limits_0^1 \mu_s(u) G_n(|\pi_q(u)|)\, du, \tag{30}$$

где

$$G_n(y) = \frac{1+y-(2m+3)y^{m+1}+(2m+1)y^{m+2}}{(1-y)^2},$$

$$\mu_s(u) = \frac{u^{s-1}}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}, \quad \pi_q(u) = \prod_{k=1}^{q} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}, \quad \beta_k = \frac{1-\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2},\ k = 1,2,\ldots,q.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, т. е. $\beta_k = \beta_k(n)$, $k = 1,2,\ldots,q$. При этом будем полагать, что выполняются следующие условия:

$$\lim_{m\to\infty} m\beta_k = \infty, \quad k = 1,2,\ldots,q,\ n = mq; \tag{31}$$

Без нарушения общности можно также полагать параметры $\beta_k, k = 1,2,\ldots,q$, упорядоченными следующим образом:

$$0 < \beta_q \le \beta_{q-1} \le \ldots \le \beta_1 \le 1.$$

Теорема 5. *Для величины $\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q})$ при $m \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q}) \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2} \begin{cases} \dfrac{2^{2-s}\Gamma(s)}{(1-s)(2-s)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s (m+1)^s} + \Phi_m^{(s)}(A_{2q}), & s \in (0,1), \\ \dfrac{2\ln(m+1)}{(m+1)\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}} + \Phi_m^{(1)}(A_{2q}), & s = 1, \\ \dfrac{2^{2-s}\Gamma(s)}{(2-s)\left(\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s (m+1)^s} + \Phi_m^{(s)}(A_{2q}), & s \in (1,2). \end{cases} \tag{32}$$

где

$$\Phi_m^{(s)}(A_{2q}) = \frac{2}{(m+1)^2}\left[\sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) \frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du + \int\limits_{\beta_1}^{1} \mu_s(u) \frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du\right], \tag{33}$$

$\Gamma(s)$ — *гамма-функция Эйлера*, $n = mq$.

Доказательство. Представим мажоранту (30) в виде

$$\varepsilon^*_{2n,2q}(A_{2q}) = \frac{2}{(m+1)^2\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\left[I_n^{(1)}(A_{2q}) + I_n^{(2)}(A_{2q}) + I_n^{(3)}(A_{2q})\right], \quad m \in \mathbb{N}, \tag{34}$$

где

$$I_n^{(1)}(A_{2q}) = \int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u) G_n(\pi_q(u))\, du, \quad I_n^{(2)}(A_{2q}) = \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) G_n(|\pi_q(u)|)\, du,$$

$$I_n^{(3)}(A_{2q}) = \int\limits_{\beta_1}^{1} \mu_s(u) G_n(|\pi_q(u)|)\, du.$$

Исследуем асимптотическое поведение при $m \to \infty$ каждой из трех величин по отдельности. Так, для величины $I_n^{(1)}(A_{2q})$ применим метод исследования асимптотического поведения интегралов, предложенный в [39, с. 375]. Продифференцируем интеграл справа два раза по параметру m. Тогда

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m} = \int\limits_0^{\beta_q} \frac{\mu_s(u)}{(1-\pi_q(u))^2}\big(-2\pi_q^{m+1}(u) - (2m+3)\pi_q^{m+1}(u)\ln\pi_q(u)$$
$$+ 2\pi_q^{m+2}(u) + (2m+1)\pi_q^{m+2}(u)\ln\pi_q(u)\big)\, du, \tag{35}$$

$$\frac{\partial^2 I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m^2} = -4\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)} e^{(m+1)S(u)}\, du$$
$$- (2m+3)\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^2 e^{(m+1)S(u)}\, du$$
$$+ (2m+1)\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\left(\frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\right)^2 e^{(m+2)S(u)}\, du, \quad S(u) = \sum_{k=1}^{q}\ln\frac{\beta_k - u}{\beta_k + u}. \tag{36}$$

Пусть $s \in (0,1]$. Изучим асимптотическое поведение интегралов справа при $m \to \infty$. Воспользуемся методом Лапласа [40, 41]. Функция $S(u)$ убывает на отрезке $[0, \beta_q]$ и, значит, достигает своего максимального значения при $u = 0$. Раскладывая функцию $S(u)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $u = 0$ и учитывая, что

$$\mu_s(u) \sim u^{s-1}, \quad \frac{\ln\pi_q(u)}{1-\pi_q(u)} \sim -1, \quad u \to 0,$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$ и $m \to \infty$ в (48) находим

$$\frac{\partial^2 I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m^2} \sim (2m+1)\int\limits_0^{\varepsilon} u^{s-1}\exp\left[-2(m+2)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right] du$$
$$- (2m-1)\int\limits_0^{\varepsilon} u^{s-1}\exp\left[-2(m+1)u\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right] du.$$

Выполнив в интегралах справа замены переменных соответственно по формулам $2(m+2)\left(\sum\limits_{k=1}^{q} 1/\beta_k\right)u \mapsto t$ и $2(m+1)\left(\sum\limits_{k=1}^{q} 1/\beta_k\right)u \mapsto t$, получим

$$\frac{\partial^2 I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m^2} \sim \frac{2\Gamma(s)}{\left(2(m+1)\sum\limits_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k}\right)^s}, \quad m \to \infty.$$

Чтобы прийти к асимптотике интеграла $I_n^{(1)}(A_{2q})$, дважды проинтегрируем правую и левую части последнего асимптотического равенства по параметру m. Имеем

$$I_n^{(1)}(A_{2q}) \sim \begin{cases} \frac{2\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0,1), \\ \frac{(m+1)\ln(m+1)}{\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}}, & s = 1. \end{cases} \tag{37}$$

Пусть $s \in (1,2)$. Тогда достаточно однократного дифференцирования исследуемого интеграла по параметру m. При этом из соотношения (35) находим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m} = -2\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\frac{\pi_q^{m+1}(u)\,du}{1-\pi_q(u)} - (2m+3)\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\frac{\ln \pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\frac{\pi_q^{m+1}(u)\,du}{1-\pi_q(u)}$$
$$+ (2m+1)\int\limits_0^{\beta_q} \mu_s(u)\frac{\ln \pi_q(u)}{1-\pi_q(u)}\frac{\pi_q^{m+2}(u)\,du}{1-\pi_q(u)}.$$

Снова воспользовавшись методом Лапласа для исследования асимптотического поведения интегралов справа, получим

$$\frac{\partial I_n^{(1)}(A_{2q})}{\partial m} \sim \frac{(2m+1)\Gamma(s)}{\left(2(m+1)\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, \quad s \in (1,2),\ m \to \infty.$$

Выполнив в последнем асимптотическом равенстве интегрирование по параметру m, придем к выражению

$$I_n^{(1)}(A_{2q}) \sim \frac{2\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{(2-s)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, \quad s \in (1,2),\ m \to \infty. \tag{38}$$

Из асимптотических равенств (37) и (38) находим, что при $m \to \infty$

$$I_n^{(1)}(A) \sim \begin{cases} \frac{2\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (0,1), \\ \frac{(m+1)\ln(m+1)}{\sum\limits_{j=1}^{q}\frac{1}{\beta_j}}, & s = 1, \\ \frac{2\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{(2-s)\left(2\sum\limits_{k=1}^{q}\frac{1}{\beta_k}\right)^s}, & s \in (1,2). \end{cases} \tag{39}$$

Займемся выражением $I_n^{(2)}(A)$. Разобьем каждый из $q-1$ интегралов, входящих в его определение, на три интеграла следующим образом:

$$I_n^{(2)}(A_{2q}) = \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) \frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du + \delta_m(A_{2q}),$$

где

$$\delta_m(A_{2q}) = -2(m+1) \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) \frac{|\pi_q(u)|^{m+1}}{1-|\pi_q(u)|}\, du$$
$$- \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) \frac{(1+|\pi_q(u)|)|\pi_q(u)|^{m+1}}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du.$$

Первое слагаемое в $I_n^{(2)}(A_{2q})$ не зависит от m. Поскольку

$$|\pi_q(u)| = \prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{u-\beta_k}{\beta_k+u}$$
$$\leq \prod_{k=1}^{j} \frac{1-\beta_{j+1}/\beta_k}{1+\beta_{j+1}/\beta_k} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{1-\beta_k/\beta_j}{1+\beta_k/\beta_j}, \quad u \in [\beta_{j+1}, \beta_j],$$

заключаем, что при постоянных β_k, $k=1,2,\ldots,q$, справедливо соотношение $|\pi_q(u)| \leq d < 1$, $u \in [\beta_{j+1}, \beta_j]$, $j = 1,2,\ldots,q-1$. Следовательно, при $m \to \infty$ величина $\delta_m(A_{2q})$ убывает со скоростью геометрической прогрессии. Если же $\beta_k = \beta_k(m)$, $k = 1,2,\ldots,q$, то нетрудно показать справедливость оценки

$$|\pi_q(u)| \leq e^{-4\frac{\beta_{j+1}}{\beta_j}}.$$

При выполнении условия (31) очевидно, что $|\pi_q(u)|^{m+1} \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда заключаем, что

$$I_n^{(2)}(A_{2q}) \sim \sum_{j=1}^{q-1} \int\limits_{\beta_{j+1}}^{\beta_j} \mu_s(u) \frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du, \quad m \to \infty. \tag{40}$$

Рассуждая аналогичным образом для выражения $I_n^{(3)}(A)$, получим

$$I_n^{(3)}(A_{2q}) \sim \int\limits_{\beta_1}^{1} \mu_s(u) \frac{1+|\pi_q(u)|}{(1-|\pi_q(u)|)^2}\, du, \quad m \to \infty. \tag{41}$$

Из равенства (34) на основании асимптотических соотношений (39)–(41) получим асимптотическое равенство (32), что завершает доказательство теоремы 5.

Положим в теореме 5 $\beta_j = 1$, $j = 1,2,\ldots,q$. Величина $\varepsilon^*_{2n,2}(O) = \varepsilon^{(0)}_{2n}$ представляет собой равномерные приближения функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, суммами Зигмунда — Рисса полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. При этом из теоремы 5 получаем

Следствие 3. *Для равномерных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, суммами Зигмунда — Рисса полиномиальных рядов Фурье — Чебышёва (28) при $n \to \infty$ справедлива асимптотическая оценка*

$$\varepsilon_{2n}^{(0)} \sim \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} \begin{cases} \frac{2^{2-s}\Gamma(s)}{(1-s)(2-s)(n+1)^s}, & s \in (0,1), \\ \frac{2\ln(n+1)}{(n+1)}, & s = 1, \\ \frac{2^{2-s}\Gamma(s)}{(2-s)(n+1)^s}, & s \in (1,2), \end{cases}$$

где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

4. Наилучшая оценка приближений рациональными суммами Зигмунда — Рисса

Представляет интерес минимизировать правую часть в соотношениях (32) посредством выбора оптимального для этой задачи набора $\{\beta_1^*, \beta_2^*, \dots, \beta_q^*\}$, т. е. искать наилучшую оценку равномерных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, рациональными суммами Зигмунда — Рисса. Положим

$$\varepsilon_{2n,2q} = \inf_{A_{2q}} \varepsilon_{2n,2q}(A_{2q}), \quad \varepsilon_{2n,2q}^* = \inf_{A_{2q}} \varepsilon_{2n,2q}^*(A_{2q}).$$

Отметим очевидное неравенство, следующее из (23):

$$\varepsilon_{2n,2q} \le \varepsilon_{2n,2q}^*, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду последней оценки в дальнейшем будем вести речь об асимптотическом выражении мажоранты равномерных приближений.

Теорема 6. *При $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\varepsilon_{2n,2q}^* \sim \frac{1}{\pi} \sin\frac{\pi s}{2} q^{2(1-\frac{2-s}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1})} \begin{cases} \frac{\mu(s,q)}{(n+1)^{2(1-\frac{2-s}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1})}}, & s \in (0,1), \\ \mu(1,q)\frac{[\ln(n+1)]^{\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{q-1}}}{(n+1)^{2-\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{q-1}}}, & s = 1, \\ \frac{\mu(s,q)}{(n+1)^{2(1-\frac{2-s}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1})}}, & s \in (1,2), \end{cases} \tag{42}$$

где

$$\mu(s,q) = \begin{cases} \frac{(2+s)[c_1(s)]^{\frac{s}{2+s}} 2^{\frac{2}{s}\frac{2-s}{2+s}(1-\frac{s^2-2s+2}{2}(\frac{2-s}{2})^{q-2})} [\Gamma(s)]^{\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}}}{s^{1-\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}} (2-s)^{\frac{2}{2+s}(\frac{2}{s}-(\frac{2-s}{2})^{q-1})} (1-s)^{\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}}}, & s \in (0,1), \\ 3(4-\pi)^{\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{2})^{q-2})}, & s = 1, \\ \frac{(2+s)[c_1(s)]^{\frac{s}{2+s}} 2^{\frac{2}{s}\frac{2-s}{2+s}(1-\frac{s^2-2s+2}{2}(\frac{2-s}{2})^{q-2})} [\Gamma(s)]^{\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}}}{s^{1-\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}} (2-s)^{\frac{2}{2+s}(\frac{2}{s}-(\frac{2-s}{2})^{q-1})}}, & s \in (1,2), \end{cases}$$

$$c_1(s) = \int_0^1 \frac{u^{s+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^{\frac{s}{2}}}$$
$$= \frac{1}{s}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\frac{s}{2}\right) - \Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)\right], \quad s \in (0,2).$$

Доказательство. Исследуем асимптотические равенства (32). Очевидно, что при постоянных β_k, $k = 1, 2, \dots, q$, порядок в этих соотношениях не отличается от полиномиального. Будем полагать, что $\beta_k = \beta_k(m) \to 0$, $\beta_{k+1} = o(\beta_k)$,

$m \to \infty$, с выполнением условия (31). В этом случае нетрудно получить, что при $m \to \infty$ справедливы асимптотические равенства

$$\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{\beta_k} \sim \frac{1}{\beta_q},$$

$$1 - \prod_{k=1}^{j} \frac{\beta_k - u}{\beta_k + u} \prod_{k=j+1}^{q} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2u}{\beta_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, q-1, \ u \in [\beta_{j+1}, \beta_j],$$

$$1 - \prod_{k=1}^{q} \frac{u - \beta_k}{u + \beta_k} \sim \frac{2\beta_1}{u}, \quad u \in [\beta_1, 1].$$

При этом из равенства (33) находим, что

$$\Phi_m^{(s)}(A_{2q}) \sim \frac{1}{(m+1)^2} \left[\frac{1}{2-s} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-s}} + \frac{c_1(s)}{\beta_1^2} \right], \quad s \in (0, 2),$$

где $c_1(s)$ определена в формулировке настоящей теоремы.

Асимптотические равенства (32) при $m \to \infty$ примут вид

$$\varepsilon_{2n,2q}^{*}(A_{2q}) \sim \frac{1}{\pi(m+1)^2} \sin \frac{\pi s}{2} \Psi^{(s)}(A_{2q}), \tag{43}$$

где

$$\Psi^{(s)}(A_{2q}) = c_q(s, m)\beta_q^s + \frac{1}{2-s} \sum_{j=1}^{q-1} \frac{\beta_j^2}{\beta_{j+1}^{2-s}} + \frac{c_1(s)}{\beta_1^2},$$

$$c_q(s, m) = \begin{cases} \frac{2^{2-s}\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{(1-s)(2-s)}, & s \in (0, 1), \\ 2(m+1)\ln(m+1), & s = 1, \\ \frac{2^{2-s}\Gamma(s)(m+1)^{2-s}}{2-s}, & s \in (1, 2). \end{cases}$$

При каждом фиксированном $s \in (0, 2)$ правая часть асимптотического равенства (43) представляет собой функцию переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$, непрерывную в каждой точке q-мерного куба $[\delta, 1]^q$, где $\delta = \delta(n) > 0$ — некоторая величина, зависящая от n и при любом n ограничивающая множество параметров $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ слева. Согласно теореме Вейерштрасса правая часть равенства (43) имеет строгий минимум при некотором $\beta^* = (\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_q^*)$. При этом поскольку $\beta_k = 1$, $k = 1, \ldots, q$, соответствует полиномиальному случаю, а при $\beta_k(n) \to 0$, $n \to \infty$, с достаточно большой скоростью правая часть в (43) неограниченно растет, то можно предположить, что β^* — внутренняя точка куба $[\delta, 1]^q$. Для того чтобы найти оптимальный набор β^* решим экстремальную задачу

$$\Psi^{(s)}(A_{2q}) = c_q(s, m)\beta_q^s + \frac{\beta_{q-1}^2}{(2-s)\beta_q^{2-s}} + \cdots + \frac{\beta_2^2}{(2-s)\beta_3^{1-s}} + \frac{\beta_1^2}{(2-s)\beta_2^{1-s}} + \frac{c_1(s)}{\beta_1^2} \underset{A_{2q}}{\longrightarrow} \inf. \tag{44}$$

Функция $\Psi^{(s)}(A_{2q})$ от переменных $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ непрерывно дифференцируема в кубе $(0, 1)^q$. Естественно искать точку минимума этой функции там, где выполняется необходимое условие экстремума: $\partial\Psi^{(s)}(A_{2q})/\partial\beta_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, q$.

Несложные вычисления приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} sc_q(s,m)\beta_q^{s-1} - \frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{3-s}} = 0, \\ \frac{2}{2-s}\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q^{2-s}} - \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{3-s}} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{2}{2-s}\frac{\beta_2}{\beta_3^{2-s}} - \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{3-s}} = 0, \\ \frac{2}{2-s}\frac{\beta_1}{\beta_2^{2-s}} - \frac{2c_1(s)}{\beta_1^3} = 0, \end{cases} \tag{45}$$

из которой последовательно находим

$$\frac{\beta_{q-1}^2}{\beta_q^{2-s}} = sc_q(s,m)\beta_q^s,\ \frac{\beta_{q-2}^2}{\beta_{q-1}^{2-s}} = \frac{2}{2-s}sc_q(s,m)\beta_q^s,\ \frac{\beta_{q-3}^2}{\beta_{q-2}^{2-s}} = \left(\frac{2}{2-s}\right)^2 sc_q(s,m)\beta_q^s,$$

$$\ldots, \frac{\beta_1^2}{\beta_2^{2-s}} = \left(\frac{2}{2-s}\right)^{q-2} sc_q(s,m)\beta_q^s, \frac{2c_1(s)}{\beta_1^2} = \left(\frac{2}{2-s}\right)^{q-1} sc_q(s,m)\beta_q^s.$$

Подставив последние соотношения в равенство (44), находим, что с оптимальным набором параметров функция $\Psi^{(s)}(A_{2q})$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi^{(s)}(A_{2q}^*) = c_q(s,m)\beta_q^s + \frac{1}{2-s}sc_q(s,m)\beta_q^s + \frac{1}{2-s}\frac{2}{2-s}sc_q(s,m)\beta_q^s + \\ \ldots + \frac{1}{2-s}\left(\frac{2}{2-s}\right)^{q-2} sc_q(s,m)\beta_q^s + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2-s}\right)^{q-1} sc_q(s,m)\beta_q^s \\ = \frac{2+s}{2}\left(\frac{2}{2-s}\right)^{q-1} c_q(s,m)\beta_q^s = \frac{(2+s)c_1(s)}{s\beta_1^{*2}}. \end{aligned} \tag{46}$$

Осталось найти параметр β_1^*. С этой целью снова обратимся к системе (45). Последовательно находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\beta_{q-1}}{\beta_q}\right)^2 &= sc_q(s,m), \\ \left(\frac{\beta_{q-2}}{\beta_{q-1}}\right)^2 &= \frac{2}{2-s}(sc_q(s,m))^{\frac{2-s}{2}}, \\ \left(\frac{\beta_{q-3}}{\beta_{q-2}}\right)^2 &= \frac{2}{2-s}\left(\frac{2}{2-s}(sc_q(s,m))^{\frac{2-s}{2}}\right)^{\frac{2-s}{2}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2 &= \left(\frac{2}{2-s}\right)^{\frac{2}{s}(1-(\frac{2-s}{2})^{q-2})} (sc_q(s,m))^{(\frac{2-s}{2})^{q-2}}, \\ \beta_2 &= \left(\frac{\beta_1^4}{(2-s)c_1(s)}\right)^{\frac{1}{2-s}}. \end{aligned}$$

Из двух последних уравнений этой системы получим

$$\frac{1}{\beta_1^{*2}} = \left(\frac{(sc_q(s,m))^{(\frac{2-s}{2})^{q-2}}}{((2-s)c_1(s))^{\frac{2}{2-s}}}\left(\frac{2}{2-s}\right)^{\frac{2}{s}(1-(\frac{2-s}{2})^{q-2})}\right)^{\frac{2-s}{2+s}}.$$

При найденном β_1^* в (46) будем иметь

$$\Psi^{(s)}(A_{2q}^*) = \frac{(2+s)[c_1(s)]^{\frac{s}{2+s}}[c_q(s,m)]^{\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}} 2^{\frac{2}{s}\frac{2-s}{2+s}(1-(\frac{2-s}{2})^{q-2})}}{s^{1-\frac{2}{2+s}(\frac{2-s}{2})^{q-1}}(2-s)^{\frac{4}{s(2+s)}(1-(\frac{2-s}{2})^{q-1})}}, \quad s\in(0,2).$$

Возвращаясь к первоначальным значениям параметров $c_1(s)$ и $c_q(s,m)$ и учитывая, что $n = mq$, из последнего равенства и соотношения (43) получим асимптотические равенства (42). Теорема 6 доказана.

В теореме 6 положим $q = 1$, т. е. аппроксимирующая функция имеет два геометрически различных полюса в расширенной комплексной плоскости. В этом случае получаем

Следствие 4. *При $n \to \infty$ имеют место асимптотические равенства*

$$\varepsilon^*_{2n,2} \sim \frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi s}{2}\begin{cases} (2+s)\left(\frac{2^{1-s}\Gamma(s)[c_1(s)]^{\frac{s}{2}}}{s^{\frac{s}{2}}(2-s)^{\frac{s}{2}}(1-s)}\right)^{\frac{2}{2+s}}\frac{1}{(n+1)^{\frac{4s}{2+s}}}, & s\in(0,1),\\ 3\sqrt[3]{\frac{4-\pi}{2}}\frac{\ln^{\frac{2}{3}}(n+1)}{(n+1)^{\frac{4}{3}}}, & s=1,\\ (2+s)\left(\frac{2^{1-s}\Gamma(s)[c_1(s)]^{\frac{s}{2}}}{s^{\frac{s}{2}}(2-s)^{\frac{s}{2}}}\right)^{\frac{2}{2+s}}\frac{1}{(n+1)^{\frac{4s}{2+s}}}, & s\in(1,2).\end{cases}$$

Аналогичные по порядку результаты содержатся в [15] и получены при исследованиях приближений функции $|x|^s$, $s\in(0,2)$, суммами Зигмунда — Рисса рядов Фурье по ортогональной системе рациональных дробей Чебышёва — Маркова с двумя геометрически различными полюсами.

Замечание 3. Сравнивая результаты теоремы 6 и следствия 3, приходим к выводу, что при любом значении $s\in(0,2)$ специальным выбором параметров аппроксимирующей функции возможно добиться скорости равномерных рациональных приближений суммами Зигмунда — Рисса большей в сравнении с соответствующим полиномиальным аналогом. Этот результат справедлив, в частности, в случае двух геометрически различных полюсов аппроксимирующей рациональной функции.

Введем обозначение

$$\varepsilon_{n,q}(x^\gamma) = \inf_{A_q}\|x^\gamma - R_{n,q}(x^\gamma,x)\|_{C[0,1]}, \quad n\in\mathbb{N},$$

где $R_{n,q}(x^\gamma,x)$ — рациональные суммы Зигмунда — Рисса порядка n с q геометрически различными полюсами, построенные для функции x^γ, $\gamma\in(0,1)$, на отрезке $[0,1]$.

Известно [31], что для наилучших равномерных рациональных приближений имеет место равенство

$$\mathfrak{R}_{2n}(|x|^{2\alpha},[-1,1]) = \mathfrak{R}_n(x^\alpha,[0,1]), \quad n\in\mathbb{N}.$$

Используя соответствующие рассуждения в нашем случае, получим

Следствие 5. *При $n\to\infty$ справедлива оценка*

$$\varepsilon_{n,q}(x^\gamma) \le \varepsilon^*_{n,q}(x^\gamma),$$

где

$$\varepsilon^*_{n,q}(x^\gamma) \sim \frac{\sin\pi\gamma}{\pi}q^{2(1-\frac{(1-\gamma)q}{1+\gamma})}\begin{cases}\frac{\mu(\gamma,q)}{(n+1)^{2(1-\frac{(1-\gamma)q}{1+\gamma})}}, & \gamma\in(0,\frac{1}{2}),\\ \mu(1/2,q)\frac{[\ln(n+1)]^{\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{q-1}}}{(n+1)^{2-\frac{2}{3}(\frac{1}{2})^{q-1}}}, & \gamma=\frac{1}{2},\\ \frac{\mu(\gamma,q)}{(n+1)^{2(1-\frac{(1-\gamma)q}{1+\gamma})}}, & \gamma\in(\frac{1}{2},1),\end{cases}$$

$$\mu(\gamma, q) = \begin{cases} \dfrac{(1+\gamma)[c_2(\gamma)]^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}[\Gamma(2\gamma)]^{\frac{1}{1+\gamma}(1-\gamma)^{q-1}}}{2^{\frac{\gamma+(2\gamma^2-4\gamma+1)(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}\gamma^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}(\frac{1}{\gamma}-(1-\gamma)^{q-1})}(1-2\gamma)^{\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}}, \\ \qquad\qquad \gamma \in (0, \frac{1}{2}), \\ 3(4-\pi)^{\frac{1}{3}}2^{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{2})^{q-2})}, \qquad \gamma = 1, \\ \dfrac{(1+\gamma)[c_2(\gamma)]^{\frac{\gamma}{1+\gamma}}[\Gamma(2\gamma)]^{\frac{1}{1+\gamma}(1-\gamma)^{q-1}}}{2^{\frac{\gamma+(2\gamma^2-4\gamma+1)(1-\gamma)^{q-1}}{\gamma(1+\gamma)}}\gamma^{1-\frac{(1-\gamma)^{q-1}}{1+\gamma}}(1-\gamma)^{\frac{1}{1+\gamma}(\frac{1}{\gamma}-(1-\gamma)^{q-1})}}, \\ \qquad\qquad \gamma \in (\frac{1}{2}, 1), \end{cases}$$

$$c_2(\gamma) = \int_0^1 \frac{u^{2\gamma+1}\,du}{(1+u)(1-u^2)^\gamma} = \frac{\Gamma(1-\gamma)}{s}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}+\gamma\right) - \Gamma(1+\gamma)\right],\ \gamma \in (0,1).$$

Заключение

В работе исследованы аппроксимационные свойства сумм Зигмунда — Рисса рациональных интегральных операторов Фурье — Чебышёва с фиксированным количеством геометрически различных полюсов. Найдено интегральное представление исследуемого метода рациональной аппроксимации.

Изучены приближения функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$, на отрезке $[-1,1]$ суммами Зигмунда — Рисса. Установлены оценки поточечных и равномерных рациональный приближений, найдена асимптотическая оценка мажоранты равномерных приближений, зависящая от параметров аппроксимирующей функции. Для каждого $s \in (0,2)$ найдены оптимальные значения параметров, обеспечивающие наименьшую мажоранту равномерных приближений.

Исследованы также аппроксимационные свойства сумм Зигмунда — Рисса полиномиального ряда Фурье — Чебышёва. Найдено асимптотическое выражение константы Лебега и установлены оценки приближений функций $f \in H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$. Получены точные асимптотические оценки равномерных приближений функции $|x|^s$, $s \in (0,2)$.

Из результатов работы следует, что при специальном выборе параметров аппроксимирующей функции скорости убывания равномерных рациональных приближений оказываются в значительной степени выше своих полиномиальных аналогов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hardy G. H., Riesz M.* The general theory of Dirichlet's series. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1915.

2. *Zygmund A.* The approximation of functions by typical means of their Fourier series // Duke Math. J. 1945. V. 12, N 4. P. 695–704.

3. *Oberchoff N.* Applications de la sommation par les moyennes arithmétiques dans la théorie des séries de Fourier, des séries sphériques et ultrasphériques // Bulletin mathématique de la Société Roumaine des Sciences. Actes du deuxiéme congrés interbalkanique des mathématiciens. 1938. V. 40, N 1/2. P. 27–38.

4. *Kwee B.* The approximation of continuous functions by Riesz typical means of their Fourier series // J. Austral. Math. Soc. 1967. V. 7, N 4. P. 539–544.

5. *Степанянц С. А.* К вопросу включения методов дискретных средних Рисса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2007. № 4. С. 12–17.

6. *Хахинов И. В.* О взаимосвязи методов Чезаро и методов дискретных средних Рисса // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1: Математика. Механика. 2011. № 5. С. 51–55.

7. *Ильясов Н. А.* Приближение периодических функций средними Зигмунда // Мат. заметки. 1986. Т. 39, № 3. С. 367–382.

8. *Гейт В. Э.* Характеризация последовательности приближений средними Зигмунда // Изв. вузов. Математика. 1996. № 6. С. 78–79.

9. *Stepanets A. I.* Approximate properties of the Zygmund method // Ukrainian Math. J. 1999. V. 51, N 4. P. 493–518.

10. *Chikina T. S.* Approximation by Zygmund–Riesz means in the p-variation metric // Anal. Math. 2013. V. 39, N 1. P. 29–44.

11. *Волосивец С. С., Лихачева Т. В.* Некоторые вопросы приближения полиномами по мультипликативным системам в весовых пространствах L_p // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 3. С. 251–258.

12. *Русак В. Н.* Об одном методе приближения рациональными функциями // Весці АН БССР . Сер. фiз.-мат. навук. 1978. Т. 3. С. 15–20.

13. *Ровба Е. А.* Рациональные интегральные операторы на отрезке // Вестник БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 1996. Т. 1, № 1. С. 34–39.

14. *Смотрицкий К. А.* О приближении выпуклых функций рациональными интегральными операторами на отрезке // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2005. № 3. С. 64–70.

15. *Ровба Е. А. Поцейко П. Г.* Средние Зигмунда — Рисса рациональных рядов Фурье — Чебышёва и аппроксимации функции $|x|^s$ // Тр. Ин-та математики Национальной Академии наук Беларуси. 2020. Т. 28, № 1–2. С. 74–90.

16. *Ровба Е. А.* Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации // Докл. АН БССР. 1979. Т. 23, № 11. С. 968–971.

17. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье — Чебышёва // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 362–386.

18. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* Сопряженный рациональный оператор Фурье — Чебышёва и его аппроксимационные свойства // Изв. вузов. Математика. 2022. № 3. С. 44–60.

19. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А., Смотрицкий К. А.* О рациональных интегральных операторах типа Фурье — Чебышёва и аппроксимациях функций Маркова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2020. Т. 2. С. 6–27.

20. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных суммах Абеля — Пуассона на отрезке и аппроксимациях функций Маркова // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. 2021. Т. 3. С. 6–24.

21. *Поцейко П. Г., Ровба Е. А.* О рациональных аппроксимациях функции Маркова на отрезке суммами Фейера с фиксированным количеством полюсов // Тр. Ин-та математики Национальной Академии наук Беларуси. 2022. Т. 30, № 1–2. С. 57–77.

22. *Bernstein S.* Sur meilleure approximation de $|x|$ par des polynomés de degrés donnés // Acta Math. 1914. V. 37, N 1. P. 1–57.

23. *Newman D. J.* Rational approximation to $|x|$ // Michigan Math. J. 1964. V. 11, N 1. P. 11–14.

24. *Буланов А. П.* Асимптотика для наименьших уклонений $|x|$ от рациональных функций // Мат. сб. 1968. Т. 76, № 2. С. 288–303.

25. *Вячеславов Н. С.* О приближении функции $|x|$ рациональными функциями // Мат. заметки. 1974. Т. 16, № 1. С. 163–171.

26. *Шталь Г.* Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации $|x|$ на $[-1, 1]$ // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 85–118.

27. *Bernstein S.* Sur la meilleure approximation de $|x|^p$ par des polynomés de degrés trés eléves // Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 1938. V. 2, N 2. P. 169–190.

28. *Freud G., Szabados J.* Rational approximation to x^α // Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae. 1967. V. 18, N 3-4. P. 393–399.

29. *Гончар А. А.* О скорости рациональной аппроксимации непрерывных функций с характерными особенностями // Мат. сб. 1967. Т. 73, № 4. С. 630–638.

30. *Вячеславов Н. С.* Об аппроксимации x^α рациональными функциями // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 1. С. 92–109.

31. *Шталь Г.* Best uniform rational approximation of x^α on $[0, 1]$ // Bull. Amer. Math. Soc. 1993. V. 28, N 1. P. 116–122.

32. *Revers M.* On the asymptotics of polynomial interpolation to x^α at the Chebyshev nodes // J. Approx. Theory. 2013. V. 165, N 1. P. 70–82.

33. *Ganzburg M. I.* The Bernstein constant and polynomial interpolation at the Chebyshev nodes // J. Approx. Theory. 2002. V. 119, N 2. P. 193–213.

34. *Райцин Р. А.* Асимптотические свойства равномерных приближений функций с алгебраическими особенностями частичными суммами ряда Фурье — Чебышёва // Изв вузов. Математика. 1980. № 3. С. 45–49.

35. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Мат. сб. 1971. Т. 86, № 2. С. 314–324.

36. *Лунгу К. Н.* О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов // Сиб. мат. журн. 1984. Т. 25, № 2. С. 150–159.

37. *Степанец А. И.* Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. Киев: Наук. думка, 1981.

38. *Бауэр С. М., Смирнов А. Л., Товстик П. Е., Филиппов С. Б.* Асимптотические методы в механике твердого тела. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 1989.

39. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

40. *Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. М.: Наука, 1979.

41. *Федорюк М. В.* Асимптотика. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1987.

Поступила в редакцию 5 июля 2023 г.
После доработки 16 ноября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Поцейко Павел Геннадьевич (ORCID 0000-0001-7835-0500),
Ровба Евгений Алексеевич (ORCID 0000-0002-1265-1965)
Гродненский государственный университет им. Янки Купалы,
ул. Ожешко, 22, Гродно 230023, Беларусь
pahamatby@gmail.com, rovba.ea@gmail.com

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.554

СТРОЕНИЕ МНОГООБРАЗИЯ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР С ТОЖДЕСТВОМ ЛИ–НИЛЬПОТЕНТНОСТИ СТЕПЕНИ 5

С. В. Пчелинцев

Аннотация. Построен аддитивный базис относительно свободной альтернативной алгебры Ли-нильпотентной степени 5. Описаны ассоциативный центр и ядро этой алгебры; найдены T-порождающие элементы полного центра. Указана асимптотическая оценка в свободной альтернативной алгебре коразмерности T-идеала, порожденного коммутатором степени 5. Найдена конечномерная супералгебра, грассманова оболочка которой порождает многообразие альтернативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.113

Ключевые слова: Ли-нильпотентная алгебра, альтернативная алгебра, коразмерность T-идеала, аддитивный базис свободной алгебры, центры алгебры.

Введение

В [1, 2] было начато изучение строения относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 над полем нулевой характеристики. В частности, было описано ее ядро (наибольший идеал, содержащийся в центре) и классифицированы собственные центральные многочлены этой алгебры.

В [3, 4] были получены более точные результаты о строении указанной алгебры над кольцом скаляров, содержащим $\frac{1}{6}$. В частности, был построен ее аддитивный базис, описано ядро, изучен ее центр, найдена асимптотика последовательности коразмерностей идеала $T^{(5)}$ в свободной ассоциативной алгебре.

Предлагаемая статья посвящена распространению указанных результатов на многообразие альтернативных алгебр Ли-нильпотентных степени 5. Заметим, что близкие результаты ранее были получены в [5] для метабелевых альтернативных алгебр.

Работа состоит из шести параграфов и посвящена изучению относительно свободной альтернативной алгебры $A^{(5)}$, удовлетворяющей тождеству Ли-нильпотентности степени 5.

В § 1 приведены основные обозначения и тождества, выполняющиеся в альтернативных алгебрах.

В § 2 доказаны две леммы о коммутаторах и теорема о произведении для алгебры $A^{(5)}$. Теорема о произведении в общем виде для альтернативных и йордановых алгебр была доказана автором в [6, 7].

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22-11-00081).

В § 3 строится вспомогательная супералгебра $S^{(5)}$, с помощью которой опровергается ряд тождественных соотношений.

В § 4 указан аддитивный базис ассоциаторного идеала D алгебры $A^{(5)}$ и найдена асимптотика его полилинейной части $P_n \cap D$.

В § 5 указано разложение многообразия $\mathrm{Alt}^{(5)}$ альтернативных алгебр с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 в объединение трех подмногообразий, а также указана конечномерная супералгебра, грассманова оболочка которой порождает многообразие $\mathrm{Alt}^{(5)}$.

В заключительном § 6 изучаются центральные элементы алгебры $A^{(5)}$. В частности, доказано, что ядро $Z^*(A^{(5)})$ алгебры $A^{(5)}$ порождается слабым элементом Холла $[[a,b]^2,b]$ и ядро $Z^*(A^{(5)})$ не пересекается с ассоциаторным идеалом $D(A^{(5)})$. Кроме того, указаны порождающие элементы центра $Z(A^{(5)})$ как T-пространства.

§ 1. Основные понятия

Всюду ниже термин «алгебра» означает линейную алгебру, обычно с единицей, над бесконечной областью целостности Φ, содержащей элемент $\frac{1}{6}$.

Алгебра называется *альтернативной*, если в ней выполнены тождества

$$x^2y = x(xy), \quad xy^2 = (xy)y.$$

Согласно теореме Артина алгебра альтернативна тогда и только тогда, когда всякая ее 2-порожденная подалгебра ассоциативна (см. [8, 9]).

Если a, b, c — элементы алгебры A, то положим:

$[a,b] = ab - ba$ — коммутатор элементов a, b;

$a \circ b = ab + ba$ — симметризованное произведение элементов a, b;

$(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ — ассоциатор элементов a, b, c.

В дальнейшем, часто без пояснений, в альтернативной алгебре используется кососимметричность ассоциатора по всем переменным.

Напомним, что во всякой альтернативной алгебре справедливы тождества (см. [8, 9]):

$$[xy,z] = x[y,z] + [x,z]y + 3(x,y,z), \tag{1.1}$$

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 6(x,y,z), \tag{1.2}$$

$$(x^2,y,z) = x \circ (x,y,z) = (x, x \circ y, z), \tag{1.3}$$

$$(x,y,yz) = (x,y,z)y, \quad (xy,y,z) = y(x,y,z). \tag{1.4}$$

Пусть A — альтернативная алгебра и $A^{(+)}$, $A^{(-)}$ — присоединенные алгебры относительно «симметризованного» умножения $x.y = \frac{1}{2}x \circ y$ и коммутирования $[x,y]$. Известно (см. [9]), что $A^{(+)}$ — специальная йорданова алгебра, а $A^{(-)}$ — алгебра Мальцева. В частности, в алгебре $A^{(-)}$ выполнено *тождество Сейгла* [10]

$$[x,y,z,t] + [y,z,t,x] + [z,t,x,y] + [t,x,y,z] = [x,z,[y,t]], \tag{1.5}$$

как обычно, предполагается, что если расстановка скобок не указана, то она считается правонормированной, например, $[x,y,z,t] = [[[x,y],z],t]$.

В альтернативной алгебре A выполнены тождества (см. [9, 11])

$$4(a,b,c)^{(+)} = 2(b,a,c) + [b,[a,c]], \tag{1.6}$$

где $(a,b,c)^{(+)}$ — ассоциатор в йордановой алгебре $A^{(+)}$;

$$2[(x,y,z),t] = ([x,y],z,t) + ([y,z],x,t) + ([z,x],y,t), \tag{1.7}$$

$$(xy, z, t) + (x, y, [z, t]) = x(y, z, t) + (x, z, t)y. \tag{1.8}$$

Из последнего равенства следует, что

$$([x, y], z, t) + 2(x, y, [z, t]) = [x, (y, z, t)] + [(x, z, t), y]. \tag{1.9}$$

Следуя [6], альтернативную алгебру A назовем *Ли-нильпотентной степени* n, если коммутаторная алгебра $A^{(-)}$ нильпотентна индекса n, т. е. любое полилинейное коммутаторное слово от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ является тождеством в A, но существует коммутаторное слово меньшей длины, которое в A отлично от нуля.

Как обычно, через $D_a : x \to [x, a]$ обозначим «коммутирование» алгебры A, определенное элементом a. Положим также $R_{a,b} : x \to (x, a, b)$. Из тождеств (1.1) и (1.3) следует, что отображения D_a и $R_{a,b}$ являются дифференцированиями алгебры $A^{(+)}$. Применяя правило Лейбница для дифференцирований, получаем равенство

$$(x \circ y)D_a D_b = x \circ (yD_a D_b) + (xD_a D_b) \circ y + (xD_{\overline{a}}) \circ (yD_{\overline{b}}), \tag{1.10}$$

где черта над элементами a и b означает симметризацию по ним.

Всюду ниже, если не оговорено противное, используются обозначения

$$U = U(A) = [A, A], \quad A' = \mathrm{idl}_A(U), \quad V = V(A) = (A, A, A), \quad D(A) = \mathrm{idl}_A(V),$$

где $\mathrm{idl}_A(X)$ обозначает идеал в A, порожденный множеством X.

Для центров алгебры A используются следующие обозначения:

$K(A) = \{k \in A \mid (\forall a \in A)[k, a] = 0\}$ — коммутативный центр,

$N_{\mathrm{Ass}}(A) = \{n \in A \mid (\forall a, b \in A)(n, a, b) = 0\}$ — ассоциативный центр,

$Z(A) = K(A) \cap N_{\mathrm{Ass}}(A)$ — (полный) центр,

$C^*(A)$ — наибольший идеал алгебры A, содержащийся в центре $C(A)$, идеал $C^*(A)$ называется C-*ядром.*

Далее, $K(A) = Z(A)$ ввиду (1.2) и $Z^*(A) \subseteq \mathrm{Ann}(A')$ ввиду (1.1). Ясно, что $A' = UA$.

§ 2. Предварительные результаты

2.1. Вспомогательные леммы. Введем следующие обозначения:

$F_{\mathrm{Alt}}[X]$ — свободная альтернативная алгебра (с единицей) над счетным множеством $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ свободных порождающих;

$[x_1, \dots, x_n]$ — правонормированный коммутатор степени $n \geq 2$, т. е. $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ и по индукции $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$.

Всюду далее через $\mathrm{Alt}^{(5)}$ обозначается многообразие альтернативных алгебр с тождеством

$$[x_1, x_2, \dots, x_5] = 0, \tag{2.1}$$

которое называется тождеством *Ли-нильпотентности степени* 5.

Через $U^{(n)}$ обозначим T-пространство, порожденное правонормированным коммутатором $[x_1, x_2, \dots, x_n]$ при $n \leq 5$.

Лемма 2.1. *В многообразии* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *выполнено тождество*

$$[x_1, x_2, x_3, [x_4, x_5]] = 0.$$

Иначе говоря, всякий коммутатор степени ≤ 5 *является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов.*

Доказательство представим в виде последовательности шагов.

1^0. В силу тождества (1.2) верно $(a, b, c) \in U^{(3)}$.

2^0. В силу тождества Сейгла (1.5) элемент $[x, y, [z, t]]$ является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов.

3^0. Из п. 2^0 и тождества (1.2) следует, что $([a, b], c, d), [(a, b, c), d] \in U^{(4)}$.

4^0. Докажем, что $([a, b], c, [x, y]) \in U^{(5)}$. Заметим сначала, что в силу (1.4)

$$([a, b], a, [x, y]) = [(b, a, [x, y]), a] \in [U^{(4)}, a] \subseteq U^{(5)}.$$

Это означает, что по модулю $U^{(5)}$ элемент $([a, b], c, [x, y])$ кососимметричен по всем переменным. Тогда по модулю $U^{(5)}$ имеем

$$([a, b], c, [x, y]) \equiv -([x, b], c, [a, y]) \equiv ([x, y], c, [a, b]) = -([a, b], c, [x, y]),$$

откуда $2([a, b], c, [x, y]) \in U^{(5)}$ и получаем требуемое.

5^0. Пусть $z = [a, b]$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \equiv [x, (y, z, t)] + [(x, z, t), y] \quad (\text{в силу п. } 3^0) \quad &= ([x, y], z, t) + 2(x, y, [z, t]) \\ (\text{в силу (1.9)}) \quad &\equiv 2(x, y, [a, b, t]) \quad (\text{в силу п. } 4^0). \end{aligned}$$

Отсюда в силу тождества (1.2) имеем $[U^{(3)}, U^{(2)}] \subseteq U^{(5)}$. Лемма доказана.

Замечание. Используя аддитивный базис свободной альтернативной алгебры Грассмана, построенный в [12], легко понять, что коммутатор степени 6 вида $[x_1, x_2, x_3, x_4, [x_5, x_6]]$ не является линейной комбинацией правонормированных коммутаторов степени 6.

Через $T^{(n)}(A)$ обозначим T-идеал алгебры A, порожденный всеми коммутаторами степени n. Всюду ниже через $A^{(n)}$ обозначается фактор-алгебра $A/T^{(n)}(A)$.

Если Y, Z — подмножества в алгебре A, то через $Y * Z$ обозначается подпространство, порожденное произведениями yz и zy, где $y \in Y$, $z \in Z$.

Следующие две леммы доказаны в [6] (см. леммы 2.1 и 3.2).

Лемма 2.2. *Для любых $x, y, z \in A$ верно включение*

$$[A, x] * [U^{(3)}, x] + [U^{(2)}, x] * (A, x, y) + [A, x] * (U^{(2)}, x, y) + (A, x, y)(A, x, z) \subseteq T^{(5)}.$$

Лемма 2.3. *Для любых $x, y, z, t \in A = A^{(5)}$ выполнены соотношения*

$$[x, y]^2 \in N_{\mathrm{Ass}}(A), \quad [[x, y]^2, z] \in Z(A), \quad [[x, y]^2, [z, t]] = 0.$$

2.2. Теорема о произведении для алгебры $A^{(5)}$. В [6] доказана теорема о произведении для альтернативных алгебр. Она, вообще говоря, отличается от теоремы о произведении для ассоциативных алгебр. Для алгебры $A = A^{(5)}$ она имеет вид $\mathrm{idl}_A((A, A, A)^{(+)}) * T^{(3)}(A) = 0$. В этом пункте будет указан, по существу, единственный частный случай, когда теорема о произведении для ассоциативных алгебр дословно переносится на альтернативные алгебры. Более точно, справедлива следующая

Лемма 2.4. *В алгебре $A = A^{(5)}$ верно равенство $(T^{(3)})^2 = 0$.*

Доказательство представим в виде ряда шагов.

1^0. $(V(A), A, A) = 0 = (A, U, U)$ в силу тождества (1.2) и леммы 2.1.

2^0. Докажем, что $f = 0$, где $f := (a, b, c) \circ (x, y, z)$.

Заметим сначала, что элемент f кососимметричен по всем переменным. В самом деле, в силу (1.3) и п. 1^0 имеем

$$(a,b,c)\circ(a,y,z) = (a\circ(a,y,z),b,c) - a\circ((a,y,z),b,c) = ((a^2,y,z),b,c) = 0.$$

Меняя последовательно переменные a и x, b и y, c и z, получаем

$$f = (a,b,c)\circ(x,y,z) = -(x,b,c)\circ(a,y,z) = (x,y,c)\circ(a,b,z) \\ = -(x,y,z)\circ(a,b,c) = -f,$$

значит, $2f = 0$ и $f = 0$.

3^0. $(a,b,c)\circ[x,y,z] = 0$ в силу теоремы о произведении для альтернативных алгебр [6], п. 2^0 и тождества (1.6).

4^0. Аналогично п. 3^0 получаем $[x,y,z]\circ[a,b,c] = 0$. Значит, $U^{(3)}U^{(3)} = 0$. Поскольку $U^{(3)} \subseteq N_{\mathrm{Ass}}(A)$ и $T^{(3)} = U^{(3)}A = AU^{(3)}$, то $(T^{(3)})^2 = 0$. Лемма доказана.

2.3. Некоторые тождества в алгебре $A^{(5)}$.

Лемма 2.5. *В алгебре $A = A^{(5)}$ идеал $T^{(3)} = T^{(3)}(A)$ обладает свойствами*

$$[[T^{(3)},A],A] = 0 = [T^{(3)},[A,A]].$$

Если $t \in T^{(3)}$, то элементы t и $w := t[y_1,z_1]\ldots[y_n,z_n]$, где $n \geq 1$, содержатся в ассоциативном ядре алгебры A и элемент w кососимметричен по переменным $y_1,z_1,\ldots,y_n,z_n$.

Доказательство. Пусть $u \in U^{(3)}$, $x,a,b \in A$. Тогда в силу леммы 2.2 и тождества (1.10) последовательно получаем

$$[u,a]\circ[x,a] = 0, \quad [u,\overline{a}]\circ[x,\overline{b}] = 0,$$

$$(u\circ x)D_aD_b = u\circ(xD_aD_b) + (uD_aD_b)\circ x + (uD_{\overline{a}})\circ(xD_{\overline{b}}) = 0.$$

Проверим, что $(T^{(3)}(A),A,A) = 0$. Во-первых, имеем $(U^{(3)},A,A) = 0$. Во-вторых, $(U^{(3)}A,A,A) = 0$ в силу тождества (1.8) и леммы 2.4. Из доказанных соотношений вытекают утверждения об идеале $T^{(3)}$.

Кроме того, ясно, что расстановка скобок на элементе w не играет роли. Поскольку $[a,b][a,c] \in T^{(3)}$, верно утверждение об элементе w. Лемма доказана.

В ходе доказательства леммы 2.5 было отмечено, что расстановка скобок на элементе w не играет роли. На всем протяжении статьи это замечание будет использоваться без дополнительных пояснений.

Лемма 2.6. *В алгебре $A^{(5)}$ выполнено тождество*

$$[(x,y,z)\cdot[z,t],a] = ([x,z],y,z)\cdot[a,t].$$

Доказательство. Заметим сначала, что

$$([x,z],x,a)\cdot[z,t] = 0. \tag{2.2}$$

В самом деле, по лемме 2.2

$$([x,z],x,a)\cdot[z,t] = -([x,z],x,z)\cdot[a,t] = 0.$$

Линеаризуя равенство (2.2) по x, получаем

$$\{([x,z],y,a) + ([y,z],x,a)\}\cdot[z,t] = 0. \tag{2.3}$$

В силу леммы 2.4 и тождества (1.1) имеем

$$2[(x,y,z)\cdot[z,t],a] = 2[(x,y,z),a]\cdot[z,t]$$
$$= \{([x,y],z,a) + ([y,z],x,a) + ([z,x],y,a)\}\cdot[z,t] \quad \text{(в силу (1.7))}$$
$$= \{([y,z],x,a) + ([z,x],y,a)\}\cdot[z,t] \quad \text{(в силу леммы 2.2)}$$
$$= -2([x,z],y,a)\cdot[z,t] \quad \text{(в силу (2.3))} \quad = 2([x,z],y,z)\cdot[a,t] \quad \text{(по лемме 2.2)}.$$

После сокращения на 2 получаем требуемое тождество. Лемма доказана.

Лемма 2.7. *В алгебре $A^{(5)}$ выполнено тождество*

$$[(a,b,x)\cdot[b,y],a] = 0.$$

Доказательство. В силу тождества (1.1) и леммы 2.4 имеем

$$[(a,b,x)\cdot[b,y],a] = [(a,b,x),a]\cdot[b,y] = (a,b,[a,x])\cdot[b,y] \quad \text{(в силу (1.4))}$$
$$= 0 \text{ (в силу леммы 2.2)}.$$

Лемма доказана.

§ 3. Вспомогательная супералгебра $S = S^{(5)}$

Построим вспомогательную супералгебру $S = S^{(5)}$, которая является расширением 6-мерного идеала с нулевым умножением и 2-мерной супералгебры $\Phi[\sqrt{1}]$.

Рассмотрим супералгебру $S = S_0 \oplus S_1$, где четная часть S_0 имеет базис $1, a, b, c$, а нечетная часть S_1 — базис x, a', b', c'. Обозначим через R подпространство, порожденное элементами a, b, c, a', b', c'. Определим умножение на S с помощью следующей таблицы, считая, что 1 — единица алгебры, $x^2 = 1$ и $R^2 = 0$:

$$a\cdot x = a', \quad b\cdot x = b', \quad c\cdot x = c', \quad a'\cdot x = a+b, \quad b'\cdot x = b, \quad c'\cdot x = c,$$
$$x\cdot a = a'-c', \quad x\cdot a' = a+2b-c, \quad x\cdot b = b', \quad x\cdot b' = b, \quad x\cdot c = 3b'-c', \quad x\cdot c' = 3b-c.$$

Лемма 3.1. *Супералгебра S альтернативна.*

Доказательство. Для проверки тождеств альтернативности достаточно вычислить ненулевые ассоциаторы от базисных элементов. Каждый из таких ассоциаторов содержит два элемента x и какой-то элемент $r \in R$. Если r совпадает с одним из элементов b, b', c, c', то

$$(x,x,r) = (x,r,x) = (r,x,x) = 0.$$

Рассмотрим оставшиеся варианты $r = a$ и $r = a'$:

1) $(x,a,x) = (xa)x - x(ax) = (a'-c')x - xa' = a'x - c'x - xa' = (a+b) - c - (a+2b-c) = -b$,

$$(a,x,x) = (ax)x - a = a'x - a = (a+b) - a = b,$$
$$(x,x,a) = a - x(xa) = a - x(a'-c') = a - xa' + xc' = a - (a+2b-c) + (3b-c) = b;$$

2) $(x,a',x) = (xa')x - x(a'x) = (a+2b-c)x - x(a+b) = ax + 2bx - cx - xa - xb = a' + 2b' - c' - (a'-c') - b' = b'$,

$$(a',x,x) = (a'x)x - a' = (a+b)x - a' = bx = b',$$
$$(x,x,a') = a' - x(xa') = a' - x(a+2b-c) = a' - xa - 2xb + xc$$
$$= a' - (a'-c') - 2b' + (3b'-c') = b'.$$

Для каждого из рассмотренных случаев 1 и 2 видно, что выполнены тождества супер-альтернативности

$$(p,q,r) + (-1)^{|p||q|}(q,p,r) = 0, \quad (p,q,r) + (-1)^{|q||r|}(p,r,q) = 0,$$

где $|p|$ обозначает четность элемента p. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Супералгебра S Ли-нильпотентна степени* 5.

Доказательство. Определим супер-коммутатор $[a,b]_s = ab - (-1)^{|a||b|}ba$ однородных элементов a,b. По индукции определяется правонормированный супер-коммутатор произвольной степени. Докажем, что супералгебра S удовлетворяет тождеству

$$[x_1, x_2, \dots, x_5]_s = 0, \tag{3.1}$$

где в левой части указан правонормированный супер-коммутатор.

Пусть $D(S)$ — ассоциаторный идеал алгебры S, P — линейное пространство, порожденное элементами b, b'. Заметим, что $[[S,S]_s, S]_s \subseteq D(S)$. Учитывая вычисления, проведенные в лемме 3.1, и таблицу умножения супералгебры S, убеждаемся, что $D(S) = P$. Далее, $[b', x]_s = 2b$, $[b,x]_s = 0$, значит, верно тождество (3.1).

Легко видеть, что $[[[a', x]_s, x]_s, x]_s = 6b \neq 0$. Лемма доказана.

Пусть G — ассоциативная алгебра Грассмана с 1 и набором стандартных порождающих $\xi_1, \xi_2, \dots$; $G = G_0 \oplus G_1$ — ее стандартная градуировка. Обозначим через $G(S) = (G_0 \otimes S_0) \oplus (G_1 \otimes S_1)$ грассманову оболочку вспомогательной суперэлгебры S.

Лемма 3.3. *В суперэлгебре S верно $([a', x]_s, x, x) = 2b$. В частности, в алгебре $G(S)$ верно*

$$h_1 := ([x_1, x_2], x_3, x_4)[x_5, x_6] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \neq 0$$

для любого $k \geq 3$. Кроме того, в $G(S)$ следующие два элемента, имеющие степень 2 по переменной x_1 и полилинейные по остальным переменным, отличны от нуля:

$$h_2 := (x_1, x_2, x_3)[x_1, x_4][x_5, x_6] \dots [x_{2k-1}, x_{2k}] \neq 0,$$

$$h_3 := ([x_1, x_2], x_1, x_3)[x_4, x_5] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] \neq 0.$$

Доказательство. В самом деле, из таблицы умножения в S и вычислений, проведенных в лемме 3.1, имеем

$$[a', x]_s = a'x + xa' = 2a + 3b - c,$$

$$([a', x]_s, x, x) = 2(a,x,x) + 3(b,x,x) - (c,x,x) = 2b.$$

Значит, $([a', x]_s, x, x) \neq 0$. Отсюда немедленно вытекает, что $h_1 \neq 0$. Если $h_2 = 0$, то, проводя линеаризацию подстановкой $x_1 \to [y,z]$, получаем нулевой элемент вида h_1.

Если $h_3 = 0$, то, линеаризуя это равенство, получаем

$$\{([y, x_2], z, x_3) + ([z, x_2], y, x_3)\}[x_4, x_5] \dots [x_{2k}, x_{2k+1}] = 0.$$

Полагая здесь $y = \xi_1 \otimes a'$, $z = \xi_2 \otimes x$, $x_i = \xi_{i+1} \otimes x$, $i = \overline{2, 2k+1}$, получаем $([a', x]_s, x, x) = 0$, что невозможно. Лемма доказана.

§ 4. Аддитивный базис идеала $D(A^{(5)})$

В [13] был указан аддитивный базис ассоциаторного идеала $D(A^{(4)})$ относительно свободной альтернативной алгебры $A^{(4)}$, удовлетворяющей тождеству Ли-нильпотентности степени 4. Целью этого параграфа является построение аддитивного базиса идеала $D(A^{(5)})$. Для решения наших задач достаточно построения аддитивного базиса пространства $P_n(A^{(5)}) \cap D(A^{(5)})$, где $P_n(A^{(5)})$ —

подпространство алгебры $A^{(5)}$, состоящее из полилинейных многочленов, зависящих от переменных из множества $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

4.1. Собственные многочлены нечетной степени. Многочлен $f \in P_n(A^{(5)})$ называется *собственным*, если он обращается в нуль при подстановке $x_i = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Пусть $n = 3 + 2k$, $k \geq 1$, и $X_n = \{p, q, r, y_i, z_i,\ i = \overline{1, k}\}$. Положим

$$f_n(p, q, r) = (p, q, r)w, \quad F_n = \operatorname{span}\langle f_n(p, q, r)\rangle, \tag{4.1}$$

где $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \ldots [y_k, z_k]$ и $\operatorname{span}\langle Y\rangle$ обозначает подпространство, порожденное множеством Y.

Нетрудно понять, что всякий собственный многочлен нечетной степени $n \geq 5$ из $D(A^{(5)})$ лежит в пространстве F_n.

В [5] доказано, что в альтернативной метабелевой алгебре пространство полилинейных элементов из F_n порождается элементами

$$f_n = (x_1, x_2, x_3)[x_4, x_5] \ldots [x_{n-1}, x_n],$$

$$f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} = (x_1, \overline{x_2}, x_3)[\overline{x_4}, x_5] \ldots [x_{n-1}, x_n], \quad f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} \quad (i = \overline{4, n}).$$

При доказательстве этого факта использовались тождество $(x, y, z)[y, z] = 0$ и кососимметричность элемента $f_n(p, q, r)$ по переменным, входящим в произведение коммутаторов; тождество метабелевости при этом не использовалось. Из тождества $(x, y, z) \circ [y, z] = 0$ [9] и леммы 2.5 вытекает, что эти свойства имеют место и для алгебры $A^{(5)}$.

Лемма 4.1. $\dim_\Phi(P_n \cap F_n) = n - 1$, *если* $n = 2k + 3$, $k \geq 1$.

Доказательство. Достаточно доказать линейную независимость элементов f_n, $f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ $(i = \overline{4, n})$. Допустим, что верно равенство

$$\alpha f_n + \rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \sum_{i \geq 4} \chi_i f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} = 0 \tag{4.2}$$

для некоторых скаляров α, ρ, χ_i. Рассмотрим грассманову оболочку $G(S)$ вспомогательной суперапгебры S. Подставляя $x_1 = 1 \otimes a$ и $x_i = \xi_i \otimes x$, $i \geq 2$, в равенство (4.2), в силу леммы 3.3 получим $\alpha = 0$. Тогда

$$\rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \sum_{i \geq 4} \chi_i f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)} = 0. \tag{4.3}$$

Пусть $i_0 \geq 5$ — фиксированный индекс. Полагая $x_{i_0} = u \in U$ в (4.3), получим равенство $\chi_{i_0}(x_1, x_2, u)[x_4 x_5] \ldots [x_{n-1} x_n] = 0$, откуда в силу леммы 3.3 следует, что $\chi_{i_0} = 0$, значит, верно $\rho f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)} + \chi_4 f_n^{\mathrm{Id}+(3,4)} = 0$. Полагая в этом равенстве $x_1 = x_2 = t$, получим $\rho(t, x_4, x_3)[t, x_5] \cdots = 0$. Тогда $\rho = 0$ и $\chi_4 f_n^{\mathrm{Id}+(3,4)} = 0$. Аналогично получаем $\chi_4 = 0$. Итак, доказано, что $\alpha = 0$, $\rho = 0$ и все $\chi_i = 0$ при $i \geq 4$. Лемма доказана.

4.2. Собственные многочлены четной степени. Пусть $n = 4 + 2k$, $k \geq 0$, и $X_n = \{p, q, r, s, y_i, z_i,\ i = \overline{1, k}\}$. Положим

$$g_n(p, q, r, s) = ([p, q], r, s)w, \quad G_n = \operatorname{span}\langle g_n(p, q, r, s)\rangle, \tag{4.4}$$

где $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \ldots [y_k, z_k]$. Нетрудно понять, что всякий собственный многочлен четной степени $n \geq 4$ из $D(A^{(5)})$ лежит в пространстве G_n. Докажем, что векторное пространство $P_n \cap G_n$ полилинейных многочленов из G_n порождается элементами вида

$$g_n(j) = ([x_1, x_j], x_{i_1}, x_{i_2})[x_{i_3}, x_{i_4}] \dots [x_{i_{n-1}}, x_{i_n}],$$

$$g'_n = ([x_2, x_3], x_1, x_4)[x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n],$$

где $\{i_1, \dots, i_n, j\} = \{2, 3, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 < \dots < i_n$.

Обозначим через P подпространство, порожденное элементами $g_n(j)$. Заметим, что элемент $([a, b], x, y)[z, t]$ кососимметричен по x, y, z, t в силу леммы 2.2. Значит, если элемент $([p, q], r, s)v$, где v — произведение коммутаторов, отличен от элементов вида $g_n(j), g'_n$, то можно считать, что $([p, q], r, s) = ([p, q], x_1, x_m)$, где $m \in 2, 3$. Поскольку в альтернативной алгебре верно тождество $([a, b], a, b) = 0$, справедлива и его линеаризация

$$([p, q], x_1, x_m) + ([x_1, q], p, x_m) + ([p, x_m], x_1, q) + ([x_1, x_m], p, q) = 0. \tag{4.5}$$

Стало быть, по модулю P элемент $([p, q], x_1, x_m)v$ сравним с точностью до знака с одним из элементов $([p, x_2], x_1, x_3)v$ или $([p, x_3], x_1, x_2)v$. По тем же соображениям каждый из этих элементов по модулю P сравним с элементом $\pm g'_n$. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Лемма 4.2. $\dim_\Phi(P_n \cap G_n) = n$, *если* $n = 2k + 4$, $k \geq 0$.

Доказательство. Докажем линейную независимость элементов $g_n(j)$, g'_n, где $j = \overline{2, n}$. Допустим, что верно равенство $\sum\limits_{j \geq 2} \alpha_j g_n(j) + \rho g'_n = 0$ для некоторых скаляров α_j, ρ. Докажем сначала, что $\alpha_j = 0$ для всех $j \geq 4$.

Поскольку все случаи рассматриваются аналогично, предположим, что $j = 4$. Заметим, что элементы $g_n(j)$ при $j \neq 4$ и g'_n являются йордановыми дифференцированиями по переменной x_4. Тогда должно быть выполнено равенство

$$\alpha_4(a, x_2, x_3)[x_1, a][x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n] = 0.$$

Отсюда после его линеаризации подстановкой $a \to u \in U$ получаем $\alpha_4 = 0$. Точно так же проверяется, что $\alpha_j = 0$ для $j = 5, \dots, n$.

Следовательно, верно равенство

$$\{\alpha_2([x_1, x_2], x_3, x_4) + \rho([x_2, x_3], x_1, x_4) - \alpha_3([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w = 0, \tag{4.6}$$

где $w = [x_5, x_6] \dots [x_{n-1}, x_n]$. Переставляя в этом равенстве два раза переменные x_1, x_2, x_3 по циклу и складывая почленно три полученных равенства, получаем

$$\delta\{([x_1, x_2], x_3, x_4) + ([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w = 0,$$

где $\delta = \alpha_2 + \rho - \alpha_3$. Отсюда $\delta[(x_1, x_2, x_3), x_4]w = 0$ в силу тождества (1.7). Если $[(x_1, x_2, x_3), x_4]w = 0$, то элемент $h := [([x_1, x_2], x_3, x_4)w$ кососимметричен по всем переменным и в силу (1.9) $h = 0$, что противоречит лемме 3.3. Значит, $\delta = 0$ и $\rho = \alpha_3 - \alpha_2$. Тогда в силу (4.6) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned}
0 = \{\alpha_2([x_1, x_2], x_3, x_4) + (\alpha_3 - \alpha_2)([x_2, x_3], x_1, x_4) - \alpha_3([x_3, x_1], x_2, x_4)\}w \\
= \{\alpha_2\{([x_1, x_2], x_3, x_4) + ([x_3, x_2], x_1, x_4)\}w \\
+ \alpha_3\{([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_1, x_3], x_2, x_4)\}w \\
= -\alpha_2\{([x_1, x_4], x_3, x_2) + ([x_3, x_4], x_1, x_2)\}w \\
+ \alpha_3\{([x_2, x_3], x_1, x_4) + ([x_1, x_3], x_2, x_4)\}w.
\end{aligned}$$

Поскольку среди последних четырех слагаемых три являются йордановыми дифференцированиями по x_2, то и $\alpha_3([x_2, x_3], x_1, x_4)w$ обладает этим свойством, откуда следует равенство $\alpha_3(t, x_1, x_4)[t, x_3]w = 0$. Тогда $\alpha_3 = 0$. Аналогично $\alpha_2 = 0$. Тем самым лемма доказана.

Замечание. Пусть многообразие $\mathfrak{M}$ унитарно замкнуто и $B = F_{\mathfrak{M}}[X]$ — относительно свободная алгебра (с единицей 1) многообразия $\mathfrak{M}$. Напомним, что условие бесконечности области целостности скаляров Φ гарантирует, что всякий Т-идеал алгебры B является однородным и, значит, инвариантен относительно операторов $\Delta(y)$ [9]. Произвольный многочлен (не обязательно полилинейный) называется *собственным*, если он аннулируется всеми операторами из множества $\Delta(1)$.

Стандартным одночленом над X называется правонормированное произведение $x_1^{k_1} \ldots x_l^{k_l}$, где $k_i \geq 0$, $i = \overline{1, l}$.

Следуя [14], напомним, что

(а) всякий элемент из Т-идеала T алгебры $C = F_{\mathrm{Alt}}[X]$ является линейной комбинацией элементов вида gv, где g — собственный многочлен из T, v — стандартный одночлен над X;

(б) всякий собственный многочлен g алгебры A линейно выражается через произведения $\pi = t_1 \ldots t_m$ значений термов t_i, $i = \overline{1, m}$, в сигнатуре $\Sigma_0 = \{c\}$, где $c(x, y) = [x, y]$ — коммутатор;

(в) если $g \in D(C)$, то g является линейной комбинацией подходящих произведений вида $\pi = t_1 \ldots t_m$, каждое из которых содержит терм t_i в сигнатуре $\Sigma_1 = \{c, d\}$, где $d(x, y, z) = (x, y, z)$ — ассоциатор, в запись которого обязательно входит символ d.

В силу тождества (1.2) в алгебре C терм $d(x, y, z)$ линейно выражается через термы в сигнатуре $\Sigma_0 = \{c\}$.

Из результатов п. 2.1 вытекает, что всякий собственный многочлен идеала $D(A^{(5)})$ является линейной комбинацией однородных многочленов вида (4.1) и (4.4). Если многочлен указанного вида имеет степень ≥ 3 по некоторой переменной, то он равен 0. Тем самым нетрудно указать аддитивный базис ассоциаторного идеала $D(A^{(5)})$. Однако в общем виде он нам не потребуется, поэтому мы не будем его выписывать.

4.3. Рост размерности пространств $P_n(A) \cap D(A)$.

Предложение 4.1. *Пусть $A = A^{(5)}$ и $d_n = \dim_\Phi P_n(A) \cap D(A)$. Тогда имеет место асимптотика*

$$d_n \sim (n-1) \cdot 2^{n-1}.$$

Доказательство. Пусть $X_n = Y \cup Z$, $Y \cap Z = \varnothing$, где $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$, $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$. Стандартным одночленом над $Z = \{z_1, \ldots, z_l\}$ является правонормированное произведение переменных $z_1, \ldots, z_l$ при условии, что эти переменные упорядочены по возрастанию индексов. Через $F_k(Y)$ и $G_k(Y)$ обозначим образы пространств $P_k \cap F_k$ и $P_k \cap G_k$ при изотонных отображениях $X_k \longrightarrow Y$, $x_i \mapsto y_i$, $i = \overline{1, k}$. Заметим, что всякий элемент из пространства $P_n(A) \cap D(A)$ является линейной комбинацией элементов вида $f(y_1, \ldots, y_k) \cdot v(z_1, \ldots, z_l)$, где $k + l = n$, $f \in F_k \cup G_k$ и $v(z_1, \ldots, z_l)$ — правильный одночлен над Z.

Нам потребуются следующие два хорошо известных равенства (см. [15]):

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}, \quad \sum_k \binom{n+1}{2k+1} = 2^n.$$

При $n \geq 5$ в силу лемм 4.1 и 4.2 для подходящей последовательности $\theta_n = o(2^n)$ (бесконечно малой относительно 2^n при $n \to \infty$) имеем

$$d_n = \theta_n + \sum_k 2k \left\{ \binom{n}{2k} + \binom{n}{2k+1} \right\}$$

(поскольку при малых значениях k множества F_k и G_k не определены)

$$= \theta_n + \sum_k 2k \binom{n+1}{2k+1} = \theta_n + \sum_k (2k+1)\binom{n+1}{2k+1} - \sum_k \binom{n+1}{2k+1}$$

$$= \theta_n + (n+1)\sum_k \binom{n}{2k} - 2^n = \theta_n + (n+1)2^{n-1} - 2^n = \theta_n + (n-1)2^{n-1},$$

что и требовалось.

Из [4, теорема 3.1] и предложения 4.1 вытекает

Теорема 1. *Пусть $A = A^{(5)}$ и $c_n = \dim_\Phi P_n(A)$. Тогда имеет место асимптотика*

$$c_n \sim n^2 \cdot 2^{n-2}.$$

§ 5. Компоненты многообразия $\mathbf{Alt}^{(5)}$

Обозначим через $\mathrm{Ass}^{(5)}$ многообразие ассоциативных Ли-нильпотентных алгебр степени 5; через $\mathrm{var}(A)$ обозначается многообразие, порожденное алгеброй A.

Из лемм 4.1 и 4.2 вытекает

Предложение 5.1. *Многообразие* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *является объединением многообразий* $\mathrm{Ass}^{(5)}$ *и* $\mathrm{var}(G(S))$.

Многообразие $\mathrm{Ass}^{(5)}$ также может быть разложено в объединение двух компонент. Для их описания введем вспомогательные алгебры.

5.1. Супералгебра $V = V^{(5)}$. Пусть $V = V_0 \oplus V_1$ — ассоциативная супералгебра с единицей 1 в многообразии $\mathrm{Ass}^{(5)}$, порожденная четным элементом r и нечетным элементом x и удовлетворяющая определяющим соотношениям

$$r^2 \in Z(V), \quad x^2 = 1, \quad r \circ x = r^4 = 0.$$

Покажем, что алгебра V имеет размерность 8 над Φ. Заметим, что она линейно порождается элементами $r^k x^\varepsilon$, где $0 \leq k \leq 3$, $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Обозначим через Δ алгебру над Φ с базисом $1, \rho$, считая, что $\rho^2 = 0$. Проверим, что V является свободным Δ-модулем, порожденным элементами 1, r, x, rx. Рассмотрим сначала алгебру M над Δ с указанным базисом и следующей таблицей умножения:

1) 1 — единица,
2) $r \cdot r = \rho 1$, $x \cdot r = -rx$, $rx \cdot r = -\rho x$,
3) $1 \cdot x = x$, $r \cdot x = rx$, $x \cdot x = 1$, $rx \cdot x = r$,
4) $1 \cdot rx = rx$, $r \cdot rx = \rho x$, $x \cdot rx = -r$, $rx \cdot rx = -\rho 1$.

Легко видеть, что для ассоциативного и коммутативного кольца $\Delta = \Phi[\rho]$ алгебра M ассоциативна. В самом деле, операторы правого умножения на элементы r, x, rx в базисе $1, r, x, rx$ имеют вид

$$R(r) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\rho & 0 \end{pmatrix}, \quad R(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R(rx)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&\rho&0\\0&-1&0&0\\-\rho&0&0&0\end{pmatrix}.$$

С помощью указанных представлений легко проверить ассоциативность алгебры M, например,

$$R(x)R(rx)=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&\rho&0\\0&-1&0&0\\-\rho&0&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\-\rho&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&\rho&0\end{pmatrix}=-R(r)=R(x\cdot rx),$$

$$R(rx)^2=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&\rho&0\\0&-1&0&0\\-\rho&0&0&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-\rho&0&0&0\\0&-\rho&0&0\\0&0&-\rho&0\\0&0&0&-\rho\end{pmatrix}=R(rx\cdot rx).$$

На Φ-алгебре V имеется градуировка

$$V_0=\operatorname{span}(1,r,\rho,\rho r),\quad V_1=\operatorname{span}(x,rx,\rho x,\rho rx).$$

Докажем, что супералгебра V удовлетворяет тождеству (3.1). Во-первых,

$$[x,r]_s=[x,r]=x\cdot r-r\cdot x=-2rx,\quad [x,x]_s=2,\quad [x,rx]_s=xrx+rx^2=-r+r=0,$$
$$[rx,r]_s=[rx,r]=r[x,r]=-2\rho x,\quad [rx,rx]_s=2rxrx=-2\rho 1.$$

Значит, $V^{s(2)}=[V,V]_s\subseteq\operatorname{span}(1,rx)+\widehat{\rho}V$, где $\widehat{\rho}=\Phi\cdot\rho$. Тогда

$$V^{s(3)}=[V^{s(2)},V]_s\subseteq[rx,V]_s+\widehat{\rho}V^{s(2)}\subseteq\widehat{\rho}+\widehat{\rho}x+\widehat{\rho}rx,$$
$$V^{s(4)}=[V^{s(3)},V]_s\subseteq\widehat{\rho}[\operatorname{span}(1,x,rx),V]_s=\widehat{\rho}[\operatorname{span}(x,rx),V]_s\subseteq\widehat{\rho}+\widehat{\rho}rx,$$
$$V^{s(5)}=[V^{s(4)},V]_s=0.$$

Покажем, что для любого n существуют $x_0\in V_0$, $x_1,y_1,z_1,\dots,y_n,z_n\in V_1$ такие, что

$$[x_1,x_0,x_0,x_0][y_1,z_1]_s\cdots[y_n,z_n]_s\neq 0. \tag{5.1}$$

Имеем

$$[x,r]=-2rx,\quad [[x,r],r]=[-2rx,r]=4\rho x,$$
$$[[[x,r],r],r]=[4\rho x,r]=4\rho[x,r]=-8\rho rx.$$

Поскольку $[x,x]_s=2$ в супералгебре V, соотношение (5.1) доказано.

5.2. Алгебра $W=W^{(5)}$. Пусть $F_6^{(5)}$ — относительно свободная ассоциативная алгебра с единицей с тождеством (2.1) ранга 6, I — ее идеал, порожденный одночленами степени 7, $W=F_6^{(5)}/I$ — фактор-алгебра. Заметим, что алгебра W конечномерна.

В [4] был построен аддитивный базис свободной алгебры многообразия $\mathrm{Ass}^{(5)}$. Для проверки линейной независимости указанной системы многочленов использовалась модельная алгебра. Однако вместо нее можно использовать алгебры $G(V)$ и W. Поэтому справедливо

Предложение 5.2. *Многообразие* $\mathrm{Ass}^{(5)}$ *является объединением многообразий* $\mathrm{var}(G(V))$ *и* $\mathrm{var}(W)$.

5.3. О конечномерных супералгебрах, порождающих заданное многообразие. А. Р. Кемер [16] доказал, что любое многообразие ассоциативных алгебр над полем характеристики 0 порождается грассмановой оболочкой некоторой конечнопорожденной супералгебры.

Определение. Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие алгебр. Будем говорить, что *супералгебра* M *порождает многообразие* $\mathfrak{M}$, если многообразие $\mathfrak{M}$ порождается ее грассмановой оболочкой $G(M)$.

Теорема 2. *Многообразие* $\mathrm{Alt}^{(5)}$ *альтернативных Ли-нильпотентных степени* 5 *алгебр порождается конечномерной супералгеброй.*

В качестве искомой супералгебры можно взять алгебру $V \oplus W \oplus S$.

Из предложения 5.2 вытекает, что многообразие $\mathrm{Ass}^{(5)}$ порождается конечномерной супералгеброй $V \oplus W$.

А. С. Гордиенко [17] указал конечномерную супералгебру, порождающую многообразие $\mathrm{Ass}^{(4)}$.

§6. Центральные элементы алгебры $A^{(5)}$

Как и прежде, через $A^{(5)}$ обозначается свободная алгебра счетного ранга многообразия $\mathrm{Alt}^{(5)}$.

6.1. Ассоциативный центр алгебры $A^{(5)}$.

Теорема 3. *Ассоциативный центр* $N_{\mathrm{Ass}}(A)$ *алгебры* $A = A^{(5)}$ *совпадает с идеалом* $T^{(3)}(A)$*, значит, совпадает с ее ассоциативным ядром* $N^*_{\mathrm{Ass}}(A)$.

Доказательство. В силу леммы 2.5 $T^{(3)}(A) \subseteq N_{\mathrm{Ass}}(A)$. Для завершения доказательства достаточно заметить, что произведение коммутаторов $w = [y_1, z_1][y_2, z_2] \ldots [y_{k+1}, z_{k+1}]$ не лежит в $N_{\mathrm{Ass}}(A)$. В самом деле, в силу леммы 3.3

$$([a', x]_s [x, x]_s^k, x, x) = 2^k ([a', x]_s, x, x) \neq 0$$

в супералгебре S, что и требовалось доказать.

6.2. Центральное ядро алгебры $A^{(5)}$. Однородные многочлены, являющиеся линейными комбинациями многочленов вида (4.1) и (4.4), назовем *регулярными* D*-элементами.*

Через $\mathrm{vr}(f)$ обозначим набор переменных из X, от которых зависит элемент f.

Лемма 6.1. *Ассоциаторный идеал* $D(A)$ *алгебры* $A = A^{(5)}$ *имеет нулевое пересечение с центральным ядром* $Z^*(A)$: $D(A) \cap Z^*(A) = 0$.

Доказательство. Для полноты изложения приведем необходимые соображения, повторяя рассуждения из предложения 5.2 статьи [4]. Пусть f — однородный элемент из $D(A)$. Тогда $f = \sum\limits_{v_i} p(v_i) v_i$, где суммирование ведется по стандартным одночленам v_i, $p(v_i)$ — регулярные D-элементы, причем $\mathrm{vr}(f) = \mathrm{vr}(p(v_i)) \cup \mathrm{vr}(v_i)$. Выполняя набор частичных дифференцирований по переменным из $\mathrm{vr}(v_i)$, получаем $p(v_i) \in Z^*(A)$. Но тогда $p(v_i)[x, y] = 0$ для любых переменных $x, y \in X$. Пусть $\mathrm{vr}(f) < x < y$. Если $p(v_i) \neq 0$, то элемент

$p(v_i)[x,y]$ можно считать ненулевым полилинейным многочленом. Это противоречит разд. 4 (аддитивный базис ассоциаторного идеала). Значит, каждый элемент $p(v_i)$ равен 0 и $f=0$. Лемма доказана.

В силу [3, следствие из теоремы] и леммы 6.1 справедлива

Теорема 4. *Центральное ядро $Z^*(A)$ алгебры A как* T-*пространство порождается слабым элементом Холла* $[[x_1,x_2]^2,x_2]$.

6.3. Полный центр алгебры $A^{(5)}$. Целью этого пункта является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Полный центр $Z(A)$ алгебры $A=A^{(5)}$ как* T-*пространство порождается элементами*

$$[x_1,x_2,x_3,x_4],\quad [[x_1,x_2,x_3]\cdot x_4,x_5],\quad [[x_1,x_2]^2,x_3]. \tag{6.1}$$

Доказательству этой теоремы предпошлем две леммы. Обозначим через Z_0 T-пространство алгебры A, порожденное элементами (6.1). Заметим, что в силу лемм 2.3–2.5 элементы (6.1) центральны. Учитывая результаты работы [4], достаточно понять, что каждый центральный элемент, содержащийся в ассоциаторном идеале $D(A)$, лежит в Z_0.

Напомним, что в п. 4.1 через F_n обозначалось пространство, порожденное элементами f_n, $f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)}$, $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ $(i=\overline{4,n})$.

Лемма 6.2. *Пространство F_n не содержит ненулевых элементов из центра $Z(A)$ алгебры $A=A^{(5)}$.*

Доказательство. Заметим сначала, что F_n порождается элементами

$$f_n=(x_1,x_2,x_3)[x_4,x_5]\dots[x_{n-1},x_n],\quad f_n(4)=f_n^{\mathrm{Id}+(2,4)},$$

$$f_n(i)=(x_1,x_2,\overline{x_3})[\overline{x_i},x_4][x_{j_1},x_{j_2}]\dots[x_{j_{n-6}},x_{j_{n-5}}],\quad 5\le i\le n,$$

где $j_1<\dots<j_{n-5}$ и $\{j_1,\dots,j_{n-5}\}\cup\{1,2,3,4,i\}=\{1,2,\dots,n\}$.

В самом деле, в силу леммы 2.5 многочлены $f_n^{\mathrm{Id}+(3,i)}$ и $f_n(i)$ при $5\le i\le n$ совпадают с точностью до знака $\pm$.

Рассмотрим элемент вида $k=\alpha f_n+\beta f_n(4)+\sum\limits_{i=5}^{n}\gamma_i f_n(i)$, где $\alpha,\beta,\gamma_i\in\Phi$. Допустим, что $k\in K(A)$. Тогда его значение k' при $x_1=x_2=z\in X$ также лежит в $K(A)$. Только второе слагаемое для k в указанной точке отлично от 0, значит, $k'=\beta f_n(4)|_{x_1=x_2=z}\in K(A)$. Отсюда следует, что верно равенство $\beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5]v,a]=0$, где v — произведение коммутаторов, в запись которого не входит ни одна из переменных z, x_3, x_4, x_5, a. D силу лемм 2.4, 2.5 и 2.6

$$0=\beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5]v,a]=\beta[(z,x_4,x_3)[z,x_5],a]v=\beta([x_3,z],x_4,z)[x_5,a]v.$$

Отсюда $\beta=0$ в силу леммы 3.3 и $k=\alpha f_n+\sum\limits_{i=5}^{n}\gamma_i f_n(i)$. Поскольку $k\in K(A)$, то $[k,x_1]=0$. Заметим, что если v — коммутаторное слово, то в силу (1.1) и лемм 2.4, 2.6 $(a,b,x)[b,y]v=(a,b,x)[b,yv]$, значит, $[f_n(i),x_1]=0$ по лемме 2.7, но тогда для $w=[x_4,x_5]\dots[x_{n-1},x_n]$

$$0=\alpha[f_n,x_1]=\alpha[(x_1,x_2,x_3)w,x_1]=\alpha(x_1,[x_1,x_2],x_3)w.$$

В силу леммы 3.3 имеем $\alpha = 0$ и $k = \sum\limits_{i=5}^{n} \gamma_i f_n(i)$. Выберем фиксированный индекс $i_0 \geq 5$ и рассмотрим равенство $[k, x_{i_0}] = 0$. Поскольку для любого $t \in T^{(3)}(A)$ верно $[t[a,b],a] = [t,a][a,b] = 0$ в силу лемм 2.5 и 2.2, то

$$0 = \sum_{i=5}^{n} \gamma_i [f_n(i), x_{i_0}] = \gamma_{i_0}[f_n(i_0), x_{i_0}]$$
$$= \gamma_{i_0}[(x_1, x_2, x_{i_0})[x_3, x_4][x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{n-6}}, x_{j_{n-5}}], x_{i_0}],$$

где последний элемент полилинеен по всем переменным, кроме x_{i_0}, относительно которой он имеет степень 2. Аналогично предыдущему отсюда получаем $\gamma_{i_0} = 0$. Лемма доказана.

В дальнейшем нам необходимо также пространство G_n, введенное в п. 4.2. Заметим, что оно центрально, т. е. $G_n \subseteq Z(A)$.

Лемма 6.3. *Пусть a — стандартный одночлен и g — многочлен вида*

$$g = wu_1 \dots u_s, \tag{6.2}$$

где $w = [v, x]$, $v \in (X, X, X)$, $u_1, \dots, u_s \in U^{(2)}$, $x \in X$. Тогда существуют элементы f_i вида (4.1) *и стандартные одночлены $a_i \in A$ такие, что*

$$ga + \sum_i f_i a_i \in [D(A), A].$$

Доказательство. Используя теорему 3, преобразуем элемент ga:

$$ga = ([v,x]u_1 \dots u_s)a = [v,x](u_1 \dots u_s a) = [v \cdot u_1 \dots u_s a, x] - vu_1 \dots u_s[a, x].$$

Первое слагаемое $z = [v \cdot u_1 \dots u_s a, x]$ лежит в $[D(A), A]$, а второе слагаемое $vu_1 \dots u_s[a,x]$ в силу леммы 4.1 индукцией по степени одночлена a представимо в виде $\sum f_i a_i$, где f_i — элементы вида (4.1), a_i — стандартные одночлены. Лемма доказана.

Теперь можно завершить доказательство теоремы 5. В [4] доказано, что центр свободной ассоциативной алгебры Ли-нильпотентной степени 5 как T-пространство порождается элементами (6.1). Поэтому достаточно рассмотреть элемент $f \in Z(A) \cap D(A)$.

Как отмечено выше (см. замечание в конце п. 4.2), произвольный многочлен из $D(A)$ представим в виде $\sum\limits_i f_i a_i$, где f_i — собственные многочлены из $D(A)$, a_i — стандартные одночлены; впрочем, это представление легко получить индукцией по степени элемента f.

Заметим, что многочлены f_i имеют вид (4.1) или (4.4). Всякий многочлен вида (4.4) в силу тождеств (1.4) и (1.9) является линейной комбинацией элементов вида (6.2).

Если $f \in D(A) \cap Z(A)$, то в силу леммы 6.3 по модулю пространства $[D(A), A]$ он представим в виде

$$f \equiv \sum_i f_i a_i, \tag{6.3}$$

где f_i являются линейными комбинациями элементов вида (4.1), a_i — попарно различные стандартные одночлены.

Докажем от противного, что все $f_i = 0$. Ясно, что пространство $[D(A), A]$ инвариантно относительно подстановок $x = 1$ для любого $x \in X$.

Выберем среди стандартных одночленов a_i из сравнения (6.3) элемент a_m максимальной степени и подставим в него $x = 1$ для всех x, входящих в состав a_m. Тогда имеем $f_i \in [D(A), A] \subseteq Z(A)$. Получили противоречие с леммой 6.2. Тем самым доказано, что $D(A) \cap Z(A) \subseteq [D(A), A] \subseteq Z_0$. Теорема 5 доказана.

Благодарность. Автор признателен рецензенту за внимательное прочтение рукописи и ряд замечаний, способствующих ее улучшению.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* О центрах относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 11. С. 113–130.

2. *Гришин А. В., Пчелинцев С. В.* Собственные центральные и ядерные многочлены относительно свободных ассоциативных алгебр с тождеством лиевой нильпотентности степени 5 и 6 // Мат. сб. 2016. Т. 207, № 12. С. 54–72.

3. *Пчелинцев С. В.* Тождества модельной алгебры кратности 2 // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1389–1411.

4. *Пчелинцев С. В.* Аддитивный базис относительно свободной ассоциативной алгебры с тождеством Ли-нильпотентности степени 5 и его применения // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 1. С. 175–193.

5. *Пчелинцев С. В.* Тождества метабелевых альтернативных алгебр // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 894–915.

6. *Пчелинцев С. В.* Теоремы о произведении для альтернативных алгебр и некоторые их применения // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 383–404.

7. *Пчелинцев С. В.* Ассоциативные и йордановы Ли-нильпотентные алгебры // Алгебра и логика. (В печати).

8. *Schafer R. D.* An introduction to nonassociative algebras. New York: Academic Press, 1966.

9. *Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.

10. *Sagle A. A.* Malcev algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 1961. V. 101, N 3. P. 426-458.

11. *Jacobson N.* Structure and representations of Jordan algebras. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1968. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.).

12. *Shestakov I. P., Zhukavets N.* The free alternative superalgebra on one odd generator // Internat. J. Algebra Comput. 2007. V. 17, N 5/6. P. 1215–1247.

13. *Ваулин А. Н.* Свободная альтернативная алгебра с тождеством $[[[x, y], z], t] = 0$ // Чебышевский сборник. 2003. Т. 4, № 1. С. 54–60.

14. *Райзер Г. Дж.* Комбинаторная математика. М.: Мир, 1966.

15. *Кемер А. Р.* Многообразия и $\mathbb{Z}_2$-градуированные алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1984. Т. 48, № 5. С. 1042–1059.

16. *Гордиенко А. С.* Коразмерности коммутатора длины 4 // Успехи мат. наук. 2007. Т. 62, № 1. С. 191–192.

17. *Пчелинцев С. В., Шестаков И. П.* Константы частных дифференцирований и примитивные операции // Алгебра и логика. 2017. Т. 56, № 3. С. 317–347.

Поступила в редакцию 4 июля 2023 г.
После доработки 4 июля 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Пчелинцев Сергей Валентинович (ORCID 0000-0001-7857-9532)
Финансовый университет при Правительстве РФ,
Ленинградский пр-т, 49/2, Москва 125167;
Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., 7-9, Санкт-Петербург 199034
pchelinzev@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 510.643+517.11

ДОПУСТИМЫЕ ПРАВИЛА ВЫВОДА МОДАЛЬНЫХ WCP–ЛОГИК

В. В. Римацкий

Аннотация. Исследуются допустимые правила расширений модальных логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий. Для таких логик описывается явный независимый базис для допустимых правил. Полученный базис состоит из бесконечной последовательности правил, которые имеют компактную и простую форму.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.114

Ключевые слова: модальная логика, фрейм и модель Крипке, допустимое правило вывода, базис допустимых правил.

1. Введение

Современные приложения логики в компьютерных науках и в искусственном интеллекте нуждаются в языке, приспособленном для описания различных динамических систем. Язык неклассических логик (например, модальных или временных) успешно выполняет эту функцию. Но изначально факты, утверждения в этом языке описываются с помощью формул, которые предназначены для описания моделей в общем и неспособны выразить изменяющиеся условия и предпосылки. Эти условия и предпосылки могут моделироваться с помощью различных вариантов понятия логического следования. Одна из особенностей предлагаемого подхода к изучению логического следования состоит в том, что исследуется логическое следование в терминах правил вывода, секвентов, а не просто формул или утверждений.

Формализм описания свойств моделей посредством формул глубоко развит, широко распространен и подробно представлен в научной литературе. Он является базисом представления и изучения человеческого мышления. Однако формулы описывают только стабильные, статичные явления; утверждение только фиксирует факт и не способно ухватить меняющиеся условия. Поэтому изучение (структурных) правил вывода (или секвентов): выражений, имеющих посылки (заданный набор предположений) и заключение, предоставляет нам более тонкий и выразительный аппарат для моделирования мышления и вычислений. Посылки правила вывода выражают текущую, заданную информацию как предположения, а заключение представляет вывод или факт, который можно получить из предположений. Правила вывода позволяют также моделировать стандартную ситуацию в изучении логического следования: даны некоторые предположения или факты, что из них следует, что является непротиворечивым следствием наблюдаемых фактов?

Исследование поддержано Российским научным фондом (проект No. 23-21-00213).

Очевидно, что понятие (структурного) правила вывода обобщает понятие формулы: любая формула может быть рассмотрена как структурное правило вывода без посылки, без предположений. Однако допустимые правила вывода оказались намного сильнее обычных структурных правил: благодаря примеру Харропа (1960 г. [1]) известно, что даже интуиционистская логика Int не является структурно полной, т. е. в ней существуют допустимые, но не выводимые правила вывода, правила, не представимые посредством формул. Благодаря примерам Минца [2] и Порта [3] это также справедливо и для широкого класса модальных логик.

Понятие допустимого правила вывода было впервые введено Лоренценем [4] в 1955 г. Для произвольной логики допустимыми являются те правила вывода, которые не изменяют множество доказуемых теорем данной логики. Понятно, что любое выводимое правило является допустимым в заданной логике, но обратное в общем случае неверно, как показывают примеры Харропа, Минца и Порта. Непосредственно из определения можно также заключить, что множество всех допустимых в логике λ правил вывода образует *наибольший* класс правил вывода, которыми можно расширить аксиоматическую систему данной логики, не изменяя множества доказуемых теорем. Кроме того, допустимые правила значительно усиливают дедуктивную систему заданной логики.

Начало истории изучения допустимых правил может быть датировано 1975 г. с появления проблемы Фридмана [5] о существовании алгоритмического критерия допустимости правил в интуиционистской логике Int. В классической логике вопрос допустимости решался тривиально — допустимы только выводимые, доказуемые правила. В случае неклассических логик существуют допустимые, но не доказуемые правила вывода. В середине 70-х гг. Минц [2] получил достаточные условия выводимости правил специальной формы. Положительное решение проблемы Фридмана о существовании алгоритма, распознающего допустимость правил вывода в интуиционистской логике Int, было получено В. В. Рыбаковым в 1984 г. [6]. Для широкого класса модальных и суперинтуиционистских логик критерий допустимости правил вывода был позднее сформулирован в [7].

К проблеме А. Кузнецова (1973) о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода логики Int восходит другой способ описания всех допустимых правил логики. Имея базис для допустимых правил, все остальные можно вывести из него как следствия. Первый положительный результат в изучении базисов для допустимых правил вывода был получен А. Циткиным [8], который нашел базис для всех допустимых в Int квазихарактеристических правил вывода. Изначально исследование базисов для допустимых правил вывода нестандартных логик фокусировалось на наиболее важных индивидуальных логиках таких, как логика доказуемости GL или системах $S4$, $S5$, а также на обобщении существующих методов и получении общей техники, применимой не только к отдельным, индивидуальным логикам, а к целым подклассам логик, включающих наиболее интересные и важные логики. В общем проблема Кузнецова о существовании конечного базиса для допустимых правил вывода решалась отрицательно не только для Int [9] но и для большинства других базовых логик. В. В. Рыбаков [7, гл. 4] показал, что логики Int, KC, $K4$, $S4$ и многие другие базовые логики не имеют конечного базиса для допустимых правил от конечного числа переменных.

Учитывая отрицательное решение проблемы Кузнецова для многих базовых неклассических логик, к концу 20-го века базис для допустимых правил вывода мог быть получен только из известного алгоритмического критерия допустимости (см. [7, гл. 3.5]). Однако этот критерий является вычислительно сложным и неприменимым для описания такого базиса в легко обозримой форме. Поэтому становится актуальной проблема явного описания легко обозримого базиса для всех допустимых правил вывода хотя бы для основных базовых логик, а также для тех «сильных» табличных логик, которые имеют конечный базис допустимых правил (см. [10, 11]). Первый шаг в этом направлении был сделан в 2000 г.: в статье [12] был получен рекурсивный базис для допустимых правил интуиционистской логики Int, состоящий из правил в полуредуцированной форме. Позже Иемхофф в [14] и последующих работах был получен явный базис допустимых правил логики Int и ее расширений со слабым свойством ко-накрытий (extension property) плюс дизъюнктивным свойством. В [15] В. В. Рыбаков построил явный базис для всех допустимых правил логики $S4$. В [16, 17] был получен явный независимый базис допустимых правил расширений $S4$, наследующих допустимые правила $S4$ (т. е. обладающих (сильным) свойством ко-накрытий). В [18] Б. Р. Федоришин получил явный базис для допустимых правил логики GL. Наличие слабого свойства ко-накрытий (extension property) и дизъюнктивного свойства логики были ключевыми при доказательстве этих результатов.

В настоящей работе продолжено изучение базисов для допустимых правил вывода модальных логик. С использованием техники работ [15, 18] описан явный независимый базис допустимых правил вывода для расширений логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий (WCP-логики), но без дизъюнктивного свойства. При этом количество переменных, от которых зависят правила, образующие базис в $S4\,(GL)$ [15, 18], было уменьшено, и не требуется дизъюнктивное свойство логики. Тем самым удалось значительно расширить класс логик, для которых описан явный независимый базис допустимых правил.

2. Определения, предварительные результаты

Вначале напомним кратко необходимые определения и результаты (для детального знакомства с предметом рекомендуем [7]).

Язык модальных логик состоит из счетного множества пропозициональных переменных $p_1, \dots, p_n, \dots$, логических связок классической логики $\neg, \wedge, \vee, \to$ и унарного модального оператора $\Box$. Оператор $\Diamond$, также используемый далее, определяется как $\Diamond\alpha = \neg\Box\neg\alpha$. *Нормальная модальная логика* есть множество модальных формул L, содержащее все пропозициональные тавтологии, схему аксиом $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$ и замкнутое относительно подстановок, правила отделения $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ и необходимости $\alpha \vdash \Box\alpha$. Минимальная модальная логика обозначается через K. Расширение логики K схемой $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$ обозначается $K4$; расширение $K4$ схемой $\Box\alpha \to \alpha$ порождает логику $S4$. Если L — нормальная модальная логика, то для формул $\alpha \in L$ пишем $\vdash_L \alpha$ или $L \vdash \alpha$. Если логика L фиксирована или ясна из контекста, то обозначаем для простоты $\vdash \alpha$. Далее рассматриваются только логики, расширяющие $S4$ или GL.

Фрейм $\mathscr{F} := \langle F, R\rangle$ есть пара, где F — непустое множество и R — бинарное отношение на F. Содержательно F представляет множество всех «возможных» миров, R — отношение перехода из одного мира в другой. Далее базисное множество и сам фрейм будем обозначать одной и той же буквой, например $\mathscr{F}$. Так как рассматриваются логики, расширяющие $S4$ (или GL), отношение достижимости R на фреймах считается рефлексивным (иррефлексивным) и транзитивным.

Моделью называем тройку $\mathscr{M} := \langle F, R, V\rangle$, где $\langle F, R\rangle$ — фрейм, и *означивание* V есть отображение множества пропозициональных переменных в множество 2^F всех подмножеств множества F. Означивание V ставит в соответствие каждой переменной множество «миров» $V(p)$, в которых переменная p истинна. Обозначим истинность переменной p в точке $x \in F$ при заданном означивании V как $(F, x) \models_V p$. В тех случаях, когда базисное множество (фрейм) ясно из контекста, истинность переменной будем записывать как $x \models_V p$.

Истинность формулы α на элементе $x \in \mathscr{F}$ при заданном означивании V индуктивно определяется следующим образом:

- $x \models_V p \iff x \in V(p)$;
- $x \models_V \neg\alpha \iff x \not\models_V \alpha$;
- $x \models_V \alpha \vee \beta \iff x \models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \wedge \beta \iff x \models_V \alpha$ и $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \alpha \to \beta \iff x \not\models_V \alpha$ или $x \models_V \beta$;
- $x \models_V \Box\alpha \iff \forall y \in \mathscr{F}(xRy \Longrightarrow y \models_V \alpha)$;
- $x \models_V \Diamond\alpha \iff \exists y \in \mathscr{F}(xRy \& y \models_V \alpha)$;

Формула A истинна на модели $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ (обозначение $\mathscr{M} \models A$ или $\mathscr{F} \models_V A$), если данная формула A истинна на каждом элементе модели $\mathscr{M}$ при означивании V. *Формула A истинна на фрейме* $\mathscr{F}$ (обозначение $\mathscr{F} \models A$), если она истинна на любой модели $\mathscr{M}$, порожденной $\mathscr{F}$, т. е. истинна при любом означивании на $\mathscr{F}$.

Подмножество $\mathscr{X}$ заданной модели $\mathscr{M}$ называется *формульным* (*определимым*), если существует формула α такая, что $\forall z \in \mathscr{M}[z \models_V \alpha \iff z \in \mathscr{X}]$. Соответственно *элемент $z \in \mathscr{M}$ является формульным*, если множество $\{z\}$ формульное. Означивание V *определимо* (*формульное*) в модели $\mathscr{M}$, если для любой переменной p из области V множество $V(p)$ формульное.

Модель $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ называется *адекватной* для логики L (L-моделью), если любая формула, доказуемая в логике L, истинна на данной модели. Соответственно фрейм $\langle F, R\rangle$ *адекватен* для логики L, если на нем истинны все доказуемые формулы логики L. Класс фреймов K называется *характеристическим* для логики L, если любой фрейм из данного класса адекватен для L и для любой формулы, не доказуемой в L, найдется фрейм из класса K, на котором опровергается данная формула. Для заданного класса фреймов $\mathscr{K}$ *логика $L(\mathscr{K})$, порожденная $\mathscr{K}$*, есть множество всех формул, истинных на всех фреймах из $\mathscr{K}$. В данном случае говорят, что логика $L(\mathscr{K})$ *порождена классом фреймов $\mathscr{K}$*.

Модальная логика L называется *разрешимой*, если для любой формулы существует алгоритм, позволяющий установить ее доказуемость в данной логике. Модальная логика L называется *финитно аппроксимируемой*, если для любой формулы α, не доказуемой в L, существует конечный фрейм (или конечная алгебра), адекватный L, на котором не истинна формула α. Модальная логика L обладает *дизъюнктивным свойством*, если для любых формул α, β из доказуемости в L формулы $\Box\alpha \vee \Box\beta$ следует доказуемость в L одной из формул $\Box\alpha$ или $\Box\beta$.

Напомним, что если $\mathscr{F} = \langle F, R\rangle$ — некоторый фрейм, то множество $C \subseteq \mathscr{F}$ называется *сгустком*, если: 1) для любых x, y из C выполняется xRy; 2) для любых $x \in C$ и $y \in F$ $(xRy \& yRx) \Longrightarrow y \in C$. Сгусток называется *собственным* если $|C| > 1$; в противном случае — *одноэлементным* или *вырожденным.* Для элемента $a \in \mathscr{F}$ через $C(a)$ обозначим сгусток, порожденный элементом a.

Любое множество попарно несравнимых по отношению R сгустков фрейма $\mathscr{F}$ называется *антицепью.* Антицепь $\mathscr{A}$ называется *нетривиальной*, если $\mathscr{A}$ состоит по крайней мере из двух различных сгустков, в противном случае — *тривиальной.* Для любого элемента $a \in \mathscr{F}$ обозначим $a^R = \{z \mid aRz\}$ и $a^{<R} = a^R \setminus C(a)$ и будем говорить, что элемент *a порождает как корень* подфрейм a^R фрейма F. Фрейм $\mathscr{F}$ — *корневой*, если существует элемент $a \in \mathscr{F}$ такой, что $\forall b \in \mathscr{F} aRb$. Данный элемент a называем также *корнем* $\mathscr{F}$. Множество $X^R := \bigcup\{z^R \mid z \in X\}$ называется *открытым подфреймом*, порожденным X. Понятия корневой модели, подмодели и открытой подмодели определяются аналогичным образом.

Говорят, что фрейм $\mathscr{F}$ является *L-фреймом*, если все теоремы логики L истинны на $\mathscr{F}$ при любом означивании переменных (т. е. фрейм адекватен логике L). Соответственно множество $L(\mathscr{F})$ формул, истинных на $\mathscr{F}$, есть логика, порожденная фреймом $\mathscr{F}$.

Сгусток $C(a)$ из F есть *ко-накрытие* для множества (или антицепи) $X \subseteq F$, если $a^R \backslash C(a) = X^R$. Говорят, что *элемент a есть ко-накрытие* для $X \subseteq F$, если одноэлементный сгусток $C(a)$ образует ко-накрытие для X. Под *ко-накрытием* далее понимаем одноэлементный сгусток, являющийся ко-накрытием. *L-ко-накрытием* называем ко-накрытие, порождающее как корень L-фрейм.

Глубиной элемента z модели (фрейма) $\mathscr{F}$ называется максимальное число сгустков в цепях сгустков, начинающихся со сгустка, содержащего z. Множество всех элементов фрейма (модели) $\mathscr{F}$ глубины не более чем n будем обозначать через $S_{\leq n}(\mathscr{F})$, а множество элементов глубины n — через $S_n(\mathscr{F})$.

Для заданного фрейма $\mathscr{F}$, заданного означивания V и правила вывода $r := \{\alpha_1, \dots, \alpha_k/\beta\}$ будем говорить, что *r истинно на $\mathscr{F}$ при означивании V* (обозначаем через $\mathscr{F} \models_V r$), если как только $\forall z \in \mathscr{F}\, \forall i(z \models_V \alpha_i)$, то $\forall z \in \mathscr{F}\, (z \models_V \beta)$. *Правило r истинно на $\mathscr{F}$*, если r истинно на $\mathscr{F}$ при любом означивании V (обозначаем $\mathscr{F} \models r$).

Правило вывода $\{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)\}$ называется *допустимым* в логике L [обозначаем $r \in Ad(L)$], если для любых формул $\delta_1, \dots, \delta_n$ из $(\forall j \alpha_j(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L)$ следует $\beta(\delta_1, \dots, \delta_n) \in L$. Для произвольного правила вывода r обозначим посылку правила через $\mathrm{Pr}(r)$.

Допустимые правила (ДПВ) пропозициональной модальной (суперинтуиционистской) логики L имеют алгебраическое описание — им соответствуют квазитождества, истинные на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ многообразия алгебр $\mathrm{Var}(L)$, соответствующего данной логике, т. е. справедливо

Утверждение 2.1 [1, гл. 3]. *Правило вывода*

$$r = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_k(p_1, \dots, p_n)/\beta(p_1, \dots, p_n)\}$$

допустимо в логике L, если и только если на свободной алгебре счетного ранга $\mathfrak{F}_w(L)$ из многообразия алгебр $\mathrm{Var}(L)$ истинно квазитождество

$$r^* = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n) = 1 \& \dots \& \alpha_k(p_1, \dots, p_n) = 1 \Longrightarrow \beta(p_1, \dots, p_n) = 1\}.$$

Правило r называется *следствием правил $r_1, \dots, r_k$ в логике L*, если заключение r выводимо из посылок r с помощью теорем L, правил $r_1, \dots, r_k$ и постулированных правил вывода L. Множество $Ad^*(L)$ допустимых правил логики L называем *базисом допустимых правил*, если для любого допустимого правила r найдутся правила $r_1, \ldots, r_k \in Ad^*(L)$ такие, что r выводимо из $r_1, \ldots, r_k$ в логике L.

Утверждение 2.2 [1, разд. 3.5, 4.1]. *$r_1, \ldots, r_k$ — базис допустимых правил вывода логики L тогда и только тогда, когда $r_1^*, \ldots, r_k^*$ — базис квазитождеств $\mathfrak{F}_w(L)$.*

Модель $\langle F, R, V\rangle$, где $V : P_n \to 2^F$ и $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, называется *$n$-характеристической для логики* L тогда и только тогда, когда $\alpha \in L \iff \langle F, R, V\rangle \models \alpha$ для любой формулы $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ от переменных $p_1, \ldots, p_n$.

В нашем исследовании существенно будет использоваться строение n-характеристической модели для финитно аппроксимируемых логик, расширяющих логику $S4(GL)$, с помощью которой будет описана допустимость правил вывода в этих логиках. Следуя [7, гл. 3], опишем конструкцию этой модели. Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $S4$, и пусть задано множество пропозициональных переменных $P_n = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Первый слой данной модели $S_1(C_n(\lambda))$ состоит из множества попарно неизоморфных как модели сгустков со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n, и все элементы каждого сгустка имеют попарно различные означивания. Предположим, что $S_{\leq m}(C_n(\lambda))$ уже построен. Слой $S_{m+1}(C_n(\lambda))$ глубины $m+1$ получим следующим образом. Выберем произвольную антицепь сгустков $\mathscr{X} \subset S_{\leq m}(C_n(\lambda))$, содержащую хотя бы один элемент (сгусток) глубины m и добавим к этой антицепи снизу копию каждого сгустка C из $S_1(C_n(\lambda))$ как ко-накрытие для антицепи $\mathscr{X}$ при условии

(i) фрейм $C^R = \mathscr{X}^R \cup \{C\}$ является λ-фреймом;

(ii) если $\mathscr{X} = \{C_1\}$, то сгусток C не изоморфен подмодели сгустка C_1.

Продолжая описанную процедуру, в итоге получим модель $Ch_n(\lambda)$. Для расширений логики GL такая модель строится аналогично, при построении используем только иррефлексивные элементы. Свойства полученной модели сформулируем в следующих утверждениях.

Утверждение 2.3 [7, гл. 3]. *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4(GL)$, модель $C_n(\lambda)$ является n-характеристической, и каждый элемент данной модели формульный.*

Утверждение 2.4 [7, гл. 3]. *Для любой финитно аппроксимируемой логики λ, расширяющей $S4(GL)$, правило вывода r допустимо в λ, если и только если r истинно на фрейме $C_n(\lambda)$ для любого n и при любом формульном означивании переменных.*

В данном исследовании также понадобится редуцированная форма модальных правил вывода. Говорят, что *правило R имеет редуцированную форму*, если $R := \bigvee\limits_{1\leq j\leq m} \phi_j/\Box x_0$, где $\phi_j := \bigwedge\limits_{0\leq i\leq k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge\limits_{0\leq i\leq k} \Diamond x_i^{b_i}$, $a_i, b_i \in \{0,1\}$; $x^0 := x$, $x^1 := \neg x$. Для каждого члена ϕ_j посылки правила в редуцированной форме определим также множества

$$\theta_1(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 0\}, \quad \theta_2(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 0\},$$

$$\theta_3(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, a_j = 1\}, \quad \theta_4(\phi_j) := \{x_j : 0 \leq j \leq k, b_j = 1\}.$$

Утверждение 2.5 [7]. *Для любого модального правила вывода R существует правило $rf(R)$ в редуцированной форме, эквивалентное R относительно истинности на (GL-) $S4$-алгебрах и (GL-) $S4$-фреймах; R и $rf(R)$ одновременно выводимы или допустимы в любой модальной логике, расширяющей $S4(GL)$.*

3. Базис ДПВ WCP-логик над $S4$

Говорят, что логика λ, расширяющая логику $S4$, имеет *слабое свойство ко-накрытий над* $S4$ (weak co-cover property), если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$ фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного рефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup\limits_{c\in\mathscr{X}^R} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-*логиками над* $S4$.

Для всех чисел $n > 1$, $1 \le i$, $j \le n$, $n \in N$, определим формулы

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\le i\le n} \Diamond\pi_i;$$

$$A_{n,1} := \Box\big[\bigwedge_{1\le i\le n}(p_i \to \neg\Diamond q)\big]; \quad B := q \vee \neg\Diamond q.$$

Определим также последовательность правил вывода:

$$\mathscr{R}_1 := \frac{\Diamond p \wedge \Diamond\neg p}{p \wedge \neg p}; \quad \mathscr{R}_n := \frac{\Box\big(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B)\big)}{\Box\neg A_n}.$$

Лемма 1. *Правило $\mathscr{R}_1$ допустимо в любой финитно аппроксимируемой модальной логике $\lambda \supseteq S4$.*

Доказательство почти очевидно. По построению n-характеристической модели $C_k(\lambda)$ первый слой этой модели содержит вырожденные одноэлементные сгустки. При любом означивании переменной p на элементах первого слоя, порождающих вырожденные сгустки, истинно либо p, либо $\neg p$. Соответственно на таких элементах посылка правила $\mathscr{R}_1$ не выполняется, что влечет допустимость данного правила вывода в логике λ. $\Box$

Заметим также, что посылка правила $\mathscr{R}_1$ выполнима (например, на собственных сгустках), но не унифицируема (т. е. при любой подстановке не становится теоремой логики). Поэтому такое правило бесполезно в доказательстве, и будем называть правила с неунифицируемой посылкой *пассивными*. Правило $\mathscr{R}_1$ образует базис для пассивных правил вывода (см. [13, теорема 3.4]).

Теорема 3.1. *Правила $\mathscr{R}_n$, $n > 1$, допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике λ, расширяющей $S4$, имеющей слабое свойство ко-накрытий.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого n правило вывода $\mathscr{R}_n$ недопустимо в логике λ. Тогда по утверждению 2.4 существует формульное означивание V переменных правила $\mathscr{R}_n$, при котором правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на некоторой k-характеристической модели $C_k(\lambda)$. Итак, справедливо

$$C_k(\lambda) \Vdash_V \Box(A_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B))\& C_k(\lambda) \nVdash_V \Box\neg A_n. \tag{1}$$

Следовательно, существует элемент $a \in C_k(\lambda)$ такой, что $a \nVdash_V \Box\neg A_n$, откуда вытекает $\exists a_1 : aRa_1 \& a_1 \Vdash_V A_n$. Тогда найдутся элементы $b_1, \dots, b_n \in C_k(\lambda)$ такие, что $a_1Rb_i\&b_i \Vdash_V \pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий существует рефлексивный элемент $b \in C_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для множества R-минимальных сгустков $\{C(b_1), C(b_2), \dots C(b_n)\}$, порожденных элементами $b_1, \dots, b_n$.

По выбору элемента выполняется $b \Vdash_V A_n$. По (1) выполняется $b \Vdash_V A_{n,1}$. Поскольку b является ко-накрытием для $\{b_1, \dots, b_n\}$, легко проверить, что формула B выполняется на элементе b при означивании V. Действительно, $b_i \Vdash_V p_i$

и по (1) справедливо $b_i \Vdash_V A_{n,1}$, откуда следует $\forall i \leq n,\ b_i \Vdash_V \neg\Diamond q$. Отсюда получаем, что $b \models_V q$, или $b \models_V \neg q$ влечет $b \models_V \neg\Diamond q$. Таким образом, выполнено $b \Vdash_V A_n \wedge B$, что противоречит $b \Vdash_V \Box\neg(A_n \wedge B)$ по предположению (1).

Если все элементы $b_1, \ldots, b_n \in Ch_k(\lambda)$ принадлежат одному сгустку, то любой из них может рассматриваться как накрытие для остальных, и на нем также выполнится формула $(A_n \wedge B)$, что противоречит предположению. $\Box$

Пусть задана логика λ, расширяющая логику $S4$ и удовлетворяющая условиям:

(1) λ финитно аппроксимируема;

(2) имеет слабое свойство ко-накрытий;

(3) правило r в редуцированной форме недопустимо в $\lambda \iff$ существует λ-модель $\mathscr{M} = \langle F, V\rangle$ такая, что

(i) $\forall x \in Fx \models_V \bigvee \phi_j$;

(ii) $\exists y \in \mathscr{F} y \not\models_V \Box x_0$;

(iii) $\forall \mathscr{D} \subseteq F \exists e \in Fe \models_V \phi_e, \phi_e \in \mathrm{Pr}(r), \& \theta_2(\phi_e) = \theta_1(\phi_e) \cup \bigcup\limits_{z\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z))$.

Условие (3) является аналогом критерия допустимости правила в редуцированной форме. Для логик $K4, S4, Grz, GL$ соответствующие теоремы можно найти, например, в [7, гл. 3.9]. Если посылка правила r истинна на некоторой модели $\mathscr{M} = \langle F, V\rangle$, то на каждом элементе этой модели выполняется только одна формула ϕ_j из посылки. Действительно, по определению формулы ϕ_j справедливо: $\theta_1(\phi_j) \cup \theta_3(\phi_j) = \theta_2(\phi_j) \cup \theta_4(\phi_j) = \mathrm{Var}(r) = \{x_0, \ldots, x_k\}$. При заданном означивании для каждого элемента модели множества $\theta_i(\phi_j)$ определяются однозначно.

Напомним определение обертывающей (wrapping) алгебры (см. определения 2.5.1, 2.5.3 в [7]). Для заданного фрейма $\mathscr{F} = \langle F, R\rangle$ модальная алгебра $\mathscr{F}^+$, где

(1) $\langle 2^F, \wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \bot, \top\rangle$ — булева алгебра всех подмножеств множества F,

(2) $\forall X \subseteq F(\Box X = \{a : \forall y(aRy) \Longrightarrow (y \in X)\})$,

называется *ассоциированной для фрейма* $\mathscr{F}$.

Аналогично для модели $\mathscr{M} = \langle F, R, V\rangle$ алгебра $\mathscr{M}^+$, порожденная множеством элементов $\{V(p)\}$ алгебры $\langle F, R\rangle^+$, называется *ассоциированной для данной модели.*

Покажем теперь, что все допустимые правила вывода логики λ, удовлетворяющей условиям (1)–(3), выводятся в данной логике из набора правил $\{\mathscr{R}_n\}$.

Теорема 3.2. *Пусть модальная логика* λ $(\supseteq S4)$ *удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда любое допустимое правило* r *(в редуцированной форме) логики* λ *выводится из правил* $\{\mathscr{R}_n,\, n \in N\}$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. некоторое допустимое в λ правило r не выводится из правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$. Тогда по теореме 1.4.11 в [7] найдется λ-алгебра $\mathscr{B} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, разделяющая эти правила: $\forall n \mathscr{B} \models \mathscr{R}_n, \mathscr{B} \not\models r$.

Докажем вспомогательное утверждение. Пусть задана модальная алгебра $\mathscr{A} := \mathscr{F}^+(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k))) \in \mathrm{Var}(\lambda)$, порожденная множеством подмножеств $(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k)) \subseteq \mathscr{F}$ обертывающей алгебры $\mathscr{F}^+$, где $\mathscr{F}$ — заданный рефлексивный и транзитивный λ-фрейм. Пусть r — правило вывода в редуцированной форме.

Лемма 2. *Если правило r в редуцированной форме допустимо в логике λ, удовлетворяющей условиям (1)–(3), и опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, то для некоторого n правило $\mathscr{R}_n$ также опровергается на $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть правило r в редуцированной форме, допустимое в логике λ, имеет вид

$$r := \bigvee_{1\le j\le t} \phi_j/\Box x_0,$$

где

$$\phi_j := \bigwedge_{0\le i\le k} x_i^{a_i} \wedge \bigwedge_{0\le i\le k} \Diamond x_i^{b_i}, \quad a_i, b_i \in \{0,1\},\ x^0 := x,\ x^1 := \neg x.$$

Пусть правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$ при некотором означивании $V(x_i) := \mathscr{Y}_i \in \mathscr{A}$. Так как правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то

$$\mathscr{F} \models_V \bigvee_{1\le j\le t} \phi_j; \exists\, b \in \mathscr{F} : b \not\models_V \Box x_0.$$

Рассмотрим алгебру $(b^R)^+$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathscr{B} := (b^R)^+(V(x_0), \dots, V(x_k))$, порожденную множеством элементов $V(x_0), \dots, V(x_k)$. Поскольку правило r опровергается на b^R, то $\mathscr{B} \not\models_V r$.

Применим условие (3), которому удовлетворяет логика λ. Так как r допустимо в λ и условия (i), (ii) выполнены на b^R, условие (iii) не выполняется:

$$\begin{aligned}&\exists \mathscr{G} \subseteq b^R \forall e \in F : e \models_V \phi_e \& \phi_e \in \Pr(r),\\ &\Longrightarrow \theta_2(\phi_e) \neq \theta_1(\phi_e) \cup \bigcup \{(\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z)) : z \in \mathscr{G} \& z \models_V \phi_z \& \phi_z \in \Pr(r)\}. \quad (*)\end{aligned}$$

Пусть антицепь X состоит из R-минимальных элементов $\mathscr{G}$, т. е. $X^R = \mathscr{G}^R \cup X$. Тогда X нетривиальна и не имеет ко-накрытия в $\mathscr{F}$. В противном случае если найдется элемент $c \in b^R$, для которого справедливо $c^R = X^R$ либо $c^R = X^R \cup \{c\}$, то для формулы $\phi_c \in \Pr(r) : c \models_V \phi_c$, не выполнено условие $(*)$.

Рассмотрим множества $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, состоящие из всех дизъюнктивных членов посылки правила r, имеющих в b^R и X^R непустое множество истинности соответственно, т. е.

$$\mathscr{X} := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R : c \models_V \phi_j\}, \quad \mathscr{Y} := \{\phi_j \mid \exists e \in X^R : e \models_V \phi_j\}.$$

Определим множество $\mathscr{D}$ дизъюнктов посылки правила r, истинных на элементах антицепи $X \subset b^R$, т. е.

$$\mathscr{D} := \{\phi_s \mid \exists e \in X e \models_V \phi_s\},$$

и множество дизъюнктов $\mathfrak{B}$, истинных на фрейме $\mathscr{F}$:

$$\mathfrak{B} := \{\phi_s \mid \exists e \in \mathscr{F} e \models_V \phi_s \& \phi_s \in \Pr(r)\}.$$

Так как зафиксированная антицепь $X \subset b^R$ не имеет ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$, то $\forall \phi_j \in \mathfrak{B}$ выполняется

$$\theta_2(\phi_j) \neq \theta_1(\phi_j) \cup \bigcup_{\phi\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)). \tag{2}$$

Пусть n — мощность множества $\mathscr{D}$, т. е. $n := |\mathscr{D}|$. Ясно, что в силу нетривиальности антицепи $X \subset b^R$ справедливо $n > 1$. Определим также

$$P_V := \mathrm{Var}(r) = \{x_0, \dots, x_k\};$$

$$P_T := \mathrm{Var}\Big(\bigcup_{x\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi_x)\cup\theta_2(\phi_x))\Big) = \{p \mid \exists c\in X : c\models_V p \vee c\models_V \Diamond p\}.$$

Зафиксируем взаимно однозначное соответствие f между $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ и $\mathscr{D}$. Расширим означивание V на алгебру $\mathscr{B}$ с переменных правила r на переменные правила $\mathscr{R}_n$ следующим образом:

$$V(p_i) := V(f(p_i)) \;\&\; V(q) := V(P_V - P_T). \tag{3}$$

Утверждение 3.3. *При означивании V правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на алгебре $\mathscr{B}$.*

Доказательство. Так как элемент b принадлежит R-наименьшему сгустку фрейма, порождающего алгебру $\mathscr{B}$, и $\forall x\in X$ выполняется $x \models_V \pi_i$ для некоторого i, то

$$b\models_V \bigwedge_{1\le i\le n}\Diamond\pi_i,$$

т. е. $b\models_V A_n$. Отсюда заключаем, что $\mathscr{B}\not\models_V \Box\neg A_n$.

Возьмем произвольный $c\in b^R$ и предположим, что $c\models_V p_i$. Тогда $c\models_V f(p_i)$ и тем самым $c\models_V \phi_i$, $\phi_i\in\mathscr{D}$. Следовательно, по выбору P_T и в силу $c\models_V\phi_i$, $\phi_i\in\mathscr{D}$ заключаем, что $c\models_V\neg\Diamond q$. Таким образом, $c\models_V A_{n,1}$, откуда в силу произвольности выбора элемента $c\in b^R$ имеем $b\models_V \Box A_{n,1}$.

Предположим, что $c\models_V A_n$. Кроме того, пусть выполняется $c\models_V\phi_c, \phi_c\in\mathscr{X}$. Тогда $c\models_V A_n \iff c\models_V\Diamond\phi_j$ для всех $\phi_j\in\mathscr{D}$. Следовательно, $c\models_V \Diamond\phi_j, \forall\phi_j\in\mathscr{D}$. Отсюда $P_T\subseteq\theta_2(\phi_c)$ и $c\not\models_V q$ по выбору P_T. Предположим также, что $c\models_V\neg\Diamond q$. Тогда $\forall\, e\in c^R e\not\models q$. Отсюда следует, что $c^R\cap V(P_V-P_T)=\varnothing$. Таким образом, $\theta_2(\phi_c)\subseteq P_T$.

Итак, совместно доказанное выше влечет: $\theta_2(\phi_c)=P_T$, т. е.

$$\theta_2(\phi_c)=\theta_1(\phi_c)\cup\bigcup_{\phi\in\mathscr{D}}(\theta_1(\phi)\cup\theta_2(\phi))$$

и $\phi_c\in\mathscr{X}$, что противоречит (2). Утверждение доказано. $\Box$

Доопределим означивание V на алгебре $\mathscr{A}$ переменной q правила $\mathscr{R}_n$ так, чтобы опровергнуть $\mathscr{R}_n$ на $\mathscr{A}$.

Лемма 3. $\mathscr{A}\not\models_V\mathscr{R}_n$.

Доказательство. Пусть зафиксированная выше нетривиальная антицепь $X\subset b^R$ состоит из сгустков $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ (т. е. $X=\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$). Так как посылка правила истинна на всем фрейме $\mathscr{F}$, для каждого элемента $t\in\mathscr{F}$ найдется уникальная формула ϕ_t из посылки такая, что выполняется $t\models_V\phi_t$.

Доопределим на фрейме $\mathscr{F}\setminus b^R$ означивание переменных правила $\mathscr{R}_n$ следующим образом. Определим $X^{-R}=\{x : xRC_1\&xRC_2\&\ldots\&xRC_n\}$ и

$$V(q) := \{y\in\mathscr{F}\setminus X^R : y\notin X^{-R}\&\exists x\in X^{-R}(xRy)\}$$
$$= V\Big(\neg\bigwedge_{\phi_j\in\mathscr{D}}\Diamond\phi_j\wedge\neg\Box\Big(\bigvee_{\phi_j\in\mathscr{Y}}\phi_i\Big)\wedge\bigvee\Big\{\phi_y : \exists\phi_z\Big(z\models_V\bigwedge_{\phi_j\in\mathscr{D}}\Diamond\phi_j\Longrightarrow z\models_V\Diamond\phi_y\Big)\Big\}\Big).$$

Покажем, что при таком означивании V правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathscr{F}$.

По определению означивания V непосредственно получаем

$$\forall e\in X^R e\models_V\neg\Diamond q;\quad \forall x\in\mathscr{F}(x\models_V p_i \iff x\in X).$$

По определению означивания переменных p_i и q, очевидно, выполнено $\forall x \in \mathscr{F}$ $x \not\models_V \bigvee_{1\le i\le n} p_i \wedge \Diamond q$. Учитывая, что

$$\Box A_{n,1} = \Box \bigwedge_{1,n}(p_i \to \neg\Diamond q) = \Box \bigwedge_{1,n}(\neg p_i \vee \neg\Diamond q) = \Box\neg[\bigvee_{1,n}(p_i \wedge \Diamond q)],$$

получаем $\forall x \in \mathscr{F}(x \models_V \Box A_{n,1})$.

Пусть для некоторого элемента $z \in \mathscr{F}$ выполняется $z \models_V A_n$, т. е. из него достижима по отношению R зафиксированная антицепь $X = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ и сгусток $C(z)$ не является ко-накрытием для этой антицепи, значит, $z \in \mathscr{X}^{-R}$. Следовательно, по определению означивания $V(q)$ выполняется $z \models_V \neg q$. Кроме того, найдется такой элемент $y \in \mathscr{F}$, что $y \notin X^{-R}, y \notin X^R$ и zRy.

Действительно, если сгусток $C(z)$ является непосредственным R-предшественником для антицепи X (т. е. глубина $d(C(z))$ сгустка $C(z)$ есть $\max_{i\in X} d(i)+1$), то должен существовать по крайней мере один элемент y такой, что zRy и $C(y)\cup \mathscr{X}$ образуют антицепь, для которой сгусток $C(z)$ является ко-накрытием (таких элементов $y_1, \dots, y_k$ с этим свойством может оказаться несколько — $C(y_1) \cup \dots \cup C(y_k) \cup \mathscr{X}$ образуют антицепь). Тогда для этого элемента y выполняется $y \notin \mathscr{X}^{-R}$, $y \notin \mathscr{X}^R$ и zRy.

Если сгусток $C(z)$ не является непосредственным R-предшественником для антицепи X, то из него достижим некоторый R-предшественник $C(z_1)$ для антицепи X или достижимы по отношению R некоторые элементы $z_1, z_2, \dots, z_k$, которые являются непосредственными R-предшественниками для подмножеств антицепи X и выполняется $X \subseteq z_1^R \cup \dots \cup z_k^R$. В первом случае, как и выше, получаем существование элемента y с нужными свойствами. Во втором случае в качестве такого элемента y можем взять, например, z_1 с требуемыми свойствами.

Таким образом, такой элемент $y \in \mathscr{F}$ существует и для него выполняется $y \notin \mathscr{X}^{-R}, y \notin \mathscr{X}^R$ и zRy. В этом случае справедливо $y \models_V q$. Отсюда $z \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, что влечет $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Итак, показано, что при таком определении означивания посылка правила истинна на всех элементах фрейма $\mathscr{F}$. Так как элемент b является R-предшественником антицепи $\mathscr{X} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ и $\forall x \in C_i$ $x \models_V p_i$, $x \not\models p_j$, $i \neq j$, выполнено $b \models_V \bigwedge_{1\le i\le n} \Diamond \pi_i$, т. е. $b \models_V A_n$. Отсюда $b \not\models_V \Box\neg A_n$, что доказывает опровержимость правила $\mathscr{R}_n$ на фрейме $\mathscr{F}$ при данном означивании V. Лемма 3 доказана. $\Box$

Таким образом, как только допустимое в логике λ правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, на данной алгебре также опровергается одно из правил $\mathscr{R}_n$ из набора правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$, что завершает доказательство теоремы 3.2. $\Box$

Теорема 3.4. *Пусть модальная логика λ ($\supseteq S4$) удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда множество правил $\{\mathscr{R}_n,\ n > 1,\ n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логики λ.*

Доказательство. Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$ образует базис для допустимых правил. Покажем его независимость.

Как показано в [19], конечное множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N, n \le L\}$ образует базис для допустимых правил финитно аппроксимируемых логик конечной ширины L. Поэтому далее рассмотрим только WCP-логики неограниченной ширины.

Зафиксируем произвольное натуральное число $n > 1$. Определим λ-фрейм $\mathscr{F}$, разделяющий правила $\mathscr{R}_n$, следующим образом. Первый слой состоит из единственного рефлексивного элемента: $S_1(\mathscr{F}) := \{a_0\}$, a_0Ra_0. Второй слой данного фрейма образует антицепь из t $(t > n)$ рефлексивных элементов: $S_2(\mathscr{F}) := \{a_1, a_2, \dots, a_t\}$, $\forall i \leq t(a_iRa_0\&a_iRa_i)$. Выберем наименьшее число t, при котором антицепь всех элементов второго слоя $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ имеет λ-ко-накрытие b_0. Если такого числа t не существует, то ширина логики конечна, что невозможно по предположению. Зафиксируем нетривиальную антицепь $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq S_2(\mathscr{F})$.

Для построения третьего слоя выбираем все (в том числе тривиальные) антицепи, отличные от фиксированной антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, и к каждой такой антицепи приписываем снизу рефлексивный элемент как λ-ко-накрытие (т. е. если этот элемент порождает как корень λ-фрейм). Отношение достижимости считаем транзитивным. Заметим, что если ко-накрытие $b_0 \in S_3(\mathscr{F})$ для антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ порождает как корень λ-фрейм, то ко-накрытие для любого ее подмножества также порождает λ-фрейм.

Пусть теперь $S_{\leq k}(\mathscr{F})$ глубины не более k $(3 \leq k)$ уже построен. Слой $S_{k+1}(\mathscr{F})$ глубины $k+1$ построим следующим образом. Выберем все (в том числе и тривиальные) антицепи сгустков $\mathscr{X} \subset S_{\leq k}(\mathscr{F})$, содержащие хотя бы один сгусток глубины k и отличные от антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Затем к каждой такой антицепи приписываем снизу одноэлементный сгусток, если он порождает как корень λ-фрейм. Продолжая описанную процедуру для последующих слоев, получим λ-фрейм $\mathscr{F}$, в котором любая антицепь, отличная от антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, имеет λ-ко-накрытие, сама эта антицепь имеет R-предшественника.

Обозначим $X^{-R} = \{z \mid zRa_1\&zRa_2\dots\&zRa_n\}$, т. е. X^{-R} — множество элементов, из которых достижима вся зафиксированная антицепь $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ (ее нижний конус). Определим на $\mathscr{F}$ означивание V, опровергающее правило $\mathscr{R}_n$, следующим образом:

$$V(p_i) := a_i, a_i \in S_2(\mathscr{F}), 1 \leq i \leq n; \quad \forall i > nV(p_i) = \varnothing;$$
$$V(q) := \{a_{n+1}, \dots a_t\} \cup (S_3(\mathscr{F}) \setminus X^{-R}).$$

Заметим, что посылка правила $\mathscr{R}_1$ не выполняется на элементе первого слоя a_0, т. е. правило истинно на фрейме $\mathscr{F}$. Аналогично тому, как это было сделано при доказательстве леммы 3, легко показать, что при таком означивании правило $\mathscr{R}_n$ опровергается на фрейме $\mathscr{F}$.

Действительно, по определению V выполняется: $\forall\, a_i \in Xa_i \models_V p_i\&a_i \not\models_V p_j, i \neq j$, и тем самым верно $a_i \models_V \pi_i$. Тогда для ко-накрытия антицепи всех элементов второго слоя $\{a_1, a_2, \dots, a_t\}$ — элемента b_0 — выполняется $b_0 \not\models_V \Box\neg A_n$, т. е. заключение правила опровергается при таком означивании.

Покажем, что посылка истинна на всем фрейме $\mathscr{F}$. По определению $V(q)$ имеем $\forall i \leq n\, a_i \not\models_V \neg\Diamond q$. Тогда, очевидно, выполнено $\forall x \in \mathscr{F}\ x \not\models_V \bigvee\limits_{1 \leq i \leq n} p_i \wedge \Diamond q$. В силу

$$\Box A_{n,1} = \Box \bigwedge_{1,n} (p_i \to \neg\Diamond q) = \Box \bigwedge_{1,n} (\neg p_i \vee \neg\Diamond q) = \Box\neg\Big[\bigvee_{1,n} (p_i \wedge \Diamond q)\Big]$$

заключаем $\forall x \in \mathscr{F} x \models_V \Box A_{n,1}$.

Предположим теперь, что $z \in \mathscr{F}$ и выполняется $z \models_V A_n$. Тогда $z \in X^{-R}$ и по определению $V(q)$ выполняется $z \not\models_V q$. Так как сгусток $C(z)$ не является ко-накрытием для антицепи X (такого не существует в $\mathscr{F}$), но вся антицепь достижима из него, найдется элемент $y \in \mathscr{F} : y \notin X^R, y \notin X^{-R} \& zRy$.

Действительно, если z принадлежит $S_3(\mathscr{F})$ и является R-предшественником для зафиксированной антицепи X, то из него также достижим по крайней мере один из элементов $\{a_{n+1}, \dots, a_t\} \subseteq S_2(\mathscr{F} \setminus X)$. Тогда по определению $V(q)$ заключаем, что $z \models_V \Diamond q$ и, значит, $z \models_V \neg q \wedge \Diamond q$, что влечет истинность $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Если же глубина этого элемента z строго больше 3 ($d(z) > 3$), т. е. сгусток $C(z)$ не является непосредственным R-предшественником антицепи X, то из него достижим по отношению R некоторый сгусток $z_1 \in S_3(\mathscr{F})$, являющийся непосредственным R-предшественником антицепи X (но не ко-накрытием), либо достижимы элементы $z_1, z_2, \dots, z_k \in S_3(\mathscr{F} \setminus X^{-R})$, $k > 1$, являющиеся непосредственными R-предшественниками некоторых собственных подмножеств антицепи X, и выполняется $X \subseteq z_1^R \cup \dots \cup z_k^R$. В первом случае найдется элемент $y : z_1 R y$ с требуемыми свойствами $y \in \mathscr{F} : y \notin X^R$, $y \notin X^{-R} \& zRy$ (и по транзитивности отношения имеем zRy) или во втором случае в качестве такого элемента можем взять элемент z_1, для которого также выполнены требуемые свойства. И опять по определению $V(q)$ заключаем $z \models_V \Diamond q$, что влечет истинность $z \models_V \neg(A_n \wedge B)$.

Предположим теперь, что при $k \neq n$ правило $\mathscr{R}_k$ опровергается на $\mathscr{F}$, т. е. найдется элемент $c \in \mathscr{F}$ такой, что $c \not\models_V \Box\neg A_k$. При $k > n$ это невозможно, так как не может быть выполнено $c \models_V \Diamond p_j$, $j > n$, и тем самым заключение правила $\mathscr{R}_k$ верно при таком означивании.

Рассмотрим случай $k < n$. Тогда существуют элементы $a_1, \dots, a_k \in S_2(\mathscr{F})$ такие, что $cRa_j \& a_j \models_V \pi_j$. По построению фрейма $\mathscr{F}$ антицепь $\{a_1, \dots, a_k\}$ имеет ко-накрытие z в $\mathscr{F}$, так как она отлична от зафиксированной выше антицепи $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ и логика имеет слабое свойство ко-накрытий. Легко проверить (как это сделано при доказательстве теоремы 3.2), что на данном ко-накрытии z посылка правила $\mathscr{R}_k$ не выполняется. Так как z ко-накрытие для антицепи $\{a_1, \dots, a_k\}, k < n$, и $a_j \models_V \pi_j$, выполняется $z \models_V A_k$. В силу $a_i \models_V \neg\Diamond q$ легко проверить, что истинность или ложность переменной q на этом ко-накрытии z влечет выполнимость формулы B из посылки правила, что влечет $z \models_V (A_n \wedge B)$. Следовательно, посылка правила опровергается на элементе z, что также влечет истинность правила $\mathscr{R}_k$. Таким образом, при $k \neq n$ правило $\mathscr{R}_k$ истинно на $\mathscr{F}$. $\Box$

Отсюда непосредственно получаем

Следствие 1. *Множество правил $\{\mathscr{R}_n, n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логик $S4$, $S4.1$, $S4.2$, Grz, $Grz.2$.*

Определение (аксиоматику) этих логик и описание характеристических классов фреймов можно найти, например, в [7, гл. 2]. Финитная аппроксимируемость этих логик была доказана в теоремах 2.6.12, 2.6.25, 2.8.11 из [7]. Для проверки остальных условий теоремы важно отметить, что любая нетривиальная антицепь элементов n-характеристической модели (или ее компоненты в случае логик $S4.2, Grz.2$) имеет рефлексивное ко-накрытие. Следовательно, добавление рефлексивного элемента как ко-накрытия к произвольной антицепи элементов произвольного корневого фрейма, адекватного логике из данного списка, также порождает фрейм, адекватный логике, т. е. эти логики имеют слабое свойство ко-накрытий. Условие (3) (критерий допустимости правила в редуцированной форме) для логик $S4, Grz$ были доказаны в теоремах 3.9.6, 3.9.9 из [7]. Для остальных логик наличие всех возможных ко-накрытий позволяет воспроизвести доказательство этого критерия в более простых ситуациях, т. е. условие (3) для этих логик также выполняется.

4. Базис ДПВ *WCP*-логик над *GL*

Говорят, что логика λ, расширяющая логику GL, имеет *слабое свойство ко-накрытий над* GL (weak co-cover property), если для любого конечного корневого λ-фрейма $\mathscr{F}$ и произвольной нетривиальной антицепи $\mathscr{X}$ сгустков из $\mathscr{F}$ фрейм $\mathscr{F}_1$, полученный добавлением как корня одноэлементного иррефлексивного ко-накрытия к фрейму $\bigcup\limits_{c\in(\mathscr{X}^R\cup\mathscr{X})} c^R$, также является λ-фреймом. Логики, обладающие этим свойством, будем называть WCP-*логиками над* GL.

Обозначим $\Box_0\alpha := \alpha \wedge \Box\alpha$; $\Diamond_0 := \alpha \vee \Diamond\alpha$. Для всех чисел $n > 1$, $1 \leq i, j \leq n$, $n \in N$, определим формулы

$$\pi_i := p_i \wedge \bigwedge_{j\neq i} \neg p_j; \quad A_n := \bigwedge_{1\leq i\leq n} \Diamond\pi_i;$$

$$A^{ir}_{n,1} := \Box_0\big[\bigwedge_{1\leq i\leq n} (p_i \to \neg\Diamond_0 q)\big]; \quad B^{ir} := \neg\Diamond q.$$

Определим также для чисел $n > 1, n \in N$, последовательность правил вывода:

$$\mathscr{R}^{ir}_n := \frac{\Box_0\big(A^{ir}_{n,1} \wedge \neg(A_n \wedge B^{ir})\big)}{\Box_0\neg A_n};$$

Пусть логика λ, расширяющая логику GL, удовлетворяет условиям:

(1) λ финитно аппроксимируема;

(2) имеет слабое свойство ко-накрытий над GL;

(3) правило r в редуцированной форме недопустимо в $\lambda \iff$ существует λ-модель $\mathscr{M} = \langle F, V\rangle$ такая, что

(i) $\forall x \in F x \models_V \bigvee \phi_j$;

(ii) $\exists y \in \mathscr{F} y \not\models_V \Box x_0$;

(iii) $\forall \mathscr{D} \subseteq F \exists e \in F e \models_V \phi_e, \phi_e \in \Pr(r), \& \theta_2(\phi_e) = \bigcup\limits_{z\in\mathscr{D}} (\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z))$.

Покажем, что последовательность правил вывода $\{\mathscr{R}^{ir}_n, n > 1, n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил логики λ, расширяющей логику GL и удовлетворяющей условиям (1)–(3). Так как доказательство практически полностью повторяет доказательство в случае расширений $S4$ в более простом случае, ниже приводится только схема доказательства (там, где это не мешает пониманию).

Теорема 4.1. *Правила* $\mathscr{R}^{ir}_n$, $n > 1$, *допустимы в любой финитно аппроксимируемой логике* λ, *расширяющей* GL, *имеющей слабое свойство ко-накрытий над* GL.

Доказательство практически полностью повторяет доказательство теоремы 3.1. Если правило вывода $\mathscr{R}^{ir}_n$ недопустимо в логике λ, т. е. существует элемент $a \in Ch_k(\lambda)$ такой, что $a \not\Vdash_V \Box_0\neg A_n$, то найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n \in Ch_k(\lambda)$ такие, что $aRb_i \& b_i \Vdash_V \pi_i$. По слабому свойству ко-накрытий существует иррефлексивный элемент $b \in Ch_k(\lambda)$, являющийся ко-накрытием для множества $\{b_1, \ldots, b_n\}$. По выбору элемента выполняется $b \Vdash_V A_n$. В силу истинности посылки правила имеем $b \Vdash_V A^{ir}_{n,1}$. Так как b является ко-накрытием для $\{b_1, \ldots, b_n\}$, легко проверить, что формула $(A_n \wedge B^{ir})$ выполняется на элементе b при означивании V; противоречие. $\Box$

Теорема 4.2. *Пусть модальная логика* λ $(\supseteq GL)$ *удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда любое допустимое правило* r *(в редуцированной форме) логики* λ *выводится из правил* $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n > 1, n \in N\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2, поэтому в данном случае приведем схему доказательства, опуская некоторые детали. Предположим противное, т. е. некоторое допустимое в λ правило r не выводится из правил $\{\mathscr{R}_n^{ir},\ n > 1,\ n \in N\}$. Тогда найдется λ-алгебра $\mathscr{B} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, разделяющая эти правила: $\forall n \mathscr{B} \models \mathscr{R}_n^{ir}, \mathscr{B} \not\models r$.

Пусть задана модальная алгебра

$$\mathscr{A} := \mathscr{F}^{+}(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k))) \in \mathrm{Var}(\lambda),$$

порожденная множеством подмножеств $(V(x_0), V(x_1), \ldots, V(x_k)) \subseteq \mathscr{F}$ обертывающей алгебры $\mathscr{F}^{+}$, где $\mathscr{F}$ — заданный иррефлексивный и транзитивный λ-фрейм (определение этой алгебры было приведено выше), и пусть r — правило вывода в редуцированной форме.

Лемма 4. *Если правило* r *в редуцированной форме допустимо в логике* λ, *удовлетворяющей условиям* (1)–(3), *и опровергается на алгебре* $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$, *то для некоторого* n *правило* $\mathscr{R}_n^{ir}$ *также опровергается на* $\mathscr{A}$.

Доказательство. Пусть правило r в редуцированной форме опровергается на алгебре $\mathscr{A} \in \mathrm{Var}(\lambda)$ при некотором означивании $V(x_i) := \mathscr{Y}_i \in \mathscr{A}$. Так как правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то $\mathscr{F} \models_V \bigvee\limits_{1 \leq j \leq t} \phi_j; \exists b \in \mathscr{F} : b \not\models_V \Box x_0$. Как и в рефлексивном случае, на каждом элементе $x \in \mathscr{F}$ выполняется только одна формула из посылки. Рассмотрим алгебру $(b^R)^{+}$, порожденную фреймом b^R, и ее подалгебру $\mathscr{B} := (b^R)^{+}(V(x_0), \ldots, V(x_k))$, порожденную множеством элементов $V(x_0), \ldots, V(x_k)$. Так как правило r опровергается на b^R, то $\mathscr{B} \not\models_V r$.

По свойству (3), которому удовлетворяет логика λ, условие (iii) не выполняется на b^R:

$$\exists \mathscr{G} \subseteq b^R \forall e \in F : e \models_V \phi_e \& \phi_e \in \Pr(r)$$
$$\Longrightarrow \theta_2(\phi_e) \neq \bigcup \{(\theta_1(\phi_z) \cup \theta_2(\phi_z)) : z \in \mathscr{G} \& z \models_V \phi_z \& \phi_z \in \Pr(r)\}. \quad (**)$$

Пусть антицепь X состоит из R-минимальных элементов $\mathscr{G}$, т. е. $X^R = \mathscr{G}^R \cup X$. Тогда X нетривиальна и не имеет ко-накрытия в $\mathscr{F}$. В противном случае, если найдется элемент $c \in b^R$, для которого справедливо $c^R = X^R \cup X$ либо $c^R = X^R \cup \{c\}$, то для формулы $\phi_c \in \Pr(r) : c \models_V \phi_c$, не выполнено условие $(**)$.

Как и прежде, определяем множества дизъюнктов посылки правила:

$$\mathscr{X} := \{\phi_j \mid \exists c \in b^R \cup b : c \models_V \phi_j\}; \quad \mathscr{Y} := \{\phi_j \mid \exists e \in X^R \cup X : e \models_V \phi_j\};$$
$$\mathscr{D} := \{\phi_s \mid \exists e \in X e \models_V \phi_s\}; \quad \mathfrak{B} := \{\phi_s \mid \exists e \in \mathscr{F} e \models_V \phi_s \& \phi_s \in \Pr(r)\}.$$

Так как зафиксированная антицепь $X \subset b^R$ не имеет ко-накрытия ε в $\mathscr{F}$, то $\forall \phi_j \in \mathfrak{B}$ выполняется:

$$\theta_2(\phi_j) \neq \bigcup_{\phi \in \mathscr{D}} (\theta_1(\phi) \cup \theta_2(\phi)). \tag{4}$$

Как и ранее, при доказательстве утверждения 3.3, расширим означивание V на алгебру $\mathscr{B}$ с переменных правила r на переменные правила $\mathscr{R}_n^{ir}$ следующим образом:

$$V(p_i) := V(f(p_i)) \ \&\ V(q) := V(P_V - P_T). \tag{5}$$

Воспроизводя почти без изменений доказательство утверждения 3.3, можно доказать

Утверждение 4.3. *При означивании V правило $\mathscr{R}_n^{ir}$ опровергается на алгебре $\mathscr{B}$.*

Доопределим означивание переменной q так, чтобы посылка правила R_n^{ir} стала истинна на $\mathscr{F} \setminus b^R$:

$$V(q) := \{y \in \mathscr{F} \setminus X^R : y \notin X^{-R} \& \exists x \in X^{-R}(xRy)\}$$

$$= V\Big(\neg \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \wedge \neg \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\Big) \wedge \bigvee \Big\{\phi_y : \exists \phi_z (z \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \Longrightarrow z \models_V \Diamond\phi_y\Big)\Big\}\Big).$$

Так как элемент b — R-предшественник антицепи X и $\forall e \in Xe \models_V \pi_i$, то $b \not\models_V \Box_0 \neg A_n$, т. е. заключение правила опровергается на алгебре $\mathscr{A}$. Остается показать (аналогично доказательству леммы 3), что справедливо

Утверждение 4.4. *При таком определении означивания посылка правила R_n^{ir} истинна на алгебре $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $c \in \mathscr{F}$ и выполняется $c \models_V p_i$. Тогда $c \models_V f(p_i)$, откуда следует, что $c \models_V \phi_i$, $\phi_i \in \mathscr{D}$. В частности, $c \in X$. Тогда $c \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \& c \models_V \Box_0\big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\big)$ по выбору $\mathscr{D}$ и $\mathscr{Y}$, т. е. $c \not\models_V q$. Если $e \in c^R$, то $e \models_V \Box_0\big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\big)$ и, значит, $e \not\models_V q$. Таким образом, $c \models_V \neg\Diamond_0 q$ и тем самым $c \models_V A_{n,1}^{ir}$. Для остальных элементов $c \notin X$ справедливо $\forall i\, c \not\models_V p_i$, т. е. $c \models_V A_{n,1}^{ir}$.

Предположим теперь, что $c \in \mathscr{F}$ и выполняется $c \models_V A_n$. Тогда по определению означивания имеем $c \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j$, откуда $c \not\models_V q$ и $X \subseteq c^R$. Так как элемент c не является ко-накрытием антицепи X и $X \subseteq c^R$, то c есть R-предшественник элемента z, ко-накрывающего собственное подмножество антицепи X и тем самым

$$z \not\models_V \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{Y}} \phi_i\Big) \& z \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j,$$

или R-предшественник некоторого (R-максимального предшественника для X) элемента e, из которого достижим некоторый элемент $z \notin X^R$, т. е.

$$e \models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j \& \exists z \in e^R z \not\models_V \Box_0\Big(\bigvee_{\phi_j \in \mathscr{X}} \phi_i\Big) \& z \not\models_V \bigwedge_{\phi_j \in \mathscr{D}} \Diamond\phi_j.$$

В обоих случаях по определению $V(q)$ получаем $z \models_V q$. Стало быть, выполняется $c \models_V \neg q \& c \models_V \Diamond q$, т. е. $c \not\models_V B$.

Итак, показано, что при таком определении означивания посылка правила истинна на алгебре $\mathscr{A}$, что доказывает опровержимость правила $\mathscr{R}_n^{ir}$ на алгебре $\mathscr{A}$ при данном означивании V. Утверждение доказано. $\square$

Таким образом, как только допустимое в логике λ правило r опровергается на алгебре $\mathscr{A}$, то на данной алгебре также опровергается одно из правил $\mathscr{R}_n^{ir}$ из набора правил $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n \in N\}$, что завершает доказательство теоремы 4.2. $\square$

Теорема 4.5. *Пусть модальная логика λ ($\supseteq GL$) удовлетворяет условиям* (1)–(3). *Тогда множество правил $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n > 1, n \in N\}$ образует независимый базис допустимых правил вывода логики λ.*

Доказательство. Из теорем 4.1 и 4.2 следует, что множество правил $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n \in N\}$ образует базис для допустимых правил.

Доказательство его независимости почти полностью воспроизводит доказательство теоремы 3.4 с той разницей, что при построении фрейма $\mathscr{F}_n$, разделяющего правила, используются иррефлексивные элементы вместо рефлексивных. $\square$

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 2. *Множество правил* $\{\mathscr{R}_n^{ir}, n > 1, n \in N\}$ *образует независимый базис допустимых правил вывода логики* GL.

Определение (аксиоматику) этой логики и описание характеристических класса фреймов можно найти, например, в [7, гл. 2]. Финитная аппроксимируемость была доказана в теореме 2.6.20 из [7]. Для проверки остальных условий теоремы важно отметить, что любая нетривиальная антицепь элементов n-характеристической модели имеет иррефлексивное ко-накрытие. Следовательно, добавление иррефлексивного элемента как ко-накрытия к произвольной антицепи элементов произвольного корневого фрейма, адекватного логике GL, также порождает фрейм, адекватный логике, т. е. логика имеет слабое свойство ко-накрытий. Условие (3) (критерий допустимости правила в редуцированной форме) для логики GL доказано в теореме 3.9.12 из [7].

5. Заключение

В работе получены явные независимые базисы для допустимых правил вывода широкого класса расширений логик $S4$ и GL со слабым свойством ко-накрытий. Из доказательства результатов статьи видно, что условия финитной аппроксимируемости и наличие слабого свойства ко-накрытий являются необходимыми, ослабить их пока не представляется возможным. Видимо, единственным способом усилить полученные результаты является доказательство условия (3) для всех расширений логик $K4, S4, GL$ и т. д. Вопрос наличия конечного (явного) базиса как нетранзитивных логик (например, K, T), так и логик без слабого свойства ко-накрытий остается открытым.

Благодарность. Выражаю признательность и благодарность уважаемому рецензенту, замечания и предложения которого позволили существенно улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Harrop R.* Concerning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to \exists x B(x)$ // J. Symbol. Logic. 1960. V. 26, N 1. P. 27–32.
2. *Минц Г. Е.* Выводимость допустимых правил // Журн. советской математики. 1976. Т. 6, № 4. С. 417–421.
3. *Port J.* The deducibilities of $S5$ // J. Phylos. Logic. 1981. V. 10, N 1. P. 409–422.
4. *Lorenzen P.* Einfung in Operative Logik und Mathematik. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1955.
5. *Fridman H.* One hundred and two problems in mathematical logic // J. Symbol. Logic. 1975. V. 40, N 3. P. 113–130.
6. *Рыбаков В. В.* Критерий допустимости правил вывода в модальной системе $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1984. Т. 23, № 5. С. 546–572.
7. *Rybakov V.* Admissibility of logical inference rules. New-York; Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1997. (Stud. Logic Found. Math.; V. 136).
8. *Циткин А. И.* О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Мат. сб. 1977. Т. 102, № 2. С. 314–323.
9. *Рыбаков В. В.* Базис для допустимых правил логики $S4$ и интуиционистской логики H // Алгебра и логика. 1984. Т. 24, № 1. С. 87–107.

10. *Римацкий В.В.* О конечной базируемости по допустимости модальных логик ширины 2 // Алгебра и логика. 1999. Т. 38, № 4. С. 436–455.

11. *Римацкий В. В.* Явный базис для допустимых правил K-насыщенных табличных логик // Дискр. математика. 2022. Т. 34, № 1. С. 126–140.

12. *Rybakov V. V., Terziler M., Rimatskiy V. V.* Basis in semi-reduced form for the admissible rules of the intuitionistic logic IPC // Math. Logic Quart. 2000. V. 46, N 2. P. 207–218.

13. *Rybakov V. V., Terziler M., Genzer C.* An essay on unification and inference rules for modal logic // Bull. Sect. Logic. 1999. V. 28, N 3. P. 145–157.

14. *Iemhoff R.* On the admissible rules of Intuitionistic Propositional Logic // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66, N 2. P. 281–294.

15. *Rybakov V. V.* Construction of an explicit basis for rules admissible in modal system $S4$ // Math. Logic Quart. 2001. V. 47, N 4. P. 441–451.

16. *Jeřábek E.* Admissible rules of modal logics // J. Logic Comput. 2005. V. 15, N 4. P. 411–431.

17. *Jeřábek E.* Independent bases of admissible rules // Logic J. IGPL. 2008. V. 16, N 3. P. 249–267.

18. *Федоришин Б. Р.* Явный базис для допустимых правил вывода логики Гёделя — Леба GL // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 45, № 2. С. 423–430.

19. *Римацкий В. В.* Явный базис допустимых правил вывода логик конечной ширины // Журнал СФУ, Сер. математика и физика. 2008. № 1. С. 85–93.

Поступила в редакцию 6 октября 2022 г.
После доработки 23 сентября 2023 г.
Принята к публикации 25 сентября 2023 г.

Римацкий Виталий Валентинович
Сибирский федеральный университет,
институт математики,
пр. Свободный 79, Красноярск 660041
`Gemmeny@rambler.ru`

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 510.64+510.65+510.66

ДОПУСТИМОСТЬ И УНИФИКАЦИЯ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ, БЛИЗКИХ К $S4.2$

В. В. Рыбаков

Аннотация. Изучаются проблемы унифицируемости и допустимости правил вывода для бесконечного класса модальных логик. Логики предполагаются разрешимыми, полными по Крипке и порождаемыми классами фреймов с наибольшими кластерами (в частности, такие логики расширяют модальную логику $S4.2$). Для любой такой логики L и для любой формулы α, унифицируемой L, эффективно строится некоторый унификатор σ для α в L, проверяющий допустимость в L любого данного правила вывода α/β с переключаемой главной модальностью для заключения правила β (т. е. σ решает проблему допустимости для всех таких правил вывода).

DOI 10.33048/smzh.2024.65.115

Ключевые слова: модальные логики, унификация, проблема допустимости, вычисление унификаторов, проективные формулы, допустимые правила.

1. Введение

Изучается проблема унификации и ее использования для допустимости правил вывода в модальных логиках. Как хорошо известно, проблема унификации возникла в области информатики (и была связана с проблемой распознавания возможности сделать два разных терма равными путем подстановки термов вместо переменных). Позже эта проблема была модифицирована и расширена на случай, когда термы можно рассматривать семантически равными (а не равными просто синтаксически). К этому времени данная проблематика стала широко применяться в проблемах автоматического доказательства и верификации информации (см. [1–7]).

Обычная синтаксическая унификация является по сути просто частным случаем более сложной задачи — проблемы подстановки, а именно вопроса о том, может ли формула быть превращена в теорему логики после замены части переменных (с сохранением прежних значений для коэффициентов — параметров). Эта проблема активно исследовалась и была решена (см. [8–10]) для интуиционистской логики и модальных логик $S4$ и Grz (но только в терминах определения существования решений и нахождения некоторых из них, а не всех возможных).

Унификация в интуиционистской логике и пропозициональных модальных логиках над K4 исследовалась Гиларди [11–15] с применением идей из проективных алгебр и техники проективных формул для нахождения полных множеств унификаторов. Эта техника дала полезные инструменты для решения

Работа поддержана грантом РНС (проект No. 23-21-00213).

проблемы допустимости правил вывода и была использована многими исследователями впоследствии (см. статьи Джерабека [16–18] и Иемхофа, Меткалфе [19, 20], а также [21–23].

В родственной области временных логик также велись многочисленные плодотворные исследования особенно ввиду активного интереса к этому предмету с точки зрения применений (см. работы Габбая и Ходкинсона [24–26] Манна и Пнуэли [27, 28], Варди [29]).

Решение проблемы допустимости правил для линейной временной логики LTL было найдено в [30], базис для правил вывода допустимых в этой логике был найден в [31]; ранее случай этой логики LTL но без операции Until был решен в [32]; случай этой логики но с операциями и для будущего, и для прошлого решается легко, так как мы можем моделировать в такой логике универсальную модальность (см. [33]). Решение проблемы унификации в LTL было найдено в [34], а решение проблемы унификации с параметрами в базисных модальных транзитивных логиках и интуиционистской логике найдено в [35].

Но было обнаружено [34], что не все формулы, унифицируемые в LTL, проективны. В то же время найти эффективную технику, базирующуюся на проективных формулах, для хороших фрагментов логики LTL выглядит очень привлекательно. Во-первых, в [36] было показано, что любая формула, унифицируемая в линейной модальной логике $S4.3$, проективна, поэтому была мысль, что то же может случится и для хорошего фрагмента логики LTL (см. [36], сходные идеи были высказаны в [37, 38]).

В данной статье изучаются открытые проблемы унификации и допустимости правил вывода в целом бесконечном классе модальных логик, близких в некотором смысле к модальной логике $S4.2$. Используется техника проективных формул, разработанная Гиларди в применении ее к любой модальной логике разрешимой, полной по Крипке и порождаемой любым классом S фреймов с наибольшими кластерам. Для любой такой логики L и для любой формулы α, унифицируемой L, эффективно строится некоторый унификатор σ для α в L, проверяющий допустимость в L любого данного правила вывода α/β с переключаемой главной модальностью для заключения правила β (т. е. σ решает проблему допустимости для всех таких правил вывода).

2. Определения, модальные логики

Напомним общеизвестные краткие сведения, необходимые для чтения этой статьи (историю вопроса и информацию по модальным логикам и применениям линейной модальной логики в информатике и представлении знаний см. в [39]; на самом деле в этой статье используется довольно краткий набор внешних данных). Язык модальной логики, как известно, строится из языка булевой логики и расширяется модальными логическими операциями $\Diamond$ (возможно) и $\Box$ (необходимо). Модальные формулы строятся из множества $Prop$ атомарных букв (пропозициональных букв) с помощью булевых и модальных логических операций. Обычно семантика модальных логик состоит из фреймов (множеств возможных состояний W с бинарным отношением достижимости R). Модели логик получаются из фреймов путем введения означиваний V для некоторых выбранных множеств пропозициональных переменных, т. е. V сопоставляет истинностные значения для пропозициональных букв из $Prop$. А именно, $p \in Prop$, $V(p) \subseteq W$, и $V(p)$ является множеством всех w из W, где p истинна (относительно V). Тройка $\mathrm{M} := \langle W, R, V\rangle$ называется *моделью Крипке.*

Для любой модели Крипке M истинностные значения могут быть расширены с пропозициональных букв из $Prop$ на произвольные формулы следующим образом:

$\forall p \in Prop\ (M,a) \Vdash_V p \ \Leftrightarrow a \in W \wedge\ a \in V(p)$;
$(M,a) \Vdash_V (\varphi \wedge \psi) \ \Leftrightarrow (M,a) \Vdash_V \varphi \ \wedge\ (M,a) \Vdash_V \psi$;
$(M,a) \Vdash_V (\varphi \vee \psi) \ \Leftrightarrow (M,a) \Vdash_V \varphi \ \vee\ (M,a) \Vdash_V \psi$;
$(M,a) \Vdash_V \neg\varphi \ \Leftrightarrow not[(M,a) \Vdash_V \varphi]$;
$(M,a) \Vdash_V \Diamond\varphi \ \Leftrightarrow \exists b[(a\ R\ b)\&(M,b) \Vdash_V \varphi]$;
$(M,a) \Vdash_V \Box\varphi \ \Leftrightarrow \forall b[(a\ R\ b) \Rightarrow (M,b) \Vdash_V \varphi]$.

На модели Крипке $M := \langle W, R, V\rangle$ формула φ с переменными из области V называется *истинной в* M (обозначение $M \Vdash \varphi$), если для любого b из W формула φ истинна на b (обозначение $(M,b) \Vdash_V \varphi$). Для данного фрейма $F := \langle W, R\rangle$ будем говорить, что формула φ *истинна на* F (и писать $F \Vdash \varphi$), если φ истинна на любой модели, построенной на F.

Определение 2.1. Для данного класса фреймов K *модальная логика, порожденная классом* K, есть множество всех модальных формул, истинных на любом состоянии любой модели, полученной из любого фрейма из класса K путем введения любого возможного означивания пропозициональных переменных (обозначение $L = L(K)$).

Сама логика $L(K)$ называется *разрешимой*, если для любой формулы можно вычислить, выполняется ли $\varphi \in L(K)$. Формула φ выполнима в $L(K)$, если существует некоторая модель M, построенная из некоторого фрейма из K, такая, что φ истинна на некотором состоянии этой модели.

Логика $L(K)$ *разрешима относительно выполнимости*, если для любой выполнимой формулы φ можно эффективно построить некоторую модель (конечную, вычислимого размера) для φ.

3. Краткая вводная информация об унифицируемости, допустимости и проективных формулах

Пусть For — множество всех формул в модальном языке а P — некоторое множество пропозициональных переменных. Подстановка для P — это отображение ε множества P в множество For. Любая такая подстановка ε может быть расширена на множество всех формул, построенных из букв множества P, следующим образом: $\varepsilon(\varphi(x_1,\ldots,x_n)) := \varphi(\varepsilon(x_1),\ldots,\varepsilon(x_n))$.

Определение 3.1. Формула φ называется *унифицируемой в логике* L, если существует подстановка ε (которая называется *унификатором для* φ) такая, что $\varepsilon(\varphi) \in L$.

Далее будем использовать обозначение $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon_2$ для $(\varepsilon_1 \to \varepsilon_2) \wedge (\varepsilon_2 \to \varepsilon_1)$.

Определение 3.2. Унификатор ε (для формулы φ в логике L) является *более общим, чем унификатор* ε_1, если существует подстановка δ такая, что $[\varepsilon_1(x) \equiv \delta(\varepsilon(x))] \in L$ для любой переменной x.

Если логика L разрешима, то обычно проверить унифицируемость некоторой формулы в L (теоретически без выполнения самих вычислений) довольно простая задача: достаточно проверить граунд подстановки, а именно отображения пропозициональных переменных в множество $\{\bot, \top\}$. Но проблема, как найти все унификаторы — все разрешающие подстановки, — совсем не простая задача.

Определение 3.3. Некоторое множество унификаторов CU для данной формулы φ в логике L является *полным множеством унификаторов*, если выполняется следующее. Для любого унификатора σ для φ в L существует унификатор σ_1 из CU, где σ_1 более общий, чем σ.

Для модальных логик, расширяющих логику $S4$, можно сформулировать проективность следующим образом.

Определение 3.4. Некоторая формула φ называется *проективной в логике* L, если выполняется следующее. Существует подстановка σ (называемая проективной подстановкой), которая является унификатором для φ, такая, что $\Box\varphi \to [x_i \equiv \sigma(x_i)] \in L$ для любой буквы-переменной x_i из φ.

Напомним известный результат о линейной временной логике LTL. Логика lTL порождается множеством фреймов, базирующихся на натуральных числах, с логическими операторами $Next$ «быть следующим натуральными числом» и операцией $Until$, но здесь будем использовать только модальный оператор $\Box$, который, как известно, выражается через оператор $Until$.

Пример 3.5 (см., например, [31]). Формула $\varphi = \Box(\Box x \vee (\neg x \wedge Next\Box x))$ унифицируема в LTL но не проективна.

Доказательство. Подстановка $x \mapsto \top$, очевидно, является унификатором для φ. Предположим, что φ проективна и π является соответствующим проективным унификатором.

Рассмотрим путь N_V (начинающийся с 0: $|N_V| := \{0, 1, 2, \dots\}$):

$$\overset{x}{\circ} \xrightarrow{N} \overset{\neg x}{\circ} \xrightarrow{N} \overset{\Box x}{\circ} \xrightarrow{N} \overset{\Box x}{\circ} \cdots .$$

Так как $(N_V, 1) \Vdash_V \Box\varphi$, имеем $(N_V, 1) \Vdash_V x \leftrightarrow \pi(x)$. Поэтому безотносительно того, что $(N_V, 0) \Vdash_V \pi(x)$ или $(N_V, 0) \Vdash_V \neg\pi(x)$, получаем, что $(N_V, 0) \Vdash_V \neg\Box\pi(x)$ и в то же время $(N_V, 0) \Vdash_V \neg Next\Box\pi(x)$. Итак, $(N_V, 0) \Vdash_V \neg\pi(\varphi)$, следовательно, π не может быть унификатором для φ; противоречие. $\Box$

Напомним, что правило вывода $\varphi_1, \dots, \varphi_n/\psi$ недопустимо в L, если и только если существует унификатор σ для $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ в L, который не является унификатором для ψ. Тогда говорят, что σ *опровергает допустимость правила* $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n/\psi$.

4. Основные результаты

Для любой модальной логики L, расширяющей $S4$, формула φ унифицируема в L, если и только если она унифицируема в $S4$ или, равносильно, если и только если φ унифицируема в логике, порождаемой одноэлементным рефлексивным фреймом. Из определений немедленно не следует, что если формула φ проективна в некоторой логике L, то φ также проективна в любой логике, расширяющей L.

Для фрейма F говорят, что F *имеет наибольший кластер* C, если

(0) фрейм F обладает корнем,

(1) $C \subseteq |F|$,

(2) $\forall x, y \in C, xRy$,

(3) $\forall z \in |F| \setminus C, \forall x \in C, zRx$.

Лемма 4.1. *Если $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p \in L$ для полной по Крипке модальной логики L, то для любого корневого L-фрейма F с корневым состоянием s и для любых $a, b \in F$, т. е. sRa и sRb, существует c такой, что aRc и bRc. Если*

F конечен, то он имеет наибольший кластер и состояния c из этого кластера называют квази-максимальными.

Доказательство. Допустим, что F является L-фреймом, s является корнем F, $a, b \in F$, и не существует c такого, что aRc и bRc. Берем означивание V для p, где $V(p) := \{e \mid aRe\}$. Тогда $(F, a) \Vdash_V \Box p$ и $(F, s) \Vdash_V \Diamond\Box p$. Но $(F, b) \Vdash_V \neg\Diamond p$, таким образом, $(F, s) \nVdash_V \Box\Diamond p$, следовательно,

$$(F, s) \nVdash_V \Diamond\Box p \to \Box\Diamond p,$$

что и завершает доказательство. $\Box$

Аксиома $\Diamond\Box p \to \Box\Diamond p$, присоединенная к аксиомам логики $S4$, превращает ее в хорошо известную логику $S4.2$. Мы не будем требовать присутствия этой аксиомы в наших логиках далее. Хорошо известно, что логика $S4.2$ финитно аппроксимируема и порождается конечными корневыми фреймами с наибольшими кластерами. Существует бесконечное множество модальных логик, расширяющих $S4.2$, которые полны по Крипке и порождаются корневыми фреймами с наибольшими кластерами. Например, это логики с ограниченной шириной n (для любого n), конечной ширины на глубине выше фиксированной и другие логики, обладающие различными комбинациями таких свойств. Поэтому результаты из последующей части применимы к бесконечным семействам таких логик.

Теорема 4.2. *Пусть L — разрешимая логика, полная по Крипке и порожденная некоторым классом K рефлексивных и транзитивных корневых фреймов с наибольшими кластерами, т. е.*

$$L = L(K) := \{\varphi \mid \forall F \in K, F \Vdash \varphi\}.$$

Тогда существует алгоритм, строящий по любой унифицируемой в L формуле α ее унификатор в L, проверяющий допустимость в L любого данного правила вывода вида α/β, где β имеет переключающиеся главные модальности (т. е. $\beta = \Box\Diamond\gamma$ или $\beta = \Diamond\Box\gamma$ для некоторой формулы γ). Тем самым α/β недопустимо в L, если и только если σ опровергает допустимость α/β в L.

Доказательство. Возьмем некоторую унифицируемую в L формулу $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ (унифицируемость вычислима в силу присутствия квази-максимальных кластеров). Тогда существует граунд унификатор — подстановка σ_1, где $\sigma_1(x_i) := g_i$, которая является граунд унификатором, т. е. $(g_i \in \{\top, \bot\})$, и $\varphi(\sigma_1(x_i), \dots, \sigma_1(x_n)) \in L$.

Для любой пропозициональной переменной x_i из φ определим следующую подстановку. Пусть $Var(\Box\varphi)$ — множество всех пропозициональных переменных из $\Box\varphi$ и $Sub(\Box\varphi)$ — множество всех подформул формулы $\Box\varphi$. Возьмем любое $X \subseteq Var(\Box\varphi)$ и фиксируем формулы

$$Let(X) := \bigwedge_{x_i \in Var(\varphi)\cap X} x_i \wedge \bigwedge_{x_i \in Var(\varphi) \& x_i \notin X} \neg x_i.$$

Для описания наибольших кластеров фреймов потребуются следующие формулы. Для любого $A \subseteq 2^{Var(\varphi)}$ пусть

$$Cl(A) := \Big[\Box\varphi \wedge \Box \bigvee_{X \in A} L(X) \wedge \Box \bigwedge_{X \in A} (\Diamond L(X))\Big].$$

Помимо этого для любого $A \neq \varnothing$ выбираем и фиксируем единственный $X_A \in A$ и вводим подстановку $\delta_A(x_i) := \top$, если $x_i \in X_A$, иначе полагаем $\delta_A(x_i) := \bot$. Случай, когда $A = \varnothing$, не понадобится в доказательстве далее.

Для любой буквы x_i, входящей в φ, определяем следующую подстановку:

$$\sigma(x_i) := \Big[\bigvee_{A \subseteq 2^{Var(\varphi)}} [Cl(A) \wedge x_i] \vee [\neg[\Diamond\Box\varphi] \wedge g_i]$$

$$\vee [\neg[\bigvee_{A \subseteq 2^{Var(\varphi)}} Cl(A)] \wedge \bigvee_{A \subseteq 2^{Var(\varphi)}} [\Diamond[Cl(A)] \wedge \delta_A(x_i)]\Big].$$

К сожалению, эта подстановка не позволяет сказать, что формула φ проективна, причина этого в присутствии формулы $\delta_A(x_i)$ выше. Более того, невозможно вообще найти проективную подстановку для любой унифицируемой формулы φ, если логика L не расширяет логику $S4.3$ (см. [36]).

Докажем, что σ является унификатором для φ в L. Пусть $L = L(S)$. Возьмем фрейм F из S с любым означиванием V для переменных x_i из φ. По определению фрейм F корневой и имеет максимальный кластер C. Рассмотрим любое $a \in F$.

(I) Допустим вначале, что $a \in C$ и $(F, a) \Vdash_V \neg\Box\varphi$. По определению подстановки σ имеем

$$\forall x[[aRx] \Rightarrow [(F, x) \Vdash_V \sigma(x_i) \Leftrightarrow (F, x) \Vdash_V g_i]].$$

Это влечет

$$\forall x[aRx] \Rightarrow (F, x) \Vdash_V \sigma(\Box\varphi).$$

Следовательно, σ — унификатор φ на кластере C. Он делает φ истинной на любом его состоянии и также истинной вообще на любом элементе фрейма.

(II) Рассмотрим случай, когда $(F, a) \Vdash_V \Box\varphi$ для всех $a \in C$. Пусть A — набор всех множеств переменных x_i из φ, истинных относительно означивания V на некотором состоянии из C. Тогда $(F, a) \Vdash_V Cl(A)$ выполняется, и это неверно для любого другого A_1 и $Cl(A_1)$. Поэтому

$$(F, a) \Vdash_V \Box\varphi \wedge \Box\Diamond\Box \bigvee_{X \in A} L(X) \wedge \Box\Diamond\Box \bigwedge_{X \in A} (\Diamond L(X)).$$

Последняя формула описывает распределение истинности переменных формулы φ на состояниях, достижимых из a в нашем фрейме. Следовательно,

(1) $\forall x$ если xRa и $(F, x) \Vdash_V Cl(A)$, то $\forall x_i \in Var(\varphi), (F, x) \Vdash_V \sigma(x_i) \iff (F, x) \Vdash_V x_i$,

(2) $\forall \psi \in Sub(\Box\varphi), (F, x) \Vdash_V \sigma(\psi) \iff (F, x) \Vdash_V \psi$.

Кроме того, $(F, x) \Vdash_V Cl(A)$ влечет $(F, x) \Vdash_V \Box\varphi$, поэтому

(3) $\forall x\ [xRa \wedge (F, x) \Vdash_V Cl(A)] \Rightarrow (F, x) \Vdash_V \sigma(\Box\varphi)$.

Стало быть, σ является унификатором для φ на всех состояниях x из C, где выполняется $(F, x) \Vdash_V Cl(A)$.

(III) Остается рассмотреть более сложный и интересный случай, когда $x \in F$, xRa, $a \in C$ и

$$[xRa \wedge (F, x) \Vdash_V \neg Cl(A)].$$

Как отмечено выше, тогда

$$(F, x) \Vdash_V \neg Cl(A_1)$$

для любого другого A_1, так как $(F, a) \Vdash_V Cl(A)$.

По определению $\sigma(x_i)$ это значит, что истинностные значения для $\sigma(x_i)$ относительно V на любом таком x есть, как для $\delta_A(x_i)$. Используя это и (2), (3), получаем, что для всех таких x истинностное значение формулы $\sigma(\alpha)$ для любой подформулы α формулы φ на x относительно V будет таким же, как и у формулы α относительно V на элементе s_A из C, где истинные значения букв x_i совпадают с $\delta_A(x_i)$ (см. выбор $\delta_A(x_i)$ выше). Так как $(F, s_A) \Vdash_V \Box\varphi$, получаем $(F, x) \Vdash_V \Box\sigma(\varphi)$. Полностью доказано, что σ является унификатором для φ.

(IV) Докажем, что построенный унификатор для φ проверяет допустимость в L любого правила вывода вида $\varphi/\Diamond\Box\psi$ при любом ψ.

В самом деле, правило $\varphi/\Diamond\Box\psi$ недопустимо в L, если и только если существует подстановка σ_r, которая является унификатором для φ, но не для $\Diamond\Box\psi$. Поэтому существует модель на некотором корневом фрейме F из K с означиванием V_1 такая, что $\sigma_r(\varphi)$ истинна относительно V_1 на всех состояниях из F, но $\sigma_r(\psi)$ ложно на некотором состоянии из наибольшего кластера C из F относительно V_1.

Рассмотрим новую модель на фрейме F с новым означиванием V, где $V(x_i) := V_1(\sigma_r(x_i)$ для любого x_i из правила $\varphi/\Diamond\Box\psi$.

Лемма 4.3. *Формула φ истинна на любом состоянии из F при V и ψ ложно при V на некотором состоянии из наибольшего кластера C.*

Доказательство очевидно, так как мы предположили, что формула $\sigma_r(\varphi)$ истинна при V_1 на всех состояниях из F и $\sigma_r(\psi)$ ложна при этом означивании на некотором состоянии из кластера C из F.

Рассмотрим стадию построения в теореме нашего унификатора σ для формулы φ в модели F с заданным только что означиванием V. Как мы видели,

$$\forall x \in C(F, x) \Vdash_{V_1} \sigma_r(\varphi), \quad \forall x \in C(F, x) \Vdash_V \varphi, \quad \forall x \in C(F, x) \Vdash_V \sigma(\varphi),$$

$$\exists x \in C(F, x) \Vdash_{V_1} \neg\sigma_r(\psi), \quad (\exists x \in C(F, x) \Vdash_V \neg\psi), \quad \exists x \in C(F, x) \Vdash_V \neg\sigma(\psi).$$

Действительно, если A — это наборы всех переменных, истинных на различных состояниях из C при V, то $\forall x \in C(F, x) \Vdash_V Cl(A)$ и означивание для $\sigma(x_i)$ относительно V совпадает с означиванием переменных x_i самих относительно V. Поэтому $\exists x \in C(F, x) \Vdash_V \sigma(\neg\psi)$. Это значит, что унификатор σ для φ не является унификатором для $\Diamond\Box\psi$ и правило вывода $\varphi/\Diamond\Box\psi$ недопустимо в L и эффективно построенный в теореме унификатор σ опровергает допустимость. Случай с правилом вида $\varphi/\Box\Diamond\psi$ может быть доказан аналогично. $\Box$

Доказанные общие результаты и алгоритмы применимы к бесконечным семействам логик и могут далее эффективно развиваться и применяться.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Robinson A.* A machine oriented logic based on the resolution principle // J. ACM. 1965. V. 12, N 1. P. 23–41.
2. *Knuth D. E., Bendix P. B.* Simple word problems in universal algebras // Automation of Reasoning. J. H. Siekmann et al. (eds.). Berlin; Heidelberg, 1983. P. 342–376. (Symbolic Computations; V. 1064).
3. *Baader F., Snyder W.* Unification theory // Handbook of automated reasoning. Berlin: Springer, 2001. P. 447–533.
4. *Baader F., Ghilardi S.* Unification in modal and description logics // Logic J. IGPL. 2011. V. 19, N 6. P. 705–730.
5. *Baader F., Morawska B.* Unification in the description logic EL // Log. Methods Comput. Sci. 2010. V. 6. P. 1–31.

6. sl Baader F., Küsters R. Unification in a description logic with transitive closure of roles // Proceedings of the 8th international conference on logic for programming, artificial intelligence and reasoning (LPAR 2001). Springer, 2001. P. 217–232. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 2250).

7. *Baader F., Narendran P.* Unification of concept terms in description logics // J. Symbol. Comput. 2001. V. 31. P. 277–305.

8. *Rybakov V. V.* Problems of substitution and admissibility in the modal system Grz and in intuitionistic propositional calculus // Ann. Pure Appl. Logic. 1990. V. 50, N 1. P. 71–106.

9. *Rybakov V.V.* Rules of inference with parameters for intuitionistic logic // J. Symbol Logic. 1992. V. 57, N 3. P. 912–923.

10. *Rybakov V. V.* Admissible logical inference rules. Amsterdam: North-Holland, 1997. (Elsevier Sci. Publ.; V. 136).

11. *Ghilardi S.* Unification through projectivity // J. Logic Comput. 1997. V. 7, N 6. P. 733–752.

12. *Ghilardi S.* Unification, finite duality and projectivity in varieties of Heyting algebras // Ann. Pure Appl. Logic. 2004. V. 127, N 1–3. P. 99–115.

13. *Ghilardi S.* Unification in intuitionistic logic // J. Symbol Logic. 1999. V. 64, N 2. P. 859 –880.

14. *Ghilardi S.* Best solving modal equations // Ann. Pure Appl. Logic. 2000. V. 102. P. 183–198.

15. *Ghilardi S.* Filtering unification and most general unifiers in modal logic // J. Symbol. Logic. 2004. V. 69, N 3. P. 879–906.

16. *Jerábek E.* Admissible rules of modal logics // J. Logic Comput. 2005. V. 15, N ?. P. 411–431.

17. *Jerábek E.* Independent bases of admissible rules // Logic J. IGPL. 2008. V. 16, N ?. P. 249–267.

18. *Jerábek E.* Rules with parameters in modal logic. I. 2013. CoRR abs/1305.4912.

19. *Iemhof R.* On the admissible rules of intuitionistic propositional logic // J. Symbol. Logic. 2001. V. 66. P. 281–294.

20. *Iemhoff R., Metcalfe G.* Proof theory for admissible rules // Ann. Pure Appl. Logic. 2009. V. 159. P. 171–186.

21. *Balbiani Ph., Mojtahedi M.* Unification with parameters in the implication fragment of classical propositional logic // Logic J. IGPL. 2022. V. 30, N 3. P. 454–464.

22. *Balbiani Ph.* Unification in modal logic // Indian conference on logic and its applications (ICLA), 1 March 2019. Delhi, India, 2019. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-58771-3-1.

23. *Bashmakov S., Kosheleva A., Rybakov V.* Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations // Sib. Math. Rep. 2016. V. 13. P. 656–663..

24. *Gabbay D. M., Hodkinson I. M., Reynolds M. A.* Temporal logic: Mathematical foundations and computational aspects. Oxford: Clarendon Press, 1994. V. 1.

25. *Gabbay D. M., Hodkinson I. M.* An axiomatization of the temporal logic with Until and Since over the real numbers // J. Logic Comput. 1990. V. 1. P. 229–260.

26. *Gabbay D. M., Hodkinson I. M.* Temporal logic in the context of databases. Oxford: Oxford University, 1995. (Logic and Reality: Essays on the Legacy of Arthur Prior).

27. *Manna Z., Pnueli A.* The temporal logic of reactive and concurrent systems: Specification. New York: Springer-Verl., 1992.

28. *Manna Z., Pnueli A.* Temporal verification of reactive systems: Safety. New York: Springer, 1995.

29. *Vardi M. Y.* Reasoning about the past with two-way automata // International Colloquium on Automata, Languages and Programming. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1998. P. 628–641. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 1443).

30. *Rybakov V. V.* Linear temporal logic with until and next, logical consecution // Ann. Pure Appl. Logic. 2008. V. 155. P. 32–45.

31. *Babenyshev S., Rybakov V.* Linear temporal logic LTL: basis for admissible rules // J. Logic Comput. 2011. V. 21. P. 157–177.

32. *Rybakov V. V.* Logical consecutions in discrete linear temporal logic // J. Symbol. Logic. 2005. V. 70, N 4. P. 1137 –1149.

33. *Rybakov V.* Logics with universal modality and admissible consecutions // J. Appl. Non-Classical Logics. 2007. V. 17, N 3. P. 381–394.

34. *Rybakov Vladimir V.* Writing out unifiers in linear temporal logic // J. Logic Comput. 2012. V. 22, N 5. P. 1199–1206.

35. *Rybakov V.* Unifiers in transitive modal logics for formulas with coefficients (meta-variables) // Logic J. IGPL. 2013. V. 21, N 2. P. 205–215.

36. *Dzik W., Wojtylak P.* Projective unification in modal logic // Logic J. IGPL. 2012. V. 20, N 1. P. 121–153.

37. *Wrónski A.* Transparent unification problem // Rep. Math. Logic. 1995. V. 20. P. 105–107.
38. *Wrónski A.* Transparent verifiers in intermediate logics // Abstracts of the 54th Conference in History of Mathematics. Cracow: The Jagiellonian University, 2008. P. 6.
39. *Kroger F., Merz S.* Temporal logic and state systems. Berlin; Heidelberg: Springer, 2008. (Texts in Theoretical Comput. Sci.).

Поступила в редакцию 12 апреля 2023 г.
После доработки 8 октября 2023 г.
Принята к публикации 28 ноября 2023 г.

Рыбаков Владимир Владимирович (ORCID 0000-0002-6654-9712)
Сибирский федеральный университет,
институт математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041;
Институт систем информатики РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
Vladimir_Rybakov@mail.ru

Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2024. Том 65, № 1

УДК 512.543

ОБ ОТДЕЛИМОСТИ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП ГРАФОВ ГРУПП. II

Е. В. Соколов

Аннотация. Пусть $\mathfrak{G}$ — фундаментальная группа произвольного графа групп и $\mathscr{C}$ — корневой класс групп (т. е. класс, содержащий неединичные группы и замкнутый относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathscr{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$). Доказан критерий отделимости классом $\mathscr{C}$ конечно порожденной абелевой подгруппы группы $\mathfrak{G}$, имеющий место в случае, когда указанная группа удовлетворяет аналогу фильтрационного условия Баумслага. С помощью этого результата для фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами получено описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп.

DOI 10.33048/smzh.2024.65.116

Ключевые слова: отделимость абелевых подгрупп, отделимость циклических подгрупп, аппроксимируемость корневыми классами, фундаментальная группа графа групп, древесное произведение

§ 1. Введение

Настоящая статья служит второй частью работы, посвященной изучению отделимости корневыми классами групп конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. В первой части [1] были доказаны теорема о структуре указанных подгрупп и ряд вспомогательных утверждений. Здесь с их помощью будут получены два достаточно общих критерия отделимости подгрупп рассматриваемого типа.

Понятие отделимой подалгебры и, в частности, подгруппы было введено А. И. Мальцевым [2]. Согласно данному им определению подгруппа Y группы X называется *отделимой* в этой группе *классом групп* $\mathscr{C}$ (или, короче, *$\mathscr{C}$-отделимой* в X), если для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathscr{C}$, удовлетворяющий условию $x\sigma \notin Y\sigma$. Отметим, что понятие *аппроксимируемости* является частным случаем отделимости, поскольку аппроксимируемость группы X классом $\mathscr{C}$ равносильна $\mathscr{C}$-отделимости ее единичной подгруппы. Напомним также, что отделимость классом всех конечных групп называется, как и аппроксимируемость, *финитной*.

Хорошо известно, что в конечной определенной группе финитная отделимость подгруппы означает разрешимость алгоритмической проблемы вхождения элемента в данную подгруппу. Помимо этого отделимость тех или иных

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00166, `https://rscf.ru/project/22-21-00166/`.

подгрупп нередко оказывается одним из необходимых и (или) достаточных условий аппроксимируемости. Особенно часто такая взаимосвязь обнаруживается при изучении аппроксимируемости различных теоретико-групповых конструкций (см., например, [3–12]).

Корневые классы групп были введены в рассмотрение Грюнбергом [13], и использование этого понятия оказалось весьма продуктивным при исследовании аппроксимируемости свободных конструкций групп (см. [6, 8, 11, 12, 14–17]). Поэтому изучение отделимости подгрупп таких конструкций корневыми классами представляется вполне оправданным, особенно ввиду отмеченной выше взаимосвязи с условиями аппроксимируемости.

Напомним, что согласно одному из равносильных определений содержащий неединичные группы класс групп $\mathcal{C}$ называется *корневым*, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y\in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого элемента $y \in Y$ [18]. Примерами корневых классов могут служить классы всех конечных групп, конечных p-групп (где p — простое число), периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода (где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел), всех разрешимых групп и всех групп без кручения. Нетрудно показать также, что если пересечение семейства корневых классов групп содержит неединичную группу, то оно снова является корневым классом.

Всюду далее, если $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, то через $\mathfrak{P}'$ будем обозначать множество всех простых чисел, не принадлежащих $\mathfrak{P}$. Целое число будем называть $\mathfrak{P}$-*числом*, если все его простые делители содержатся в $\mathfrak{P}$. Напомним, что подгруппа Y группы X называется $\mathfrak{P}'$-*изолированной* в этой группе, если для каждого элемента $x \in X$ и для каждого числа $q \in \mathfrak{P}'$ из включения $x^q \in Y$ следует, что $x \in Y$. Если $\mathfrak{P}'$-изолированной является единичная подгруппа группы X, то говорят, что указанная группа *не имеет* $\mathfrak{P}'$-*кручения*. Отметим также, что если $\mathfrak{P}$ совпадает с множеством всех простых чисел, то любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}'$-изолированной.

Если класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп, то через $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ будем обозначать множество всех простых делителей порядков элементов групп из класса $\mathcal{C}$. Для упрощения формулировок утверждений будем считать, что если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$ — это множество всех простых чисел. Известно (см. предложение 4.1 ниже), что, каким бы ни был класс групп $\mathcal{C}$, из отделимости подгруппы этим классом следует ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированность. Поэтому свойство $\mathcal{C}$-отделимости имеет смысл изучать лишь в отношении $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп и обобщением утверждения о финитной отделимости всех подгрупп некоторого типа T (например, циклических) оказывается утверждение о $\mathcal{C}$-отделимости всех $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированных подгрупп типа T.

Основным методом исследования аппроксимируемости корневыми классами свободных конструкций групп служит так называемый «фильтрационный подход» Баумслага, первоначально предложенный в [19] для изучения финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений двух групп и затем распространенный на другие конструкции и аппроксимирующие классы. Ким показал, как аналогичные рассуждения могут быть применены для доказательства финитной отделимости всех циклических подгрупп обобщенного свободного произведения двух групп [20] и HNN-расширения с одной проходной буквой [21]. В [22–24] эти идеи были адаптированы для изучения отделимости классом конечных p-групп, где p — некоторое простое число, и распространены на случай, когда не обязательно все подгруппы свободных множителей или базовой группы являются отделимыми. Сравнительно недавно Чжоу и Ким [25, 26] показали, как применить фильтрационный подход для доказательства финитной отделимости всех конечно порожденных абелевых подгрупп двух указанных выше конструкций. Наконец, в [17] метод изучения аппроксимируемости Баумслага был распространен на случай произвольного корневого аппроксимирующего класса групп и фундаментальной группы произвольного графа групп. В настоящей работе все перечисленные идеи объединяются для получения описания конечно порожденных абелевых подгрупп фундаментальной группы графа групп, отделимых наперед заданным корневым классом групп.

Когда речь идет о некоторой теоретико-групповой конструкции, наиболее естественным оказывается вопрос о том, при каких условиях данная конструкция наследует то или иное свойство от групп, из которых она составлена. Задача, решаемая в настоящей работе, выглядит следующим образом: требуется получить критерий отделимости корневым классом групп $\mathscr{C}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной конечно порожденной абелевой подгруппы фундаментальной группы графа групп при условии, что аналогичные критерии известны для всех вершинных групп данного графа. Полученные в этом направлении результаты сформулированы в § 2, 3, а их доказательства приводятся в § 4–8.

§ 2. Основные результаты

Будем использовать те же обозначения, что и в [1]. А именно, до конца статьи будем считать, что

а) Γ — непустой неориентированный связный граф с множеством вершин $\mathscr{V}$ и множеством ребер $\mathscr{E}$ (допустимы петли и кратные ребра);

б) $\mathscr{T}$ — некоторое фиксированное максимальное дерево в графе Γ с множеством ребер $\mathscr{E}_{\mathscr{T}}$;

в) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — ориентированный граф групп над Γ, в котором каждой вершине $v \in \mathscr{V}$ сопоставлена некоторая группа G_v, а каждому ребру $e \in \mathscr{E}$ — направление, группа H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)},$$

где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа $\mathscr{G}(\Gamma)$, являющиеся концами ребра e;

г) $\mathfrak{G}$ — фундаментальная группа графа групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ с соответствующим дереву $\mathscr{T}$ представлением

$$\left\langle \begin{matrix} G_v\ (v \in \mathscr{V}), \\ t_e\ (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}}) \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e}\ (e \in \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}h_e\varphi_{+e}t_e = h_e\varphi_{-e}\ (e \in \mathscr{E} \setminus \mathscr{E}_{\mathscr{T}},\ h_e \in H_e) \end{matrix} \right\rangle.$$

Группы G_v $(v \in \mathscr{V})$ будем называть *вершинными*, подгруппы $H_{+e} = H_e\varphi_{+e}$ и $H_{-e} = H_e\varphi_{-e}$ — *реберными*. Если $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и X — некоторая группа, то через $\mathscr{C}^*(X)$ будем обозначать семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathscr{C}$.

Первым из результатов настоящей статьи является

Теорема 2.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и существует гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу из данного класса, действующий инъективно на всех вершинных группах. Тогда каждая $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая некоторому нетривиальному тождеству, $\mathscr{C}$-отделима и, в частности, группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Отметим, что достаточные условия существования гомоморфизма из формулировки теоремы 2.1 найдены в [6, 8, 11, 12, 16, 27]. В [28, 29] обсуждается вопрос о равносильности наличия такого гомоморфизма и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$. Прежде, чем перейти к описанию результатов об отделимости подгрупп группы $\mathfrak{G}$, полученных в случае, когда указанного гомоморфизма не существует, приведем одно утверждение, вытекающее из теорем 1, 3 и предложения 2 статьи [17].

Теорема 2.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия:*

(i^1) $\forall v \in \mathscr{V}$ $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} (N \cap G_v) = 1$;

(ii^1) $\forall e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

II. *Пусть справедливо утверждение* $(*)$: *для любых $v \in \mathscr{V}$, $M \in \mathscr{C}^*(G_v)$ существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ такая, что $N \cap G_v \leq M$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, если выполняются следующие условия:*

(i^2) *все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы;*

(ii^2) *для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Отметим, что условия (i^1) и (ii^1) являются слабейшими из тех, при которых упоминавшийся выше фильтрационный метод Баумслага может быть применен, и потому имеют место всякий раз, когда аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ доказывается с помощью данного метода. Однако они зависят не только от свойств вершинных групп и содержащихся в них реберных подгрупп, но и от того, как устроена группа $\mathfrak{G}$ в целом. Если выполняется утверждение $(*)$, то указанные условия превращаются в более понятные и не связанные с группой $\mathfrak{G}$ требования (i^2) и (ii^2). При этом ввиду приводимого ниже предложения 6.1 утверждению $(*)$ можно дать и другую, более простую с точки зрения его доказательства формулировку. Вместе с тем указанное утверждение, по-видимому, не следует из ограничений (i^1), (ii^1) и потому полностью отказаться от использования последних, вообще говоря, нельзя. Более подробное обсуждение условий теоремы 2.2 приводится в [17].

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп и (X, Y) — пара подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим следующий набор условий:

($\lambda^0_{\mathscr{C}}$) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v ($v \in \mathscr{V}$), $Y = 1$;

($\mu^0_{\mathscr{C}}$) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$), Y — бесконечная циклическая подгруппа, $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$ и $[X, Y] = 1$;

($\lambda^1_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\lambda^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе G_v, но $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_v) \neq X$;

($\mu^1_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\mu^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, но $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq X$;

($\lambda^2_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\lambda^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе G_v, но не является $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе;

($\mu^2_{\mathscr{C}}$) справедливо условие ($\mu^0_{\mathscr{C}}$), подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$, но не является $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе.

Обозначим через $\mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ ($0 \leq k \leq 2$) семейство всех пар подгрупп группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию ($\lambda^k_{\mathscr{C}}$) или ($\mu^k_{\mathscr{C}}$), и положим

$$\mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})\}.$$

Согласно [1] подгруппа A группы G конечно порожденная абелева тогда и только тогда, когда она сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^0_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Если выполняются условия* (i^1), (ii^1) *из формулировки теоремы* 2.2, *то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

II. *Пусть справедливо утверждение* ($*$) *и выполняются условия* (i^2), (ii^2) *из формулировки теоремы* 2.2. *Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. В частности, если каждая вершинная группа обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех своих $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп, то данное свойство имеет место и для группы $\mathfrak{G}$.*

Приведенная теорема утверждает, что если аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ корневым классом $\mathscr{C}$ установлена путем проверки условий теоремы 2.2 (а в очень многих случаях именно так и происходит), то «бесплатным» дополнением к ней оказывается то или иное описание $\mathscr{C}$-отделимых конечно порожденных абелевых подгрупп данной группы. В некоторых случаях условия (i^1), (ii^1) или (i^2), (ii^2) равносильны $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ (см., например, [17, 28, 30]), и тогда критерий $\mathscr{C}$-отделимости конечно порожденной абелевой подгруппы этой группы вытекает из ее $\mathscr{C}$-аппроксимируемости вне зависимости от того, каким способом последняя была доказана.

Отметим, что семейство $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, как и условия ($\mathrm{i}^1$), ($\mathrm{ii}^1$), зависит от устройства группы $\mathfrak{G}$ в целом. Что же касается семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, для его описания требуется знать лишь критерии $\mathscr{C}$-отделимости $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных конечно порожденных абелевых подгрупп в вершинных группах. Таким образом, утверждение II теоремы 2.3 дает частичное решение задачи, поставленной в конце предыдущего параграфа.

Понятно, что теорема 2.3 предоставляет и описание $\mathscr{C}$-отделимых циклических подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Сформулируем его явным образом.

Пусть $\mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ — семейства циклических подгрупп, определенные следующим образом:

1) $Z \in \mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда Z — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) такая, что $\bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} Z(N \cap G_v) \neq Z$;

2) $Z \in \mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда Z — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа некоторой группы G_v ($v \in \mathscr{V}$), не являющаяся $\mathscr{C}$-отделимой в этой группе.

Следствие 2.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп.*

I. *Если выполняются условия* (i^1), (ii^1) *из формулировки теоремы* 2.2, *то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

II. *Пусть справедливо утверждение* ($*$) *и выполняются условия* (i^2), (ii^2) *из формулировки теоремы* 2.2. *Тогда $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. В частности, если каждая вершинная группа обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех своих*

$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных циклических подгрупп, то данное свойство имеет место и для группы $\mathfrak{G}$.

Отметим, что утверждение II теоремы 2.3 обобщает теорему 2.10 из [25] и теорему 3.6 из [26], а следствие 2.4 — теорему 2.2 из [21], теорему 1.1 из [20], теоремы 1, 2 из [24] и теоремы 2.2.2, 2.3.2 из [23]. Из перечисленных обобщаемых утверждений в первых шести речь идет о финитной отделимости, в последних двух — об отделимости классом конечных $\mathfrak{P}$-групп, где $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел.

§ 3. Некоторые приложения

Приведем несколько примеров применения теоремы 2.3 к фундаментальным группам графов групп с центральными реберными подгруппами. Имеет место

Теорема 3.1. *Пусть для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ лежит в центре группы $G_{e(\varepsilon)}$ и $G_{e(\varepsilon)} \neq H_{\varepsilon e}$. Если группа $\mathfrak{G}$ аппроксимируется корневым классом $\mathscr{C}$, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа этой группы $\mathscr{C}$-отделима в ней тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

Отметим, что данная теорема не накладывает на граф групп практически никаких ограничений, кроме центральности реберных подгрупп. Однако в ее формулировке фигурирует весьма сложно устроенное семейство $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Приводимые далее теорема 3.2 и следствия 3.3, 3.4 предъявляют к графу групп больше требований, но дают более простые в применении критерии отделимости, основанные на использовании семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

Будем говорить, что граф групп $\mathscr{G}(\Gamma)$ *имеет тип* (t) $(t = \overline{1,2})$, если для любой вершины $v \in \mathscr{V}$ подгруппа

$$H_v = \operatorname{sgp}\{H_{\varepsilon e} \mid e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1,\ v = e(\varepsilon)\}$$

лежит в центре группы G_v и выполняется свойство (t) из следующего набора:

(1) каждая подгруппа H_v $(v \in \mathscr{V})$ представляет собой прямое произведение порождающих ее подгрупп;

(2) граф Γ является деревом.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа и Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X *$\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе* Y, если для любой подгруппы $M \in \mathscr{C}^*(Y)$ существует подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая условию $N \cap Y = M$. Отметим, что свойство $\mathscr{C}$-регулярности тесно связано с $\mathscr{C}$-отделимостью и обобщает понятие *мощного элемента*, введенное в [31].

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (1) и для любой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v;

2) $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа (2) и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.

Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-отделима в этой группе тогда и только тогда, когда она не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп и A — некоторая абелева группа. *Примарной $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-компонентой* периодической части группы A будем называть примарную компоненту, соответствующую числу из множества $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$. Будем говорить, что группа A *$\mathscr{C}$-ограничена*, если в произвольной ее фактор-группе каждая примарная $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-компонента периодической части имеет конечный период и мощность, не превосходящую мощности некоторой $\mathscr{C}$-группы. Нильпотентную группу назовем *$\mathscr{C}$-ограниченной*, если она обладает хотя бы одним конечным центральным рядом с $\mathscr{C}$-ограниченными абелевыми факторами. Класс $\mathscr{C}$-ограниченных нильпотентных групп будем обозначать через $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{B}\mathscr{N}$. Отметим, что если класс $\mathscr{C}$ является корневым, то ввиду его замкнутости относительно взятия расширений порядки $\mathscr{C}$-групп не ограничены никаким целым числом и потому любая конечно порожденная нильпотентная группа $\mathscr{C}$-ограничена.

Следствие 3.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2), *каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) принадлежит классу $\mathscr{C}\text{-}\mathscr{B}\mathscr{N}$ и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то все ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные конечно порожденные абелевы подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы.*

Отметим, что, в отличие от теоремы 3.2, в следствии 3.3 на класс $\mathscr{C}$ не накладывается требование замкнутости относительно взятия фактор-групп. Критерии $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$ из теоремы 3.2 и следствия 3.3 содержат приводимые ниже предложения 8.2 и 8.4.

Напомним, что

– абелева группа называется *ограниченной* (в смысле А. И. Мальцева [2]), если в каждой ее фактор-группе все примарные компоненты периодической части конечны;

– разрешимая группа называется *ограниченной*, если она обладает конечным субнормальным рядом с ограниченными абелевыми факторами.

Очевидно, что всякая полициклическая группа является конечно порожденной ограниченной разрешимой. В действительности верно и обратное [32].

Следствие 3.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа. Пусть также $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2) *и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) является ограниченной разрешимой, то в группе $\mathfrak{G}$ все конечно порожденные абелевы подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы.*

Отметим, что последнее утверждение служит частичным обобщением следствия 3 из [11].

§ 4. Об изоляторах подгрупп

Предложение 4.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — некоторая группа, Y — ее подгруппа. Если подгруппа Y $\mathscr{C}$-отделима в группе X, то она $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в этой группе.*

Доказательство. Предложение 5 из [33] утверждает, что сформулированное утверждение имеет место, если класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп. Если же класс $\mathscr{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа и потому любая подгруппа оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, $\mathfrak{P}$ — некоторое множество простых чисел, X — группа и Y — ее подгруппа. Легко видеть, что пересечение любого числа $\mathscr{C}$-отделимых ($\mathfrak{P}'$-изолированных) подгрупп группы X снова является $\mathscr{C}$-отделимой (соответственно $\mathfrak{P}'$-изолированной) подгруппой. Поэтому определены наименьшие $\mathscr{C}$-отделимая и $\mathfrak{P}'$-изолированная подгруппы, содержащие подгруппу Y. Мы будем называть их *$\mathscr{C}$-замыканием* и *$\mathfrak{P}'$-изолятором* подгруппы Y в группе X и обозначать соответственно через $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X,Y)$ и $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y)$. Легко видеть, что $\mathfrak{P}'$-изолятор подгруппы Y содержит множество $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X,Y)$ элементов группы X такое, что $x \in \mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X,Y)$ тогда и только тогда, когда $x^q \in Y$ для некоторого $\mathfrak{P}'$-числа q. Из предложения 4.1 следует также, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y) \leq \mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X,Y)$.

Предложение 4.2 [34, предложение 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — нильпотентная подгруппа группы X ступени c. Тогда подгруппа $\mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X,Y)$ также является нильпотентной группой ступени c.*

Предложение 4.3 [35, теорема 4.5]. *Пусть $\mathfrak{P}$ — произвольное множество простых чисел, X — локально нильпотентная группа, Y — подгруппа группы X. Тогда $\mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y) = \mathfrak{P}'\text{-}\mathfrak{Rt}(X,Y)$.*

Предложение 4.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathscr{C}$-аппроксимируемая группа, Y — абелева подгруппа группы X. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Подгруппа $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y)$ является абелевой и совпадает с множеством $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(X,Y)$.*

2. *Если Y — локально циклическая подгруппа, то $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y)$ также локально циклическая подгруппа.*

Доказательство. Как уже было отмечено выше, имеет место включение $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y) \leq \mathscr{C}\text{-}\mathfrak{Cl}(X,Y)$. Поэтому утверждение 1 вытекает из предложений 4.2 и 4.3. Проверим утверждение 2.

Лемма. *Если $x, y \in X$, $\langle x\rangle$ — циклическая подгруппа, порожденная элементом x, и $y^q \in \langle x\rangle$ для некоторого $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числа q, то подгруппа $\operatorname{sgp}\{x,y\}$ циклическая.*

Доказательство. Без потери общности можно считать, что q — наименьшее положительное $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-число, удовлетворяющее условию $y^q \in \langle x\rangle$. Так как $y \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,\langle x\rangle)$, то согласно утверждению 1 справедливо равенство $[x,y]=1$. Пусть числа k, d, q_1, k_1 таковы, что $y^q = x^k$, d — наибольший общий делитель чисел k и q, $q = dq_1$ и $k = dk_1$. Тогда d — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-число и $(y^{-q_1}x^{k_1})^d = 1$. Группа X $\mathscr{C}$-аппроксимируема и в силу предложения 4.1 не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Следовательно, $y^{-q_1}x^{k_1} = 1$ и $y^{q_1} \in \langle x\rangle$. Ввиду выбора числа q это означает, что $q = q_1$ и $1 = d = ku + qv$ для некоторых целых чисел u, v. Тогда

$$x = x^{ku+qv} = y^{qu}x^{qv} = (y^u x^v)^q, \quad y = y^{ku+qv} = y^{ku}x^{kv} = (y^u x^v)^k$$

и, стало быть, подгруппа $\operatorname{sgp}\{x,y\}$ порождается элементом $y^u x^v$.

Пусть $x, y \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(X,Y)$. Тогда согласно утверждению 1 существуют такие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числа q и r, что $x^q, y^r \in Y$. Обозначая через z порождающий подгруппы $\operatorname{sgp}\{x^q, y^r\}$ и применяя лемму к элементам y и z, видим, что подгруппа $\operatorname{sgp}\{z,y\}$ циклическая и порождается некоторым элементом z_1. Снова применяя лемму, теперь уже к элементам z_1 и x, получаем, что элементы x и y принадлежат циклической подгруппе $\mathrm{sgp}\{z_1, x\}$.

Предложение 4.5. *Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный класс групп, X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, Y и Z — ее абелевы подгруппы и $[Y, Z] = 1$. Если подгруппа Y периодическая, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, YZ) = Y \cdot \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z)$.*

Доказательство. Если класс $\mathcal{C}$ содержит непериодические группы, то $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, YZ) = YZ$, $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z) = Z$ и требуемое равенство имеет место. Поэтому будем считать, что класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и $x \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, YZ)$ — произвольный элемент. Поскольку группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема и подгруппа YZ абелева, из предложения 4.4 вытекает, что $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, YZ) = \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Rt}(X, YZ)$. Следовательно, $x^q = yz$ для некоторых элементов $y \in Y$, $z \in Z$ и $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-числа q. Так как Y — периодическая группа и группа X $\mathcal{C}$-аппроксимируема, то порядок r элемента y конечен и по предложению 4.1 является $\mathfrak{P}(\mathcal{C})$-числом. Ввиду перестановочности элементов y, z справедливы соотношения $(x^r)^q = y^r z^r = z^r \in Z$ и, стало быть, $x^r \in \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z)$. Таким образом, $x^q, x^r \in Y \cdot \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z)$ и, поскольку числа q и r взаимно просты, $x \in Y \cdot \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z)$. Тем самым доказано соотношение $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, YZ) \leq Y \cdot \mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-$\mathfrak{Is}(X, Z)$. Противоположное включение очевидно.

§ 5. Доказательство теоремы 2.1

Предложение 5.1 [34, предложение 5]. *Пусть $\mathcal{C}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп и прямых произведений с конечным числом сомножителей, X — $\mathcal{C}$-аппроксимируемая группа, Y — подгруппа группы X. Если подгруппа Y тривиально пересекается с некоторой подгруппой из семейства $\mathcal{C}^*(X)$, то она $\mathcal{C}$-отделима в группе X.*

Следующее утверждение служит частным случаем теоремы 2.4 из [36].

Предложение 5.2. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$ — класс всех $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}$-групп без $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-кручения. Пусть также X — $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}$-аппроксимируемая группа, Y — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная подгруппа группы X. Если подгруппа Y тривиально пересекается с некоторой подгруппой из семейства $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}^*_{\mathfrak{P}(\mathcal{C})}(X)$, то она $\mathcal{C}$-отделима в группе X.*

Предложение 5.3. *Пусть $\mathcal{C}$ — корневой класс групп. Если X — свободная группа, то каждая ее $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная циклическая подгруппа $\mathcal{C}$-отделима.*

Доказательство. Пусть Y — $\mathfrak{P}(\mathcal{C})'$-изолированная циклическая подгруппа группы X с порождающим y и $\mathcal{FGN}_0$ — класс всех конечно порожденных нильпотентных групп без кручения. Поскольку группа X $\mathcal{FGN}_0$-аппроксимируема [37], найдется подгруппа $M \in \mathcal{FGN}_0^*(X)$, не содержащая элемента y. Так как фактор-группа X/M не имеет кручения, то в действительности $Y \cap M = 1$ и по предложению 5.1 подгруппа Y $\mathcal{FGN}_0$-отделима в группе X. Если класс $\mathcal{C}$ содержит хотя бы одну непериодическую группу, то в силу своей замкнутости относительно взятия подгрупп и расширений он включает все полициклические группы, обладающие субнормальными рядами с бесконечными циклическими факторами. В частности, $\mathcal{FGN}_0 \subseteq \mathcal{C}$ и потому подгруппа Y оказывается $\mathcal{C}$-отделимой. Если же класс $\mathcal{C}$ состоит из периодических групп и $\mathcal{C}$-$\mathcal{BN}_0$ — класс всех $\mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$-групп без кручения, то ввиду отмеченного в § 3 $\mathscr{FGN}_0 \subseteq \mathscr{C}$-$\mathscr{BN}_0$ и $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы Y в группе X обеспечивается предложением 5.2.

Предложение 5.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и $\mathscr{D}$ — класс групп, замкнутый относительно взятия подгрупп. Если в некоторой группе X все $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные $\mathscr{D}$-подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы, то и в любом расширении группы X при помощи $\mathscr{C}$-группы все $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные $\mathscr{D}$-подгруппы являются $\mathscr{C}$-отделимыми.*

Доказательство. Пусть Y — некоторое расширение группы X при помощи $\mathscr{C}$-группы, Z — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная $\mathscr{D}$-подгруппа группы Y и $y \in Y \setminus Z$ — произвольный элемент. Нам достаточно указать подгруппу $N \in \mathscr{C}^*(Y)$, удовлетворяющую условию $y \notin ZN$. Если $y \notin ZX$, то искомой является подгруппа X. Поэтому далее будем считать, что $y \in ZX$ и $y = zx$ для некоторых $z \in Z$, $x \in X$.

Если элемент $g \in X$ и простое число $q \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$ таковы, что $g^q \in Z \cap X$, то $g \in Z$ в силу $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированности подгруппы Z в группе Y и потому $g \in Z \cap X$. Стало быть, подгруппа $Z \cap X$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе X, принадлежит классу $\mathscr{D}$ ввиду замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и $\mathscr{C}$-отделима в X согласно условию предложения. Так как $y \notin Z$, то $x \notin Z \cap X$ и ввиду доказанного существует подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(X)$, удовлетворяющая соотношению $x \notin (Z \cap X)M$.

Зафиксируем произвольную систему S представителей смежных классов группы Y по подгруппе X и положим $N = \bigcap_{s \in S} s^{-1}Ms$. Тогда подгруппа N нормальна в группе Y, а фактор-группа X/N по теореме Ремака [38, теорема 4.3.9] вкладывается в декартово произведение $P = \prod_{s \in S} X/s^{-1}Ms$. Так как все сомножители этого произведения изоморфны $\mathscr{C}$-группе X/M и индексируются элементами $\mathscr{C}$-группы Y/X, то по определению корневого класса $P \in \mathscr{C}$. Ввиду замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп и расширений отсюда следует, что $X/N \in \mathscr{C}$ и $Y/N \in \mathscr{C}$. Таким образом, $N \in \mathscr{C}^*(Y)$ и $N \leq M$.

Предполагая, что $y \in ZN$ и $y = z_1u$ для некоторых $z_1 \in Z$, $u \in N$, получаем, что $zx = z_1u$, $u \in M \leq X$, $z^{-1}z_1 = xu^{-1} \in Z \cap X$ и $x = (z^{-1}z_1)u \in (Z \cap X)M$ вопреки выбору подгруппы M. Стало быть, $y \notin ZN$ и подгруппа N искомая.

Предложение 5.5 [29, предложение 3.4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и $N \cap H_{\varepsilon e} = 1$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Тогда существует подгруппа $M \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, представляющая собой свободное произведение некоторой свободной группы и групп, вкладывающихся в подгруппы вида $N \cap G_v$ $(v \in \mathscr{V})$.*

Доказательство теоремы 2.1. Пусть N — ядро гомоморфизма группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующего инъективно на всех вершинных группах, $\mathscr{ID}$ — класс групп, каждая из которых удовлетворяет некоторому нетривиальному тождеству (не обязательно одному и тому же для всех групп). Применяя к классу $\mathscr{C}$ и подгруппе N предложение 5.5, получаем, что группа $\mathfrak{G}$ представляет собой расширение некоторой свободной группы M при помощи $\mathscr{C}$-группы. Так как любая $\mathscr{ID}$-подгруппа свободной группы циклическая, согласно предложению 5.3 в группе M все $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные $\mathscr{ID}$-подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы. Поскольку класс $\mathscr{ID}$ замкнут относительно взятия подгрупп, отсюда и из предложения 5.4 следует, что и в группе $\mathfrak{G}$ все $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированные $\mathscr{ID}$-подгруппы $\mathscr{C}$-отделимы. Остается заметить, что в любом расширении свободной группы при помощи $\mathscr{C}$-группы единичная подгруппа $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована и принадлежит классу $\mathscr{ID}$. Поэтому из $\mathscr{C}$-отделимости всех $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированных $\mathscr{ID}$-подгрупп вытекает $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$.

§ 6. О фундаментальных группах графов групп

Пусть для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ в группе G_v выбрана некоторая нормальная подгруппа R_v. Как и в [17], семейство $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ будем называть *системой совместимых нормальных подгрупп* группы $\mathfrak{G}$, если для любого ребра $e \in \mathscr{E}$ справедливо равенство $(R_{e(1)} \cap H_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_{-e})\varphi_{-e}^{-1}$. Пусть

$$\overline{G}_v = G_v/R_v \ (v \in \mathscr{V}), \quad R_e = (R_{e(\pm 1)} \cap H_{\pm e})\varphi_{\pm e}^{-1} \ (e \in \mathscr{E}),$$
$$\overline{H}_e = H_e/R_e \ (e \in \mathscr{E}), \quad \overline{H}_{\varepsilon e} = H_{\varepsilon e}R_{e(\varepsilon)}/R_{e(\varepsilon)} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1).$$

Легко видеть, что отображение $\overline{\varphi}_{\varepsilon e} \colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}$ $(e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1)$, переводящее смежный класс hR_e $(h \in H_e)$ в элемент $(h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)}$, корректно определено и является изоморфизмом группы $\overline{H}_e$ на подгруппу $\overline{H}_{\varepsilon e}$. Поэтому наряду с исходным графом

$$\mathscr{G}(\Gamma) = (\Gamma, \ G_v \ (v \in \mathscr{V}), \ H_e \ (e \in \mathscr{E}), \ \varphi_{\varepsilon e} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1))$$

можно рассмотреть граф групп

$$\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma) = (\Gamma, \ \overline{G}_v \ (v \in \mathscr{V}), \ \overline{H}_e \ (e \in \mathscr{E}), \ \overline{\varphi}_{\varepsilon e} \ (e \in \mathscr{E}, \ \varepsilon = \pm 1)),$$

в котором ребрам сопоставлены те же направления, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$.

Если представление фундаментальной группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ соответствует дереву $\mathscr{T}$ (а мы всегда будем предполагать, что это именно так), то тождественное отображение образующих группы $\mathfrak{G}$ в группу $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ определяет сюръективный гомоморфизм, который далее обозначается через $\rho_{\mathscr{R}}$. Нетрудно показать, что ядро данного гомоморфизма совпадает с нормальным замыканием в группе $\mathfrak{G}$ множества $\bigcup_{v \in \mathscr{V}} R_v$ и $\ker \rho_{\mathscr{R}} \cap G_v = R_v$ для всех $v \in \mathscr{V}$.

Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп. Назовем систему $\mathscr{R}$ *$\mathscr{C}$-допустимой*, если существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathscr{C}$, действующий инъективно на всех вершинных группах $\overline{G}_v$ $(v \in \mathscr{V})$.

Предложение 6.1 [17, предложение 2]. *Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный класс групп.*

1. *Если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то семейство $\{N \cap G_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ является системой совместимых нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Если $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то данная система $\mathscr{C}$-допустима.*

2. *Пусть $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ — $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$. Тогда найдется подгруппа $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in \mathscr{V}$.*

Всюду далее, если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, то соответствующие системе совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{N \cap G_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ граф групп $\mathscr{G}_{\mathscr{R}}(\Gamma)$ и гомоморфизм $\rho_{\mathscr{R}}$ будем обозначать через $\mathscr{G}_N(\Gamma)$ и ρ_N. Из предложения 6.1 и теоремы 2.1 вытекает

Предложение 6.2. *Если $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то группа $\pi_1(\mathscr{G}_N(\Gamma))$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и каждая ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа, удовлетворяющая нетривиальному тождеству, $\mathscr{C}$-отделима.*

Как и в [1], если Δ — непустой связный подграф графа Γ, то через $\mathscr{G}(\Delta)$ будем обозначать граф групп, вершинам и ребрам которого сопоставлены те же группы, направления и гомоморфизмы, что и в графе $\mathscr{G}(\Gamma)$. Указанный подграф Δ будем называть *допустимым*, если граф $\Delta \cap \mathscr{T}$ служит максимальным поддеревом в графе Δ. Всюду далее, говоря о допустимом подграфе Δ, будем предполагать, что представление группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathscr{T}$. Нетрудно показать (см., например, [17, предложение 1]), что при таком предположении тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ в группу $\mathfrak{G}$ определяет инъективный гомоморфизм и потому группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ можно считать подгруппой группы $\mathfrak{G}$.

Предложение 6.3 [17, предложение 3]. *Пусть Δ — допустимый подграф графа Γ и представление группы $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ соответствует дереву $\Delta \cap \mathscr{T}$. Если N — нормальная подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $M = N \cap \mathfrak{H}$, то гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм $\rho_M\colon \mathfrak{H} \to \pi_1(\mathscr{G}_M(\Delta))$.*

Предложение 6.4 [1, предложение 8]. *Для любых конечных подмножеств $\mathscr{V}' \subseteq \mathscr{V}$, $\mathscr{E}' \subseteq \mathscr{E}$, $S \subseteq \mathfrak{G}$ существует допустимый конечный подграф Δ графа Γ, удовлетворяющий условию $S \subseteq \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и содержащий все вершины из $\mathscr{V}'$ и все ребра из $\mathscr{E}'$.*

§ 7. Доказательства теоремы 2.3 и следствия 2.4

Предложение 7.1 [17, предложение 4]. *Пусть Ω — непустое семейство нормальных подгрупп группы $\mathfrak{G}$ и выполняются следующие условия:*

(α) $\forall L, M \in \Omega\ \exists N \in \Omega\ N \leq L \cap M$;

(β) $\forall v \in \mathscr{V}\ \bigcap_{N\in\Omega}(N \cap G_v) = 1$;

(γ) $\forall e \in \mathscr{E},\ \varepsilon = \pm 1\ \bigcap_{N\in\Omega} H_{\varepsilon e}(N \cap G_{e(\varepsilon)}) = H_{\varepsilon e}$.

Пусть также граф Γ конечен. Если вершина $v \in \mathscr{V}$ и подгруппа $X \leq G_v$ таковы, что $\bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_v) = X$, то для каждого элемента $g \in \mathfrak{G} \setminus X$ найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin X\rho_N$. В частности, если $g \in \mathfrak{G} \setminus \{1\}$, то $g\rho_N \neq 1$ для некоторой подгруппы $N \in \Omega$.

Всюду далее, если Ω — непустое семейство подгрупп группы $\mathfrak{G}$, то через $\mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ будем обозначать семейство пар подгрупп той же группы, определенное следующим образом: $(X, Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух утверждений:

(λ_Ω) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы G_v $(v \in \mathscr{V})$, $Y = 1$ и $\bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_v) \neq X$;

(μ_Ω) X — конечно порожденная абелева подгруппа некоторой группы $H_{\varepsilon e}$ $(e \in \mathscr{E}, \varepsilon = \pm 1)$, Y — бесконечная циклическая подгруппа, $[X, Y] = 1$, $Y \cap G_{e(\varepsilon)} = 1$ и $\bigcap_{N\in\Omega} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}) \neq X$.

Положим также $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G}) = \{XY \mid (X, Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})\}$.

Предложение 7.2. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, Ω — непустое подмножество семейства $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и выполняются условия (α)–(γ) из формулировки предложения 7.1. Пусть также Δ — допустимый подграф графа Γ, $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и $\Xi = \{N \cap \mathfrak{H} \mid N \in \Omega\}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Семейство Ξ непусто и содержится в $\mathscr{C}^*(\mathfrak{H})$; граф Δ, группа $\mathfrak{H}$ и семейство Ξ удовлетворяют условиям (α)–(γ).*

2. *Если A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$, и $A \leq \mathfrak{H}$, то подгруппа A $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $\mathfrak{H}$ и не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H})$.*

3. *Если A — абелева подгруппа группы $\mathfrak{H}$, $g \in \mathfrak{H} \setminus A$, $N \in \Omega$ и $M = N \cap \mathfrak{H}$, то из соотношения $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_M, A\rho_M)$ следует, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-$\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.*

Доказательство. 1. Очевидно, что семейство Ξ непусто и удовлетворяет условию (α). Из его определения легко следует, что для любой подгруппы X группы $\mathfrak{G}$ и для любой вершины v графа Δ имеет место равенство

$$\bigcap_{N\in\Omega} X(N\cap G_v) = \bigcap_{M\in\Xi} X(M\cap G_v).$$

Поэтому для графа Δ, группы $\mathfrak{H}$ и семейства Ξ выполняются условия (β), (γ) и, кроме того, $\mathfrak{D}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$ и $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$. Остается заметить, что если $N\in\Omega$ и $M = N\cap\mathfrak{H}$, то $N\in\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, $\mathfrak{H}/(N\cap\mathfrak{H}) \cong \mathfrak{H}N/N \le \mathfrak{G}/N \in \mathscr{C}$ и, поскольку класс $\mathscr{C}$ замкнут относительно взятия подгрупп, $\mathfrak{H}/(N\cap\mathfrak{H}) \in \mathscr{C}$. Следовательно, $\Xi \subseteq \mathscr{C}^*(\mathfrak{H})$.

2. Из установленного выше соотношения $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$ вытекает, что подгруппа A не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Xi(\mathfrak{H})$. Ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированность в группе $\mathfrak{H}$ очевидна.

3. В силу предложения 6.3 гомоморфизм ρ_N продолжает гомоморфизм ρ_M, откуда $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N)$. Из предложения 4.4 и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}\rho_N$, имеющей место согласно предложению 6.2, следует, что подгруппа $\mathfrak{I}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ абелева и совпадает с множеством $\mathfrak{R}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Предполагая, что $g\rho_N \in \mathfrak{R}_N$, из соотношений $g\rho_N \in \mathfrak{H}\rho_N$ и $A\rho_N \le \mathfrak{H}\rho_N$ получаем, что

$$g\rho_N \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N) \le \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_N, A\rho_N)$$

в противоречие с установленным ранее. Значит, $g\rho_N \notin \mathfrak{I}_N$.

При доказательстве следующего предложения без дополнительных пояснений будем использовать понятия и обозначения, введенные в § 2 статьи [1]. Для ссылок на предложения 3, 5 и 6 этой работы будем применять выражения I.3, I.5 и I.6 соответственно.

Предложение 7.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, Γ — конечный граф, Ω — непустое подмножество семейства $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и выполняются условия (α)–(γ) из формулировки предложения 7.1. Если A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$, то для любого элемента $g\in\mathfrak{G}\setminus A$ найдется подгруппа $N\in\Omega$ такая, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что для любых подгруппы $N\in\Omega$ и элемента $u\in\mathfrak{G}$ справедливо равенство

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, (u^{-1}Au)\rho_N) = (u\rho_N)^{-1}\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)(u\rho_N)$$

и потому из соотношения $(u^{-1}gu)\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, (u^{-1}Au)\rho_N)$ следует, что $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Таким образом, элемент g и подгруппу A при необходимости можно заменить их образами относительно некоторого внутреннего автоморфизма группы $\mathfrak{G}$.

Доказательство будем вести индукцией по числу ребер, не принадлежащих дереву $\mathscr{T}$, причем сначала выполним индуктивный шаг, а уже затем проверим базу индукции. Предположим, что имеется по крайней мере одно не входящее в $\mathscr{T}$ ребро f, и обозначим через Δ граф, получающийся из Γ путем удаления данного ребра. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой HNN-расширение группы $\mathfrak{B} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами H_{+f} и H_{-f}.

Лемма 1. *Пусть x — произвольный элемент указанного выше HNN-расширения и $x_0 t_f^{\varepsilon_1} x_1 \ldots t_f^{\varepsilon_n} x_n$ — некоторая его приведенная запись. Тогда найдется такая подгруппа $M \in \Omega$, что для любой подгруппы $N \in \Omega$, лежащей в M, справедливы следующие утверждения:*

а) *в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ (рассматриваемой как HNN-расширение группы $\mathfrak{B}\rho_N$ с проходной буквой t_f и связанными подгруппами $H_{\pm f}\rho_N$) произведение*

$$x_0\rho_N t_f^{\varepsilon_1} x_1\rho_N \ldots t_f^{\varepsilon_n} x_n\rho_N$$

служит приведенной записью элемента $x\rho_N$; в частности, если элемент x непримитивен, то элемент $x\rho_N$ также непримитивен;

б) *если $x_0 = 1$ и $t_f^{\varepsilon_1} x_1 \ldots t_f^{\varepsilon_n} x_n$ — циклически приведенная запись элемента x, то $t_f^{\varepsilon_1} x_1\rho_N \ldots t_f^{\varepsilon_n} x_n\rho_N$ — циклически приведенная запись элемента $x\rho_N$.*

Доказательство. Для каждого $i \in \{0, \ldots, n\}$ определим подгруппу $L_i \in \Omega$ следующим образом. Если $1 \leq i \leq n-1$, $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$ и, следовательно, $x_i \notin H_{-\varepsilon_i f}$, воспользуемся предложением 7.1 и найдем подгруппу $L_i \in \Omega$, удовлетворяющую условию $x_i\rho_{L_i} \notin H_{-\varepsilon_i f}\rho_{L_i}$. Если $x_0 = 1$, $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ и $x_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$, аналогичным образом выберем подгруппу $L_n \in \Omega$ такую, что $x_n\rho_{L_n} \notin H_{-\varepsilon_n f}\rho_{L_n}$. В остальных случаях в качестве L_i возьмем произвольную подгруппу (непустого по условию) семейства Ω.

Пусть $L = \bigcap_{0 \leq i \leq n} L_i$, $N \in \Omega$ и $N \leq L$. Тогда $\ker\rho_N \leq \ker\rho_{L_i}$ для любого $i \in \{0, \ldots, n\}$. Отсюда в силу выбора подгруппы L_i ($0 \leq i \leq n$) следует, что если $1 \leq i \leq n-1$ и $\varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}$, то $x_i\rho_N \notin H_{-\varepsilon_i f}\rho_N$, а если $x_0 = 1$, $\varepsilon_n = -\varepsilon_1$ и $x_n \notin H_{-\varepsilon_n f}$, то $x_n\rho_N \notin H_{-\varepsilon_n f}\rho_N$. Значит, искомой является любая подгруппа $M \in \Omega$, лежащая в L (существование таких подгрупп гарантируется условием (α)).

Ввиду сделанного в начале доказательства замечания и предложения I.5 без потери общности можно считать, что подгруппа A либо содержится в группе $\mathfrak{B}$, либо раскладывается в прямое произведение $X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f}$ или $X \leq H_{-f}$. Положим $\Xi = \{N \cap \mathfrak{B} \mid N \in \Omega\}$ и рассмотрим три случая.

Случай 1. $A \leq \mathfrak{B}$, $g \in \mathfrak{B}$.

Так как Δ является, очевидно, допустимым подграфом графа Γ, ввиду утверждений 1 и 2 предложения 7.2 граф Δ, группа $\mathfrak{B}$, семейство Ξ и подгруппа A удовлетворяют условиям настоящего предложения. Поскольку $g \in \mathfrak{B} \setminus A$, отсюда и из индуктивного предположения вытекает существование подгруппы $M \in \Xi$, удовлетворяющей условию $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{B}\rho_M, A\rho_M)$. Если подгруппа $N \in \Omega$ такова, что $M = N \cap \mathfrak{B}$, то согласно утверждению 3 предложения 7.2 $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$. Следовательно, подгруппа N искомая.

Случай 2. $A \leq \mathfrak{B}$, $g \notin \mathfrak{B}$.

Так как $g \notin \mathfrak{B}$, согласно лемме 1 найдется подгруппа $N \in \Omega$, удовлетворяющая условию $g\rho_N \notin \mathfrak{B}\rho_N$. Покажем, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) \leq \mathfrak{B}\rho_N$ и, стало быть, подгруппа N искомая.

В самом деле, если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) = A\rho_N \leq \mathfrak{B}\rho_N.$$

Поэтому будем считать, что класс $\mathscr{C}$ состоит из периодических групп. Так как $N \in \Omega \subseteq \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и

$$G_v\rho_N \cong G_v/G_v \cap N \cong G_vN/N \leq \mathfrak{G}/N$$

для всех $v \in \mathscr{V}$, то $H_{+f}\rho_N$ и $H_{-f}\rho_N$ — периодические $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группы. В силу предложения 6.2 группа $\mathfrak{G}\rho_N$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема и, следовательно, не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения. Значит, подгруппы $H_{+f}\rho_N$ и $H_{-f}\rho_N$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированы в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ и, в частности,

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, H_{+f}\rho_N) = H_{+f}\rho_N, \quad \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, H_{-f}\rho_N) = H_{-f}\rho_N.$$

Ввиду предложения I.6 отсюда следует, что $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) \leq \mathfrak{B}\rho_N$. Остается заметить, что подгруппа $A\rho_N$ абелева и по предложению 4.4

$$\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N) = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Rt}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N).$$

Случай 3. $A = X \times \langle y \rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент, $X \leq H_{+f}$ или $X \leq H_{-f}$.

Пусть $\delta = \pm 1$ — такое число, что $X \leq H_{\delta f}$, и r — наибольший $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-делитель числа $\ell(y)$. Так как подгруппа A $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $\mathfrak{G}$ и $g \notin A$, то $g \notin X$ и $g^r \notin A$. В частности, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $y^{-s}g^r, y^{-s}g^{-r} \notin X$. Поскольку элемент y циклически приведен и непримитивен, элемент y^n согласно предложению I.3 также является непримитивным для любого $n > 0$. Значит, $\langle y \rangle \cap G_{f(\delta)} = 1$ и, если подгруппа $\overline{X} = \bigcap_{N \in \Omega} X(N \cap G_{f(\delta)})$ отлична от X, то для пары подгрупп $(X, \langle y \rangle)$ справедливо утверждение (μ_Ω). Но тогда $A \in \mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$ в противоречие с предположением. Значит, $\overline{X} = X$ и в силу предложения 7.1 существуют подгруппы $L_0, L_1, L_{-1} \in \Omega$ такие, что $g\rho_{L_0} \notin X\rho_{L_0}$ и, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $(y^{-s}g^{\theta r})\rho_{L_\theta} \notin X\rho_{L_\theta}$ $(\theta = \pm 1)$.

Пользуясь леммой 1 и условием (α), выберем подгруппу $N \in \Omega$ так, чтобы выполнялись соотношения $N \leq L_{-1} \cap L_0 \cap L_1$, $\ell(g\rho_N) = \ell(g)$, $\ell(y\rho_N) = \ell(y)$ и элемент $y\rho_N$ по-прежнему являлся циклически приведенным. Отметим, что тогда $\ker \rho_N \leq \ker \rho_{L_i}$, $i \in \{-1, 0, 1\}$. Поэтому $g\rho_N \notin X\rho_N$ и, если $\ell(g)r = \ell(y)s$ для некоторого целого $s > 0$, то $(y^{-s}g^{\theta r})\rho_N \notin X\rho_N$ $(\theta = \pm 1)$.

Так как $y\rho_N$ — непримитивный циклически приведенный элемент, то в силу предложения I.3 из него не могут извлекаться корни сколь угодно высокой степени. Поскольку группа $\mathfrak{G}\rho_N$ согласно предложению 6.2 $\mathscr{C}$-аппроксимируема, из предложения 4.4 теперь следует, что подгруппа $\overline{Y}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, \langle y\rho_N \rangle)$ циклическая. Обозначим через z_N такой ее порождающий, что $z_N^q = y\rho_N$ для некоторого $q > 0$. Тогда согласно предложению I.3 z_N — непримитивный циклически приведенный элемент и $q \mid \ell(y\rho_N) = \ell(y)$. Поскольку q является, очевидно, $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-числом, отсюда следует, что $q \mid r$.

Обозначим для краткости подгруппу $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ через $\overline{A}_N$ и предположим, что $g\rho_N \in \overline{A}_N$. Если класс $\mathscr{C}$ содержит непериодические группы, то

$$\overline{A}_N = A\rho_N = X\rho_N \cdot \langle y\rho_N \rangle = X\rho_N \cdot \overline{Y}_N.$$

В противном случае подгруппа $X\rho_N$ содержится в периодической $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-группе $H_{\delta f}\rho_N$ и из предложения 4.5 вытекает, что снова $\overline{A}_N = X\rho_N \cdot \overline{Y}_N$. Таким образом, для некоторых $\xi = \pm 1$, $x \in X$, $n \geq 0$ имеет место равенство $(g\rho_N)^\xi = (x\rho_N)z_N^n$.

Если $n = 0$, то $g\rho_N \in X\rho_N$ вопреки установленному ранее. Следовательно, $n > 0$ и в силу предложения I.3 элемент $(x\rho_N)^{-1}(g\rho_N)^\xi = z_N^n$ циклически приведен и имеет длину $\ell(z_N)n$. В то же время очевидно, что $\ell((x\rho_N)^{-1}(g\rho_N)^\xi) = \ell(g\rho_N) = \ell(g)$ и потому $\ell(g) = \ell(z_N)n$. Так как $z_N^q = y\rho_N$ и $r = qk$ для некоторого целого $k > 0$, то $z_N^r = (y\rho_N)^k$ и снова ввиду предложения I.3 $\ell(z_N)r = \ell(y\rho_N)k$. Следовательно, $\ell(g)r = \ell(z_N)rn = \ell(y\rho_N)kn = \ell(y)kn$ и согласно выбору подгруппы N имеют место соотношения $(y^{-kn}g^{\theta r})\rho_N \notin X\rho_N$ $(\theta = \pm 1)$. Но поскольку подгруппа $\overline{A}_N$ ввиду предложения 4.4 абелева, из равенства $(g\rho_N)^{\xi} = (x\rho_N)z_N^n$ вытекает, что $(g\rho_N)^{\xi r} = z_N^{rn}(x\rho_N)^r = (y\rho_N)^{kn}(x\rho_N)^r$ и $(y\rho_N)^{-kn}(g\rho_N)^{\xi r} \in X\rho_N$. Полученное противоречие доказывает, что $g\rho_N \notin \overline{A}_N$ и подгруппа N является искомой.

Таким образом, индуктивный шаг выполнен. Предположим теперь, что граф Γ является деревом, и для доказательства предложения в этом случае воспользуемся индукцией по числу вершин. Если Γ содержит только одну вершину v, то A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы G_v и, так как $A \notin \mathfrak{A}_{\Omega}(\mathfrak{G})$, то $\bigcap_{N\in\Omega} AN = A$. Следовательно, $g \notin AN$ для некоторой подгруппы $N \in \Omega$, и эта подгруппа оказывается искомой, поскольку отображение ρ_N в данном случае представляет собой естественный гомоморфизм $\mathfrak{G} \to \mathfrak{G}/N$, а любая подгруппа $\mathscr{C}$-группы $\mathfrak{G}/N$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в силу предложения 4.1.

Далее будем считать, что в дереве Γ имеется по крайней мере одно ребро $f \in \mathscr{E}$. При его удалении Γ распадается на две компоненты связности; обозначим через Δ_ε $(\varepsilon = \pm 1)$ ту из них, которая содержит вершину $f(\varepsilon)$, и через $\mathfrak{B}_\varepsilon$ — группу $\pi_1(\mathscr{G}(\Delta_\varepsilon))$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ представляет собой свободное произведение групп $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_{-1}$ с объединенными подгруппами H_{+f} и H_{-f}.

Лемма 2. *Пусть x — произвольный элемент указанного свободного произведения и $x_1x_2\ldots x_n$ — некоторая его приведенная запись. Тогда найдется такая подгруппа $M \in \Omega$, что для любой подгруппы $N \in \Omega$, лежащей в M, справедливы следующие утверждения:*

а) *в группе $\mathfrak{G}\rho_N$ (рассматриваемой как свободное произведение групп $\mathfrak{B}_1\rho_N$ и $\mathfrak{B}_{-1}\rho_N$ с объединенными подгруппами $H_{\pm f}\rho_N$) произведение $x_1\rho_N x_2\rho_N\ldots x_n\rho_N$ служит приведенной записью элемента $x\rho_N$; в частности, если элемент x непримитивен (циклически приведен), то и элемент $x\rho_N$ непримитивен (соответственно циклически приведен);*

б) *если $x \in \mathfrak{B}_\varepsilon \setminus H_{\varepsilon f}$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, то $x\rho_N \in \mathfrak{B}_\varepsilon\rho_N \setminus H_{\varepsilon f}\rho_N$.*

Доказательство. Если $x \in H_{+f} = H_{-f}$, утверждение очевидно. Поэтому далее можно считать, что для каждого $i \in \{1,\ldots,n\}$ существует число $\varepsilon_i = \pm 1$ такое, что $x_i \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i} \setminus H_{\varepsilon_i f}$ и, если $i < n$, то $\varepsilon_i \neq \varepsilon_{i+1}$. Пользуясь предложением 7.1, для любого $i \in \{1,\ldots,n\}$ можно выбрать подгруппу $L_i \in \Omega$, удовлетворяющую условию $x_i\rho_{L_i} \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i}\rho_{L_i} \setminus H_{\varepsilon_i f}\rho_{L_i}$. Если $N \in \Omega$ и $N \le L_i$, то $\ker\rho_N \le \ker\rho_{L_i}$ и, следовательно, $x_i\rho_N \in \mathfrak{B}_{\varepsilon_i}\rho_N \setminus H_{\varepsilon_i f}\rho_N$. Поэтому искомой является подгруппа $M \in \Omega$, лежащая в $\bigcap_{1\le i\le n} L_i$, существование которой обеспечивается условием (α).

Как и выше, ввиду сделанного в начале доказательства замечания и предложения I.5 без потери общности можно считать, что подгруппа A либо содержится в группе $\mathfrak{B}_\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon = \pm 1$, либо раскладывается в прямое произведение $X \times \langle y\rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент и $X \le H_{+f} = H_{-f}$. Поэтому достаточно рассмотреть три случая: $A \le \mathfrak{B}_\varepsilon$ и $g \in \mathfrak{B}_\varepsilon$; $A \le \mathfrak{B}_\varepsilon$ и $g \notin \mathfrak{B}_\varepsilon$; $A = X\times\langle y\rangle$, где y — непримитивный циклически приведенный элемент и $X \le H_{+f} = H_{-f}$. Рассуждения, используемые в каждом из них, слово в слово повторяют те, которые применялись выше при изучении случаев 1, 2 и 3. Нужно лишь положить $\Xi_\varepsilon = \{N \cap \mathfrak{B}_\varepsilon \mid N \in \Omega\}$, заменить символы Δ, $\mathfrak{B}$ и Ξ на Δ_ε, $\mathfrak{B}_\varepsilon$ и Ξ_ε соответственно, а также во втором и третьем случаях сослаться на лемму 2 вместо леммы 1.

Доказательство теоремы 2.3. I. Необходимость. Пусть $(X,Y) \in \mathfrak{D}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, $A = XY$ и Z — подгруппа группы $\mathfrak{G}$, совпадающая с G_v (если выполняется условие $(\lambda^1_{\mathscr{C}})$) или с $G_{e(\varepsilon)}$ (если выполняется условие $(\mu^1_{\mathscr{C}})$). Тогда согласно определению семейства $\mathfrak{D}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ $X \leq Z$, $Y \cap Z = 1$ и подгруппа $\overline{X} = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap Z)$ отлична от X. Пусть $g \in \overline{X} \setminus X$. Тогда $g \in \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} AN$ и, значит, элемент g переходит в элемент подгруппы A при каждом гомоморфизме группы $\mathfrak{G}$ на группу из класса $\mathscr{C}$. Если предположить, что $g \in A$ и $g = xy$, где $x \in X$, $y \in Y$, то поскольку $g \in \overline{X} \leq Z$, из соотношений $X \leq Z$, $Y \cap Z = 1$ вытекает, что $y = 1$ и $g \in X$ вопреки выбору элемента g. Следовательно, $g \notin A$ и подгруппа A не отделима в группе $\mathfrak{G}$ классом $\mathscr{C}$.

Таким образом, все подгруппы из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ не являются $\mathscr{C}$-отделимыми в $\mathfrak{G}$. Очевидно, что тем же свойством обладают и подгруппы, сопряженные с ними.

Достаточность. Пусть A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$, не сопряженная ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, и $g \in \mathfrak{G} \setminus A$ — произвольный элемент. Нам достаточно указать подгруппу $L \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, удовлетворяющую соотношению $g \notin AL$.

Пусть S — конечное порождающее множество группы A. Согласно предложению 6.4, применяемому к множествам $\mathscr{V}' = \varnothing$, $\mathscr{E}' = \varnothing$ и $S \cup \{g\}$, существует конечный допустимый подграф Δ графа Γ такой, что $S \cup \{g\} \subseteq \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$. Тогда A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа группы $\mathfrak{H} = \pi_1(\mathscr{G}(\Delta))$ и $g \in \mathfrak{H} \setminus A$. Положим $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и покажем, что подгруппа A не сопряжена ни с какой подгруппой из семейства $\mathfrak{A}_\Omega(\mathfrak{G})$.

В самом деле, пусть $(X,Y) \in \mathfrak{D}_\Omega(\mathfrak{G})$, $Z = G_v$ (при выполнении условия (λ_Ω)) или $Z = G_{e(\varepsilon)}$ (при выполнении условия (μ_Ω)). Если подгруппа X $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе Z, то $XY \in \mathfrak{A}^1_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ и соотношение $A \nsim_{\mathfrak{G}} XY$ следует из условия теоремы. В противном случае существуют элемент $z \in Z \setminus X$ и число $q \in \mathfrak{P}(\mathscr{C})'$ такие, что $z^q \in X$. Из соотношения $Y \cap Z = 1$ вытекает, что $z \notin XY$ и потому подгруппа XY не является $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной в группе $\mathfrak{G}$. Следовательно, $A \nsim_{\mathfrak{G}} XY$.

Если $M, N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то по теореме Ремака [38, теорема 4.3.9] фактор-группа $\mathfrak{G}/M \cap N$ вкладывается в прямое произведение $\mathscr{C}$-групп $\mathfrak{G}/M$, $\mathfrak{G}/N$ и содержится в классе $\mathscr{C}$ в силу замкнутости последнего относительно взятия подгрупп и расширений. Из указанных свойств и непустоты класса $\mathscr{C}$ следует также, что ему принадлежит единичная группа. Значит, семейство $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ непусто и удовлетворяет условию (α) предложения 7.1. Поскольку условия (β) и (γ) данного предложения при $\Omega = \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ совпадают с условиями (i^1) и (ii^1) теоремы 2.2, к графу Γ, группе $\mathfrak{G}$, семейству $\mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, подграфу Δ и подгруппе A применимо предложение 7.2.

В силу утверждений 1 и 2 данного предложения граф Δ, группа $\mathfrak{H}$, семейство $\Xi = \{N \cap \mathfrak{H} \mid N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})\}$ и подгруппа A удовлетворяют условиям предложения 7.3. Согласно последнему из включения $g \in \mathfrak{H} \setminus A$ следует, что для некоторой подгруппы $M \in \Xi$ справедливо соотношение $g\rho_M \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{H}\rho_M, A\rho_M)$. Отсюда ввиду определения семейства Ξ и утверждения 3 предложения 7.2 вытекает существование подгруппы $N \in \Omega$ такой, что $M = N \cap \mathfrak{H}$ и $g\rho_N \notin \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$.

Из предложения 4.4 и $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}\rho_N$, имеющей место согласно предложению 6.2, следует, что подгруппа $\mathfrak{I}_N = \mathfrak{P}(\mathscr{C})'\text{-}\mathfrak{Is}(\mathfrak{G}\rho_N, A\rho_N)$ является абелевой. Поэтому в силу того же предложения 6.2 найдется подгруппа $L_N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G}\rho_N)$, удовлетворяющая соотношению $g\rho_N \notin \mathfrak{I}_N L_N$. Обозначая через L полный прообраз подгруппы L_N относительно гомоморфизма ρ_N, получаем, что $L \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$ и, так как $A\rho_N \leq \mathfrak{I}_N$, то $g \notin AL$. Стало быть, подгруппа L искомая.

II. Пусть $v \in \mathscr{V}$, $X \leq G_v$,

$$\overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_v), \quad \overline{X}_2 = \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(G_v)} XM.$$

Тогда $\overline{X}_1 \leq \overline{X}_2$ ввиду утверждения $(*)$. С другой стороны, если $N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})$, то $G_v/N \cap G_v \cong G_vN/N \leq \mathfrak{G}/N \in \mathscr{C}$ и в силу замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп $N \cap G_v \in \mathscr{C}^*(G_v)$. Поэтому $\overline{X}_1 = \overline{X}_2$. Остается заметить, что равенство $X = \overline{X}_2$ означает $\mathscr{C}$-отделимость подгруппы X в группе G_v и, стало быть, условия (i^1), (ii^1), ($\lambda^1_{\mathscr{C}}$) и ($\mu^1_{\mathscr{C}}$) равносильны соответственно условиям (i^2), (ii^2), ($\lambda^2_{\mathscr{C}}$) и ($\mu^2_{\mathscr{C}}$). Таким образом, доказываемое утверждение обеспечивается первой частью теоремы.

Следствие 2.4 вытекает из теорем 2.2, 2.3 и следующего утверждения.

Предложение 7.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп. Если группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема, то ее циклическая подгруппа сопряжена с некоторой подгруппой из семейства $\mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$ ($k = \overline{1,2}$) тогда и только тогда, когда она сопряжена с подгруппой из семейства $\mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{A}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$, необходимость утверждения имеет место. Проверим достаточность. Пусть Z — циклическая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, сопряженная с подгруппой вида XY, где $(X, Y) \in \mathfrak{D}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$. Предположим, что пара (X, Y) удовлетворяет условию ($\mu^k_{\mathscr{C}}$). Тогда Y — бесконечная циклическая подгруппа, $X \leq G_{e(\varepsilon)}$ для некоторых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, $XY = X \times Y$ и $X \neq \overline{X}_k$, где

$$\overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} X(N \cap G_{e(\varepsilon)}), \quad \overline{X}_2 = \bigcap_{M \in \mathscr{C}^*(G_{e(\varepsilon)})} XM.$$

Как уже было отмечено при доказательстве утверждения II теоремы 2.3, из замкнутости класса $\mathscr{C}$ относительно взятия подгрупп следует, что $\overline{X}_2 \leq \overline{X}_1$ и потому $X \neq \overline{X}_1$ при любом k. Вместе с тем, будучи сопряженной с Z, подгруппа $XY = X \times Y$ является циклической. Отсюда

$$1 = X \neq \overline{X}_1 = \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} N \cap G_{e(\varepsilon)} \leq \bigcap_{N \in \mathscr{C}^*(\mathfrak{G})} N$$

в противоречие с $\mathscr{C}$-аппроксимируемостью группы $\mathfrak{G}$. Следовательно, пара (X, Y) удовлетворяет условию ($\lambda^k_{\mathscr{C}}$) и потому $XY \in \mathfrak{B}^k_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G})$.

§ 8. Доказательства теорем 3.1, 3.2 и следствий 3.3, 3.4

Теорема 3.1 вытекает из утверждения I теоремы 2.3 и нижеследующего предложения 8.1, объединяющего в себе утверждение 2 теоремы 1 из [17] и частный случай теоремы 2 той же работы (чтобы получить последний, необходимо в указанной теореме положить $w(x, y) = [x, y]$ и $L_{\varepsilon e} = G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$).

Предложение 8.1. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп и группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Тогда имеет место условие* ($\mathfrak{i}^1$) *теоремы* 2.2. *Если для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ содержится в группе $G_{e(\varepsilon)}$ собственным образом и лежит в ее центре, то выполняется и условие* ($\mathfrak{ii}^1$) *указанной теоремы.*

Предложение 8.2 [11, предложение 10, теорема 4]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, замкнутый относительно взятия фактор-групп, и выполняется хотя бы одно из следующих условий:*

1) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *и для каждой вершины $v \in \mathscr{V}$ группа G_v $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе H_v;*

2) *$\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (2) *и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ группа $G_{e(\varepsilon)}$ $\mathscr{C}$-регулярна по подгруппе $H_{\varepsilon e}$.*

Тогда справедливы следующие утверждения.

I. *Для любых $u \in \mathscr{V}$, $L \in \mathscr{C}^*(G_u)$ существует $\mathscr{C}$-допустимая система совместимых нормальных подгрупп $\mathscr{R} = \{R_v \mid v \in \mathscr{V}\}$ такая, что $R_u \leq L$.*

II. *Если $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-аппроксимируемы и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathscr{C}$-отделима в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Доказательство теоремы 3.2. Объединяя предложение 6.1 и утверждение I предложения 8.2, получаем, что для группы $\mathfrak{G}$ справедливо утверждение ($*$) из формулировки теоремы 2.2. Согласно утверждению II предложения 8.2 $\mathscr{C}$-аппроксимируемость группы $\mathfrak{G}$ влечет за собой выполнение условий ($\mathfrak{i}^2$) и ($\mathfrak{ii}^2$) той же теоремы. Поэтому доказываемое утверждение следует из утверждения II теоремы 2.3.

Приводимые далее предложения 8.3 и 8.4 являются частными случаями утверждений из [36]: первое вытекает из предложения 6.3 и теоремы 2.2, второе — из теорем 3.5 и 3.6.

Предложение 8.3. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и X — $\mathscr{C}$-$\mathscr{B}\mathscr{N}$-группа. Тогда группа X $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе и каждая ее $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная подгруппа $\mathscr{C}$-отделима.*

Предложение 8.4. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, $\mathscr{G}(\Gamma)$ — конечный граф групп типа* (1) *или* (2) *и $H_{\varepsilon e} \neq G_{e(\varepsilon)}$ для всех $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$. Если каждая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) принадлежит классу $\mathscr{C}$-$\mathscr{B}\mathscr{N}$ и не имеет $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема тогда и только тогда, когда для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$.*

Следующее утверждение объединяет в себе частные случаи предложений 14 и 16 из [11].

Предложение 8.5. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп. Если множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа, то всякая ограниченная разрешимая группа $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе и обладает свойством $\mathscr{C}$-отделимости всех подгрупп.*

Предложение 8.6 [11, следствие 3]. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа. Пусть также $\mathscr{G}(\Gamma)$ — произвольный граф групп типа* (1) *или конечный* *граф групп типа (2). Если все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) являются ограниченными разрешимыми, то группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема.*

Справедливость следующего утверждения установлена в ходе доказательства предложения 8.7 из [36].

Предложение 8.7. *Пусть $\mathscr{C}$ — корневой класс групп, состоящий из периодических групп, и $\mathscr{D}$ — подкласс класса периодических разрешимых $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$-групп конечного периода, составленный из всех групп, мощность каждой из которых не превосходит мощности некоторой $\mathscr{C}$-группы (не обязательно одной и той же для всех групп из класса $\mathscr{D}$). Тогда $\mathscr{D}$ — корневой класс, состоящий из периодических групп и замкнутый относительно взятия фактор-групп, $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$, $\mathfrak{P}(\mathscr{D}) = \mathfrak{P}(\mathscr{C})$ и $\mathscr{D}$-$\mathscr{BN} = \mathscr{C}$-$\mathscr{BN}$.*

Доказательство следствия 3.3. Заметим, что согласно предложению 4.1 отсутствие $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения в каждой вершинной группе является необходимым условием $\mathscr{C}$-аппроксимируемости группы $\mathfrak{G}$. Поэтому в силу предложения 8.4 в формулировке доказываемого следствия слова «группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема» можно заменить на «все группы G_v ($v \in \mathscr{V}$) не имеют $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-кручения и для любых $e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$ подгруппа $H_{\varepsilon e}$ $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолирована в группе $G_{e(\varepsilon)}$». Будем считать далее, что так и сделано.

Пусть A — $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированная конечно порожденная абелева подгруппа группы $\mathfrak{G}$ и $\mathscr{D}$ — класс групп из предложения 8.7. Тогда при замене класса $\mathscr{C}$ на $\mathscr{D}$ все условия из новой формулировки доказываемого следствия остаются выполненными. При таких условиях группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{D}$-аппроксимируема в силу предложения 8.4. Согласно предложению 8.3 $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{D}}(\mathfrak{G}) = \varnothing$ и всякая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{D}$-регулярна как по подгруппе H_v, так и по каждой подгруппе $H_{\varepsilon e}$ ($e \in \mathscr{E}$, $\varepsilon = \pm 1$, $v = e(\varepsilon)$). Поскольку класс $\mathscr{D}$ замкнут относительно взятия фактор-групп, из теоремы 3.2 теперь следует, что подгруппа A $\mathscr{D}$-отделима в группе $\mathfrak{G}$. Остается заметить, что в силу предложения 8.7 справедливо включение $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{C}$ и потому подгруппа A оказывается отделимой и классом $\mathscr{C}$.

Доказательство следствия 3.4. Воспользуемся той же схемой рассуждений, что и выше. Поскольку множество $\mathfrak{P}(\mathscr{C})$ включает все простые числа, каждая подгруппа автоматически оказывается $\mathfrak{P}(\mathscr{C})'$-изолированной. Заменяя при необходимости класс $\mathscr{C}$ классом $\mathscr{D}$ из формулировки предложения 8.7, будем считать его далее замкнутым относительно взятия фактор-групп. Это позволяет воспользоваться предложением 8.5, согласно которому $\mathfrak{A}^2_{\mathscr{C}}(\mathfrak{G}) = \varnothing$ и всякая группа G_v ($v \in \mathscr{V}$) $\mathscr{C}$-регулярна по любой своей центральной подгруппе. В силу предложения 8.6 группа $\mathfrak{G}$ $\mathscr{C}$-аппроксимируема. Стало быть, требуемое утверждение вытекает из теоремы 3.2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соколов Е. В.* Об отделимости абелевых подгрупп фундаментальных групп графов групп. I // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 1083–1093.

2. *Мальцев А. И.* О гомоморфизмах на конечные группы // Учен. зап. Иван. гос. пед. ин-та. 1958. Т. 18. С. 49–60.

3. *Логинова Е. Д.* Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух групп с коммутирующими подгруппами // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 2. С. 395–407.

4. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп конечного ранга // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 3. С. 485–497.

5. *Азаров Д. Н.* О финитной аппроксимируемости свободного произведения разрешимых минимаксных групп с циклическими объединенными подгруппами // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 4. С. 483–491.

6. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами HNN-расширений групп // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21, № 4. С. 148–180.

7. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости конечными π-группами обобщенных свободных произведений групп // Мат. заметки. 2014. Т. 95, № 4. С. 605–614.

8. *Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп обобщенных свободных произведений с нормальным объединением // Изв. вузов. Математика. 2015. № 10. С. 27–44.

9. *Азаров Д. Н.* Критерий $\mathscr{F}_\pi$-аппроксимируемости свободных произведений с объединенной циклической подгруппой нильпотентных групп конечных рангов // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 3. С. 483–494.

10. *Tumanova E. A.* On the residual properties of generalized direct products // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 9. P. 1704–1711.

11. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп некоторых графов групп с центральными реберными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 6. С. 1382–1400.

12. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами групп некоторых обобщенных свободных произведений и HNN-расширений // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 2. С. 405–422.

13. *Gruenberg K. W.* Residual properties of infinite soluble groups // Proc. Lond. Math. Soc. (3). 1957. V. 7, N 1. P. 29–62.

14. *Азаров Д. Н., Тьеджо Д.* Об аппроксимируемости свободного произведения групп с объединенной подгруппой корневым классом групп // Науч. тр. Иван. гос. ун-та. Математика. 2002. № 5. С. 6–10.

15. *Туманова Е. А.* Аппроксимируемость корневыми классами групп древесных произведений с объединенными ретрактами // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 891–906.

16. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Обобщенные прямые произведения групп и их применение к изучению аппроксимируемости свободных конструкций групп // Алгебра и логика. 2019. Т. 58, № 6. С. 720–740.

17. *Соколов Е. В.* Об аппроксимируемости корневыми классами фундаментальных групп графов групп // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 4. С. 878–893.

18. *Sokolov E. V.* A characterization of root classes of groups // Comm. Algebra. 2015. V. 43, N 2. P. 856–860.

19. *Baumslag G.* On the residual finiteness of generalized free products of nilpotent groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 106, N 2. P. 193–209.

20. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of generalized free products // Can. Math. Bull. 1993. V. 36, N 3. P. 296–302.

21. *Kim G.* Cyclic subgroup separability of HNN extensions // Bull. Korean Math. Soc. 1993. V. 30, N 2. P. 285–293.

22. *Sokolov E. V.* On the cyclic subgroup separability of free products of two groups with amalgamated subgroup // Lobachevskii J. Math. 2002. V. 11. P. 27–38.

23. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп в некоторых классах конечных групп. Дис.... канд. физ.-мат. наук. Иваново: Иван. гос. ун-т, 2003.

24. *Гайворонская М. Ю., Соколов Е. В.* О финитной отделимости циклических подгрупп HNN-расширений групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Естественные, общественные науки. 2010. № 2. С. 90–97.

25. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain HNN extensions // Int. J. Algebra Comput. 2018. V. 28, N 3. P. 543–552.

26. *Zhou W., Kim G.* Abelian subgroup separability of certain generalized free products of groups // Algebra Colloq. 2020. V. 27, N 4. P. 651–660.

27. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Об аппроксимируемости корневыми классами древесных произведений с центральными объединенными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 3. С. 692–702.

28. *Sokolov E. V., Tumanova E. A.* To the question of the root-class residuality of free constructions of groups // Lobachevskii J. Math. 2020. V. 41, N 2. P. 260–272.

29. *Sokolov E. V.* On conditions for the root-class residuality of the fundamental groups of graphs of groups. arXiv: 2303.09815 [math.GR], 2023.

30. *Куваев А. Е., Соколов Е. В.* Необходимые условия аппроксимируемости обобщенных свободных произведений и HNN-расширений групп // Изв. вузов. Математика. 2017. № 9. С. 36–47.

31. *Allenby R. B. J. T.* The potency of cyclically pinched one-relator groups // Arch. Math. 1981. V. 36. P. 204–210.

32. *Соколов Е. В.* Строение конечно порожденных ограниченных разрешимых групп // Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология, Химия, Физика, Математика. 2003. № 3. С. 128–132.

33. *Соколов Е. В., Туманова Е. А.* Достаточные условия аппроксимируемости некоторых обобщенных свободных произведений корневыми классами групп // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 1. С. 171–185.

34. *Соколов Е. В.* Об отделимости подгрупп нильпотентно аппроксимируемых групп в классе конечных π-групп // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 219–229.

35. *Холл Ф.* Нильпотентные группы // Математика. 1968. Т. 12, № 1. С. 3–36.

36. *Sokolov E. V.* On the separability of subgroups of nilpotent groups by root classes of groups // J. Group Theory, 2023. DOI: 10.1515/jgth-2022-0021.

37. *Magnus W.* Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring // Math. Ann. 1935. V. 111, N 1. P. 259–280.

38. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

Поступила в редакцию 20 марта 2023 г.
После доработки 20 марта 2023 г.
Принята к публикации 2 августа 2023 г.

Соколов Евгений Викторович (ORCID 0000-0002-8256-8016)
Ивановский государственный университет,
ул. Ермака, 39, Иваново 153025
ev-sokolov@yandex.ru

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{AMS}$-TEX,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{AMS}$-TEX,
the American Mathematical Society's TEX macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 29.12.2023. Уч.-изд. л. 19,8. Формат $70 \times 108^1/_{16}$.
Дата размещения в сети Интернет 06.03.2024. Объем файла 2.2 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.