

ISSN 2310-001X

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

том 66

4

2025

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор: Ю. Л. Ершов

Заместители главного редактора:

С. С. Гончаров, А. Е. Гутман

Редакторы:

В. Л. Береснев,	В. Д. Мазуров,
А. А. Боровков,	А. Е. Миронов,
А. Ю. Веснин,	Г. А. Михайлов,
Г. В. Демиденко,	А. Г. Мясников,
Е. И. Зельманов,	П. И. Плотников,
С. И. Кабанихин,	В. Г. Романов,
А. В. Косточка,	Ю. Л. Трахинин
А. А. Лаптев,	

УЧРЕДИТЕЛИ
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ОСНОВАН В МАЕ 1960 ГОДА НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД
Том 66, № 4 (392) Июль—август, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Артамонов Д. В. Вычисление $6j$ -символов для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$	551
Беляева Ю. О., Бурский В. П. О разрешимости смешанной задачи для волнового уравнения с эквивариантным граничным условием	570
Бородин А. Н., Нецадим М. В., Симонов А. А. Согласованные структуры обобщенных квадлов Александера. Тождества дистрибутивности и медиальности	583
Водопьянов С. К. Новые свойства операторов композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях	596
Го Ц., Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О. Новые примеры непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах	613
Голубков А. А. Асимптотика решений уравнения Штурма — Лиувилля вдоль произвольной кривой в окрестности симметричной особой точки	621
Гуськов Н. В., Дудкин Ф. А. Хопфовость вершинно-транзитивных обобщенных групп Баумслага — Солитера	635
Карманова М. Б. Неконтактные отображения общих групп Карно и формула коплощади	643
Косов А. А., Семенов Э. И. Система уравнений с оператором Монжа — Ампера и ее многомерные точные решения	669
Монахов В. С. О нильпотентных корадикалах силовских нормализаторов конечной группы	683
Назаров С. А. Деформация тонкой упругой зажатой по краю пластины с прикрепленными стержнями. 2. Спектральная задача	689

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ
2025

Павлов А. Л. О задаче Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста	718
Пожидаев А. П. О смешанных тождествах эндоморфов, бимодулях и ω -алгебрах	733
Шемякина О. Л. Конечные минимальные не σ -сверхразрешимые группы	747
Шепелев В. Д. Сильная π -теорема Силова для простых групп лиева типа ранга 1	755

АДРЕС РЕДАКЦИИ:

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

Телефон: (8-383)-3297597; e-mail: smz@math.nsc.ru

УДК 512.815.1

ВЫЧИСЛЕНИЕ $6j$ -СИМВОЛОВ ДЛЯ АЛГЕБРЫ ЛИ $\mathfrak{gl}_n$

Д. В. Артамонов

Аннотация. Находится явное описание линейных порождающих пространства кратности, которое описывает вхождения определенного неприводимого представления в разложение тензорного произведения двух неприводимых конечномерных представлений алгебры Ли всех матриц заданного размера. С использованием полученного описания находится явная формула для произвольного $6j$ -символа для конечномерных представлений рассматриваемой алгебры Ли. Его значение выражается через значение обобщенной гипергеометрической функции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.401

Ключевые слова: тензорные произведения, разложение на неприводимые, $6j$ -символы.

Теория представлений простых алгебр Ли содержит ряд естественных вопросов, которые, как до сих пор считалось, не имеют простого, хорошего решения. Это, например, ряд вопросов, связанных с явным разложением на неприводимые тензорного произведения $V \otimes W$ двух конечномерных неприводимых представлений.

1. Какие и с какой кратностью возникают при разложении $V \otimes W$ в прямую сумму неприводимых неприводимые слагаемые U (проблема кратности)?
2. Каковы явные формулы для матричных элементов проекторов $V \otimes W \rightarrow U$ на неприводимые слагаемые (задача о нахождении коэффициентов Клебша — Гордана или $3j$ -символов)?
3. Каковы матричные элементы отображения ассоциатора, осуществляющего изоморфизм двух разложений на неприводимые тройного тензорного произведения: $V \otimes (W \otimes U)$ и $(V \otimes W) \otimes U$ (задача о нахождении коэффициентов Рака или $6j$ -символов)?

Задачу 1, с одной стороны, можно считать решенной, например, с использованием теории характеров (см., например, обзор [1], а также [2–4]). Но, с другой стороны, имеется, усиленная версия задачи 1: задача построения базиса в пространстве кратности (см. формулу (5)).

Что касается задач 2 и 3, то долгое время считалось, что в общем виде (т. е. для произвольного набора представлений для $\mathfrak{gl}_n$ при $n \geq 3$) они не имеют хорошего решения. Но также считалось, что все-таки есть надежда получить хорошее их решение в серии достаточно общих случаев, если использовать подходящие специальные функции для выражения ответа.

В процессе реализации этой идеи в [5, 6] для $\mathfrak{gl}_3$ было получено полное решение задач 2 и 3 в случае произвольного набора представлений V , W , U . Ответ оказывается не очень громоздким (особенно для $6j$ -символов!) за счет

того, что он выражается через значения гипергеометрических функций многих переменных.

Ключом к получению этого хорошего ответа являются два факта. Во-первых, явное решение проблемы кратности для $\mathfrak{gl}_3$, полученное в [7]. Во-вторых, использование очень удобной для вычислений А-ГКЗ реализации представлений. В случае $\mathfrak{gl}_3$ ее описание может быть найдено в [5].

В настоящей работе результаты [6] распространяются на случай $\mathfrak{gl}_n$. По существу, схема вычисления $6j$ -символов, найденная в [6], срабатывает и для $\mathfrak{gl}_n$, надо лишь предварительно решить явно проблему кратности¹⁾ и построить А-ГКЗ реализацию для $\mathfrak{gl}_n$.

А-ГКЗ реализация для $\mathfrak{gl}_n$ построена в [8]. В настоящей работе сначала явно решается проблема кратности, а затем вычисляются $6j$ -символы по аналогии с тем, как это сделано в [6]. При этом стоит отметить, что работ, посвященных вычислению $6j$ -символов для $\mathfrak{gl}_n$ в общем случае, нет [9]. Как правило, рассматриваются частные случаи (см. [10–13]; отметим также работы [14, 15], где вычислены некоторые классы $6j$ -символов, и этот результат играет важную техническую роль в вычислении некоторых коэффициентов Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_3$).

Задачи 1–3 могут быть поставлены также и для других серий простых алгебр Ли. Для них имеются лишь частичные результаты — данные задачи решаются лишь для специальных классов представлений. Задача 1 обсуждалась для этих алгебр Ли в духе теории характеров [16, 17] с использованием таблиц Юнга [18–20]. Задачи 2 и 3 вычисления $3j$ - и $6j$ -символов для алгебр других серий рассматривались лишь для частных случаев. Так, в [21, 22] вычислялись $3j$ -символы для симметрических степеней стандартного представления. При этом $6j$ -символам уделялось гораздо большее внимание. В основном рассматривались $6j$ -символы для симметрических степеней стандартного представления (для таких представлений в тензорных произведениях отсутствуют кратности) [23–27]. Имеются также работы, где рассматриваются простейшие случаи тензорных произведений, содержащих кратности [28–30]. Более общие случаи, насколько известно автору, не рассматривались.

Отметим, что имеется ослабленная версия задач 2 и 3: задача об алгоритмическом вычислении $3j$ и $6j$ -символов. Эта задача решена в [31].

План настоящей работы следующий. В разд. 1 напомним функциональную реализацию представлений, а также в рамках ее дается некоторый новый взгляд на конструкцию Вейля (дается определение операции наложения диаграмм Юнга). Также дается определение $3j$ и $6j$ -символов. В разд. 2 явно решается проблема кратности для разложения тензорного произведения в функциональной реализации. Эта задача эквивалентна задаче явного нахождения базисных семиинвариантов в тройном тензорном произведении. Именно в такой форме задача и рассматривается в данном разделе. Основным результатом — теорема 3. В разд. 3 разъясняются основные идеи А-ГКЗ реализации представлений из работы [8]. В разд. 4 производится явное вычисление $6j$ -символа. Результат содержится в теореме 6. Приводится пример вычисления $6j$ -символа.

¹⁾ «Решить явно проблему кратности» означает найти явно базис в пространстве кратности.

1. Предварительные сведения

1.1. Функциональная реализация. В работе рассматриваются группы и алгебры Ли над $\mathbb{C}$. Также рассматриваются лишь конечномерные неприводимые представления.

Функции на группе GL_n образуют представление группы GL_n . На функцию $f(g)$, $g \in GL_n$, элемент группы $X \in GL_n$ действует с помощью правых сдвигов по правилу

$$(Xf)(g) = f(gX). \quad (1)$$

Переходя к инфинитезимальному действию, получаем, что на пространстве всех функций на G имеется действие $\mathfrak{gl}_n$.

Любое конечномерное неприводимое представление может быть реализовано как подпредставление в пространстве функций. Именно, если $[m_1, \dots, m_n]$ — старший вес, то в пространстве всех функций имеется старший вектор с таким весом, который явно записывается следующим образом.

Пусть a_i^j — функция матричного элемента на группе GL_n . Здесь j — номер строки, i — номер столбца. Кроме того, положим

$$a_{i_1, \dots, i_k} := \det(a_i^j)_{i=i_1, \dots, i_k}^{j=1, \dots, k}, \quad (2)$$

где берется минор подматрицы в матрице (a_i^j) , образованный строками первыми, идущими подряд строками $1, \dots, k$ и столбцами $i_1, \dots, i_k$.

Оператор $E_{i,j}$ действует на определитель путем действия на столбцовые индексы

$$E_{i,j} a_{i_1, \dots, i_k} = \begin{cases} a_{\{i_1, \dots, i_k\}|_{j \rightarrow i}}, & j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (3)$$

где $|\cdot|_{j \rightarrow i}$ означает операцию замены индекса j на i .

Возьмем целочисленный старший вес $[m_1, \dots, m_n]$. Используя (3), легко убедиться в том, что вектор

$$v_0 = a_1^{m_1-m_1} a_{1,2}^{m_2-m_3} \dots a_{1,\dots,n}^{m_n} \quad (4)$$

старший для алгебры $\mathfrak{gl}_n$ с весом $[m_1, \dots, m_n]$.

Теорема 1 (см. [32]). *Пространство функций, составляющих представление со старшим вектором (4), есть пространство функций, которые могут быть записаны как многочлены от определителей $a_{i_1, \dots, i_k}$ таких, что их однородная степень по определителям фиксированного размера k такая же, как у старшего вектора (4).*

1.2. Наложение симметризатора Юнга. Со старшим весом $[m_1, \dots, m_n]$ свяжем диаграмму Юнга. Первую ее строку длины m_1 заполним символами 1, следующую строку длины m_2 заполним символами 2 и т. д. В последней строке длины m_n запишем n . С полученной таблицей Юнга свяжем симметризатор Юнга, который представляет собой сначала применение антисимметризации по столбцам, а потом симметризацию по строкам.

Имеет место предложение, являющееся прямым следствием теоремы 1.

Предложение 1. *Для того чтобы полином от определителей a_i^j лежал в представлении со старшим вектором (4), необходимо, чтобы среди его верхних индексов 1 встречалось m_1 раз, 2 встречалось m_2 раз и т. д.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Наложением симметризатора Юнга на моном от a_i^j , удовлетворяющий условиям предложения 1, назовем применение к верхним индексам этого монома симметризатора Юнга, отвечающего диаграмме Юнга, построенной вышеописанным способом по старшему весу $[m_1, \dots, m_n]$.

ПРИМЕР 1. Результат наложения симметризатора Юнга на моном $a_1^1 a_2^1 a_3^2$ вычисляется так:

$$a_1^1 a_2^1 a_3^2 + a_1^1 a_2^2 a_3^1 - a_1^2 a_2^1 a_3^1 - a_1^1 a_2^2 a_3^1 = a_1 a_{2,3} + a_2 a_{1,3}.$$

Верно следующее утверждение, проверяемое непосредственным вычислением

Предложение 2. Если дан моном от a_i^j , удовлетворяющий условиям предложения 1, то в результате наложения на него симметризатора Юнга получается полином, лежащий в представлении, описываемом в теореме 1.

Мономы от определителей, удовлетворяющие условиям теоремы 1, являются собственными для оператора наложения симметризатора Юнга.

1.3. Проблема кратности. Возьмем разложение тензорного произведения представлений V и W алгебры $\mathfrak{gl}_n$ в прямую сумму неприводимых:

$$V \otimes W = \sum_U \text{Mult}_U \otimes U, \quad (5)$$

где U обозначает типы неприводимых представлений, возникающих при разложении, а Mult_U — пространство кратности, т. е. линейное пространство без действия $\mathfrak{gl}_n$. При этом можно выбрать базис $\{e_f\}$ в этом пространстве и, положив $U^f := e_f \otimes U$, написать

$$V \otimes W = \sum_{U,f} U^f. \quad (6)$$

Проблема кратности как раз и состоит в нахождении базиса в пространстве Mult_U .

1.4. Коэффициенты Клебша — Гордана, $3j$ -символы.

1.4.1. Коэффициенты КЛЕБША — ГОРДАНА. Пусть в представлениях V, W, U в (6) выбраны базисы $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma^f\}$ соответственно. Коэффициентами Клебша — Гордана называют числовые коэффициенты $D_{V,W;\alpha,\beta}^{U,\gamma,f} \in \mathbb{C}$, возникающие в разложении

$$u_\gamma^f = \sum_{\alpha,\beta} D_{V,W;\alpha,\beta}^{U,\gamma,f} v_\alpha \otimes w_\beta. \quad (7)$$

1.4.2. $3j$ -символы. Пусть даны представления V, W, U алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Предположим, что в них выбраны базисы $\{v_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{u_\gamma\}$. Тогда $3j$ -символом называется набор чисел

$$\begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u_\gamma \end{pmatrix}^f \in \mathbb{C} \quad (8)$$

таких, что величина

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma} \begin{pmatrix} V & W & U \\ v_\alpha & w_\beta & u_\gamma \end{pmatrix}^f v_\alpha \otimes w_\beta \otimes u_\gamma$$

$\mathfrak{gl}_n$ -семиинвариантна, т. е. данная функция собственная для картановских операторов $E_{i,i}$ и обращается в нуль под действием корневых элементов. При этом $3j$ -символы с одинаковыми внутренними индексами образуют линейное пространство. Индекс f перечисляет базисные $3j$ -символы с одинаковыми внутренними индексами. При этом индекс f можно отождествлять с семиинвариантом, который выражается через данный $3j$ -символ.

1.4.3. Связь с коэффициентами КЛЕБША — ГОРДАНА. Умножая (6) на представление $\overline{U}$, контраградиентное к U , и рассматривая в $\overline{U}$ базис $\overline{u}_\gamma$, двойственный к u_γ , получаем соотношение

$$D_{V,W;\alpha,\beta}^{U,\gamma,f} = \begin{pmatrix} V & W & \overline{U} \\ v_\alpha & w_\beta & \overline{u}_\gamma \end{pmatrix}^f. \quad (9)$$

Таким образом, задачи вычисления коэффициентов Клебша — Гордана и $3j$ -символов в сущности эквивалентны.

Данная формула позволяет также отождествить пространства кратностей для коэффициентов Клебша — Гордана и для $3j$ -символов.

1.5. Коэффициенты Рака, $6j$ -символы.

1.5.1. КОЭФФИЦИЕНТЫ РАКА. Вторая важная задача, возникающая при изучении тензорных произведений неприводимых представлений, это вычисление коэффициентов Рака. *Коэффициентами Рака* называются матричные элементы оператора, осуществляющего изоморфизм $V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3)$ и $(V^1 \otimes V^2) \otimes V^3$. Именно, тройное тензорное произведение в сумму неприводимых можно разложить двумя способами.

1. Первый способ. Сначала раскладываем на неприводимые $V^1 \otimes V^2$:

$$V^1 \otimes V^2 = \bigoplus_U \text{Mult}_U^{V^1, V^2} \otimes U, \quad (10)$$

где U — неприводимое представление, а $\text{Mult}_U^{V^1, V^2}$ — пространство кратности. Умножая (10) тензорно на V^3 справа, получаем

$$(V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 = \bigoplus_{U,W} \text{Mult}_U^{V^1, V^2} \otimes \text{Mult}_W^{U, V^3} \otimes W. \quad (11)$$

2. Второй способ. Сначала раскладываем $V^2 \otimes V^3$:

$$V^2 \otimes V^3 = \bigoplus_H \text{Mult}_H^{V^2, V^3} \otimes H, \quad (12)$$

и далее

$$V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3) = \bigoplus_{H,W} \text{Mult}_H^{V^1, V^2} \otimes \text{Mult}_W^{V^2, V^3} \otimes W. \quad (13)$$

Имеется изоморфизм $\Phi : (V^1 \otimes V^2) \otimes V^3 \rightarrow V^1 \otimes (V^2 \otimes V^3)$, который дает отображение

$$\Phi : \bigoplus_U \text{Mult}_U^{V^1, V^2} \otimes \text{Mult}_W^{U, V^3} \rightarrow \bigoplus_H \text{Mult}_H^{V^1, V^2} \otimes \text{Mult}_W^{V^2, V^3}. \quad (14)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Отображение Рака*²⁾ — это индуцированное Φ отображение

$$\mathscr{W} \left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\} : \text{Mult}_U^{V^1, V^2} \otimes \text{Mult}_W^{U, V^3} \rightarrow \text{Mult}_H^{V^2, V^3} \otimes \text{Mult}_W^{V^1, H}. \quad (15)$$

После выбора базиса в пространствах кратности появляются матричные элементы данного отображения. Они называются *коэффициентами Рака*. Если f есть индекс, перечисляющий базисные векторы в пространстве кратности, то для коэффициентов Рака используется обозначение

$$\mathscr{W} \left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{f_1, f_2}, \quad (16)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 — индексы базисных векторов в $\text{Mult}_U^{V^1, V^2}$, Mult_W^{U, V^3} , $\text{Mult}_H^{V^2, V^3}$, $\text{Mult}_W^{V^1, H}$ соответственно.

При этом удобнее работать с близкими объектами — $6j$ -символами.

1.6. $6j$ -Символы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. $6j$ -символом называется спаривание $3j$ -символов по правилу

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{f_1, f_2} &:= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_6} \left(\begin{array}{ccc} \bar{V}^1 & \bar{V}^2 & U \\ \bar{v}_{\alpha_1}^1 & \bar{v}_{\alpha_2}^2 & u_{\alpha_4} \end{array} \right)^{f_1} \cdot \left(\begin{array}{ccc} \bar{U} & \bar{V}^3 & W \\ \bar{u}_{\alpha_4} & \bar{v}_{\alpha_3}^3 & w_{\alpha_5} \end{array} \right)^{f_2} \\ &\times \left(\begin{array}{ccc} V^2 & V^3 & \bar{H} \\ v_{\alpha_2}^2 & v_{\alpha_3}^3 & \bar{h}_{\alpha_6} \end{array} \right)^{f_3} \cdot \left(\begin{array}{ccc} V^1 & H & \bar{W} \\ v_{\alpha_1}^1 & h_{\alpha_6} & \bar{w}_{\alpha_5} \end{array} \right)^{f_4} \cdot |v_{\alpha_1}^1|^2 \cdot \dots \cdot |h_{\alpha_6}|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь α_i — индекс, перечисляющий векторы соответствующего неприводимого представления.

Выражение следует понимать так: на $3j$ -символ алгебра Ли $\mathfrak{gl}_n$ действует путем действия на нижние индексы. Образует семиринвариант из четырех $3j$ -символов, спаривая индексы так, что у двух $3j$ -символов спаривается только одна пара индексов.

Между коэффициентами Рака и $6j$ -символами имеется следующая связь. Используем тот факт, что имеет место двойственность между пространствами $\text{Mult}_U^{V^1, V^2}$ и $\text{Mult}_{\bar{U}}^{\bar{V}^1, \bar{V}^2}$. При этом если f_1 — индекс базисного вектора в $\text{Mult}_U^{V^1, V^2}$, то $\bar{f}_1$ есть индекс двойственного базиса в $\text{Mult}_{\bar{U}}^{\bar{V}^1, \bar{V}^2}$. Итак,

$$\mathscr{W} \left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{\bar{f}_1, \bar{f}_2} = \left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{f_1, f_2}.$$

В дальнейшем будем иметь дело с $6j$ -символами.

2. Решение проблемы кратности для $3j$ -символов

В настоящем разделе проблема кратности для $3j$ -символов решается в функциональной реализации. Основной результат — теорема 3, которая дает ответ

²⁾В настоящей работе, как и во многих других, отображение Рака обозначается символом $\mathscr{W}$ в честь Вигнера, которому принадлежат важные результаты, касающиеся этого отображения.

на вопрос о том, какие функции $f \in V \otimes W \otimes U$ индексируют $3j$ -символы с одинаковыми внутренними индексами. Эта теорема есть обобщение аналогичной теоремы для $\mathfrak{gl}_3$, полученной в [5].

В отличие от случая $\mathfrak{gl}_3$ нам не удастся построить независимый набор таких функций, в теореме 3 строится лишь система линейных порождающих в пространстве семиинвариантов тройного тензорного произведения. Эти порождающие и индексируют $3j$ -символы с одинаковыми внутренними индексами.

2.1. Семиинварианты в $V \otimes W \otimes U$. Дадим описание семиинвариантов в $V \otimes W \otimes U$. Будем использовать функциональную реализацию. Тогда $V \otimes W \otimes U$ реализуется в пространстве однородных полиномов от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j (условия однородности даны ниже в предложении 3) на $GL_n \times GL_n \times GL_n$. Каждый из данных матричных элементов можно считать элементом в стандартном векторном представлении $V_0 \simeq \mathbb{C}^n$ (при этом алгебра $\mathfrak{gl}_n$ действует на нижние индексы). Такая точка зрения дает явное вложение $V \otimes W \otimes U \subset V_0^{\otimes T}$, где T достаточно велико.

Явное описание семиинвариантов в $V_0^{\otimes T}$ дается по существу первой основной теоремой теории инвариантов [33] для группы нижнеунитреугольных матриц. В наших обозначениях эта теорема может быть сформулирована так.

Теорема 2. Семиинварианты для действия $\mathfrak{gl}_n$ в пространстве полиномов от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j являются полиномами от базисных семиинвариантов, которые записываются как определители вида $\det(x^{j_1} \dots x^{j_n})$ матрицы, составленной из матричных элементов x_i^j , где x — один из символов a, b, c (возможно, разные для разных j), верхний индекс j принимает значения $j_1, \dots, j_n$, а нижний индекс i — значения $1, \dots, n$.

Однако не все семиинварианты, описываемые в теореме 2, лежат в функциональной реализации $V \otimes W \otimes U$. Имеет место следующее необходимое условие, являющееся прямым следствием предложения 1.

Предложение 3. Пусть старшие веса V, W, U суть $[m_1, \dots, m_n], [M_1, \dots, M_n], [m'_1, \dots, m'_n]$. Для того чтобы полином от матричных элементов a_i^j, b_i^j, c_i^j лежал в $V \otimes W \otimes U$ должно выполняться следующее требование. У переменных a_i^j верхний индекс 1 встречается m_1 раз, верхний индекс 2 встречается m_2 раз и т. д. Аналогичные требования предъявляются к верхним индексам символов b, c .

Заметим, что если полином удовлетворяет условию предложения 3, то к нему применимы операции наложения трех симметризаторов Юнга на верхние индексы символов a, b, c соответственно.

Наложение симметризаторов Юнга имеет своим образом представление $V \otimes W \otimes U$ (см. предложение 2), так что применение симметризатора Юнга к семиинварианту, удовлетворяющему предложению 3, дает семиинвариант в $V \otimes W \otimes U$. Опишем его явно. Для этого введем операции наложения антисимметризаторов (или скобки (...)) на нижние индексы мономов от a, b, c .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Операция наложения (...) состоит в следующем. У монома выбирается n нижних индексов (будем говорить, что отобранные индексы находятся внутри скобок) и по ним выполняется антисимметризация.

ПРИМЕР 2. Наложение (...) в случае алгебры $\mathfrak{gl}_2$ на первые два нижних индекса монома $a_1^1 b_2^1 c_1^2$ выглядит так: $a_1^1 b_2^1 c_1^2 := a_1^1 b_2^1 c_1^2 - a_2^1 b_1^1 c_1^2$.

Из теоремы 2 с помощью наложения симметризаторов Юнга получаем такое утверждение.

Теорема 3. Семиинварианты в $V \otimes W \otimes U$ являются линейными комбинациями семиинвариантов, конструируемых так. Берется моном от a_i^j, b_i^j, c_i^j , удовлетворяющий условиям предложения 3. Нижние индексы разбиваются на непересекающиеся группы, состоящие из n индексов.

На его верхние индексы накладываются три соответствующих симметризатора Юнга. На каждую группу из n нижних индексов накладывается скобка (...).

Имеет место следующее предложение, несколько ослабляющее зависимость построенного семиинварианта от выбора наложения антисимметризаторов (...).

Предложение 4. Функция, конструируемая в теореме 3, зависит с точностью до знака только от того, сколько при наложениях на нижние индексы скобок (...) в каждую скобку попало символов a, b, c , но не зависит от того, как расставлены верхние индексы у этих символов на начальном шаге построения функции.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем какой-то выбор наложения и опишем некоторые операции, меняющие наложение, но приводящие к той же самой функции. Факт существования таких операций и дает нужное утверждение.

В формулировке ниже x, y означают два разных символа из символов a, b, c , а $\bullet$ — произвольный нижний индекс.

Пусть одна из скобок (...) накладывается на один из символов $x_\bullet^i$, другая скобка (...) накладывается на другой символ $x_\bullet^j$. Докажем, что эти символы можно поменять местами. При этом допускается, что $i = j$.

Действительно, предположим сначала, что $i = j$. Тогда после применения симметризатора Юнга получаем выражение, которое симметрично по перестановке этих символов. Значит, если сначала переставить местами эти два символа $x_\bullet^i$, потом применить наложение скобки (...), а затем применить симметризаторы Юнга, то получим то же самое выражение.

Предположим теперь, что $i \neq j$. Без ограничения общности можно предполагать, что эти символы стоят в одном столбце диаграммы Юнга, по которой строится симметризатор Юнга. Тогда после применения симметризатора Юнга получаем выражение, которое антисимметрично по перестановке этих символов. Значит, если сначала переставить эти символы, потом применить наложение скобки (...), а затем симметризаторы Юнга, то получим то же самое выражение с точностью до знака.

Предложение 4 доказано.

Из предложения 1 следует, что для функции, конструируемой в теореме 3, можно ввести обозначение

$$((x^{j_1} \dots x^{j_n}) \dots (y^{i_1} \dots y^{i_n})), \quad (18)$$

в котором $x, y, \dots$ — символы a, b, c (при этом символы x вида $x^{j_1}, x^{j_2}, \dots$ могут быть разными символами a, b, c). При этом верхние индексы должны удовлетворять условиям предложения 3. Скобки соответствуют тому, как накладывается антисимметризатор на нижние индексы.

Можно в принципе ввести еще более компактное, но неполное обозначение

$$(a^{i_1} \dots a^{i_{k_1}} b^{j_1} \dots b^{j_{k_2}} c^{l_1} \dots c^{l_{k_3}}), \quad (19)$$

при этом потребовав, чтобы верхние индексы удовлетворяли предложению 3, а $k_1 + k_2 + k_3$ кратно n . Это обозначение является полным в случае $\mathfrak{gl}_3$ и именно оно используется в [5, 6].

Следствие 1. Произвольный семиновариант в $V \otimes W \otimes U$ является линейной комбинацией семиновариантов вида

$$f = \prod \frac{1}{t!} (((x^{j_1} \dots x^{j_n}) \dots (y^{i_1} \dots y^{i_n})))^t, \quad (20)$$

где степень t своя у каждого семиноварианта. Совокупность всех верхних индексов должна удовлетворять условиям предложения 3.

ПРИМЕР 3. В случае $\mathfrak{gl}_3$ данная конструкция приводит к семиновариантам, построенным в [5]. Например,

$$(a^1 a^2 b^1) = \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ b_1^1 & b_2^1 & b_3^1 \end{pmatrix}, \quad ((c^1 c^2 b^2)(b^1 a^1 a^2)) = \pm \det \begin{pmatrix} a_{2,3} & a_{1,3} & a_{1,2} \\ b_{2,3} & b_{1,3} & b_{1,2} \\ c_{2,3} & c_{1,3} & c_{1,2} \end{pmatrix},$$

в [5] эти семиноварианты обозначаются просто (aab) и $(aabbcc)$.

ПРИМЕР 4. В случае $\mathfrak{gl}_4$ имеются семиноварианты, не записываемые в виде определителей:

$$\begin{aligned} ((a^1 a^2 a^3 b^1)(b^2 c^1 c^2 c^3)) &= a_{1,2,3} b_{2,1} c_{2,3,4} + a_{1,2,3} b_{4,3} c_{4,1,2} - a_{1,2,3} b_{4,2} c_{2,4,1} \\ &\quad - a_{4,1,2} b_{3,1} c_{2,3,4} + a_{4,1,2} b_{3,4} c_{1,2,3} + a_{4,1,2} b_{3,2} c_{3,4,1} \\ &\quad + a_{3,4,1} b_{2,1} c_{2,3,4} - a_{3,4,1} b_{2,4} c_{1,2,3} + a_{3,4,1} b_{2,3} c_{4,1,2}. \end{aligned} \quad (21)$$

Так как данное выражение состоит из девяти слагаемых, оно не является каким-либо определителем.

3. А-ГКЗ реализация. Переменные Z

3.1. А-ГКЗ реализация представлений. А-ГКЗ-реализация представления для $\mathfrak{gl}_3$ введена в [5] при вычислении $3j$ -символов этой алгебры. Построении ее аналога для случая $\mathfrak{gl}_n$ — весьма непростая задача. Она была решена в работе [8]. Для вычисления $6j$ -символов достаточно только определение этой реализации, дадим его в данном разделе.

Рассмотрим переменные A_X , занумерованные собственными подмножествами $X \subset \{1, \dots, n\}$. Требуем, чтобы A_X были антисимметричны по индексам множества X , но другим соотношениям не подчинялись. Подчеркнем, что эти переменные имеют те же индексы, что и определители (2), но в отличие от них A_X не подчиняются никаким соотношениям кроме антисимметричности.

На эти переменные алгебра действует по правилу

$$E_{i,j} A_{i_1, \dots, i_k} = \begin{cases} A_{\{i_1, \dots, i_k\} | j \rightarrow i}, & \text{если } j \in \{i_1, \dots, i_k\}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (22)$$

а на их произведение — по правилу Лейбница. Таким образом, алгебра полиномов $\mathbb{C}[A]$ есть представление $\mathfrak{gl}_n$.

Рассмотрим систему уравнений в частных производных, называемую системой А-ГКЗ, которая строится так. Пусть $I \subset \mathbb{C}[A]$ — идеал соотношений между определителями a_X . Известно, что он порождается соотношениями Плюккера. При замене

$$A_X \mapsto \frac{\partial}{\partial A_X}$$

идеал I переходит в идеал $\bar{I} \subset \mathbb{C}[\frac{\partial}{\partial A}]$ в кольце дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами.

Система А-ГКЗ есть система уравнений в частных производных, задаваемая идеалом $\bar{I}$:

$$\forall \mathcal{O} \in \bar{I} : \mathcal{O}F(A) = 0.$$

Теорема 4 (см. [8]). *Пространство полиномиальных решений системы А-ГКЗ образует представление $\mathfrak{gl}_n$. Это представление есть прямая сумма всех конечномерных неприводимых представлений, взятых с кратностью 1.*

Представление старшего веса $[m_1, \dots, m_n]$ есть пространство полиномиальных решений степени $m_1 - m_2$ по A_X с $|X| = 1$, степени $m_2 - m_3$ по A_X с $|X| = 2$ и т. д.

Эта теорема дает способ реализации конечномерных неприводимых представлений, полученная реализация и называется А-ГКЗ реализацией.

Заметим, что замена

$$A_X \mapsto a_X$$

отображает изоморфно А-ГКЗ реализацию на реализацию Желобенко из теоремы 1.

Определим действие

$$f(A) \curvearrowright g(A) := f\left(\frac{d}{dA}\right)g(A), \quad (23)$$

тогда на пространстве полиномов от переменных A_X есть инвариантное скалярное произведение

$$\langle f(A), g(A) \rangle = f(A) \curvearrowright g(A)|_{A=0}. \quad (24)$$

В силу симметрии скалярного произведения можно также написать $\langle f(A), g(A) \rangle = g(A) \curvearrowright f(A)|_{A=0}$.

Заметим, что если представление V реализовано в пространстве полиномов от переменных A_X (т. е. V совпадает с каким-то множеством полиномов $\{h(A)\}$), то контраградиентное представление может быть реализовано³⁾ в пространстве полиномов от операторов $\frac{\partial}{\partial A_X}$. Действие $\mathfrak{gl}_n$ на дифференциальные операторы порождает действие на пространстве функций от переменных A_X . Таким образом, $\bar{V} = \{h(\frac{\partial}{\partial A_X}) : h(A) \in V\}$. При этом спаривание (которое также обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$) задается формулой типа (24):

$$\left\langle h_1(A), h_2\left(\frac{\partial}{\partial A_X}\right) \right\rangle = h_2\left(\frac{\partial}{\partial A_X}\right) h_1(A) \Big|_{A=0}. \quad (25)$$

3.2. Семиинварианты в А-ГКЗ реализации. Пусть $f(a, b, c)$ — построенный семиинвариант в $V \otimes W \otimes U$. В А-ГКЗ реализации можно рассмотреть многочлены $f(A, B, C)$, где символы a, b, c заменяются на A, B, C . Однако данные многочлены скорее всего не будут лежать в $V \otimes W \otimes U$ в данной реализации.

Но функциональная и А-ГКЗ реализации суть две реализации одного и того же представления (в интересующем нас случае — тройного тензорного произведения неприводимых представлений). Пусть векторам $f(a, b, c)$ функциональной реализации соответствуют векторы $F(A, B, C)$ в А-ГКЗ реализации. Так

³⁾ По крайней мере с точностью до умножения на представления старшего веса $[m, \dots, m]$.

как А-ГКЗ реализация переходит в функциональную при наложении соотношений Плюккера, будет верно соотношение

$$F(A, B, C) = f(A, B, C) + \sum_{\beta} \text{pl}_{\beta}^A f_{\beta}^1 + \text{pl}_{\beta}^B f_{\beta}^2 + \text{pl}_{\beta}^C f_{\beta}^3, \quad (26)$$

где $\text{pl}_{\beta}^A, \text{pl}_{\beta}^B, \text{pl}_{\beta}^C$ — базисные соотношения Плюккера для переменных A_X, B_X, C_X , а $f_{\beta}^1, f_{\beta}^2, f_{\beta}^3$ — некоторые многочлены от переменных A, B, C .

Из этого можно сделать такое наблюдение:

$$\langle F(A, B, C), F_{\mu}(A)F_{\nu}(B)F_{\nu}(C) \rangle = \langle f(A, B, C), F_{\mu}(A)F_{\nu}(B)F_{\nu}(C) \rangle. \quad (27)$$

где $F_{\mu}(A), F_{\nu}(B), F_{\nu}(C)$ являются решениями системы А-ГКЗ.

3.3. Переменные Z , числа z_{α} . Рассмотрим семиинвариант (18) и запишем его в виде функции от определителей

$$\sum_{\alpha} z_{\alpha} a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}, \quad (28)$$

где α — некоторый индекс, перечисляющий слагаемые при явной записи (20), а z_{α} — числовой коэффициент. При этом $a^{p_{\alpha}}, \dots$ понимается в смысле мультииндексного обозначения, т. е. $a^{p_{\alpha}} = \prod_X a_X^{p_{\alpha, X}}$.

Введем переменные, соответствующие отдельным слагаемым в получившейся сумме. Для них есть естественное обозначение $Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}]$. Совокупность построенных переменных (для всех возможных семиинвариантов (18)) обозначим через Z :

$$Z = \{Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}], \dots\}. \quad (29)$$

ПРИМЕР 5. Если рассматривать функцию f вида (21), то набор переменных Z имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Z = \{ & [a_{1,2,3} b_{2,1} c_{2,3,4}], [a_{1,2,3} b_{4,3} c_{4,1,2}], [a_{1,2,3} b_{4,2} c_{2,4,1}], [a_{4,1,2} b_{3,1} c_{2,3,4}], \\ & [a_{4,1,2} b_{3,4} c_{1,2,3}], [a_{4,1,2} b_{3,2} c_{3,4,1}], [a_{3,4,1} b_{2,1} c_{2,3,4}], \\ & [a_{3,4,1} b_{2,4} c_{1,2,3}], [a_{3,4,1} b_{2,3} c_{4,1,2}]\}. \end{aligned}$$

Коэффициенты z_{α} равны числам ± 1 , стоящим перед соответствующими слагаемыми в (21).

Заметим, что имеется естественное отображение

$$Z_{\alpha} = [a^{p_{\alpha}} b^{q_{\alpha}} c^{r_{\alpha}}] \mapsto z_{\alpha} \in \mathbb{C}. \quad (30)$$

Можно считать, что f вида (20) есть полином от переменных из набора Z .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Назовем *носителем функции, разложенной в степенной ряд*, множество показателей, входящих в разложение мономов. Обозначать носитель будем через $\text{supp } f$.

Так как f имеет вид (20), справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Для носителя функции f как функции от переменных Z имеет место равенство

$$\text{supp } f = (\kappa + B) \cap (\text{неотрицательный октант}) \quad (31)$$

для некоторого постоянного вектора κ и некоторой решетки B .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сперва дадим конструкцию решетки B . Для этого возьмем отдельный сомножитель вида (18) в (20). При определении этого сомножителя фиксируется расстановка скобок (...), задающих наложение антисимметризаторов на нижние индексы. В нижние индексы, входящие в одну скобку, можно произвольно подставить числа $1, \dots, n$. При фиксации подстановки в каждую из скобок получаем фактически переменную Z_α . С каждой такой переменной связан единичный вектор e_{Z_α} в пространстве показателей мономов от переменных Z . Возьмем векторы $e_{Z_\alpha} - e_{Z_\beta}$ для всех возможных пар переменных Z_α, Z_β , возникающих из одного сомножителя вида (18). Возьмем так построенные векторы по всем возможным сомножителям вида (18). Решетка B порождается всеми полученными так разностями.

Вектор κ определяется как показатель монома от переменных Z , который получается, если во всех множителях (18) зафиксировать в каждой из скобок определенную расстановку $1, \dots, n$. Тогда каждый множитель (18) превращается в произведение переменных z_α и κ — его вектор показателей.

По построению $\text{supp } f \subset (\kappa + B) \cap (\text{неотрицательный октант})$. Остается доказать совпадение этих множеств.

По построению векторы $b \in B$ — это сдвиги вектора показателей при изменении расстановки $1, \dots, n$ внутри скобок (...) при построении множителя вида (18). Но (...) — антисимметризация по *всем* возможным расстановкам $1, \dots, n$. Отсюда следует, что произвольные сдвиги из начального вектора, если только эти сдвиги представляют собой векторы с неотрицательными координатами, суть векторы показателей из $\text{supp } f$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решетка B в (31) фактически определяется только набором переменных Z . А по функции f строится начальный вектор κ в (31).

Заметим, что имеется отображение

$$[a^{p_\alpha} b^{q_\alpha} c^{r_\alpha}] \mapsto A^{p_\alpha} B^{q_\alpha} C^{r_\alpha}$$

из пространства полиномов от переменных Z в пространство полиномов от переменных A, B, C . Обозначим через $\text{pr}_A, \text{pr}_B, \text{pr}_C$ получающееся отображение из пространства показателей полиномов от переменных Z в пространства показателей полиномов от переменных A, B, C соответственно.

4. $6j$ -Символы

Вычислим произвольный $6j$ -символ для алгебры для $\mathfrak{gl}_n$. Будем следовать схеме, по которой $6j$ -символы для алгебры $\mathfrak{gl}_3$ были вычислены в [6]. Наши рассуждения дословно повторяют рассуждения из этой работы до момента построения функции (40). Однако далее, в формулировке основной теоремы 6, есть существенное отличие от аналогичной теоремы в [6]. В [6] при явной записи базисных семиинвариантов в виде многочленов от определителей коэффициенты при мономах были ± 1 . Соответственно в [6] в функцию (40) в теореме, аналогичной теореме 6, подставляются ± 1 . Для семиинвариантов же, рассматриваемых в настоящей работе, эти коэффициенты могут принимать и другие значения z_α . Соответственно в функцию (40) в теореме 6 подставляются эти другие значения. Это приводит к некоторому отличию итоговой формулы для $6j$ -символа, полученной в настоящей работе, от аналогичной формулы в [6] для случая $\mathfrak{gl}_3$.

4.1. Выражение через спаривание.

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{f_1, f_2} = f_1 \left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4 \right) f_2 \left(\frac{\partial}{\partial A^4}, \frac{\partial}{\partial A^3}, A^5 \right) \\ \times f_3 \left(\frac{\partial}{\partial A^2}, A^3, \frac{\partial}{\partial A^6} \right) f_4 \left(A^1, A^6, \frac{\partial}{\partial A^5} \right) \Big|_{A^1=\dots=A^6=0}. \quad (32)$$

Здесь A^i , $i = 1, \dots, 6$, — это шесть экземпляров наборов независимых переменных A_X^i , занумерованных собственными подмножествами $X \subset \{1, \dots, n\}$, антисимметричными по перестановкам X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся формулой (17). Нам необходимо вычислить $3j$ -символ для контраградиентного представления и двойственного базиса в нем. Реализуем контраградиентное представление так, как это описано в конце п. 3.1. Возьмем некоторый ортогональный базис $F_{\alpha_i}(A^i)$. Тогда базис, двойственный к $F_{\alpha_i}(A^i)$, есть $\frac{1}{|F_{\alpha_i}|^2} F_{\alpha_i}(\frac{\partial}{\partial A^i})$.

Заметим, что $3j$ -символ вида

$$\left(\begin{array}{ccc} \bar{V}^1 & \bar{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{array} \right)^f$$

может быть вычислен так:

$$\left(\begin{array}{ccc} \bar{V}^1 & \bar{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{array} \right)^f = \frac{\langle f(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4), F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) F_{\alpha_4}(A^4) \rangle}{|F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1})|^2 |F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2})|^2 |F_{\alpha_4}(A^4)|^2}. \quad (33)$$

Скалярное произведение в случае, когда представление реализовано в пространстве дифференциальных операторов, вычисляется по формуле, аналогичной (24). Имеем

$$\left\langle f \left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4 \right), F_{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial A^1} \right) F_{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial A^2} \right) F_{\alpha_4}(A^4) \right\rangle \\ = \langle f(A^1, A^2, A^4), F_{\alpha_1}(A^1) F_{\alpha_2}(A^2) F_{\alpha_4}(A^4) \rangle, \\ |F_{\alpha_1}(A^1)|^2 = \left| F_{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial A^1} \right) \right|^2, \dots \quad (34)$$

Базисы $F_{\alpha_1}(A^1)$ и $F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1})$ и т. д. не двойственны. Базис, двойственный к $F_{\alpha_1}(A^1)$, есть $\frac{1}{|F_{\alpha_1}|^2} F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1})$, так что $6j$ -символ выражается через $3j$ -символы (33) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} V^1 & V^2 & U \\ V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_3, f_4}^{f_1, f_2} := \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_6} \left(\begin{array}{ccc} \bar{V}^1 & \bar{V}^2 & U \\ F_{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial A^1}) & F_{\alpha_2}(\frac{\partial}{\partial A^2}) & F_{\alpha_4}(A^4) \end{array} \right)^{f_1} \\ \times \left(\begin{array}{ccc} \bar{U} & \bar{V}^3 & W \\ F_{\alpha_4}(\frac{\partial}{\partial A^4}) & F_{\alpha_3}(\frac{\partial}{\partial A^3}) & F_{\alpha_5}(A^5) \end{array} \right)^{f_2} \cdot \left(\begin{array}{ccc} V^2 & V^3 & \bar{H} \\ F_{\alpha_2}(A^2) & F_{\alpha_3}(A^3) & F_{\alpha_6}(\frac{\partial}{\partial A^6}) \end{array} \right)^{f_3} \\ \times \left(\begin{array}{ccc} V^1 & H & \bar{W} \\ F_{\alpha_1}(A^1) & F_{\alpha_6}(A^6) & F_{\alpha_5}(\frac{\partial}{\partial A^5}) \end{array} \right)^{f_4} \cdot |F_{\alpha_1}|^2 \cdot \dots \cdot |F_{\alpha_6}|^2. \quad (35)$$

Подставим выражения (33) в (35). Рассмотрим (34). В то же время выражения $|F_{\alpha_i}|^2$, возникающие на конце (17), записываются как $F_{\alpha_i}(\frac{\partial}{\partial A^i})F_{\alpha_i}(A^i)|_{A=0}$. Получаем

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{ccc} B & V^1 & V^2 & U \\ & V^3 & W & H \end{array} \right\}_{f_1, f_2}^{f_3, f_4} \\ &= \sum_{\alpha_1, \dots, \alpha_6} \frac{\langle f_1, F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} F_{\alpha_4} \rangle}{|F_{\alpha_1}|^2 |F_{\alpha_2}|^2 |F_{\alpha_4}|^2} F_{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial A^1} \right) F_{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial A^2} \right) F_{\alpha_4}(A^4) \\ & \times \frac{\langle f_2, F_{\alpha_4} F_{\alpha_3} F_{\alpha_5} \rangle}{|F_{\alpha_4}|^2 |F_{\alpha_3}|^2 |F_{\alpha_5}|^2} F_{\alpha_4} \left(\frac{\partial}{\partial A^4} \right) F_{\alpha_3} \left(\frac{\partial}{\partial A^3} \right) F_{\alpha_5}(A^5) \dots \Big|_{A_1=\dots=A_6=0}. \end{aligned}$$

Теперь напомним

$$f_1 \left(\frac{\partial}{\partial A^1}, \frac{\partial}{\partial A^2}, A^4 \right) = \sum \frac{\langle f_1, F_{\alpha_1} F_{\alpha_2} F_{\alpha_4} \rangle}{|F_{\alpha_1}|^2 |F_{\alpha_2}|^2 |F_{\alpha_4}|^2} F_{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial A^1} \right) F_{\alpha_2} \left(\frac{\partial}{\partial A^2} \right) F_{\alpha_4}(A^4),$$

и аналогичное выражение имеется для $f_2(\frac{\partial}{\partial A^4}, \frac{\partial}{\partial A^5}, A^5)$, $f_3(\frac{\partial}{\partial A^2}, A^3, \frac{\partial}{\partial A^6})$, $f_4(A^1, A^6, \frac{\partial}{\partial A^5})$.

Используя, что $\langle F_{\alpha_i}(A^i), F_{\alpha'_i}(\frac{\partial}{\partial A^i}) \rangle = |F_{\alpha_i}|^2$, если $\alpha_i = \alpha'_i$, и 0 иначе, получаем утверждение леммы. $\square$

4.2. Правила отбора, решетка D . В формуле (32) для $6j$ -символа участвуют функции f_1, f_2, f_3, f_4 . В данном разделе в каждое f_i вместо дифференциальных операторов подставляем соответствующую переменную. Далее функции f_i можно рассматривать двумя способами.

Во-первых, в п. 3.3 был введен набор переменных Z и функция f вида (20) была рассмотрена как функция этих переменных. Будем считать, что каждая функция f_i зависит от своего набора переменных $Z^i = \{Z_\alpha^i\}$, $i = 1, \dots, 4$. В этом случае носитель f_i лежит в некотором пространстве $\mathbb{Z}^M$ (где M — число переменных в наборе Z^i).

Во вторых, f_i можно рассмотреть как функцию от переменных A^j (набор индексов j переменных A , имеющих отношение к f_i , определяется по формуле (32)). Необходимо иногда различать одинаковые переменные A^j , входящие в разные f_i , так что введем обозначение $A_{X,i}^j$ для переменной A_X^j , входящей в f_i . При таком подходе носитель f_i лежит в некотором пространстве $\mathbb{Z}^m$ (при этом $m = 3(2^n - 2)$). Также имеется пространство $\bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}^m$ показателей мономов уже от всех (а не только участвующих в определенном f_i) переменных $A_{X,i}^j$. В $\bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}^m$ естественно ввести базисные векторы $e^{A_{X,i}^j}$.

Имеются порожденные естественными подстановками переменных A^j вместо Z^i проекции $\text{pr}^i : \mathbb{Z}^M \rightarrow \mathbb{Z}^m$ из пространства показателей мономов от переменных Z^i в пространство показателей мономов от соответствующих переменных $A_{X,i}^j$. Кроме того, пусть

$$\text{pr} := \bigoplus_{i=1}^4 \text{pr}^i : \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}^M \rightarrow \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}^m. \quad (36)$$

Ранее было замечено, что если рассматривать f_i как функцию от переменных Z^i , то для ее носителя $\text{supp}_{Z^i} f_i \subset \mathbb{Z}^M$ имеет место формула

$$\text{supp}_{Z^i} f_i = \mathbb{Z}_{\geq 0}^M \cap (\kappa_i + B). \quad (37)$$

Введем обозначение

$$H := \text{supp}_{Z^1} f_1 \oplus \text{supp}_{Z^2} f_2 \oplus \text{supp}_{Z^3} f_3 \oplus \text{supp}_{Z^4} f_4.$$

Тогда H есть пересечение неотрицательного октанта и сдвинутой решетки $(\kappa_1 \oplus \kappa_2 \oplus \kappa_3 \oplus \kappa_4) + B \oplus B \oplus B \oplus B$. Также видно, что H есть носитель функции $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$ как функции от $Z^1, \dots, Z^4$.

Введем решетку D .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. В соответствии с аргументами, подставляемыми⁴⁾ в f_i в (32), определим подрешетку $D \subset \bigoplus_{i=1}^4 \mathbb{Z}^m$ как решетку, порожденную для всех возможных $X \subset \{1, \dots, n\}$ векторами, которые получаются как суммы единичных векторов $e^{A_{X,i}^j}$, отвечающих двум координатам с одинаковыми X , одинаковым переменным A_X^j , но разным i .

Таким образом, решетка D порождается векторами вида

$$\begin{aligned} e^{A_{X,1}^1} + e^{A_{X,4}^1}, & \quad e^{A_{X,1}^2} + e^{A_{X,3}^2}, & \quad e^{A_{X,2}^3} + e^{A_{X,4}^3}, \\ e^{A_{X,1}^4} + e^{A_{X,2}^4}, & \quad e^{A_{X,2}^5} + e^{A_{X,4}^5}, & \quad e^{A_{X,3}^6} + e^{A_{X,4}^6}. \end{aligned}$$

Пусть имеется моном, получающийся при разложении (32). Он дает ненулевой вклад, если в нем для каждой переменной A_X^j , $j = 1, \dots, 6$, порядок дифференцирования по A_X^j совпадает со степенью переменной A_X^j . Условие того, что такие мономы существуют, переформулированное в терминах носителей функций от переменных $Z^1, \dots, Z^4$, дает следующий результат.

Теорема 5. Для того чтобы $6j$ -символ (32) был ненулевой, необходимо, чтобы

$$H \cap \text{pr}^{-1}(D) \neq \emptyset,$$

4.3. Формула для $6j$ -символа. Приступим к вычислению выражения (32). Вычисление можно описать так.

Сначала рассматриваем $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$ как функцию от набора переменных $Z^1, \dots, Z^4$. Раскладываем $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$ в сумму произведений мономов от данных переменных. Заметим, что теперь имеется набор коэффициентов z_α^i , $i = 1, \dots, 4$. Оставляем лишь слагаемые, лежащие в $H \cap \text{pr}^{-1}(D) \neq \emptyset$. Далее с каждой из переменных из набора $Z^1, \dots, Z^4$ проделываем замену на переменные A_X^j или $\frac{\partial}{\partial A_X^j}$ в соответствии с тем, переменная или дифференциальный оператор участвует в f_i в (32). Перемножаем их так, как если бы они коммутировали. После в получившемся мономе от A_X^j или $\frac{\partial}{\partial A_X^j}$ применяем дифференциальные операторы к переменным и подставляем вместо переменных нуль.

Если сосредоточить внимание, например, на возникающей в мономе переменной A_1^1 (т. е. $X = \{1\}$), то наши действия выглядят так. Такой символ встречается в обозначении переменных, входящих в наборы Z^1 и Z^4 . Берем моном, получающийся при разложении $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$. Пусть его носитель лежит в $H \cap \text{pr}^{-1}(D)$. Запишем его явно вместе с коэффициентом при этом мономе. Этот коэффициент есть произведение обратных величин к факториалам степеней, происходящих из выражения (20), вместе с числовым коэффициентом типа

⁴⁾Напомним, что в данном разделе дополнительно в каждое f_i вместо дифференциальных операторов подставляется соответствующая переменная.

z_α , стоящим при каждой из переменных их наборов $Z^1, \dots, Z^4$ и происходящим из разложения (24) отдельных сомножителей в (20). В итоге моном вместе со своим числовым множителем выглядит так:

$$\underbrace{\frac{(z_{\alpha_1}^1 [A_1^1 \dots])^{\beta_1}}{\beta_1!} \frac{(z_{\alpha_2}^1 [A_1^1 \dots])^{\beta_2}}{\beta_2!} \dots}_{\text{из } f_1} \dots \underbrace{\frac{(z_{\delta_1}^4 [A_1^1 \dots])^{\gamma_1}}{\gamma_1!} \frac{(z_{\delta_2}^4 [A_1^1 \dots])^{\gamma_2}}{\gamma_2!} \dots}_{\text{из } f_4} \quad (38)$$

Далее вычисляем сумму показателей переменных, в обозначении которых есть A_1^1 . Для множителей, происходящих из f_1 , эта сумма равна $\beta_1 + \beta_2 + \dots$, а для множителей, происходящих из f_4 , эта сумма равна $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots$. Тот факт, что носители лежат в $H \cap \text{pr}^{-1}(D)$, влечет, что $\beta_1 + \beta_2 + \dots = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots$. При переходе к A_X^j или $\frac{\partial}{\partial A_X^j}$ в множителях, происходящих из f_1 , подставляется $\frac{\partial}{\partial A_1^1}$, а в множителях, происходящих из f_4 , подставляется A_1^1 . После применения дифференциального оператора к переменной A_1^1 и подстановки вместо A_1^1 нуля в (38) фактически происходит удаление всех символов A_1^1 и дописывается сверху числовой множитель $(\beta_1 + \beta_2 + \dots)! = \sqrt{(\beta_1 + \beta_2 + \dots)! (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots)!}$.

Заметим, что имеющийся множитель $\frac{1}{\beta_1! \beta_2! \dots \gamma_1! \gamma_2! \dots}$ есть факториал степени (в мультииндексном смысле) рассматриваемого монома как функции от переменных $Z^1, \dots, Z^4$. Возникающий множитель $\sqrt{(\beta_1 + \beta_2 + \dots)! (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots)!}$ есть корень квадратный факториала степени данного монома от переменных $A_{1,1}^1$ и $A_{1,4}^1$.

Итак, после выполнения аналогичных действий со всеми переменными A_X^j моном (38) превращается в числовую дробь. В ее знаменателе стоит факториал (в мультииндексном смысле) степени монома как монома от переменных $Z^1, \dots, Z^4$, а вверху — корень из факториала степени (опять в мультииндексном смысле) степени монома как монома от переменных A_X^j . Также полученное выражение должно быть умножено на $(z_{\alpha_1}^1)^{\beta_1} \cdot (z_{\alpha_2}^1)^{\beta_2} \cdot \dots$.

Приведем теперь формулу для $6j$ -символа. Множество $H \cap \text{pr}^{-1}(D)$ является сдвинутой решеткой в пространстве показателей монома от переменных $Z^1, \dots, Z^4$. Следовательно, для некоторого вектора $\varkappa$ и решетки $L \subset (\mathbb{Z}^M)^{\oplus 4}$ можно записать

$$H \cap \text{pr}^{-1}(D) = \varkappa + L \subset (\mathbb{Z}^M)^{\oplus 4}. \quad (39)$$

Имеется проекция pr , определяемая формулой (36). Свяжем со сдвинутой решеткой $\varkappa + L$ ряд гипергеометрического типа (на самом деле являющийся конечной суммой) от переменных $\mathcal{Z} = \{Z^1, \dots, Z^4\}$, определяемый формулой

$$\mathcal{J}_\gamma(\mathcal{Z}; L) = \sum_{x \in \varkappa + L} \frac{\sqrt{\Gamma(\text{pr}(x) + 1)} \mathcal{Z}^x}{\Gamma(x + 1)}. \quad (40)$$

Теорема 6. $6j$ -Символ (32) равен $\mathcal{J}_\gamma(z; L)$, где вместо переменной из набора $\mathcal{Z} = \{Z^1, \dots, Z^4\}$ подставляются числа z_α по правилу (30).

4.4. Пример вычисления. Рассмотрим алгебры $\mathfrak{gl}_4$. Чтобы задать $6j$ -символ, зафиксируем сначала семиинварианты

$$f_1 = (abc), \quad f_2 = (abb), \quad f_3 = (bbc), \quad f_4 = (aac).$$

В выражении (32) для $6j$ -символа надо подставить вместо a_X, b_X, c_X переменные A_X^j или операторы $\frac{\partial}{\partial A_X^j}$, $j = 1, \dots, 6$. Тогда из (32) видно, что при данных

f_i можно получить ненулевой $6j$ -символ лишь при условии, что старшие веса представлений таковы:

$$\begin{aligned} V^1 &= [1, 1, 0, 0], & V^2 &= [1, 0, 0, 0], & V^3 &= [1, 1, 0, 0], \\ U &= [1, 0, 0, 0], & W &= [1, 0, 0, 0], & H &= [1, 0, 0, 0]. \end{aligned}$$

Итак, $6j$ -символ задан, найдем его значение.

Заметим, что можно уменьшить наборы переменных $Z^1, \dots, Z^4$, оставив в них только переменные, возникающие при разложении данных нам f_i .

Опишем сдвинутую решетку $H \cap \text{rg}^{-1}(D)$. Возьмем формулу (32) и рассмотрим сомножители $f_1, \dots, f_4$, стоящие справа. Для удобства так же, как и в начале п. 4.2, в f_i вместо дифференциальных операторов $\frac{\partial}{\partial A^j}$ подставим соответствующие переменные A^j (в отличие от п. 4.2 не вводим дополнительный индекс i).

Сдвинутую решетку H можно рассматривать как множество показателей мономов произведения $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$, где каждый сомножитель рассматривается как функция от переменных Z^1, Z^2, Z^3, Z^4 . Моном произведения $f_1 \cdot \dots \cdot f_4$ есть набор из четырех мономов, взятых из $f_1, \dots, f_4$ соответственно.

При взятии пересечения H с $\text{rg}^{-1}(D)$ оставляем лишь те четверки показателей мономов от переменных $Z^1, \dots, Z^4$, которые обладают следующим свойством: при переходе от переменных $Z^1, \dots, Z^4$ к переменным A_X^j получаем четверку показателей мономов от переменных A_X^j таких, что (ср. с (32)):

- 1) A_X^1 входит в одинаковой степени в первый и четвертый мономы,
- 2) A_X^2 входит в одинаковой степени в первый и третий мономы,
- 3) A_X^3 входит в одинаковой степени во второй и третий мономы,
- 4) A_X^4 входит в одинаковой степени в первый и второй мономы,
- 5) A_X^5 входит в одинаковой степени во второй и четвертый мономы,
- 6) A_X^6 входит в одинаковой степени в третий и четвертый мономы.

Несложно проверить, что эти условия влекут, что из $f_1, \dots, f_4$ нужно брать четверки мономов⁵⁾ вида

$$[A_{i,j}^1 A_k^2 A_l^4], \quad [A_l^4 A_{i,j}^3 A_k^5], \quad [A_k^2 A_{i,j}^3 A_l^6], \quad [A_{i,j}^1 A_l^6 A_k^5], \quad (41)$$

где (i, j, k, l) — перестановка $1, \dots, 4$. Таких четверок имеется $4!$ штук. Если перестановка $\sigma = (i, j, k, l)$ имеет знак $(-1)^\sigma$, то выписанные мономы входят в $f_1, \dots, f_4$ с коэффициентами

$$(-1)^\sigma, \quad -(-1)^\sigma, \quad (-1)^\sigma, \quad -(-1)^\sigma. \quad (42)$$

Эти числа суть не что иное как подставляемые в функцию в теореме 6 числа z_α .

Приступим к вычислению $\mathcal{J}_\gamma(z; L)$. Согласно предыдущим рассуждениям в (40) сумма ведется по произведениям четверок мономов вида (41). Найдем коэффициент при таком произведении. При рассмотрении $f_1, \dots, f_4$ как функций от переменных Z^1, Z^2, Z^3, Z^4 мономы (41) входят с показателем 1, так что для вектора показателей x данного монома как функции от переменных $Z^1, \dots, Z^4$ имеем $\Gamma(x+1) = 1$.

После применения проекции rg получаем моном от переменных $A_{X,i}^j$, в который все переменные входят с показателем 1, так что $\Gamma(\text{pr}(x)+1) = 1$.

Тем самым числовой коэффициент $\frac{\sqrt{\Gamma(\text{pr}(x)+1)}}{\Gamma(x+1)}$ при каждом произведении мономов (41) равен 1. Далее вместо мономов (41) подставляем (42), в результате получаем 1. Таким образом, получаем сумму единиц в количестве $4!$.

Итак, рассматриваемый $6j$ -символ равен $4!$.

⁵⁾ Это четверка мономов от переменных из наборов $Z^1, \dots, Z^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kumar S. Tensor product decomposition // Proc. Intern. Congress of Mathematicians. Hyderabad. India, 2010.
2. Knutson A., Tao T. The honeycomb model of $GL_n(C)$ tensor products I: Proof of the saturation conjecture // J. Am. Math. Soc. 1999. V. 12, N 4. P. 1055–1090.
3. Manon C., Zhou Z. Semigroups of $sl_2(C)$ tensor product invariants // J. Algebra. 2014. V. 400. P. 94–104.
4. Кириллов А. Н., Решетихин Н. Ю. Формулы для кратностей вхождения неприводимых компонент в тензорное произведение представлений простых алгебр Ли // Зап. науч. сем. ПОМИ. Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. 13. СПб.: Наука, 1993. Т. 205. С. 30–37.
5. Артамонов Д. В. Формулы вычисления $3j$ -символов для представлений алгебры Ли $\mathfrak{gl}_3$ в базисе Гельфанда — Цетлина // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 717–735.
6. Артамонов Д. В. Классические $6j$ -символы конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{gl}_3$ // Теорет. и мат. физика. 2023. Т. 216, № 1. С. 3–19.
7. Артамонов Д. В. Коэффициенты Клебша — Гордана для $\mathfrak{gl}_3$ и гипергеометрические функции // Алгебра и анализ. 2021. Т. 33, № 1. С. 1–29.
8. Artamonov D. V. A functional realization of the Gelfand–Tsetlin base // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. V. 87, N 6. P. 3–34.
9. Слепцов А. В. Симметрии квантовых инвариантов узлов и квантовых $6j$ -символов: Дис. д-ра физ.-мат. наук. М.: Институт теоретической и экспериментальной физики имени А. И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», 2022.
10. Butler P., Wybourne B. Calculation of j and jm symbols for arbitrary compact groups. I. Methodology // Intern. J. Quantum Chemistry. 1976. V. 10, N 4. P. 581–598.
11. Hecht K. A simple class of $U(N)$ Racah coefficients and their application // Commun. Math. Phys. 1975. V. 41, N 2. P. 135–156.
12. Gustafson R. A Whipple's transformation for hypergeometric series in $U(N)$ and multivariable hypergeometric orthogonal polynomials // SIAM J. Math. Anal. 1987. V. 18, N 2. P. 495–530.
13. Wong M. On the multiplicity-free Wigner and Racah coefficients of $U(n)$ // J. Math. Phys. 1979. V. 20, N 12. P. 2391–2397.
14. Biedenharn L. C., Louck J. D. Canonical unit adjoint tensor operators in $U(n)$ // J. Math. Phys. 1970. V. 11, N 8. P. 2368–2411.
15. Biedenharn L. C., Louck J. D., Chacon E., Ciftan M. On the structure of the canonical tensor operators in the unitary groups. I. An extension of the pattern calculus rules and the canonical splitting in $U(3)$ // J. Math. Phys. 1972. V. 13, N 12. P. 1957–1984.
16. Steinberg R. A general Clebsch–Gordan theorem // Bull. Am. Math. Soc. 1961. V. 67, N 4. P. 406–407.
17. Koike K. On the decomposition of tensor products of the representations of the classical groups: By means of the universal characters // Adv. Math. 1989. V. 74, N 1. P. 5–86.
18. King R. C. Branching rules for classical Lie groups using tensor and spinor methods // J. Physics A: Mathematical and General. 1975. V. 8, N 4. P. 429–449.
19. Girardi G., Sciarrino A., Sorba P. Kronecker products for $SO(2p)$ representations // J. Physics A: Mathematical and General. 1982. V. 15, N 4. P. 1119.
20. Girardi G., Sciarrino A., Sorba P. Kronecker product of $Sp(2n)$ representations using generalised Young tableaux // J. Physics A: Mathematical and General. 1983. V. 16, N 12. P. 2609.
21. Alisauskas S. Integrals involving triplets of Jacobi and Gegenbauer polynomials and some $3j$ -symbols of $SO(n)$, $SU(n)$ and $Sp(4)$. 2005. 28 p. arXiv math-ph/0509035.
22. Klimyk A. U. Infinitesimal operators for representations of complex Lie groups and Clebsch–Gordan coefficients for compact groups // J. Physics A: Mathematical and General. 1982. V. 15, N 10. P. 3009.
23. Alisauskas S. $6j$ -symbols for symmetric representations of $SO(n)$ as the double series // J. Physics A: Mathematical and General. 2002. V. 35, N 48. P. 10229.
24. Alisauskas S. Some coupling and recoupling coefficients for symmetric representations of SO_n // J. Physics A: Mathematical and General. 1987. V. 20, N 1. P. 35.
25. Alisauskas S. Coupling coefficients of $SO(n)$ and integrals over triplets of Jacobi and Gegenbauer polynomials. 2002. 26 p. arXiv math-ph/0509035.
26. Junker G. Explicit evaluation of coupling coefficients for the most degenerate representations of $SO(n)$ // J. Physics A: Mathematical and General. 1993. V. 26, N 7. P. 1649.

-
27. *Hormess M., Junker G.* More on coupling coefficients for the most degenerate representations of $SO(n)$ // J. Physics A: Mathematical and General. 1999. V. 32, N 23. P. 4249.
 28. *Cvitanovic P., Kennedy A. D.* Spinors in negative dimensions // Physica Scripta. 1982. V. 26, N 1. P. 5–14.
 29. *Cerkaski M.* On a class of $6j$ coefficients with one multiplicity index for groups $SP(2N)$, $SO(2N)$, and $SO(2N + 1)$ // J. Math. Phys. 1987. V. 28, N 3. P. 612–617.
 30. *Judd B. R., Lister G. M. S., Suskin M. A.* Some $6j$ symbols for symplectic and orthogonal groups by Cerkaski's method // J. Physics A: Mathematical and General. 1990. V. 23, N 24. P. 5707.
 31. *Feger R., Kephart T. W.* LieART—A Mathematica application for Lie algebras and representation theory // Comput. Physics Commun. 2015. V. 192, N 24. P. 166–195.
 32. *Желобенко Д. П.* Компактные группы Ли и их представления. М.: МЦНМО, 2007.
 33. *Вейль Г.* Классические группы. Их инварианты и представления. М.: Изд-во иностр. лит., 1947.

Поступила в редакцию 28 декабря 2023 г.

После доработки 15 апреля 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Артамонов Дмитрий Вячеславович (ORCID 0000-0001-5921-1513)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,

3-й новый учебный корпус, экономический факультет, кафедра ММАЭ,

Ленинские горы, Москва 119991, ГСП-1

artamonovdv@my.msu.ru

УДК 517.954

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ
ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ
С ЭКВИВАРИАНТНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ
Ю. О. Беляева, В. П. Бурский

Аннотация. Рассматривается эквивариантная смешанная задача для волнового уравнения в цилиндре над шаром. Граничные условия в данной задаче инвариантны относительно группы поворотов. Рассматриваемая постановка является наиболее общей поворотно-инвариантной постановкой граничной задачи в шаре, а первая, вторая и третья краевые задачи являются ее частными случаями. В работе исследована разрешимость задачи. Доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи при определенных предположениях на граничные функции.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.402

Ключевые слова: эквивариантная задача, волновое уравнение, сферические функции.

1. Введение и постановка задачи

В работе рассматривается волновое уравнение

$$u_{tt} = \Delta u, \quad x \in B, \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

где $B = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1\}$, с начальными условиями

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x) \quad (2)$$

и граничным условием вида

$$u|_{\partial B} * \alpha + u_\nu|_{\partial B} * \beta = 0. \quad (3)$$

Здесь предполагается, что функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ принадлежат $L_2(\partial B)$ и

$$\alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \alpha_l^k Y_l^k, \quad \beta = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \beta_l^k Y_l^k$$

— их разложения в ряды Фурье по сферическим функциям Y_l^k . Пусть далее u_0 , u_1 — заданные функции, $u_0 \in H^1(B)$, $u_1 \in L_2(B)$. Символ $*$ обозначает свертку на ∂B , она может быть записана в виде $\psi * \alpha = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \psi_l^k \alpha_l^k Y_l^k$. Условие (3), как известно, обладает свойством инвариантности относительно группы поворотов шара: для любых $V \in SO(\mathbb{R}^n)$ выполняется $T_V(\alpha * u) = \alpha * T_V u$, где $T_V(f(x)) = f(Vx)$. Принадлежность функций α и β пространству $L_2(\partial B)$ не является ограничением общности. Более того, как будет видно из дальнейшего,

их можно считать бесконечно гладкими функциями, поскольку значение имеют не сами коэффициенты Фурье функций α , β , а их отношение.

Общей теории краевых задач посвящена монография [1], в которой краевые задачи с инвариантными краевыми условиями — одна из тем. Граничная задача с условиями вида (3) для оператора Лапласа в круге рассматривалась в [2] для уравнения Гельмгольца. В работе [3] рассматривалось стационарное уравнение Шредингера во внешности шара, исследован спектр и получены точные формулы для собственных функций задачи с условием вида (3). Разрешимость задачи для уравнения теплопроводности в круге была рассмотрена в [4]. В данной работе исследована разрешимость смешанной задачи (1)–(3). При определенных условиях на коэффициенты Фурье функций α и β доказаны существование и единственность обобщенного решения задачи в пространстве $H^1(\Omega)$, $\Omega = B \times (0, T)$.

2. Задача на собственные значения эллиптической задачи

Далее в работе предполагается, что выполняются следующие условия на коэффициенты α_l^k и β_l^k .

Условие 1. Будем предполагать, что коэффициенты α_l^k и β_l^k удовлетворяют условиям:

- (а) $(\alpha_l^k)^2 + (\beta_l^k)^2 \neq 0$, $l = 1, 2, \dots$, $k = -l, \dots, l$;
- (б) либо $\beta_0^0 = 0$, либо $\frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0$;
- (в) если $\beta_l^k \neq 0$, то для таких l, k выполняется условие $\frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \geq 0$.

Условия на коэффициенты задачи, записанные как условие 1, нужны для положительности оператора задачи (1)–(3), который будет введен ниже.

Условие 2. Будем предполагать, что коэффициенты α_l^k и β_l^k удовлетворяют условию: $\frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} \leq \gamma$, $\gamma > 0$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $k = -l, \dots, l$.

Необходимость введения этих условий связана с возможностью формального деления при работе с граничным условием (3), а также требованием невырожденности рассматриваемой задачи. Неотрицательность и ограниченность отношения коэффициентов $\frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k}$ будут гарантировать наличие эквивалентного скалярного произведения специального вида для случая вспомогательной эллиптической задачи, которая будет рассмотрена в этом разделе.

Рассмотрим вспомогательную задачу на собственные функции и собственные значения:

$$-\Delta V = \lambda V, \quad (4)$$

$$V|_{\partial B} * \alpha + \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} * \beta = 0. \quad (5)$$

Строго говоря, в равенствах (4), (5) функцию V следует понимать как принадлежащую соболевскому пространству $H^2(B)$.

Под собственными функциями оператора задачи будем понимать обобщенные собственные функции, определяемые ниже. Перед тем, как дадим строгое определение, определим пространство пробных функций, ассоциированных с граничной задачей вида (4), (5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Введем замкнутое подпространство $M \subset L_2(\partial B)$ такое, что $M := (\text{span}\{Y_l^k : \beta_l^k = 0\})^\perp$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Другими словами, множество M состоит из функций, имеющих нулевые коэффициенты Фурье в разложении по сферическим функциям с такими же индексами, с которыми в граничном условии (5) коэффициенты β_l^k равны нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Множество M является гильбертовым пространством как замкнутое подпространство в $L_2(\partial B)$ с индуцированным скалярным произведением.

Как известно, для любой функции $v(x) \in H^1(B)$ на границе ∂B определен ее след $v|_{\partial B}$ [5].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Введем $S(B) := \{v \in H^1(B) : v|_{\partial B} \in M\}$. Очевидно, $S(B)$ является замкнутым линейным подпространством в $H^1(B)$, тем самым является гильбертовым пространством.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пространство Соболева — Слободецкого $H^{1/2}(\partial B)$ следов функций из $H^1(B)$ можно рассматривать как фактор-пространство $H^1(B)/\overset{\circ}{H}^1(B)$ по подпространству функций с нулевым следом, и поэтому имеем право и будем понимать пространство следов $H^{1/2}(\partial B)$ как прямое слагаемое $\tilde{S}$ в разложении $H^1(B) = H_0^1(B) \oplus \tilde{S}$ со скалярным произведением, индуцированным из $H^1(B)$: $\|v\|_{\tilde{S}(B)}^2 = \|v\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla v\|_{L_2(B)}^2$. Теперь можно ввести пространство $S(B)$ как подпространство в $\tilde{S}$ функций v , для которых $v|_{\partial B} \in M^1 = M \cap H^1(B)$. В силу замкнутости пространства M_1 в $H^1(B)$ и непрерывности оператора проектирования пространство $S(B)$ гильбертово.

Запишем интегральное тождество, которое будет определять обобщенные собственные функции.

Считая, что $V \in H^2(B)$, умножим обе части равенства (4) на пробную функцию W и проинтегрируем по частям. Пусть $W \in S(B)$, тогда

$$\int_B \nabla V \nabla W \, dx - \int_{\partial B} \frac{\partial V}{\partial \nu} W \, d\sigma = \lambda \int_B V W \, dx.$$

С одной стороны,

$$\int_{\partial B} \frac{\partial V}{\partial \nu} W \, d\sigma = \left(\frac{\partial V}{\partial \nu}, W \right) \Big|_{L_2(\partial B)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k w_l^k,$$

где ω_l^k и w_l^k — коэффициенты разложения в ряд Фурье по сферическим функциям функций $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ и W на ∂B , т. е.

$$V|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l v_l^k Y_l^k, \quad \frac{\partial V}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k Y_l^k, \quad W|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l w_l^k Y_l^k.$$

С другой стороны, из граничного условия при $\beta_l^k \neq 0$ имеем

$$\omega_l^k = -v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k},$$

а при l, k таких, что $\beta_l^k = 0$, будет $w_l^k = 0$.

Таким образом,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k w_l^k = - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k.$$

Итак, приходим и интегральному тождеству вида

$$\int_B \nabla V \nabla W \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k = \lambda \int_B V W \, dx. \quad (6)$$

где $V, W \in S(B)$.

Последнее равенство при желании можно понимать как уравнение $LV = \lambda V$, где оператор L задан левой частью равенства (6) с областью определения $S(B)$ и действует в пространство $S'(B)$, сопряженное оснащенное пространство в смысле топологии $L_2(B)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Обобщенной собственной функцией задачи (4), (5), соответствующей собственному значению λ , будем называть функцию $V \in S(B)$, такую, что для любой функции $W \in S(B)$ выполнено (6).*

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Напомним, что в определениях решения обобщенной граничной задачи [6] вспомогательная функция $W(x)$ выбирается определенным образом. Если исходная задача — однородная задача Дирихле, то получается, что $\beta = 0$, $\alpha(x) = \delta(x)$, т. е. и все $\alpha_l^0 = 1$, и $\alpha_l^k = 0$ при $k \neq 0$. При этом основное пространство $S(B) = \dot{H}^1(B)$ и в интегральном тождестве (6) слагаемого с суммами не будет. Для однородной задачи Неймана получается, что $\alpha = 0$, $\beta(x) = \delta(x)$, т. е. и $\beta_l^0 = 1$, и $\beta_l^k = 0$ при $k \neq 0$. Здесь пространство M тривиально, пространство $S(B)$ совпадает $H^1(B)$ и в интегральном тождестве (6) слагаемого с суммами также не будет из-за тривиальности функции α .

Лемма 1. Пусть $V, W \in S(B)$, а α_l^k, β_l^k удовлетворяют условиям 1, 2. Билинейная форма

$$Q(V, W) = \int_B \nabla V \nabla W \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k w_l^k$$

задает эквивалентное скалярное произведение в $H^1(B)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что

$$(W, W)'_{H^1(B)} \geq C_1 (W, W)_{H^1(B)},$$

где $(W, W)'_{H^1(B)} = Q(W, W)$, $W \in S(B)$. Предположим, что такой константы C_1 не существует. Тогда для любого целого $m \geq 1$ найдется такая функция $f_m(x) \in S(B)$, что

$$\|f_m\|_{H^1(Q)}^2 > m Q(f_m, f_m).$$

Разделив на норму, получим, что найдется функция $g_m(x) \in S(B)$ такая, что

$$\|g_m\|_{H^1(Q)}^2 = 1$$

и

$$Q(g_m, g_m) = \int_B |\nabla g_m|^2 \, dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_{m,l}^k|^2 < \frac{1}{m}. \quad (7)$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\int_B |\nabla g_m|^2 dx < \frac{1}{m}, \quad (8)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_{m,l}^k|^2 < \frac{1}{m}. \quad (9)$$

Так как $\|g_m\|_{H^1(B)}^2 = 1$, последовательность $g_m(x)$ ограничена в $H_1(B)$. В силу компактности вложения $H^1(B) \subset L_2(B)$ из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, фундаментальную в $L_2(B)$.

Обозначим ее снова через $g_m(x)$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \|g_m - g_p\|_{H^1(B)}^2 &= \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + \|\nabla(g_m - g_p)\|_{L_2(B)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + 2\|\nabla g_m\|_{L_2(B)}^2 + 2\|\nabla g_p\|_{L_2(B)}^2 \\ &\leq \|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 + \frac{2}{m} + \frac{2}{p}. \end{aligned}$$

Последовательность фундаментальна, а значит, $\|g_m - g_p\|_{L_2(B)}^2 \rightarrow 0$. Переходя к пределу при $m, p \rightarrow \infty$, получим, что и $\|g_m - g_p\|_{H^1(B)}^2 \rightarrow 0$, т. е. последовательность фундаментальна в $H^1(B)$. Тогда она сходится к некоторой функции $g(x)$ в $H^1(B)$. Так как $S(B)$ замкнуто в $H^1(B)$, то $g(x) \in S(B)$.

Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ в (8), (9), получим, что

$$\|g\|_{H^1(B)}^2 = 1; \quad (a)$$

$$\int_B |\nabla g|^2 dx = 0, \quad (b)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_l^k|^2 = 0. \quad (c)$$

Из условий (a) и (b) вытекает, что $g = \frac{1}{|B|} \neq 0$. Согласно условию 2 возможны два варианта: $\frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0$ или $\beta_0^0 = 0$. Если $\frac{\alpha_0^0}{\beta_0^0} > 0$, то получаем противоречие с (c). Если же $\beta_0^0 = 0$, то $g_0^0 = 0$ (так как $g(x) \in S(B)$). Но уже известно, что функция g тождественно равна ненулевой константе, а значит, и g_0^0 должен быть отличен от нуля. Получили противоречие. Таким образом, $(W, W)'_{H^1(B)} \geq C_1(W, W)_{H^1(B)}$.

Оценка $(W, W)'_{H^1(B)} \leq C_2(W, W)_{H^1(B)}$ справедлива в силу неравенства

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} |g_l^k|^2 \leq \gamma \sum_{k=-l}^l |g_l^k|^2 = \gamma \|g\|_{L_2(\partial B)}^2 \leq c_4 \|g\|_{H^1(B)}^2. \quad \square$$

Теперь можно записать вспомогательную задачу (4), (5) в виде

$$(V, W)'_{H^1(B)} = \lambda(V, W)_{L_2(B)}, \quad (10)$$

где $V, W \in S(B)$. Тогда

$$|(V, W)_{L_2(B)}| \leq \|V\|_{L_2(B)} \|W\|_{L_2(B)} \leq c_1 \|V\|_{L_2(B)} \|W\|_{H^1(B)} \quad (11)$$

$$\leq c_2 \|V\|_{L_2(B)} \|W\|'_{H^1(B)}, \quad (12)$$

т. е. $(V, W)_{L_2(B)}$ — непрерывный антилинейный функционал относительно функции $W \in S(B)$. Это, во-первых, означает, что введенные выше обобщенные собственные функции являются собственными функциями в обычном смысле для оператора $\Delta : H^1(B) \rightarrow H^{-1}(B)$, действующего в оснащенных пространствах [7]. А во-вторых, позволяет применить теорему Рисса, согласно которой существует единственная функция $\mathbb{V} \in S(B)$ такая, что

$$(V, W)_{L_2(B)} = (\mathbb{V}, W)'_{H^1(B)}$$

для всех функций $W \in S(B)$.

Поскольку $\|\mathbb{V}\|_{H^1(B)} \leq c_3 \|V\|_{L_2(B)}$, отображение $V \rightarrow \mathbb{V}$ является ограниченным оператором из $L_2(B)$ в $S(B)$. Обозначим его через A . Таким образом, рассматриваемая вспомогательная задача примет вид уравнения:

$$(V, W)'_{H^1(B)} = \lambda(AV, W)'_{H^1(B)}. \quad (13)$$

Так как $S(B)$ — замкнутое подмножество $H^1(B)$, а пространство $H^1(B)$ компактно вложено в $L_2(B)$, то оператор A , действующий уже из $S(B)$ в $S(B)$, компактен. Можно показать, что оператор A самосопряженный. Действительно, это вытекает из следующих равенств:

$$(AV, W)'_{H^1(B)} = (V, W)_{L_2(B)} = \overline{(W, V)}_{L_2(B)} = \overline{(AW, V)}'_{H^1(B)} = (V, AW)'_{H^1(B)} \quad (14)$$

при $V, W \in S(B)$. Оператор A положительный, так как

$$(AW, W)'_{H^1(B)} = \|W\|_{L_2(B)}^2 > 0 \text{ для } W \neq 0.$$

Итак, сужение оператора A на $S(B)$ является положительным компактным оператором в $S(B)$.

Запишем вспомогательную задачу (13) в виде

$$AV = \frac{1}{\lambda} V, \quad (15)$$

где A — положительный компактный оператор, действующий из $S(B)$ в $S(B)$. По теореме Гильберта — Шмидта получим, что существует ортонормированный базис в $S(B)$, состоящий из собственных функций $\frac{V_m}{\sqrt{\lambda_m}}$ оператора A . Здесь собственные значения λ_m являются вещественными, положительными, изолированными, имеют конечную кратность и $\lambda_m \rightarrow +\infty$ при $m \rightarrow +\infty$. Сами функции V_m образуют ортонормированный базис в $L_2(B)$.

Теорема 1. Обобщенные собственные функции задачи (4), (5) образуют ортонормированный базис пространства $S(B)$ со скалярным произведением $(V, W)'$ и образуют ортонормированный базис пространства $L_2(B)$ с обычным скалярным произведением.

3. Волновое уравнение

Вернемся к исходной задаче (1)–(3).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Введем гильбертово пространство $G(\Omega)$ следующим образом:

$$G(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial B \times (0, T)} \in L_2((0, T), M)\}.$$

Норма в $G(\Omega)$ задается аналогично норме в $H^1(\Omega)$. Здесь $L_2((0, T), M)$ — замкнутое подпространство в $L_2(\Gamma)$, где $\Gamma = (0, T) \times \partial B$, состоящее из функций, принимающих для почти всех $t \in (0, T)$ значения в M , с нормой

$$\|u\|_{L_2((0, T), M)}^2 = \int_0^T \|u\|_{L_2(\partial B)}^2 dt.$$

Пусть $v \in G(\Omega)$ и $v|_{t=T} = 0$. Умножив уравнение (1) на пробную функцию $v(x, t)$ и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_{B_T} u_t v|_{t=T} dx - \int_{B_0} u_t v|_{t=0} dx - \int_{\Omega} u_t v_t dx dt = \int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dt. \quad (16)$$

Так как $v|_{t=T} = 0$ и $u'_t|_{t=0} = u_1(x)$, имеем

$$- \int_{B_0} u_1 v dx - \int_{\Omega} u_t v_t dx dt = \int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx dt. \quad (17)$$

Пусть для функций $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ и v допустимо разложение в ряд Фурье по сферическим функциям на ∂B и при почти всех $t \in (0, T)$

$$v(x, t)|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l v_l^k(t) Y_l^k(x), \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} \Big|_{\partial B} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k(t) Y_l^k(x).$$

Из граничного условия имеем равенство

$$\omega_l^k = -u_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k}$$

при $\beta_l^k \neq 0$, а если l, k такие, что $\beta_l^k = 0$, то $u_l^k = 0$, так как $u \in G(\Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\partial B \times [0, T]} \frac{\partial u}{\partial \nu} v dS dt = \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \omega_l^k v_l^k dt = - \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k v_l^k dt.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $u_0(x) \in H^1(B)$, $u_1(x) \in L_2(B)$. Функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ называется *обобщенным решением задачи (1)–(3)*, если для любой функции $v(x, t) \in G(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k(t) v_l^k(t) \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} dx. \quad (18)$$

Рассмотрим разложение функций $u_0(x)$, $u_1(x)$ в ряд Фурье по базису V_m . Получим равенства

$$u|_{t=0} = u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0,m} V_m, \quad u_t|_{t=0} = u_1 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{1,m} V_m.$$

Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде ряда

$$u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m(t) V_m(x). \quad (19)$$

Подставив этот ряд в волновое уравнение (1), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} (u_m''(t) V_m(x) - u_m(t) \Delta V_m(x)) = 0.$$

Так как V_m определяются из равенства $\Delta V_m(x) = -\lambda_m V_m(x)$, предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\sum_{m=1}^{\infty} (u_m''(t) V_m(x) + \lambda_m u_m(t) V_m(x)) = 0.$$

Отсюда вытекают уравнения для определения $u_m(t)$:

$$u_m''(t) + \lambda_m u_m(t) = 0.$$

В силу положительности λ_m

$$u_m(t) = C_m^1 \cos \sqrt{\lambda_m} t + C_m^2 \sin \sqrt{\lambda_m} t.$$

Запишем начальные условия для $u_m(t)$ в виде

$$u_m(0) = u_{0,m}, \quad u_m'(0) = u_{1,m}.$$

Определив C_m^1 и C_m^2 из начальных условий, получим

$$C_m^1 = u_{0,m}, \quad C_m^2 = \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}}.$$

Итак,

$$u_m(t) = u_{0,m} \cos \sqrt{\lambda_m} t + \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}} \sin \sqrt{\lambda_m} t.$$

Теорема 2. Пусть $u_0 \in H^1(B)$ и $u_1 \in L_2(B)$, тогда ряд (19) сходится в пространстве $G(\Omega)$ к обобщенному решению $u(x, t)$ задачи (1)–(3). Справедлива оценка

$$\|u\|_{G(\Omega)} \leq C_T (\|u_0\|_{H^1(B)} + \|u_1\|_{L_2(B)}).$$

Доказательство. Шаг 1. Пусть $u(x, t), v(x, t) \in G(\Omega)$, $V_m \in S(B)$. Проверим интегральное тождество для одного слагаемого $u_m(t) V_m(x)$ ряда (19):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt \\ &= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) - u_m'(t) V_m(x) v_t(x, t)) dx dt \\ & \quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l V_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) + u_m''(t) V_m(x) v(x, t)) dx dt \\
&\quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k V_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt + \int_{B_0} u_{1,m} V_m v|_{t=0} dx \\
&= \int_{\Omega} (u_m(t) \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) - \lambda_m u_m(t) V_m(x) v(x, t)) dx dt \\
&\quad + \int_0^T u_m(t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l V_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt + \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} dx.
\end{aligned}$$

Используя определение функций $V_m(x)$, а именно равенство

$$\begin{aligned}
&\int_0^T u_m(t) \int_B \nabla V_m(x) \nabla v(x, t) dx dt \\
&= - \int_0^T u_m(t) \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} V_l^k v_l^k dt + \lambda_m \int_0^T u_m(t) \int_B V_m(x) v(x, t) dx dt,
\end{aligned}$$

получим, что

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = \int_{B_0} u_1 v|_{t=0} dx,$$

т. е. интегральное тождество выполнено.

ШАГ 2. Так как задача линейна, выполнение интегрального тождества справедливо и для $\sum_{m=1}^N u_m(t) V_m(x)$.

ШАГ 3. Вспомним, что для всех $W \in S(B)$ справедливо

$$A(W, W)_{H^1(B)} \leq (W, W)'_{H^1(B)} \leq B(W, W)_{H^1(B)}.$$

Поэтому, рассмотрев теперь $w(x, t) \in G(\Omega)$, получим, что

$$\begin{aligned}
A \int_0^T (w(x, t), w(x, t))_{H^1(B)} dt &\leq \int_0^T (w(x, t), w(x, t))'_{H^1(B)} dt \\
&\leq B \int_0^T (w(x, t), w(x, t))_{H^1(B)} dt.
\end{aligned}$$

Отсюда вытекает эквивалентность скалярного произведения вида

$$\begin{aligned}
(v(x, t), w(x, t))'_{H^1(\Omega)} &= (\nabla v(x, t), \nabla w(x, t))_{L_2(\Omega)} + (v_t(x, t), w_t(x, t))_{L_2(\Omega)} \\
&\quad + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} v_l^k(t) w_l^k(t) dt
\end{aligned}$$

стандартному скалярному произведению в $H^1(\Omega)$.

Пусть $S_N(x, t) = \sum_{i=1}^N u_i(t) W_i(x)$. Тогда $S_N - S_M = \sum_{i=M+1}^N u_i(t) W_i(x)$. Рассмотрим норму этой разности в пространстве $H^1(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 &= \|\nabla(S_N - S_M)\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|(S_N - S_M)'_t\|_{L_2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt, \end{aligned}$$

здесь w_l^k — коэффициенты Фурье разложения $W_i(x)$ на ∂B по базису сферических функций Y_l^k . Итак,

$$\begin{aligned} \|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=M+1}^N u_i \nabla W_i \right)^2 dx dt + \int_{\Omega} \left(\sum_{i=M+1}^N u'_i W_i \right)^2 dx dt \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt \\ &\leq C \left(\int_{\Omega} \sum_{i=M+1}^N u_i^2 (\nabla W_i)^2 dx dt + \int_{\Omega} \sum_{i=M+1}^N (u'_i)^2 W_i^2 dx dt \right) \\ &\quad + \int_0^T \sum_{i=M+1}^N \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_i^2(t) (w_l^k)^2 dt. \end{aligned}$$

Вспоминаем, что

$$\int_B (\nabla W_i)^2 dx = \lambda \int_B W_i^2 dx - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (w_l^k)^2 dt.$$

Тогда

$$\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \leq C \sum_{i=M+1}^N \int_0^T (\lambda u_i^2 + (u'_i)^2) dt.$$

Ранее мы уже выразили явно коэффициенты u_m :

$$u_m(t) = u_{0,m} \cos \sqrt{\lambda_m} t + \frac{u_{1,m}}{\sqrt{\lambda_m}} \sin \sqrt{\lambda_m} t.$$

Отсюда вытекают следующие оценки:

$$u_m^2 \leq c_2 \left(u_{0,m}^2 + \frac{u_{1,m}^2}{\lambda_m} \right), \quad \lambda_m u_m^2 \leq c_2 (\lambda_m u_{0,m}^2 + u_{1,m}^2),$$

$$u'_m = -\sqrt{\lambda_m} u_{0,m} \sin \sqrt{\lambda_m} t + u_{1,m} \cos \sqrt{\lambda_m} t, \quad (u'_m)^2 \leq c_3 (\lambda_m u_{0,m}^2 + u_{1,m}^2).$$

Тогда

$$\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \leq C_4 \sum_{i=M+1}^N (\lambda_i u_{0,i}^2 + u_{1,i}^2),$$

где $C_4 = C(c_2 + c_3)T$.

Так как система функций W_m ортонормирована в $L_2(B)$, в силу равенства Парсеваля имеем

$$\|u_1\|_{L_2(B)}'^2 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{1,m}^2.$$

Подставляя $u_0 = \sum_{m=1}^{\infty} u_{0,m} W_m$ в равенства

$$(W, V)'_{H^1(B)} = \lambda(W, V)_{L_2(B)},$$

получаем, что

$$\|u_0\|_{H^1(B)}'^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m u_{0,m}^2.$$

Переходя к пределу при $M, N \rightarrow \infty$, получим, что $\|S_N - S_M\|_{H^1(\Omega)}'^2 \rightarrow 0$, т. е. S_N — фундаментальная последовательность. В силу полноты пространства $H^1(\Omega)$ ряд $u = \sum_{m=1}^{\infty} u_m W_m$ сходится в $H^1(\Omega)$. Пусть $M = 0$. Устремляя N к бесконечности, получим, что

$$\|u\|_{H^1(B)}'^2 \leq k_4 (\|u_0\|_{H^1(B)}'^2 + \|u_1\|_{L_2(B)}'^2).$$

Выполнив предельный переход в интегральном тождестве вида

$$\int_{\Omega} (\nabla S_N \nabla v - (S_N)_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{i=1}^N u_i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l (V_i)_l^k v_l^k \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = \int_{B_0} \sum_{i=1}^N u_{1,i} V_i v|_{t=0} dx,$$

получим, что функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ является обобщенным решением задачи (1)–(3). $\square$

ЕДИНСТВЕННОСТЬ. Для доказательства единственности решения задачи (1)–(3) достаточно показать, что соответствующая смешанная задача с нулевыми начальными условиями:

$$u_{tt} = \Delta u, \quad (20)$$

$$u|_{\partial B} * \alpha + u'_\nu|_{\partial B} * \beta = 0, \quad (21)$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$u'_t|_{t=0} = 0 \quad (23)$$

имеет только тривиальное решение. Функция $u(x, t) \in G(\Omega)$ будет обобщенным решением задачи (20)–(23), если для любой функции $v(x, t) \in G(\Omega)$ выполняется интегральное тождество

$$\int_{\Omega} (\nabla u \nabla v - u_t v_t) dx dt + \int_0^T \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l u_l^k(t) v_l^k(t) \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} dt = 0. \quad (24)$$

Зафиксируем параметр $\tau \in (0, T)$ и выберем пробную функцию $v(x, t) \in G(\Omega)$ следующим образом:

$$v(x, t) = \begin{cases} \int_t^\tau u(x, \xi) d\xi, & 0 < t < \tau, \\ 0, & \tau < t < T. \end{cases}$$

Тогда (24) примет вид

$$\begin{aligned} \int_B dx \int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \int_t^\tau \nabla u(x, \xi) d\xi + \int_B dx \int_B u_t(x, t) u(x, t) dt \\ + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} I_1 = \int_B dx \int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \int_t^\tau \nabla u(x, \xi) d\xi, \quad I_2 = \int_B dx \int_B u_t(x, t) u(x, t) dt, \\ I_3 = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно I_3 . По теореме Фубини получим, что

$$\begin{aligned} I_3 &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(t) dt \int_t^\tau v_l^k(\xi) d\xi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_0^\xi v_l^k(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_0^\tau v_l^k(t) dt - \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} u_l^k(\xi) d\xi \int_\xi^\tau v_l^k(t) dt \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt - I_3. \end{aligned}$$

Отсюда в силу условия 1

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt \geq 0.$$

Аналогично для I_1 будет справедливо

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx \geq 0.$$

Проинтегрировав по частям I_2 , получим

$$I_2 = \frac{1}{2} \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx \geq 0.$$

Итак, из (25) вытекает

$$\int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx + \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt = 0,$$

а значит,

$$\int_B \left(\int_0^\tau \nabla u(x, t) dt \right)^2 dx = 0, \quad \int_B (u|_{t=\tau})^2 dx = 0, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \int_0^\tau \frac{\alpha_l^k}{\beta_l^k} (u_l^k(t))^2 dt = 0. \quad (26)$$

Параметр $\tau \in (0, T)$ выбирается произвольно. Тогда из (26) следует, что u — нулевая функция в Ω . Итак, доказана

Теорема 3. Задача (1)–(3) имеет единственное обобщенное решение $u(x, t) \in G(\Omega)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурский В. П. Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. Киев: Наукова думка, 2002.
2. Бурский В. П. Об эквивариантных расширениях дифференциального оператора на примере оператора Лапласа в круге // Укр. мат. журн. 1999. Т. 51, № 2. С. 158–169.
3. Burskii V. P., Zaretskaya A. A. On the spectrum and eigenfunctions of the equivariant general boundary value problem outside the ball for the Schrödinger operator with coulomb potential Laplace operator in a circle // Quant. Phys. Lett. 2016. V. 5, N 2. P. 5–17.
4. Бурский В. П., Куракина И. И. Общая эквивариантная смешанная задача для уравнения теплопроводности в круговом цилиндре // Тр. ИПММ. 2012. Т. 24. С. 25–36.
5. Россковский Л. Е., Скубачевский А. Л. Введение в теорию дифференциальных уравнений с частными производными. М.: МЦНМО, 2021.
6. Егоров Ю. В., Шубин М. А. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории. М.: ВИНТИ, 1988. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 30).
7. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.

Поступила в редакцию 29 марта 2025 г.

После доработки 29 марта 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Беляева Юлия Олеговна (ORCID 0000-0001-8613-3792)

Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы,

ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва 117198;

Институт прикладной математики и механики,

ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР

yilia-b@yandex.ru

Бурский Владимир Петрович (ORCID 0000-0001-5496-6132)

Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет),

Институтский переулок, 9, г. Долгопрудный 141701, Московская область;

Институт прикладной математики и механики,

ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР

bvp30@mail.ru

УДК 512.548+515.162.8

СОГЛАСОВАННЫЕ СТРУКТУРЫ ОБОБЩЕННЫХ КВАНДЛОВ АЛЕКСАНДЕРА. ТОЖДЕСТВА ДИСТРИБУТИВНОСТИ И МЕДИАЛЬНОСТИ

А. Н. Бородин,
М. В. Нецадим, А. А. Симонов

Аннотация. Рассматривается вопрос: когда на группе существуют две структуры обобщенных квандлов Александра, согласованные между собой тождеством правой дистрибутивности или обобщенным тождеством медиальности?

DOI 10.33048/smzh.2025.66.403

Ключевые слова: квандл, обобщенный квандл Александра, правая дистрибутивность, обобщенное тождество медиальности, согласованные тождества, группа, автоморфизм.

Введение

Квандл — это непустое множество с бинарной операцией, удовлетворяющей трем алгебраическим аксиомам [1, 2], которые формализуют три преобразования Райдемайстера [3] плоских диаграмм узлов в трехмерном пространстве. Если рассматривать только второе и третье преобразования Райдемайстера, то получим алгебраическую структуру, которая называется *рэком*.

Исторически понятие *квандла* или *самодистрибутивного группоида* связывают с именами С. В. Матвеева и Джойса. В 1982 г. С. В. Матвеев [4] ввел алгебраическую систему, которую назвал *дистрибутивным группоидом*. Он доказал, что с каждым классическим узлом можно естественным образом связать *праводистрибутивную правую квазигруппу*, которая является его алгебраическим инвариантом и определяет узел с точностью до изотопии и зеркального отражения. Таким образом, был получен универсальный алгебраический инвариант классических узлов. В том же году к этому результату независимо пришел Джойс, давший найденной структуре название «*квандл*».

Исследуя вопросы дифференцируемости решений функциональных уравнений, Рыль-Нардзевский в 1949 г. ввел *симметричное среднее* [4] и получил дистрибутивную квазигруппу. Позже, в 1953 г. Госсу рассмотрел [5] несимметричные средние, далее [6, 7] он не только выделил аксиоматически данный объект, но и построил его представление над произвольной группой.

Идея согласования алгебраических операций лежит в основе определения колец и почти колец, когда две операции, групповая и полугрупповая, связаны законом дистрибутивности. Так, в косом брейсе [8–11] две групповые операции

Работа М. В. Нецадима выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.5.(проект FWNF-2022-0009).

связаны законом обобщенной дистрибутивности. Косой брэйс является относительно новой алгебраической системой, хотя в неявном виде такая конструкция появлялась в лекциях Куроша [12, § 10]. Напомним определение косого брэйса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Косой брэйс* — это множество G , на котором заданы две бинарные операции « $\circ$ » и « $\cdot$ » такие, что $\langle G, \circ \rangle$, $\langle G, \cdot \rangle$ группы и операции согласованы следующей аксиомой

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot a^{-1} \cdot (a \circ c), \quad a, b, c \in G, \quad (1)$$

где a^{-1} — элемент обратный к элементу a в группе $\langle G, \cdot \rangle$.

Заметим, что если в (1) заменить умножение « $\circ$ » на « $\cdot$ », то получим тождественное выражение

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot a^{-1} \cdot (a \cdot c), \quad a, b, c \in G,$$

справедливое в группе $\langle G, \cdot \rangle$.

Одно из направлений исследования алгебраических структур, близких к квазигруппам, является изучение обобщенных тождеств на системах квазигрупп [13]. Большой список всевозможных тождеств, которые встречаются в различных областях математики, приведен в работе [14]. Там перечислено более чем 50 тождеств и указано, где они встречаются. Вопросы теории конечных проективных плоскостей, теории функциональных уравнений и других разделов математики приводят к необходимости изучения множеств, снабженных не одной операцией, а системой операций Ω . Иными словами, необходимо изучать универсальные алгебры, для которых операции из системы Ω связаны некоторыми тождественными соотношениями. Эти тождественные соотношения в случае бинарных операций могут быть трех типов. Первый тип — это тождество в обычном понимании (см., например, [15]). Второй тип тождеств — сверхтождество — обладает той особенностью, что не только свободные элементы, участвующие в тождестве, могут принимать любые значения из множества Ω , на котором определена система операций, но и операции, участвующие в тождестве, также могут принимать любые значения из Ω . И третий тип — промежуточный: часть операций данного тождества могут принимать любые значения из Ω , а остальная часть операций принимает уже некоторые значения из Ω , зависящие от предыдущих. Тождество последнего типа называется *обобщенным тождеством* (см., например, [13]).

1. $A[B(x, y), z] = C[x, D(y, z)]$ — общее тождество ассоциативности (или общая ассоциативность).

2. $A[B(x, y), C(u, v)] = A_1[B_1(x, u), C_1(y, v)]$ — общая медиальность.

3. $A[B(y, x), C(z, x)] = D(y, z)$ — общая транзитивность.

4. $A[x, B(y, z)] = H[K(x, y), P(x, z)]$ — общая дистрибутивность,

5. $A[x, B(x, y)] = y$ — общий закон ключей (левый).

6. $A(x, y) = B(y, x)$ — общая коммутативность.

Здесь $A, B, C, A_1, B_1, C_1, H, K, P$ — квазигрупповые операции из некоторого семейства операций Ω , а x, y, z, u, v — элементы рассматриваемой алгебраической системы.

Одно из возможных направлений применения исследований обобщенных тождеств — построение новых алгебраических систем. Так, известно, что по каждому квадлу можно построить решение теоретико-множественного уравнения Янга — Бакстера, а по этому решению можно построить представление

группы (виртуальных) кос или инвариант для (виртуальных) узлов и зацеплений (см., например, [16–18]). Поэтому новые примеры конструкций квандлов могут привести к новым решениям уравнения Янга — Бакстера и новым инвариантам узлов и зацеплений. В [19] рассматривается задача определения операции произведения на семействе квандловых структур, заданных на некотором множестве. В частности, найдены необходимые условия, когда операция произведения двух квандловых структур является квандловой структурой. Для применимости этой конструкции необходимо, чтобы эти квандловые операции согласовывались между собой тождеством дистрибутивности.

В настоящей работе исследуются обобщенные тождества правой дистрибутивности и медиальности для двух обобщенных квандлов Александера, построенных на группе.

Статья имеет следующую структуру. В разд. 1 приведены основные определения, связанные с квандлами как алгебраическими объектами. В разд. 2 приведены и доказаны основные теоремы, отвечающие на вопрос задачи, когда две структуры обобщенных квандлов Александера, построенных на группе $\langle G, \cdot \rangle$, согласованы обобщенным тождеством правой дистрибутивности (теорема 1)

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G,$$

или обобщенным тождеством медиальности (теорема 2)

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z, t \in G.$$

Отметим, что из согласованности квандловых операций при помощи тождества медиальности следует их согласованность относительно тождества дистрибутивности. Но обратное неверно (следствие 1).

Далее в статье везде под дистрибутивностью понимается правая дистрибутивность.

1. Квандлы и групповые автоморфизмы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квандлом называют алгебраическую систему $\langle Q, \circ \rangle$ с одной бинарной операцией умножения « $\circ$ », которая удовлетворяет следующим аксиомам:

(Q1) аксиома идемпотентности: $x \circ x = x$ для всех $x \in Q$;

(Q2) аксиома правой обратимости: для любых $y, z \in Q$ существует единственный $x \in Q$ такой, что $x \circ y = z$;

(Q3) аксиома правой самодистрибутивности: для любых $x, y, z \in Q$ выполняется $(x \circ y) \circ z = (x \circ z) \circ (y \circ z)$.

В силу аксиом (Q2) и (Q3) умножение на элемент $z \in Q$ в квандле $\langle Q, \circ \rangle$ является автоморфизмом. Группа, порожденная такими автоморфизмами, называется *группой внутренних автоморфизмов квандла* $\langle Q, \circ \rangle$.

В силу аксиомы (Q2) на квандле $\langle Q, \circ \rangle$ можно ввести операцию деления справа $(x, y) \mapsto x/y$ такую, что $(x \circ y)/y = x$ и $(x/y) \circ y = x$ для любых $x, y \in Q$. Нетрудно показать [19], что алгебраическая система $\langle Q, / \rangle$ также является квандлом и выполнены следующие тождества, связывающие операции умножения « $\circ$ » и деления « $/$ »:

$$(x \circ y)/z = (x/z) \circ (y/z), \quad (x/y)/z = (x/(z \circ y))/y,$$

$$x/(y/z) = ((x \circ z)/y)/z, \quad x/(y \circ z) = ((x/z)/y) \circ z,$$

для любых $x, y, z \in Q$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Квандл $\langle Q; \circ, / \rangle$ называют *абелевым*, если для произвольных $x, y, z, t \in Q$ справедливо тождество медиальности

$$(x \circ y) \circ (z \circ t) = (x \circ z) \circ (y \circ t). \quad (2)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Госсу в работах [6, 7] показал, что над группой G при помощи произвольного автоморфизма $\varphi \in \text{Aut}(G)$ можно построить квандл с операцией

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G.$$

Более того, под *обобщенным квандлом Александра* часто понимают квандл с операцией одного из следующих четырех типов [20]:

$$\text{Alex}_1(G, \varphi): x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

$$\text{Alex}_2(G, \varphi): x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y, \quad x, y \in G,$$

$$\text{Alex}_3(G, \varphi): x \circ y = y\varphi(xy^{-1}), \quad x, y \in G,$$

$$\text{Alex}_4(G, \varphi): x \circ y = y\varphi(y^{-1}x), \quad x, y \in G.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что первый и четвертый типы, с одной стороны, второй и третий, с другой стороны, определяют изоморфные структуры квандлов. Изоморфные в смысле, что $\text{Alex}_1(G, \varphi) = \text{Alex}_4(G, \varphi^E)$ и $\text{Alex}_2(G, \varphi) = \text{Alex}_3(G, \varphi^E)$, где $E(x) = x^{-1}$, а $\varphi^E(x) = E\varphi E(x)$. Изоморфизм задается биекцией $E: G \rightarrow G$.

Если G — группа, то бинарная операция $x \circ y = yx^{-1}y$ для $x, y \in G$ определяет на G структуру сердцевинного квандла [1], обозначаемого $\text{Core}(G)$.

В [19, предложение 3.21] доказано утверждение. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа, тогда операции

$$x * y = y^{-1}xy, \quad x \circ y = yx^{-1}y, \quad x, y \in G,$$

связаны соотношением

$$(x * y) \circ z = (x \circ z) * (y \circ z), \quad x, y, z \in G,$$

если имеет место включение $\{g^2, g \in G\} \subseteq Z(G)$, где $Z(G)$ — центр группы G .

В [19, предложение 3.21] также содержится утверждение, что если $\langle G, \cdot \rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы, то операции

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x * y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

связаны соотношением

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G, \quad (3)$$

тогда и только тогда, когда автоморфизмы φ, ψ перестановочны, т. е. $\varphi\psi = \psi\varphi$.

2. Обобщенное тождество правой дистрибутивности для обобщенных квандлов Александра

В настоящем разделе исследуется задача, когда на группе $\langle G, \cdot \rangle$ заданы две структуры обобщенных квандлов Александра, согласованные обобщенным тождеством правой дистрибутивности (3). Отметим, что данное соотношение определяет действие квандла $\langle G, * \rangle$ на квандле $\langle G, \circ \rangle$ (более точно, действие группы внутренних автоморфизмов квандла $\langle G, * \rangle$ на квандле $\langle G, \circ \rangle$).

Имея четыре типа обобщенных квандлов Александра, надо исследовать десять случаев, но ввиду симметрии тождества (3) относительно операций « $\circ$ » и « $*$ » в силу замечания 1 достаточно рассмотреть только 8 вариантов (так как рассмотрение пары Alex_3 – Alex_3 сводится к паре Alex_2 – Alex_2 , а пары Alex_4 – Alex_4 к Alex_1 – Alex_1). Подмножество центральных автоморфизмов группы G будем обозначать через $\text{Aut}_c(G)$, а центр группы — через $Z(G)$.

Теорема 1. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы. Тогда операции $\circ$ и $*$ обобщенных квадлов Александра согласованы тождеством (3) тогда и только тогда, когда в зависимости от явного вида операций $\circ$ и $*$ выполнены условия, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

	$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$	$x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$	$x \circ y = y\varphi(xy^{-1})$
$x * y = \psi(xy^{-1})y$	$\varphi\psi = \psi\varphi$		
$x * y = \psi(y^{-1}x)y$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi^{-1}\varphi \in \text{Aut}_c(G)$	
$x * y = y\psi(xy^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi\psi \in \text{Aut}_c(G)$	
$x * y = y\psi(y^{-1}x)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi(p^{-1})p \in Z(G),$ $p = z\psi(z^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi \in \text{Aut}_c(G)$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения

$$L = (x \circ y) * z, \quad R = (x * z) \circ (y * z), \quad x, y, z \in G,$$

и рассматривать равенство

$$L = R. \quad (4)$$

Рассмотрим последовательно все случаи.

1. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(xy^{-1})y$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}y\varphi(y^{-1}x)) = z\psi(z^{-1}y)\varphi(\psi(y^{-1}x)),$$

что равносильно $\psi\varphi(y^{-1}x) = \varphi\psi(y^{-1}x)$. Так как произведение $y^{-1}x$, $x, y \in G$, пробегает все элементы группы G , тождество (3) выполнено тогда и только тогда, когда $\varphi\psi = \psi\varphi$.

2. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (4) принимает вид

$$\psi(z^{-1}\varphi(xy^{-1})y)z = \varphi(\psi(z^{-1}xy^{-1}z))\psi(z^{-1}y)z.$$

При $z = 1$ и $xy^{-1} = t$ получаем $\psi\varphi(t) = \varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$z^{-1}\varphi(xy^{-1}) = \varphi(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1}$$

или $\varphi(z)z^{-1}\varphi(xy^{-1}) = \varphi(xy^{-1})\varphi(z)z^{-1}$. Так как произведение $y^{-1}x$, $x, y \in G$, пробегает все элементы группы G , то это равносильно тому, что $\varphi(z)z^{-1}$ лежит в центре группы G , т. е. φ — центральный автоморфизм группы G .

Случай 3 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 2.

4. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}\varphi(xy^{-1})y) = \varphi(z\psi(z^{-1}xy^{-1}z)z^{-1})z\psi(z^{-1}y)$$

или

$$z\psi(z^{-1})\psi\varphi(xy^{-1}) = \varphi(z)\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}z)\varphi(z^{-1})z\psi(z^{-1}).$$

При $z = 1$ и $xy^{-1} = t$ получаем $\psi\varphi(t) = \varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t) = \varphi(z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t)\varphi(\psi(z)z^{-1})z\psi(z^{-1})).$$

Положим $p = z\psi(z^{-1})$, тогда $p\varphi\psi(t) = \varphi(p)\varphi\psi(t)\varphi(p^{-1})p$ или

$$\varphi(p^{-1})p\varphi\psi(t) = \varphi\psi(t)\varphi(p^{-1})p.$$

Так как произведение t — произвольный элемент группы G , это равносильно тому, что $\varphi(p^{-1})p$ лежит в центре группы G . В голоморфе $\text{Hol } G$ группы G это равносильно тому, что $[[z, \psi], \varphi] \in Z(G)$.

5. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (4) принимает вид

$$\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x)y)z = \varphi(z^{-1}\psi(y^{-1}x)z)\psi(z^{-1}y)z$$

или $\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x)) = \varphi(z^{-1}\psi(y^{-1}x)z)\psi(z^{-1})$. При $z = 1$ и $y^{-1}x = t$ получаем $\psi\varphi(t) = \varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$\psi(z^{-1})\varphi\psi(t) = \varphi(z^{-1})\varphi\psi(t)\varphi(z)\psi(z^{-1}).$$

Так как t — произвольный элемент группы G , то это равносильно тому, что $\varphi(z)\psi(z^{-1})$ лежит в центре группы G или, равносильно, $\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}$ лежит в центре группы G , т. е. $\psi^{-1}\varphi$ — центральный автоморфизм группы G .

6. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(xy^{-1})$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(\varphi(y^{-1}x)yz^{-1}) = \varphi(\psi(z)y^{-1})$$

или $z\psi\varphi(y^{-1}x) = \varphi\psi(z)y^{-1}xz^{-1}z$. При $z = 1$ и $y^{-1}x = t$ получаем $\psi\varphi(t) = \varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi = \psi\varphi$ и $z\varphi\psi(t) = \varphi\psi(tz)z^{-1}z$ или

$$z^{-1}\varphi\psi(z)\varphi\psi(t) = \varphi\psi(t)z^{-1}\varphi\psi(z).$$

Поскольку t — произвольный элемент группы G , это равносильно тому, что $z^{-1}\varphi\psi(z)$ лежит в центре группы G , т. е. $\varphi\psi$ — центральный автоморфизм группы G .

7. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (4) принимает вид

$$z\psi(z^{-1}\varphi(y^{-1}x)y) = \varphi\psi(y^{-1}x)z\psi(z^{-1}y)$$

или

$$z\psi(z^{-1})\psi\varphi(y^{-1}x) = \varphi\psi(y^{-1}x)z\psi(z^{-1}).$$

При $z = 1$ и $y^{-1}x = t$ получаем $\psi\varphi(t) = \varphi\psi(t)$. Следовательно, $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$z\psi(z^{-1})\varphi\psi(t) = \varphi\psi(t)z\psi(z^{-1}).$$

Так как t — произвольный элемент группы G , то это равносильно тому, что $z\psi(z^{-1})$ лежит в центре группы G , т. е. ψ — центральный автоморфизм группы G .

Случай 8 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 7.

Теорема доказана.

3. Обобщенное тождество медиальности для обобщенных квандлов Александера

Исследуем задачу, когда на группе $\langle G, \cdot \rangle$ заданы две структуры обобщенных квандлов Александера, согласованные обобщенным тождеством медиальности

$$(x \circ y) * (z \circ t) = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z \in G. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть на множестве K заданы две квандловые структуры $\langle K, \circ \rangle$ и $\langle K, * \rangle$ такие, что справедливо (5), тогда

$$(x \circ y) * z = (x * z) \circ (y * z).$$

Действительно, положим $t = z$ и воспользуемся идемпотентностью:

$$(x \circ y) * z = (x \circ y) * (z \circ z) = (x * z) \circ (y * z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть в группе G выполнено равенство

$$x_1 x_2 \dots x_n = z,$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — некоторые элементы группы G и z — центральный элемент группы G . Тогда

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n = x_2 \dots x_{n-1} x_n x_1 = \dots = x_n x_1 x_2 \dots x_{n-1},$$

т. е. слово $x_1 x_2 \dots x_n$ не меняется при циклической перестановке букв. Действительно, при сопряжении слова $x_1 x_2 \dots x_n$ последовательно буквами $x_1, x_2, \dots, x_n$ получаем циклически переставленные слова и, с другой стороны, так как z — центральный элемент группы G , слово $x_1 x_2 \dots x_n$ не меняется.

Будем использовать данное замечание в простейшем случае двух множителей $x_1 x_2 = z$.

Так же, как и в случае правой дистрибутивности, надо рассмотреть только восемь случаев. Подмножество центральных автоморфизмов группы G будем обозначать через $\text{Aut}_c(G)$, а центр группы — через $Z(G)$. Коммутант группы G обозначим через G' , ограничение автоморфизма φ на коммутанте — через $\varphi|_{G'}$, коммутатор элементов $x, y \in G$ — через $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Теорема 2. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа и φ, ψ — ее автоморфизмы. Тогда операции $\circ$ и $*$ обобщенных квандлов Александера согласованы тождеством (5) тогда и только тогда, когда в зависимости от явного вида операций $\circ$ и $*$ выполнены условия, приведенные в табл. 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения

$$L = (x \circ y) * (z \circ t), \quad R = (x * z) \circ (y * t), \quad x, y, z, t \in G,$$

и рассматривать равенство

$$L = R. \quad (6)$$

Рассмотрим последовательно все случаи. В силу замечания 2 можно использовать результаты теоремы 1.

1. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(xy^{-1})y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(\varphi(xy^{-1})yt^{-1}\varphi(tz^{-1}))\varphi(zt^{-1})t = \varphi(\psi(xz^{-1})zt^{-1}\psi(ty^{-1}))\psi(yt^{-1})t$$

Таблица 2

	$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$	$x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$	$x \circ y = y\varphi(xy^{-1})$
$x * y = \psi(xy^{-1})y$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $[\varphi(x^{-1})x, \psi(y^{-1})y] = 1$		
$x * y = \psi(y^{-1}x)y$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi^{-1}\varphi \in \text{Aut}_c(G),$ $\varphi _{G'} = \text{id},$ $G' \subseteq Z(G)$	
$x * y = y\psi(xy^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi\psi \in \text{Aut}_c(G)$ $\varphi _{G'} = \text{id},$ $G' \subseteq Z(G)$	
$x * y = y\psi(y^{-1}x)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\varphi(p^{-1})p \in Z(G),$ $p = z\psi(z^{-1})$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi \in \text{Aut}_c(G)$	$\varphi\psi = \psi\varphi,$ $\psi \in \text{Aut}_c(G)$

или

$$\psi(\varphi(xy^{-1})yt^{-1}\varphi(tz^{-1}))\varphi(zt^{-1}) = \varphi(\psi(xz^{-1})zt^{-1}\psi(ty^{-1}))\psi(yt^{-1}). \quad (7)$$

Введем обозначения $a = xt^{-1}$, $b = yt^{-1}$, $c = zt^{-1}$. Тогда (7) примет вид

$$\psi(\varphi(ab^{-1})b\varphi(c^{-1}))\varphi(c) = \varphi(\psi(ac^{-1})c\psi(b^{-1}))\psi(b).$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$. Следовательно,

$$\psi(\varphi(b^{-1})b\varphi(c^{-1}))\varphi(c) = \varphi(\psi(c^{-1})c\psi(b^{-1}))\psi(b).$$

Положим $b = \varphi(x)$, $c = \psi(y)$, тогда

$$\psi(\varphi^2(x^{-1})\varphi(x)\varphi\psi(y^{-1}))\varphi\psi(y) = \varphi(\psi^2(y^{-1})y\psi\varphi(x^{-1}))\psi\varphi(x).$$

Подействуем на это равенство автоморфизмом $(\varphi\psi)^{-1}$:

$$\varphi(x^{-1})x\psi(y^{-1})y = \psi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x.$$

2. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y)\varphi(zt^{-1})t = \varphi(\psi(z^{-1}x)zt^{-1}\psi(y^{-1}t))\psi(t^{-1}y)t$$

или

$$\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) = \varphi(\psi(z^{-1}x)zt^{-1}\psi(y^{-1}t))\psi(t^{-1}y). \quad (8)$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и φ — центральный автоморфизм. Покажем, что (8) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем

$$\begin{aligned}\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi\varphi(z^{-1}x)\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) &= \varphi\psi(z^{-1}x)\varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y), \\ \psi\varphi(z^{-1}x)\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) &= \varphi\psi(z^{-1}x)\varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y), \\ \psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y)\varphi(zt^{-1}) &= \varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y), \\ \varphi(zt^{-1})\psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y) &= \varphi(zt^{-1})\varphi\psi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y), \\ \psi(t^{-1}\varphi(t))\psi(\varphi(y^{-1})y) &= \psi\varphi(y^{-1}t)\psi(t^{-1}y), \\ t^{-1}\varphi(t)\varphi(y^{-1})y &= \varphi(y^{-1})\varphi(t)t^{-1}y, \\ t^{-1}\varphi(t)\varphi(y^{-1})y &= \varphi(t)t^{-1}\varphi(y^{-1})y, \\ t^{-1}\varphi(t) &= \varphi(t)t^{-1}.\end{aligned}$$

Последнее равенство в силу замечания 3 справедливо.

4. Для $x \circ y = \varphi(xy^{-1})y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(zt^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1})\varphi(xy^{-1})y) = \varphi(z\psi(z^{-1}x)\psi(y^{-1}t)t^{-1})t\psi(t^{-1}y)$$

или

$$\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(tz^{-1}xy^{-1})) = \varphi(\psi(z^{-1}xy^{-1}t)t^{-1})t\psi(t^{-1}). \quad (9)$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и элемент $\varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1})$ для любого $t \in G$ лежит в центре $Z(G)$ группы G . Покажем, что (9) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем следующую последовательность равенств:

$$\begin{aligned}\varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t))\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}) &= \varphi\psi(z^{-1}xy^{-1})\varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}), \\ \varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t))\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}) &= \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}xy^{-1}), \\ \varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1}\varphi(t)) &= \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}), \\ \varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1})\varphi\psi(t) &= \varphi(\psi(t)t^{-1})t\psi(t^{-1}), \\ \varphi(t^{-1})t\psi(t^{-1})\psi(t)t^{-1}\varphi(t)\varphi\psi(t^{-1})\varphi\psi(t) &= 1.\end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено для произвольного $t \in G$.

5. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = \psi(y^{-1}x)y$ равенство (6) принимает вид

$$\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z)t = \varphi(t^{-1}\psi(y^{-1}t)\psi(z^{-1}x)z)\psi(t^{-1}y)t$$

или

$$\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y)\varphi(t^{-1}z) = \varphi(t^{-1}\psi(y^{-1}t)\psi(z^{-1}x)z)\psi(t^{-1}y). \quad (10)$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и $\psi^{-1}\varphi$ — центральный автоморфизм группы G . Преобразуем (10), используя эти условия. Имеем

$$\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x)\psi(y)\varphi(t^{-1}z) = \varphi(t^{-1})\varphi\psi(y^{-1}tz^{-1}x)\varphi(z)\psi(t^{-1}y).$$

Применим к этому равенству ψ^{-1} :

$$\begin{aligned}t^{-1}\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1}z) &= \psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)t^{-1}y, \\ \varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1}z) &= t\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)t^{-1}y, \\ \varphi(z^{-1}ty^{-1}x)y\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}z &= t\psi^{-1}\varphi(t^{-1})\varphi(y^{-1}tz^{-1}x)\psi^{-1}\varphi(z)z^{-1}zt^{-1}y, \\ \varphi(z^{-1}ty^{-1}x)yt^{-1}z &= \varphi(y^{-1}tz^{-1}x)zt^{-1}y, \\ \varphi(x^{-1}zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}x) &= zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}.\end{aligned}$$

Так как x — произвольный элемент группы G и $zt^{-1}yz^{-1}ty^{-1}$ — элемент из коммутанта G' группы G , причем при $t = 1$ он совпадает с коммутатором $zyz^{-1}y^{-1}$, то автоморфизм φ действует на коммутанте G' тождественно и G' является подгруппой в центре $Z(G)$ группы G .

6. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(xy^{-1})$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(\varphi(y^{-1}x)yt^{-1}\varphi(z^{-1}t)) = \varphi(\psi(ty^{-1})t^{-1}z\psi(xz^{-1}))t\psi(yt^{-1}). \quad (11)$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и $\varphi\psi$ — центральный автоморфизм группы G . Преобразуем (11), используя эти условия. Имеем

$$\varphi(t^{-1}z)t\varphi\psi(y^{-1}x)\psi(yt^{-1})\varphi\psi(z^{-1}t) = \varphi\psi(ty^{-1})\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(xz^{-1})t\psi(yt^{-1}).$$

Положим $t^{-1}z = c$, $yt^{-1} = b$, тогда $z = tc$, $y = bt$ и равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi(c)t\varphi\psi(t^{-1}b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) &= \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1}t^{-1})t\psi(b), \\ \varphi(c)t\varphi\psi(t^{-1})\varphi\psi(b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) &= \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1})\varphi\psi(t^{-1})t\psi(b), \\ \varphi(c)\varphi\psi(b^{-1}x)\psi(b)\varphi\psi(c^{-1}) &= \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(xc^{-1})\psi(b), \\ \varphi(c)\varphi\psi(b^{-1})\varphi\psi(x)x^{-1}x\psi(b)\varphi\psi(c^{-1})cc^{-1} &= \varphi\psi(b^{-1})\varphi(c)\varphi\psi(x)x^{-1}x\varphi\psi(c^{-1})\psi(b), \\ \varphi(c)b^{-1}x\psi(b)c^{-1} &= b^{-1}\varphi(c)xc^{-1}\psi(b). \end{aligned}$$

Пусть $b = \varphi(u)$, тогда

$$\begin{aligned} \varphi(cu^{-1})x\varphi\psi(u)c^{-1} &= \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}\varphi\psi(u), \\ \varphi(cu^{-1})x\varphi\psi(u)u^{-1}uc^{-1} &= \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}\varphi\psi(u)u^{-1}u, \\ \varphi(cu^{-1})xuc^{-1} &= \varphi(u^{-1}c)xc^{-1}u, \\ \varphi(c^{-1}ucu^{-1}) &= xc^{-1}ucu^{-1}x^{-1}. \end{aligned}$$

Так как x — произвольный элемент группы G и $c^{-1}ucu^{-1}$ — коммутатор, то автоморфизм φ действует на коммутанте G' тождественно и G' является подгруппой в центре $Z(G)$ группы G .

7. Для $x \circ y = \varphi(y^{-1}x)y$, $x * y = y\psi(y^{-1}x)$ равенство (6) принимает вид

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}t)\varphi(y^{-1}x)y) = \varphi(\psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x))t\psi(t^{-1}y)$$

или

$$\varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1}\varphi(z^{-1}ty^{-1}x)) = \varphi(\psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x))t\psi(t^{-1}). \quad (12)$$

В силу теоремы 1 выполнено $\varphi\psi = \psi\varphi$ и ψ — центральный автоморфизм. Покажем, что (12) выполняется тождественно в силу этих условий. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi(t^{-1}z)t\psi(t^{-1})\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x) &= \varphi\psi(y^{-1}t)\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}x)t\psi(t^{-1}), \\ \varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}ty^{-1}x) &= \varphi\psi(y^{-1}t)\varphi(t^{-1}z)\varphi\psi(z^{-1}x), \\ t^{-1}z\psi(z^{-1}ty^{-1}x) &= \psi(y^{-1}t)t^{-1}z\psi(z^{-1}x), \\ t^{-1}z\psi(z^{-1})\psi(t)\psi(y^{-1}x) &= \psi(y^{-1})\psi(t)t^{-1}z\psi(z^{-1})\psi(x), \\ \psi(y^{-1}x) &= \psi(y^{-1})\psi(x). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполнено для произвольных $x, y \in G$.

Случай 8 рассматривается аналогично и приводит к тому же результату, что и случай 7.

Теорема доказана.

Следствие 1. Тожества (3), (5) для обобщенных квандлов Александра не равносильны.

Действительно, для квандлов

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x * y = \psi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

построенных на группе $\langle G, \cdot \rangle$ по автоморфизмам $\varphi, \psi \in \text{Aut } G$, тождество (3) равносильно условию $\varphi\psi = \psi\varphi$, в то время как (5) равносильно двум условиям $\varphi\psi = \psi\varphi$ и

$$\varphi(x^{-1})x\psi(y^{-1})y = \psi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x \quad (13)$$

для любых элементов x, y группы G .

Непосредственно из случая 1 теоремы 2 получаем

Следствие 2. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа, φ — автоморфизм группы G . Тогда операция

$$x \circ y = \varphi(xy^{-1})y, \quad x, y \in G,$$

определяет абелев квандл тогда и только тогда, когда имеет место соотношение

$$\varphi(x^{-1})x\varphi(y^{-1})y = \varphi(y^{-1})y\varphi(x^{-1})x \quad (14)$$

для любых элементов x, y группы G .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В голоморфе $\text{Hol } G$ группы G элемент $\varphi(x^{-1})x$ можно записать в виде коммутатора

$$\varphi^{-1}x^{-1}\varphi x = [\varphi, x].$$

Поэтому (14) можно записать как

$$[\varphi, x][\varphi, y] = [\varphi, y][\varphi, x].$$

Так как x, y — произвольные элементы группы G , это равносильно тому, что подгруппа в голоморфе $\text{Hol } G$, порожденная коммутаторами $[\varphi, x]$, $x \in G$, абелева.

Аналогично (13) может быть переписано в виде

$$[\varphi, x][\psi, y] = [\psi, y][\varphi, x], \quad x, y \in G,$$

в голоморфе $\text{Hol } G$ группы G .

В заключение данного раздела приведем утверждение про тождество медиальности для квандлов $\text{Conj}(G)$ и $\text{Core}(G)$.

Предложение 1. Пусть $\langle G, \cdot \rangle$ — группа, тогда операции

$$x \circ y = yxy^{-1}, \quad x * y = yx^{-1}y, \quad x, y \in G, \quad (15)$$

согласованы обобщенным тождеством медиальности (5) тогда и только тогда, когда имеет место включение

$$\{g^2, g \in G\} \subseteq Z(G), \quad (16)$$

где $Z(G)$ — центр группы G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя (15) в соотношение (2), получаем

$$dcd^{-1}ba^{-1}b^{-1}dcd^{-1} = db^{-1}dca^{-1}cd^{-1}bd^{-1}$$

или после сокращения

$$cd^{-1}ba^{-1}b^{-1}dc = b^{-1}dca^{-1}cd^{-1}b. \quad (17)$$

Полагая $c = d = 1$, получаем $ba^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}b$ или $ab^2 = b^2a$, что и доказывает включение (16).

С другой стороны, из тождества

$$x^{-1}y^{-1}xy = (yx)^{-2}(xyx^{-1})^2y^2$$

следует, что коммутант $[G, G]$ группы G содержится в подгруппе, порожденной квадратами элементов группы G . Поэтому из включения $\{g^2, g \in G\} \subseteq Z(G)$ получаем, что $[G, G] \subseteq Z(G)$. Но соотношение (17) является коммутаторным (суммарная степень по каждой букве a, b, c, d равна нулю). Значит, из включения (16) следует, что соотношение (17), а значит и (2), выполняются тождественно.

Предложение доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев С. В. Дистрибутивные группоиды в теории узлов // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 1. С. 78–88.
2. Joyce D. A classifying invariant of knots: the knot quandle // J. Pure Appl. Algebra. 1982. N 1. P. 37–65.
3. Reidemeister K. Elementare Begründung der Knotentheorie // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1926. V. 5, N 1. P. 24–32.
4. Ryll-Nardzewski C. Sur les moyennes // Studia Math. 1949. V. 11. P. 31–37.
5. Hosszú M. On the functional equation of distributivity // Acta Math. Academiae Scientiarum Hungaricae. 1953. V. 4, N 1–2. P. 159–167.
6. Госсю М. Несимметричные средние // Colloq. Math. 1957. V. 5. P. 32–42.
7. Hosszu M. Nonsymmetric means // Math. Debrecen. 1959. V. 6. P. 1–9.
8. Drinfeld V. G. On some unsolved problems in quantum group theory // Quantum groups. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1992. P. 1–8.
9. Smoktunowicz A., Vendramin L. On skew braces (with an appendix by Byott N. and Vendramin L.) // J. Comb. Algebra. 2018. V. 2. P. 47–86.
10. Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K. Computing skew left braces of small orders // Intern. J. Algebra Comput. 2020. V. 30. P. 839–851.
11. Bardakov V. G., Neshchadim M. V., Yadav M. K. On λ -homomorphic skew braces // J. Pure Appl. Algebra. 2022. V. 226. 106961.
12. Курош А. Г. Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
13. Белоусов В. Д. Системы квазигрупп с обобщенными тождествами // Успехи мат. наук. 1965. Т. 20, № 1. С. 75–146.
14. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физматгиз, 1962.
15. Sade A. Quasigroupes obéissant á certain lois // Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul. , 1957. V. 22. P. 151–184.
16. sl Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and representations of braid groups // J. Algebra Appl. 2024. V. 23, N 3. 2430003.
17. sl Bardakov V., Nasybullov T. Multi-switches and virtual knot invariants // Topology Appl. 2021. V. 293. 107552.
18. Бардаков В. Г., Насыбуллово Т. Р. Мульти-переключатели, представления виртуальных кос и инварианты виртуальных узлов // Алгебра и логика. 2020. Т. 59, № 4. С. 500–506.
19. Бардаков В. Г., Федосеев Д. А. Произведения квандлов // Алгебра и логика. 2024. Т. 63, № 2. С. 111–142.

20. Симонов А. А., Нецадим М. В., Бородин А. Н. Конструкции кваңдлов над группами и кольцами // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 577–590.

Поступила в редакцию 17 февраля 2025 г.

После доработки 2 мая 2025 г.

Принята к публикации 13 мая 2025 г.

Бородин Александр Николаевич
Горно-алтайский государственный университет,
ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 659700
serajsova@yandex.ru

Нецадим Михаил Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
neshch@math.nsc.ru

Симонов Андрей Артёмович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 1, Новосибирск 630090
a.simonov@g.nsu.ru

НОВЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ
КОМПОЗИЦИИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА
НА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ
С. К. Водопьянов

Аннотация. Получены эквивалентное описание гомеоморфизмов φ области Ω в римановом пространстве $\mathbb{M}$ на метрическое пространство $\mathbb{Y}$, гарантирующее ограниченность оператора композиции из пространства липшицевых функций $\text{Lip}(\mathbb{Y})$ в однородное пространство Соболева на $\mathbb{M}$ с первыми обобщенными производными, суммируемыми в степени $1 \leq q \leq \infty$, и другие новые свойства таких гомеоморфизмов. Новый подход позволяет эффективно доказать теорему о гомеоморфизмах областей в произвольном римановом пространстве $\mathbb{M}$, индуцирующих ограниченный оператор композиции пространств Соболева с первыми обобщенными производными. Новое доказательство, значительно более короткое сравнительно с первоначальным, базируется на минимальном наборе средств и позволяет получить новые свойства гомеоморфизмов в исследуемом вопросе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.404

Ключевые слова: риманово пространство, класс отображений Соболева со значениями в метрическом пространстве, аппроксимативная дифференцируемость, искажение отображения, обобщенное квазиконформное отображение, оператор композиции.

Введение

В работах последних лет [1–5] получено описание гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ областей в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, индуцирующих ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p < \infty, \quad (1)$$

по правилу замены переменной: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega')$ (здесь $L_p^1(\Omega')$ и $L_q^1(\Omega)$) — полунормированные однородные пространства Соболева, т. е. без основной нормы).

В работе [1] получен предварительный результат в этой задаче, в работах [2–4] доказаны утверждения 1–3 теоремы 1, а в [5] установлено равенство 4.

Окончательный результат в этой задаче сформулирован в следующем утверждении (см. [1–5]).

Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Министерства образования и науки РФ для Института математики Сибирского отделения Российской академии наук (проект No FWNF-2022-0006).

Теорема 1. Оператор (1) ограничен при $1 \leq q \leq p < \infty$ тогда и только тогда, когда

- 1) $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$;
- 2) φ обладает конечным искажением: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана;
- 3) $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$, $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$), где внешняя функция искажения $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, определена по правилу

$$\Omega \ni x \mapsto K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$$

$$4) \|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|.$$

Получено также описание, аналогичное теореме 1, для гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ групп Карно: $\Omega \subset \mathbb{G}$, а $\Omega' \subset \mathbb{G}'$ (см. [2–4], где доказаны аналоги утверждений 1–3 на группах Карно, и работу [6], в которой новым методом установлено равенство 4 на группах Карно).

В работе [7] исследованы гомеоморфизмы областей на римановых пространствах одинаковой размерности ≥ 2 . Аналоги утверждений 1–3 теоремы 1 доказаны в теореме 3 из [7], в которой вместо равенства вида 4 доказана двусторонняя оценка:

$$\alpha_{q,p} \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|, \quad (2)$$

где $\alpha_{q,p} \in (0; 1)$ — константа. Аналитическая часть доказательства теоремы 1 в работе [7] базируется на статьях [2, 4].

В рамках работы [7] доказано, что $\alpha_{q,p} = (2n\mathcal{D}^{\frac{1}{q}})^{-1}$, где

$$\mathcal{D} = \sup_{y_0 \in \Omega'} \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(B(y_0; 2r))}{\nu(B(y_0; r))} < \infty.$$

Глобальная ограниченность величины $\mathcal{D}$ сверху следует из неравенства

$$\nu(B(x, 2r)) \leq 2^n \exp(\sqrt{(n-1)K}2r) \nu(B(x, r))$$

при условии, что кривизна Риччи многообразия $\mathbb{M}'$ ограничена снизу: $\text{Ric} \geq -Kg$ для некоторого $K > 0$ [8]. Таким образом, оценка снизу постоянной $\alpha_{q,p}$, полученная в [7, теорема 3], зависит от геометрии многообразия и поэтому не является универсальной.

Ниже (см. разд. 4), приведено новое, более лаконичное доказательство необходимости условий 1–3, которое позволяет вместо двойного неравенства (2) получить равенство

$$\|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|. \quad (3)$$

Это означает, что наилучшая постоянная $\alpha_{q,p}$ равна 1 и не зависит от геометрии многообразия. В случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ равенство вида (3) другим методом получено в [5].

Отметим, что в теореме 1 не рассмотрен случай $1 \leq q \leq p = \infty$. Первая половина работы посвящена исследованию этого случая на римановых многообразиях (на группах Карно этот вопрос изучен в [6, теорема 4.1]), при этом вместо оператора композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 \leq q \leq p = \infty,$$

изучаются ограниченные операторы композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad \varphi^*(f) = f \circ \varphi, \quad 1 \leq q < \infty, \quad (4)$$

для любой липшицевой функции $f \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$ ¹⁾ (Здесь Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, а $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ — гомеоморфизм.) Основные результаты о свойствах таких гомеоморфизмов установлены в теореме 2.

В теореме 2 и предложении 7 доказано также, что гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ порождает оператор композиции (4) (без предположения о его ограниченности) тогда и только тогда, когда он принадлежит классу Решетняка [9] (см. определение 3). В аналитической части доказательств теорем 2 и 3 применяются рассуждения из работ [4, 6, 7].

1. Предварительные сведения

1.1. Классы функций Соболева на римановом многообразии. Далее мы фиксируем связное полное риманово многообразие $(\mathbb{M}, g)$ класса C^r , $3 \leq r \leq \infty$, т. е. C^r -гладкое многообразие $\mathbb{M}$, в каждом касательном пространстве $T_x \mathbb{M}$ которого выбрана евклидова метрика g_x , C^r -гладко меняющаяся от точки к точке.

Длина абсолютно непрерывной кусочно-гладкой кривой $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{M}$ выражается интегралом $l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$ (здесь $|\dot{\gamma}(t)| = \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))}$ — длина касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ в евклидовом пространстве $T_{\gamma(t)} \mathbb{M}$ со скалярным произведением $g_{\gamma(t)}$).

Метрика $d(x, y)$ на римановом многообразии $\mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань длин кусочно-гладких кривых с концевыми точками x и y .

Символом $B(x, r) = \{y \in \mathbb{M} \mid d(x, y) < r\}$ будем обозначать открытый шар в римановой метрике с центром в точке $x \in \mathbb{M}$ и радиусом $r \in (0, \infty)$.

Мера на многообразии $\mathbb{M}$ определяется следующим образом. Пусть (U, φ) — карта в $\mathbb{M}$. Диффеоморфизм $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ можно рассматривать как изометрию между (U, g) и $(\varphi(U), \bar{g})$, если определить риманов тензор $\bar{g}$ на $\varphi(U)$ следующим образом: $\bar{g}_x(X, Y) = g_{\varphi^{-1}(x)}(d\varphi^{-1}(X), d\varphi^{-1}(Y))$, $x \in \varphi(U)$ и $X, Y \in T_x \mathbb{R}^n$. Мэру множества $E \subset U$ в случае, когда образ $\varphi(E)$ измерим по Лебегу в $\mathbb{R}^n$, определим по формуле

$$\omega(E) = \int_{\varphi(E)} \sqrt{\det \bar{g}} dx.$$

Можно доказать, что определенная таким образом мера не зависит от выбора системы координат и совпадает с n -мерой Хаусдорфа $\mathcal{H}^n(E)$ множества E как подмножества метрического пространства $(\mathbb{M}, g)$ (см., например, [11]).

Мера $\omega(E)$ произвольного множества $E \subset \mathbb{M}$ определяется как точная нижняя грань сумм

$$\sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i), \quad \text{где } E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,$$

¹⁾ В случае $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ задача описания гомеоморфизмов $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$, для которых оператор композиции (4) ограничен, сформулирована в [10, замечание 6].

множества E_i дизъюнкты, измеримы и каждое содержится в одной карте. Можно показать, что и в этом случае справедливо равенство $\mathcal{H}^n(E) = \omega(E)$.

Далее будем исследовать свойства измеримых отображений $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$, где $(\mathbb{M}', g')$ — еще одно риманово многообразие с римановым тензором g' , относительно которого определяются риманова метрика d' на $\mathbb{M}'$; риманова метрика d' определяет, в свою очередь, меру ν на $\mathbb{M}'$.

Пусть Ω — область (связное открытое множество) на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. 1. Пространство $L_p(\Omega)$ функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, суммируемых в степени $p \in [1, \infty)$, состоит из измеримых по Лебегу функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{L_p(D)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\omega \right)^{1/p} < \infty.$$

Здесь ω — определенная выше мера на римановом многообразии $(\mathbb{M}, g)$.

2. Если измеримая функция $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит L_p на каждой компактной части области Ω , то она называется *локально суммируемой в степени p* (в этом случае пишем $u \in L_{p,\text{loc}}(\Omega)$ или $u \in L_{p,\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R})$).

3. Отображение $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ принадлежит $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$, $1 \leq p \leq \infty$, тогда и только тогда, когда функция $[\varphi]_y : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$, определенная по правилу $[\varphi]_y(x) = d(\varphi(x), y)$, принадлежит $L_{p,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ для любой точки $y \in \mathbb{M}'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Для функций $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^1 можно определить дифференциал $df : T\mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{R}$. В каждой карте (U, φ) дифференциал задается с помощью частных производных: $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}$. Так как $df(x)$ — линейный функционал над конечномерным пространством $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x , существует единственный вектор $\nabla f \in T_x\mathbb{M}$, называемый градиентом, такой, что выполняется равенство $df(x)(X) = g_x(\nabla f, X)$ для всех $X \in T_x\mathbb{M}$.

В координатах градиент ∇f можно найти следующим образом:

$$\nabla f = g^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

где g^{-1} — обратная матрица к g , а $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ — частные производные.

Обобщенным градиентом локально-суммируемой функции $f : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ называется локально-суммируемое сечение $h : \mathbb{M} \rightarrow T\mathbb{M}$, удовлетворяющее интегральному тождеству $\int_{\mathbb{M}} h\eta d\omega = - \int_{\mathbb{M}} f\nabla\eta d\omega$ для любой гладкой финитной функции $\eta : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$. (Здесь $\nabla\eta$ — градиент функции η на $\mathbb{M}$.)

Однородное пространство Соболева $L_p^1(\Omega)$ состоит из локально интегрируемых функций $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, имеющих обобщенный градиент $\nabla f \in L_p(\Omega)$. Полунорма в $L_p^1(\Omega)$ определяется как величина

$$\|f\|_{L_p^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |\nabla f(x)|^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}}$$

(здесь $\nabla f(x)$ — обобщенный градиент функции f в точке $x \in \Omega$, а $|\nabla f(x)|$ — длина обобщенного градиента $\nabla f(x)$ в евклидовом пространстве $T_x\mathbb{M}$ со скалярным произведением g_x).

Пространство Соболева $W_p^1(\Omega)$ состоит из локально суммируемых функций, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{W_p^1(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L_p(\Omega)}.$$

Будем говорить, что f принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega)$, если $f \in W_p^1(V)$ для любой ограниченной подобласти $V \subset \Omega$ такой, что $\bar{V} \Subset \Omega$ (т. е. V ограничена и $\bar{V} \subset \Omega$).

1.2. Отображения классов Решетняка со значениями в метрическом пространстве. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $\Omega \subset \mathbb{M}$ — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ измеримо, если прообраз $\varphi^{-1}(T)$ всякого борелевского множества $T \subset \mathbb{Y}$ измерим по Лебегу.

Класс $L_p(\Omega; \mathbb{Y})$, $1 \leq p \leq \infty$, состоит из измеримых отображений²⁾ $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$, для которых

$$\|\rho(\varphi(\cdot), z)\|_{L_p(\Omega)} < \infty,$$

где $z \in \mathbb{Y}$ — некоторая фиксированная точка. Класс $L_{p,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$ состоит из измеримых отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ таких, что $\varphi \in L_p(U; \mathbb{Y})$ для каждой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Пространство $\text{Lip}(\mathbb{Y})$ состоит из липшицевых функций $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ с конечной полунормой

$$\text{Lip}(u) = \sup_{y_1 \neq y_2} \frac{|u(y_1) - u(y_2)|}{\rho(y_1, y_2)}.$$

В [9] Ю. Г. Решетняк предложил подход к определению соболевских классов функций со значениями в метрических пространствах. Пусть $(\mathbb{Y}, \rho)$ — полное метрическое пространство, ρ — метрика на $\mathbb{Y}$, а Ω — область на римановом многообразии $\mathbb{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [9]. Будем говорить, что отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ принадлежит классу Решетняка $L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$ ($L_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{Y})$), $1 \leq p \leq \infty$, если выполнены следующие условия:

- 1) функция $\mathbb{M} \ni x \rightarrow [\varphi]_z(x) = \rho(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{p,\text{loc}}^1(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;
- 2) существует функция $g \in L_p(\Omega)$ ($g \in L_{p,\text{loc}}(\Omega)$) такая, что

$$|\nabla(u \circ \varphi)| \leq g \text{Lip}(u) \quad (5)$$

п. вс. в Ω для каждой функции $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$.

Класс $W_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$ состоит из отображений, принадлежащих $L_p(\Omega; \mathbb{Y}) \cap L_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{Y})$. Отображение φ принадлежит $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{Y})$, если $\varphi \in W_p^1(U; \mathbb{Y})$ для любой компактной подобласти $U \Subset \Omega$.

Ясно, что из условия 1 вытекает принадлежность $\varphi \in L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{Y})$, поскольку функции $\rho(\varphi(\cdot), z)$, $z \in \mathbb{Y}$, локально суммируемые. Известно [11, 12], что среди функций g , удовлетворяющих (5), существует минимальная, называемая *верхним градиентом* отображения φ и обозначаемая символом $|\nabla_0 \varphi|$. Минимальность $|\nabla_0 \varphi|$ означает, что если $g \in L_p(\Omega)$ удовлетворяет (5), то $|\nabla_0 \varphi| \leq g$ п. вс.

Отметим, что в определении 3 не требуется, чтобы отображение было измеримым. Измеримость отображения φ можно получить из других его свойств.

²⁾Точнее, из классов таких отображений, отождествляемых при совпадении п. вс.

Лемма 1. Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение, V — открытое множество в $\mathbb{Y}$.

Если для любой функции³⁾ $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$, $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, композиция $u \circ \varphi$ измерима, то $\varphi^{-1}(V)$ — измеримое множество, а $\varphi : \varphi^{-1}(V) \rightarrow V$ — измеримое отображение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольное открытое подмножество $W \subset V$. Функция $u_W(y) = \text{dist}(y, Y \setminus W)$ является 1-липшицевой. Зададим еще 1-липшицеву функцию $u_W^\varepsilon(y) = \max\{u_W(y) - \varepsilon, 0\}$. Поскольку $u_W^\varepsilon(y) > 0$ в том и только том случае, когда $\text{dist}(y, Y \setminus W) > \varepsilon$, то

$$\text{dist}(\text{spt } u_W^\varepsilon, Y \setminus W) \geq \text{dist}(\text{spt } u_W^\varepsilon, Y \setminus V) \geq \varepsilon > 0.$$

По предположению леммы функции $u_W^\varepsilon \circ \varphi$ измеримы, а потому и множества $\{x \in \Omega \mid (u_W^\varepsilon \circ \varphi)(x) > 0\}$ измеримы. Измеримость $\varphi^{-1}(W)$ следует из соотношений

$$\varphi^{-1}(W) = \{x \in \Omega \mid (u_W \circ \varphi)(x) > 0\} = \bigcup_{l=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid (u_W^{1/l} \circ \varphi)(x) > 0\}.$$

Поскольку прообраз всякого открытого множества измерим, то измерим прообраз всякого борелевского подмножества V , что и означает измеримость отображения $\varphi|_{\varphi^{-1}(V)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Рассуждая в точности так же, как в [9, следствие 1] и [14, предложение 4.1], где это свойство установлено для $W_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$, нетрудно показать, что в случае сепарабельного пространства $\mathbb{Y}$ класс $L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$ не расширится, если предполагать условия 1 и 2 верными не для всех липшицевых функций, а только для 1-липшицевых функций расстояния $u = u_{z_i} = \rho(\cdot, z_i)$, где z_i пробегает счетное плотное в $\mathbb{Y}$ множество. При этом запас функций g , удовлетворяющих (5), также не изменится.

Если $\mathbb{Y} = \mathbb{M}'$ — еще одно риманово многообразие с расстоянием d' , то получаем определение отображения класса Соболева различных римановых многообразий и обозначаем этот класс символом $W_{p, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{M}')$. В этом случае удобно использовать эквивалентное описание отображения класса Соболева (см., например, [14–16]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 [15, 16]. Измеримое отображение φ принадлежит классу $\text{ACL}_s(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ ($\text{ACL}_{s, \text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$), если выполняются три условия:

1) функция $\mathbb{M} \ni x \rightarrow [\varphi]_z(x) = d'(\varphi(x), z)$ принадлежит $L_{s, \text{loc}}(\mathbb{M})$ для любой точки $z \in \mathbb{M}'$;

2) для любой координатной карты $\eta : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ на $\mathbb{M}$ отображение $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{M}'$ можно изменить на множестве нулевой ω -меры так, чтобы φ стала абсолютно непрерывной на линиях в следующем смысле: функция⁴⁾

$$(\bar{x}_i, x_i) \in \text{Pr}_i(\varphi(U)) \times \{x_i \in \mathbb{R} : \bar{x}_i + x_i \mathbf{e}_i \in \eta(U)\} \mapsto g_i(\bar{x}_i, x_i) = \varphi \circ \eta^{-1}(\bar{x}_i + x_i \mathbf{e}_i) \in \mathbb{M}'$$

абсолютно непрерывна относительно переменной x_i для всех i и почти всех $\bar{x}_i \in \text{Pr}_i(\eta(U))$ (здесь $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, n$, — стандартный базис $\mathbb{R}^n$);

³⁾ $\text{spt } u = \{y \in \mathbb{Y} \mid u(y) \neq 0\}$ — носитель функции $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$.

⁴⁾ Здесь $\text{Pr}_i(A)$ — проекция множества $A \subset \mathbb{R}^n$ на $(n-1)$ -мерную плоскость $\Pi_i = \{x : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, ортогональную $\mathbf{e}_i$, т. е. $\text{Pr}_i(x) = (x - x_i \mathbf{e}_i)$ для точки $x \in \mathbb{R}^n$. Если $\text{Pr}_i(x) = \bar{x}_i$, то точку $x \in \mathbb{R}^n$ можно записывать в виде $x = (\bar{x}_i, x_i)$. Тогда $x = \bar{x}_i + x_i \mathbf{e}_i$.

3) производная

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = \frac{dg_i}{dx_i}(\bar{x}_i, x_i) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{g_i(\bar{x}, x_i + t)}{t},$$

существующая п. в. в U , принадлежит $L_s(U)$ ($L_{s,\text{loc}}(U)$) для всех i .

Предложение 1 [15, предложение 3.1]. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\varphi \in W_{s,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$;
- 2) $\varphi \in \text{ACL}_{s,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$;
- 3) $\varphi \in L_{s,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$ и существует функция $g \in L_{s,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ такая, что для любой липшицевой функции $f : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$ функция $h = f \circ \varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит $W_{s,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R})$ и $|\nabla h(x)| \leq g(x) \text{Lip}(f)$ п. в. в $\mathbb{M}$;
- 4) для любого изометрического вложения $i : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}^m$, $m \geq n^2 + 10n + 3$ [17, с. 319], все координатные функции композиции $i \circ f$ принадлежат $W_{s,\text{loc}}^1(\mathbb{M}, \mathbb{R})$.

В следующем предложении формулируется свойство локальной липшицевости соболевского отображения.

Предложение 2. Пусть $\varphi \in \text{ACL}_{s,\text{loc}}(\mathbb{M}, \mathbb{M}')$. Тогда существует представление $\mathbb{M} = E_\varphi \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ в виде дизъюнктного объединения измеримых множеств таких, что $\omega(E_\varphi) = 0$, A_i измеримо для всех i , а ограничение $\varphi|_{A_i}$ липшицево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение сформулированных выше свойств отображений классов Соболева позволяет свести доказательство этого предложения к известной аппроксимационной теореме Уитни (см., например, [18–20]).

Предложение 1 позволяет по-другому определить дифференциал. Матрица, столбцы которой — это векторы $\frac{d}{dt}g_i(x + t\mathbf{e}_i)|_{t=0} \in T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$, $i = 1, \dots, n$, определяет линейный оператор $D\varphi(x) : T_x\mathbb{M} \mapsto T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ касательного пространства $T_x\mathbb{M}$ в касательное пространство $T_{\varphi(x)}\mathbb{M}'$ для почти всех x и называется (формальным) дифференциалом отображения φ в точке x . Пусть $|D\varphi|(x)$ — норма этого оператора. В случае $\dim \mathbb{M} = \dim \mathbb{M}'$ определитель матрицы $D\varphi(x)$ называется якобианом отображения φ в точке x .

В качестве следствия предложения 2 получаем следующий вариант формулы замены переменной в интеграле Лебега. Напомним, что символ χ_A обозначает характеристическую функцию множества $A \subset \mathbb{M}$. Ниже $d\nu$ — стандартный элемент объема на римановом многообразии $\mathbb{M}'$. Символом $\omega(E)$ ($\nu(F)$) обозначаем далее меру $\omega(E) = \int_E \chi_E d\omega$ ($\nu(F) = \int_F \chi_F d\nu$) измеримого множества $E \subset \mathbb{M}$ ($F \subset \mathbb{M}'$)

Предложение 3 [18, 20]. Пусть $\mathbb{M}, \mathbb{M}'$ — римановы многообразия одинаковых размерностей. Пусть еще $U \subset \mathbb{M}$ — открытое множество, а $\varphi : U \rightarrow \mathbb{M}'$ — любое ACL -отображение.

Тогда существует некоторое подмножество $\Sigma_\varphi \subset U$ нулевой ω -меры такое, что отображение $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{M}'$ удовлетворяет $\mathcal{N}$ -условию Лузина.

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ справедливы следующие утверждения:

- 1) функции $U \ni x \mapsto u(x)|\det D\varphi(x)|$ и $\mathbb{M}' \ni y \mapsto \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$ измеримы;

2) верно равенство

$$\int_U u(x) |\det D\varphi(x)| d\omega(x) = \int_{\mathbb{M}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x) d\nu(y); \quad (6)$$

3) если дополнительно функция $U \ni x \mapsto u(x) |\det D\varphi(x)|$ интегрируема, то подынтегральная функция в правой части равенства (6) также интегрируема и верна формула (6).

1.3. Квазиаддитивная функция множества. Функция множества $\Phi : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow [0; +\infty]$, заданная на системе $\mathcal{O}(\Omega)$ всех открытых подмножеств области $\Omega \subset \mathbb{M}$ называется *квазиаддитивной*, если

1) для всякой точки $x \in \Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что $\Phi(B(x, r)) < \infty$ при $r < \delta$;

2) для всякого конечного дизъюнктного набора $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}(\Omega)$ такого, что $U_1 \cup \dots \cup U_k \subset U \in \mathcal{O}(\Omega)$, выполняется

$$\sum_{j=1}^k \Phi(U_j) \leq \Phi(U).$$

Предложение 4 [21, следствие 5]. Пусть $\Phi : \mathcal{O}(\Omega) \rightarrow [0; +\infty]$ — квазиаддитивная функция, где Ω — область на римановом пространстве $\mathbb{M}$. Тогда

(а) для п. вс. $x \in \Omega$ существует конечная производная

$$\Phi'(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0, B_\delta \ni x} \frac{|\Phi(B_\delta)|}{\omega(B_\delta)},$$

где B_δ — произвольный шар в метрике d радиуса δ , содержащий точку x ;

(б) Φ' — измеримая функция;

(с) для любого $U \in \mathcal{O}(\Omega)$ выполняется

$$\int_U \Phi'(x) d\omega(x) \leq \Phi(U).$$

ПРИМЕР 1. Пусть $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ — гомеоморфизм областей $\Omega \subset \mathbb{M}$, $\Omega' \subset \mathbb{M}'$ в римановых пространствах $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ одинаковых размерностей. Функция открытого множества

$$\mathcal{O}(\Omega) \ni U \mapsto \nu(\varphi(U))$$

(квази)аддитивная. По предложению 4 для п. вс. $x \in \Omega$ существует предел

$$J(x, \varphi) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\nu(\varphi(U))}{\omega(B(x, r))}, \quad (7)$$

называемый *объемной производной* φ . Если гомеоморфизм φ принадлежит $W_{1, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$, то объемная производная совпадает с модулем якобиана: $J(\cdot, \varphi) = |\det D\varphi|$ п. вс. [4, лемма 2.1].

ПРИМЕР 2. В условиях теоремы 2 для $1 \leq q < p < \infty$ и $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ определим функцию открытого множества $V \subset \Omega'$, полагая

$$\Phi(V) = \left(\sup \left\{ \frac{\|u \circ \varphi\|_{L_q^1(\Omega)}}{\|u\|_{L_p^1(\Omega')}} \mid u \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega'), \text{ spt } u \Subset V, \|u\|_{L_p^1(\Omega')} \neq 0 \right\} \right)^\sigma. \quad (8)$$

Функция (8) *квазиаддитивная* (см. [4, лемма 3.1]), и $\Phi(\Omega') \leq \|\varphi^*\|^\sigma$.

2. Вспомогательные свойства

I. Доказательство следующего известного факта, приводимое ниже, есть прямолинейное обобщение рассуждений для $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ из [19, § 4.2, теорема 4]. Для функции $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{M}$, обозначим символами χ_+ и χ_- характеристические функции множеств $\{x \mid u(x) > 0\}$ и $\{x \mid u(x) < 0\}$ соответственно.

Предложение 5. Пусть $u \in L_q^1(\Omega)$, где Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $1 \leq q < \infty$, а производная функции $F \in C^1(\mathbb{R})$ ограничена. Справедливы следующие утверждения.

1. $F \circ u \in L_q^1(\Omega)$, причем $\nabla(F \circ u)(x) = F'(u(x))\nabla u(x)$ п. вс.

2. Функции $u^+ = \max\{u, 0\}$, $u^- = -\min\{u, 0\}$, $|u|$ принадлежат $L_q^1(\Omega)$, причем

$$\nabla u^+ = \chi_+ \nabla u, \quad \nabla u^- = -\chi_- \nabla u, \quad \nabla |u| = \operatorname{sgn} u \cdot \nabla u$$

п. вс. Отсюда следует, что $\nabla u = 0$ п. вс. на множестве $\{x \mid u(x) = 0\}$ и что $|\nabla u| = |\nabla |u||$ п. вс.

3. Срезки

$$u_M(x) = \operatorname{cut}_M u(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} u(x) \cdot M, & |u(x)| \geq M, \\ u(x), & |u(x)| < M, \end{cases}$$

функции u принадлежат $L_q^1(\Omega)$ и $\nabla u_M \rightarrow \nabla u$ в $L_q(\Omega)$ при $M \rightarrow +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку результат локальный, переходя в компактную координатную окрестность, можно считать, что $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, функция u принадлежит $L_q^1(\Omega)$ и имеет конечный интеграл Дирихле: $\int_{\Omega} |\nabla u|^q(x) dx < \infty$. В силу предложения 1 (см. также [22, разд. 1.1.3, теорема 1]) функцию u можно переопределить на множестве нулевой меры так, что она станет абсолютно непрерывной на почти всех прямых, параллельных любой координатной оси. Отсюда модуль $|u|$ обладает тем же свойством, тогда тем же свойством обладают u^+ и u^- . Отсюда выводим справедливость всех трех утверждений предложения 5.

II. В [14] и [23] установлены эквивалентные описания отображений класса Решетняка $W_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$. Необходимые рассуждения без изменений переносятся и на случай класса $L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$.

Известно⁵⁾, что у отображения $\varphi \in \operatorname{ACL}(\Omega; \mathbb{Y})$ п. вс. существуют метрические частные производные

$$\operatorname{m}X_j \varphi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\varphi(\exp(hX_j)(x)), \varphi(x))}{|h|} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{\ell_{\varphi,j}(x, h)}{h},$$

где X_j — векторное поле в окрестности точки x , а $\ell_{\varphi,j}(x, h)$ — длина кривой $t \mapsto \varphi(\exp(tX_j)(x))$ на промежутке $[0; h]$.

Предложение 6 [23, § 5; 14, предложение 4.2]. Пусть $(\mathbb{Y}, d)$ — полное сепарабельное метрическое пространство, Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $1 \leq p \leq \infty$, а $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение. Следующие условия эквивалентны:

1) $\varphi \in L_p^1(\Omega; \mathbb{Y})$;

2) $\varphi \in L_{1,\operatorname{loc}}(\Omega; \mathbb{Y}) \cap \operatorname{ACL}(\Omega; \mathbb{Y})$ и $\operatorname{m}X_j \varphi \in L_p(\Omega)$, $j = 1, \dots, n$.

⁵⁾См., например, [11, теорема 2.7.6], где это доказано для липшицевых кривых. В случае абсолютно непрерывных кривых и ACL-отображений рассуждения требуют лишь незначительных модификаций.

Если $X_1, \dots, X_n$ — ортонормированный базис на окрестности $U \subset \Omega$, то $mX_j\varphi \leq |\nabla_0\varphi| \leq \left(\sum_{i=1}^n (mX_i\varphi)^2\right)^{1/2}$ п. вс.

Если дополнительно $(\mathbb{Y}, \rho) = (\mathbb{M}', d')$ — риманово пространство с римановой метрикой d' , то каждое из условий 1 и 2 эквивалентно следующему:

3) $\varphi \in L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{M}') \cap \text{ACL}(\Omega; \mathbb{M}')$ и $|D\varphi| \in L_p(\Omega)$.

При этом $mX_j\varphi = |X_j\varphi|$ п. вс., $j = 1, \dots, n$.

III. В заключение данного раздела покажем избыточность предположения об ограниченности оператора композиции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Вещественное или комплексное линейное пространство X называется F -пространством, если на нем задана метрика ρ такая, что

1) $\rho(x_1 + x_3, x_2 + x_3) = \rho(x_1, x_2)$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in X$;

2) (X, ρ) — полное метрическое пространство;

3) операции сложения и умножения на скаляр непрерывны в метрике ρ , т. е. если последовательность чисел $\{\alpha_n\}$ сходится к (конечному) числу α , а последовательности векторов $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся по метрике ρ к $x \in X$ и $y \in X$ соответственно, то

$$\rho(\alpha_n x_n, \alpha x) \rightarrow 0, \quad \rho(x_n + y_n, x + y) \rightarrow 0.$$

Предложение 7 [6]. Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $1 \leq q \leq \infty$. Пусть отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ таково, что $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$ для любой $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$.

Тогда оператор композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_q^1(\Omega)$$

ограниченный.

Приведенное в [6] доказательство этого предложения для групп Карно успешно работает также и на римановых многообразиях.

3. Функциональное описание гомеоморфизмов класса Решетняка

Пусть, как и прежде, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Если отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ принадлежит $L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$, $1 \leq q \leq \infty$, то оно индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi. \quad (9)$$

Действительно, поскольку $|\nabla(u \circ \varphi)| \leq |\nabla_0\varphi| \text{Lip}(u) \in L_q(\Omega)$ п. вс., то

$$\|u \circ \varphi\|_{L_q^1(\Omega)} \leq \| |\nabla_0\varphi| \|_{L_q(\Omega)} \cdot \text{Lip}(u).$$

Отсюда $\|\varphi^*\| \leq \| |\nabla_0\varphi| \|_{L_q(\Omega)}$ (здесь $\nabla_0\varphi$ — верхний градиент, см. определение перед леммой 1).

Предположим, что выполнено обратное: пусть какое-либо отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции (9), $1 \leq q < \infty$. Верно ли, что φ является отображением класса $L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$? В этой работе получен положительный ответ на этот вопрос в случае, когда φ — гомеоморфизм.

Для открытого множества $V \subset \mathbb{Y}$ положим

$$\Psi(V) = \sup \left\{ \int_{\Omega} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \mid u \in \text{Lip}(\mathbb{Y}), \text{Lip}(u) \leq 1, \text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0 \right\}. \quad (10)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Мы полагаем $\text{dist}(A, \emptyset) = +\infty$. Поэтому при $V = \mathbb{Y}$ супремум в определении Ψ берется по всем 1-липшицевым функциям u . Значит, $\Psi(\mathbb{Y}) = \|\varphi^*\|^q$. Подчеркнем еще равенство $\Psi(\emptyset) = 0$ и монотонность Ψ по включению.

Теорема 2. Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, а гомеоморфизм $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi, \quad 1 \leq q < \infty.$$

Тогда $\varphi \in L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$. Более того,

$$\int_U |\nabla_0 \varphi|(x)^q dx = \Psi(\varphi(U))$$

для каждого открытого множества $U \subset \Omega$. В частности⁶⁾,

$$|\nabla_0 \varphi|^q = (\Psi \circ \varphi)' \quad \text{п. в.с.} \quad \text{и} \quad \|\nabla_0 \varphi\|_{L_q(\Omega)} = \|\varphi^*\|.$$

По определению Ψ (см. (10)) для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$, $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, выполняется неравенство

$$\int_{\varphi^{-1}(V)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \leq \Psi(V) \text{Lip}(u)^q. \quad (11)$$

Покажем, что в оценке (11) можно избавиться от условия на носитель функции u .

Лемма 2 (С. В. Павлов [6, лемма 4.2]). Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство, $1 \leq q < \infty$, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ — отображение, $V \subset \mathbb{Y}$ — открытое множество, $A \geq 0$ — число.

Предположим, что для всякой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, выполняется $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$ и

$$\int_{\varphi^{-1}(V)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \leq A. \quad (12)$$

Тогда (12) выполняется для каждой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ такой, что $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$.

С. В. Павлов сформулировал и доказал эту лемму для отображений, заданных на областях группы Карно (см. [6, лемма 4.2]). Однако «метрическая природа» этой леммы позволяет расширить ее применения на широкий класс метрических структур.

⁶⁾Здесь $(\Psi \circ \varphi)'$ — производная квазиаддитивной функции $U \mapsto \Psi(\varphi(U))$ (см. лемму 3 и предложение 4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Здесь приведем только первый шаг доказательства этой леммы, на который далее будет ссылка в доказательстве леммы 3.

ШАГ 1. Рассмотрим произвольную 1-липшицеву функцию $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$. Предположим сначала, что u ограничена на V . Обозначим $M = \sup_{y \in V} |u(y)| < \infty$. С помощью симметризации относительно линии уровня построим 1-липшицеву функцию $\bar{u}$ со следующими свойствами: $\bar{u} \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$, $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\bar{u} \circ \varphi)|$ п. вс. и $|\bar{u}| \leq \frac{M}{2}$ на V . Для этого рассмотрим непрерывную кусочно-линейную функцию вещественного аргумента $t \in [-M; M]$:

$$\text{sym}_M(t) = \left| M - \left| t - \frac{M}{2} \right| \right| - \frac{M}{2}, \quad |t| \leq M.$$

Поскольку симметризирующая функция представима в виде композиций модулей и сдвигов, то в силу п. 2 предложения 5 функция $\bar{u} = \text{sym}_M \circ u$ удовлетворяет равенству $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\bar{u} \circ \varphi)|$ п. вс., так как $\bar{u} \circ \varphi = \text{sym}_M \circ (u \circ \varphi)$, где $u \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$.

Итерируя этот процесс достаточное количество раз, приходим к 1-липшицевой на $\mathbb{Y}$ функции $\bar{u}$ такой, что $\bar{u} \circ \varphi \in L_q^1(\Omega)$, $|\nabla(u \circ \varphi)| = |\nabla(\bar{u} \circ \varphi)|$ п. вс. и $|\bar{u}| \leq \delta$ на V , где δ — произвольное наперед заданное положительное число. Получаемую таким образом функцию $\bar{u}$ будем называть *Lip-измельчением* (липшицевым измельчением) u .

Оставшиеся шаги 2 и 3 доказательства — почти дословное повторение аргументов работы [6, лемма 4.2].

Лемма 3. Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$, $(\mathbb{Y}, \rho)$ — метрическое пространство. Если отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad \varphi^* u = u \circ \varphi, \quad 1 \leq q < \infty,$$

то неравенство (11) выполнено для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$, а функция Ψ квазиаддитивная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая часть заключения непосредственно следует из неравенства (11), справедливого для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$, $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus V) > 0$, и леммы 2, в которой следует положить $A = \Psi(V)$.

Докажем квазиаддитивность Ψ , модифицируя аргументы в [4, лемма 3.1] и [6, теорема 4.1]. Пусть V_1 и V_2 — непустые непересекающиеся открытые множества в $\mathbb{Y}$. Рассмотрим 1-липшицевы функции u_i , $i = 1, 2$, такие, что

$$\int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q dx \geq \Psi(V_i) - \varepsilon, \quad \text{dist}(\text{spt } u_i, \mathbb{Y} \setminus V_i) > 0.$$

Для достаточно большого $M > 0$ имеем (см. предложение 5)

$$\int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\tilde{u}_i \circ \varphi)(x)|^q dx \geq \int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q dx - \varepsilon,$$

где $\tilde{u}_i = \text{cut}_M u_i$. Расстояние $r = \text{dist}(\text{spt } u_1, \text{spt } u_2)$ положительное. Рассмотрим Lip-измельчения $\bar{u}_i$ функций $\tilde{u}_i$ такие, что $|\bar{u}_i| \leq r/2$ на $\mathbb{Y}$ (см. шаг 1 доказательства леммы 2). Функция $u = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ равна $\bar{u}_i$ на $\text{spt } u_i$, $i = 1, 2$, и нулю в

остальных точках, поэтому является 1-липшицевой в силу выбора уровня Lip -измельчения: если $y_i \in \text{spt } u_i$, $i = 1, 2$, то

$$|u(y_1) - u(y_2)| = |\bar{u}_1(y_1) - \bar{u}_2(y_2)| \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \text{dist}(\text{spt } u_1, \text{spt } u_2) \leq d(y_1, y_2)$$

(при остальных расположениях пары точек y_i такая же оценка приращений функции u очевидна). Требуемое теперь выводим из неравенств⁷⁾

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \Psi(V_i) - 4\varepsilon &\leq \sum_{i=1}^2 \int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(u_i \circ \varphi)(x)|^q dx - 2\varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\tilde{u}_i \circ \varphi)(x)|^q dx = \sum_{i=1}^2 \int_{\varphi^{-1}(V_i)} |\nabla(\bar{u}_i \circ \varphi)(x)|^q dx \\ &= \int_{\varphi^{-1}(V_1 \cup V_2)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \leq \Psi(V_1 \cup V_2). \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Функция открытого множества $\Psi \circ \varphi : U \mapsto \Psi(\varphi(U))$ квазиаддитивная, поскольку Ψ является квазиаддитивной по лемме 3, а φ — гомеоморфизм. По лемме 2 неравенство (11) выполняется для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$. Поэтому, полагая $V = \varphi(B(z, r))$, где $B(z, r) \Subset \Omega$ — шар, и деля (11) на $|B(z, r)|$, получаем неравенство

$$\frac{1}{|B(z, r)|} \int_{B(z, r)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \leq \frac{\Psi(\varphi(B(z, r)))}{|B(z, r)|} \text{Lip}(u)^q$$

для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$. Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$, по теореме Лебега о дифференцировании интеграла и по предложению 4 выводим, что

$$|\nabla(u \circ \varphi)| \leq ((\Psi \circ \varphi)')^{1/q} \text{Lip}(u) \quad \text{п. вс.},$$

где мажоранта в правой части принадлежит $L_q(\Omega)$ (предложение 4). Отсюда $\varphi \in L_q^1(\Omega; \mathbb{Y})$ и $|\nabla_0 \varphi|^q \leq (\Psi \circ \varphi)'$ п. вс. По предложению 4 имеем

$$\int_U |\nabla_0 \varphi|^q dx \leq \int_U (\Psi \circ \varphi)'(x) dx \leq \Psi(\varphi(U)).$$

Для проверки обратного неравенства рассмотрим функцию $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$ со свойствами: $\text{Lip}(u) \leq 1$ и $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus \varphi(U)) > 0$. Тогда $\nabla(u \circ \varphi) = 0$ п. вс. вне U (см. п. 2 предложения 5) и поэтому

$$\int_{\Omega} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx = \int_U |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \leq \int_U |\nabla_0 \varphi|^q dx.$$

В силу произвольности $u : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{Lip}(u) \leq 1$, $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{Y} \setminus \varphi(U)) > 0$, отсюда вытекает

$$\Psi(\varphi(U)) \leq \int_U |\nabla_0 \varphi|^q dx.$$

Отметим крайнюю простоту случая $q = \infty$.

⁷⁾ Отметим, что в силу п. 2 предложения 5 градиент $\nabla(u \circ \varphi)$ почти всюду совпадает с $\nabla(\bar{u}_i \circ \varphi)$ на $\varphi^{-1}(\text{spt } \bar{u}_i)$, $i = 1, 2$, и равен нулю в почти всех остальных точках области Ω .

Предложение 8. Пусть отображение $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{Y}$ области Ω в римановом пространстве $\mathbb{M}$ в метрическое пространство $(\mathbb{Y}, \rho)$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : \text{Lip}(\mathbb{Y}) \rightarrow L_\infty^1(\Omega).$$

Тогда $\varphi \in L_\infty^1(\Omega; \mathbb{Y})$ и $\| |\nabla_0 \varphi| \mid L_\infty(\Omega) \| = \|\varphi^*\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По условию для всех $u \in \text{Lip}(\mathbb{Y})$ имеем

$$|\nabla(u \circ \varphi)(x)| \leq \|u \circ \varphi \mid L_\infty^1(\Omega)\| \leq \text{Lip}(u) \cdot \|\varphi^*\|$$

для п. вс. $x \in \Omega$. Это и означает, что $\varphi \in L_\infty^1(\Omega; \mathbb{Y})$ и $\| |\nabla_0 \varphi| \mid L_\infty(\Omega) \| \leq \|\varphi^*\|$. Обратное неравенство устанавливается аналогично тому, как это сделано в случае $q < \infty$ в доказательстве теоремы 2.

4. Применения к теории операторов композиции однородных пространств Соболева

Пусть Ω — область в римановом пространстве $\mathbb{M}$. Отображение φ из класса $\text{ACL}(\Omega; \mathbb{M}')$ называется отображением с *конечным искажением*, если $D\varphi = 0$ п. вс. на множестве нулей якобиана $Z = \{x \in \Omega \mid \det D\varphi(x) = 0\}$. Внешняя функция искажения $K_p(\cdot, \varphi)$, $p \in [1; \infty)$, определяется по правилу

$$K_p(x, \varphi) = \begin{cases} \frac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Теорема 3. Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ — римановы пространства одинаковой размерности, Ω — область в $\mathbb{M}$, а $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{M}'$ — гомеоморфизм. Оператор композиции

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega) \quad (14)$$

ограничен при фиксированных $1 \leq q \leq p < \infty$ тогда и только тогда, когда

- 1) $\varphi \in W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{M}')$;
- 2) φ обладает конечным искажением: $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : \det D\varphi(x) = 0\}$ нулей якобиана;
- 3) внешняя функция искажения (13) принадлежит $L_\sigma(\Omega)$, где $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\sigma = \infty$ при $q = p$): $K_p(\cdot, \varphi) \in L_\sigma(\Omega)$;
- 4) $\|\varphi^*\| = \|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\|$.

Пространство $\text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)$ состоит из заданных на Ω функций, липшицевых в метрике риманова пространства $\mathbb{M}'$ на каждом компакте $K \Subset \Omega$.

Теорема 3 устанавливает тесную связь отображений с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть оператор (14) ограничен. Будем считать, что $q < p$, так как при $q = p$ доказательство лишь упрощается. В условиях теоремы 3 функция (10) открытого множества $\Omega' \supset V \mapsto \Phi(V)$ квазиаддитивная и $\Phi(\Omega') \leq \|\varphi^*\|^\sigma$ (см. [4, лемма 3.1]). Здесь $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$. Для 1-липшицевой функции u с компактным носителем в⁸⁾ $V \Subset \Omega'$ имеем

$$\|u \mid L_p^1(\Omega')\| \leq |V|^{1/p}.$$

⁸⁾Для таких открытых множеств компактное включение $\text{spt } u \Subset V$ равносильно тому, что $\text{dist}(\text{spt } u, \mathbb{G} \setminus V) > 0$.

Отсюда и по определению Φ для 1-липшицевой функции $u : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$, $\text{spt } u \in V$, выполняются неравенства

$$\left(\int_{\varphi^{-1}(V)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \Phi(V)^{1/\sigma} \|u\|_{L_p^1(\Omega')} \leq \Phi(V)^{1/\sigma} |V|^{1/p}. \quad (15)$$

По лемме 2 неравенство (15) верно для всех⁹⁾ 1-липшицевых функций $u : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$. Фиксируем 1-липшицеву функцию $u : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$. Подставим в (15) образ $V = \varphi(B(z, r))$ субриманова шара $B(z, r) \in \Omega$ и поделим обе части (15) на $|B(z, r)|^{1/q}$:

$$\left(\frac{1}{|B(z, r)|} \int_{B(z, r)} |\nabla(u \circ \varphi)(x)|^q dx \right)^{1/q} \leq \left(\frac{\Phi(\varphi(B(z, r)))}{|B(z, r)|} \right)^{1/\sigma} \left(\frac{|\varphi(B(z, r))|}{|B(z, r)|} \right)^{1/p}.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow 0$, по теореме Лебега о дифференцировании интеграла и по предложению 4 получаем, что для любой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$

$$|\nabla(u \circ \varphi)| \leq ((\Phi \circ \varphi)')^{1/\sigma} J(\cdot, \varphi)^{1/p} \quad \text{п. в. в } \Omega,$$

где $\Phi \circ \varphi : U \mapsto \Phi(\varphi(U))$ — квазиаддитивная функция, $(\Phi \circ \varphi)'$ — ее производная, а $J(\cdot, \varphi)$ — объемная производная гомеоморфизма φ (см. (7)). Правая часть последнего неравенства принадлежит $L_{q, \text{loc}}(\Omega)$. Действительно, поскольку $q/p + q/\sigma = 1$, для $U \in \Omega$ выводим (см. п. (с) предложения 4)

$$\begin{aligned} \int_U ((\Phi \circ \varphi)'(x))^{q/\sigma} J(x, \varphi)^{q/p} dx &\leq \left(\int_U ((\Phi \circ \varphi)'(x)) dx \right)^{q/\sigma} \left(\int_U J(x, \varphi) dx \right)^{q/p} \\ &\leq (\Phi(\varphi(U)))^{q/\sigma} |\varphi(U)|^{q/p} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, $\varphi \in W_{q, \text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{M}')$ (см. предложение 1) и

$$|\nabla_0 \varphi| \leq ((\Phi \circ \varphi)')^{1/\sigma} J(\cdot, \varphi)^{1/p} \quad \text{п. в.} \quad (16)$$

Поскольку $J(\cdot, \varphi) = |\det D\varphi|$ п. в. (см. п. 1.3) и¹⁰⁾

$$|D\varphi| \leq \left(\sum_{j=1}^n |X_j \varphi|^2 \right)^{1/2} \leq n^{1/2} |\nabla_0 \varphi| \quad \text{п. в.},$$

то φ обладает конечным искажением. Для отображений с конечным искажением $|\nabla_0 \varphi| = |D\varphi|$ п. в. [7, свойство 1, следствие 2]. Таким образом, можно записать (16) в виде

$$|D\varphi| \leq ((\Phi \circ \varphi)')^{1/\sigma} |\det D\varphi|^{1/p}.$$

Отсюда $K_p(\cdot, \varphi)^\sigma \leq (\Phi \circ \varphi)' \in L_1(\Omega)$. По предложению 4 для любого открытого множества $U \subset \Omega$ имеем

$$\int_U K(x, \varphi)^\sigma(x) dx \leq \int_U (\Phi \circ \varphi)'(x) dx \leq \Phi(\varphi(U)) \leq \|\varphi^*\|^\sigma < \infty.$$

Обратные неравенства $\int_U K_p(x, \varphi)^\sigma dx \geq \Phi(\varphi(U))$, а также неравенство $\|K_p(\cdot, \varphi)\|_{L_\sigma(\Omega)} \geq \|\varphi^*\|$, доказаны в [7, теоремы 2 и 3].

⁹⁾Если подобласть $W \in \Omega$ содержит $\varphi^{-1}(V)$, то $u \circ \varphi \in L_q^1(W)$. Поэтому лемма 2 применима для любой 1-липшицевой функции $u : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}$ с заменой Ω на W . Отметим, что в (15) область W не влияет на значение интеграла, поскольку существенная область интегрирования — открытое множество $\varphi^{-1}(V) \subset W$.

¹⁰⁾Первое неравенство здесь можно получить из ортонормированности векторов X_j , а второе — из оценок $|X_j \varphi| \leq |\nabla_0 \varphi|$ (предложение 6).

Следствие 1. В условиях теоремы 3 при $q < p$ для всех открытых множеств $U \subset \Omega$ выполняется

$$\int_U K_p(x, \varphi)^\sigma dx = \Phi(\varphi(U)).$$

В частности, $K_p(x, \varphi)^\sigma = (\Phi \circ \varphi)'(x)$ для п. вс. $x \in \Omega$. Кроме того, для всех $1 \leq q \leq p < \infty$ справедливо равенство

$$\|K_p(\cdot, \varphi) \mid L_\sigma(\Omega)\| = \|\varphi^*\|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Водопьянов С. К. Формула Тейлора и функциональные пространства. Новосибирск: НГУ, 1988.
2. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Пространства Соболева и (P, Q) -квазиконформные отображения групп Карно // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 4. С. 776–795.
3. Водопьянов С. К., Томилов А. О. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Изв. РАН. Сер. мат. 2021. Т. 85, № 5. С. 58–109.
4. Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 2. С. 283–315.
5. Водопьянов С. К. О совпадении функций множества в квазиконформном анализе // Мат. сб. 2022. Т. 213, № 9. С. 3–33.
6. Pavlov S. V., Vodop'yanov S. K. Reshetnyak-class mappings and composition operators // Anal. Math. Phys. 2025. V. 15.
7. Водопьянов С. К. Операторы композиции в пространствах Соболева на римановых многообразиях // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 6. С. 1128–1154.
8. Cheeger J., Gromov M., Taylor M. Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds // J. Differ. Geom. 1982. V. 17, N 1. P. 15–53.
9. Решетняк Ю. Г. Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
10. Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским // Мат. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3–32.
11. Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
12. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
13. Kantorovich L. V., Akilov G. P. Functional analysis. Oxford, etc.: Pergamon Press, 1982.
14. Vodop'yanov S. K. $\mathcal{P}$ -differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Proceedings on Analysis and Geometry. Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. P. 603–670.
15. Troyanov M., Vodop'yanov S. Liouville type theorems for mappings with bounded (co-)distortion // Ann. l'Inst. Fourier. 1998. V. 52, N 6. P. 1753–1784.
16. Vodop'yanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // Contemp. Math. 2007. V. 424. P. 247–302.
17. Громов М. Дифференциальные соотношения с частными производными. М.: Мир, 1990.
18. Federer H. Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1960.
19. Evans L. C., Gariepy R. F. Measure theory and fine properties of functions. Boca Raton; London; New York; Washington, D.C.: CRC Press, 1992.
20. Hajłasz P. Change of variables formula under the minimal assumptions // Colloq. Math. 1993. V. 64, N 1. P. 93–101.
21. Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Функции множества и их приложения в теории пространств Лебега и Соболева. I // Мат. тр. 2003. Т. 6, № 2. С. 14–65.
22. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.

- 23.** Водопьянов С. К. Отображения с ограниченным искажением и с конечным искажением на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 764–804.

Поступила в редакцию 4 апреля 2025 г.

После доработки 24 мая 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Водопьянов Сергей Константинович (ORCID 0000-0003-1238-4956)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

`vodopis@math.nsc.ru`

НОВЫЕ ПРИМЕРЫ НЕПРОНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУПП НЕЧЕТНЫХ ИНДЕКСОВ В КОНЕЧНЫХ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ И УНИТАРНЫХ ГРУППАХ

Ц. Го, В. Го, Н. В. Маслова, Д. О. Ревин

Аннотация. Подгруппа H группы G называется *пронормальной*, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$. Известно, что значительная часть конечных простых групп обладает свойством (*): любая подгруппа нечетного индекса пронормальна в группе. К настоящему времени конечные простые группы со свойством (*), за исключением простых линейных и унитарных групп с некоторыми ограничениями на естественные арифметические параметры, классифицированы. В 2024 г. была начата классификация простых линейных и унитарных групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. План состоит в нахождении источников всех возможных примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов, а затем в доказательстве того, что других примеров нет. В 2024 г. найдены серии примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах над полем нечетной характеристики. В настоящей работе строится новая серия примеров непронормальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах над полем нечетной характеристики.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.405

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, линейная простая группа, унитарная простая группа, пронормальная подгруппа, нечетный индекс.

Введение

Подгруппа H группы G называется *пронормальной* в G (обозначение $H \text{ prn } G$), если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в подгруппе $\langle H, H^g \rangle$.

Понятие пронормальной подгруппы было введено Ф. Холлом [1] и оказалось весьма полезным. В терминах пронормальности допускают описание, а иногда могут быть полностью решены, некоторые важные вопросы теории групп, алгебраической комбинаторики и других областей. Пронормальность тесно связана с широко используемым в теории групп и алгебраической комбинаторике рассуждением, известным как аргумент Фраттини (см. [2, лемма 4]). О том, что изучение пронормальных подгрупп в теории групп вообще и теории конечных групп, в частности, является актуальной задачей, привлекающей внимание

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного фонда естественных наук (NNSF) Китая, проекты 12361003 и 12171126, и Хайнаньского провинциального фонда естественных наук Китая (Hainan Provincial Natural Science Foundation of China), проект 122RC543. Часть исследований выполнена в рамках государственного задания Института математики СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

исследователей и имеющей многочисленные приложения, свидетельствует, например, обзор [3] и недавние работы [4–9].

Хорошо известными примерами пронормальных подгрупп являются такие классические объекты теории групп, как нормальные или максимальные подгруппы, силовские подгруппы конечных групп, холловы подгруппы конечных разрешимых групп.

В простой конечной группе G максимальные подгруппы являются частным случаем максимальных $\mathfrak{X}$ -подгрупп, где в качестве $\mathfrak{X}$ берется класс всех конечных групп, у которых порядки неабелевых композиционных факторов строго меньше, чем порядок группы G (напомним, что подгруппу H группы G называют $\mathfrak{X}$ -подгруппой, если H изоморфна некоторой группе из класса $\mathfrak{X}$). Такой класс $\mathfrak{X}$ оказывается полным в смысле Виланда, т. е. подобно классу разрешимых групп замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений. В свое время существовала гипотеза о том, что для любого полного класса групп $\mathfrak{X}$ в любой конечной простой группе все максимальные $\mathfrak{X}$ -подгруппы пронормальны [10, проблема 5.20]. Однако недавно [11] были построены примеры простых групп G и полных классов $\mathfrak{X}$ таких, что G содержит непронормальную максимальную $\mathfrak{X}$ -подгруппу.

В [12] было доказано, что холловы подгруппы, т. е. подгруппы, у которых порядок и индекс взаимно просты, пронормальны в конечных простых группах, и выдвинута гипотеза, согласно которой в любой конечной простой группе всякая подгруппа нечетного индекса (т. е. надгруппа силовской 2-подгруппы) пронормальна. Эта гипотеза инициировала серию работ [2, 13–20]. Вначале в [13] гипотезу удалось подтвердить для большого массива конечных простых групп. Однако в работе [14] гипотеза была опровергнута.

В настоящее время существует гипотеза (см., например, [11, проблема 2]), являющаяся ослаблением обеих упомянутых выше гипотез и состоящая в том, что в конечных простых группах максимальные $\mathfrak{X}$ -подгруппы нечетных индексов пронормальны для любого полного класса $\mathfrak{X}$. Существует также программа классификации конечных простых групп, в которых все подгруппы нечетных индексов пронормальны. Эта программа основана на описании нормализаторов силовских 2-подгрупп в конечных простых группах, полученном А. С. Кондратьевым [21], а также на классификации максимальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых классических группах, полученной Либекком и Сакслон [22], Кантором [23] и Н. В. Масловой [24–26]. Выполнение этой программы, представляющей самостоятельный интерес, позволило бы продвинуться и в изучении только что сформулированной гипотезы.

На момент публикации программа выполнена [2, 15–17] для всех конечных простых групп за исключением групп $PSL_n^\pm(q)$, где $PSL_n^+(q) = PSL_n(q)$ и $PSL_n^-(q) = PSU_n(q)$, а q и n не являются степенями двойки. Разбор этих случаев начат в работе [19]. План состоит в нахождении сначала всевозможных примеров непронормальных подгрупп нечетного индекса, определении, при каких $\varepsilon \in \{+, -\}$, n и q эти примеры возникают в группе $PSL_n^\varepsilon(q)$, а затем в доказательстве с помощью техники, разработанной в статьях [2, 13, 14], того, что при всех оставшихся значениях указанных параметров всякая подгруппа нечетного индекса в группе $PSL_n^\varepsilon(q)$ пронормальна. Уже найденные в [19] примеры показывают, что случай групп $PSL_n^\varepsilon(q)$ наиболее сложный.

В данной работе будут указаны новые источники примеров непронормальных подгрупп нечетного индекса в линейных и унитарных группах. Цель работы — доказать приведенную ниже теорему 1. В ее формулировке используется

понятие r -части числа: если m — натуральное, а r — простое число, то r -частью m_r числа m называется наибольшая степень числа r , на которую делится m .

Теорема 1. Пусть $n \geq 3$, $\varepsilon \in \{+, -\}$ и q является степенью простого нечетного числа. Допустим, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ и $(q - \varepsilon 1)_r > n_r > 1$ для некоторого нечетного простого числа r . Тогда группа $PSL_n^\varepsilon(q)$ содержит непрономальную подгруппу нечетного индекса.

Условия теоремы реализуются, скажем, для группы $PSL_3(37)$ и $r = 3$. Стабилизатор K в группе $PSL_3(37)$ разложения пространства V в прямую сумму трех одномерных подпространств

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$$

является подгруппой нечетного индекса в $PSL_3(37)$, и наибольшая нормальная 3-подгруппа $O_3(K)$ группы K обладает дополнением H_0 в K . Подгруппа H_0 также имеет нечетный индекс в $PSL_3(37)$ и не пронормальна в K и в $PSL_3(37)$, как следует из доказательства теоремы 1.

Авторы надеются, что теорема 1 вместе с результатами работы [19] исчерпывает источники примеров непрономальных подгрупп нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах.

1. Вспомогательные результаты

Лемма 1 [13, лемма 3]. Пусть H — подгруппа, N — нормальная подгруппа конечной группы G и $\pi: G \rightarrow G/N$ — естественный эпиморфизм. Справедливы следующие утверждения:

- (1) если $H \text{ prn } G$, то $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$;
- (2) если $N \leq H$ и $\overline{H} \text{ prn } \overline{G}$, то $H \text{ prn } G$.

В частности, подгруппа H нечетного индекса пронормальна в группе G тогда и только тогда, когда ее образ $H/O_2(G)$ пронормален в факторгруппе $G/O_2(G)$.

Лемма 2 [14, теорема 1]. Пусть H и V — подгруппы конечной группы G такие, что V — абелева нормальная подгруппа в G и $G = HV$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- (1) подгруппа H пронормальна в G ;
- (2) $U = N_U(H)[H, U]$ для любой H -инвариантной подгруппы $U \leq V$.

2. Доказательство теоремы 1

Далее всюду считаем, что параметры q , n и ε группы $PSL_n^\varepsilon(q)$ и нечетное простое число r удовлетворяют условию теоремы 1, т. е. $n \geq 3$, $\varepsilon = \pm$, $q \equiv \varepsilon 1 \pmod{4}$ и $(q - \varepsilon 1)_r > n_r > 1$.

Пусть $(q - \varepsilon 1)_r = r^k$. В группе $PGL_n^\varepsilon(q)$ рассмотрим следующие подгруппы:

D — проективный образ группы всех диагональных матриц; $D \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1}^{n-1}$ — гомотопическая группа;

$D_0 = D \cap PSL_n^\varepsilon(q)$; $D_0 \cong \mathbb{Z}_{q-\varepsilon 1}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)/(n, q-\varepsilon 1)}$;

T — силовская 2-подгруппа группы D ;

$T_0 = T \cap PSL_n^\varepsilon(q)$ — силовская 2-подгруппа группы D_0 ;

R — силовская r -подгруппа группы D ; $R \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-1}$;

R_0 — силовская r -подгруппа группы D_0 ; $R_0 \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r/n_r}$;

$V = \Omega_1(R) = \{x \in R \mid x^r = 1\}$ — элементарная абелева подгруппа ранга $n - 1$;

$U = \mathcal{U}^{k-1}(R_0) = \langle x^{r^{k-1}} \mid x \in R_0 \rangle$ — элементарная абелева подгруппа ранга $n - 2$.

Лемма 3. В сделанных предположениях $V \leq PSL_n^\varepsilon(q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $R_0 = R \cap D_0 = R \cap PSL_n^\varepsilon(q)$ и, как указано выше,

$$R_0 \cong \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r}^{n-2} \times \mathbb{Z}_{(q-\varepsilon 1)_r/n_r}.$$

Пусть $V_0 = \Omega_1(R_0)$. Тогда, поскольку $(q - \varepsilon 1)_r > n_r$, подгруппа V_0 — элементарная абелева r -группа ранга $n - 1$. Кроме того, $V_0 \leq V$. Сравнивая ранги элементарных абелевых групп V и V_0 , заключаем, что $V = V_0 \leq PSL_n^\varepsilon(q)$. Лемма 3 доказана. $\square$

Пусть S — образ в $PGL_n^\varepsilon(q)$ подгруппы

$$\langle h(ij) \mid i, j = 1, \dots, n, i \neq j \rangle \quad (1)$$

из $GL_n^\varepsilon(q)$, порожденной всеми $n \times n$ мономиальными матрицами $h(ij)$, элементы которых равны нулю, за исключением

$$h(ij)_{ij} = -1, \quad h(ij)_{ji} = 1 \quad \text{и} \quad h(ij)_{kk} = 1 \quad \text{при} \quad k \neq i, j.$$

Заметим, что $S \leq PSL_n^\varepsilon(q)$, поскольку $\det h(ij) = 1$. Существует естественный эпиморфизм подгруппы мономиальных матриц группы $GL_n^\varepsilon(q)$ на S_n , ядро которого — подгруппа диагональных матриц, содержащая $Z(GL_n^\varepsilon(q))$. Образ элемента $h(ij)$ при этом — транспозиция $(ij) \in S_n$. Отсюда следует, что S нормализует как саму подгруппу D , так и ее характеристические подгруппы T, T_0, R, U и V , причем $SD/D \cong S_n$. Кроме того, группа, заданная (1), как легко видеть, состоит из мономиальных матриц, у которых все ненулевые элементы равны ± 1 . Поэтому ядро сужения на группу (1) эпиморфизма группы мономиальных матриц на группу S_n состоит из диагональных матриц с диагональными элементами ± 1 . Отсюда следует, что пересечение $S \cap D$ является группой периода 2 и $S \cap D \leq T$. Значит,

$$ST/T \cong S/(S \cap T) = S/S \cap D \cong S_n.$$

Рассмотрим подгруппы

$$H = ST \quad \text{и} \quad H_0 = ST_0.$$

Пользуясь [26, основная теорема, утверждение (6)], легко показать, что SD — подгруппа нечетного индекса в $PGL_n^\varepsilon(q)$, откуда вытекает, что H и H_0 — подгруппы нечетных индексов в группах $PGL_n^\varepsilon(q)$ и $PSL_n^\varepsilon(q)$ соответственно. С учетом тождества Дедекинда имеем

$$H_0 = ST_0 = S(T \cap PSL_n^\varepsilon(q)) = ST \cap PSL_n^\varepsilon(q) = H \cap PSL_n^\varepsilon(q).$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H/T & \longrightarrow & HV/T \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_0/T_0 & \longrightarrow & H_0V/T_0. \end{array}$$

Здесь горизонтальные стрелки — естественные вложения. Вертикальная стрелка справа — изоморфизм, вытекающий из соотношений $S, V \leq PSL_n(q)$ и

$$\begin{aligned} HV/T &= SVT/T \cong SV/(SV \cap T) = SV/(SV \cap PSL_n^\varepsilon(q) \cap T) \\ &= SV/(SV \cap T_0) \cong SVT_0/T_0 = H_0V/T_0. \end{aligned}$$

Вертикальная стрелка слева — изоморфизм групп H/T и H_0/T_0 , возникающий при сужении предыдущего изоморфизма на подгруппу H/T .

Докажем теорему 1, установив, что подгруппа H_0 не пронормальна в $PSL_n^\varepsilon(q)$. Для этого достаточно показать, что H_0 не пронормальна в H_0V . Последнее, в свою очередь, по лемме 1 равносильно тому, что H_0/T_0 не пронормальна в H_0V/T_0 , и в силу сделанных замечаний тому, что подгруппа H/T не пронормальна в HV/T . Последнее утверждение и будем доказывать.

Напомним, что $H/T \cong S_n$. Действие подгруппы H сопряжениями на V таково, что T содержится в ядре этого действия. Таким образом, на V возникает структура $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля. Из следующей леммы¹⁾ можно понять, что это за модуль.

Лемма 4. *Примем введенные выше обозначения и предположения. Пусть также $W = \mathbb{F}_r^n$ — естественный подстановочный $\mathbb{F}_r S_n$ -модуль. Рассмотрим его подмодули*

$$W^+ = \{(\alpha, \dots, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{F}_r\}, \quad W^- = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \mid \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 0\}.$$

(i) *Полный список подмодулей $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля W следующий: 0 , W^+ , W^- и W . В сделанных выше предположениях ($n_r > 1$) имеют место включения*

$$0 < W^+ < W^- < W. \quad (2)$$

Фактормодуль W^-/W^+ неприводим и отличен от главного модуля.

(ii) *Действие группы H на V сопряжениями индуцирует на V структуру $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, изоморфного W/W^+ . При этом подгруппа U соответствует подмодулю W^-/W^+ .*

(iii) $N_V(H) \leq U$, $[H, V] \leq U$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие элемента $g \in S_n$ на векторах из W задается правилом

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)g = (\alpha_{1g^{-1}}, \dots, \alpha_{ng^{-1}}). \quad (3)$$

Пусть M — собственный подмодуль модуля W . Зададим M системой уравнений вида

$$\sum_{i=1}^n \beta_{ik} x_i = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

Так как $M \neq W$, среди коэффициентов β_{ik} системы найдется ненулевой. Если для каждого данного k все β_{ik} одинаковы, то $M = W^-$. Допустим, что $\beta_{ik} \neq \beta_{jk}$ для некоторых $k \in \{1, \dots, m\}$ и различных $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Все векторы из M удовлетворяют уравнению

$$\dots + \beta_{ik} x_i + \dots + \beta_{jk} x_j + \dots = 0. \quad (4)$$

Согласно (3) множество векторов M инвариантно относительно любых перестановок координат, в частности, относительно перестановки i -й и j -й координат. Следовательно, все векторы из M будут удовлетворять также уравнению

$$\dots + \beta_{jk} x_i + \dots + \beta_{ik} x_j + \dots = 0, \quad (5)$$

где все невыписанные коэффициенты те же, что и в (4). Тогда все векторы из M удовлетворяют также разности уравнений (4) и (5), которая эквивалентна

¹⁾Отметим, что значительная часть утверждений леммы хорошо известна, ср., например, с [27, лемма 5.3.4]. Мы приводим ее здесь для полноты изложения.

уравнению $x_i = x_j$. Те же соображения инвариантности относительно перестановок переменных показывают, что вместо x_i и x_j в равенстве $x_i = x_j$ можно поставить любую пару различных переменных. Тем самым все векторы из M удовлетворяют равенствам $x_1 = \dots = x_n$ и M содержится в одномерном подмодуле W^+ , т. е. $M \in \{0, W^+\}$. Часть утверждения (i), касающаяся списка подмодулей, доказана.

Отсюда, в частности, следует неприводимость фактормодуля W^-/W^+ . Для завершения доказательства утверждения (i) осталось установить, что модуль W^-/W^+ не главный. Его размерность равна $n - 2$. Если бы он был главным, оказалось бы, что $n = 3$. Так как $n_r > 1$, это означало бы, что $r = 3$. Известное свойство симметрических групп состоит в том, что любое поле является для них полем разложения [28, теорема 2.1.12]. Группа S_3 обладает ровно двумя классами сопряженности 3-регулярных элементов: тождественная подстановка и транспозиции. Два обыкновенных линейных характера группы S_3 , главный и знакопеременный, целочисленны. После редукции по модулю 3 они остаются характерами (абсолютно) неприводимых представлений, отвечающих 3-брауэровым характерам ϕ_1 и ϕ_2 в табл. 1.

Таблица 1

	1	(ij)
ϕ_1	1	1
ϕ_2	1	-1
π	3	1

В этой же таблице приведено значение 3-брауэрова характера π , отвечающего естественному подстановочному $\mathbb{F}_3 S_3$ -модулю. Видно, что $\pi = 2\phi_1 + \phi_2$. Ряд (2) композиционный, и его факторы W^+ и W/W^- изоморфны главному модулю. Значит, фактор W^-/W^+ соответствует знакопеременному характеру ϕ_2 . Утверждение (i) доказано полностью.

Пусть $\hat{G} = GL_n(q)$ при $\varepsilon = +$ и $\hat{G} = GL_n(q^2)$ при $\varepsilon = -$. Рассмотрим в $\hat{G}$ подгруппы $\hat{Z} = Z(\hat{G})$; $\hat{D}$, состоящую из всех диагональных матриц; $\hat{S}$, заданную (1); $\hat{K}$, состоящую из всех подстановочных матриц; $\hat{T}$ — силовскую 2-подгруппу в $\hat{D}$; $\hat{R}$ — силовскую r -подгруппу в $\hat{D}$ и $\hat{V} = \Omega_1(\hat{R})$.

Легко видеть, что $\hat{T}\hat{S} = \hat{T}\hat{K}$. Рассмотрим действие сопряжениями группы $\hat{T}\hat{S} = \hat{T}\hat{K}$ на элементарной абелевой группе $\hat{V}$ ранга n . Ядро этого действия совпадает с подгруппой $\hat{T}$, причем

$$\hat{T}\hat{S}/\hat{T} = \hat{T}\hat{K}/\hat{T} \cong \hat{K} \cong S_n.$$

Группу $\hat{V}$ можно рассматривать как векторное пространство, а указанное действие задает на $\hat{V}$ структуру $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, который, как легко видеть, изоморфен естественному подстановочному $\mathbb{F}_r S_n$ -модулю W . При таком отождествлении подгруппа $\hat{V} \cap \hat{Z}$ совпадает с W^+ . Значит, $V = \hat{V}\hat{Z}/\hat{Z} \cong \hat{V}/(\hat{V} \cap \hat{Z})$ отождествляется с W/W^+ . Напомним, что в V содержится элементарная абелева подгруппа $U = \mathcal{U}^{k-1}(R_0)$ ранга $n - 2$, инвариантная относительно действия группы $H = \hat{T}\hat{S}\hat{Z}/\hat{Z}$. Согласно (i) при отождествлении V с W/W^+ подгруппа U соответствует единственному $(n - 2)$ -мерному подмодулю W^-/W^+ модуля W/W^+ . Утверждение (ii) доказано.

Ясно, что $N_V(H)$ и $[H, V]$ — подгруппы, инвариантные относительно сопряжений элементами из H , и, следовательно, в W/W^+ им соответствуют подмодули. Также очевидно, что подгруппа $[H, V]$, содержащаяся в $[\hat{T}\hat{S}\hat{Z}/\hat{Z}, \hat{V}\hat{Z}/\hat{Z}]$,

как подмодуль содержится в $[W/W^+, S_n] = W^-/W^+$, т. е. $[H, V] \leq U$. В силу того, что W^-/W^+ — единственный максимальный (и единственный собственный ненулевой) подмодуль в W/W^+ согласно (i), для доказательства включения $N_V(H) \leq U$ достаточно установить, что $N_V(H) \neq V$. Предположение равенства $N_V(H) = V$ означало бы, что H и V — нормальные подгруппы в HV . Но тогда

$$[H, V] \leq H \cap V = D \cap H \cap V \leq T \cap V = 1.$$

Это означало бы, что действие H на V тождественно вопреки тому, что это действие индуцирует на V структуру $\mathbb{F}_r S_n$ -модуля, изоморфного неприводимому неглавному модулю W^-/W^+ . Утверждение (iii) и с ним лемма 4 доказаны. $\square$

В силу лемм 2 и 4 подгруппа H/T не пронормальна в HV/T . В силу сказанного выше подгруппа H_0 не пронормальна в $PSL_n^\varepsilon(q)$. Теорема 1 также доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Phillip Hall's lecture notes on group theory — Part 6 / Cambridge: Univ. of Cambridge, 1951–1967. URL: <http://omeka.wustl.edu/omeka/items/show/10788>.
2. Го В., Маслова Н.В., Ревин Д.О. О пронормальности подгрупп нечетных индексов в некоторых расширениях конечных групп // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 4. С. 773–790.
3. de Giovanni F., Trombetti M. Pronormality in group theory // Adv. Group Theory Appl. 2020. V. 9, N 4. P. 123–149.
4. De Falco M., de Giovanni F., Musella C. Pronormality in uncountable groups // Commun. Algebra. 2025. V. 53, N 2. P. 901–908.
5. Brescia M., Ferrara M., Trombetti M. Groups whose subgroups are either Abelian or pronormal // Kyoto J. Math. 2023. V. 63, N 3. P. 471–500.
6. Brescia M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose non-Abelian subgroups are pronormal // Commun. Algebra. 2023. V. 51, N 8. P. 3346–3353.
7. Ferrara M., Trombetti M. Groups with many pronormal subgroups // Bull. Austral. Math. Soc. 2022. V. 105, N 1. P. 75–86.
8. Ferrara M., Trombetti M. Locally finite simple groups whose nonnilpotent subgroups are pronormal // Bull. Austral. Math. Soc. 2024. V. 109, N 3. P. 512–521.
9. Ferrara M., Trombetti M. Periodic linear groups in which permutability is a transitive relation // Ann. Mat. Pura Appl. (4). 2024. V. 203, N 1. P. 361–383.
10. Guo W., Revin D. O. Pronormality and submaximal $\mathfrak{X}$ -subgroups in finite groups // Commun. Math. Stat. 2018. V. 6, N 3. P. 289–317.
11. Ли Б., Ревин Д. О. Примеры непрономальных относительно максимальных подгрупп в конечных простых группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2023. Т. 29, № 4. С. 140–145.
12. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 527–542.
13. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальности подгрупп нечетного индекса в конечных простых группах // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1375–1383.
14. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. Критерий пронормальности добавлений к абелевым нормальным подгруппам // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 1. С. 153–158.
15. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальности подгрупп нечетных индексов в конечных простых симплектических группах // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 3. С. 599–610.
16. Кондратьев А. С., Маслова Н. В., Ревин Д. О. О пронормальных подгруппах в конечных простых группах // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 1. С. 7–11.
17. Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. Finite simple exceptional groups of Lie type in which all the subgroups of odd index are pronormal // J. Group Theory. 2020. V. 23, N 6. P. 999–1016.
18. Kondrat'ev A. S., Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in finite simple groups // Groups St Andrews 2017 in Birmingham. Birmingham, 5th–13th August 2017. Eds C. M. Campbell, M. R. Quick, C. W. Parker, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2019. V. 455. P. 406–418. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.).

19. Го В., Маслова Н. В., Ревин Д. О. Непронормальные подгруппы нечетных индексов в конечных простых линейных и унитарных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 1. С. 70–79.
20. Maslova N. V., Revin D. O. On the pronormality of subgroups of odd index in some direct products of finite groups // J. Algebra Appl. 2023. V. 22, N 4. 20 p. 2150001.
21. Кондратьев А. С. Нормализаторы силовских 2-подгрупп в конечных простых группах // Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 3. С. 368–376.
22. Liebeck M. W., Saxl J. The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. II Ser. 1985. V. 31, N 2. P. 250–264.
23. Kantor W. M. Primitive permutation groups of odd degree, and an application to finite projective planes // J. Algebra. 1987. V. 106, N 1. P. 15–45.
24. Маслова Н. В. Классификация максимальных подгрупп нечетного индекса в конечных простых классических группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 4. С. 100–118.
25. Maslova N. V. Maximal subgroups of odd index in finite groups with simple classical socle // Groups St Andrews 2009 in Bath. Eds C. M. Campbell, M. R. Quick, E. F. Robertson, C. M. Roney-Dougal, G. C. Smith, and G. Traustason. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2011. V. 387, N 2. P. 473–479. (London Math. Soc. Lecture Note Ser.).
26. Maslova N. V. Classification of maximal subgroups of odd index in finite simple classical groups: addendum // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. V. 15. P. 707–718.
27. Kleidman P., Liebeck M. The subgroup structure of the finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1990.
28. James G., Kerber A. The representation theory of the symmetric group. Reading, Massachusetts: Addison–Wesley Publ. Comp., 1981.

Поступила в редакцию 27 декабря 2024 г.

После доработки 2 апреля 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Го Цзинь (Guo Jin, ORCID 0009-0003-5974-0484)
School of Mathematics and Statistics, Hainan University,
Haikou 570228, P.R. China
guojinecho@163.com

Го Вэньбинь (Guo Wenbin, ORCID 0000-0002-6934-363X)
School of Mathematics and Statistics,
Nantong University, Nantong, Jiangsu 226019, P. R. China;
Department of Mathematics,
University of Science and Technology of China,
Hefei, Anhui 230026, P. R. China
wbguo@ustc.edu.cn

Маслова Наталья Владимировна (ORCID 0000-0001-6574-5335)
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620077;
Уральский федеральный университет,
ул. Мира, 19, Екатеринбург 620002
butterson@mail.ru

Ревин Данила Олегович (ORCID 0000-0002-8601-0706)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
revin@math.nsc.ru

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ВДОЛЬ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ КРИВОЙ В ОКРЕСТНОСТИ
СИММЕТРИЧНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

А. А. Голубков

Аннотация. Пусть G — выпуклая область, в которой имеется ровно одна особая точка z_s аналитической функции Q , симметричной относительно этой точки. В работе при больших значениях модуля спектрального параметра ρ изучена асимптотика передаточной матрицы P уравнения Штурма — Лиувилля с потенциалом Q вдоль произвольной кривой, лежащей в области G и не проходящей через точку z_s . Сформулированы необходимые и достаточные условия того, что матрица P не зависит от параметра ρ , и найден ее вид во всех таких случаях. Доказано, что в остальных случаях все элементы передаточной матрицы являются целыми функциями ρ вполне регулярного роста порядка $1/2$ с одинаковыми кусочно тригонометрическим индикатором и угловой плотностью нулей, формулы для трех возможных типов которых получены в работе.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.406

Ключевые слова: уравнение Штурма — Лиувилля на комплексной плоскости, симметричная особая точка, передаточная матрица.

1. Введение и основные результаты

При больших значениях модуля спектрального параметра $\rho := \lambda^2$ асимптотика решений уравнения Штурма — Лиувилля

$$u''(z) + (Q(z) - \lambda^2)u(z) = 0 \quad (1)$$

с голоморфным потенциалом Q в произвольной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменной z подробно изучена (см., например, монографии [1, 2] и библиографические ссылки в них). В частности, известно, что в точке $z_f \in G \setminus \{z_0\}$ непрерывно дифференцируемые решения u_1 и u_2 уравнения (1), удовлетворяющие условиям

$$u_1(z_0) = 1, \quad u_1'(z_0) = 0, \quad u_2(z_0) = 0, \quad u_2'(z_0) = 1 \quad (z_0 \in G), \quad (2)$$

являются целыми функциями параметра ρ порядка $1/2$ и типа $|z_f - z_0|$. Они имеют одинаковый кусочно тригонометрический индикатор (9) и вполне регулярный рост на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемого формулой (12) (о характеристиках целых функций, включая регулярность их роста, см. [3, гл. 1–3]). Такой же результат справедлив, если область G является звездной относительно точки z_0 .

Однако если потенциал Q имеет особые точки и уравнение (1) рассматривается в области его аналитичности, не звездной относительно z_0 , то в общем случае известно лишь, что решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2), являются целыми функциями ρ порядка не выше $1/2$. Более точные результаты для их порядка, типа, индикатора, распределения нулей получены только при наличии дополнительных ограничений на потенциал, расположение точек z_0 и z_f относительно особых точек, форму связывающего их пути интегрирования уравнения (1) и (или) положение сектора на комплексной плоскости, в котором спектральный параметр стремится к бесконечности [1, 2, 4–10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть потенциал $Q(z)$ голоморфен в области $G \subset \mathbb{C}$, $u_1(z)$ и $u_2(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1) вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset G$, удовлетворяющие условиям (2). Назовем *передаточной матрицей уравнения (1) между точками z_0 и z кривой γ* матрицу

$$P(\gamma, z, z_0) \equiv \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u'_1(z) & u'_2(z) \end{pmatrix}.$$

Передаточной матрицей вдоль кривой будем называть передаточную матрицу между начальной и конечной точками этой кривой.

Заметим, что в силу вида уравнения Штурма — Лиувилля (1) и выбора начальных условий (2) определитель передаточной матрицы не зависит от z и равен единице.

В настоящей работе изучены асимптотические свойства (при $\varphi_\rho := \arg \rho = \text{const}$ и $|\rho| \rightarrow \infty$) элементов передаточной матрицы P уравнения (1) вдоль произвольной спрямляемой кривой, лежащей в области $G \setminus \{z_s\}$ голоморфности потенциала Q . При этом предполагается, что G — выпуклая область, а функция $Q(z)$ имеет особую точку z_s , относительно которой она и область G симметричны:

$$Q(\tilde{z}) = Q(z), \quad \tilde{z} := 2z_s - z \quad (z \in G). \quad (3)$$

Здесь и далее $\tilde{z}$ — точка, симметричная точке z относительно точки z_s . Поскольку $\tilde{\tilde{z}} = z$, условие (3) может выполняться только для особой точки однозначного характера.

В статье для упрощения записи формул, как правило, параметр ρ не указывается в наборе переменных различных функций. Например, вместо $u(z, \rho)$ пишется $u(z)$.

$$\text{Обозначим: } i \text{ — мнимая единица, } \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *углом обхода θ* кривой γ точки $z_s \notin \gamma$ угол поворота вектора, соединяющего точку z_s с точкой z при движении последней вдоль всей кривой от ее начальной точки. Угол поворота вектора считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения (1) и точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$ различные. Назовем кривую $\gamma_{12} \subset G \setminus \{z_s\}$ с началом и концом в точках z_1 и z_2 *стандартизованной*, если она имеет следующий специальный вид. Кривая совпадает с отрезком L_{12} , соединяющим точки z_1 и z_2 , если $z_s \notin L_{12}$. В противном случае она обходит точку z_s против часовой стрелки, совпадая с одной из ломаных семейства двухзвенных ломаных, угол между звеньями которых сколь угодно близок к развернутому, но не достигает его. Будем называть матрицу $R(z_2, z_1, z_s) := P(\gamma_{12}, z_2, z_1)$ *передаточной матрицей между точками z_1 и z_2* .

Существование семейства ломаных, описанного в определении 3, достаточно очевидно и, кроме того, следует из лемм 2.4 и 2.5 работы [10]. При этом независимость передаточной матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ от выбора конкретной такой ломаной вытекает из теоремы о монодромии, так как все они находятся в некоторой односвязной области аналитичности потенциала Q (см. также более общее утверждение леммы 3).

Во втором разделе статьи доказан ряд вспомогательных утверждений, ключевое из которых сформулировано в лемме 2, а в третьем разделе приведено, в частности, доказательство следующей теоремы, выражающей основной результат работы.

Теорема 1. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда передаточная матрица уравнения (1) между началом z_0 и концом z_f кривой $\gamma \subset G \setminus \{z_s\}$ с углом θ обхода точки z_s удовлетворяет следующему соотношению:

$$P(\gamma, z_f, z_0) = \begin{cases} a_{2n}R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n-1}R(z_f, z_0, z_s), & \theta/\pi \in (2n-1, 2n] \\ a_{2n}R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n+1}R(z_f, z_0, z_s), & \theta/\pi \in (2n, 2n+1] \end{cases} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

Здесь $\tilde{z}_0 := 2z_s - z_0$,

$$a_0 = 0, \quad a_{-j} = (-1)^{j+1}a_j, \quad a_j = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{j-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} C_j^{2l+1} \frac{(\mu^2 + 4)^l}{\mu^{2l}} \quad (j \geq 1), \quad (5)$$

C_j^{2l+1} — биномиальные коэффициенты и

$$\mu(\rho) := \text{Tr}\{\sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s)\} \equiv r_{11}(\tilde{z}_0, z_0, z_s) - r_{22}(\tilde{z}_0, z_0, z_s). \quad (6)$$

Частным случаем передаточной матрицы является введенная в работе [10] регулярная циклическая матрица C изолированной особой точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная выпуклая область с границей δG , содержащая ровно одну особую точку z_s потенциала $Q(z)$, и во всех точках δG потенциал голоморфен. Тогда передаточную матрицу уравнения (1) вдоль кривой γ с началом и концом в точке $z_0 \in \delta G$, обходящей границу области G один раз против часовой стрелки, будем называть *регулярной циклической матрицей* $C(z_0, z_s)$ изолированной особой точки z_s уравнения (1) относительно точки z_0 .

Пусть кривая γ_{12} соединяет точку z_1 с точкой z_2 , а кривая γ_{21} — точку z_2 с точкой z_1 так, как это описано в определении 3. Тогда их объединение образует замкнутую кривую γ_0 . Если отрезок L_{12} не содержит особой точки z_s , то кривая γ_0 обходит его туда и обратно и, следовательно, передаточная матрица $P(\gamma_0, z_1, z_1) = R(z_1, z_2, z_s)R(z_2, z_1, z_s) = I$. Если же отрезок L_{12} содержит особую точку z_s , то кривая γ_0 является замкнутой выпуклой ломаной из четырех звеньев, обходящей точку z_s один раз против часовой стрелки. Следовательно, в этом случае $P(\gamma_0, z_1, z_1) = R(z_1, z_2, z_s)R(z_2, z_1, z_s) = C(z_1, z_s)$.

Следствие 1. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда регулярную циклическую матрицу $C(z_0, z_s)$ особой

точки z_s уравнения (1) относительно точки $z_0 \in G \setminus \{z_s\}$ и ее след c_0 можно представить в виде

$$C(z_0, z_s) = I + \mu R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) \sigma_3 = I + \mu \sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s), \quad (7)$$

$$c_0 := \text{Tr}\{C(z_0, z_s)\} = 2 + \mu^2. \quad (8)$$

где $\tilde{z}_0 := 2z_s - z_0$, а величина μ определена формулой (6).

Доказательство. Первое равенство в (7) следует из определения 4 матрицы C , соотношения (4) для матрицы P , использованного для случая $z_f = z_0$ и $\theta = 2\pi$ ($n = 1$), а также формул (5) или (29) для коэффициентов a_1 и a_2 . Второе равенство в (7) получается с помощью соотношения (18), вытекающего из доказанной во втором разделе леммы 2. Формула (8) для следа c_0 — прямое следствие соотношений (6) и (7).

Лемма 1. Введенная формулой (6) величина μ и след c_0 матрицы $C(z_0, z_s)$ не зависят от z_0 и обе величины либо одновременно не зависят от параметра ρ , либо являются целыми функциями ρ порядка $1/2$ минимального типа.

Доказательство. По теореме 24.1 работы [2] элементы передаточных матриц уравнения (1) являются целыми функциями параметра ρ . Поэтому в силу определения (6) след μ является целой функцией ρ . В теореме 1.1 статьи [10] было доказано, что c_0 не зависит от точки z_0 и либо не зависит от параметра ρ , либо является целой функцией ρ порядка $1/2$ минимального типа. Учитывая, что квадрат целой функции есть целая функция такого же порядка и удвоенного типа, пользуясь формулой (8) и методом от противного, получим все утверждения леммы.

В разд. 3 доказано также следующее следствие теоремы 1 и леммы 1.

Следствие 2. В условиях теоремы 1 возможны четыре типа зависимости матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ от параметра ρ . Тип 1: $P \in \{\pm I, \pm i\sigma_3\}$. Типы 2–4: все элементы P являются целыми функциями ρ порядка $1/2$ с одинаковыми индикаторами

$$h_- = |z_f - z_0| \cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_-) \text{ для типа 2,} \quad (9)$$

$$h_+ = |z_f + z_0 - 2z_s| \cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_+) \text{ для типа 3,} \quad (10)$$

$$h = |z_0 - z_s| \cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_0) + |z_f - z_s| \cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_f) \text{ для типа 4} \quad (11)$$

и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме лучей

$$\rho_-(t) = -t \exp\{-2i\varphi_-\} \quad (t \geq 0) \text{ для типа 2,} \quad (12)$$

$$\rho_+(t) = -t \exp\{-2i\varphi_+\} \quad (t \geq 0) \text{ для типа 3,} \quad (13)$$

$$\rho_0(t) = -t \exp\{-2i\varphi_0\}, \quad \rho_f(t) = -t \exp\{-2i\varphi_f\} \quad (t \geq 0) \text{ для типа 4,} \quad (14)$$

где $\varphi_\pm := \arg((z_f - z_s) \pm (z_0 - z_s))$, $\varphi_\rho := \arg \rho$, $\varphi_0 := \arg(z_0 - z_s)$, $\varphi_f := \arg(z_f - z_s)$. При типах 2 и 3 зависимости элементов $P(\rho)$ с точностью до постоянных множителей такие же, как у соответствующих элементов передаточной матрицы вдоль отрезка.

Типы 1–3 имеют место в следующих случаях. Во-первых, в окрестности произвольной особой точки для кривых γ с $z_f = z_0$, $\theta = 0$ (тип 1, $P \equiv I$) или с $z_f \neq z_0$, $|\theta| < \pi$ (тип 2, $P = R(z_f, z_0, z_s)$). Во-вторых, для особых точек с

$$\mu(\rho) \equiv \mu_{l,k} := 2i \cos(\pi k/l) \quad (l \geq 2, k \in \{1, \dots, l-1\}), \quad (15)$$

если выполнена одна из следующих совокупностей условий на число l и кривую γ :

- 1) $|z_f| = |z_0|$, $\theta = \pi n$, $l = |n| \geq 2$ — тип 1, $P \equiv (-1)^k (i\sigma_3)^n$.
 - 2) $z_f \neq z_0$, $|\theta/\pi - 2n| < 1$, $l = 2|n| \geq 2$ — тип 2, $P = (-1)^{n-k} R(z_f, z_0, z_s)$.
 - 3) $z_f \neq \tilde{z}_0$, $|\theta/\pi - 2n - 1| < 1$, $l = |2n+1| \geq 2$ — тип 3, $P = i(-1)^{n-k} R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3$.
- Тип 4 имеет место во всех остальных случаях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $n(r, \varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ — число нулей функции $F(\rho)$ в секторе $|\rho| \leq r$, $0 < \varphi_{\rho 1} < \varphi_{\rho} < \varphi_{\rho 2} \leq 2\pi$ комплексной плоскости ρ и при некотором κ для всех значений $\varphi_{\rho 1}$ и $\varphi_{\rho 2}$ за исключением быть может счетного множества существует конечный предел

$$\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) := \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, \varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})}{r^\kappa}.$$

Тогда величину $\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ будем называть *угловой плотностью с показателем κ нулей функции F внутри угла $\varphi_{\rho 1} < \arg \rho < \varphi_{\rho 2}$ или, короче, внутри угла $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$* .

Следствие 3. Если в условиях следствия 2 матрица P зависит от параметра ρ , то ее элементы имеют следующие угловые плотности нулей с показателем $1/2$:

$$\Psi(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \phi_- |z_f - z_0| & \text{для типа 2,} \\ \phi_+ |z_f + z_0 - 2z_s| & \text{для типа 3,} \\ \phi_0 |z_0 - z_s| + \phi_f |z_f - z_s| & \text{для типа 4,} \end{cases}$$

где $\phi_- = 1$ ($\phi_- = 0$), $\phi_+ = 1$ ($\phi_+ = 0$), $\phi_0 = 1$ ($\phi_0 = 0$) и $\phi_f = 1$ ($\phi_f = 0$), если угол $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ содержит (не содержит) луч $\rho_-(t)$, $\rho_+(t)$, $\rho_0(t)$ и $\rho_f(t)$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь кусочной тригонометричностью индикатора элементов матрицы P , их вполне регулярным ростом, а также теоремой 3 гл. 3 работы [3] и следствием из нее, утверждения следствия 3 можно получить как частные случаи теоремы 4 статьи [11]. Дело в том, что индикаторы (9)–(11) совпадают с индикатором функции $D_0(\rho)$ из статьи [11], если в последней положить $N = 1$, $z_1 = z_s$ (для типа 4), $N = 0$ (для типов 2, 3) и заменить z_0 на $\tilde{z}_0$ для типа 3.

Подчеркнем, что в силу определения 5 равенство нулю угловой плотности с показателем κ нулей целой функции в некотором угле означает лишь, что число нулей в секторах этого угла растет с ростом r не быстрее, чем $\varepsilon(r)r^\kappa$, причем $\varepsilon(r) \geq 0$ и $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$.

Следствие 4. Регулярная циклическая матрица $C(z_0, z_s)$ симметричной особой точки z_s не зависит от параметра ρ , если и только если определенная формулой (6) величина $\mu \equiv 0$, т. е. у матрицы C след $c_0 \equiv 2$. При этом $C(z_0, z_s) \equiv I$. В остальных случаях все элементы матрицы $C(z_0, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ типа $2|z_0 - z_s|$ с кусочно тригонометрическим индикатором $2|z_0 - z_s| |\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_0)|$ и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча $\rho_0(t)$, задаваемого формулой (14). При этом множество нулей каждого из элементов матрицы C имеет угловую плотность с показателем $1/2$:

$$\Psi_c(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2}) = 2 \frac{\phi_0 |z_0 - z_s|}{\pi},$$

где $\phi_0 = 1$ ($\phi_0 = 0$), если угол $(\varphi_{\rho 1}, \varphi_{\rho 2})$ содержит (не содержит) луч $\rho_0(t)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все утверждения следуют из определения 4 матрицы C и следствий 1–3 при $z_f = z_0$ и угле обхода $\theta = 2\pi$ ($n = 1$).

Такая же формула для индикатора элементов матрицы $C(z_0, z_s)$ в случае, когда ее след c_0 не равен тождественно двум, была получена в работе [10] для произвольной изолированной особой точки однозначного характера. Однако при этом оставался открытым вопрос регулярности их роста, а значит, и существования угловой плотности их нулей, а также не был исследован случай $c_0 \equiv 2$. Следствия 1 и 4 восполняют эти пробелы в случае симметричных изолированных особых точек.

Матрица $C(z_0, z_s)$ особой точки однозначного характера является одной из ее матриц монодромии, которые подобны друг другу [4, гл. 1, § 2, п. 3; 12] и поэтому имеют одинаковый след, а также равны единичной матрице одновременно. Подобны между собой и любые их одинаковые степени. Если хотя бы одна матрица монодромии особой точки уравнения (1) равна I при всех значениях параметра ρ , то особую точку называют безмонодромной. Однозначные потенциалы с такими точками хорошо изучены (см. работы [5, 9] и библиографические ссылки в них). В [12] был впервые исследован более широкий класс квазиебезмонодромных особых точек.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть Ω_1 и Ω_2 — односвязные области в $\mathbb{C}$, $\Omega_1 \subset \Omega_2$, и их границы не имеют общих точек. Потенциал q и соответствующее уравнение Штурма — Лиувилля (1) будем называть *квазиебезмонодромным* в «кольцеобразной» области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q , если существует такое натуральное число $\nu \geq 1$, что $M^\nu(\lambda) \equiv \pm I$, где M — одна из матриц монодромии области Ω_1 .

Заметим, что безмонодромный потенциал является квазиебезмонодромным с $\nu = 1$. Поскольку $M^\nu(\lambda) \equiv \pm I$, если и только если $M^{-\nu}(\lambda) \equiv \pm I$, то ограничение $\nu \geq 1$ в определении 6 несущественно. Важно только условие $\nu \neq 0$, поскольку $M^0 \equiv I$.

Так как $(i\sigma_3)^2 = -I$, из следствия 2 получаем, что случаи, когда матрица P не зависит от параметра ρ , соответствуют (за исключением тривиальной ситуации $z_f = z_0$, $\theta = 0$) только квазиебезмонодромным особым точкам (обратное следует из определения последних). На данный момент нет полного описания потенциалов с такими точками. Найдены лишь необходимые и достаточные условия квазиебезмонодромности уравнения (1) и его потенциала в области $K = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ аналитичности потенциала q через условия на матрицу монодромии области Ω_1 или ее след [12].

В разд. 4 сформулирован критерий принадлежности потенциала с регулярной изолированной особой точкой классу квазиебезмонодромных. Там же обсуждаются возможности дальнейшего уточнения результатов настоящей работы.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 2. Пусть z_s — изолированная симметричная особая точка потенциала $Q(z)$, т. е. в некоторой симметричной относительно точки z_s области $G \setminus \{z_s\}$ функция $Q(z)$ голоморфна и удовлетворяет условию (3). Тогда если $P(\gamma, z, z_0)$ — передаточная матрица уравнения (1) между точками z_0 и z кривой $\gamma \in G \setminus \{z_s\}$, то передаточная матрица $P(\tilde{\gamma}, \tilde{z}, \tilde{z}_0)$ уравнения (1) между точками

$\tilde{z}_0$ и $\tilde{z}$ кривой $\tilde{\gamma}$, симметричной кривой γ относительно особой точки z_s , может быть найдена из формулы

$$P(\tilde{\gamma}, \tilde{z}, \tilde{z}_0) := \sigma_3 P(\gamma, z, z_0) \sigma_3 \quad (z, z_0 \in \gamma \subset G \setminus \{z_s\}). \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При выполнении условия (3) уравнение (1) инвариантно относительно замены z на $\tilde{z}$. Поэтому если функция $u(z)$ является решением (1) на некоторой кривой $\gamma \in G \setminus \{z_s\}$, то функция $\tilde{u}(\varsigma) := \alpha u(\tilde{\varsigma})$ ($\varsigma \in \tilde{\gamma}$), где α — произвольное число, является решением (1) на кривой $\tilde{\gamma}$. При этом, очевидно, $\tilde{u}'(\varsigma) := -\alpha u'(x)|_{x=\tilde{\varsigma}}$ и $\tilde{\varsigma} = \varsigma$. Полагая $\tilde{u}_1(\varsigma) := u_1(\tilde{\varsigma})$ и $\tilde{u}_2(\varsigma) := -u_2(\tilde{\varsigma})$, где решения u_1 и u_2 удовлетворяют условиям (2) в точке z_0 , получим, что $\tilde{u}_1(\varsigma)$ и $\tilde{u}_2(\varsigma)$ удовлетворяют этим же условиям в точке $\tilde{z}_0$, являются решениями (1) на кривой $\tilde{\gamma}$ и при этом (после переобозначения ς на $\tilde{z}$)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(\tilde{z}) &= u_1(z), \quad \tilde{u}'_1(x)|_{x=\tilde{z}} = -u'_1(z), \\ \tilde{u}_2(\tilde{z}) &= -u_2(z), \quad \tilde{u}'_2(x)|_{x=\tilde{z}} = u'_2(z) \quad (z \in \gamma \subset G \setminus \{z_s\}), \end{aligned}$$

что совпадает с формулой (16).

Лемма 3. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, спрямляемые кривые γ_1 и γ_2 лежат в области $G \setminus \{z_s\}$ голоморфности потенциала $Q(z)$, имеют общее начало z_0 , общий конец z_f и одинаковый угол θ обхода точки z_s . Тогда $P(\gamma_1, z_f, z_0) \equiv P(\gamma_2, z_f, z_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма формализует в терминах настоящей работы известный факт, следующий из теоремы о монодромии (см., например, рассуждения, приведенные в [1, гл. 3, § 1]).

Лемма 4. Пусть $G \subset \mathbf{C}$ — выпуклая область, симметричная относительно симметричной особой точки z_s функции $Q(z)$, причем Q голоморфна в области $G \setminus \{z_s\}$. Тогда регулярную циклическую матрицу $C(z_0, z_s)$ особой точки z_s уравнения (1) относительно точки $z_0 \in G \setminus \{z_s\}$ можно представить в виде

$$C(z_0, z_s) = (\sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s))^2 = (R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) \sigma_3)^2 \quad (z_0 \in G \setminus \{z_s\}). \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения 3, тождества $(\sigma_3)^2 = I$ и (16) имеем

$$\sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s) = R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) \sigma_3. \quad (18)$$

Соотношение (17) получим, подставив формулу (18) в следующее из определений 3, 4 и леммы 3 равенство

$$C(z_0, z_s) = R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) R(\tilde{z}_0, z_0, z_s) \equiv R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) \sigma_3 \sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s).$$

Лемма 5. Монотонность функции $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_0)\}$ на соединяющей точки z_0 и z_f кривой γ при всех лежащих на некотором луче β значениях параметра λ обеспечивает для элементов p_{ij} ($i, j = 1, 2$) передаточной матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ уравнения (1) при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль луча β асимптотики такого же вида, как для элементов передаточных матриц вдоль отрезков. В первом приближении по $1/|\lambda|$ они имеют вид

$$p_{ij} = \frac{\zeta_{ij}}{2} \left\{ \left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(\lambda \Delta) + (-1)^{i+j} \left(1 + \frac{O(1)}{|\lambda|} \right) \exp(-\lambda \Delta) \right\}, \quad (19)$$

где $\zeta_{11} = \zeta_{22} = 1$, $\zeta_{12} = 1/\lambda$, $\zeta_{21} = \lambda$, $\Delta := z_f - z_0$, а символы $O(1)$ обозначают различные функции λ , ограниченные при $|\lambda| > \lambda_{cr}$, где λ_{cr} — конечная величина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма следует из результатов монографий [1, 2]. Ее доказательство аналогично доказательствам лемм 8, 9 в работе [13], если в них заменить слово отрезок словом кривая и положить $N = 0$, $z_1 = z_f$ и $\theta_0 = 1$.

Лемма 6. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения (1), L_{12} — отрезок, соединяющий точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$. Тогда элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ , асимптотика которых при больших значениях $|\rho|$ имеет вид (19), если $z_s \notin L_{12}$ или/и $\operatorname{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} \neq 0$.

Доказательство. Передаточные матрицы уравнения (1) — целые функции ρ [2, теорема 24.1]. Если $z_s \notin L_{12}$, то по определению 3 матрица $R(z_2, z_1, z_s) := P(L_{12}, z_2, z_1)$ и, значит, ее элементы имеют асимптотику (19). Если $z_s \in L_{12}$, $\operatorname{Re}\{\lambda(z_1 - z_s)\} \neq 0$, то в силу лемм 2.4 и 2.5 работы [10] существуют соединяющие точки z_1 и z_2 ломаные из определения 3, вдоль которых величина $\operatorname{Re}\{\lambda(z - z_1)\}$ меняется монотонно. Поскольку по лемме 3 выбор конкретной такой ломаной не меняет матрицу $R(z_2, z_1, z_s)$, элементы последней имеют асимптотику (19) по лемме 5.

Лемма 7. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения (1), $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$. Тогда $R(z_2, z_1, z_s) \equiv I$, если $z_1 = z_2$. В остальных случаях элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ с индикатором

$$h_{12} = |z_2 - z_1| \cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_{12}) \quad (\varphi_{12} := \arg(z_2 - z_1)) \quad (20)$$

и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча

$$\rho_{12}(t) = -t \exp\{-2i\varphi_{12}\} \quad (t \geq 0). \quad (21)$$

Доказательство. Условие $\operatorname{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} = 0$ можно записать в виде $\lambda(z_2 - z_1) = i\xi$, где ξ — действительное число. Это означает, что параметр $\rho := \lambda^2$ лежит на луче, задаваемом формулой

$$\rho_0(\xi) = -\xi^2/(z_2 - z_1)^2 = -\xi^2 \exp\{-2i\varphi_{12}\}/|z_2 - z_1|^2,$$

равносильной соотношению (21). В силу леммы 6 при $\operatorname{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} \neq 0$ элементы матрицы $R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции порядка $1/2$ типа $|z_2 - z_1|$ с кусочно-тригонометрическим индикатором (20) и вполне регулярным ростом. Из непрерывности индикатора [3, гл. I, § 16] следует, что формула (20) справедлива и при $\operatorname{Re}\{\lambda(z_2 - z_1)\} = 0$.

В леммах 1 и 2 работы [12] было доказано, что если $m := \operatorname{Tr} M$ — след матрицы второго порядка M с единичным определителем и $\eta := (m + \sqrt{m^2 - 4})/2$, то

$$M^n = \tilde{a}_n M - \tilde{a}_{n-1} I \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (22)$$

$$\tilde{a}_n = m\tilde{a}_{n-1} - \tilde{a}_{n-2}, \quad (23)$$

$$\tilde{a}_n = \frac{\eta^n - \eta^{-n}}{\eta - \eta^{-1}} \quad (\eta \neq \pm 1), \quad \tilde{a}_n = (\pm 1)^{n+1} n \quad (\eta = \pm 1). \quad (24)$$

Заметим, что особенность, возникающая при $\eta = \pm 1$ в первом из соотношений (24), устранима, а в формуле для η можно использовать любую фиксированную ветвь квадратного корня, при этом $1/\eta = (m - \sqrt{m^2 - 4})/2$.

Кроме того, лемма 3 работы [12] в обозначениях настоящей работы может быть сформулирована следующим образом.

Лемма 8. При $n \neq 0$ коэффициент $\tilde{a}_n$ в формуле (22) равен нулю, если и только если $|n| \geq 2$ и $m = 2 \cos(\pi k/|n|)$, где $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом $\tilde{a}_{n-1} = (-1)^{k+1}$.

Леммы 9 и 10 обобщают приведенные выше результаты работы [12] на случай матрицы с любым отличным от нуля определителем.

Лемма 9. Пусть D — матрица второго порядка, $\mu := \text{Tr } D$, $d := \det D \neq 0$. Тогда

$$D^n = a_n D - d a_{n-1} I \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (25)$$

$$a_0 = 0, \quad a_{-n} = -\frac{a_n}{d^n}, \quad (26)$$

$$a_n = \left(\frac{\mu}{2}\right)^{n-1} \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2l+1} \frac{(\mu^2 - 4d)^l}{\mu^{2l}} \quad (n \geq 1), \quad (27)$$

где C_n^{2l+1} — биномиальные коэффициенты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d := (d_0)^2$ и $M := D/d_0$. Тогда $m := \text{Tr } M = \mu/d_0$, $\det M = 1$ и для целой степени матрицы M справедлива формула (22). Поэтому

$$D^n = (d_0)^n \left(\tilde{a}_n \frac{D}{d_0} - \tilde{a}_{n-1} I \right),$$

что совпадает с соотношением (25), если положить

$$a_n := (d_0)^{n-1} \tilde{a}_n. \quad (28)$$

С другой стороны, из (24) следует, что $\tilde{a}_0 = 0$ и $\tilde{a}_{-n} = -\tilde{a}_n$, откуда с учетом определения (28) получаем формулы в (26). Далее, заметим, что

$$\eta := \frac{1}{2d_0}(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4d}), \quad \frac{1}{\eta} = \frac{1}{2d_0}(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4d}).$$

Подставляя последние формулы в первое соотношение в (24) и учитывая определение (28) при $n \geq 1$ имеем

$$a_n = \frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4d})^n - (\mu - \sqrt{\mu^2 - 4d})^n}{2^n \sqrt{\mu^2 - 4d}}.$$

Пользуясь формулами бинома Ньютона, получаем соотношение (27).

Таким образом, при любом $n \neq 0$ коэффициент a_n является полиномом μ степени $|n| - 1$. В частности,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \mu. \quad (29)$$

Лемма 10. Пусть D — матрица 2×2 , $\mu := \text{Tr } D$, $d := \det D \neq 0$. Тогда в формуле (25) коэффициент $a_n = 0$, если и только если $n = 0$ или $|n| \geq 2$, $\mu = 2\sqrt{d} \cos(\pi k/|n|)$, где $k \in \{1, \dots, |n| - 1\}$. При этом во втором случае $a_{n+1} = -da_{n-1} = (-1)^k (\sqrt{d})^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Случай $n = 0$ подходит в силу соотношения (26). Пусть $M := D/d_0$, где $d_0 = \sqrt{d}$. Тогда $m := \text{Tr } M = \mu/d_0$, $\det M = 1$ и для целой степени матрицы M справедлива формула (22), а для коэффициентов $\tilde{a}_n$ — лемма 8 и соотношение (23). В силу последнего $\tilde{a}_{n+1} = -\tilde{a}_{n-1}$, если $\tilde{a}_n = 0$. Для завершения доказательства остается использовать формулу (28), связывающую коэффициенты a и $\tilde{a}$.

Заметим, что поскольку $\cos(\pi k/|n|) = -\cos(\pi(|n| - k)/|n|)$, изменение знака d_0 не меняет набора значений следа μ , при которых в силу леммы 10 $a_n = 0$.

Лемма 11. Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область с ровно одной особой точкой z_s уравнения (1), точки $z_1, z_2 \in G \setminus \{z_s\}$, причем $z_1 \neq z_2$. Тогда если задаваемый формулой (5) коэффициент $a_n(\rho)$ не равен тождественно нулю, то элементы матрицы $a_n R(z_2, z_1, z_s)$ — целые функции ρ порядка $1/2$ с индикатором (20) и вполне регулярным ростом на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемого соотношением (21).

Доказательство. Для целой функции $f(\rho)$ функция $M_f(r) := \max_{|\rho|=r} |f(\rho)|$ либо постоянна, либо неограниченно монотонно возрастает с ростом r [3, гл. 1, § 1]. Поэтому для целой функции f порядка κ минимального типа имеем

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\kappa} = 0.$$

Значит, как доказано в [3, гл. 3, § 4], $f(\rho)$ имеет вполне регулярный рост и индикатор, равный нулю. В силу (5) при $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ коэффициент a_n является полиномом μ степени $|n| - 1$, а $a_0 \equiv 0$. Поэтому, учитывая лемму 1, получаем, что коэффициент a_n либо не зависит от спектрального параметра ρ , либо является целой функцией ρ порядка $1/2$ минимального типа, и следовательно, регулярного роста с индикатором, равным нулю. Известно, что произведение двух целых функций вполне регулярного роста одного порядка есть целая функция вполне регулярного роста того же порядка с индикатором, равным сумме индикаторов сомножителей (см. теорему 5 и замечание после нее в [3, гл. 3, § 4]). Пользуясь далее леммой 7, получаем все доказываемые утверждения.

Лемма 12. Пусть $\varphi_\rho = \arg \rho$, $z_j \neq 0$, $\varphi^{(j)} := \arg(z_1 + (-1)^j z_2)$ ($j \in \{1, 2\}$) и $f_j(\rho)$ — целая функция порядка $1/2$ с индикатором $h_j(\varphi_\rho) = |z_1 + (-1)^j z_2| |\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi^{(j)})|$ и вполне регулярного роста на всех проходящих через нуль лучах, кроме луча $\rho^{(j)}(t) = -t \exp\{-2i\varphi^{(j)}\}$ ($t \geq 0$). Тогда $F := f_1 + f_2$ — целая функция порядка $1/2$ вполне регулярного роста на всех проходящих через нуль лучах, кроме лучей

$$\rho_j(t) = -t \exp\{-2i\varphi_j\} \quad (t \geq 0), \quad \varphi_j = \arg z_j \quad (j \in \{1, 2\}), \quad (30)$$

с индикатором

$$h_F = |z_1| |\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_1)| + |z_2| |\cos(0.5\varphi_\rho + \varphi_2)|. \quad (31)$$

Доказательство. Индикаторы функций $f_j(\rho)$ ($j \in \{1, 2\}$) можно представить в виде

$$h_j = |\operatorname{Re}\{\lambda(z_1 + (-1)^j z_2)\}|/|\lambda| = |\operatorname{Re}\{\lambda z_1\} + (-1)^j \operatorname{Re}\{\lambda z_2\}|/|\lambda|.$$

Очевидно, что $h_1 = h_2$, если и только если $\operatorname{Re}\{\lambda z_1\} = 0$ или $\operatorname{Re}\{\lambda z_2\} = 0$, что имеет место на лучах, задаваемых формулой (30) (см. доказательство леммы 7). Сумма двух целых функций одного порядка с разными индикаторами есть целая функция того же порядка с индикатором, равным большому из двух [3, гл. 1, § 15]. При этом из определений индикатора и регулярности роста следует, что если на некотором луче целая функция с большим индикатором имеет вполне регулярный рост, то и сумма на этом луче имеет вполне регулярный рост. Если a и b — действительные числа, то $\max\{|a + b|, |a - b|\} = |a| + |b|$. Отсюда, пользуясь также непрерывностью индикатора, получаем формулу (31) и вполне регулярный рост функции F на всех проходящих через нуль лучах, кроме задаваемых формулой (30).

3. Доказательство теоремы 1 и следствия 2

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим несколько случаев (везде ниже $n \in \mathbb{Z}$).

СЛУЧАЙ 1: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n)$. В силу леммы 3, определений 3 и 4, а также формул (17) и (25) при $D := R(z_0, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3$, $d = -1$ имеем

$$P(\gamma, z_f, z_0) = R(z_f, z_0, z_s)C^n(z_0, z_s) = R(z_f, z_0, z_s)(a_{2n}R(z_0, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3 + a_{2n-1}I), \quad (32)$$

причем соединяющий точки z_0 и z_f отрезок L_{0f} расположен справа от прямой $z_s z_0$, проходящей через точки z_s и z_0 , т. е. там же, где описанная в определении 3 стандартизованная кривая γ_{00} , соединяющая точки $\tilde{z}_0$ и z_0 . Поэтому замкнутая область, ограниченная L_{0f} , γ_{00} и отрезком $L_{\tilde{0}f}$, соединяющим точки $\tilde{z}_0$ и z_f , не содержит особых точек потенциала Q . Следовательно, $R(z_f, z_0, z_s)R(z_0, \tilde{z}_0, z_s) = R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)$ по лемме 3, и формула (32) совпадает с первым соотношением в (4).

СЛУЧАЙ 2: $\theta/\pi = 2n$. Единственное отличие от случая 1 — отрезок L_{0f} лежит на луче с началом в точке z_s , проходящем через точку z_0 .

СЛУЧАЙ 3: $\theta/\pi \in (2n, 2n+1)$. В силу леммы 3, определений 3 и 4 тождества $(\sigma_3)^2 = I$, а также формул (17) и (25) при $D := \sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s)$, $d = -1$ имеем

$$\begin{aligned} P(\gamma, z_f, z_0) &= R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)R(\tilde{z}_0, z_0, z_s)C^n(z_0, z_s) = R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3, \\ (\sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s))^{2n+1} &= R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3(a_{2n+1}\sigma_3 R(\tilde{z}_0, z_0, z_s) + a_{2n}I). \end{aligned} \quad (33)$$

При этом отрезок $L_{\tilde{0}f}$ расположен слева от прямой $z_s z_0$, т. е. там же, где стандартизованная кривая γ_{00} . Следовательно, $R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)R(\tilde{z}_0, z_0, z_s) = R(z_f, z_0, z_s)$ по лемме 3 (замкнутая область, ограниченная отрезками $L_{\tilde{0}f}$, L_{0f} и кривой γ_{00} , не содержит особых точек потенциала Q). Значит, формула (33) совпадает со вторым соотношением в (4).

СЛУЧАЙ 4: $\theta/\pi = (2n+1)$. Единственное отличие от случая 3 — отрезок $L_{\tilde{0}f}$ лежит на луче с началом в точке z_s , проходящем через точку $\tilde{z}_0$.

Для завершения доказательства теоремы 1 заметим, что формулы (5) для коэффициентов a_j ($j \in \mathbb{Z}$) в соотношениях (4) получаются из формул (26) и (27) при $d = -1$.

Перейдем к доказательству следствия 2 (везде ниже $n \in \mathbb{Z}$).

СЛУЧАЙ 1: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n]$ ($\theta/\pi \in (2n, 2n+1]$) и a_{2n}, a_{2n-1} (a_{2n}, a_{2n+1}) не равны тождественно нулю. Полагая в лемме 12 $z_1 = z_f - z_s$, $z_2 = z_0 - z_s$, пользуясь также формулой (4) и леммой 11, получим, что элементы матрицы P зависят от ρ по типу 4.

СЛУЧАЙ 2: $\theta/\pi \in (2n-1, 2n+1]$, $a_{2n} \equiv 0$ ($a_{2n} = 0$ при любых значениях ρ). По лемме 10 (при $d = -1$) $a_{2n} \equiv 0$, если и только если $n = 0$ или $n \neq 0$ и $\mu(\rho) \equiv \mu_{2|n|,k}$, где $k \in \{1, \dots, 2|n| - 1\}$, а числа $\mu_{l,k}$ определены в (15). В силу леммы 10 и формул (4), (26), (29) в первом случае $P = R(z_f, z_0, z_s)$, а во втором — $P = (-1)^{n-k}R(z_f, z_0, z_s)$. По лемме 7 в обоих ситуациях элементы матрицы P либо не зависят от ρ , если $z_f = z_0$, либо их индикатор имеет тип 2, если $z_f \neq z_0$.

СЛУЧАЙ 3: $\theta/\pi \in (2n, 2n+2]$, $a_{2n+1} \equiv 0$. По лемме 10 (при $d = -1$) $a_{2n+1} \equiv 0$, если и только если $n \notin \{-1; 0\}$ и $\mu \equiv \mu_{|2n+1|,k}$, где $k \in \{1, \dots, |2n+1| - 1\}$, а числа $\mu_{l,k}$ определены в (15). При этом в силу леммы 10 и формулы (4) матрица

$P = i(-1)^{n-k}R(z_f, \tilde{z}_0, z_s)\sigma_3$. Поэтому по лемме 7 ее элементы либо не зависят от ρ , если $z_f = \tilde{z}_0$, либо их индикатор имеет тип 3, если $z_f \neq \tilde{z}_0$.

Заметим, что лучи (12)–(14) совпадают, если $\theta = \pi n$. При этом совпадают также индикаторы типов 3 и 4, если $\theta = 2n\pi$, и индикаторы типов 2 и 4, если $\theta = (2n+1)\pi$. В этих случаях будем считать, что реализуется тип зависимости 4, так как при $\varphi_\rho = \pi - 2\varphi_0$ ($\operatorname{Re}\{\lambda(z_0 - z_s)\} = 0$) асимптотика передаточной матрицы $P(\gamma, z_f, z_0)$ отличается от асимптотики передаточной матрицы вдоль отрезка (см определение 3 и лемму 6).

Объединяя рассмотренные случаи, получаем все утверждения следствия 2.

4. Заключение

В следствии 2 отмечалось, что при типах 2 и 3 зависимости $P(\rho)$ последняя по сути является такой же, как на отрезке с голоморфным потенциалом. Это означает, что в этом случае можно уточнить асимптотики и матрицы P , и распределения нулей ее элементов или их комбинаций, т. е. спектра краевых задач для уравнения (1), которые будут аналогичны классическим [1, 2]. Оказывается, что и в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 полученные выше результаты могут быть относительно легко уточнены для регулярных симметричных особых точек, так как в этом случае c_0 и μ не зависят от ρ . Действительно, уравнение (1) равносильно следующей системе уравнений первого порядка:

$$(z - z_s)y'_1 = y_2, \quad (z - z_s)y'_2 = (z - z_s)^2(\lambda^2 - Q(z))y_1 + y_2, \quad (34)$$

где $y_1(z) := u(z)$. Система (34) имеет в точке z_s регулярную особую точку, если потенциал $Q(z)$ в ее окрестности G может быть разложен в сходящийся ряд вида

$$Q(z) = -\frac{p(p-1)}{(z-z_s)^2} + \sum_{n=-1}^{\infty} \alpha_n (z-z_s)^n \quad \left(p \geq \frac{1}{2}\right), \quad (35)$$

где ограничение на значения p учитывает тот факт, что замена p на $1-p$ не меняет вида потенциала (35). Пусть $y_1^{(n)} = u_n(z)$ ($n = 1, 2$), где $u_n(z)$ — непрерывно дифференцируемые решения уравнения (1) вдоль спрямляемой кривой $\gamma \subset G \setminus \{z_s\}$, удовлетворяющие условиям (2). Тогда в силу определения 1 и соотношений (34)

$$\begin{pmatrix} y_1^{(1)} & y_1^{(2)} \\ y_2^{(1)} & y_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z - z_s \end{pmatrix} P(\gamma, z, z_0).$$

Поэтому матрица $C(z_0, z_s)$ совпадает с одной из матриц монодромии особой точки z_s системы (34). Пользуясь теоремами о виде решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в окрестности регулярной особой точки [14, гл. 15, § 10], можно получить следующую формулу для следа матрицы монодромии особой точки z_s системы (34) с потенциалом (35), а значит, и матрицы $C(z_0, z_s)$:

$$c_0 = 2 \cos(2\pi p). \quad (36)$$

Формула (36) в сочетании с полученным в [12] критерием квазибезмонодромности изолированной особой точки голоморфного потенциала Q позволяет утверждать, что потенциал (35) квазибезмонодромный (с $\nu \geq 2$) тогда и только тогда, когда число p является рациональным, отличным от целого. Напомним,

что случай целого p соответствует безмонодромным потенциалам при выполнении дополнительных условий [5, 9], которые для симметричного потенциала выполняются автоматически.

Таким образом, и в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 при $\theta \neq \pi n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) использование формул (4), (5), (8) и (36) позволяет достаточно детально исследовать асимптотику передаточной матрицы и спектры краевых задач для уравнения (1) в окрестности симметричной регулярной особой точки. При этом будем иметь дело с суммой умноженных на различные числа элементов передаточных матриц вдоль двух непараллельных отрезков. Возникающие при этом асимптотики ранее неоднократно исследовались, причем в более общих ситуациях (см. статьи [8, 11] и библиографические ссылки в них).

Уточнение результатов настоящей работы при $\theta = \pi n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) является существенно более сложной задачей даже для регулярных особых точек. Однако поскольку методика решений дифференциальных уравнений в окрестности таких точек хорошо известна [14, гл. 15, § 10], эта сложность носит в основном технический характер. Для $\theta = \pi$ и $Q = \alpha/z^2$ соответствующее исследование проведено в [7].

Для иррегулярных особых точек след матрицы монодромии системы (34) и уравнения (1) теоретически может быть найден с помощью абсолютно сходящегося ряда, полученного в прошлом веке Лаппо-Данилевским [15]. Однако этот ряд имеет очень громоздкий вид и такую возможность пока никому не удалось реализовать. Поэтому вопрос о возможности уточнения результатов настоящей работы в случае зависимости $P(\rho)$ типа 4 в окрестности иррегулярной особой точки остается открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: ГИТТЛ, 1956.
4. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983.
5. Ишкин Х. К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма — Лиувилля // Мат. заметки. 2013. Т. 94, № 4. С. 552–568.
6. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма — Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. 2016. Т. 28, № 1. С. 52–88.
7. Ишкин Х. К., Давлетова Л. Г. Регуляризованный след оператора Штурма — Лиувилля на кривой с регулярной особенностью на хорде // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 10. С. 1291–1303.
8. Ishkin K. K., Rezbayev A. V. On the Davies formula for the distribution of eigenvalues of a non-self-adjoint differential operator // J. Math. Sci. 2021. V. 252. P. 374–383.
9. Ishkin K. K., Marvanov R. On the class of potentials with trivial monodromy // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42, N 6. P. 1166–1174.
10. Голубков А. А. Регулярная циклическая матрица изолированной особой точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида // Материалы Воронежской весенней математической школы «Современные методы теории краевых задач. Понтягинские чтения-XXX». Воронеж, 3–9 мая 2019 г. Часть 4. Итоги науки и техники. Серия Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. М.: ВИНТИ РАН, 2024. Т. 233. С. 3–13.
11. Голубков А. А. Краевая задача для уравнения Штурма — Лиувилля с кусочно-целым потенциалом на кривой и условиями разрыва решений // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 1005–1027.

12. Голубков А. А. Квазибезмонодромные особые точки уравнения Штурма — Лиувилля стандартного вида на комплексной плоскости // Дифференц. уравнения. 2022. Т. 58, № 8. С. 1032–1038.
13. Golubkov A. A. Inverse problem for the Sturm — Liouville equation with piecewise entire potential and piecewise constant weight on the curve // Sib. Electron. Math. Rep. 2021. V. 18. P. 951–974.
14. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1966.
15. Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1957.

Поступила в редакцию 5 февраля 2025 г.

После доработки 18 февраля 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Голубков Андрей Александрович (ORCID 0000-0002-5265-1310)

Специализированный учебно-научный центр МГУ имени М. В. Ломоносова,

ул. Кременчугская, 11, Москва 121352

andrej2501@yandex.ru

ХОПФОВОСТЬ ВЕРШИННО-ТРАНЗИТИВНЫХ
ОБОБЩЕННЫХ ГРУПП
БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА

Н. В. Гуськов, Ф. А. Дудкин

Аннотация. Конечно порожденная группа G , которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщенной группой Баумслага — Солитера* (GBS группой). Если G действует транзитивно на вершинах, то будем называть ее *вершинно-транзитивной GBS группой* ($VTGBS$ группой). Группа называется *хопфовой*, если всякий ее гомоморфизм на себя является изоморфизмом. В этой работе получены некоторые достаточные условия нехопфовости $VTGBS$ групп и описаны эпиморфизмы таких групп.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.407

Ключевые слова: обобщенная группа Баумслага — Солитера, хопфова группа, вершинно-транзитивное действие.

Введение

Баумслаг и Солитер [1] впервые предложили серию примеров нехопфовых групп с двумя порождающими элементами и одним соотношением, они теперь обозначаются так:

$$BS(m, n) = \langle a, t \mid t^{-1}a^mt = a^n \rangle, \quad m \neq 0, n \neq 0,$$

и называются группами Баумслага — Солитера. Эти группы оказались интересными и с других позиций: геометрических свойств, функций роста, функции Дэна и т. д. Известно [1, 2], что $BS(m, n)$ хопфова тогда и только тогда, когда либо $|m| = 1$, либо $|n| = 1$, либо $\pi(m) = \pi(n)$, где $\pi(x)$ — множество всех простых делителей числа x .

Группы Баумслага — Солитера действуют на дереве $T_{BS(m, n)}$ левых смежных классов по подгруппе $\langle a \rangle$ так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы. Поэтому всякая группа $BS(m, n)$ является GBS группой. GBS группы являются естественными обобщениями групп Баумслага — Солитера. Эти группы активно изучались в последнее время с различных позиций (см., например, обзор [3]).

Отметим, что действие $BS(m, n)$ на $T_{BS(m, n)}$ является вершинно-транзитивным. Значит, группы Баумслага — Солитера являются $VTGBS$ группами. Вопрос о хопфовости GBS групп весьма естественный, он сформулирован в списке открытых проблем для GBS групп в работе [4] Левиттом.

Второй автор выполнил работу в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002 (теорема 1).

По теореме Басса — Серра [5] всякую $VTGBS$ группу можно представить в виде фундаментальной группы графа групп с бесконечными циклическими вершинными и реберными группами. Опуская ненужные и громоздкие определения (подробности можно прочитать, например, в [3]), отметим, что всякая $VTGBS$ группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ может быть задана с помощью копредставления

$$G(\overline{m}, \overline{n}) = \langle a, t_1, \dots, t_r \mid t_i^{-1} a^{m_i} t_i = a^{n_i}, i = 1, 2, \dots, r \rangle,$$

где $\overline{m}, \overline{n}$ — наборы из r ненулевых целых чисел. Если $|m_i| = |n_i|$, $i = 1, 2, \dots, r$, то $G(\overline{m}, \overline{n})$ содержит [6] подгруппу конечного индекса, изоморфную $F \times \mathbb{Z}$, где F — свободная группа конечного ранга. Поэтому в этом случае $G(\overline{m}, \overline{n})$ финитно аппроксимируема и, следовательно, хопфова. Далее будем рассматривать случай, когда $|m_i| \neq |n_i|$ для некоторого i .

Будем использовать обозначение $\langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ для нормального замыкания элемента a в группе $G(\overline{m}, \overline{n})$ и $C(a^{n_i})$ для централизатора a^{n_i} в группе $G(\overline{m}, \overline{n})$.

Основные результаты этой работы о хопфовости $VTGBS$ групп следующие.

Теорема 1. Пусть $r \geq 2$ и для некоторых $k \neq l$ верно, что $|m_k| \neq |n_k|$ и $m_k \mid n_k, n_l, m_l$. Тогда группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Следствие 2. Пусть $r \geq 2$ и для некоторого k верно, что $|m_k| = 1$ и $|n_k| \neq 1$. Тогда группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Теорема 2. Если $r \geq 2$ и существует такое k , что $\pi(m_k) \neq \pi(n_k)$, то группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ нехопфова.

Отметим, что доказательства теорем 1 и 2 не используют конечность множества проходных букв. Кроме того, получено описание эпиморфизмов $VTGBS$ групп в оставшихся случаях.

Теорема 3. Если $|m_1| \neq |n_1|$ и $\pi(m_i) = \pi(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, то произвольный эпиморфизм χ группы $G(\overline{m}, \overline{n})$ представляется в виде композиции некоторого внутреннего автоморфизма и эпиморфизма ψ вида

$$\psi(a) = a^{\pm 1}, \quad \psi(t_i) = w_i T_i, \quad w_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle,$$

$$T_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})} \cap C(a^{n_i}), \text{ для } i = 1, 2, \dots, r.$$

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть группа G является свободным произведением групп A и B с объединенными подгруппами $K \subseteq A$ и $L \subseteq B$, т. е.

$$G \cong A \underset{K=L}{*} B.$$

Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n$, $n \geq 0$, элементов из G называется *приведенной* (см. [7, гл.4, § 2]), если

- (1) каждое c_i лежит в одном из множителей A или B ,
- (2) последовательные c_i, c_{i+1} лежат в разных множителях,
- (3) если $n > 1$, то никакое c_i не лежит ни в K , ни в L ,
- (4) если $n = 1$, то $c_1 \neq 1$.

Там же доказано, что любой элемент $g \in G$ может быть записан в виде $g = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$ произведения элементов некоторой приведенной последовательности $c_1, c_2, \dots, c_n$, и если $n \geq 1$, то $g \neq 1$ в группе G . Число n называется *длиной элемента g относительно данного разложения группы G в свободное*

произведение с объединением и обозначается $|g|$. Длина единичного элемента группы G равна 0. Заметим, что если $1 \neq g \in A *_{K=L} B$ представлен приведенной последовательностью, то $|g \cdot h| = |g|$ для всех $h \neq g^{-1}$, $h \in K = L$.

Последовательность $c_1, c_2, \dots, c_n$, $n \geq 0$, называется *циклически приведенной*, если любая ее циклическая перестановка приведена. Любой элемент $g \in G$ может быть записан в приведенном виде $g = u \cdot v \cdot u^{-1}$, где $v = c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_n$, для подходящей циклически приведенной последовательности $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Так как группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ является итерированным HNN -расширением циклической группы $\langle a \rangle$, то (см., например, [8, теорема 17.1]) $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ является фундаментальной группой бесконечного дерева групп T , вершинные группы которого имеют вид $\langle a^w \rangle$, $w \in \langle t_1, \dots, t_r \rangle$, а реберные соответствуют реберным группам $G(\overline{m}, \overline{n})$. Всякое ребро $e \in E(T)$ задает разложение $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ в виде $A *_{K=L} B$, где A и B — фундаментальные группы поддеревьев групп, на которые распадается $T \setminus \{e\}$. Подгруппа $K = L \cong \mathbb{Z}$ задана ребром e , будем обозначать ее через $\langle e \rangle$.

Для каждого элемента $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ будем обозначать через T_X минимальное поддерево групп дерева групп T такое, что $X \in \pi_1(T_X)$. В дальнейшем для элементов $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ и ребер $e \in E(T)$ будем использовать e -приведенную запись X , а соответствующую длину X будем называть e -длиной и обозначать через $|X|_e$.

Будем называть элементы $(a^\alpha)^w$, $w \in \langle t_1, \dots, t_r \rangle$, $\alpha \in \mathbb{Z}$, *вершинными*. Заметим, что $X \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ вершинный тогда и только тогда, когда $|X|_e < 2$ для всех $e \in E(T)$.

Для любых $X, Y \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ выполнены следующие утверждения:

- 1) $|X^{-1}|_e = |X|_e$ для всех $e \in E(T)$;
- 2) $|XY|_e \leq |X|_e + |Y|_e$ для всех $e \in E(T)$;
- 3) если X, Y — неединичные вершинные элементы, то XY — вершинный элемент тогда и только тогда, когда $XY = YX$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть x_i , $i = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 2$, — неединичные вершинные элементы. Если $X = \prod_{i=1}^l x_i \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ — вершинный элемент, то найдется k такое, что $x_k x_{k+1}$ — вершинный элемент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по l . Если $l = 2$, то замечание очевидно.

Пусть $l > 2$ и для всякого k найдется ребро e такое, что $|x_k x_{k+1}|_e = 2$. Фиксируем ребро f такое, что $|x_1 x_2|_f = 2$. Из условий замечания вытекает, что

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y|_f,$$

где $y = x_2 \dots x_l$. По определению f -длины $\langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ разлагается в свободное произведение подгрупп A и B с объединением по $K = L = \langle f \rangle$. Пусть $x_1 \in A \setminus K$, $4x_2 \in B \setminus L$. Представим y в f -приведенном виде:

$$y = y_1 y_2 \dots y_m.$$

Пусть $m \geq 2$. Если $y_1 = x_2 \dots x_q \in A \setminus K$ для некоторого $q \geq 2$, то $|x_2^{-1} y_1|_f = |x_3 \dots x_q|_f = 2$. Значит, найдется такое $3 \leq p \leq q - 1$, что $x_3 \dots x_p \in B \setminus L$, $x_{p+1} \dots x_q \in A \setminus K$. Так как $x_2 \in B \setminus L$, то такое может быть, только если $x_2 \dots x_p \in \langle f \rangle$ или $x_{p+1} \dots x_q \in \langle f \rangle$. В этом случае можно использовать индукционное предположение для одного из этих подслов.

Значит, $y_1 \in B \setminus L$, тогда $y_2 \in A \setminus K$ и т. д. В этом случае

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y_1 \dots y_m|_f = m + 1 \geq 3.$$

Противоречие. Значит, $m = 1$ и $y = y_1 = x_2 \dots x_l \in B$.

Если $y \notin L$, то

$$1 \geq |X|_f = |x_1 y|_f = 2.$$

Поэтому $y \in L$. Отсюда вытекает, что y — вершинный элемент, а значит, можно использовать предположение индукции. Замечание 1 доказано.

Следствие 1. В условиях замечания 1 найдется последовательность сокращений слова X до записи в виде вершинного элемента. На каждом шаге такой последовательности некоторые два соседних вершинных элемента предыдущей записи объединяются в один вершинный элемент и получается следующая запись X в произведение вершинных элементов, число элементов которой на 1 меньше.

Лемма 1. Пусть x_i , $i = 1, 2, \dots, l$, $l \geq 2$, — неединичные вершинные элементы. Если $X = \prod_{i=1}^l x_i \in \langle\langle a \rangle\rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ — вершинный элемент, то для любых номеров $p \neq k$ найдется подстановка σ на множестве $\{1, 2, \dots, l\}$ такая, что $\{\sigma(s), \sigma(s+1)\} = \{p, k\}$ для подходящего $s < l$ и

$$X = \prod_{i=1}^l x_{\sigma(i)}.$$

Доказательство. Пусть последнее сокращение из следствия 1 для X объединяет два вершинных элемента u и v так, что

$$X = u \cdot v, \quad u = x_1 x_2 \dots x_j, \quad v = x_{j+1} x_{j+2} \dots x_l.$$

Если $p, k \leq j$ или $p, k \geq j+1$, то лемма доказывается индукцией по l .

Если $p \leq j$, $k \geq j+1$, то будем доказывать индукцией по $k - p$. База индукции при $k = p+1$ очевидна. Будем считать, что $p < j$, случай $k > j+1$ аналогичен. Зафиксируем такой этап сокращений u , на котором вершинный элемент z_m , оканчивающийся в начальной записи на x_p , сокращается с z_{m+1} , начинающимся на x_{p+1} , т. е.

$$u = z_1 \dots z_{m-1} \underline{z_m z_{m+1}} z_{m+2} \dots z_n,$$

$z_m = x_{p_1} \dots x_p$, $z_{m+1} = x_{p+1} \dots x_{p_2}$ и z_i , $i = 1, 2, \dots, n$, — вершинные элементы. Тогда $z_m z_{m+1} = z_{m+1} z_m$ и соответствующая перестановка $x_1, \dots, x_j$ не изменит u и X , но в новой записи X расстояние между x_k и x_p уменьшится. Лемма 1 доказана.

Определим отображения E и Z из множества приведенных слов $W \subseteq \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ в $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ с помощью индукции. Если w — пустое слово, то $E(w) = 1 = Z(w)$. Пусть $E(t_i) := Z(t_i^{-1}) := m_i$ и $Z(t_i) := E(t_i^{-1}) := n_i$ для всех i . Если $\varepsilon \in \{-1, 1\}$, то для приведенного слова $wt_i^\varepsilon \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ положим

$$E(wt_i^\varepsilon) := \frac{E(w)E(t_i^\varepsilon)}{\gcd(Z(w), E(t_i^\varepsilon))}, \quad Z(wt_i^\varepsilon) := \frac{Z(w)Z(t_i^\varepsilon)}{\gcd(Z(w), E(t_i^\varepsilon))}.$$

Легко показать, что для приведенного слова $w_1 w_2 \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$

$$E(w_1 w_2) = \frac{E(w_1)E(w_2)}{\gcd(Z(w_1), E(w_2))}, \quad Z(w_1 w_2) = \frac{Z(w_1)Z(w_2)}{\gcd(Z(w_1), E(w_2))}.$$

§ 2. Основные результаты

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Очевидно, что данная группа изоморфна группе с $m'_l = \frac{n_k m_l}{m_k}$ и $n'_l = \frac{n_k n_l}{m_k}$. После применения такого изоморфизма будем считать, что $E(t_l) = m'_l$ и $Z(t_l) = n'_l$.

Рассмотрим эпиморфизм α , заданный следующим образом:

$$\alpha(a) = a, \quad \alpha(t_l) = t_k t_l t_k^{-1}, \quad \alpha(t_i) = t_i \text{ при } i \neq l.$$

Заметим, что $E(\alpha(t_l)) = m_l$ и $Z(\alpha(t_l)) = n_l$.

Элемент $X = (a^{m_l})^{t_l} \cdot a^{-n_l}$ по лемме Бриттона не равен 1. При этом

$$\alpha(X) = (a^{m_l})^{\alpha(t_l)} \cdot a^{-n_l} = 1.$$

Следовательно, группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ с таким набором параметров нехопфова. Теорема 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Ввиду следствия 2 можно считать, что для всех i либо оба $|m_i|, |n_i|$ не равны 1, либо $|m_i| = |n_i| = 1$. Так как $\pi(m_k) \neq \pi(n_k)$, без потери общности можно считать, что существует такое простое число d , что $d \mid m_k$ и $d \nmid n_k$.

Построим неинъективный эпиморфизм. Пусть α — эндоморфизм группы $G(\overline{m}, \overline{n})$ такой, что

$$\alpha(a) = a^d, \quad \alpha(t_i) = t_i.$$

Так как $d \perp n_k$, существуют такие $p, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, что

$$pn_k + ld = 1,$$

причем $n_k \nmid l$ и $d \nmid p$. Пусть

$$P = (a^{pm_k/d})^{t_k} \cdot a^l, \quad Q = a^{-1}P^d.$$

Заметим, что $E(t_k) = m_k \nmid (pm_k/d)$ и $Z(t_k) = n_k \nmid l$. Вновь по лемме Бриттона получаем, что $Q \neq 1$, при этом

$$\alpha(P) = (a^{pm_k})^{t_k} \cdot a^{ld} = a^{pn_k+ld} = a, \quad \alpha(Q) = a^{-d}\alpha(P)^d = 1.$$

Следовательно, α — неинъективный эпиморфизм и группа $G(\overline{m}, \overline{n})$ не хопфова. Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть $\chi(a) = w_0 A$ и $\chi(t_i) = v_i T_i$ для $w_0, v_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $A, T_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})}$ для всех i .

Так как χ — эндоморфизм, для любого $i = 1, 2, \dots, r$ верно, что

$$T_i^{-1} \cdot ((w_0 A)^{m_i})^{v_i} \cdot T_i = (w_0 A)^{n_i}. \quad (1)$$

Если применить к обеим частям (1) канонический гомоморфизм

$$G(\overline{m}, \overline{n}) \rightarrow G(\overline{m}, \overline{n}) / \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\overline{m}, \overline{n})},$$

то при $i = 1$ получим

$$v_1^{-1} w_0^{m_1} v_1 = w_0^{n_1}.$$

Ясно, что при $|m_1| \neq |n_1|$ это возможно только тогда, когда $w_0 = 1$.

Докажем, что A — вершинный элемент. Если A сопряжен с a^α , то композиция χ и подходящего внутреннего автоморфизма даст эндоморфизм желаемого

типа. Предположим теперь, что A не сопряжен с a^α . Тогда найдется такое ребро e дерева T , что

$$A = X^{-1}A_0X,$$

A_0 — e -циклически приведен и $|A_0|_e \geq 2$.

Из (1) при $i = 1$ для всякого целого k следует, что

$$S_k^{-1} \cdot (A_0^{u_1^k})^{m_1^k} \cdot S_k = A_0^{n_1^k}, \quad (2)$$

где $S_k = X \cdot \bar{T}_{1,k} \cdot X^{-1}$, $u_1 = X \cdot v_1 \cdot X^{-1}$, а $\bar{T}_{1,k} \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ такой элемент, что $(v_1 T_1)^k = v_1^k \cdot \bar{T}_{1,k}$.

Заметим, что $u_1 \neq 1$, иначе χ не может быть сюръективно. Элемент u_1 гиперболический относительно действия свободной группы $X \cdot F(t_1, t_2, \dots, t_r) \cdot X^{-1}$ на дереве T и его трансляционная длина (см., например, [8]) положительна. Поэтому найдется такое k , что $T_{A_0^{u_1^k}}$ не пересекается с T_{A_0} . Обозначим $u_1^k e$ через

f . Тогда $A_0^{u_1^k}$ f -циклически приведен и $|A_0^{u_1^k}|_f \geq 2$. При этом $|A_0|_f = 1$. Тогда f -длина правой части (2) равна 1 и

$$|S_k^{-1} \cdot (A_0^{u_1^k})^{m_1^k} \cdot S_k|_f \geq |(A_0^{u_1^k})^{m_1^k}|_f = |m_1|^k |A_0^{u_1^k}|_f \geq 2.$$

Это противоречие показывает, что можно выбрать внутренний автоморфизм так, что в композиции с ним χ даст эпиморфизм ψ , для которого $\psi(a) = a^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus 0$. Далее будем изучать ψ и переобозначим v_i, T_i так, что $\psi(t_i) = v_i T_i$ для $v_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $T_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ для всех i .

Докажем, что $|\alpha| = 1$. Предположим, что это не так. Так как ψ — сюръекция, можно взять элемент $w_0 P \in G(\bar{m}, \bar{n})$ такой, что $\psi(w_0 P) = a$, причем $w_0 \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ и $P \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$. Факторизуя $G(\bar{m}, \bar{n})$ по $\langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$, получаем свободную группу $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$. Эта факторизация индуцирует эпиморфизм $\bar{\psi}$ группы $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$, для которого

$$\bar{\psi}(t_i) = w_i.$$

Но группа $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ хопфова как конечно порожденная свободная группа, а потому $\bar{\psi}$ — автоморфизм $\langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$. Теперь заметим, что $\psi(w_0 P) = \bar{\psi}(w_0) P'$, где $P' \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$. Опять перейдем к фактор-группе и получим, что $\bar{\psi}(w_0) = 1$, откуда следует, что $w_0 = 1$, т. е. произвольный прообраз a лежит в $\langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$.

Представим P в виде

$$P = \prod_{i=1}^l (a^{\beta_i})^{\nu_i},$$

где $\beta_i \in \mathbb{Z}$, $\nu_i \in \langle t_1, t_2, \dots, t_r \rangle$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда $\psi(P)$ можно представить в виде

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l C_i^{-1} (a^{\alpha \beta_i})^{\bar{\psi}(\nu_i)} C_i,$$

где $C_i \in \langle \langle a \rangle \rangle_{G(\bar{m}, \bar{n})}$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$.

Применяя многократно лемму 1, получаем, что существует такая перестановка σ множества $\{1, 2, \dots, l\}$, что

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l (a^{\alpha \beta_{\sigma(i)}})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})}.$$

Так как $\alpha \notin \{\pm 1\}$, зафиксируем какой-нибудь простой делитель d числа α . Существуют такие $\gamma_i \in \mathbb{Z}$, что $\alpha\beta_{\sigma(i)} = d\gamma_i$ для всех $i = 1, 2, \dots, l$. Тогда

$$\psi(P) = \prod_{i=1}^l (a^{d\gamma_i})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})}. \quad (3)$$

Заметим, что так как $\pi(m_i) = \pi(n_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$, то если и верно, что

$$t_i^{-\varepsilon} a^{kd} t_i^{\varepsilon} = a^{k'},$$

для некоторых $k, k' \in \mathbb{Z}$, то обязательно $d \mid k'$. Перепишем (3) в виде

$$\prod_{i=1}^l (a^{d\gamma_i})^{\bar{\psi}(\nu_{\sigma(i)})} \cdot a^{-1} = 1.$$

Пользуясь леммой Бриттона, будем сокращать выражение слева и следить за суммой степеней a . Изначально она сравнима с -1 по модулю d . Если в сокращении участвуют любые буквы, кроме самой правой a^{-1} , согласно сделанному выше замечанию это свойство сохраняется. Если в какой-то момент рядом с a^{-1} оказалось a^α , то сопряжением переведем ее в левую часть выражения так, что слева от элемента a^{-1} вновь окажется какой-то t_i^ε . Ясно, что в конце всех сокращений слева не должно остаться букв t_i . Получаем, что $a^{-1+\lambda \cdot d} = 1$ для $\lambda \in \mathbb{Z}$, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что $|\alpha| = 1$.

Пусть $\alpha = 1$ (случай с $\alpha = -1$ рассматривается аналогично). Тогда для любого $i = 1, 2, \dots, r$ верно, что

$$T_i^{-1}(a^{m_i})^{v_i} T_i = a^{n_i}.$$

Представим T_i в виде произведения вершинных элементов:

$$T_i = \prod_{j=1}^{|T_i|} u_{ji},$$

так, что произведение соседей $u_{ji}u_{j+1i}$ не может быть вершинным элементом. Тогда из замечания 1 следует, что $(a^{m_i})^{v_i} u_{1i}$ — вершинный элемент, откуда следует, что $u_{1i}^{-1}(a^{m_i})^{v_i} u_{1i} = (a^{m_i})^{v_i}$. Продолжая далее по индукции, получаем, что $T_i^{-1}(a^{m_i})^{v_i} T_i = (a^{m_i})^{v_i}$ и

$$(a^{m_i})^{v_i} = a^{n_i}.$$

Поэтому $T_i \in C(a^{n_i})$. Теорема 3 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Baumslag G., Solitar D. Some two-generator one-relator non-Hopfian groups // Bull. Am. Math. Soc. 1962. V. 68, N 3. P. 199–201.
2. Collins D., Levin F. Automorphisms and Hopficity of certain Baumslag–Solitar groups // Arch. Math. (Basel). 1983. V. 40, N 5. P. 385–400.
3. Дудкин Ф. А. Групповые и алгоритмические свойства обобщенных групп Баумслага — Солитера // Алгебра и логика. 2022. Т. 61, № 3. С. 341–352.
4. Levitt G. On the automorphism group of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. & Topol. 2007. V. 11, N 1. P. 473–515.
5. Serre J. P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1980.
6. Levitt G. Quotients and subgroups of Baumslag–Solitar groups // J. Group Theory. 2015. V. 18, N 1. P. 1–43.
7. Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

8. Bogopolski O. Introduction to group theory. European Mathematical Society, 2008.

Поступила в редакцию 18 декабря 2024 г.

После доработки 24 мая 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Гуськов Никита Викторович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
N.Guskov@ng.su.ru

Дудкин Федор Анатольевич (ORCID 0000-0002-4775-7962)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
DudkinF@gmail.com

УДК 517.518.1

НЕКОНТАКТНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЩИХ ГРУПП КАРНО И ФОРМУЛА КОПЛОЩАДИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Выведена формула коплощади для отображений групп Карно произвольной глубины. Одним из ключевых свойств является описание соотношения мер Хаусдорфа, построенных по субримановым и римановым квазиметрикам.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.408

Ключевые слова: группа Карно, множество уровня, хаусдорфова размерность, формула коплощади.

Статья посвящена продолжению начатых в [1, 2] исследований метрических свойств классов неконтактных отображений групп Карно. В отличие от рассмотренных ранее случаев в поставленной задаче нет ограничений на соотношение размерностей подрасслоений, соответствующих полям одинаковых степеней. Кроме того, сняты ограничения на глубину прообраза и образа. Таким образом, решается вопрос в универсальной постановке. В частном случае, когда размерности подрасслоений полей одинаковой степени на прообразе не меньше, чем таковые на образе, результаты перспективны в плане применений к аппроксимации липшицевых во внутреннем смысле отображений гладкими. Такая аппроксимация может быть полезна при выводе в явном виде метрических свойств множеств уровня классов липшицевых во внутреннем смысле отображений. Эта задача является одной из трудных открытых проблем анализа на метрических структурах, и в настоящее время она решена только либо для некоторых частных случаев (см., например, [3–6] и др.), либо в достаточно локальном виде [7]. Так как при построении отображений, аппроксимирующих исходное, свойство контактности (и соответственно липшицевости во внутреннем смысле) в общем случае исчезает, то возникает вопрос, как описать субримановы свойства неконтактных аппроксимаций. В ходе решения задачи установлен ряд свойств дифференциалов неконтактных отображений, а именно, показано, как структура дифференциала может быть адаптирована под структуру дифференциала контактного отображения и какими аналогами субримановых метрических свойств он обладает. Также исследованы классы функций множества, определяемых на поверхностях уровня, и установлено, что каждая такая функция является мерой и обладает свойством счетной аддитивности.

В разд. 1 приведены основные определения и факты из теории групп Карно. Разд. 2 посвящен сравнению в прообразе и образе сумм размерностей подрасслоений полей, степень которых не превосходит определенного числа от единицы до

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации № 075-15-2025-349 от 29.04.2025.

глубины образа, и описанию свойств дифференциала в нехарактеристических точках. В разд. 3 построен дифференциал субриманова типа и установлены его свойства. Разд. 4 содержит приложения установленных результатов: описание новой меры Хаусдорфа на множествах уровня и вывод формулы коплощади нового типа (ср. [1, 8, 2]).

1. Основные свойства групп Карно

Для описания условий решаемой задачи нам потребуются базовые определения и свойства исследуемых объектов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 (см., например, [9]). *Группой Карно* называется связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой градуирована, т. е. представляется в виде

$$V = \bigoplus_{j=1}^M V_j, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j < M, \quad [V_1, V_M] = \{0\}.$$

Размерности пространств $V_j(x)$, $j = 1, \dots, M$, не зависят от точки x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Пусть N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$ и $X_1, X_2, \dots, X_N$ — левоинвариантные векторные поля на $\mathbb{G}$, образующие базис алгебры Ли V , причем

$$\begin{cases} X_1, \dots, X_{\dim V_1} & \text{— базис } V_1, \\ X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_{k-1} + 1}, \dots, X_{\dim V_1 + \dots + \dim V_k} & \text{— базис } V_k, \quad 1 < k \leq M. \end{cases}$$

Здесь символ $\dim V_k$ означает размерность V_k (в каждой точке x). Если $X_j \in V_k$, то число k называется *степенью* поля X_j и обозначается символом $\deg X_j$. Векторные поля степени 1 далее будем называть *горизонтальными*.

Если

$$x = \exp\left(\sum_{j=1}^N x_j X_j\right)(\mathbf{0}), \quad y = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

то

$$x \cdot y = z = \exp\left(\sum_{j=1}^N z_j X_j\right)(\mathbf{0}),$$

где $z_j = x_j + y_j$ для $\deg X_j = 1$,

$$z_j = x_j + y_j + \sum_{\substack{\mu > 0, \beta > 0, \\ |\mu + \beta|_h = \deg X_j}} F_{\mu, \beta}^j x^\mu y^\beta$$

при $\deg X_j > 1$, и для каждого N -мерного мультииндекса $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ его *однородная норма* обозначается через $|\lambda|_h = \sum_{i=1}^N \lambda_i \deg X_i$.

Здесь умножение $x \cdot y$ понимается в следующем смысле. Сначала движение идет до точки x вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N x_j X_j$ с началом в единице группы $\mathbf{0}$, а затем — вдоль интегральной линии векторного поля $\sum_{j=1}^N y_j X_j$ с началом в x . Таким образом, интегральная линия поля $\sum_{j=1}^N z_j X_j$ соединяет точки $\mathbf{0}$ и $z = \exp\left(\sum_{j=1}^N y_j X_j\right)(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Константы $\{F_{\mu,\beta}^j\}_{j,\mu,\beta}$ называются *структурными константами группы $\mathbb{G}$* .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Так как на группе Карно по определению верно

$$[X_i, X_j] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k,$$

где все $\{c_{ijk}\}_{i,j,k}$ постоянны, а при вычислении координат $\{z_j\}_{j=1}^N$ используется формула Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа, то константы $\{F_{\mu,\beta}^j\}_{j,\mu,\beta}$ всегда определяются однозначно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Рассмотрим точку $u \in \mathbb{G}$ и $(v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$. Определим отображение $\theta_u : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\theta_u(v_1, \dots, v_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N v_i X_i\right)(u).$$

Известно, что θ_u — гладкий диффеоморфизм. Набор $\{v_i\}_{i=1}^N$ называется *нормальными координатами* или *координатами первого рода* (относительно $u \in \mathbb{G}$) точки $v = \theta_u(v_1, \dots, v_N)$.

В качестве расстояния будем использовать следующую величину, локально билипшицево эквивалентную известной метрике Карно — Каратеодори (см., например, [10]) на группах Карно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Пусть $\mathbb{G}$ — группа Карно и $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$.

Определим величину d_2 следующим образом:

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot 2}}, \dots, \left(\sum_{j: \deg X_j=M} w_j^2\right)^{\frac{1}{2 \cdot M}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника. Кроме того, d_2 является субримановым обобщением евклидовой метрики.

Отметим, что часто в исследованиях на неголономных структурах используют метрику Карно — Каратеодори, которая вычисляется как точная нижняя грань длин горизонтальных кривых (т. е. абсолютно непрерывных кривых, у которых касательный вектор в почти каждой точке горизонтален). Ее недостаток состоит в том, что структура шаров в этой метрике в настоящее время известна только в нескольких частных случаях.

Свойство 1.7. Образ шара $\text{Box}_2(v, r)$ при отображении θ_v^{-1} — декартово произведение M (евклидовых) шаров, диаметры которых равны $2r, 2r^2, \dots, 2r^M$.

Свойство 1.8. С помощью свойства 1.7 непосредственно проверяется, что хаусдорфова размерность группы $\mathbb{G}$ относительно d_2 равна

$$\nu = \sum_{j=1}^M j \dim V_j.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.9. Определим функцию множества $\mathcal{H}^\nu$ для $A \subset \mathbb{G}$ следующим образом:

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^M \omega_{\dim V_k} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(y_i, r_i) \supset A, y_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Здесь и далее символ ω_l обозначает объем евклидова шара единичного радиуса в $\mathbb{R}^l$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.10. Определение 1.9 отличается от классического тем, что центры шаров покрытия берутся на самом множестве. Однако для исследуемых в статье множеств такое отличие не является принципиальным в силу абсолютной непрерывности по мере $\mathcal{H}^N$ (см. ниже свойство 1.11).

Из [11, разд. 1] следует

Свойство 1.11. Функция множества $\mathcal{H}^\nu$ является мерой (в частности, она обладает свойством счетной аддитивности на σ -алгебре борелевских множеств). Кроме того, меры $\mathcal{H}^\nu$ и $\mathcal{H}^N$, где мера Хаусдорфа $\mathcal{H}^N$ построена по метрике вида $\sqrt{\langle \cdot, g \cdot \rangle}$, определяемой римановым тензором g на $\mathbb{G}$, абсолютно непрерывны одна относительно другой и восстанавливаются по соответствующим производным. Производная $\mathcal{H}^N$ по $\mathcal{H}^\nu$ в точке $x \in \mathbb{G}$ равна $\sqrt{\det(g(x))}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.12. То, что $\mathcal{H}^\nu$ является мерой, можно доказать из абсолютной непрерывности $\mathcal{H}^\nu$ относительно $\mathcal{H}^N$ и квазиаддитивности $\mathcal{H}^\nu$ (см. подробности и схему доказательства в [12]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.13. Функция множества $\mathcal{H}^\nu$ называется *субримановой мерой*.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 1.14. Пусть $\tilde{\mathbb{G}}$ — группа Карно. Обозначим ее размерность и размерности составляющих алгебру Ли подпространств, глубину, определенную аналогично d_2 квазиметрику, хаусдорфову размерность относительно этой квазиметрики теми же символами, что и для $\mathbb{G}$, только со знаком $\sim$. Построенную по $\tilde{d}_2$ меру Хаусдорфа размерности $\tilde{\nu}$ обозначим символом $\mathcal{H}^{\tilde{\nu}}$.

Предположение 1.15. Будем рассматривать отображения $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ класса C^1 , где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество группы Карно $\mathbb{G}$, $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно глубины M и $\tilde{M}$ и топологических размерностей N и $\tilde{N}$ соответственно, $N \geq \tilde{N}$.

Также будем предполагать, что ранг $D\varphi$ всюду равен $\tilde{N}$ (т. е. он максимален), и $D\varphi$ строго отделен от нуля всюду на Ω : иными словами, существует такое $t > 0$, что $\|D\varphi(x)\langle w \rangle\| \geq t$ для всех $x \in \Omega$ и $w \in (\ker D\varphi(x))^\perp$, где $\|w\| = 1$.

Кроме того, будем считать, что существуют такие $0 < c < C < \infty$, что $c \leq \sqrt{\det(g(x))} \leq C$ всюду на Ω , где g — риманов тензор на $\mathbb{G}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.16. Подчеркнем, что не требуется выполнения ни одного из условий

1) $M \geq \tilde{M}$;

2) хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, M]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \tilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \tilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$.

2. Соотношение размерностей

Из результатов [1, 2] следует, что для корректного определения хаусдорфовой размерности множеств уровня необходимо вычислить минимально возможную сумму степеней $\tilde{N}$ линейно независимых векторных полей в прообразе. Далее будем рассматривать точки, в которых дифференциал отображения невырожденный на каждом из таких векторов. Такой выбор обоснован тем, что в этом случае меры пересечений субриманова шара и проходящего через его центр множества уровня и субриманова шара и касательной плоскости к такому множеству уровня будут совпадать с точностью до множителя $1 + o(1)$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.1. Положим

$$\widehat{M} = \min \left\{ m : \sum_{k=1}^m \dim V_k \geq \tilde{N} \right\}.$$

Из определения следует, что $\widehat{M} \leq M$. Если хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, \widehat{M}]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \tilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \tilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, то $\widehat{M} \leq \widetilde{M}$.

Перейдем к определению характеристической точки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Точка $x \in \Omega$ называется *характеристической*, если минимально возможная сумма степеней $\tilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго больше, чем

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} k \cdot \dim V_k + \widehat{M} \cdot \left(\tilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k \right). \quad (1)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Определение характеристической точки, приведенное в [2], является частным случаем определения 2.2. Действительно, если, например, $\widetilde{M} = 2$ и $\dim \tilde{V}_1 \leq \dim V_1 \leq \tilde{N} = \dim \tilde{V}_1 + \dim \tilde{V}_2$, то минимально возможная сумма степеней $\tilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, равна $\dim V_1 + 2(\tilde{N} - \dim V_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4 (см., например, [13]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что φ — *контактное отображение класса C_H^1* , если производные вдоль горизонтальных полей $X_1\varphi, \dots, X_{\dim V_1}\varphi$ существуют и непрерывны и $V_1\varphi \subset \tilde{V}_1$. Здесь $V_1\varphi$ обозначает линейную оболочку векторных полей, полученных в результате действия горизонтальных полей на φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.5. Если отображение φ является непрерывно дифференцируемым в классическом смысле и контактным, то минимально возможная сумма степеней $\tilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго равна (см. [14])

$$\sum_{k=1}^{\widetilde{M}} k \dim \tilde{V}_k. \quad (2)$$

Как видно из (2), эта сумма строго больше значения (1), если хотя бы для одного $k_0 \in \overline{[1, \widetilde{M}]}$ верно $\dim V_{k_0} > \dim \tilde{V}_{k_0}$, а $\dim V_k \geq \dim \tilde{V}_k$ для всех остальных $k \neq k_0$, не превосходящих $\widetilde{M}$. Данное различие обусловлено свойством контактности отображения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.6. Если $M \geq \widetilde{M}$ и $\dim V_k = \dim \widetilde{V}_k$ для всех $k = 1, \dots, \widetilde{M}$, то минимально возможная сумма степеней $\widetilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, будет такая же, как в контактном случае.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.7. Положим

$$\widehat{N} = \sum_{k=1}^{\widehat{M}} \dim V_k.$$

По определению $\widetilde{N} \leq \widehat{N} \leq N$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.8. Положим $n_m = \sum_{k=1}^m \dim V_k$ для всех $m = 1, \dots, M$ и $n_0 = 0$. Также положим $\widetilde{n}_p = \sum_{k=1}^p \dim \widetilde{V}_k$ для всех $p = 1, \dots, \widetilde{M}$ и $\widetilde{n}_0 = 0$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.9. Для произвольного отображения $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$, где $\Omega \subset \mathbb{G}$, обозначим символом $D_m \psi$ часть матрицы дифференциала $D\psi$, состоящую из первых n_m столбцов.

Таким образом, часть матрицы дифференциала $D\psi$, состоящая из первых $\widehat{N}$ столбцов, обозначается символом $D_{\widehat{M}} \psi$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 2.10. Положим $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$.

Теорема 2.11. В условиях предположения 1.15 для неконтактных отображений $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ класса C^1 , где $\Omega \subset \mathbb{G}$ — открытое множество, точка является характеристической тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

- ранг $D_{\widehat{M}} \varphi$ в этой точке не превосходит $\widetilde{N} - 1$;
- существует $1 \leq m < \widehat{M}$ такое, что ранг $D_m \varphi$ в этой точке не превосходит $n_m - 1$, тогда как ранг $D_{\widehat{M}} \varphi$ максимален.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем точку $x \in \Omega$ и перейдем в нормальные координаты относительно x . Тогда вид матрицы дифференциала отображения φ_x в нуле в стандартном базисе будет таким же, как вид матрицы дифференциала φ в точке x в базисе $\{X_i\}_{i=1}^{\widetilde{N}}$. Так как точка $x \in \Omega$ фиксирована, далее в доказательстве при рассмотрении матриц или элементов матриц дифференциалов мы не будем указывать аргумент, чтобы избежать загромождения текста. Каждому столбцу матрицы $D\varphi_x$ с номером i сопоставим число, равное степени векторного поля с таким же номером $\deg X_i$, $i = 1, \dots, N$.

Рассмотрим матрицу $D_{\widehat{M}} \varphi$, которая совпадает с матрицей, составленной из первых $\widehat{N}$ столбцов $D_{\widehat{M}} \varphi_x$, размера $\widetilde{N} \times \widehat{N}$, и проанализируем ее свойства. Так как результат действия $D_{\widehat{M}} \varphi_x$ на стандартный вектор $\mathbf{e}_i$ — это столбец с номером i , $i = 1, \dots, \widehat{N}$, будем исследовать свойства столбцов.

Пусть ранг $D_{\widehat{M}} \varphi$ строго меньше $\widetilde{N}$. В этом случае в $D_{\widehat{M}} \varphi_x$ можно выбрать не более чем $\widetilde{N} - 1$ линейно независимых столбцов. Минимально возможная сумма степеней, соответствующая этим столбцам, равна

$$\sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} k \dim V_k + \widehat{M} \cdot \left(\widetilde{N} - \sum_{k=1}^{\widehat{M}-1} \dim V_k - 1 \right). \quad (3)$$

Так как $\text{rang } D\varphi = \tilde{N}$, существует хотя бы один столбец матрицы $D\varphi_x$ с номером $j > \hat{N}$, которому сопоставлена степень $\deg X_j > \hat{M}$. Эта степень в сумме с (3) будет строго больше, чем (1).

Предположим теперь, что $\text{rang } D_{\hat{M}}\varphi$ равен $\tilde{N}$, но при этом существует $1 \leq m < \hat{M}$ такое, что $\text{rang } D_m\varphi$ в этой точке не является максимальным. Выберем наибольшее из таких чисел $m < \hat{M}$; тогда ранги матриц $D_l\varphi$ и $D_l\varphi_x$, $l = m+1, \dots, \hat{M}$, максимальны. В этом случае рассмотрим матрицу $D_m\varphi$, которая совпадает с матрицей $D_m\varphi_x$, и применим к ней приведенную ранее схему.

Действительно, по определению числа $\hat{M}$ имеем $n_m = \sum_{k=1}^m \dim V_k < \tilde{N}$ для $m < \hat{M}$, поэтому максимально возможный $\text{rang } D_m\varphi_x$ равен n_m . В свою очередь, минимально возможная сумма степеней линейно независимых векторов равна

$$\sum_{k=1}^m k \dim V_k,$$

а если $\text{rang } D_m\varphi_x$ равен $n_m - s$, $s > 0$, то эта сумма больше либо равна

$$\sum_{k=1}^{m-1} k \dim V_k + m(\dim V_m - s).$$

По условию $\text{rang } D_{m+1}\varphi$ максимален. Предположим, что $m+1 < \hat{M}$. Тогда количество линейно независимых столбцов в матрице $D_{m+1}\varphi_x$ равно $\sum_{k=1}^{m+1} \dim V_k$, т. е. $D_{m+1}\varphi_x$ отличается от $D_m\varphi_x$ на $\dim V_{m+1} + s$ линейно независимых столбцов, что невозможно, так как эти матрицы различаются только на $\dim V_{m+1}$ столбцов. Значит, $m+1 = \hat{M}$. Тогда минимально возможная сумма степеней, соответствующая этим линейно независимым столбцам, больше либо равна

$$\sum_{k=1}^{\hat{M}-2} k \dim V_k + (\hat{M}-1)(\dim V_{\hat{M}-1} - s) + \hat{M} \left(\tilde{N} - \sum_{k=1}^{\hat{M}-1} \dim V_k + s \right),$$

что совпадает с значением

$$\sum_{k=1}^{\hat{M}-1} k \dim V_k + \hat{M} \cdot \left(\tilde{N} - \sum_{k=1}^{\hat{M}-1} \dim V_k \right) + s.$$

Пусть теперь точка x характеристическая, т. е. минимально возможная сумма степеней $\tilde{N}$ линейно независимых векторных полей, на которых $D\varphi$ невырожденный, строго больше чем (1). В терминах введенных в начале доказательства обозначений это эквивалентно тому, что минимально возможная сумма степеней, соответствующая всем линейно независимым столбцам, строго больше чем (1). В свою очередь, это означает, что или у какой-либо матрицы $D_m\varphi_x$ (и $D_m\varphi$) rang не максимальный, $m < \hat{M}$, или $\text{rang } D_{\hat{M}}\varphi_x$ (и $D_{\hat{M}}\varphi$) не максимальный. Теорема доказана.

Следствие 2.12. Множество χ замкнуто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, каждое из отображений $x \mapsto D_m\varphi(x)$ непрерывно и

$$\chi = \bigcup_{m=1}^{\hat{M}} \{x : \det(D_m\varphi(x)D_m\varphi(x)^*) = 0\}.$$

Следствие доказано.

3. Дифференциал субриманова типа

В данном разделе опишем преобразования в нехарактеристических точках дифференциала отображения φ , которое приведет его к виду, аналогичному структуре субриманова дифференциала для контактных отображений. Чтобы пояснить, о чем идет речь, приведем некоторые классические определения и результаты теории субримановой дифференцируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 ([10]; см. также [13]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : \Omega \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Отображение φ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\hat{D}\varphi(x)$.

Известно [13], что контактные C_H^1 -отображения (см. определение 2.4), определенные на открытых множествах, непрерывно дифференцируемы в субримановом смысле всюду на области определения. Если контактное C_H^1 -отображение принадлежит к классу C^1 , то (см., например, [14]) его классический дифференциал имеет «блочнo-верхнетреугольный» вид, а субриманов — «блочнo-диагональный». Здесь термины взяты в кавычки, так как в общем случае матрицы дифференциала и субриманова дифференциала не являются квадратными и размерность аналогов диагональных блоков равна $\dim \tilde{V}_k \times \dim V_k$, а расположены они на пересечениях столбцов с номерами от $n_{k-1} + 1$ до n_k и строк с номерами от $\tilde{n}_{k-1} + 1$ до $\tilde{n}_k$ соответственно. Здесь $k = 1, \dots, \min\{M, \tilde{M}\}$.

Наша цель далее — привести матрицу классического дифференциала к «блочнo-верхнетреугольному» виду, не меняя значение $\sqrt{\det(D\varphi D\varphi^*)}$, и построить аналог матрицы субриманова дифференциала, рассмотрев ее «диагональные» блоки.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.2. Здесь и далее символ $0_{q \times p}$ обозначает нуль-матрицу размера $q \times p$, а E_l — единичную матрицу размера l .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.3. Символ $D_m^c \varphi$ здесь и далее обозначает матрицу, составленную из $\dim V_m$ столбцов $D\varphi$ с номерами $n_{m-1} + 1, \dots, n_m$.

Символ $D^c \varphi$ здесь и далее обозначает матрицу, составленную из $N - n_{\hat{M}}$ столбцов $D\varphi$ с номерами $n_{\hat{M}} + 1, \dots, N$.

Если Q — произвольная матрица, то для нее справедливы аналогичные обозначения, если они имеют смысл.

Далее будем использовать метод, подробно описанный в [2], индукцией по $m = \hat{M}, \dots, 1$.

Пусть x — фиксированная нехарактеристическая точка. Рассмотрим матрицу $D\varphi = D\varphi(x)$ (построенную в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\tilde{X}_j\}_{j=1}^{\tilde{N}}$). Тогда ранги матриц $D_{\hat{M}}\varphi$ и входящей в нее $D_{\hat{M}-1}\varphi$ максимальные. Так как x — фиксированная точка, значение аргумента, как и ранее, указывать не будем.

Опишем основные шаги преобразования.

Аналогично методу [2] подействуем слева на $D\varphi$ ортогональным преобразованием $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1}$ таким образом, чтобы первые $n_{\hat{M}-1}$ столбцов матрицы

$O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}} \varphi$ (составляющие $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi$) лежали в $\mathbb{R}^{n_{\hat{M}-1}} \times 0^{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}}$. Тогда матрица $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}} \varphi$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi] & & \\ & O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi) & O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D^c \varphi) \\ 0_{(\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}) \times n_{\hat{M}-1}} & & \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где символ $[O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]$ обозначает блок $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi$, представляющий собой квадратную невырожденную матрицу размера $n_{\hat{M}-1}$.

Далее, для блока $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi)$ ранг матрицы, составленной из его строк с номерами $n_{\hat{M}-1} + 1, \dots, \tilde{N}$, максимален и равен $\tilde{N} - n_{\hat{M}-1}$ (это следует из приведенных в [2] аргументов, примененных почти дословно с очевидными изменениями). Обозначим такую матрицу символом $(O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi))_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}}$. По построению ее размер равен

$$(\tilde{N} - n_{\hat{M}-1}) \times (\hat{N} - n_{\hat{M}-1});$$

напомним, что $\hat{N} = n_{\hat{M}} \geq \tilde{N}$.

Поддействуем на (4) справа ортогональным преобразованием $O_{\hat{M}}$, матрица которого равна

$$\begin{pmatrix} E_{n_{\hat{M}-1}} & 0_{n_{\hat{M}-1} \times \dim V_{\hat{M}}} & 0_{n_{\hat{M}-1} \times (N-n_{\hat{M}})} \\ 0_{\dim V_{\hat{M}} \times n_{\hat{M}-1}} & \mathbf{O}_{\hat{M}} & 0_{\dim V_{\hat{M}} \times (N-n_{\hat{M}})} \\ 0_{(N-n_{\hat{M}}) \times n_{\hat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\hat{M}}) \times \dim V_{\hat{M}}} & E_{N-n_{\hat{M}}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\mathbf{O}_{\hat{M}}$ — ортогональное преобразование, поворачивающее $\tilde{N} - n_{\hat{M}-1}$ строк $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi)_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}}$ в пространство $\mathbb{R}^{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \times 0^{\hat{N}-\tilde{N}}$, матрица которого имеет размер $\dim V_{\hat{M}}$. Получим матрицу $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}} \varphi O_{\hat{M}}$, имеющую вид

$$\begin{pmatrix} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi] & A_{\hat{M}-1} & B_{\hat{M}-1} & O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D^c \varphi) \\ 0_{(\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}) \times n_{\hat{M}-1}} & [(O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi))_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \mathbf{O}_{\hat{M}}]_{0_{(\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}) \times (\hat{N}-\tilde{N})}} & & \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $[(O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi))_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \mathbf{O}_{\hat{M}}]$ — часть матрицы $(O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi))_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \mathbf{O}_{\hat{M}}$, равная невырожденной квадратной матрице размера $\tilde{N} - n_{\hat{M}-1}$, а $A_{\hat{M}-1}$ и $B_{\hat{M}-1}$ — блоки размера $n_{\hat{M}-1} \times (\tilde{N} - n_{\hat{M}-1})$ и $n_{\hat{M}-1} \times (\hat{N} - \tilde{N})$ соответственно.

Таким образом, получили базу индукции. Для шага индукции от $\hat{M}$ к $\hat{M}-1$ достаточно применить слева ортогональное преобразование $O_{\tilde{N}, \hat{M}-2}$ такое, что первые $n_{\hat{M}-2}$ столбцов результирующей матрицы $O_{\tilde{N}, \hat{M}-2} (O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi) O_{\hat{M}}$ лежат в $\mathbb{R}^{n_{\hat{M}-2}} \times 0^{\tilde{N}-n_{\hat{M}-2}}$, а остальные элементы, номер строки которых строго больше $n_{\hat{M}-1}$, остаются без изменений. Следовательно, матрица $O_{\tilde{N}, \hat{M}-2}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} & 0_{n_{\hat{M}-1} \times (\tilde{N}-n_{\hat{M}-1})} \\ 0_{(\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}) \times n_{\hat{M}-1}} & E_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2}$ — ортогональная матрица размера $n_{\hat{M}-1}$. Далее остается рассмотреть квадратную матрицу $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]$ и применить к ней все приведенные выше (после описания (4)) для $O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}} \varphi$ рассуждения с заменой $\hat{M}-1$ на $\hat{M}-2$ и $\hat{M}$ на $\hat{M}-1$ в аргументах. А именно, получим следующее.

1. Для блока $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} Q_{\hat{M}-1}^c$, где $Q = [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]$, ранг матрицы $(\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]_{\hat{M}-1}^c)_{\dim V_{\hat{M}-1}}$, составленной из его строк с номерами $n_{\hat{M}-2} + 1, \dots, n_{\hat{M}-1}$, максимален и равен $\dim V_{\hat{M}-1}$.
2. По построению размер этой матрицы равен $\dim V_{\hat{M}-1}$.

По определению преобразования $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2}$, у строк $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} Q$ с номерами $n_{\hat{M}-2} + 1, \dots, n_{\hat{M}-1}$ первые $n_{\hat{M}-2}$ элементов нулевые. Следовательно, в применении преобразования вида (5) нет необходимости.

Дальнейшие преобразования на следующем шаге коснутся только блока $[O_{\tilde{N}, \hat{M}-2} (O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi) O_{\hat{M}}]$, являющегося квадратной невырожденной матрицей размера $n_{\hat{M}-2}$.

Переход от произвольного $m = 2, \dots, \hat{M} - 2$ к $m - 1$ осуществляется аналогично.

Таким образом, получили матрицу $D^\Delta \varphi(x)$, равную

$$O_{\tilde{N}, 1} \cdot \dots \cdot O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D\varphi O_{\hat{M}} = \begin{pmatrix} D_1^\Delta \varphi(x) & * & \dots & * & * & * \\ 0 & D_2^\Delta \varphi(x) & \dots & * & * & * \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & D_{\hat{M}-1}^\Delta \varphi(x) & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{\hat{M}}^\Delta \varphi(x) & * \end{pmatrix}. \quad (7)$$

По построению здесь

$$D_{\hat{M}}^\Delta \varphi(x) = [(O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} (D_{\hat{M}}^c \varphi))_{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}} \mathbf{O}_{\hat{M}}]$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\tilde{N} - n_{\hat{M}-1}$, а

$$D_{\hat{M}-1}^\Delta \varphi(x) = (\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]_{\hat{M}-1}^c)_{\dim V_{\hat{M}-1}}$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_{\hat{M}-1}$. Напомним, что $[O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]_{\hat{M}-1}^c$ — часть матрицы $[O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]$, составленная из столбцов с номерами $n_{\hat{M}-2} + 1, \dots, n_{\hat{M}-1}$, а

$$(\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]_{\hat{M}-1}^c)_{\dim V_{\hat{M}-1}}$$

— часть матрицы $\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi]_{\hat{M}-1}^c$, составленная из строк с номерами $n_{\hat{M}-2} + 1, \dots, n_{\hat{M}-1}$. Далее, по индукции

$$D_{\hat{M}-k}^\Delta \varphi(x) = (\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-k-1} [\dots [\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi] \dots]_{\hat{M}-k}^c)_{\dim V_{\hat{M}-k}},$$

где символ $(\cdot)_{\dim V_{\hat{M}-k}}$ обозначает взятие строк с номерами $n_{\hat{M}-k-1} + 1, \dots, n_{\hat{M}-k}$, — блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_{\hat{M}-k}$, и окончательно

$$D_1^\Delta \varphi(x) = [\mathbf{O}_{\tilde{N}, 1} [\dots [\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-3} [\mathbf{O}_{\tilde{N}, \hat{M}-2} [O_{\tilde{N}, \hat{M}-1} D_{\hat{M}-1} \varphi] \dots] \dots]]$$

— блок, являющийся квадратной невырожденной матрицей размера $\dim V_1$.

Так как матрицы дифференциалов $D\varphi(x)$ и $D(\varphi \circ \theta_x)(0)$ совпадают, то и матрица $D^\Delta(\varphi \circ \theta_x)(x)$, построенная аналогично (7) для отображения $\varphi \circ \theta_x$, совпадает с (7).

В силу особенностей построения $D^\Delta \varphi(x)$ справедлива

Теорема 3.4. Матрица $D^\Delta \varphi(x)$ обладает следующими свойствами.

1. Верно

$$\det(D\varphi D\varphi^*) = \det(D^\Delta \varphi(x)(D^\Delta \varphi(x))^*).$$

2. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)) \cap \text{Box}_2(0, r)) \\ = \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker(D^\Delta(\varphi \circ \theta_x)(0)) \cap \text{Box}_2(0, r)). \end{aligned} \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое свойство проверяется непосредственно раскрытием скобок (см. (7)).

Докажем второе свойство. По построению преобразования $O_{\tilde{N},1}, \dots, O_{\tilde{N},\widehat{M}-1}$ не влияют на ядро, а повлиять может только ортогональное преобразование $O_{\widehat{M}}$. По построению $O_{\widehat{M}}$ ортогонально преобразовывает базис $V_{\widehat{M}}$ в фиксированной точке (см. (5)), а остальные векторы оставляет без изменений. Тогда

$$O_{\widehat{M}}(\text{Box}_2(0, r)) = \text{Box}_2(0, r).$$

Кроме того,

$$\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)) = O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}})).$$

Отсюда выводим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)) \cap \text{Box}_2(0, r)) \\ = \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}})) \cap O_{\widehat{M}} \text{Box}_2(0, r)) \\ = \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(O_{\widehat{M}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}}) \cap \text{Box}_2(0, r))) \\ = \mathcal{J}(O_{\widehat{M}}|_{\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}})}, 0) \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}}) \cap \text{Box}_2(0, r)) \\ = 1 \cdot \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}}) \cap \text{Box}_2(0, r)), \end{aligned}$$

а так как $\ker(D^\Delta(\varphi \circ \theta_x)(0)) = \ker(D(\varphi \circ \theta_x)(0)O_{\widehat{M}})$, теорема доказана.

Таким образом, мы привели вид классического дифференциала φ к виду, аналогичному структуре классического дифференциала контактного отображения. Он определяется однозначно с точностью до ортогонального отображения.

Построим аналог субриманова дифференциала для неконтактного отображения, используя (7).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.5. В нехарактеристической точке x рассмотрим матрицу $\widehat{D}^\Delta \varphi(x)$, равную

$$\begin{pmatrix} D_1^\Delta \varphi(x) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & D_2^\Delta \varphi(x) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_{\widehat{M}-1}^\Delta \varphi(x) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{\widehat{M}}^\Delta \varphi(x) \end{pmatrix} 0_{\tilde{N} \times (N-\widehat{N})}, \quad (8)$$

где блоки $D_k^\Delta \varphi(x)$ совпадают с таковыми в (7), $k = 1, \dots, \widehat{M}$. Эту матрицу будем называть *дифференциалом φ субриманова типа* в точке x .

Из построения видно, что (8) имеет «блочно-диагональный» вид. Докажем следующее свойство однозначности определения.

Лемма 3.6. Пусть x — нехарактеристическая точка. Дифференциал φ субриманова типа (8) определяется однозначно с точностью до некоторого ортогонального преобразования. Кроме того, определители вида

$$\det(\hat{D}^\Delta \varphi(x) \hat{D}^\Delta \varphi(x)^*)$$

всех матриц этого класса совпадают.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем нехарактеристическую точку x и проведем индукцию по номеру V_k , $k = \widehat{M}, \dots, 1$.

База индукции для $k = \widehat{M}$ доказывается аналогично [2, лемма 4.13] почти дословно с очевидными изменениями. А именно, достаточно повторить рассуждения для второго множителя с заменой $D_1 \varphi$ на $D_{\widehat{M}-1} \varphi$ и $D_{\widehat{M}} \varphi \setminus D_1 \varphi$ на $D_{\widehat{M}}^c \varphi = D_{\widehat{M}} \varphi \setminus D_{\widehat{M}-1} \varphi$.

При переходе от k к $k-1$ при $k > 2$ рассуждения аналогичны: достаточно заменить в предыдущих рассуждениях $D_{\widehat{M}-1} \varphi$ на

$$O_{\widetilde{N}, k-1} \cdots O_{\widetilde{N}, \widehat{M}-1} D_{k-2} \varphi \quad (9)$$

и $D_{\widehat{M}}^c \varphi$ на

$$(O_{\widetilde{N}, k-1} \cdots O_{\widetilde{N}, \widehat{M}-1} D \varphi)_{k-1}^c \quad (10)$$

и рассмотреть матрицы, составленные из первых n_{k-1} строк (9) и (10), к которым будет применяться преобразование $\mathbf{O}_{\widetilde{N}, k-2}$. Если же $k = 2$, то рассуждения при переходе к $k = 1$ аналогичны таковым из [2, лемма 4.13] для первого множителя. Лемма доказана.

4. Меры на уровнях и формула коплощади

Цель данного раздела — описать риманову и субриманову меры на множествах уровня в окрестностях нехарактеристических точек. Для этого будут сравнены структуры ядер дифференциала и дифференциала субриманова типа, а также меры пересечения этих ядер с субримановыми шарами. Так как базис $\ker D \varphi$ отличается от базиса $\ker D^\Delta \varphi$ только ортогональным преобразованием внутри $V_{\widehat{M}}$ и на метрические свойства эта разница не влияет в силу п. 2 теоремы 3.4 (т. е. сами ядра как множества точек совпадают), то без ограничения общности будем описывать $\ker D^\Delta \varphi$ и сравнивать его структуру со структурой $\ker \hat{D}^\Delta \varphi$. Если x — нехарактеристическая точка, то будем сравнивать структуры $\ker D^\Delta \varphi_x$ и $\ker \hat{D}^\Delta \varphi_x$, где $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4.1 (ср. [2]). Обозначим символом $\mathcal{B}_{\widetilde{N}}$ набор базисных векторов, сумма степеней которых равна значению (1), а символом μ — сумму степеней $N - \widetilde{N}$ базисных векторов, не входящих в $\mathcal{B}_{\widetilde{N}}$. Она равна

$$\mu = \widehat{M}(\widehat{N} - \widetilde{N}) + \sum_{k=\widehat{M}+1}^M k \dim V_k.$$

Введем следующее вспомогательное понятие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Рассмотрим окрестность нуля как прообраз окрестности точки $x \in \mathbb{G}$ при отображении нормальных координат θ_x . Если $w = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{e}_i$,

где $\mathbf{e}_i$ — стандартный вектор, совпадающий со значением $(\theta_x^{-1})_* \langle X_i \rangle$ в нуле, $i = 1, \dots, N$, то степень w равна $\max_{i=1, \dots, N} \{\deg X_i : w_i \neq 0\}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 4.3. Положим

$$\omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} = \omega_{\hat{N}-\tilde{N}} \prod_{k=\hat{M}+1}^M \omega_{\dim V_k}.$$

Теорема 4.4. Пусть точка x не является характеристической; рассмотрим отображение $\varphi_x = \varphi \circ \theta_x$. Верны следующие утверждения.

1. Ядро $D^\Delta \varphi_x(0)$ состоит из $\hat{N} - \tilde{N}$ векторов степени $\hat{M}$, равных

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k,$$

где степень w_k строго меньше $\hat{M}$, $k = \tilde{N} + 1, \dots, \hat{N}$, и $N - \hat{N}$ векторов степеней $\hat{M} + 1, \dots, M$, равных

$$\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k,$$

где степень w_k строго меньше $\deg X_k$, $k = \hat{N} + 1, \dots, N$.

2. Вычисляемая через значение риманова тензора $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -мера пересечения $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и $\text{Box}_2(x, r)$ равна

$$\omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} \cdot \frac{\sqrt{\det D\varphi(x) D\varphi(x)^*}}{\sqrt{\det(\hat{D}^\Delta \varphi(x) \hat{D}^\Delta \varphi(x)^*)}} \cdot \sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(x)})} \cdot r^\mu \cdot (1 + o(1)), \quad (11)$$

где $g|_{\ker D\varphi(x)}$ — ограничение риманова тензора на $\ker D\varphi(x)$, а $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно в некоторой окрестности точки x .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.5. В [2, теорема 4.14] дано явное описание векторов ядра. В рассматриваемом здесь случае можно сделать аналогично с использованием аргументов [2] почти дословно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.4. Для доказательства первого утверждения и описания структуры ядра $D\varphi$ рассмотрим матрицу $D^\Delta \varphi(x) = O_{\tilde{N},1}^\Delta \cdot \dots \cdot O_{\tilde{N},\hat{M}-1}^\Delta D\varphi O_{\hat{M}}^\Delta$, совпадающую с матрицей $D^\Delta \varphi_x(0)$, и адаптируем под нее идею доказательства [2, теорема 4.14]. Опишем сначала $\hat{N} - \tilde{N}$ векторов степени $\hat{M}$, лежащих в ядре $D^\Delta \varphi_x(0)$. Прежде всего, напомним вид этой матрицы:

$$\begin{pmatrix} D_1^\Delta \varphi(x) & * & \dots & * & * & * \\ 0 & D_2^\Delta \varphi(x) & \dots & * & * & * \\ \vdots & & \ddots & * & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & D_{\hat{M}-1}^\Delta \varphi(x) & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{\hat{M}}^\Delta \varphi(x) & * \end{pmatrix}.$$

Пусть $\tilde{N} + 1 \leq k \leq \hat{N}$. По построению $D^\Delta \varphi(x)$ вектор $D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle$ лежит в $\mathbb{R}^{n_{\hat{M}-1}} \times 0^{\tilde{N}-n_{\hat{M}-1}}$ (см. (6)). Рассмотрим его проекцию $[D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]$ на $\mathbb{R}^{n_{\hat{M}-1}}$ и подействуем на результат матрицей $-\mathcal{D}_{\hat{M}-1}^{-1}$ размера $n_{\hat{M}-1}$, где (квадратная) матрица $\mathcal{D}_{\hat{M}-1}$ равна

$$\mathcal{D}_{\hat{M}-1} = \begin{pmatrix} D_1^\Delta \varphi(x) & * & \dots & * \\ 0 & D_2^\Delta \varphi(x) & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & D_{\hat{M}-1}^\Delta \varphi(x) \end{pmatrix}.$$

Получим

$$\hat{w}_k = -\mathcal{D}_{\hat{M}-1}^{-1} [D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]. \quad (12)$$

Рассмотрим далее вектор w_k , полученный в результате вложения $\hat{w}_k$ в $\mathbb{R}^N$, где первые $n_{\hat{M}-1}$ координат совпадают с таковыми вектора $\hat{w}_k$, а остальные равны нулю. Положим

$$\mathcal{D}_{\hat{M}-1}^{-1,0} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\hat{M}-1}^{-1} & 0_{n_{\hat{M}-1} \times (N-n_{\hat{M}-1})} \\ 0_{(N-n_{\hat{M}-1}) \times n_{\hat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\hat{M}-1}) \times (N-n_{\hat{M}-1})} \end{pmatrix}$$

и

$$[D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]^0 = \begin{pmatrix} D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle \\ 0^{N-\tilde{N}} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда, во-первых, $w_k = -\mathcal{D}_{\hat{M}-1}^{-1,0} [D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]^0$, и, во-вторых, из (12) и аргументов, аналогичным приведенным выше, следует, что

$$-[D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]^0 = \begin{pmatrix} \mathcal{D}_{\hat{M}-1} & 0_{n_{\hat{M}-1} \times (N-n_{\hat{M}-1})} \\ 0_{(N-n_{\hat{M}-1}) \times n_{\hat{M}-1}} & 0_{(N-n_{\hat{M}-1}) \times (N-n_{\hat{M}-1})} \end{pmatrix} \langle w_k \rangle, \quad (14)$$

а так как в силу построения у w_k ненулевыми могут быть только первые $n_{\hat{M}-1}$ координат, то правая часть (14) совпадает с вектором

$$\begin{pmatrix} D^\Delta \varphi(x) \langle w_k \rangle \\ 0^{N-\tilde{N}} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Следовательно, для суммы $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k$ в силу (14), (13) и (15) имеем

$$D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{w}_k \rangle = D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle + D^\Delta \varphi(x) \langle w_k \rangle = 0.$$

Подчеркнем, что степень w_k строго меньше, чем $\widehat{M}$.

Пусть теперь $k > \tilde{N}$. Тогда $\deg X_k > \widehat{M}$. Рассмотрим (квадратную) матрицу

$$\mathcal{D}_{\widehat{M}} = \begin{pmatrix} D_1^\Delta \varphi(x) & * & \dots & * \\ 0 & D_2^\Delta \varphi(x) & \dots & * \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & D_{\widehat{M}}^\Delta \varphi(x) \end{pmatrix}$$

размера $\tilde{N}$, вектор $\hat{w}_k = -\mathcal{D}_{\widehat{M}}^{-1} [D^\Delta \varphi(x) \langle \mathbf{e}_k \rangle]$, а также вектор w_k , полученный в результате вложения $\hat{w}_k$ в $\mathbb{R}^N$, где первые $\tilde{N}$ координат совпадают с таковыми вектора $\hat{w}_k$, а остальные равны нулю.

Далее для этого случая остается применить рассуждения, аналогичные приведенным выше (ср. [2, теорема 4.14]). Мы получим, что $\mathbf{w}_k = \mathbf{e}_k + w_k$ будет принадлежать ядру $D^\Delta \varphi(x)$, при этом степень w_k не будет превосходить $\widehat{M}$, что строго меньше, чем $\deg X_k$. Первое утверждение доказано.

Доказательство утверждения 2 и вычисление меры $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(0, r)$ для нехарактеристической точки x следует схеме, приведенной в [2, теорема 4.14] с очевидными изменениями (например, что в рассматриваемом общем случае $\widehat{M} \geq 2$). Чтобы избежать повторов, опишем здесь основные идеи доказательства.

Прежде всего для отображения φ_x строим линейное отображение

$$\psi : \ker \widehat{D}^\Delta \varphi_x \rightarrow \ker D^\Delta \varphi_x$$

следующим образом:

$$\sum_{k=\tilde{N}+1}^N u_k \mathbf{e}_k \xrightarrow{\psi} \sum_{k=\tilde{N}+1}^N u_k \mathbf{w}_k, \quad (16)$$

и методами, аналогичными примененным в [14], находим его коэффициент искажения, равный

$$\mathcal{J}(\psi, 0) = \frac{\sqrt{\det(D\varphi(x)D\varphi(x)^*)}}{\sqrt{\det(\widehat{D}^\Delta\varphi(x)(\widehat{D}^\Delta\varphi(x))^*)}}. \quad (17)$$

Кроме того, из выбора набора $\{w_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$ (и соответственно $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$) будет следовать, что

$$\psi(\ker \widehat{D}^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r)) = S,$$

где

$$\ker D^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r(1 - o(1))) \subset S \subset \ker D^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r(1 + o(1))), \quad (18)$$

и $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно в некоторой компактной окрестности $x = \theta_x(0)$.

Из (18) вытекает, что коэффициент искажения отображения

$$\psi : \ker \widehat{D}^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r) \rightarrow S = \psi(\ker \widehat{D}^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r))$$

можно искать стандартно как коэффициент искажения линейного отображения. Следовательно [14], он равен правой части (17). При этом

$$\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker \widehat{D}^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r)) = \omega_{\widehat{N}-\tilde{N}} \prod_{k=\widehat{M}+1}^M \omega_{\dim V_k} \cdot r^\mu = \omega_{\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}}} \cdot r^\mu. \quad (19)$$

Далее, для перехода от $\ker D^\Delta\varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r)$ к $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(0, r)$ рассмотрим C^1 -гладкую проекцию пересечения $\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(0, r)$ на множество Q такое, что

$$\ker D^\Delta\varphi_x(0) \cap \text{Box}_2(0, r(1 - o(1))) \subset Q \subset \ker D^\Delta\varphi_x(0) \cap \text{Box}_2(0, r(1 + o(1))),$$

построенную, как в доказательстве теоремы 4.14 в [2], локальное искажение меры в нуле у которой равно единице, где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно на некоторой компактной окрестности $x = \theta_x(0)$. Аргументы используют свойство степеней векторов $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$ и образов этих векторов при $O_{\widehat{M}}$; см. доказательство второго утверждения теоремы 3.4, а именно то, что их степени не меньше $\widehat{M}$, тогда как существует $\tilde{N}$ линейно независимых некасательных векторов, степени которых не превосходят $\widehat{M}$. Кроме того, используется вспомогательная квазиметрика d_2^0 , равная для точек с координатами $(v_1, \dots, v_N)$ и $(w_1, \dots, w_N)$ относительно нуля значению

$$\max \left\{ \left(\sum_{j:\deg X_j=1} (w_j - v_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j:\deg X_j=2} (w_j - v_j)^2 \right)^{\frac{1}{2 \cdot 2}}, \dots, \left(\sum_{j:\deg X_j=M} (w_j - v_j)^2 \right)^{\frac{1}{2 \cdot M}} \right\},$$

а в рассуждениях используются соответственно степени $\widehat{M}$ и $1/\widehat{M}$ вместо 2 и $1/2$. Из свойства построенной проекции вытекает, что

$$\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\varphi_x^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(0, r)) = (1 + o(1)) \cdot \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\ker D^\Delta \varphi_x \cap \text{Box}_2(0, r)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно в некоторой компактной окрестности нуля. Из этого соотношения с учетом (19) и (17) при переходе с окрестности нуля на окрестность точки x следует (11). Второе утверждение и вся теорема доказаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.6. Отображение $\xi = \psi^{-1}$, равное

$$\sum_{k=\tilde{N}+1}^N u_k \mathbf{w}_k \xrightarrow{\xi} \sum_{k=\tilde{N}+1}^N u_k \mathbf{e}_k$$

и обратное к (16), является проекцией на $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$ вдоль $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\tilde{N}}$. Это следует из того, что $(\psi(u) - u) \perp u$ (доказательство аналогично схеме для [2, теорема 4.14]), или, иными словами, если $v = \psi(u)$, то $(v - \xi(v)) \perp \xi(v)$. Так как ξ принимает значения на $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$, то ортогональным к области значений пространством является $\text{span}\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^{\tilde{N}}$. Иными словами, на $\mathbb{R}^N$ при помощи некоторого ортогонального отображения можно поменять базис таким образом, что отображение ξ в нем будет иметь вид

$$(w_1, \dots, w_{\tilde{N}}, w_{\tilde{N}+1}, \dots, w_N) \xrightarrow{\xi} (0, \dots, 0, w_{\tilde{N}+1}, \dots, w_N).$$

Следовательно, коэффициент искажения ξ не превосходит единицы.

Введем понятие субримановой меры Хаусдорфа на множествах уровня.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.7. Пусть φ удовлетворяет условиям предположения 1.15. Значение *субримановой меры* для $A \subset \varphi^{-1}(t) \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathcal{H}^\mu(A) = \omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\mu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Фактически $\mathcal{H}^\mu$ является функцией множества, так как ее определение не является стандартным определением меры Хаусдорфа в силу условия $x_i \in A$, $i \in \mathbb{N}$. Поэтому утверждение о том, что и такая функция является мерой (в частности, обладает свойством счетной аддитивности) необходимо доказывать. Один из вариантов доказательства — установить квазиаддитивность [16, 17] функции множества

$$\Phi : A \mapsto \mathcal{H}^\mu(A \setminus \chi), \quad (20)$$

где $A \subset \varphi^{-1}(t)$, и показать, что она абсолютно непрерывна относительно меры $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ на множествах уровня. Отсюда будет следовать дифференцируемость и восстанавливаемость по производной относительно (счетно-аддитивной) меры $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$, откуда, в свою очередь, получится счетная аддитивность $\mathcal{H}^\mu$.

Аналогичное утверждение установлено в [12] для функций множества, определенных для классов поверхностей-образов. Так как схема доказательства квазиаддитивности $\mathcal{H}^\mu$ на множествах уровня не так очевидна, как в случае меры $\mathcal{H}^\nu$ на $\mathbb{G}$, приведем ниже основные аргументы доказательства. Кроме того, некоторые идеи из [15] будут использованы при получении основных результатов. Прежде всего, напомним определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.8 (см., например, [16, 17]). Функция множества Φ называется *квазиаддитивной*, если для любого конечного набора попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$, лежащих в некотором открытом шаре B_0 , справедливо

$$\sum_{j=1}^J \Phi(B_j) \leq \Phi(B_0).$$

Теорема 4.9. Пусть x — нехарактеристическая точка. Тогда для множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x))$, лежащих в некоторой окрестности x , функция множества (20) квазиаддитивна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 2.12 множество $\Omega \setminus \chi$ открыто. Поэтому множество $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ открыто в топологии $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ и для точки x существует такая окрестность $U(x)$, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \overline{U}(x)$ не содержит точек χ , где $\overline{U}(x)$ — замыкание окрестности $U(x)$.

Рассмотрим $B_0 \Subset U(x)$ и конечный набор попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^J B_j \subset B_0.$$

Наша задача — показать, что для каждого покрытия $\{\text{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ из определения 4.7, соответствующая которому сумма S достаточно близка к точной нижней грани таких сумм, существуют покрытия множеств $B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, $j = 1, \dots, J$, такие, что, сложив соответствующие им суммы, получим значение, которое может превосходить S не более, чем на малую величину, взятую произвольным образом.

Пусть $\varepsilon > 0$. Для каждого $j = 1, \dots, J$ рассмотрим замкнутый шар $\widehat{B}_j \subset B_j$ такой, что $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) < \varepsilon$. Для данного набора $\{\widehat{B}_j\}_{j=1}^J$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим такое $\delta > 0$, что если $w \notin B_j$, то $\text{Box}_2(w, r) \cap \widehat{B}_j = \emptyset$ при $r < \delta$. Так как $B_0 \Subset U(x)$, также можно считать, что

$$\text{Box}_2(w, r) \subset U(x) \text{ при } w \in B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \text{ и } r < \delta. \quad (21)$$

Далее доказательство проходит по следующей схеме.

1. Для данных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ рассматриваем покрытие $\{\text{Box}_2(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ множества $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ из определения 4.7, соответствующая которому сумма отличается от величины

$$\mathcal{H}_\delta^\mu(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) = \omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} \cdot \inf \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\mu : \right.$$

$$\left. \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset (B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))), x_i \in B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)), r_i < \delta \right\}$$

не более, чем на $\varepsilon > 0$.

2. Для каждого $j = 1, \dots, J$ рассмотрим набор $\{\text{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i})\}_{i \in \mathbb{N}}$ из тех шаров покрытия $B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, центры x_{j_i} которых лежат в $B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$. Эти наборы не пересекаются, а по выбору $\delta > 0$ верно

$$\widehat{B}_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}).$$

3. Для каждого множества $(B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, $j = 1, \dots, J$, построим новые покрытия, используя теорему Витали. По этой теореме выберем дизъюнктные наборы $\{\text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$, где $w_{j_k} \in (B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$ и

$$\text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset (B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)), \quad k \in \mathbb{N},$$

такие, что

$$\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}\left((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\right) = 0$$

и

$$(B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})$$

для некоторого $K < \infty$, зависящего от структуры группы $\mathbb{G}$, $j = 1, \dots, J$. Без ограничения общности можно считать, что $K\rho_{j_k} < \delta$, $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, J$.

4. Заменяем наборы $\{\text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ на наборы $\{\text{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$, $j = 1, \dots, J$. Так как $K\rho_{j_k} < \delta$, то $\text{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k}) \in U(x)$ в силу (21), $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, J$. Из (11) следует, что

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \rho_{j_k}^\mu &= \frac{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)))}{\sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(w_{j_k})})}} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{\det(\widehat{D}^\Delta \varphi(w_{j_k}) \widehat{D}^\Delta \varphi(w_{j_k})^*)}}{\sqrt{\det D\varphi(w_{j_k}) D\varphi(w_{j_k})^*}}, \quad (22) \end{aligned}$$

с точностью до множителя $1 + o(1)$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $\rho_{j_k} \rightarrow 0$ равномерно на $U(x)$. Это следует из равномерности на $\overline{U}(x)$ величин $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) (по выбору $\overline{U}(x) \in \Omega \setminus \chi$), а также из равномерной непрерывности и отдаленности от нуля на $\overline{U}(x)$ входящих в (22) величин. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}}} \cdot \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{N}} (K\rho_{j_k})^\mu &= K^\mu \cdot \sum_{j=1}^J \sum_{k \in \mathbb{N}} \omega_{\mathbb{G}, \widetilde{\mathbb{G}}} \cdot (\rho_{j_k})^\mu \\ &\leq \widehat{K} \cdot K^\mu \cdot \sum_{j=1}^J \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) < J \cdot \widehat{K} \cdot K^\mu \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

где $\widehat{K} < \infty$, так как

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(\text{Box}_2(w_{j_k}, \rho_{j_k}) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) \leq \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}((B_j \setminus \widehat{B}_j) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))),$$

а величина

$$\frac{\sqrt{\det(\widehat{D}^\Delta \varphi(w_{j_k}) \widehat{D}^\Delta \varphi(w_{j_k})^*)}}{\sqrt{\det D\varphi(w_{j_k}) D\varphi(w_{j_k})^*}} \cdot \frac{(1 + o(1))}{\sqrt{\det(g|_{\ker D\varphi(w_{j_k})})}}$$

ограничена равномерно на $U(x)$ (см. замечание 4.6 и предположение 1.15).

5. Таким образом, для каждого B_j построены покрытия

$$\{\text{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}), \text{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k})\}_{i, k \in \mathbb{N}}$$

такие, что

$$B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_{j_i}, r_{j_i}) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{j_k}, K\rho_{j_k}),$$

$j = 1, \dots, J$, и

$$\omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} \cdot \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} r_{j_i}^\mu + \sum_{k \in \mathbb{N}} (K\rho_{j_k})^\mu \right) \leq \mathcal{H}_\delta^\mu(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))) + \varepsilon(1 + J \cdot \hat{K} \cdot K^\mu).$$

При переходе к точным нижним граням в левой и правой частях и при $\delta \rightarrow 0$, в силу того, что $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, выводим

$$\sum_{j=1}^J \mathcal{H}^\mu(B_j) \leq \mathcal{H}^\mu(B_0).$$

Иными словами, функция множества (20), определяемая значением $\mathcal{H}^\mu$, квазиаддитивна.

Теорема доказана.

Установим абсолютную непрерывность $\mathcal{H}^\mu$ относительно $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ на $(\Omega \setminus \chi) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))$, а также оценку сверху $\mathcal{H}^\mu$ через $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$.

Теорема 4.10. Пусть $x \in \Omega \setminus \chi$, а $B \Subset \Omega$ такой шар, что $x \in B$. Справедливы следующие утверждения.

1. На $(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi) \cap B$ функция множества $\mathcal{H}^\mu$ абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$.

2. Существует зависящее только от структуры $\mathbb{G}$ значение $T < \infty$ такое, что для $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi) \cap B$ верно $\mathcal{H}^\mu(A) \leq T \cdot \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A)$.

Доказательство. Напомним, что так как дифференциал φ всюду невырожденный, а само отображение принадлежит классу C^1 в классическом смысле, то, во-первых, поверхности уровня являются поверхностями класса C^1 , и, во-вторых, величина $o(1)$ из определения дифференцируемости равномерна на компактных подмножествах. Кроме того, так как $B \Subset \Omega$, существует такой шар $B' \supset \bar{B}$, что $B' \Subset \Omega$, где $\bar{B}$ — замыкание B .

Докажем первое утверждение. Пусть $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi) \cap B$ и $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем покрытие множества A шарами $\{B(x_i, r_i)\}$, построенными по метрике, определяемой римановым тензором g на $\mathbb{G}$, такими, что $B(x_i, r_i) \Subset B'$ и

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{N-\tilde{N}} < \varepsilon.$$

Это возможно в силу определения меры Хаусдорфа. Фиксируем $i \in \mathbb{N}$ и пересечение $A_i = B(x_i, r_i) \cap A$. Представим его в виде

$$A_i = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{i,m},$$

где $A_{i,m} = \{w \in A_i : d_2(w, \chi) \geq 1/m\}$. Тогда $A_{i,m} \subset B_{i,m}$, где

$$B_{i,m} = \{w \in B(x_i, r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) \geq 1/m\}.$$

По определению $B_{i,m}$ является подмножеством компактного множества

$$\tilde{B}_{i,m} = \{w \in \overline{B(x_i, r_i)} \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) \geq 1/m\},$$

где $\overline{B(x_i, r_i)}$ — замыкание $B(x_i, r_i)$. На таком компактном множестве величина $o(1)$ из соотношения (18) равномерна, так как $\tilde{B}_{i,m} \cap \chi = \emptyset$, векторы $\{\mathbf{w}_k\}_{k=\tilde{N}+1}^N$ из теоремы 4.4 зависят непрерывно от точек $\tilde{B}_{i,m}$ в силу того, что все определяющие их величины непрерывны, невырождены и ограничены на $\tilde{B}_{i,m}$. Следовательно, величина $o(1)$ из соотношения (18) равномерна и на каждом $B_{i,m}$, $i, m \in \mathbb{N}$.

По определению верно $A_{i,m} \subset A_{i,m+1}$ и

$$B_{i,m} \subset \{w \in B(x_i, r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) : d_2(w, \chi) > 1/(m+1)\} \subset B_{i,m+1}, \quad (23)$$

$m \in \mathbb{N}$. Фиксируем $m \in \mathbb{N}$ и рассмотрим семейство

$$\{\text{Box}_2(w, s) : w \in A_{i,m}, s > 0, \text{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,m+1}\}.$$

Оно покрывает множество $A_{i,m}$ в силу включения (23). Пусть $\delta > 0$ таково, что если $s < \delta$, $w \in A_{i,m}$ и $v \in \text{Box}_2(w, s)$, то $d_2(v, \chi) > 1/(m+1)$, т. е. $\text{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,m+1}$. Кроме того, будем считать, что $\delta > 0$ выбрано таким образом, что величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) достаточно малы на $B_{i,m+1}$. Подчеркнем, что с ростом m значение $\delta = \delta(m)$ будет уменьшаться. Применим к этому семейству теорему Витали и выберем такой дизъюнктивный набор $\{\text{Box}_2(w_{i,m,j}, s_{i,m,j}) : w_{i,m,j} \in A_{i,m}, s_{i,m,j} < \delta/L\}_{j \in \mathbb{N}}$, где $1 \leq L < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$, что

$$\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}\left(A_{i,m} \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{i,m,j}, s_{i,m,j})\right) = 0 \quad \text{и} \quad A_{i,m} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{i,m,j}, Ls_{i,m,j}).$$

Тогда аналогично п. 4 доказательства теоремы 4.9 выводим (см. (22))

$$L^\mu \sum_{j \in \mathbb{N}} s_{i,m,j}^\mu \leq \hat{L} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(B_{i,m+1}), \quad (24)$$

где константа $\hat{L} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$. Здесь, в частности, использована равномерность величины $o(1)$ из определения дифференцируемости на $B' \supset B(x_i, r_i)$ и величины $o(1)$ из соотношения (18) на $B_{i,m+1}$.

Далее, имеем

$$A_i = A_{i,m} \cup \bigcup_{p \in \mathbb{N}, p > m} (A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}).$$

Тогда $A_{i,p} \setminus A_{i,p-1} \subset B_{i,p} \setminus B_{i,p-1}$, что следует из определения этих множеств. Фиксируем $p \in \mathbb{N}$, $p > m$, рассмотрим покрывающее множество $A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}$ (см. (23)) семейство

$$\{\text{Box}_2(w, s) : w \in A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}, s > 0, \text{Box}_2(w, s) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \subset B_{i,p+1} \setminus B_{i,p-1}\}$$

и применим к нему теорему Витали. В результате получим набор

$$\{\text{Box}_2(w_{i,p,j}, s_{i,p,j}) : w_{i,p,j} \in A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}, s_{i,p,j} < \delta/L\}_{j \in \mathbb{N}}$$

такой, что

$$\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}\left((A_{i,p} \setminus A_{i,p-1}) \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{i,p,j}, s_{i,p,j})\right) = 0$$

и

$$A_{i,p} \setminus A_{i,p-1} \subset \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(w_{i,p,j}, Ls_{i,p,j}),$$

где $L < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$, а $\delta = \delta(p) > 0$ выбрано таким образом, что величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и из соотношения (18) достаточно малы на $B_{i,p+1}$. Тогда верно аналогичное (24) соотношение

$$L^\mu \sum_{j \in \mathbb{N}} s_{i,p,j}^\mu \leq \widehat{L} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(B_{i,p+1} \setminus B_{i,p-1}),$$

где константа $\widehat{L} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$. Повторяя построения для всех $p > m$, окончательно выводим

$$L^\mu \cdot \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} s_{i,m,j}^\mu + \sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} s_{i,p,j}^\mu \right) \leq 2\widehat{L} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(B(x_i, r_i) \cap \varphi^{-1}(\varphi(x))).$$

Суммируя по всем $i \in \mathbb{N}$, получаем, что построено покрытие множества A из определения $\mathcal{H}^\mu$ такое, что соответствующая ему сумма не превосходит $\widehat{C}\varepsilon$, где $\widehat{C} < \infty$ зависит только от структуры группы $\mathbb{G}$ (с учетом предположения 1.15 на отделенность от нуля и ограниченность значения $\sqrt{\det(g(x))}$, и его абсолютной непрерывности). Следовательно, первое утверждение доказано.

Перейдем к второму утверждению. Если $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) = 0$, то все доказано в первом утверждении. Пусть теперь $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) > 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем покрытие множества A шарами $\{B(x_i, r_i)\}$ такими, что $B(x_i, r_i) \in B'$ и

$$\left| \omega_{N-\tilde{N}} \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^{N-\tilde{N}} - \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) \right| < \varepsilon \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A)$$

(утверждение имеет смысл, когда $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) < \infty$; в противном случае оценка $\mathcal{H}^\mu(A) \leq \infty$ тривиальна). Далее остается повторить рассуждения доказательства утверждения об абсолютной непрерывности. Теорема доказана.

Следствие 4.11. Функция множества $\mathcal{H}^\mu$ абсолютно непрерывна относительно $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ на $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$.

Доказательство. Пусть $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) = 0$. Рассмотрим покрытие Витали этого множества шарами $\{B(x, r) : x \in A, B(x, L_{\mathbb{G}}r) \in \Omega\}$, где $L_{\mathbb{G}}$ — зависящая только от структуры группы $\mathbb{G}$ константа из теоремы Витали: если выбрана дизъюнктивная система $\{B(x_i, r_i)\}$, покрывающая A с точностью до множества нулевой меры, то $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i, L_{\mathbb{G}}r_i) \supset A$. Далее остается выбрать такую систему и применить рассуждения доказательства п. 1 теоремы 4.10 для каждого из шаров $B(x_i, L_{\mathbb{G}}r_i)$ и величины $\varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$. Следствие доказано.

Следствие 4.12. Существует $T < \infty$ такое, что для $A \subset (\varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi)$ верно $\mathcal{H}^\mu(A) \leq T \cdot \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A)$.

Доказательство. Пусть $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) > 0$. Рассмотрим покрытие Витали этого множества шарами $\{B(x, r) : x \in A, B(x, r) \in \Omega\}$. Далее остается выбрать дизъюнктивную систему, покрывающую множество A с точностью до множества меры нуль, применить рассуждения доказательства п. 2 теоремы 4.10 для каждого из шаров $B(x_i, r_i)$ и величины $\varepsilon/2^i$, $i \in \mathbb{N}$ (с учетом того, что константа $T < \infty$ зависит только от группы), и аргументы доказательства следствия 4.11 для оставшегося множества меры нуль, где вместо $\varepsilon > 0$ взята величина $\varepsilon \cdot \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A)$ (утверждение имеет смысл, когда $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) < \infty$; в противном случае оценка $\mathcal{H}^\mu(A) \leq \infty$ тривиальна). Получим покрытие, которое

оценивается сверху величиной $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A)$, а при переходе к пределу выведем требуемую оценку. Следствие доказано.

Из доказанных результатов и [16, 17] вытекает

Теорема 4.13. Пусть $x \in \Omega \setminus \chi$. Если множество конечной $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -меры $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и

$$d_2(w, \chi) > \sigma > 0 \text{ для всех } w \in A \text{ и некоторого } \sigma > 0, \quad (25)$$

то производная $D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(w)$ существует для всех $w \in A$ и

$$\mathcal{H}^\mu(A) = \int_A D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(w) d\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(w).$$

Доказательство. Утверждение теоремы следует из теорем 4.9, 4.10 и [16, 17]. Так как мы установили квазиаддитивность для наборов $\{B_j\}_{j=0}^J$, $J \in \mathbb{N}$, не содержащих точки множества χ , то это же свойство будет верно и для пересечений шаров с множеством

$$\Omega_\sigma = \{w \in \Omega : d_2(w, \chi) > \sigma > 0\}.$$

Действительно, это следует из того, что каждое пересечение $B_j \cap \Omega_\sigma$, $j = 0, \dots, J$, является открытым множеством, находящимся на положительном расстоянии от множества χ . Поэтому для них почти дословно применимы аргументы доказательства теоремы 4.9, где при подборе радиусов шаров покрытия учитывается условие, что эти шары должны также лежать на положительном расстоянии от χ . Это возможно, так как $\sigma > 0$ фиксировано. Кроме того, $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -мера пересечения множества A с рассматриваемыми шарами по условию конечна. По этой причине замкнутые шары, свойства которых используются в доказательстве теоремы 4.9, существуют. Действительно, если $B(x, R)$ — произвольный шар, $R > 0$, и $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A \cap B(x, R)) < \infty$, то это значение совпадает с пределом $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A \cap \overline{B(x, R - 1/k)})$, где $\overline{B(x, R - 1/k)}$ — замыкание шара $B(x, R - 1/k)$, $k \in \mathbb{N}$, так как

$$A \cap B(x, R) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A \cap \overline{B(x, R - 1/k)}.$$

Далее остается воспользоваться результатами [16, 17] и следствием 4.11. Теорема доказана.

Справедлив следующий локальный результат.

Теорема 4.14. Для шаров $\text{Box}_2(x, r)$ таких, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r) \Subset \Omega \setminus \chi$, верно

$$\mathcal{H}^\mu(\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r)) = \omega_{\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}} \cdot r^\mu \cdot (1 + o(1)),$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ равномерно по x на компактных подмножествах $\Omega \setminus \chi$.

Доказательство. Для вывода утверждения теоремы достаточно применить схему, основанную на непосредственном определении $\mathcal{H}^\mu$ и свойстве (11), установленном в теореме 4.4, с учетом равномерности величины $o(1)$ из определения дифференцируемости и величины $o(1)$ из соотношения (18) на компактных подмножествах $\Omega \setminus \chi$. В частности, так как $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r) \Subset \Omega \setminus \chi$,

существует компактная окрестность $U \Subset \Omega \setminus \chi$ такая, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r) \Subset U$. Тогда при построении покрытий из определения $\mathcal{H}^\mu$ достаточно выбрать такое $\delta > 0$, что если $w \in \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r)$ и $\rho < \delta$, то $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(w, \rho) \subset U$. См. схему и детали в [14, теорема 3.17; 15]; см. также [1]. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.15. Если $x \in \Omega \setminus \chi$, то существует такое $r > 0$, что $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap \text{Box}_2(x, r) \Subset \Omega \setminus \chi$.

Отсюда следует

Теорема 4.16. Производная $D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(x)$ равна

$$D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(x) = \frac{\sqrt{\det \widehat{D}^\Delta \varphi(x) \widehat{D}^\Delta \varphi(x)^*}}{\sqrt{\det D\varphi(x) D\varphi(x)^*} \sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}},$$

для всех $x \in \Omega \setminus \chi$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.17. В силу замечания 4.6 верно

$$D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(x) \leq \frac{1}{\sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}}.$$

Справедливо утверждение, усиливающее теорему 4.13.

Теорема 4.18. Теорема 4.13 верна для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ конечной $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -меры без условия (25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) < \infty$, где $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$, то для таких множеств интеграл

$$\int_A \frac{d\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(x)}{\sqrt{\det g|_{\ker D\varphi(x)}}}$$

всегда сходится в силу предположения 1.15.

Аналогично тому, как сделано в доказательстве теоремы 4.10, представим

$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m,$$

где $A_m = \{w \in A : d_2(w, \chi) \geq 1/m\}$. Так как $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A) < \infty$, для всякого $\varepsilon > 0$ существует $m_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A \setminus A_m) < \varepsilon$ при $m > m_0$. По доказанному (см. теорему 4.13)

$$\mathcal{H}^\mu(A_m) = \int_{A_m} D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(w) d\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(w),$$

$m \in \mathbb{N}$. Кроме того, в силу следствия 4.12 верно $\mathcal{H}^\mu(A \setminus A_m) < T\varepsilon$, $T < \infty$. Фиксируем $m > m_0 + 1$ и покажем, что

$$|\mathcal{H}^\mu(A) - \mathcal{H}^\mu(A_m)| < Q\varepsilon \quad (26)$$

для некоторого $Q < \infty$. Подчеркнем, что данное свойство необходимо доказывать, так как аддитивность $\mathcal{H}^\mu$ в общем случае еще не установлена.

Из определения 4.7 вытекает, что

$$\mathcal{H}^\mu(A) \leq \mathcal{H}^\mu(A_m) + \mathcal{H}^\mu(A \setminus A_m) < \mathcal{H}^\mu(A_m) + T\varepsilon.$$

Действительно, достаточно рассмотреть покрытия множеств A_m и $A \setminus A_m$ из этого определения, соответствующие которым суммы близки к точной нижней грани. Тогда, с одной стороны, объединение этих покрытий образует покрытие A , а с другой — соответствующая ему сумма может не быть близка к точной нижней грани. Установим обратное неравенство. Рассмотрим представление

$$A_m = A_{m-1} \cup (A_m \setminus A_{m-1}).$$

Тогда $A_{m-1} \cap (A \setminus A_m) = \emptyset$ и $m-1 > m_0$ по выбору m , поэтому $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(A_m \setminus A_{m-1}) < \varepsilon$. Рассмотрим такое $\delta > 0$, что если $w \in A \setminus A_m$, то $\text{Box}_2(w, s) \cap A_{m-1} = \emptyset$ при $s < \delta$, и построим покрытие $\{\text{Box}_2(w_i, s_i)\}$ множества A из определения 4.7 для данного $\delta > 0$. Тогда объединение шаров $\{\text{Box}_2(w_i, s_i) : w_i \in A_m\}$ является покрытием A_{m-1} . Рассмотрим

$$\{\text{Box}_2(w_i, s_i) : w_i \in A_m\} \cup \{\text{Box}_2(v_i, t_i) : v_i \in A_m \setminus A_{m-1}\},$$

где $\{\text{Box}_2(v_i, t_i) : v_i \in A_m \setminus A_{m-1}\}$ — покрытие множества $A_m \setminus A_{m-1}$, соответствующая которому сумма не превосходит $T\varepsilon$ (см. следствие 4.12). Отсюда вытекают оценка

$$\mathcal{H}^\mu(A_m) \leq \mathcal{H}^\mu(A) + T\varepsilon$$

и соотношение (26). Следовательно, $\mathcal{H}^\mu(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{H}^\mu(A_m)$, а в силу сходимости интегралов

$$\int_{A_m} D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(w) d\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(w)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$, которая следует из предположения 1.15 и замечаний 4.6 и 4.17, и непрерывности интеграла Лебега, утверждение теоремы 4.13 верно без условия (25) для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ конечной $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -меры. Теорема доказана.

Из теоремы 4.18 следует усиление теоремы 4.9. В свою очередь, этот результат вместе со следствием 4.11 усиливает и саму теорему 4.18 (т. е. снимается требование конечности меры).

Теорема 4.19. Пусть $x \in \Omega$. Тогда

1. Функция множества (20) квазиаддитивна на $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)$.
2. Для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ верно

$$\mathcal{H}^\mu(A) = \int_A D_{\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}} \mathcal{H}^\mu(w) d\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}(w).$$

Доказательство. Для доказательства п. 1 рассмотрим произвольный конечный набор попарно не пересекающихся открытых шаров $\{B_j\}_{j=1}^J$, лежащих в некотором открытом шаре B_0 . Тогда пересечения каждого из этих шаров с множеством $\varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)$ будет иметь конечную $\mathcal{H}^{N-\tilde{N}}$ -меру. Действительно, так как $\varphi^{-1}(\varphi(x))$ замкнуто, то его пересечение с любым замкнутым шаром компактно. В силу предположения 1.15 по теореме о неявной функции для всякой точки множества уровня существует окрестность, на которой она параметризуется окрестностью в $\mathbb{R}^{N-\tilde{N}}$. Следовательно, можно выбрать конечное подпокрытие такими окрестностями. Далее осталось применить теорему 4.18, из которой следует квазиаддитивность функции (20):

$$\sum_{j=1}^J \mathcal{H}^\mu(B_j \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)) \leq \mathcal{H}^\mu(B_0 \cap \varphi^{-1}(\varphi(x)) \cap (\Omega \setminus \chi)).$$

П. 2 следует из п. 1, следствия 4.11 об абсолютной непрерывности для любых множеств $A \subset \varphi^{-1}(\varphi(x)) \setminus \chi$ и результатов [16, 17]. Теорема доказана.

Таким образом, получаем следующий результат.

Теорема 4.20. *Функция множества $\mathcal{H}^\mu$ является мерой на подмножествах $A \subset \varphi^{-1}(t) \cap (\Omega \setminus \chi)$. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности.*

В качестве следствия выводим формулу коплощади.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.21. Пусть выполнены условия предположения 1.15. Величина

$$\sqrt{\det \widehat{D}^\Delta \varphi(x) \widehat{D}^\Delta \varphi(x)^*},$$

где $x \in \Omega \setminus \chi$, называется *субримановым коэффициентом коплощади*.

Теорема 4.22. Пусть выполнены условия предположения 1.15. Тогда для любых измеримых множеств $A \subset \Omega \setminus \chi$ справедлива формула коплощади

$$\int_A \sqrt{\det \widehat{D}^\Delta \varphi(x) \widehat{D}^\Delta \varphi(x)^*} d\mathcal{H}^\nu(x) = \int_{\widetilde{\mathbb{G}}} d\mathcal{H}^{\widetilde{\nu}}(t) \int_{\varphi^{-1}(t) \cap A} d\mathcal{H}^\mu(u). \quad (27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Соотношение (27) следует из теорем 4.4, 4.14, 4.16 и 4.19, а также из аргументов, примененных при доказательстве аналогичных результатов в [14, 15].

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманова М. Б. Субримановы свойства множеств уровня неконтактных отображений групп Гейзенберга // Мат. тр. 2022. Т. 25, № 2. С. 107–125.
2. Карманова М. Б. Классы неконтактных отображений групп Карно и метрические свойства // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1199–1223.
3. Franchi B., Serapioni R., Serra Cassano F. Rectifiability and perimeter in the Heisenberg group // Math. Ann. 2001. V. 321, N 3. P. 479–531.
4. Басалаев С. Г. Одномерные поверхности уровня h -с-дифференцируемых отображений пространств Карно — Каратеодори // Вестн. НГУ. 2013. Т. 13, № 4. С. 16–36.
5. Kozhevnikov A. Propriétés métriques des ensembles de niveau des applications différentiables sur les groupes de Carnot. Géométrie métrique. Paris XI: Université Paris Sud, 2015.
6. Franchi B., Serapioni R. Intrinsic Lipschitz graphs within Carnot groups // J. Geometric Anal. 2016. V. 26, N 3. P. 1946–1994.
7. Карманова М. Б. О локальных метрических характеристиках множеств уровня C_H^1 -отображений многообразий Карно // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 6. С. 1291–1309.
8. Карманова М. Б. Множества уровня классов отображений двуступенчатых групп Карно в неголономной интерпретации // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 391–400.
9. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
10. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
11. Карманова М. Б. Липшицевы образы открытых множеств на сублоренцевых структурах // Мат. тр. 2023. Т. 26, № 2. С. 138–161.
12. Карманова М. Б. Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.
13. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The interaction of analysis and geometry. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. P. 247–301. (Contemporary Mathematics; V. 424).
14. Karmanova M., Vodopyanov S. A coarea formula for smooth contact mappings of Carnot–Caratheodory spaces // Acta Appl. Math. 2013. V. 128, N 1. P. 67–111.

-
15. Карманова М. Б. Формула коплощади на группах Карно с сублоренцевой структурой для вектор-функций // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 298–325.
 16. Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D. Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I // Sib. Adv. Math. 2004. V. 14, N 4. P. 78–125.
 17. Vodopyanov S. K., Ukhlov A. D. Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II // Sib. Adv. Math. 2005. V. 15, N 1. P. 91–125.

Поступила в редакцию 1 августа 2024 г.

После доработки 1 августа 2024 г.

Принята к публикации 25 июня 2025 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090;
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com

СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ
С ОПЕРАТОРОМ МОНЖА — АМПЕРА
И ЕЕ МНОГОМЕРНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ
А. А. Косов, Э. И. Семенов

Аннотация. Рассматриваются системы двух уравнений с оператором Монжа — Ампера, правые части которых могут зависеть от оператора Лапласа и градиента искомых функций. Для построения точных многомерных решений в случае, когда правые части содержат степенные или экспоненциальные функции неизвестных, предложен вариант метода редукции к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены многомерные точные решения, выражаемые явным образом через суперпозицию квадратичных форм от пространственных переменных и элементарных функций. Приводится целый ряд примеров явных точных решений, в том числе глобальных положительных, анизотропных по пространственным переменным.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.409

Ключевые слова: система уравнений, оператор Монжа — Ампера, многомерные точные решения.

Введение

В [1] строились точные многомерные решения обобщенного уравнения Монжа — Ампера

$$\det H(u) = f(\mathbf{x}, u, \nabla u, \Delta u), \quad (1)$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$ — искомая функция переменных $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $\det H(u)$ — определитель матрицы Гессе n -го порядка, который будем также называть оператором Монжа — Ампера; ∇u — градиент; Δu — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$. Уравнение (1) есть n -мерный аналог уравнения

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}),$$

которое включает в себя как частный случай классическое уравнение Монжа — Ампера [2, 3]

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + d,$$

и уравнение вида

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = G(x, y, u, u_x, u_y), \quad (2)$$

где $u \triangleq u(x, y)$ — искомая функция, $a \triangleq a(x, y, u, u_x, u_y)$, $b \triangleq b(x, y, u, u_x, u_y)$, $c \triangleq c(x, y, u, u_x, u_y)$, $d \triangleq d(x, y, u, u_x, u_y)$, $G(x, y, u, u_x, u_y)$ — заданные функции.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проекты № 121041300058-1 и № 121032400051-9).

Уравнение (2) встречается в дифференциальной геометрии [4], в задачах газовой динамики и гидродинамики [5–8], а также многих других математических моделях естествознания. В справочниках [7, 8] приведены точные решения уравнения (2) для некоторых $G(x, y, u, u_x, u_y)$. Подробная сводка новых результатов по методу редукции и точным решениям для нестационарной версии уравнения Монжа — Ампера (2), которое встречается в магнитной гидродинамике, представлена в работах [9–11]. В [12, 13] получены условия линеаризации уравнения Монжа — Ампера контактными преобразованиями и построения инвариантов Лапласа. Уравнение Монжа — Ампера и его различные обобщения исследовались методами группового анализа в работах [14–16], где в ряде случаев были представлены точные решения. Важность исследования многомерного уравнения Монжа — Ампера связана с его различными приложениями, прежде всего в задачах дифференциальной геометрии [4, 17, 18]. Так, например, частный случай уравнения (1) вида $\det H(u) = \phi(\mathbf{x})$, где $\phi(\mathbf{x})$ — заданная функция, принимающая положительные значения, возникает в результате элементарного преобразования уравнения, вытекающего из знаменитой проблемы Минковского на замкнутых выпуклых гиперповерхностях в евклидовом $(n+1)$ -мерном пространстве [19]. В [20, 21] отмечается, что априорные оценки в проблеме Минковского являются априорными для решения уравнения Монжа — Ампера (1) с функцией

$$f = \frac{1}{k(1 + x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{n}{2}+1}}.$$

Кроме того, многомерное уравнение Монжа — Ампера и его обобщения широко применяются в квантовой теории поля [15], гравитации [22, 23] и задачах оптимальной транспортировки [23–26].

В данной статье рассмотрим систему из двух уравнений с оператором Монжа — Ампера следующего вида:

$$\det H(u) = h_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v), \quad \det H(v) = h_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v), \quad (3)$$

где $u \triangleq u(\mathbf{x})$, $v \triangleq v(\mathbf{x})$ — искомые функции переменной $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$; $H(u) = (\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j)$, $H(v) = (\partial^2 v / \partial x_i \partial x_j)$ — матрицы Гессе n -го порядка; $\det H(u)$, $\det H(v)$ — определители матриц Гессе; $h_1(\cdot)$, $h_2(\cdot)$ — заданные функции своих аргументов. Основной задачей является построение точных многомерных решений системы уравнений (3) с использованием квадратичной функции вида

$$\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

где A — вещественная числовая матрица размера $n \times n$. Ранее авторами квадратичная функция (4) успешно использовалась для построения точных многомерных решений систем уравнений реакции-диффузии, эллиптических уравнений и многомерных систем эллиптических уравнений со степенными нелинейностями [27, 28]. Отметим, что построение точных решений системы двух двумерных уравнений с оператором Монжа — Ампера рассматривалось в [29]. Такого рода системы возникают в задачах гидродинамики несжимаемых двухжидкостных сред [30].

2. Основные результаты

Для построения точных решений системы уравнений (3) нам понадобится формула, которая является результатом следующей леммы.

Лемма 1. Пусть $T(z)$ — произвольная дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция. Тогда для любой симметрической матрицы A , задающей квадратичную форму $\xi = \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})$, для гессиана функции $T(\xi) = T(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ справедлива формула

$$\det \left(\frac{\partial^2 T(\xi)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=\overline{1,n}} = \det A \left(\frac{dT}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dT}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 T}{d\xi^2} \right], \quad (5)$$

где $\det A$ — определитель матрицы A .

Доказательство этой леммы приведено в [1]. Точные решения системы уравнений (3) будем отыскивать в следующем виде:

$$u(\mathbf{x}) = F(\xi), \quad v(\mathbf{x}) = G(\xi), \quad (6)$$

где аргумент ξ задается формулой (4), а условия на функции $F(\xi)$, $G(\xi)$ аналогичны условиям на функцию $T(\xi)$, которые определены в лемме 1. Также наряду с формулами (6) будем использовать квадратичные функции (4) с различными матрицами A_1 , A_2 . А именно, решения системы (3) будем отыскивать так:

$$u(\mathbf{x}) = \alpha \xi_1, \quad v(\mathbf{x}) = \beta \xi_2, \quad (7)$$

где $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ — некоторые постоянные, а ξ_1 , ξ_2 задаются квадратичными функциями

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(A_1 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \xi_2 = \frac{1}{2}(A_2 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (8)$$

Здесь A_1 , A_2 — симметричные матрицы размера $n \times n$.

Для решения поставленной задачи необходимо конкретизировать вид правых частей системы (3). В статье ограничимся несколькими видами функциональных зависимостей. Сперва уделим внимание случаю, когда h_1 , h_2 зависят только от искомым функций.

2.1. Случай, когда правые части зависят только от искомым функций. Положим $h_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \equiv f(u, v)$, $h_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v, \Delta u, \Delta v) \equiv g(u, v)$ и рассмотрим частный случай системы (3) вида

$$\det H(u) = f(u, v), \quad \det H(v) = g(u, v). \quad (9)$$

В силу формулы (5) на функциях (6) система в частных производных редуцируется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего вида:

$$\begin{aligned} \det A \left(\frac{dF}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dF}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 F}{d\xi^2} \right] &= f(F, G), \\ \det A \left(\frac{dG}{d\xi} \right)^{n-1} \left[\frac{dG}{d\xi} + 2\xi \frac{d^2 G}{d\xi^2} \right] &= g(F, G). \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 1. Если правые части системы (9) являются степенными функциями своих аргументов следующих видов:

$$f(u, v) = \delta_1 u^{\mu_1} v^{\nu_1}, \quad g(u, v) = \delta_2 u^{\mu_2} v^{\nu_2}, \quad (11)$$

где $\delta_1 \neq 0$, $\delta_2 \neq 0$, μ_1 , μ_2 , ν_1 , ν_2 — вещественные параметры такие, что

$$\mu_1 - \mu_2 \neq n, \quad \nu_1 - \nu_2 \neq -n, \quad (12)$$

и для вычисленных по следующим формулам величин

$$p = \frac{n(n + \nu_1 - \nu_2)}{n^2 - n(\mu_1 + \nu_2) + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1}, \quad q = \frac{n(n - \mu_1 + \mu_2)}{n^2 - n(\mu_1 + \nu_2) + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1} \quad (13)$$

система уравнений

$$p^n(2p - 1)a^n - \delta_1 a^{\mu_1} b^{\nu_1} = 0, \quad q^n(2q - 1)b^n - \delta_2 a^{\mu_2} b^{\nu_2} = 0 \quad (14)$$

имеет положительное решение $a = \bar{a} > 0$, $b = \bar{b} > 0$, то система уравнений (9) с оператором Монжа — Ампера имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \bar{a} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^p, \quad v(\mathbf{x}) = \bar{b} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^q, \quad (15)$$

где A — произвольная симметричная положительно определенная матрица с определителем, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего поясним смысл условий (12) теоремы. Если в (12) оба неравенства нарушаются, обращаясь в равенства, то в (13) числители и знаменатели обращаются в нуль, что недопустимо. Если только одно неравенство в (12) обращается в равенство, то формулы (15) дадут только тривиальные постоянные решения системы (9), (11). Поэтому в (12) накладываются оба неравенства одновременно, что позволяет получить нетривиальные решения. После подстановки функций (6) в систему (9) с правыми частями вида (11), приходим к системе ОДУ, в которой

$$f(F, G) = F(\xi)^{\mu_1} G(\xi)^{\nu_1}, \quad g(F, G) = F(\xi)^{\mu_2} G(\xi)^{\nu_2}. \quad (16)$$

В свою очередь, точные решения редуцированной системы ОДУ (10), (16) будем отыскивать в виде

$$F(\xi) = \alpha \xi^p, \quad G(\xi) = \beta \xi^q, \quad (17)$$

где константы p, q задаются формулами (13). После подстановки функций (17) в полученную систему ОДУ и несложных преобразований, приравнявая к нулю коэффициенты при степенных функциях от ξ , приходим к системе равенств (14). Тем самым установлено, что каждое положительное решение системы (15) дает семейство глобальных положительных решений. Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 3$, $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 = 3$ и симметричная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}, \quad \det A = 1. \quad (18)$$

Тогда по теореме 1 система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \delta_1 u^2 v, \quad \delta_1 > 0,$$

$$v_{xx}v_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = \delta_2 u^3 v^3, \quad \delta_2 > 0,$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = \left(\frac{576}{\delta_2} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{12} z^2 \right)^{-1},$$

$$v(x, y, z) = \frac{3}{\delta_1} \left(\frac{576}{\delta_2} \right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}x^2 + y^2 + \frac{1}{12}z^2 \right)^{-4}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 1 вместо (14) можно рассматривать систему

$$\mathcal{D}p^n(2p-1)a^n - \delta_1 a^{\mu_1} b^{\nu_1} = 0, \quad \mathcal{D}q^n(2q-1)b^n - \delta_2 a^{\mu_2} b^{\nu_2} = 0, \quad (19)$$

где $\mathcal{D}$ — некоторое вещественное число, использовать в формулах (15) произвольное (не обязательно положительное) решение этой системы $(\bar{a}, \bar{b})$ и произвольную симметричную матрицу A , определитель которой подчинен условию $\det A = \mathcal{D}$. Однако в этом случае, вообще говоря, уже нельзя гарантировать глобальность решения, определяемого по формулам (15).

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 3$, $\mu_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = \nu_2 = 3$ и невырожденная симметричная матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \det A = 27. \quad (20)$$

Тогда, используя теорему 1, с учетом равенств (19) получим, что система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \delta_1 u^2 v,$$

$$v_{xx}v_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = \delta_2 u^3 v^3$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = \alpha \left(-x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right)^{-1},$$

$$v(x, y, z) = \beta \left(-x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right)^{-4},$$

где параметры α, β задаются соотношениями

$$\alpha = \frac{\delta_1}{81}\beta, \quad \beta = \frac{1}{\delta_1} \left(\frac{8264970432}{\delta_2} \right)^{1/3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что каждому решению $F(\xi), G(\xi)$ системы ОДУ (10) соответствует точное решение системы (9) вида

$$u(\mathbf{x}) = F\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right), \quad v(\mathbf{x}) = G\left(\frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x})\right).$$

Этот факт можно использовать для сведения системы (9) с краевыми условиями на квадратичных поверхностях к численному решению краевой задачи для системы ОДУ (10), что может существенно уменьшить объем вычислений.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в системе (10) функции $f(F, G), g(F, G)$ — полиномы по своим переменным, то система (9) может допускать полиномиальные решения

$$F(\xi) = \sum_{i=0}^k a_i \xi^i, \quad G(\xi) = \sum_{i=0}^m b_i \xi^i.$$

Проиллюстрируем это следующим примером. Пусть

$$f(F, G) = \frac{13}{\sqrt{38}} F^2 + G^3 - \frac{531441\sqrt{38}}{340787200}, \quad g(f, G) = F + G + \frac{47061\sqrt{38}}{1664000},$$

тогда система ОДУ (10) в случае $n = 3$ обладает точным решением вида

$$F(\xi) = \frac{\sqrt{38}}{228 \det A} \xi^3 - \frac{3^{4/3} 19^{5/6} \sqrt{2}}{320 (\det A)^{2/3}} \xi^2 + \frac{117 3^{2/3} 19^{1/6} \sqrt{2}}{1024 (\det A)^{1/3}} \xi - \frac{49761 \sqrt{12}}{1064960},$$

$$G(\xi) = \frac{3^{1/3} 19^{5/6} \sqrt{2}}{228 (\det A)^{2/3}} \xi^2 - \frac{13 3^{2/3} 19^{1/6} \sqrt{2}}{160 (\det A)^{1/3}} \xi + \frac{9 \sqrt{38}}{1024}.$$

Как отмечено в [31], полиномиальные решения уравнений типа Монжа — Ампера представляют интерес для теории упругости.

Рассмотрим теперь случай, когда система (9) имеет следующий вид:

$$\det H(u) = c_{11} u^{\mu_{11}} + c_{12} v^{\mu_{12}}, \quad \det H(v) = c_{21} u^{\mu_{21}} + c_{22} v^{\mu_{22}}. \quad (21)$$

ТЕОРЕМА 2. Если показатели степени удовлетворяют условиям

$$\mu_{11} \mu_{22} = \mu_{12} \mu_{21}, \quad \mu_{12}(n - \mu_{11}) = \mu_{11}(n - \mu_{22}), \quad \mu_{11} \neq n, \quad \mu_{22} \neq n,$$

и для вычисленных по следующим формулам величин

$$\alpha = \frac{n}{n - \mu_{11}}, \quad \beta = \frac{n}{n - \mu_{22}},$$

система уравнений

$$a^n (2\alpha - 1) a^n - c_{11} a^{\mu_{11}} - c_{12} a^{\mu_{12}} = 0, \quad \beta^n (2\beta - 1) b^n - c_{21} b^{\mu_{21}} - c_{22} a^{\mu_{22}} = 0$$

имеет положительное решение $a = \bar{a} > 0$, $b = \bar{b} > 0$, то система уравнений (21) с оператором Монжа — Ампера имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \bar{a} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^\alpha, \quad v(\mathbf{x}) = \bar{b} \left(\frac{1}{2} (A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right)^\beta,$$

где A — симметричная положительно определенная матрица с определителем, равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы проводится прямой подстановкой в систему уравнений (21) с учетом формулы (5).

ПРИМЕР 3. Пусть $n = 3$, $\mu_{11} = 1$, $\mu_{12} = 1/2$, $\mu_{21} = 4$, $\mu_{22} = 2$ и симметричная матрица A имеет вид (18). Тогда по теореме 2 система уравнений с оператором Монжа — Ампера

$$u_{xx} u_{yy} u_{zz} + 2u_{xy} u_{xz} u_{yz} - u_{xx} u_{yz}^2 - u_{yy} u_{xz}^2 - u_{zz} u_{xy}^2 = c_{11} u + c_{12} v^{1/2},$$

$$v_{xx} v_{yy} v_{zz} + 2v_{xy} v_{xz} v_{yz} - v_{xx} v_{yz}^2 - v_{yy} v_{xz}^2 - v_{zz} v_{xy}^2 = c_{21} u^4 + c_{22} v^2$$

имеет точное анизотропное решение

$$u(x, y, z) = a \left(\frac{3}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{12} z^2 \right)^{3/2}, \quad v(x, y, z) = b \left(\frac{3}{2} x^2 + y^2 + \frac{1}{12} z^2 \right)^3,$$

при этом положительные параметры решения a , b удовлетворяют следующей алгебраической системе уравнений:

$$c_{11} = \frac{27}{4} a^2 - \frac{\sqrt{b}}{a} c_{12}, \quad c_{21} = \frac{135 b^3}{a^4} - \frac{b^2}{a^4} c_{22}. \quad (22)$$

1. Пусть $c_{11} = c_{12} = c_{21} = c_{22} = 1$, тогда система (22) приводится к уравнению

$$1 + \frac{1}{256}(27a^2 - 4)^4 - \frac{135}{4096}a^6(27a^2 - 4)^6 = 0,$$

а параметр b находится из формулы $b = a^2(27a^2 - 4)^2/16 > 0$. Численный анализ показывает, что уравнение для нахождения параметра a имеет два вещественных корня $a_{\pm} \approx \pm 0.5312921672$.

2. Пусть $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{12} > 0$, $c_{21} > 0$, тогда из системы (22) получаем

$$a = \frac{3^{1/2}2^{6/7}5^{13/14}}{45}c_{12}^{3/7}c_{21}^{1/14}, \quad b = \frac{2^{8/7}5^{4/7}}{135}c_{12}^{4/7}c_{21}^{3/7}.$$

Теперь рассмотрим случай, когда функции в правых частях системы (9) являются экспоненциальными.

Теорема 3. Если правые части системы (9) являются экспоненциальными функциями следующих видов:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= -(a + b)\delta \exp(-(n + 1)q_2u) + \delta \exp(q_1v - (n + 1)q_2u), \\ g(u, v) &= -(a + b)\varepsilon \exp(-(n + 1)q_1v) + \varepsilon \exp(q_2u - (n + 1)q_1v), \end{aligned} \quad (23)$$

где $a, b, \delta \neq 0, \varepsilon \neq 0, q_1 \neq 0, q_2 \neq 0$ — параметры такие, что

$$\varepsilon q_1^n = \delta q_2^n, \quad (24)$$

то система (9) имеет точные решения вида

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_2} \ln \left(a + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_1} \ln \left(b + \frac{1}{2}(A\mathbf{x}, \mathbf{x}) \right), \quad (25)$$

где A — симметричная матрица, определитель которой удовлетворяет равенствам $\det A = -\varepsilon q_1^n = -\delta q_2^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом формулы (4) решения (25) для удобства перепишем в виде

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_2} \ln(a + \xi), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{q_1} \ln(b + \xi). \quad (26)$$

Пусть правые части системы (9) задаются формулами (23), тогда на решениях (26) после несложных преобразований они запишутся в виде

$$f(u, v) = -(a + \xi)^{-n-1}(a - \xi)\delta, \quad g(u, v) = -(b + \xi)^{-n-1}(b - \xi)\varepsilon. \quad (27)$$

После подстановки решений (26) в левые части системы (9) с учетом формулы (5) придем к соотношениям

$$\det H(u) = \det A(a - \xi)(a + \xi)^{-n-1}q_2^{-n}, \quad \det H(v) = \det A(b - \xi)(b + \xi)^{-n-1}q_1^{-n}.$$

В свою очередь, с учетом условия (24) и равенств $\det A = -\varepsilon q_1^n = -\delta q_2^n$ последние формулы примут вид

$$\det H(u) = -\delta(a - \xi)(a + \xi)^{-n-1}, \quad \det H(v) = -\varepsilon(b - \xi)(b + \xi)^{-n-1}. \quad (28)$$

Сравнивая равенства (27), (28), легко видеть что система (9) обращается в тождество. $\square$

ПРИМЕР 4. Пусть $n = 3$ и невырожденная симметричная матрица A имеет вид (20). Тогда по теореме 3 система уравнений с оператором Монжа — Ампера вида

$$u_{xx}u_{yy}u_{zz} + 2u_{xy}u_{xz}u_{yz} - u_{xx}u_{yz}^2 - u_{yy}u_{xz}^2 - u_{zz}u_{xy}^2 = \exp(-2u) - 216 \exp\left(-2u + \frac{1}{4}v\right),$$

$$v_{xx}u_{yy}v_{zz} + 2v_{xy}v_{xz}v_{yz} - v_{xx}v_{yz}^2 - v_{yy}v_{xz}^2 - v_{zz}v_{xy}^2 = 8 \exp(-v) - 1728 \exp\left(-v + \frac{1}{2}u\right)$$

имеет точное анизотропное по пространственным переменным решение вида

$$u(x, y, z) = 2 \ln \left(\frac{1}{108} - x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right),$$

$$v(x, y, z) = 4 \ln \left(-\frac{1}{216} - x^2 + \frac{5}{2}y^2 - \frac{3}{2}z^2 - xz + yz \right).$$

2.2. Случай, когда правые части зависят от оператора Лапласа и градиента искомых функций. Пусть теперь правые части системы уравнений (3) задаются следующими формулами:

$$h_1 = \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_1 \Delta u + \nu_1 \Delta v),$$

$$h_2 = \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_2 \Delta u + \nu_2 \Delta v).$$

Выбор таких функциональных зависимостей обусловлен работой [32, с. 1010], в которой встречается интересное уравнение

$$\frac{u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^q} = a(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + 2b(x, y, u, u_x, u_y)u_{xy} + c(x, y, u, u_x, u_y)u_{yy} + \Theta(x, y, u, u_x, u_y), \quad 0 \leq q \leq 1,$$

многомерный аналог которого можно записать так:

$$\frac{\det H(u)}{(1 + |\nabla u|^2)^q} = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta u$$

или

$$\det H(u) = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u)(1 + |\nabla u|^2)^q + \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u)(1 + |\nabla u|^2)^q \Delta u. \quad (29)$$

Вводя новые функции

$$\Theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) = \Theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) (1 + |\nabla u|^2)^q, \quad \theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) = \theta(\mathbf{x}, u, \nabla u) (1 + |\nabla u|^2)^q,$$

перепишем (29) в виде

$$\det H(u) = \Theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) + \theta_1(\mathbf{x}, u, \nabla u) \Delta u. \quad (30)$$

Рассмотрим систему двух уравнений с оператором Монжа — Ампера, правые части которой аналогичны правой части уравнения (30) вида

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_1 \Delta u + \nu_1 \Delta v), \\ \det H(v) &= \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) (\mu_2 \Delta u + \nu_2 \Delta v). \end{aligned} \quad (31)$$

Здесь $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ — вещественные константы. При этом не исключается такой случай, когда в уравнениях системы (31) может присутствовать лапласиан только от одной из искомым функций, т. е. одна из констант в каждом уравнении системы равна нулю, а вторая отлична от нуля. В дальнейшем для задачи построения точных решений системы (31) будем при необходимости конкретизировать вид функций $\Theta_1, \Theta_2, \theta_1, \theta_2$, не исключая ситуацию, когда $\Theta_1, \Theta_2, \theta_1, \theta_2$ в системе уравнений (31) можно положить тождественными константами. Точные многомерные решения системы уравнений (31) будем отыскивать в виде (7), (8).

Теорема 4. Если для функций Θ_1, Θ_2 выполнены условия

$$\Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \equiv \lambda_1, \quad \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \equiv \lambda_2, \quad (32)$$

а константы μ_i, ν_i ($i = 1, 2$) такие, что $\mu_1\nu_2 = \mu_2\nu_1$, то система обобщенных уравнений Монжа — Ампера (31) обладает точным многомерным решением

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1}{\det A_1} \right)^{1/n} (A_1 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_2}{\det A_2} \right)^{1/n} (A_2 \mathbf{x}, \mathbf{x}), \quad (33)$$

при этом следы невырожденных симметричных матриц A_1, A_2 удовлетворяют равенствам

$$\alpha\mu_1 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_1 \operatorname{tr}(A_2) = 0, \quad \alpha\mu_2 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_2 \operatorname{tr}(A_2) = 0. \quad (34)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В формулах (7) ненулевые постоянные α, β произвольны. На функциях (7), (8) левые части системы (31) примут в силу формулы (5) постоянные значения $\alpha^n \det A_1$ и $\beta^n \det A_2$. В свою очередь, после подстановки решений (7), (8) в правые части системы (31) получим с учетом формул (32), (34) соответственно следующие цепочки равенств:

$$\begin{aligned} \Theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times [\alpha\mu_1 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_1 \operatorname{tr}(A_2)] \\ = \lambda_1 + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times 0 = \lambda_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times [\alpha\mu_2 \operatorname{tr}(A_1) + \beta\nu_2 \operatorname{tr}(A_2)] \\ = \lambda_2 + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v)|_{(7),(8)} \times 0 = \lambda_2. \end{aligned}$$

Следовательно, после подстановки функций (7), (8) в систему уравнений (31) получаем равенства $\lambda_1 = \alpha^n \det A_1$, $\lambda_2 = \beta^n \det A_2$. Выражая отсюда постоянные α, β и подставляя их в (7), (8), получим формулы (33). Таким образом, функции (33) являются искомыми точными решениями. Теорема доказана. $\square$

Отметим, что теорема 4 справедлива и для случая, когда $\operatorname{tr}(A_1) = 0$ и $\operatorname{tr}(A_2) = 0$.

ПРИМЕР 5. Пусть $n = 3$ и $A_1 = A_2 = E$, где E — единичная матрица 3×3 . Тогда по теореме 4 система обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \frac{192(1 + |\nabla u|^2)}{3 - 16v} + v^p \Delta \left(u + \frac{2}{3}v \right), \\ \det H(v) &= -\frac{216(1 + |\nabla v|^2)}{1 + 18u} + u^q \Delta \left(\frac{2}{3}u + v \right) \end{aligned}$$

имеет в трехмерном координатном пространстве следующие радиально — симметричные решения:

$$u(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2), \quad v(x, y, z) = -3(x^2 + y^2 + z^2).$$

ПРИМЕР 6. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 имеют вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -10 & 6 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

причем $\det A_1 = 2$, $\operatorname{tr}(A_1) = -16$, $\det A_2 = 4$, $\operatorname{tr}(A_2) = -8$. Тогда по теореме 4 система обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\det H(u) = \lambda + \theta_1(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) \Delta(u - v),$$

$$\det H(v) = 16\lambda + \theta_2(\mathbf{x}, u, v, \nabla u, \nabla v) \Delta(v - u)$$

имеет в трехмерном координатном пространстве следующие точные анизотропные по пространственным переменным решения:

$$u(x, y, z) = \frac{2^{2/3} \lambda^{1/3}}{2} (-x^2 - 5y^2 - 2z^2 - 3xy + xz + 6yz),$$

$$v(x, y, z) = 2^{2/3} \lambda^{1/3} \left(-3x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2 + 2xy - yz \right).$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \det H(u) &= \mu_{11} \Delta(|\nabla u|^2) + \mu_{12} \Delta(|\nabla v|^2) + c_{11} \Delta u + c_{12} \Delta v, \\ \det H(v) &= \mu_{21} \Delta(|\nabla u|^2) + \mu_{22} \Delta(|\nabla v|^2) + c_{21} \Delta u + c_{22} \Delta v. \end{aligned} \quad (36)$$

Теорема 5. Если числа α, β и симметричные матрицы A_1, A_2 удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \alpha^n \det A_1 &= 2\alpha^2 \mu_{11} \operatorname{tr}(A_1^2) + 2\beta^2 \mu_{12} \operatorname{tr}(A_2^2) + \alpha c_{11} \operatorname{tr}(A_1) + \beta c_{12} \operatorname{tr}(A_2), \\ \beta^n \det A_2 &= 2\alpha^2 \mu_{21} \operatorname{tr}(A_1^2) + 2\beta^2 \mu_{22} \operatorname{tr}(A_2^2) + \alpha c_{21} \operatorname{tr}(A_1) + \beta c_{22} \operatorname{tr}(A_2), \end{aligned} \quad (37)$$

то система уравнений с оператором Монжа — Ампера (36) имеет семейство точных решений

$$u(\mathbf{x}) = \frac{\alpha}{2} (\mathbf{x}, S_1^T A_1 S_1 \mathbf{x}), \quad v(\mathbf{x}) = \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}, S_2^T A_2 S_2 \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (38)$$

где S_1, S_2 — произвольные ортогональные матрицы.

Доказательство проводится прямой подстановкой с использованием формулы (5) и того факта, что при преобразованиях подобия с ортогональными матрицами след и определитель являются инвариантами.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Не уменьшая общности, в системе (37) можно считать $\alpha = \beta = 1$, это не сужает множества решений системы (36), доставляемых теоремой 5. Однако в случае, когда представляют интерес квадратичные решения системы (36) с заданными матрицами A_1, A_2 , следует рассматривать (37) как систему двух уравнений для нахождения подходящих чисел α, β .

ПРИМЕР 7. Рассмотрим частный случай системы (36), когда $n = 3$ и уравнения имеют вид

$$\det H(u) = \mu_1 \Delta(|\nabla u|^2), \quad \det H(v) = \mu_2 \Delta(|\nabla v|^2), \quad (39)$$

где $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ — вещественные параметры. Из теоремы 5 следует, что система (39) имеет семейство точных решений вида (38) со следующими матрицами:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a/3 & 0 & 0 \\ 0 & a(1 + \sqrt{3})/3 & 0 \\ 0 & 0 & a(1 - \sqrt{3})/3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} b/3 & 0 & 0 \\ 0 & b(1 + \sqrt{3})/3 & 0 \\ 0 & 0 & b(1 - \sqrt{3})/3 \end{pmatrix},$$

где $a = -27\mu_1^{3/5}\mu_2^{2/5}$, $b = -27\mu_1^{2/5}\mu_2^{3/5}$.

ПРИМЕР 8. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 задаются формулами

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Тогда по теореме 5 система уравнений с оператором Монжа — Ампера (36) обладает точным анизотропным по пространственным переменным решением

$$u(x, y, z) = \alpha \left(x^2 - \frac{5}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + xy - 4xz \right),$$

$$v(x, y, z) = \beta \left(\frac{7}{2}x^2 - \frac{3}{2}y^2 - 2z^2 + 2xy + yz \right), \quad (40)$$

при этом соответствующая алгебраическая система уравнений (37) имеет вид

$$47\alpha^3 - 144\alpha^2\mu_{11} - 168\beta^2\mu_{12} = 0, \quad 93\beta^3 - 144\alpha^2\mu_{21} - 168\beta^2\mu_{21} = 0. \quad (41)$$

Для произвольных ненулевых коэффициентов $\mu_{11}, \mu_{12}, \mu_{21}, \mu_{22}$ из системы (41) для нахождения одной из неизвестных величин α или β получаем полиномиальное уравнение пятой степени, которое заведомо имеет вещественное решение. Если на этом решении квадратное уравнение для нахождения другой неизвестной из пары (α, β) также имеет вещественные корни, то получим квадратичные точные решения системы в частных производных вида (40). А в частном случае $\mu_{11} = \mu_{12} = \mu_1, \mu_{21} = \mu_{22} = \mu_2$ алгебраическая система (41) имеет вещественное решение

$$\alpha = \frac{144}{47}\mu_1 + \frac{56 \cdot 406503^{2/3}}{135501}\mu_2, \quad \beta = \frac{48 \cdot 406503^{1/3}}{1457}\mu_1 + \frac{56}{31}\mu_2.$$

Пусть функции h_1, h_2 задаются следующими формулами:

$$h_1 = \lambda_1 + f(\Delta v), \quad h_2 = \lambda_2 + g(\Delta u).$$

В этом случае система уравнений (3) запишется так:

$$\det H(u) = \lambda_1 + f(\Delta v), \quad \det H(v) = \lambda_2 + g(\Delta u). \quad (42)$$

Здесь $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ — некоторые параметры.

Теорема 6. Если симметричные матрицы A_1, A_2 и числа $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \lambda_1, \lambda_2$ удовлетворяют системе равенств

$$\alpha^n \det A_1 = \lambda_1 + f(\beta \operatorname{tr}(A_2)), \quad \beta^n \det A_2 = \lambda_2 + g(\alpha \operatorname{tr}(A_1)), \quad (43)$$

то система уравнений Монжа — Ампера (42) имеет точное решение (38).

Доказательство. После подстановки квадратичных функций (38) с произвольными симметричными матрицами A_1, A_2 и свободными константами $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ в уравнения системы (42) с учетом леммы 1 приходим к равенствам (43). Таким образом, функции (38) и симметричные матрицы A_1, A_2 , константы α, β которых удовлетворяют системе равенств (43), обращают уравнения системы (42) в тождества. При этом допустим и случай, когда $\lambda_i = 0$, и $\det A_i = 0$, $\operatorname{tr}(A_i) = 0$, $i = 1, 2$. В этом случае с учетом формулы (5) обе части обоих уравнений системы (42) тождественно обращаются в нуль на всех функциях вида (38). Теорема доказана. $\square$

Теорема 7. Если правые части уравнений системы (42) удовлетворяют равенствам

$$\lambda_1 + f(0) = 0, \quad \lambda_2 + g(0) = 0,$$

то эта система уравнений имеет точные решения вида (38), где A_1, A_2 — произвольные симметричные матрицы, определители и следы которых равны нулю, а $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ — произвольные вещественные числа.

Доказательство. Из условий $\det A_1 = 0, \det A_2 = 0$ и леммы 1 следует, что левые части уравнений системы (42) тождественно обращаются в нуль на всех функциях вида (38), отвечающих условиям данной теоремы. А из условий $\operatorname{tr}(A_1) = 0, \operatorname{tr}(A_2) = 0$ следует, что тождественно обращаются в нуль правые части уравнений системы (42) на всех функциях вида (38), отвечающих условиям данной теоремы. Теорема доказана. $\square$

ПРИМЕР 9. Пусть $n = 3$ и симметричные матрицы A_1, A_2 задаются формулами (35). Тогда по теореме 6 системы обобщенных уравнений Монжа — Ампера вида

$$\det H(u_1) = \Delta v_1, \quad \det H(v_1) = \Delta u_1, \quad (44)$$

$$\det H(u_2) = (\Delta v_2)^3, \quad \det H(v_2) = (\Delta u_2)^2 \quad (45)$$

имеют в трехмерном координатном пространстве следующие точные анизотропные по пространственным переменным решения:

$$u_1(x, y, z) = -2x^2 - 10y^2 - 4z^2 - 6xy + 2xz + 12yz,$$

$$v_1(x, y, z) = 6x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz,$$

$$u_2(x, y, z) = 16384x^2 + 81920y^2 + 32768z^2 + 49152xy - 16384xz - 98304yz,$$

$$v_2(x, y, z) = -1024 \cdot 2^{1/3}(6x^2 + y^2 + z^2 - 4xy + 2yz).$$

Кроме того, по теореме 7 точными решениями систем (44), (45) в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, будут функции (38), в которых симметричные матрицы A_1, A_2 такие, что $\det A_1 = 0, \operatorname{tr}(A_1) = 0, \det A_2 = 0, \operatorname{tr}(A_2) = 0$.

3. Заключение

В статье построены анизотропные по пространственным переменным многомерные точные решения нелинейных систем уравнений с оператором Монжа — Ампера. Полученные результаты представляют теоретический интерес, поскольку их можно использовать для изучения качественных свойств, анализа выполнения краевых условий, оценки скорости роста и т. д. Найденные точные решения также можно использовать в качестве тестовых при разработке численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач. В качестве дальнейшего направления развития результатов целесообразно рассмотреть возможность использования предложенных здесь идей и подходов для построения точных решений для нестационарных вариантов изученных в статье систем уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерного обобщенного уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 10. С. 1334–1349.
2. Монж Г. Приложение анализа к геометрии (пер. с фр. Monge G. Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie. Paris. 1795). М.-Л.: ОНТИ, 1936.
3. Ampère A. Application de la théorie sur les intégrales des équations aux différentielles partielles du premier et second ordre. Paris: J. de l'Ecole Polytechnique, 1820.
4. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
5. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. М.: Наука, 1978.
6. Мелешко С. В., Пухначев В. В. Об одном классе частично инвариантных решений уравнений Навье — Стокса // Прикл. математика и техн. физика. 1999. Т. 40, № 2. С. 24–33.
7. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of nonlinear partial differential equations. Second edition. Boca Raton: CRC Press, 2012.
8. Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Часть 2. Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 2023.
9. Аксенов А. В., Полянин А. Д. Групповой анализ, редукции и точные решения уравнения Монжа — Ампера // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 6. С. 750–763.
10. Polyanin A. D., Aksenov A. V. Unsteady magnetohydrodynamics PDE of Monge–Ampère type: Symmetries, closed-form solutions, and reductions // Mathematics. 2024. V. 12. N 2127.
11. Aksenov A. V., Polyanin A. D. Symmetries, reductions and exact solutions of nonstationary Monge–Ampère type equations // Mathematics. 2025. V. 13. N 525.
12. Кушнер А. Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа — Ампера и инварианты Лапласа // Докл. АН. 2008. Т. 422, № 5. С. 597–600.
13. Кушнер А. Г. Приведение гиперболических уравнений Монжа — Ампера к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 609–611.
14. Фулич В. И., Серов Н. И. Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 3. С. 543–546.
15. Фулич В. И., Штельен В. М., Серов Н. И. Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. Киев: Наук. думка, 1989.
16. Leibov O. S. Reduction and exact solutions of the Monge–Ampère equation // Nonlinear Math. Phys. 1989. V. 4, N 1, 2. P. 146–148.
17. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа — Ампера. М.: Наука, 1988.
18. Trudinger N. S., Wang X. J. The Monge–Ampère equation and its geometric applications // Handbook of geometric analysis. Somerville: International, 2008. V. 1. P. 467–524. (Adv. Lect. Math.; V. 7).
19. Calabi E. Improper affine hyperspheres of convex type and generalization of a theorem by K. Jörgens // Michigan Math. J. 1958. V. 5, N 2. P. 105–126.
20. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975.
21. Борисенко А. А., Веснин А. Ю., Ивочкина Н. М. К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 171–193.
22. Ambrosio L., Baradat A., Brenier Y. Monge–Ampère gravity, as a Γ -limit of good rate functions // Anal. PDE. 2023. V. 16, N 9. P. 2005–2040.

23. Bonnefous A., Brenier Y., Mohayadee R. Monge–Ampère gravity, optimal transport theory and their link to the Galileons. arXiv:2405.15035v2 [gr-qc]. 31 Oct 2024.
24. Ma X. N., Trudinger N. S., Wang X. J. Regularity of potential functions of the optimal transportation problem // Arch. Ration. Mech. Anal. 2005. V. 177. P. 151–183.
25. Trudinger N. S., Wang X. J. On the second boundary value problem for Monge–Ampère type equations and optimal transportation // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. 2009. V. 8, N 1. P. 143–174.
26. Guido De Philippis, Alessio Figalli. The Monge–Ampère equation and its link to optimal transportation. arXiv:1310.6167v1 [math.AP]. 23 Oct 2013.
27. Косов А. А., Семенов Э. И. Новые точные решения уравнения диффузии со степенной нелинейностью // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 6. С. 1282–1299.
28. Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях многомерной системы эллиптических уравнений со степенными нелинейностями // Дифференц. уравнения. 2023. Т. 59, № 12. С. 1619–1640.
29. Рахмелевич И. В. Система двумерных уравнений Монжа — Ампера: редукции и точные решения // Владикавк. мат. журн. 2024. Т. 26, № 4. С. 121–136.
30. Жабборов Н. М., Коробов П. В., Имомназаров Х. Х. Применение дифференциальных тождеств Мегрובה к уравнениям двухскоростной гидродинамики с одним давлением // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2019. Т. 5, № 2. С. 156–163.
31. Аминов Ю. А. Существование полиномиальных решений уравнения Монжа — Ампера 4-й степени. Сильный изгиб тонкой пластинки // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 8. С. 3–17.
32. Бакельман И. Я., Красносельский М. А. Нетривиальные решения задачи Дирихле для уравнений с оператором Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137, № 5. С. 1007–1010.

Поступила в редакцию 2 марта 2025 г.

После доработки 17 апреля 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Косов Александр Аркадьевич (ORCID 0000-0003-1352-1828)

Семенов Эдуард Иванович (ORCID 0000-0002-9768-9945)

Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033

kosov_idstu@mail.ru, edwseiz@gmail.com

УДК 512.542

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ КОРАДИКАЛАХ СИЛОВСКИХ НОРМАЛИЗАТОРОВ КОНЕЧНОЙ ГРУППЫ

В. С. Монахов

Аннотация. Получен положительный ответ на вопрос, предложенный в работе Т. И. Васильевой и А. Г. Коранчук «Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов». Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.410

Ключевые слова: конечная группа, силовская подгруппа, нормализатор, корадикал, субнормальная подгруппа.

1. Введение

Силовским нормализатором конечной группы принято называть нормализатор силовской подгруппы. Наименьшая нормальная подгруппа группы G , фактор-группа по которой принадлежит формации $\mathfrak{X}$, называется $\mathfrak{X}$ -корадикалом группы G и обозначается символом $G^{\mathfrak{X}}$. Для формации $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп $\mathfrak{N}$ -корадикал группы называется *нильпотентным корадикалом*.

Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}$. Т. И. Васильева и А. Г. Коранчук [1, теорема А] доказали, что $\mathfrak{X}$ -корадикал конечной группы нильпотентен тогда и только тогда, когда все силовские нормализаторы разрешимы и $\mathfrak{X}$ -корадикал любого силовского нормализатора является субнормальной подгруппой. Для конечных разрешимых групп с $\mathbb{P}$ -субнормальными нильпотентными корадикалами всех силовских нормализаторов они получили критерий сверхразрешимости, [1, предложение 1]. Кроме того, в их работе сформулирован

Вопрос. Можно ли в теореме А и в предложении 1 убрать условие разрешимости?

В настоящей статье получен положительный ответ на этот вопрос.

Все обозначения и терминология, как в [1, 2].

2. К теореме А работы [1]

Теорема 1. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустая формация, состоящая из нильпотентных групп. $\mathfrak{X}$ -корадикал конечной группы G нильпотентен тогда и только тогда, когда $\mathfrak{X}$ -корадикал каждого силовского нормализатора является субнормальной в G подгруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{X}$ -корадикал группы G нильпотентен. Тогда $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Согласно [2, IV.1.16; IV.3.4(b)] формация $\mathfrak{X}$ наследственная, а $\mathfrak{N}\mathfrak{X}$ —

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ в рамках научного проекта № Ф24КИ-021.

© 2025 Монахов В. С.

наследственная насыщенная формация. Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}} \leq G^{\mathfrak{X}}$ и $G^{\mathfrak{X}}$ — нормальная в G нильпотентная подгруппа, то $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G . Это верно для любого $r \in \pi(G)$, поэтому необходимость выполняется.

Обратно, пусть $\mathfrak{X}$ -корадикал каждого силовского нормализатора группы G является субнормальной подгруппой в G . Требуется доказать, что $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 6] каждая фактор-группа удовлетворяет условиям теоремы. По индукции подгруппа Фраттини $\Phi(G)$ равна 1 и в G имеется единственная минимальная подгруппа, которую обозначим K .

СЛУЧАЙ 1. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ равна 1.

По условию $A = N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G . Так как A p -замкнута, то ее силовская p -подгруппа A_p субнормальна в G . Поэтому $A_p \leq O_p(G) = 1$ и A — p' -подгруппа. Поскольку $N_G(G_p)/A$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ — p -разложимая подгруппа. Это верно для любого $p \in \pi(G)$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3, теорема 2] группа G нильпотентна; противоречие.

СЛУЧАЙ 2. $1 \neq F(G) = K = O_q(G) = C_G(O_q(G))$ — единственная минимальная нормальная в G подгруппа для некоторого $q \in \pi(G)$.

Ясно, что в G существует максимальная в G подгруппа такая, что $M_G = 1$ и $G = K \rtimes M$. Так как условия теоремы наследуют фактор-группы, по индукции $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, в частности, группа G разрешима и в G есть q' -холлова подгруппа $G_{q'} \leq M$.

Пусть $r \in \pi(G_{q'})$ и $G_r \leq G_{q'}$. По условию $B = N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G . Так как B r -замкнута, ее силовская r -подгруппа B_r субнормальна в G . Поэтому $B_r \leq O_r(G) = 1$ и B — r' -подгруппа. Поскольку $N_G(G_r)/B$ нильпотентна, то $N_G(G_r)$ — r -разложимая подгруппа. Так как $N_{G_{q'}}(G_r) = N_G(G_r) \cap G_{q'}$, то $N_{G_{q'}}(G_r)$ — r -разложимая подгруппа. Это верно для любого $r \in \pi(G_{q'})$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3, теорема 2] подгруппа $G_{q'}$ нильпотентна.

Так как $K = O_q(G)$, то $O_q(M) = 1$ и $F(M) \leq G_{q'}$. Поскольку $M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, то $M/F(M)$ нильпотентна, $G_{q'}$ нормальна в M и $F(M) = G_{q'}$. Теперь $M = G_{q'} \rtimes M_q$ и $M = N_G(G_r)$ для каждого $r \neq p$. По условию $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G . Поэтому $N_G(G_r)^{\mathfrak{X}} \leq M_G = 1$, $N_G(G_r) = M \in \mathfrak{X}$. Следовательно, $M_q = 1$ и $G = K \rtimes M \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Теорема 1 доказана.

При $\mathfrak{X} = \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}$ из теоремы 1 вытекают следующие два результата.

Следствие 1.1. Конечная группа метанильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентные корадикалы всех силовских нормализаторов являются субнормальными подгруппами.

Следствие 1.2. Конечная группа имеет нильпотентный коммутант тогда и только тогда, когда коммутанты всех силовских нормализаторов являются субнормальными подгруппами.

Таким образом, теорема 1 и ее следствия убирают условия разрешимости в теореме А и ее следствиях А1, А2, А3 работы [1].

Так как в конечной группе нормализаторы силовских p -подгрупп сопряжены, то сопряжены и их нильпотентные корадикалы. Известно, что подгруппа, перестановочная со своими сопряженными, является субнормальной подгруппой [4, 2.6]. Поэтому из теоремы 1 вытекают также следующие два новых результата.

Следствие 1.3. Если в конечной группе G для каждого $p \in \pi(G)$ нильпотентные корадикалы нормализаторов силовских p -подгрупп перестановочны между собой, то G метанильпотентна.

Следствие 1.4. Если в конечной группе G для каждого $p \in \pi(G)$ коммутанты нормализаторов силовских p -подгрупп перестановочны между собой, то коммутант группы G нильпотентен.

3. К предложению 1 и теореме В

Пусть $\mathfrak{D}$ — класс всех конечных групп, обладающих силовской башней сверхразрешимого типа [2, с. 359]. Класс $\mathfrak{D}$ является наследственной насыщенной радикальной формацией. Каждая конечная сверхразрешимая группа имеет силовскую башню сверхразрешимого типа, поэтому $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ и все включения собственные. Здесь $\mathfrak{U}$ — класс всех конечных сверхразрешимых групп.

В условиях предложения 1 [1] предполагалась разрешимость группы и для наследственной насыщенной формации $\mathfrak{F}$ вводились ограничения: $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. В следующей теореме условие разрешимости группы не требуется и расширен диапазон для формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 4] и [5, лемма 1.8 (1)] условия теоремы наследуют фактор-группы. Так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, то $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа, которую обозначим через K .

СЛУЧАЙ 1. Подгруппа Фиттинга $F(G)$ равна 1.

Пусть p — наибольшее в $\pi(G)$. Так как группа G неразрешима, то $p \geq 5$. Поскольку $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ p -замкнута и $\mathbb{P}$ -субнормальна в G , то согласно [6, лемма 2] силовская p -подгруппа A из $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G . Значит, $A \leq O_p(G) = 1$ и $N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ p' -подгруппа. Так как $N_G(G_p)/N_G(G_p)^{\mathfrak{N}}$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ p -разложима. Согласно [7, теорема 1.1(2)] фактор-группа $G/O_{p'}(G)$ разрешима, в частности, $K \leq O_{p'}(G)$. По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$, поэтому KG_p нормальна в G . По лемме Фраттини $G = KN_G(G_p)$ и в G имеется нормальная p' -холлова подгруппа $G_{p'}$.

Проверим, что для $G_{p'}$ выполняются условия теоремы. Пусть $r \in \pi(G_{p'})$ и $G_r \leq G_{p'}$. Ясно, что $N_{G_{p'}}(G_r) = N_G(G_r) \cap G_{p'}$ и $N_{G_{p'}}(G_r)$ нормальна в $N_G(G_r)$. Так как $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}$ — наследственные формации, а $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ по условию теоремы, то $N_{G_{p'}}(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$. Поскольку $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в $N_G(G_r)$ и $N_G(G_r)$ разрешима, то $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ [5, лемма 1.9(3)]. По условию $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G , значит, и подгруппа $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G . Так как $G_{p'}$ нормальна в G , то $N_{G_{p'}}(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в $G_{p'}$, [5, лемма 1.8(1)]. Поскольку r — произвольное из $\pi(G_{p'})$, то для $G_{p'}$ выполняются все условия теоремы. По индукции $G_{p'} \in \mathfrak{F}$ и $K = 1$; противоречие.

СЛУЧАЙ 2. $1 \neq F(G) = K = O_q(G) = C_G(O_q(G))$ для некоторого $q \in \pi(G)$.

По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$, поэтому G разрешима. Проверим, что для каждой холловой подгруппы группы G выполняются условия теоремы. Пусть H — холлова подгруппа группы G и $G_r \leq H$. Ясно, что $N_H(G_r) = N_G(G_r) \cap H$. Так как

$\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{N}$ — наследственные формации, а $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ по условию, то $N_H(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}} \leq N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$. Подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G , поэтому $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в H [5, лемма 1.9(1)]. Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H \leq N_G(G_r) \cap H = N_H(G_r)$, а $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ нормальна в $N_H(G_r)$, то $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ нормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$. Теперь $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}} \cap H$, а значит, $N_H(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в H . Поскольку r — произвольное из $\pi(H)$, то условия теоремы наследуют все холловы подгруппы группы.

Если $|\pi(G)| > 2$, то по индукции каждая в G холлова бипримарная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$, поэтому G принадлежит $\mathfrak{D}$. Так как в G есть нормальная силовская подгруппа и по условию ее нормализатор принадлежит $\mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Пусть теперь $G = G_p G_q$. По индукции $G/K \in \mathfrak{F}$. Если $q > p$, то G_q нормальна в G и $G = N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$. Остался случай $q < p$. Пусть M — максимальная в G подгруппа, для которой $G = K \rtimes M$. Так как $M \cong G/K \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$, то $M = M_p \rtimes M_q$ и $M = N_G(M_p) \in \mathfrak{F}$, поскольку M_p — силовская в G подгруппа. По условию $M^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G . Так как $M^{\mathfrak{N}} \leq G_p$, то $M^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в G [6, лемма 2]. Поэтому $M^{\mathfrak{N}} = 1$, $M = M_p$, $K = G_q$ и $G = N_G(G_q) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 2.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$. Конечная группа G принадлежит $\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G для каждого $r \in \pi(G)$.

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$, то каждая ее подгруппа $\mathbb{P}$ -субнормальна [5, лемма 1.1(2)]. Так как $\mathfrak{F}$ наследственная, то $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ для каждого $r \in \pi(G)$. Обратно, пусть $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ $\mathbb{P}$ -субнормальна в G для каждого $r \in \pi(G)$. Так как $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{D}$, то применима теорема 2, по которой $G \in \mathfrak{F}$.

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ получаем

Следствие 2.2. Конечная группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда в G любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$ -субнормален в G .

Таким образом, следствия 2.1 и 2.2 убирают условие разрешимости в предположении 1 и следствии 1 работы [1]. Согласно следствию 2.1 при $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{U}$ теорема 2 допускает обращение. Для $\mathfrak{F} = \mathfrak{D}$ это не так.

ПРИМЕР. Группа $G = (C_5 \times C_5) \rtimes (C_3 \rtimes C_4)$ [9, SmallGroup(300,13)] и ее силовские нормализаторы принадлежат $\mathfrak{D}$. Здесь C_n — циклическая группа порядка n . Однако $N_G(G_3)^{\mathfrak{N}} = G_3$ не $\mathbb{P}$ -субнормальна в G .

Формация $\mathfrak{D}$ кроме $\mathfrak{U}$ содержит еще три наследственные насыщенные формации $w\mathfrak{U}$, $v\mathfrak{U}$ и $sh\mathfrak{U}$, причем $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{U} \subset w\mathfrak{U} \subset v\mathfrak{U} \subset sh\mathfrak{U} \subset \mathfrak{D}$ [6]. Группы, принадлежащие формациям $w\mathfrak{U}$, $v\mathfrak{U}$ и $sh\mathfrak{U}$, называют w -сверхразрешимыми, v -сверхразрешимыми и sh -сверхразрешимыми соответственно. Для каждой из этих трех формаций из теоремы 2 вытекают следующие новые результаты.

Следствие 2.3. Если в конечной группе G любой силовский нормализатор w -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$ -субнормален в G , то G w -сверхразрешима.

Следствие 2.4. Если в конечной группе G любой силовский нормализатор v -сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$ -субнормален в G , то G v -сверхразрешима.

Следствие 2.5. Если в конечной группе G любой силовский нормализатор sh-сверхразрешим и его нильпотентный корадикал $\mathbb{P}$ -субнормален в G , то G sh-сверхразрешима.

Следствие 2.6. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [1, лемма 6] каждая фактор-группа удовлетворяет условиям следствия. По индукции $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная подгруппа, которую обозначим K .

Предположим, что $F(G) = 1$. По условию $H = N_G(G_p)^{\mathfrak{X}}$ субнормальна в G . Так как H p -замкнута, то ее силовская p -подгруппа H_p субнормальна в G . Поэтому $H_p \leq O_p(G) = 1$ и H — p' -подгруппа. Поскольку $N_G(P)/H$ нильпотентна, то $N_G(G_p)$ — p -разложимая подгруппа. Это верно для любого $p \in \pi(G)$. По теореме Баллестера — Шеметкова [3] группа G нильпотентна; противоречие.

Значит, $F(G) \neq 1$. По индукции $G/F(G) \in \mathfrak{F}$, в частности, группа разрешима. Но в разрешимых группах субнормальные подгруппы $\mathbb{P}$ -субнормальны [5, лемма 1.9(3)]. Остается применить теорему 2.

Следствие 2.6 расширяет диапазон для формации $\mathfrak{F}$ из достаточности теоремы В работы [1].

Так как $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ — нормальная подгруппа в $(N_G(G_r))'$, справедливо

Следствие 2.7. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)'$ субнормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

Напомним, что подгруппа A называется *полунормальной* в группе G , если существует подгруппа B такая, что $G = AB$ и AX — подгруппа для каждой подгруппы X из B [10]. В этой ситуации подгруппу B называют *s-добавлением* к A в G . Если s -добавление B является разрешимой подгруппой, то полунормальная подгруппа A будет $\mathbb{P}$ -субнормальной, поскольку A перестановочна с подгруппами композиционного ряда группы B .

Следствие 2.8. Пусть $\mathfrak{F}$ — наследственная насыщенная формация, $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{D}$. Если $N_G(G_r) \in \mathfrak{F}$ и подгруппа $N_G(G_r)^{\mathfrak{N}}$ полунормальна в конечной группе G для каждого $r \in \pi(G)$, то $G \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Согласно [10, лемма 2.1] все условия наследуют фактор-группы. Так как $G \notin \mathfrak{N}$, то существует $p \in \pi(G)$ такое, что $A = N_G(G_p)^{\mathfrak{N}} \neq 1$ [3, теорема 2]. Подгруппа A 2-нильпотентна и полунормальна в G . Согласно [10, теорема В(a)] подгруппа A^G разрешима. Значит, и группа G разрешима. Так как в разрешимых группах полунормальные подгруппы $\mathbb{P}$ -субнормальны, то $G \in \mathfrak{F}$ по теореме 2.

Следствие 2.9. (1) Если в конечной группе все силовские нормализаторы полунормальны, то группа сверхразрешима.

(2) Если в конечной группе любой силовский нормализатор сверхразрешим и его нильпотентный корадикал полунормален, то группа сверхразрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть в группе G все силовские нормализаторы полунормальны. Условия наследуют все фактор-группы, поэтому $\Phi(G) = 1$ и в G есть единственная минимальная нормальная подгруппа, которую обозначим K . Если K разрешима,

то G разрешима. Теперь все силовские нормализаторы $\mathbb{P}$ -субнормальны и G сверхразрешима согласно [8, теорема 3.1]. Далее считаем, что K неразрешима, поэтому $C_G(K) = 1$ и $F(G) = 1$.

Пусть p — наибольшее в $\pi(G)$, $A = N_G(G_p)$, B — s -добавление к A в G . Если $q \in \pi(G : A)$, то $q \in \pi(B)$ и в B существует подгруппа Q порядка q . По теореме Силова подгруппа G_p нормальна в подгруппе AQ , поэтому $Q \leq A$. Согласно [10, лемма 2.1 (с)] $Q^G \leq A$. Так как A p -замкнута, то Q^G p -замкнута и $O_p(Q^G) \leq O_p(G) \leq F(G) = 1$. Значит, Q^G — p' -подгруппа и $Q^G G_p = Q^G \times G_p$. Поскольку K — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G , то $K \leq Q^G$ и $G_p \leq C_G(K) = 1$; противоречие.

(2) Полагая $\mathfrak{F} = \mathfrak{U}$ в следствии 2.8, получим требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильева Т. И., Коранчук А. Г. Конечные группы с субнормальными корадикалами силовских нормализаторов // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 805–813.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter De Gruyter, 1992.
3. Баллестер-Болинше А., Шеметков Л. А. О нормализаторах силовских подгрупп в конечных группах // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 1. С. 3–5.
4. Isaacs I. M. Finite group theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2008.
5. Монахов В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$ -субнормальными подгруппами // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 2. С. 447–462.
6. Монахов В. С. О трех формациях над $\mathfrak{U}$ // Мат. заметки. 2021. Т. 110, № 3. С. 358–367.
7. Guralnick R. M., Malle G., Navarro G. Self-normalizing Sylow subgroups // Proc. Am. Soc. 2003. V. 132, N 4. P. 973–979.
8. Kniahina V. N., Monakhov V. S. On supersolvability of finite groups with $\mathbb{P}$ -subnormal subgroups // Intern. J. Group Theory. 2013. V. 2, N 4. P. 21–29.
9. A system for computational discrete algebra GAP 4.12.2 [Electronic resource]. Mode of access: <https://www.gap-system.org>. Date of Access: 10.09.2023.
10. Carocca A., Matos H. Some solvability criteria for finite groups // Hokkaido Math. J. 1997. V. 26. P. 157–161.

Поступила в редакцию 9 января 2025 г.

После доработки 17 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Монахов Виктор Степанович (ORCID 0000-0003-0977-7396)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины,

ул. Советская, 104, Гомель 246019, Беларусь

victor.monakhov@gmail.com

УДК 517.956.8:517.956:539.3(3)

ДЕФОРМАЦИЯ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ЗАЖАТОЙ ПО КРАЮ ПЛАСТИНЫ С ПРИКРЕПЛЕННЫМИ СТЕРЖНЯМИ. 2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

С. А. Назаров

Аннотация. В низкочастотном диапазоне спектра строится асимптотика частот и мод собственных колебаний изотропного и однородного упругого сочленения тонких цилиндрических вертикальных стержней и горизонтальной пластины. Поверхность сочленения свободна от внешних воздействий всюду, кроме жестко заземленной кромки пластины. Выявлены несколько типов колебаний, сопровождающихся изгибными деформациями пластины и/или стержней. Обоснование асимптотических формул проводится при помощи асимптотически точного анизотропного и весового неравенства Корна, классической леммы о «почти собственных» числах и утверждения о сходимости нормированных собственных чисел.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.411

Ключевые слова: изотропное и однородное упругое сочленение пластины и стержней, пограничные слои, асимптотика собственных чисел и вектор-функций.

1. Постановки задач. Обозначим через ω_0 и ω_j области на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$, ограниченные простыми замкнутыми гладкими (класса C^∞) контурами $\partial\omega_0$ и $\partial\omega_j$, $j = 1, \dots, J$, зафиксируем попарно различные точки $P^1, \dots, P^J$ внутри ω_0 и введем тонкие изотропные и однородные (с постоянными Ламе $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ и плотностью $\rho > 0$) пластину и стержни:

$$\Omega_0^h = \{x = (x_1, x_2, x_3) : y := (x_1, x_2) \in \omega_0, z := x_3 \in (0, h)\}, \quad (1)$$

$$\Omega_j^h = \{x : \eta^j := h^{-1}y^j \in \omega_j, z \in (-\ell_j, 0]\}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (2)$$

В отличие от статьи¹⁾ [1], продолжением которой служит данная работа, все тела (1) и (2) цилиндрические (см. разд. 9). Масштабированием характерный размер сечения ω_0 сделаем единичным, а декартовы системы координат $x \in \mathbb{R}^3$ и геометрические параметры $h \in (0, h_0]$ и $\ell_1, \dots, \ell_J > 0$ безразмерными. Кроме того, точки P^j и системы декартовых координат $y^j = (y_1^j, y_2^j) \in \mathbb{R}^2$ с центрами в них зафиксируем так, чтобы выполнялись удобные равенства

$$\int_{\omega_j} y_1^j dy^j = \int_{\omega_j} y_2^j dy^j = 0, \quad I_{12}(\omega_j) := \int_{\omega_j} y_1^j y_2^j dy^j = 0. \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект 124041500009-8).

¹⁾Ссылки на нужные, но не играющие особо важной роли формулы из нее обозначаем (XX)_[1].

Собственные колебания с частотой $\varsigma_h > 0$ упругого сочленения $\Pi^h = \Omega_0^h \cup \Omega_1^h \cup \dots \cup \Omega_j^h$ описываются системой Ламе трех дифференциальных уравнений

$$-\mu \Delta_x u^h(x) - (\lambda + \mu) \nabla_x \nabla_x \cdot u^h(x) = \Lambda^h u^h(x), \quad x \in \Pi^h. \quad (4)$$

Здесь $\nabla_x = \text{grad}$, $\nabla_x \cdot = \text{div}$, $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, а $\Lambda^h = \rho \varsigma_h^2$ — спектральный параметр. Вектор смещений $u^h = (u_1^h, u_2^h, u_3^h)^\top$ интерпретируем как столбец, где $u_q^h = e_{(q)}^\top u^h$ — проекции вектора на ось x_q с ортом $e_{(q)}$ и $\top$ — знак транспонирования. Обозначив через $\delta_{p,q}$ символ Кронекера, укажем классические формулы для компонент тензоров деформаций и напряжений:

$$\varepsilon_{pq}(u^h) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p^h}{\partial x_q} + \frac{\partial u_q^h}{\partial x_p} \right), \quad \sigma_{pq}(u^h) = 2\mu \varepsilon_{pq}(u^h) + \lambda \delta_{p,q} \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii}(u^h), \quad p, q = 1, 2, 3.$$

Поверхность $\partial \Pi^h$ тела Π^h свободна от внешних воздействий всюду, кроме кромки пластины $\Gamma_0^h = \partial \omega_0 \times (0, h)$, которая зафиксирована, т. е. выполнены краевые условия

$$u^h(x) = 0 \in \mathbb{R}^3, \quad x \in \Gamma_0^h, \quad (5)$$

$$\sigma_q^{(n)}(u^h; x) = 0, \quad x \in \partial \Pi^h \setminus (\overline{\Gamma_0^h} \cup v^h), \quad q = 1, 2, 3. \quad (6)$$

При этом $\sigma_q^{(n)}(u^h) = n_1 \sigma_{1q}(u^h) + n_2 \sigma_{2q}(u^h) + n_3 \sigma_{3q}(u^h)$ и $n = (n_1, n_2, n_3)^\top$ — единичный вектор внешней нормали, т. е. $\sigma^{(n)}(u^h) = (\sigma_1^{(n)}(u^h), \sigma_2^{(n)}(u^h), \sigma_3^{(n)}(u^h))^\top$ — вектор нормальных напряжений. Наконец, v^h — объединение ребер $v_{j0}^h = \partial \omega_j^h \times \{0\}$ и $v_{j\ell}^h = \partial \omega_j^h \times \{-\ell_j\}$ цилиндров (2).

Вариационной формулировкой задачи (4)–(6) служит интегральное тождество [2–4]

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \Lambda^h(u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall \psi^h \in H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3, \quad (7)$$

в котором $(\cdot, \cdot)_{\Pi^h}$ — натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi^h)^m$ при любом m , $H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ — пространство Соболева вектор-функций, удовлетворяющих условию Дирихле (5), а верхний индекс 3, указывающий количество компонент у вектор-функций, отсутствует в обозначениях скалярных произведений и норм. Наконец, $E(u^h, u^h; \Pi^h)$ — удвоенная упругая энергия, запасенная телом Π^h , а соответствующая билинейная форма задана равенством

$$E(u^h, \psi^h; \Pi^h) = \sum_{p,q=1}^3 (\sigma_{pq}(u^h), \varepsilon_{pq}(\psi^h))_{\Pi^h} =: \langle u^h, \psi^h \rangle_h. \quad (8)$$

Собственные числа задачи (7) образуют положительную неограниченную последовательность

$$0 < \Lambda_1^h \leq \Lambda_2^h \leq \Lambda_3^h \leq \dots \leq \Lambda_k^h \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (9)$$

составленную при учете их кратностей, а собственные вектор-функции, гладкие всюду, кроме ребер v_{j0}^h , $v_{j\ell}^h$ и $\partial \omega_0^h \times \{0\}$, $\partial \omega_0^h \times \{h\}$, подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(u_{(i)}^h, u_{(k)}^h)_{\Pi^h} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}. \quad (10)$$

Основная цель работы — построить асимптотику собственных пар $\{\Lambda_k^h; u_{(k)}^h\} \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ задачи (7) или (4)–(6), в частности, выявить взаимодействие

элементов сочленения. В разд. 2 приведены основные формулы в моделях пониженных размерностей, двумерной для пластины и одномерных для стержней. В разд. 3 сообщаются сведения о пограничных слоях около зон присоединения стержней к пластине, которые (слои) описываются решениями задачи теории упругости для неограниченного тела $\Xi^j = \Xi_0 \cup \Xi_-^j$, образованного слоем $\Xi_0 = \{\xi^j : \eta^j \in \mathbb{R}^2, |\zeta| < 1/2\}$ и полубесконечным цилиндром $\Xi_-^j = \{\xi^j : \eta^j \in \omega_j, \zeta \leq -1/2\}$ (далее — полуцилиндром),

$$L(\nabla_{\xi^j})v(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \Xi^j, \quad B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})v(\xi^j) = 0, \quad \xi^j \in \partial\Xi^j \setminus v_j. \quad (11)$$

При этом $\xi^j = (\eta^j, \zeta) = (h^{-1}y^j, h^{-1}(z - h/2))$ — растянутые координаты, $v_j = \partial\omega_j \times \{-1/2\}$ — ребро, а $L(\nabla_{\xi^j})$ и $B(\xi^j, \nabla_{\xi^j})$ — (3×3) -матрицы операторов из левых частей равенств (4) и (6).

В разных вариантах формальная асимптотика строится в разд. 4–6, а ее обоснование проводится в два этапа: сначала в разд. 7 выводится предварительный — слабый — асимптотический результат о сходимости нормированных собственных чисел $h^{-2}\Lambda_k^h$ при $h \rightarrow +0$, но затем в разд. 8 при помощи анизотропного и весового неравенства Корна [5; 1, разд. 8] и классической леммы 1 о «почти собственных» числах и векторах получены финальные асимптотические разложения и оценки остатков. Если первый этап прост, так как сводится к повторению выкладок из [6, гл. 4 и 5], то второй из-за разнородности асимптотических анзацев на Ω_0^h и Ω_j^h , а также многообразия пограничных слоев становится технически очень сложным и трудоемким. По счастью, часть вычислений уже была проделана в книге [6] и других публикациях, так что в обработке нуждаются только невязки, порожденные пограничными слоями около зон присоединения стержней к пластине.

Наконец, в разд. 9 обсуждаются доступные обобщения и открытые вопросы.

2. Модели пластины и стержней. Теория Кирхгофа — Лява деформации тонкой пластины включает спектральную задачу Дирихле для бигармонического уравнения

$$A_0 \Delta_y^2 w_3^0(y) = M^0 w_3^0(y), \quad y \in \omega_0, \quad w_3^0(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_3^0(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0, \quad (12)$$

дающую осредненный по толщине прогиб w_3^0 , а для вектора осредненных продольных смещений $w^\# = (w_1^0, w_2^0)^\top$ — задачу Дирихле для плоской системы Ламе без спектрального параметра

$$\begin{aligned} -\mu \Delta_y w^\#(y) - (\mu + \lambda_0) \nabla_y \nabla_y w^\#(y) &= f^\#(y), \quad y \in \omega_0, \\ w^\#(y) &= g'(y), \quad y \in \partial\omega_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь и далее $\partial_{n^p} = n^p(y)^\top \nabla_y$, $n^p = (n_1^p, n_2^p)^\top$ — внешняя нормаль на границе области ω_p , а приведенная цилиндрическая жесткость $A_0 > 0$ пластины, измененная постоянная Ламе λ_0 и коэффициент Пуассона $\nu \in [0, 1/2)$ заданы формулами (10)_[1]. Спектр $\wp^0$ задачи (12) — похожая на (9) последовательность собственных чисел

$$0 < M_1^0 \leq M_2^0 \leq M_3^0 \leq \dots \leq M_k^0 \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

а собственные функции $w_{(k)3}^0 \in C^\infty(\overline{\omega_0})$ подчиним условиям ортогональности и нормировки

$$(w_{(i)3}^0, w_{(k)3}^0)_{\omega_0} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N}. \quad (15)$$

Согласно модели Кирхофа — Клебша осредненные поперечные и продольное смещения w_1^1 , w_2^1 и w_3^1 в стержне Ω_j^h , а также его закручивание w_4^1 отыскиваются из системы четырех обыкновенных дифференциальных уравнений, распадающейся в силу ограничений (3):

$$A_m^j \partial_z^4 w_m^j(z) = M^{jm} |\omega_j| w_m^j(z), \quad z \in \Upsilon_j := (-\ell_j, 0), \quad m = 1, 2, \quad (16)$$

$$-A_m^j \partial_z^2 w_m^j(z) = f_m^j(z), \quad z \in \Upsilon_j, \quad m = 3, 4. \quad (17)$$

Коэффициенты $A_m^j > 0$ заданы формулами (26)_[1], а краевые условия выглядят так:

$$w_m^j(0) = 0, \quad \partial_z w_m^j(0) = 0 \text{ и } A_m^j \partial_z^2 w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad A_m^j \partial_z^3 w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad m = 1, 2, \quad (18)$$

$$w_m^j(-\ell_j) = 0 \text{ и } A_m^j \partial_z w_m^j(-\ell_j) = 0, \quad m = 3, 4. \quad (19)$$

Спектры $\wp_m^j$ задач (16), (18), $j = 1, \dots, J$, $m = 1, 2$, образуют аналогичные (14) и (9) положительные монотонные неограниченные последовательности собственных чисел

$$0 < M_1^{jm} < M_2^{jm} < M_3^{jm} < \dots < M_k^{jm} < \dots \rightarrow +\infty, \quad (20)$$

а соответствующие собственные функции $w_{(k)m}^j \in C^\infty[-\ell_j, 0]$ можно подчинить соотношениям

$$|\omega_j| (w_{(i)m}^j, w_{(k)m}^j)_{\Upsilon_j} = \delta_{i,k}, \quad i, k \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Асимптотические анзацы для собственных пар задачи (4)–(6), сопровождающие процедуру понижения размерностей для тонких пластин и стержней (см. монографии [7, 8, 6, 9]; более объемистые, но все-таки неполные списки приведены в статье [1]) используют растянутую поперечную координату $\zeta = h^{-1}(z - h/2)$ на горизонтальной пластине Ω_0^h

$$\Lambda_{N_k^0}^h = h^2 M_k^0 + h^3 M_k^{0r} + \dots, \quad (22)$$

$$u_{p_k^0}^h(x) = \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) (e_{(3)} w_{(k)3}^0(y) + h w_{(k)}^{0r}(y)) + \dots, \quad x \in \Omega_0^h, \quad (23)$$

и растянутые поперечные координаты $\eta^j = h^{-1}y^j$ на вертикальных стержнях Ω_j^h , $j = 1, \dots, J$,

$$\Lambda_{N_k^{jm}}^h = h^2 M_k^{jm} + h^3 M_k^{jmr} + \dots, \quad m = 1, 2, \quad (24)$$

$$u_{p_k^{jm}}^h(x) = \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (\mathbf{e}_{(m)} w_{(k)m}^j(z) + h w_{(k)}^{jmr}(z)) + \dots, \quad x \in \Omega_j^h, \quad (25)$$

при этом многоточие замещает младшие асимптотические члены, $\mathbf{e}_{(m)} = (\delta_{1,m}, \dots, \delta_{4,m})^\top$ — орт в $\mathbb{R}^4$, главные члены в разложениях (23) и (25) — скалярные собственные функции, а поправочные — векторы. Матричные дифференциальные операторы $\mathbf{W}_{(0)}^h$ и $\mathbf{W}_{(j)}^h$ имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) w^0(y) &= \frac{e_{(3)}}{h^{1/2}} w_3^0(y) + h^{1/2} \sum_{m=1}^2 e_{(m)} \left(w_m^0(y) - \zeta \frac{\partial w_3^0}{\partial y_m}(y) \right) \\ &\quad - e_{(3)} \frac{\lambda h^{3/2}}{\lambda + 2\mu} \left(\zeta \sum_{m=1}^2 \frac{\partial w_m^0}{\partial y_m}(y) - \left(\frac{\zeta^2}{2} - \frac{1}{24} \right) \Delta_y w_3^0(y) \right) \\ &\quad + h^{5/2} \mathcal{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_y) w^0(y) + h^{7/2} \mathcal{W}_{(0)}^2(\zeta, \nabla_y) w^0(y) \end{aligned} \quad (26)$$

и

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z)w^j(z) &= \frac{1}{h} \sum_{m=1}^2 e_{(m)}^j w_m^j(z) \\
&+ \left(d^6(\eta^j)w_4^j(z) + e_{(3)} \left(w_3^j(z) - \sum_{m=1}^2 \eta_m^j \frac{\partial w_m^j(z)}{\partial z} \right) \right) \\
&+ h \mathcal{X}_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z)w^j(z) + h^2 \mathcal{X}'_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z) \partial_z w^j(z) \\
&+ h^3 \mathcal{X}''_{(j)}(\eta^j) \mathcal{D}(\partial_z) \partial_z^2 w^j(z). \quad (27)
\end{aligned}$$

Отличающиеся от принятых в [1] множители $h^{-1/2}$ и h^{-1} при главных членах выбраны в согласии с условием нормировки (10). Начальные члены представлены в явном виде, а остальные можно найти в [6, гл. 4 и 5], статье [6] или в любой другой публикации по технической или математической теориям тонких упругих тел. Кроме того, операторы $\mathcal{W}_{(0)}^i$, $i = 1, 2$, дифференцируют компоненты w_3^0 и w_1^0 , w_2^0 соответственно $2+i$ и $1+i$ раз, $\mathcal{D}(\partial_{z_j})$ — диагональная матрица $\text{diag} \{ \partial_z^2, \partial_z^2, \partial_z, \partial_z \}$, а $\mathcal{X}_{(j)}$ — матрицы-функции размером 3×4 . Наконец, d^6 — последний столбец матрицы жестких смещений, трех поступательных и трех вращательных,

$$d(x) = (d'(x), d^6(x)) = (d^\dagger(x), d^\Xi(x)) = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_1 \\ 1 & x_1 & x_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Отсутствие спектрального параметра в уравнениях (13) и (17) объясняется именно строением анзацев (23) и (25): первые тройки членов в выражениях (26) и (27) находятся безусловно, а четвертые — только при выполнении однородных уравнений (13) и (17), так как согласно представлениям (22) и (24) собственных чисел итерационные процессы не помещают величины M_k^0 и M_k^{jm} в задачи для $\mathcal{W}^1 w^0$ и $\mathcal{X} \mathcal{D} w^j$, но только в задачи для слагаемых $\mathcal{W}^2 w^0$ и $\mathcal{X}' \mathcal{D} \partial_z w^j$. Определение последних требует, чтобы функции w_3^0 и w_1^j , w_2^j удовлетворяли уравнению (12) в частных производных и обыкновенным дифференциальным уравнениям (16) четвертого порядка. Условия существования последних членов сумм (26) и (27) пояснены в статье [1].

Далее востребованы фундаментальное решение Φ_3 оператора $A_0 \Delta_y^2$ и фундаментальная матрица $\Phi^\#$ двумерной системы уравнений теории упругости с постоянными Ламе λ_0 и μ

$$\Phi_3(y^j) = (8\pi A_0)^{-1} r_j^2 \ln(1/r_j) \text{ и } \Phi^\#(y^j) = (\Phi^{\#1}(y^j), \Phi^{\#2}(y^j)) = \Phi^0 \ln r_j + \Phi^1(\varphi_j). \quad (29)$$

Здесь $(r_j, \varphi_j) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_1^1$ — система полярных координат, а симметричные (2×2) -матрицы, неособенная числовая Φ^0 и гладкая Φ^1 на единичной окружности $\mathbb{S}_1^1$ (см., например, [10]), по существу не понадобятся — последнее касается и коэффициента в первой формуле (29).

3. Пограничный слой около зон присоединения стержней к пластине. Растяжение координат $x \mapsto \xi^j = (\eta^j, \zeta) = (h^{-1}y^j, h^{-1}(z - h/2))$ и формальный переход к $h = 0$ уведут часть границы сочленения Π^h на бесконечность и превращают его в объединение Ξ^j горизонтального единичного слоя Ξ_0 и вертикального полуцилиндра Ξ_-^j с сечением ω_j и осью $(-\infty, 0] \ni \zeta$, а систему

уравнений (4) и краевые условия (6) — в задачу (11). При этом спектральный параметр исчезает, в частности, благодаря малому множителю h^2 в анзацах (22) и (24). Разрешимость этой задачи и асимптотика ее решений на бесконечности, обеспеченные результатами [11] и [12] соответственно, подробно описаны в [1, разд. 5]. Далее для реализации процедуры сращивания [13, 4] понадобятся только несколько специальных решений $\mathcal{V}_{(j)}^1, \dots, \mathcal{V}_{(j)}^6$ однородной задачи (11), а именно, помимо очевидных — жестких смещений тела Ξ^j , т. е. столбцов матрицы (28), поля смещений, порожденные продольной в цилиндре и поперечной в слое силами, изгибающими моментами в цилиндре и слое, а также парами перерезающих в цилиндре и продольных в слое сил. В указанном порядке названные решения заданы следующими пятью парами вектор-функций на прямой $\mathbb{R}$ и на плоскости $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}^1(z) &= \frac{z}{A_3^j} \mathbf{e}_{(3)} \text{ и } \mathbf{Y}^1(y) = -\Phi(y) e_{(3)}, \\ \mathbf{Z}^{1+i}(z) &= \frac{1}{A_i^j} \frac{z^3}{6} \mathbf{e}_{(i)} \text{ и } \mathbf{Y}^{1+i}(y) = \Phi(y) e_{(i)}, \quad i = 1, 2, \\ \mathbf{Z}^{3+i}(z) &= -\frac{1}{A_i^j} \frac{z^2}{2} \mathbf{e}_{(i)} \text{ и } \mathbf{Y}^{3+i}(y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y_i}(y) e_{(3)}, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (30)$$

Зафиксируем радиус R_j так, чтобы $\overline{\omega_j} \subset \mathbb{B}_{R_j}^2 = \{\eta^j : \rho_j := |\eta^j| < R_j\}$, составим блочно-диагональную матрицу $\Phi = \text{diag}\{\Phi^\#, \Phi_3\}$ из фундаментальных решений (29) и придадим упомянутым вектор-функциям $\mathcal{V}_{(j)}^q$, построенным в работе [1], следующий вид:

$$\mathcal{V}_{(j)}^q(\xi^j) = \mathbf{W}_{(j)}^1(\eta^j, \partial_\zeta)(\chi(-\zeta) \mathbf{Z}^q(\zeta)) + \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi_j(R_j^{-1} \rho^j) \mathbf{Y}^q(\eta^j)) + \widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j). \quad (31)$$

Отличие от их представлений, полученных в [1], состоит в том, что срезающие функции, порожденные эталонной срезкой $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$, для которой верны равенства $\chi(z) = 1$ при $z > 2$ и $\chi(z) = 0$ при $z < 1$, занесены под операторы $\mathbf{W}_{(0)}^1$ и $\mathbf{W}_{(j)}^1$, заданные формулами (15) и (19) при $h = 1$. Такое изменение привносит возмущения, сосредоточенные на компактном множестве, а значит, сохраняется указанное в [1] поведение на бесконечности «энергетической» составляющей

$$\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j) = \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi_j(R_j^{-1} \rho^j) \mathbf{T}_{(j)}^q(\nabla_{\eta^j}) \Phi_3(\eta^j) e_{(3)}) + \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{t}_{(j)}^q + \widetilde{\mathcal{V}}_{(j)}^q(\xi^j), \quad (32)$$

исчезающей с экспоненциальной скоростью при $\zeta \rightarrow -\infty$ вместе со своими производными. При этом $\mathbf{t}_{(j)}^q \in \mathbb{R}^6$ — столбец и $\mathbf{T}_{(j)}^q(\nabla_{\eta^j})$ — однородный дифференциальный оператор второго порядка с постоянными коэффициентами, а остаток $\widetilde{\mathcal{V}}_{(j)}^q$ удовлетворяет в слое Ξ_0 обеспеченными оценками (52)_[1] и строением оператора $\mathbf{W}_{(0)}^1(\cdot, \nabla_{\eta^j})$ неравенствам

$$\rho_j |\widehat{\mathcal{V}}_{(j)p}^q(\xi^j)| + \rho_j^2 |\varepsilon_{pq}(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q; \xi^j)| \leq c_j^q \text{ при } \rho_j \geq R_j, |\zeta| \leq 1/2 \text{ и } p, q = 1, 2, 3. \quad (33)$$

Далее потребуется еще один набор решений однородной задачи (11)

$$\mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}; \xi^j) = \mathbf{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_{\eta^j})(\chi(R_j^{-1} \rho_j) \mathcal{P}_3(\eta^j) e_{(3)}) + \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{b}_{(j)}^{\mathcal{P}} + \widehat{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathcal{P}; \xi^j), \quad (34)$$

порожденных квадратным трехчленом $\mathcal{P}_3(y)$. При этом $\mathbf{b}_{(j)}^{\mathcal{P}} \in \mathbb{R}^6$ — столбец, а остаток $\widehat{\mathbf{V}}_{(j)}(\mathcal{P})$ обладает теми же свойствами, что и остаток $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^q$ в представлении (31).

Необходимые сведения об экспоненциальных пограничных слоях около кромки Γ_0^h пластины и свободных торцов $\Gamma_j^h = \omega_j^h \times \{-\ell_j\}$ стержней будут сообщены по мере необходимости.

4. Колебания сочленения, инициированные пластиной. В анзацы (14) и (15) подставим собственную пару $\{M_k^0; w_{(k)3}^0\}$ задачи (12). Пусть пока число M_k^0 не является собственным ни одной из задач (16), (18) (см. разд. 6). При учете формулы Тейлора

$$w_{3k}^0(y) = d_{(3)}^\dagger(y^j, 0) d_{(3)}^\dagger(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_{(k)3}^0(P^j) + O(r_j^2), \quad r_j := |y^j| \rightarrow +0,$$

где $d_{(3)}^\dagger(x)$ — нижняя строка левого (3×3) -блока $d^\dagger(x)$ матрицы (28), продолжим поле $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)} w_{(k)3}^0(y)$ на стержень в главном как умноженное на $h^{-1/2}$ жесткое смещение

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}^j(\eta^j, z) &:= d_{(3)}^\dagger(y^j, z) d_{(3)}^\dagger(\nabla_{y^j}, 0)^\top w_{(k)3}^0(P^j) \\ &= w_{(k)3}^0(P^j) e_{(3)} + \sum_{i=1,2} \frac{\partial w_{(k)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) (y_i^j e_{(3)} - z e_{(i)}^j), \end{aligned} \quad (35)$$

т. е. вертикальный сдвиг и повороты вокруг осей y_1^j и y_2^j . Поле (35) удовлетворяет краевому условию (6) на $\partial\Omega_j^h \setminus \overline{\omega_j^h(0)}$, но из-за инерционного члена (правой части системы Ламе) оставляет такую невязку в дифференциальных уравнениях (4) на самом стержне Ω_j^h :

$$\begin{aligned} &(h^2 M_k^0 + O(h^3)) h^{-1/2} \mathfrak{w}^j(\eta^j, z) \\ &= h^{3/2} M_k^0 e_{(3)} w_{(k)3}^0(P^j) - h^{3/2} M_k^0 \sum_{i=1}^2 e_{(i)}^j z \frac{\partial w_{(k)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) + O(h^{5/2}). \end{aligned} \quad (36)$$

В соответствии со стандартным алгоритмом (см. [6, гл. 5, § 1] и, например, [7, гл. 16]) главный член невязки (36) компенсируется выражением

$$h^{3/2} \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (e_{(3)} w_{(k)3}^{j'}(z) + h^{-1} e_{(1)} w_{(k)1}^{j''}(z) + h^{-1} e_{(2)} w_{(k)2}^{j''}(z)) + \dots \quad (37)$$

Для функции $w_{(k)3}^{j''}$ выполнено уравнение (17) с правой частью

$$f_{(k)3}^j(z_j) = M_k^0 w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j|$$

и краевыми условиями (19) для индекса $m = 3$, а значит,

$$\begin{aligned} w_{(k)3}^{j'}(z) &= -M_k^0 (2A_3^j)^{-1} z(z + 2\ell_j) w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j| \\ &\Rightarrow A_3^j \partial_z w_{(k)3}^j(0) = F_{(k)3}^j := -M_k^0 \ell_j w_{(k)3}^0(P^j) |\omega_j|. \end{aligned} \quad (38)$$

Кроме того, функции $w_{(k)i}^{j'}$ при $i = 1, 2$ суть решения уравнений

$$A_i^j \partial_z^4 w_{(k)i}^{j''}(z) - M_k^0 |\omega_j| w_{(k)i}^{j''}(z) = -M_k^0 |\omega_j| z \partial_{y_i^j} w_{(k)3}^0(P^j), \quad z \in \Upsilon_j,$$

с краевыми условиями (18). Благодаря предположению $M_k^0 \notin \wp_i^j$ такая задача имеет единственное решение и для него верна такая формула Тейлора, служащая определением величин F_{ik}^{jq} :

$$\begin{aligned} w_{(k)i}^{j''}(z) &= \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 w_{(k)i}^{j''}}{\partial z^2}(0) + \frac{z^3}{6} \frac{\partial^3 w_{(k)i}^{j''}}{\partial z^3}(0) + O(|z|^6) \\ &=: h^2 \frac{\zeta^2}{2} F_{(k)i}^{j2} + h^3 \frac{\zeta^3}{6} F_{(k)i}^{j3} + O(h^6 |\zeta|^6). \end{aligned} \quad (39)$$

Следуя методу срачиваемых разложений (см. [13, 14; 7, гл. 2] и др.), формируем главные члены внутреннего, т. е. приемлемого вблизи множества $\overline{\omega_j^h(0)} = \partial\Omega_0^h \cap \overline{\partial\Omega_j^h}$, разложения из жесткого смещения $h^{-1/2}\mathbf{w}^j(\eta^j, z)$ и линейной комбинации указанных в разд. 3 решений задачи (11)

$$h^{5/2}F_{(k)3}^j A_3^j \mathcal{V}_{(j)}^1(\xi^j) - h^{3/2} \sum_{i=1}^2 (F_{(k)i}^{j2} A_i^j \mathcal{V}_{(j)}^{3+i}(\xi^j) - h F_{(k)i}^{j3} A_i^j \mathcal{V}_{(j)}^{1+i}(\xi^j)). \quad (40)$$

В силу формул (30) и (31) сумма (40) в цилиндре Ξ_-^j отличается от вектор-функции (37), переписанной в растянутых координатах, экспоненциально малыми слагаемыми и жестким смещением $d(\xi^j)b_{(k)}^{jh}$, которое, имея столбец коэффициентов $b_{(k)}^{jh} = O(h^{3/2})$, значительно меньше, чем аналогичный столбец у жесткого смещения $h^{-1/2}\mathbf{w}^j(\eta^j, z)$ (см. формулу (35)), подлежит учету лишь при построении младших членов асимптотики.

Разложения (35), уточненные вторыми участниками пар (30) и определением (27), показывают, что в слое Ξ_0 и, следовательно, в пластине Ω_0^h выражение (40) представимо в виде

$$\begin{aligned} & -h^{1/2}e_{(3)} \frac{F_{(k)3}^j A_3^j}{8\pi A_0} r_j^2 \ln \frac{h}{r_j} - h^{1/2} \sum_{i=1}^2 \left(e_{(3)} \frac{F_{(k)i}^{j2} A_i^j}{8\pi A_0} \frac{\partial}{\partial y_i^j} \left(r_j^2 \ln \frac{h}{r_j} \right) \right. \\ & \quad \left. - h^2 e_{(i)} A_i^j F_{(k)i}^{j3} \Phi^{\#i} \left(\frac{y^j}{h} \right) \right) + \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Забудем на время о слагаемых с множителем $\ln h$ и о последних членах суммы в (41). Процедура срачивания оставшейся части выражения (41) с внешним разложением (23) на пластине назначает следующее поведение третьей компоненты w_{3k}^{0r} поправочного члена:

$$w_{(k)3}^{0r}(y) = w_{(k)3}^{0r}(P^j) - F_{(k)3}^j A_3^j \Phi_3(y^j) - \sum_{i=1}^2 F_{(k)i}^{j2} A_i^j \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_i^j}(y^j) + O(r_j), \quad r_j \rightarrow +0. \quad (42)$$

Согласно итерационному процессу построения асимптотики решений задач в тонких областях (см., например, [7, гл. 16]) сама функция $w_{(k)3}^{0r}$ удовлетворяет уравнению в проколотой области

$$A_0 \Delta_y^2 w_{(k)3}^{0r}(y) - M_k^0 w_{(k)3}^{0r}(y) = M_k^{0r} w_{(k)3}^0(y), \quad y \in \omega_0^\bullet := \omega_0 \setminus \{P^1, \dots, P^J\}. \quad (43)$$

Кроме того, исследование [15] пограничного слоя вблизи кромки пластины Γ_0^h (см. комментарии в [1, разд. 4] и далее в разд. 8) приводит к краевым условиям

$$w_{(k)3}^{0r}(y) = 0, \quad \partial_{n^0} w_{(k)3}^{0r}(y) = \mathbf{K}(\nu) \Delta_y w_{(k)3}^0(y), \quad y \in \partial\omega_0, \quad (44)$$

где $\mathbf{K}(\nu) \geq 0$ — найденный в [15] множитель, зависящий от коэффициента Пуассона ν . Итак, полностью образована задача (43), (44), (42) для поправок M_k^{0r} и $w_{(k)3}^{0r}$ в анзацах (22) и (23).

Вернемся к анализу оставленных без внимания слагаемых из (41). Вторые члены суммы по $i = 1, 2$ учитываются при определении вектора $(w_{(k)1}^{0r}, w_{(k)2}^{0r})^\top$ продольных смещений, который находится из однозначно разрешимой плоской задачи теории упругости в проколотой области $\omega_0^\bullet$ с краевыми на границе $\partial\omega_0$

и асимптотическими в точках $P^1, \dots, P^J$ условиями, но никак не сказывается на главных членах асимптотики собственных чисел (9).

Наконец, часть слагаемых, приобретших множитель $\ln h$, в силу связей $\Phi_3(\eta^j) = h^{-2}(\Phi_3(y^j) - (8\pi A_0)^{-1} r_j^2 \ln h)$ и $\Phi^\#(\eta^j) = \Phi^\#(y^j) - \Phi^0 \ln h$ компенсируются вычитанием из суммы (40) решений (34) задачи (11)

$$-h^{3/2} \ln h \left(h \frac{F_{(k)3}^j A_3^j}{8\pi A_0} \mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}_3 e_{(3)}; \xi^j) + \sum_{i=1}^2 \left(\frac{F_{(k)}^{j2}}{4\pi} \frac{A_i^j}{A_0} \mathbf{V}_{(j)}(\mathcal{P}_i e_{(3)}; \xi^j) - h F_{(k)}^{j3} A_i^j \Phi^0 e_{(i)} \right) \right), \quad (45)$$

порожденных полиномами $\mathcal{P}_3(y) = y_1^2 + y_2^2$ и $\mathcal{P}_i(y) = y_i$. В результате члены с множителем $\ln h$ исчезают из разложения на пластине Ω_0^h , но в разложении на стержне Ω_j^h появляются «лишние» жесткие смещения $h^{3/2} \ln h d(\xi^j) b^0$, которые, как и в предыдущей ситуации, влияют только на младшие асимптотические члены.

Закончим построение асимптотики собственного числа (23) задачи (4)–(6). Пусть $\varkappa_k^0$ — кратность члена M_k^0 последовательности (14), т. е., положив $\aleph = 0$ в этом разделе, считаем, что

$$M_{k-1}^\aleph < M_k^\aleph = \dots = M_{k+\varkappa_k^\aleph-1}^\aleph < M_{k+\varkappa_k^\aleph}^\aleph. \quad (46)$$

В предшествующих формулах заменим функцию w_{3k}^0 линейными комбинациями

$$\mathbf{w}_3^{0p} = a_k^{0p} w_{(k)3}^0 + \dots + a_{k+\varkappa_k^0-1}^{0p} w_{(k+\varkappa_k^0-1)3}^0, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^0 - 1, \quad (47)$$

со столбцами коэффициентов $a^{0p} = (a_k^{0p}, \dots, a_{k+\varkappa_k^0-1}^{0p})^\top$, подчиненных соотношениям

$$(a^{\aleph q})^\top a^{\aleph l} = \delta_{l,q}, \quad l, q = k, \dots, k + \varkappa_k^\aleph - 1, \quad (48)$$

а в качестве поправок в анзаце (22) возьмем, вообще говоря, разные числа

$$M_k^{\aleph'} \leq \dots \leq M_{k+\varkappa_k^{\aleph'}-1}^{\aleph'}. \quad (49)$$

Соответственно через $\mathbf{F}_{(p)3}^j$ и $\mathbf{F}_{(p)i}^{j2}$ обозначим величины из формул (38) и (39) с заменой $w_{(k)3}^0 \mapsto \mathbf{w}_3^{0p}$.

При условии (46) у задач (43), (44), (42) для пар $\{\mathbf{w}_3^{0p}; M_p^{0'}\}$ есть $\varkappa_k^0$ условий разрешимости, которые удовлетворим посредством следующей выкладки: дифференциальное уравнение в области $\omega_0(R) = \{y \in \omega_0 : r_j > R, j = 1, \dots, J\}$ с малыми отверстиями умножим на собственные функции $w_{(q)3}^0$, $q = k, \dots, k + \varkappa_k^0 - 1$, проинтегрируем по частям при учете краевых и точечных условий и перейдем к пределу при $R \rightarrow +0$. В результате получим систему алгебраических уравнений

$$\mathcal{M}^{\aleph k} a^{\aleph p} = M_p^{\aleph'} a^{\aleph p} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^\aleph} \quad (50)$$

с $(\varkappa_k^0 \times \varkappa_k^0)$ -матрицей $\mathcal{M}^{0k} = (\mathcal{M}_{pq}^{0k})_{p,q=k}^{\varkappa_k^0}$, элементы которой согласно соотношениям (15) вычисляются так:

$$M_p^{0'} a_q^{0p} = M_p^{0'} (\mathbf{w}_3^{0p}, w_{(q)3}^0)_{\omega_0} = \lim_{R \rightarrow +0} \int_{\omega_0(R)} w_{(q)3}^0(y) (A_0 \Delta_y^2 \mathbf{w}_3^{0p}(y) - M_k^0 \mathbf{w}_3^{0p}(y)) dy$$

$$\begin{aligned}
&= A_0 \int_{\partial \omega_0} \partial_{n^0} w_3^{0p}(y) \Delta_y w_{(q)3}^0(y) ds_y \\
&+ A_0 \sum_{j=1}^J \int_{\partial \mathbb{B}_K^2(P^j)} (\partial_{r_j} w_{(q)3}^0(y) \Delta_y w_3^{0p}(y) - w_{(q)3}^0(y) \partial_{r_j} \Delta_y w_3^{0p}(y)) ds_y \\
&= A_0 K(\nu) \int_{\partial \omega_0} \Delta_y w_{(q)3}^0(y) \Delta_y w_3^{0p}(y) ds_y \\
&- \sum_{j=1}^J \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial w_{(q)3}^0}{\partial y_i^j}(P^j) \mathbf{F}_{(p)i}^{j2} + w_{(q)3}^0(P^j) \mathbf{F}_{(p)4}^j \right) =: \sum_{q=k}^{k+\varkappa_k^0-1} \mathcal{M}_{pq}^0 a_q^p. \quad (51)
\end{aligned}$$

В силу определений (38), (39) и (50) матрица $\mathcal{M}^0$ симметричная, а ее (вещественные) собственные числа (49) и соответствующие собственные векторы $a^{0k}, \dots, a^{0k+\varkappa_k^0-1} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^0}$ конкретизируют принятые анзацы для собственных пар исходной задачи (4)–(6).

5. Колебания сочленения, иницированные стержнями. Хотя собственные числа в последовательностях (20) простые, из-за множественности предельных задач (16), (18) считаем, что $M_k^{\equiv} - \varkappa_k^{\equiv}$ -кратный член упорядоченной последовательности $\wp^{\equiv} := \{M_k^{\equiv}\}_{k \in \mathbb{N}}$, объединяющей спектры (20), $j = 1, \dots, J$, $m = 1, 2$ (см. формулу (46) при $\aleph \equiv$). Понятно, что $\varkappa_k^{\equiv} \leq 2J$. Пусть еще число $M_k^{\equiv}$ не является собственным у предельной задачи (12) для пластины (см. разд. 6). В качестве внешних разложений собственных пар исходной задачи (4)–(6) возьмем выражения

$$h^{-1} \mathfrak{W}_{(j_p)}^{hq}(\eta^{j_p}, z) := \mathbf{W}_{(j_p)}^h(\eta^{j_p}, \partial_z) (a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}(z) e_{(m_p)}^j + h w_{(p)}^{j_p q'}(z)) + \dots, \quad (52)$$

$$p, q = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1.$$

Здесь $j_p \in \{1, \dots, J\}$ и $m_p \in \{1, 2\}$, причем $(j_p, m_p) \neq (j_l, m_l)$ при $p \neq l$, а индекс $i_{m_p}^j \in \mathbb{N}$ указывает номер собственного числа $M_{m_p i_p}^{j_p} = M_k^{\equiv}$ в последовательности (20) с $j = j_p$ и $m = m_p$. Кроме того, здесь и далее в статье считаем, что $a_{ls}^{\equiv q} = 0$, если $(s, l) \neq (j_p, m_p)$ для всех $p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1$, т. е. распространяем формулу (20) с поправочным членом $w_{(p)}^{j_p q'}$, вообще говоря, отличным от нуля, на все индексы $j = 1, \dots, J$. Столбцы $a^{\equiv q} \in \mathbb{R}^{2J}$, составленные из коэффициентов $a_{j_p m_p}^{\equiv q}$ и нулей, подчиним условиям ортогональности и нормировки (52). Наконец, $\aleph \equiv$ в данном разделе.

Собственные функции $w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}$ удовлетворяют соотношениям (10), и для них верна формула Тейлора (39) с коэффициентами $F_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p s} = \partial_z^s w_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p}(0)$, $s = 2, 3$. Поэтому, как и в разд. 4 (см. выражения (40) и (45)), внутренние разложения составим из решений однородной задачи в Ξ^j

$$\mathfrak{W}_{(j_p m_p)}^h(\xi^{j_p}) := -h a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}) m_p}^{j_p 2} (\gamma_{(j_p)}^{3+m_p}(\xi^{j_p}) - \ln h (4\pi A_0)^{-1} (\eta_{i_p}^j e_{(3)} - \zeta e_{(m_p)}^{j_p})). \quad (53)$$

Поворот вокруг оси $y_{3-i_p}^{j_p}$ добавлен для того, чтобы после замены $\xi^{j_p} \mapsto (y^{j_p}, \zeta)$ в пластине Ω_0^h уничтожить логарифм (аналогично разд. 4). Теперь, применив похожие на (40) и (45), но упрощенные конструкции вместе с представлениями

(31) и (34) в слое, получим, что член $h^{3/2}\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)w_3^{\equiv q}(y)$ внешнего разложения на пластине Ω_0^h является решением краевой задачи в проколотой области

$$A_0\Delta_y^2 w_3^{\equiv q}(y) = M_k^{\equiv} w_3^{\equiv q}(y), \quad y \in \omega_0^\bullet, \quad w_3^{\equiv q}(y) = 0, \quad \partial_{n_0} w_3^{\equiv q}(y) = 0, \quad y \in \partial\omega_0, \quad (54)$$

с такими асимптотическими условиями в точках P^j , $j = 1, \dots, J$:

$$w_3^{\equiv q}(y) = w_3^{\equiv q}(P^j) + \sum_{l=1}^2 y_l^j \frac{\partial w_3^{\equiv q}}{\partial y_l^j}(P^j) + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 y_m^j a_{jm}^{\equiv q} A_m^j \frac{d^2 w_{(i_{mp}^j)m}^j}{dz^2}(0) \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + O(r_j^2), \quad r_j \rightarrow +0. \quad (55)$$

Согласно соглашению в последней сумме присутствуют и нулевые коэффициенты $a_{jm}^{\equiv q}$. Еще одна группа слагаемых $h^2 a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p 3} \mathcal{V}_{(j_p)}^{i+m_p}(\xi_{j_p}^p)$ во внутреннем разложении проигнорирована потому, что они порождают сингулярности продольных смещений в пластине порядка h^2 и вызывают поперечные смещения верхних концов стержней того же порядка, т. е. влияют лишь на младшие асимптотические члены.

Поскольку по предположению $M_k^{\equiv} \notin \wp^0$, задача (54), (55) имеет единственное решение $w_3^{\equiv q}$, представимое как сумма функций $a_{j_p m_p}^{\equiv q} A_{m_p}^{j_p} F_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p 2} w_{3j_p}^{\equiv p}$, которым свойственна особенность $O(r_j |\ln r_j|)$ только в точке P^{j_p} . Подстановка этих функций в формулу Грина на «продырявленной» области $\omega_0(R)$ и предельный переход при $R \rightarrow +0$ (см. выкладку (51)) устанавливают симметричность $(\mathcal{K}_k^{\equiv} \times \mathcal{K}_k^{\equiv})$ -матрицы $\mathcal{S}^k = (\mathcal{S}_{pq}^k)_{p,q=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1}$, реализующей отображение

$$\left(\frac{d^2 w_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p}}{dz_{j_p}^2}(0) \right)_{p=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1} \mapsto \left(\frac{\partial w_{3j_p}^{\equiv p}}{\partial y_{m_p}^{j_p}}(P^{j_p}) \right)_{p=k}^{k+\mathcal{K}_k^{\equiv}-1}.$$

Поправочная пара $\{M_q^{\equiv}; w_{(p)m_p}^{j_p q'}\}$ в анзацах (24) и (52) определяется из уравнения

$$A_{m_q}^{j_q} \partial_z^4 w_{(p)m_p}^{j_p q'}(z) - M_k^{\equiv} |\omega_{j_p}| w_{(p)m_p}^{j_p q'}(z) = M_q^{\equiv} |\omega_{j_p}| a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}^{j_p})m_p}^{j_p}(z), \quad z \in \Upsilon_j,$$

и второй группы краевых условий (18) в точке $z = -\ell_j$. Эти условия считаем однородными по следующей причине: как показано в статье [16], матрицы $\mathcal{X}'_{(j)}$ и $\mathcal{X}''_{(j)}$ в представлении (27) можно зафиксировать так, чтобы пограничные слои около нижних торцов $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней Ω_j^h автоматически приобрели свойство экспоненциального затухания.

Для того чтобы найти краевые условия в точке $z = 0$, выполним сращивание внешнего и внутреннего разложений около торца $\omega_j^h(0)$ стержня Ω_j^h . С этой целью соберем присутствующие в выражении (53) и в представлении

$$h^{3/2}\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)w_3^{\equiv q}(y) = w_3^{\equiv q}(P^j)e_{(3)} + \sum_{l=1}^2 (y_l^j e_{(3)} - z e_{(l)}^j) \frac{\partial w_3^{\equiv q}}{\partial y_l^j}(P^j) + \dots \quad (56)$$

жесткие смещения порядков $1 = h^0$ и $\ln h$, записанные в «медленных» переменных (y^j, z) . Среди них нет горизонтальных поступательных смещений, а

вертикальное смещение (первое в правой части (56)) можно не принимать во внимание, так как оно появляется в первом краевом условии (19) для продольного смещения стержня $hw_3^{j_q''}$ на следующем шаге процедуры. То же можно сказать о повороте в горизонтальной плоскости, предназначенном для определения закручивания $hw_4^{j_q''}$. Интерес представляют повороты $y_{i_p}^j e_{(3)} - ze_{(i_p)}$ вокруг осей $y_{3-i_p}^j$, коэффициенты $G_{m_q}^{j_q}(\ln h)$ при которых, извлеченные из выражений (53) и (56), принимают вид

$$\begin{aligned} G_{m_p}^{j_p}(\ln h) &= \frac{\ln h}{4\pi A_0} A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) a_{j_p m_p}^{\equiv q} - \sum_{l=1}^J \sum_{r=1}^2 a_{lr}^{\equiv q} \mathbf{t}_{(l)r}^{3+r} A_r^l \frac{d^2 w_{(i_{rp})r}^l}{dz^2}(0) \\ &\quad - \sum_{s=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{S}_{qs}^k A_{m_s}^{j_s} \frac{d^2 w_{(i_{m_s s})m_s}^{j_s}}{dz^2}(0) a_{j_s m_s}^{\equiv q} \\ &=: \sum_{s=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{M}_{qs}^k(\ln h) A_{m_s}^{j_s} \frac{d^2 w_{(i_{m_s s})m_s}^{j_s}}{dz^2}(0) a_{j_s m_s}^{\equiv q}. \end{aligned}$$

При этом $\mathbf{t}_{(j)m}^l$ — элемент столбца $\mathbf{t}_{(j)m}^l$ в представлении (31) специального решения $\mathcal{V}_{(j)}^l$ задачи (11), а первая сумма в правой части истолковывается в соответствии с принятым соглашением. В случае $j := j_p = j_l$ и, например, $m_p = 1, m_l = 2$ важное равенство $\mathbf{t}_{(j)5}^4 = \mathbf{t}_{(j)4}^5$ проверяется подстановкой вектор-функций $\mathcal{V}_{(j)}^4$ и $\mathcal{V}_{(j)}^5$ в формулу Грина на усеченной области $\Xi^j = \{\xi^j : \zeta > -R, \rho_j < R\}$ и предельным переходом при $R \rightarrow +\infty$ (подробности см. в [1, разд. 5]). Таким образом, $(\varkappa_k^{\equiv} \times \varkappa_k^{\equiv})$ -матрица $\mathcal{M}^k(\ln h)$ симметрична и отрицательно определена при большом $|\ln h|$.

Поскольку $M_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p} = M_k^{\equiv}$ — простое собственное число, единственное условие разрешимости полученной задачи для $w_{(p)m_p}^{j_p q'}$ с краевыми условиями $w_{(p)m_p}^{j_p q'}(0) = 0$ и $\partial_z w_{(p)m_p}^{j_p q'}(0) = -G_{m_p}^{j_p}(\ln h)$ принимает в силу нормировки (21) собственной функции $w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}$ следующий вид:

$$\begin{aligned} M_q^{\equiv'} a_{j_q m_q}^{\equiv q} &= M_q^{\equiv'} a_{j_q m_q}^{\equiv q} |\omega_{j_q}| \|w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}\|; L^2(\Upsilon_j)\|^2 \\ &= \int_{\ell_{j_q}}^0 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q} (A_{m_q}^{j_q} \partial_z^4 w_{(q)m_q}^{j_q q'} - M_k^{\equiv} |\omega_{j_q}| w_{(q)m_q}^{j_q q'}) dz \\ &= A_{m_q}^{j_q} \frac{d^2 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}}{dz^2}(0) \frac{dw_{(q)m_q}^{j_q q'}}{dz}(0) \\ &= -A_{m_q}^{j_q} \frac{d^2 w_{(i_{m_q q})m_q}^{j_q}}{dz^2}(0) \sum_{p=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1} \mathcal{M}_{qp}(\ln h) A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{m_p p})m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) a_{j_p m_p}^{\equiv p}. \quad (57) \end{aligned}$$

При $q = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1$ соотношения (57) (без средних их частей) образуют систему алгебраических уравнений с $(\varkappa_k^{\equiv} \times \varkappa_k^{\equiv})$ -матрицей $\mathcal{M}^k(\ln h)$, окаймленной диагональной матрицей $\text{diag} \{A_{m_l}^{j_l} \partial_z^2 w_{(i_{m_l l})m_l}^{j_l}(0)\}_{l=k}^{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}$, и ее собственные числа (49) при $\aleph \equiv$ суть отрицательные вещественные аналитические функции

параметра $|\ln h|^{-1}$, причем $M_l^{\equiv'}(0) = 0$. Они и соответствующие собственные векторы $a^{\equiv k}(\ln h), \dots, a^{\equiv k + \varkappa_k^{\equiv} - 1}(\ln h)$, подчиненные соотношениям (52), конкретизируют принятые асимптотические анзацы для собственных пар задачи (4)–(6).

6. Взаимодействие колебаний пластины и стержней. Пусть $M_k^{\equiv} \in \wp^{\equiv} := \wp^0 \cup \wp^{\equiv}$ — общее собственное число задач (12) и (16), (18) с кратностями $\varkappa^0 > 0$ и $\varkappa^{\equiv} > 0$ соответственно. В этом разделе $\aleph = \mathbb{F}$. В формуле (46) для члена $M_k^{\equiv}$ последовательности $\{M_l^{\equiv}\}_{l \in \mathbb{N}}$ с кратностью $\varkappa_k^{\equiv} = \varkappa_k^0 + \varkappa_k^{\equiv}$ первыми поставим собственные числа предельных задач на стержнях. Главные члены принятых в разд. 4 и 5 анзацев для собственных функций $u_{N_{\mathbb{F}}+l}^h$ сохраняются, однако из-за разных нормирующих множителей $h^{-1/2}$ и h^{-1} изменяем анзацы для собственных чисел

$$\Lambda_{N_k^{\equiv}+p}^h = h^2 M_k^{\equiv} + h^{5/2} M_p^{\equiv'} + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1, \quad (58)$$

а также множители при асимптотических поправках в разложениях на стержнях и пластине

$$\mathbf{W}_{(j_p)}^h(\eta^{j_p}, \partial_z)(a_{j_p m_p}^{\equiv q} w_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p}(z) + h^{1/2} w_{(q)}^{j_p'}(z)) + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1, \quad (59)$$

$$\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)(e_{(3)} \mathbf{w}_3^{0p}(y) + h^{1/2} \mathbf{w}_{(p)}^{0'}(y)) + \dots, \quad p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1. \quad (60)$$

Здесь $\mathbf{w}_3^{0p}$ — линейные комбинации (47) с членами

$$a_{k+\varkappa_k^{\equiv}}^{0p} w_{3i_k^0}^0, \dots, a_{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}^{0p} w_{3i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0,$$

коэффициенты которых образуют столбцы $a^{0p} \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^0}$, причем $M_{i_k^0}^0 = \dots = M_{i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0 = M_k^{\equiv}$. Из этих столбцов и дополненных нулями столбцов $a^{\equiv p}$ коэффициентов в формулах (59) составим подлежащие определению столбцы $a^{\equiv p} = ((a^{\equiv p})^\top, (a^{0p})^\top)^\top \in \mathbb{R}^{\varkappa_k^{\equiv}}$, подчиненные соотношениям (52).

Воспроизведем с упрощениями процедуры из разд. 5 и 4. Именно, в качестве внутреннего разложения около торца $\omega_{j_p}^h(0)$ возьмем сумму жесткого смещения (см. выражение (35))

$$\mathbf{v}_{(j)}^h(y^j, z) := h^{-1/2} d_{(3)}^\dagger(y^j, z) d_{(3)}^\dagger(-\nabla_{y^j}, 0) (a_{k+\varkappa_k^{\equiv}}^{0q} w_{3i_k^0}^0(P^j) + \dots + a_{k+\varkappa_k^{\equiv}-1}^{0q} w_{3i_k^0+\varkappa_k^0-1}^0(P^j)) \quad (61)$$

и решения (53) задачи (11) с множителем

$$a_{m_p i_p}^{\equiv q} F_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p 2} = a_{m_p i_p}^{\equiv q} \partial_z^2 w_{(i_{m_p p}^{j_p}) m_p}^{j_p}(0).$$

Как и в предыдущих разделах, процедура сращивания формирует задачи для пар $\{M_p^{\equiv'}; \mathbf{w}_{(q)}^{0'}\}$ и $\{M_p^{\equiv}; w_{(q) m_p}^{j_p'}\}$ из анзацев (58)–(60). Именно, функция $\mathbf{w}_{(q)}^{0'}$ удовлетворяет уравнению в проколотой области

$$A_0 \Delta_y^2 \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) - M_p^{\equiv} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) = M_p^{\equiv'} \mathbf{w}_3^{0q}(y), \quad y \in \omega_0^\bullet = \omega_0 \setminus \{P^1, \dots, P^J\}, \quad (62)$$

краевым условиям Дирихле на границе $\partial\omega_0$ и асимптотическим условиям (см. формулу (55))

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(y) &= \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) + (y^j)^\top \nabla_{y^j} \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) \\ &+ \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \underbrace{a_{j m}^{\equiv q} A_m^j \partial_z^2 w_{(i_{j m}^j) m}^j(0)}_{\partial_z^2 w_{(i_{j m}^j) m}^j(0)} \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + O(r_j^2), \quad r_j \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (63)$$

Для функции $w_{(q)m}^{j'}$ с индексами $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$ выполнены соотношения

$$A_m^j \partial_z^4 w_{(q)m}^{j'}(z) - M_k^{\mathbb{F}} |\omega_j| w_{(q)m}^{j'}(z) = M_q^{\mathbb{F}'} |\omega_j| a_{jm}^{\mathbb{E}q} w_{(i_{mp})m}^j(z), \quad z \in \Upsilon_j, \quad (64)$$

$$w_{(q)m_p}^{j_{p'}}(0) = 0, \quad \partial_z w_{(q)m}^{j_{p'}}(0) = \sum_{l=0}^{\kappa_k^0-1} a_l^{0q} \frac{\partial w_{3i_k^0+l}^0}{\partial y_{m_p}^j}(P^{j_p}) \quad (65)$$

и вторая группа краевых условий (18) в точке $z = -\ell_j$. Если $j \neq j_p$, то уравнение (64) однородное и задача с соответствующими краевыми условиями однозначно разрешима. При остальных индексах p условия разрешимости задач (62), (63) и (64), (65) в силу соотношений (15) и (21) принимают вид системы алгебраических уравнений (50) со значком $\mathbb{N} = \mathbb{F}$ и матрицей

$$\mathcal{M}^{k\mathbb{F}} = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{\kappa_k^{\mathbb{E}} \times \kappa_k^{\mathbb{E}}} & \mathcal{B}^k \\ (\mathcal{B}^k)^{\top} & \mathbb{O}_{\kappa_k^0 \times \kappa_k^0} \end{pmatrix}, \quad \text{где } \mathcal{B}^k = (\mathcal{B}_{pq}^k)_{p=k, l=k+\kappa_k^{\mathbb{E}}-1}^{k+\kappa_k^{\mathbb{E}}-1, k+\kappa_k^{\mathbb{F}}-1},$$

$$\mathcal{B}_{pl}^k = A_{m_p}^{j_p} \frac{d^2 w_{(i_{mp})m_p}^{j_p}}{dz^2}(0) \frac{\partial w_{3i_k^0+l}^0}{\partial y_{m_p}^j}(P^{j_p}), \quad (66)$$

а $\mathbb{O}_{m \times m}$ — нулевая $m \times m$ -матрица. Матрица $\mathcal{M}^{k\mathbb{F}}$ размером $\kappa_k^{\mathbb{F}} \times \kappa_k^{\mathbb{F}}$ симметрична и ее собственные числа (49) вместе с собственными векторами $a^{\mathbb{F}k}, \dots, a^{\mathbb{F}k+\kappa_k^{\mathbb{F}}-1} \in \mathbb{R}^{\kappa_k^{\mathbb{F}}}$, подчиненными условиям (52) при $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, конкретизируют принятые асимптотические анзацы (58)–(60).

7. Утверждение о сходимостях. Неравенства (98) из первой части формулируемой далее теоремы 2 показывают, что для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдутся такие положительные c_k и h_k , что выполнены соотношения

$$\Lambda_k^h \leq c_k h^2 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}_k^h := E(u_{(k)}^h, u_{(k)}^h; \Pi^h) \leq c_k h^2 \quad \text{при } h \in (0, h_k] \quad (67)$$

для собственной пары $\{\Lambda_k^h; u_{(k)}^h\}$ задачи (7). Второе из них — следствие нормировки $\|u_{(k)}^h; L^2(\Pi^h)\| = 1$. Как и в работе [1], на стержне Ω_j^h используем представление

$$u_{(k)}^{hj}(x) = u_{(k)}^{hj\perp}(x) + d \left(y - P^j, z - \frac{h}{2} \right) \mathbf{b}_{(k)}^{hj}, \quad \text{где } \mathbf{b}_{(k)}^{hj} \in \mathbb{R}^6,$$

$$\int_{\omega_j^h(0,h)} d \left(y - P^j, z - \frac{h}{2} \right)^{\top} u_{(k)}^{hj\perp}(x) dx = 0 \in \mathbb{R}^6.$$

В [1, разд. 8] для вектор-функции u_3^{h0} и $u_{(kj)}^{h\perp}$ получены оценки

$$\|u_{(k)}^h; L^2(\Omega_0^h(0, h))\|^2 + \|u_{(k)}^{hj\perp}; L^2(\omega_j^h(-2h, h))\|^2 \leq Ch^2 \mathbf{E}_k^h \leq c_k Ch^4 \mathbf{E}_k^h, \quad (68)$$

Здесь $\omega_j^h(a, b) = \omega_j^h \times (a, b)$ и $\Omega_0^h(0, h) = \{x \in \Omega_0^h : \text{dist}(y, \partial\omega_0) < h\}$. Определим функции среднего

$$\mathbf{u}_{(k)3}^{h0}(y) = \frac{1}{\sqrt{h}} \int_0^h u_{(k)3}^{h0}(y, z) dz,$$

$$\mathbf{u}_{(k)m}^{hj}(z_j) = \frac{1}{|\omega_j^h|^{1/2}} \int_0^h u_{(k)m}^{hj\perp}(y, z) dy, \quad j = 1, \dots, J, \quad m = 1, 2. \quad (69)$$

В статье [1] при доказательстве теоремы 2 для тех же индексов j и m установлено, что

$$\begin{aligned} & \|u_{(k)m}^{h0}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|u_{(k)3}^{h0} - \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|u_{(k)3}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ & \quad + h(1 + |\ln h|)^{-2} \|u_{(k)3}^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ & \quad + (1 + |\ln h|)^{-2} \|u_{(k)m}^{hj\perp} - \mathbf{u}_{(k)m}^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_\perp \mathbf{E}_k^h \leq c_k c_\perp h^2. \end{aligned} \quad (70)$$

При обработке норм разностей приняли во внимание неравенства Пуанкаре для функций с нулевым средним. Кроме того, при помощи оценок (70)_[1] элементов столбца $\mathbf{b}_{(k)}^{hj}$ проверяем, что $(1 + |\ln h|)^{-2} \|u_m^{hj} - u_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_\perp^j h^{-1} \mathbf{E}_k^h \leq c_\perp^j c_k h$. Итак, из формулы (10) с $i = k$ выводим, что

$$\|\mathbf{u}_{3k}^{h0}; L^2(\omega_0)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|\mathbf{u}_{km}^{hj}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 = 1 + O(h(1 + |\ln h|)^2) \text{ при } h \rightarrow +0. \quad (71)$$

Более того, в упомянутой статье проверены такие соотношения для производных функций (69):

$$\begin{aligned} & \|\nabla_y \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}; L^2(\omega_0)\|^2 + \|\partial_z \mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 \\ & \leq \frac{1}{h} \int_{\omega_0} \left(\int_0^h \nabla_y u_{(k)3}^h dz \right)^2 dy + \frac{1}{|\omega_j^h|} \int_{-\ell_j}^0 \left(\int_{\omega_j^h} \partial_z u_{(k)m}^{hj\perp} dy \right)^2 dz \\ & \leq \|\nabla_y u_{(k)3}^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|\partial_{z_j} u_{(k)m}^{hj\perp}; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_k h^{-2} \mathbf{E}_k^h \leq C_k. \end{aligned} \quad (72)$$

В итоге благодаря соотношениям (67) и (71), (72) существует бесконечно малая положительная последовательность $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, вдоль которой при $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$ имеют место сходимости

$$\begin{aligned} & h^{-2} \Lambda_k^h \rightarrow \mathbf{M}_k, \text{ а также } \mathbf{u}_{(k)3}^{h0} \rightarrow \mathbf{w}_3^{0k} \text{ и } \mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp} \rightarrow \mathbf{w}_m^{jk} \\ & \text{слабо в } H^1(\omega_0) \text{ и } H^1(\Upsilon_j) \text{ соответственно, но сильно в } L^2(\omega_0) \text{ и } L^2(\Upsilon_j), \\ & \text{причем } \|\mathbf{w}_3^{0k}; L^2(\omega_0)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|\mathbf{w}_m^{jk}; L^2(\Upsilon_j)\|^2 = 1. \end{aligned} \quad (73)$$

Весовые множители в неравенствах Корна (61)_[1], (62)_[1] и (69)_[1] показывают, что конечны нормы

$$\left(\int_{\omega_0} (\mathbf{R}_{h0}^{-4} |\mathbf{u}_{(k)3}^{h0}|^2 + \mathbf{R}_{h0}^{-2} |\nabla_y \mathbf{u}_{(k)3}^{h0}|^2) dy \right)^{1/2}$$

и

$$\left(\int_{-\ell_j}^0 \left(\mathbf{R}_{hj}^{-4} |\mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}|^2 + \mathbf{R}_{hj}^{-2} \left| \frac{d\mathbf{u}_{(k)m}^{hj\perp}}{dz} \right|^2 \right) dz \right)^{1/2},$$

в которых $\mathbf{R}_{h0}(y) = h + \text{dist}(y, \partial\omega_0)$ и $\mathbf{R}_{hj}(z) = h + |z|$, а значит, функции (69) попадают в пространства Кондратьева [17], которые благодаря показателям -4

и -2 содержатся в пространствах Соболева $H^1(\omega_0)$ и $H^1(\Upsilon_j)$. Таким образом, предельный переход приводит к соотношениям

$$\int_{\omega_0} \mathbf{R}_{00}(y)^{\beta-4} |\mathbf{w}_3^{0k}(y)|^2 dy + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1-\ell_j}^2 \int_0^0 \mathbf{R}_{0j}(z)^{\beta-4} |\mathbf{w}_m^{jk}(z)|^2 dz \leq C_k \quad \forall \beta > 0. \quad (74)$$

Весовой показатель увеличен для обеспечения компактности вложения пространства Кондратьева в весовой класс Лебега (см. [17] и, например, [7, гл. 4; 18, гл. 8]). При наличии гладкости у функций $\mathbf{w}_3^{0k}$ и $\mathbf{w}_m^{jk}$ (см. ниже) формула (74) с малым $\beta > 0$ гарантирует для них двойные условия Дирихле на границе $\partial\omega_0$ и в точке $z = 0$ соответственно.

Теперь выберем функции $\Psi_3^9 \in C_c^\infty(\omega_0)$ и $\Psi_m^j \in C_c^\infty[-\ell_j, 0)$, считая, что Ψ^9 постоянна около каждой из точек $P^1, \dots, P^J$ (и аннулируется около контура $\partial\omega_0$). В тождество (7) подставим пробную вектор-функцию ψ^h , заданную имитирующими асимптотическими конструкциями равенствами

$$\begin{aligned} \psi^h(x) &= h^{-1/2} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) e_{(3)} \Psi_3^0(y) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ \psi^h(x) &= h^{-5/2} e_{(3)} \Psi^0(P^j) \\ &\quad + \frac{1}{|\omega_j^h|^{-1/2}} \sum_{m=1}^2 \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \Psi_m^j(y) \text{ при } x \in \Omega_j^h, \quad j = 1, \dots, J. \end{aligned}$$

Благодаря свойствам ингредиентов вектор-функция ψ^h бесконечно дифференцируема в $\overline{\Pi^h}$ при малых $h > 0$ и выполнены условия Дирихле (5), а значит, формула Грина приводит к равенству

$$\begin{aligned} 0 &= E(u_{(k)}^h, \psi^h; \Pi^h) - \Lambda_k^h(u_{(k)}^h, \psi^h)_{\Pi^h} \\ &= (u_{(k)}^h, L(\nabla_x) \psi^h - \Lambda_k^h \psi^h)_{\Pi^h} + (u_{(k)}^h, B(\cdot, \nabla_x) \psi^h)_{\partial\Pi^h \setminus \Gamma_0^h}. \end{aligned}$$

Строение определенных равенствами (26) и (27) дифференциальных операторов $\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y)$ и $\mathbf{W}_{(j)}^h(\cdot, \partial_z)$ обеспечивает соотношения (подробности см. в [6, гл. 4 и 5] и [1])

$$\begin{aligned} L(\nabla_x) \psi^h(x) &= F^{h0}(x), \quad F_3^{h0}(x) = h^{-1/2} A_0 \Delta_y^2 \Psi^0(y) + O(h^{1/2}), \\ F_m^{h0}(x) &= O(h^{-1/2}) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ L(\nabla_x) \psi^h(x) &= F^{hj}(x), \quad F_m^{hj}(x) = |\omega_j^h|^{-3/2} A_m^j \partial_z^4 \Psi^j(z) + O(1), \\ F_3^{hj}(x) &= O(h^{-1}) \text{ при } x \in \Omega_j^h. \\ \Lambda_k^h \psi_3^h(x) &= h^{-1/2} (h^{-2} \Lambda_k^h) \Psi_3^0(y) + O(h^{1/2}), \quad \Lambda_k^h \psi_m^h(x) = O(h^{1/2} \Lambda_k^h) \text{ при } x \in \Omega_0^h, \\ \Lambda_k^h \psi_m^h(x) &= (h^{-2} \Lambda_k^h) (|\omega_j^h|^{-1/2} \Psi_m^j(z) + h^{-1/2} \Psi_3^0(P^j)) + O(h^{1/2}), \\ \Lambda_k^h \psi_3^h(x) &= O(h^{1/2} \Lambda_k^h) \text{ при } x \in \Omega_j^h. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу сходимостей (73) и простых оценок первых двух слагаемых в (70) осуществляем предельный переход при помощи определений (69) и получаем, что

$$\begin{aligned} (u_{(k)}^h, L(\nabla_x) \psi^h - \Lambda_k^h \psi^h)_{\Pi^h} &\rightarrow (\mathbf{w}_3^{k0}, A_0 \Delta_y^2 \Psi_3^0 - \mathbf{M}_k \Psi_3^0)_{\omega_0} \\ &\quad + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 (\mathbf{w}_m^{kj}, A_m^j \partial_z^4 \Psi_m^j - |\omega_j| \mathbf{M}_k \Psi_m^j)_{\Upsilon_j}. \quad (75) \end{aligned}$$

Более того, оценки производных смещений $u_{(k)m}^h$ и $u_{(k)3}^{hj\perp}$ из формул (61)_[1], (62)_[1] и (69)_[1] вместе со следовыми неравенствами показывают, что

$$(u_{(k)}^h, B\psi^h)_{\partial\Pi^h \setminus \Gamma_0^h} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow +0.$$

Таким образом, правое выражение из высказывания (75) обращается в нуль и превращается в интегральное тождество, обслуживающее задачи (12) и (16), (18), причем наборы разрешенных пробных функций суть плотные множества в пространствах $H_0^2(\omega_0)$ и $\{v_m^j \in H^2(-\ell_j, 0) : v_m^j(0) = \partial_z v_m^j(0) = 0\}$ соответственно. В итоге теоремы о поднятии гладкости решений эллиптических краевых задач (см. [4, гл. 2], а также²⁾, например, [18, теорема 8.3.3]) показывают, что функции $\mathbf{w}_3^{k0}$ и $\mathbf{w}_m^{kj}$ попадают в пространства $C^\infty(\overline{\omega_0})$ и $C^\infty[-\ell_j, 0]$, согласно формуле (74) аннулируются на границе $\partial\omega_0$ и в точке $z = 0$ вместе со своими производными и удовлетворяют упомянутым предельным задачам со спектральным параметром $\mathbf{M}_k$. Последняя формула в высказывании (73) приводит к нужному утверждению.

Теорема 1. *Предельные переходы (73) определяют собственную пару хотя бы одной из предельных задач (12) или (16), (18), $j = 1, \dots, J$ и $m = 1, 2$.*

8. Теорема об асимптотике собственных чисел. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^h := H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3$ введем скалярное произведение (8) и положительный, симметричный и непрерывный, а значит, самосопряженный оператор $\mathcal{T}^h$ при помощи тождества

$$\langle \mathcal{T}^h u^h, \psi^h \rangle_h = (u^h, \psi^h)_{\Pi^h} \quad \forall u^h, \psi^h \in H_0^1(\Pi^h; \Gamma_0^h)^3. \quad (76)$$

К тому же оператор $\mathcal{T}^h$ компактный и, следовательно, по теоремам 10.1.5 и 10.2.1 в [19] его дискретный спектр $\wp^h$ образует положительную монотонную бесконечно малую последовательность собственных чисел, составленную при учете их кратностей,

$$\tau_1^h \geq \tau_2^h \geq \tau_3^h \geq \dots \geq \tau_k^h \geq \dots \rightarrow +0. \quad (77)$$

В силу определения (76) вариационная постановка (7) задачи (4)–(6) эквивалентна уравнению $\mathcal{T}^h u^h = \tau^h u^h$ в $\mathcal{H}^h$, а члены последовательностей (77) и (9) связаны соотношением $\tau_k^h = (\Lambda_k^h)^{-1}$.

Далее понадобится лемма о «почти собственных» числах и векторах, являющаяся прямым следствием спектрального разложения резольвенты (см. первоисточник [20] и [19, гл. 6]).

Лемма 1. *Пусть вектор-функция $U^h \in \mathcal{H}^h$ и число $T^h \in \mathbb{R}_+$ удовлетворяют требованиям*

$$\|U^h; \mathcal{H}^h\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^h U^h - T^h U^h; \mathcal{H}^h\| =: \epsilon^h \in [0, T^h).$$

Тогда найдется член $\tau_{\mathbb{N}}^h$ последовательности (77), для которого $|\tau_{\mathbb{N}}^h - T^h| \leq \epsilon^h$. Более того, при любом $\epsilon_*^h \in (\epsilon^h, T^h)$ существует такой столбец

$$\mathcal{C}^h = (\mathcal{C}_{\mathcal{N}^h}^h, \dots, \mathcal{C}_{\mathcal{N}^h + \mathcal{K}^h - 1}^h)^\top \in \mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h},$$

²⁾Границу $\partial\omega_0$ и точку $z = 0$ интерпретируем как ребра с размерностями 1 и 0. Возможны и иные ссылки.

что

$$\left\| U^h - \sum_{p=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1} \mathcal{C}_p^h \mathcal{U}_p^h; \mathcal{H}^h \right\| \leq 2 \frac{\epsilon^h}{\epsilon_*^h}, \quad \sum_{p=\mathcal{N}^h}^{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1} |\mathcal{C}_p^h|^2 = 1, \quad (78)$$

где $\mathcal{U}_{\mathcal{N}^h}^h, \dots, \mathcal{U}_{\mathcal{N}^h+\mathcal{K}^h-1}^h$ — собственные векторы оператора $\mathcal{T}^h$, отвечающие его собственным числам из замкнутого сегмента $[T^h - \epsilon_*^h, T^h + \epsilon_*^h]$ и удовлетворяющие условиям $\langle \mathcal{U}_p^h, \mathcal{U}_q^h \rangle_h = \delta_{p,q}$.

Ближайшая цель — соорудить «почти собственные» числа M_q^h и векторы $U_{(q)}^h$ для оператора $\mathcal{T}^h$ и оценить вычисленную по ним величину ϵ_q^h из леммы 1. Выберем собственное число $M_k^{\mathbb{F}}$ в объединенной последовательности $\{M_l^{\mathbb{F}}\}_{l \in \mathbb{N}}$ с кратностями $\mathfrak{K}_k^0$ и $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}$, причем в отличие от разд. 6 не исключаем случаи $\mathfrak{K}_k^0 = 0$ или $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} = 0$. В качестве «почти собственных» чисел возьмем выражения

$$T_q^h = h^{-2} (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'})^{-1}, \quad q = k, \dots, k + \mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} - 1, \quad (79)$$

где $M_q^{\mathbb{F}'}$ — собственные числа (49), $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, матрицы $\mathcal{M}^{k\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}}$ размером $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}} \times \mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}$, заданной формулами (66). Если же $\mathfrak{K}_k^{\mathbb{N}} = 0$ при $\mathbb{N} = 0$ или $\mathbb{N} = \mathbb{F}$, то сама матрица и ее собственные числа считаются нулевыми, так как предельные задачи соответственно на стержнях или пластине оказываются однозначно разрешимыми, а поправочные члены $O(h^{3/2})$ в представлениях (22) и (24) — нулевыми.

Конструкция соответствующих «почти собственных» векторов $U_{(k)}^h, \dots, U_{(k+\mathfrak{K}_k^{\mathbb{F}}-1)}^h$ непомерно громоздкая, поскольку включает в себя разнородные пограничные слои, возникающие около кромки Γ_0^h пластины и внешних торцов $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней, а также степенных — наиболее сложных для обработки — пограничных слоев в зонах присоединения стержней к пластине, которым и уделим основное внимание. Подчеркнем, что первые пограничные слои уже неоднократно изучались во многих публикациях (см. статьи [15, 21–23] и др., а также [7, гл. 16]).

Для образования «почти собственных» векторов введем гладкие срезающие функции

$$\mathfrak{r}_0^j \in C_c^\infty(\omega_0), \quad \mathfrak{r}_0^j(y) = 1 \text{ в фиксированной окрестности точки } P^j \\ \text{и } \mathfrak{r}_0^j \mathfrak{r}_0^l = 0 \text{ при } j \neq l,$$

$$\mathfrak{r}_j^h(y) = 1 \text{ при } r_j < R_j h \text{ и } \mathfrak{r}_j^h(y) = 0 \text{ при } r_j > 2R_j h, \quad \mathfrak{X}_j^h(z) = 1 - \chi(-\zeta), \\ \mathfrak{r}_j^0(z) = 1 \text{ при } z > -\ell_j/3 \text{ и } \mathfrak{r}_j^0(y) = 0 \text{ при } z < -2\ell_j/3, \quad (80)$$

$$\mathfrak{r}_0^h(y) = 1 \text{ при } n > -h \text{ и } \mathfrak{r}_0^h(y) = 1 \text{ при } -n < 2h, \quad \mathfrak{r}_0^0 \in C_c^\infty(\mathfrak{D}_d), \quad \mathfrak{r}_0^0 = 0 \text{ в } \mathfrak{D}_{d/2},$$

$$\mathfrak{X}^h(y) = (1 - \mathfrak{r}_1^h(y)) \times \dots \times (1 - \mathfrak{r}_j^h(y)), \quad \mathfrak{X}_0^h(y) = (1 - \mathfrak{r}_0^h(y)) \mathfrak{X}^h(y).$$

При этом (n, s) — криволинейные координаты в d -окрестности $\mathfrak{D}_d$ контура $\partial\omega_0$, n — ориентированное расстояние до контура, $n < 0$ в $\Omega \cap \mathfrak{D}_d$, s — длина дуги на нем, а $e_{(n)}$ и $e_{(s)}$ — орты осей. Удобно считать, что $\mathfrak{r}_0^h(y) = \chi(R_j^{-1} \rho_j)$ (см. формулу (31)).

В дополнение к «почти собственному» числу (79) положим

$$U_{(q)}^h = \|u_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} u_{(q)}^h,$$

причем сужение вектор-функции $\mathbf{u}_{(q)}^h$ на пластину Ω_0^h определим так:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(q)}^{h0}(x) = & \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) \left(\mathfrak{X}^h(y) \mathbf{w}_3^{0q}(y) e_{(3)} + h^{1/2} \mathfrak{X}_0^h(y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0'q}(y) e_{(3)} \right. \\ & + h \mathfrak{X}^h(y) \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) e_{(3)} + \sum_{j=1}^J \mathfrak{r}_j^h(y) (\mathfrak{l}_{(q)}^0(y^j) e_{(3)} \\ & + h^{1/2} \mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j) e_{(3)}) + h \mathfrak{r}_0^0(y) (\mathbf{K}_n^q(\nu) e_{(n)} + \mathbf{K}_z^q(\nu) e_{(3)}) \Big) \\ & - h^{5/2} \mathfrak{r}_0^h(y) \mathscr{W}_{(0)}^1(\zeta, \nabla_y) (\mathbf{w}_3^{0q}(y) e_{(3)}) + h^{3/2} \mathfrak{r}_0^0(y) \tilde{\mathbf{v}}^\#(h^{-1}n, \zeta, s) \\ & + h \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \mathfrak{r}_0^j(y) \left(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}(\xi^j) + \ln h \frac{1}{4\pi A_0} (\eta_i^j e_3 - \zeta e_{(i)}^j)^2 \right). \quad (81) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{w}_3^{0q}$ и $\mathbf{w}_{(q)3}^{0'q}$ — функции, построенные в разд. 6, а

$$\mathfrak{l}_{(q)}^0(y^j) = \mathbf{w}_3^{0q}(P^j) + y_1^j \partial_{y_1} \mathbf{w}_3^{0q}(P^j) + y_2^j \partial_{y_2} \mathbf{w}_3^{0q}(P^j)$$

и $\mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j)$ — их линейные части, порождающие жесткие смещения $\mathfrak{d}_{(q)}(y^j, z)$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}'_{(q)}(y^j, z) &:= h^{1/2} \mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y) (\mathfrak{l}_{(q)}^{0'}(y^j) e_{(3)}) \\ &= \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j) e_{(3)} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathbf{w}_{(q)3}^{0'}(P^j)}{\partial y_i^j} (y_i^j e_{(3)} - \left(z - \frac{h}{2}\right) e_{(i)}^j). \end{aligned}$$

Представлению (63) сингулярного решения задачи Дирихле для уравнения (62) придадим вид

$$\mathbf{w}_{(q)3}^{0'q}(y) = \mathfrak{l}'_q(y^j) + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \frac{\partial \Phi_3}{\partial y_m^j}(y^j) + \tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0'j}(y), \quad \tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0'j}(y) = O(r_j^2), \quad (82)$$

где b_i^j — коэффициент, выделенный в формуле (63) фигурной скобкой снизу, причем по соглашению $b_i^j = 0$, если $j \neq j_p$ и $m \neq m_p$ при всех $p = k, \dots, k + \varkappa_k^{\equiv} - 1$. Кроме того, в формулу (81) помещен экспоненциально затухающий при удалении от Γ_0^h остаток $\tilde{\mathbf{v}}_{(q)}^\#$ в разложении

$$\mathbf{v}_{(q)}^\#(h^{-1}n, \zeta, s) = \mathbf{K}_n^q(\nu) e_{(n)} + \mathbf{K}_z^q(\nu) e_{(3)} + \tilde{\mathbf{v}}_{(q)}^{\#m}(h^{-1}n, \zeta, s)$$

пограничного слоя около кромки пластины, построенного в [15] и подробно описанного в [1, разд. 4]. Функция $\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet} \in H^2(\omega_0) \cap C^\infty(\overline{\omega_0} \setminus \{P^1, \dots, P^J\})$ — решение следующей краевой задачи с точечными условиями, корректной ввиду теоремы Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости:

$$\begin{aligned} \Delta_y^2 \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) &= - \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 b_m^j \Delta_y^2 \mathbf{T}_{(j)}^{3+m}(\nabla_{\eta^j})(\mathfrak{r}_0^j(y) \Phi_3(\eta^j)) \\ &=: f_0^\bullet(y) + f_1^\bullet(y) \ln h, \quad y \in \omega_0^\bullet, \quad (83) \end{aligned}$$

$$\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = 0, \quad \partial_n \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = \mathbf{K}(\nu) \Delta_y w_{3k}^0(y), \quad \mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(P^j) = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

Наконец, в последней сумме из (81) присутствует составляющая $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{i+3}$ разложения (31) решения однородной задачи (11) в Ξ^j , которую также поместим

в сужение «почти собственного» вектора $\mathbf{u}_{(q)}^h$ на стержни Ω_j^h , $j = 1, \dots, J$, а именно,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(q)}^{hj}(x) = & \sum_{m=1}^2 a_{jm}^{\equiv q} \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \left(\mathfrak{X}_j^h(z) \left(w_{(q)m}^j(z) e_{(m)} \right. \right. \\ & \left. \left. + h^{1/2} \left(w_{(q)m}^{j'}(z) - z \frac{\partial \mathbf{w}_3^{0q}}{\partial y_m}(P^j) \right) e_{(m)} \right) \right) \\ & + h \sum_{m=1}^2 (\mathfrak{r}_j^0(z) (\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j) - \chi(-\zeta) d(\xi^j) \mathbf{t}_{(j)}^{3+m}) \\ & + h \chi(-\zeta) \mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) (\mathfrak{r}_j^0(z) (d'(0, h^{-1}z) \mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} + d^6(h^{-1}y^j, 0) \mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}) \\ & + h^{-1/2} \mathfrak{d}_j^h(y^j, z) + h^{1/2} \mathfrak{d}_j'(y^j, z)). \quad (84) \end{aligned}$$

Принято соглашение о коэффициентах $a_{jm}^{\equiv q}$ из разд. 5, использовано первое разбиение (28) матрицы d , а $\mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} \in \mathbb{R}^5$ — укороченный столбец $\mathbf{t}_{(j)}^{3+m} \in \mathbb{R}^6$ (отщипили нижний элемент $\mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}$).

Теперь в согласии с определениями (79) и (8), (76) преобразуем величину ϵ_q^h из леммы 1:

$$\begin{aligned} \epsilon_q^h = & \|\mathcal{T}^h U_{(q)}^h - T_q^h U_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\| = \sup |\langle \mathcal{T}^h U_{(q)}^h - T_q^h U_{(q)}^h, \psi^h \rangle_h| \\ & = h^{-2} (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'})^{-1} \|\mathbf{u}_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} \\ & \times \sup |E(\mathbf{u}_{(q)}^h, \psi^h; \Pi^h) - h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) (\mathbf{u}_{(q)}^h, \psi^h)_{\Pi^h}|. \quad (85) \end{aligned}$$

Супремум вычисляется по единичной сфере в $\mathcal{H}^h$, т. е.

$$\|\psi^h; \mathcal{H}^h\|^2 = E^h(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) = 1.$$

Выражение между последними знаками модуля представим как сумму $I_0^h(\psi^h) + I_1^h(\psi^h) + \dots + I_J^h(\psi^h)$ и начнем рассмотрение с наиболее сложно устроенного первого слагаемого.

Все срезки перенесем от слагаемых из (81) к пробной вектор-функции ψ^h . Сомножитель $1 - \mathfrak{r}_0^h$ у срезки $\mathfrak{X}_0^h$ (см. последнюю формулу (80)) имеется у слагаемого $h^{1/2} \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}$ и при ее переносе возникают коммутаторы на трехмерном тонком «кольце» $\Omega_0^h(h) = \{x \in \overline{\Omega_0^h} : h \leq |n| \leq 2h\}$ объемом $\text{mes}_3 \Omega_0^h(h) = O(h^2)$, модули которых мажорируются суммой интегралов

$$\begin{aligned} & ch^{1/2} \sum_{l=0}^3 h^{l-1/2} \sum_{k=0}^{1+l} \int_{\Omega_0^h(h)} |\nabla_y^{l+1-k} \mathfrak{r}_0^h(y)| |\nabla_y^k \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}(y)| (|\varepsilon(\psi^h; x)| + h^{-1} |\psi^h(x)|) dx \\ & \leq C (\text{mes}_3 \Omega_0^h(h))^{1/2} \sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-1} \max_{n \in [-2h, -h]} |n|^{(2-k)+} \\ & \quad \times (\|\varepsilon(\psi^h; L^2(\Omega_0^h))\| + h^{-1} \|\psi^h; L^2(\Omega_0^h(h))\|), \quad (86) \end{aligned}$$

каждый из которых не превосходит $c_{lk} h^2 (1 + |\ln h|)$ по следующим причинам. Производные порядка $1 + l$, приходящие из оператора $\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)$ и тензора напряжений, имеют множитель $h^{l-1/2}$, а дифференцирование распределено между $\mathfrak{r}_0^h$ и $\mathbf{w}_{(q)3}^{0r}$, причем в первом случае возникает множитель h^{k-1-l} , а во втором — $c_k |n|^{(2-k)+}$ благодаря равенствам $\mathbf{w}_{(q)3}^{0r} = \partial_n \mathbf{w}_{(q)3}^{0r} = 0$ на $\partial\omega_0$ (здесь

$t_+ = (t + |t|)/2$ — положительная часть числа $t \in \mathbb{R}$). Наконец, согласно неравенству Корна (71)_[1] на множествах $\mathbb{T}_j^h = \{x \in \Pi^h : z > -2h, r_j < 2R_j h\} \supset \Omega_0^h(h)$ выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \|\psi_p^h; L^2(\mathbb{T}_j^h)\| &\leq c_j h^{1-\delta_{p,3}} (1 + |\ln h|) E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) \\ &\leq c_j h^{1-\delta_{p,3}} (1 + |\ln h|), \quad p = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (87)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Далее станет понятно, что порядок $h^2(1 + |\ln h|)$ мажоранты для выражения (88) оптимален. Если и функцию $\mathbf{w}_3^{0q}$ умножить на срезку $1 - \mathfrak{x}_0^h$ (она отсутствует у $\mathfrak{X}^h$; см. список (80)), то оценивание коммутаторов породило бы недопустимо большую мажоранту $ch^{3/2}$. Именно поэтому в конструкцию (81) был введен пограничный слой, который согласно [15] обеспечивает искомую погрешность $O(h^2)$. Функция $h^{5/2}\mathfrak{x}_0^h \mathcal{W}^1(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}$, вычитенная опять-таки для выполнения условия (5), не нуждается в поправке типа пограничного слоя, так как ее норма в пространстве $\mathcal{H}^h$ равна $O(h^{5/2})$ благодаря формулам $\text{supp}|\nabla_y \mathfrak{x}_0^h| \subset \Omega_0^h(h)$ и $\text{mes}_3 \Omega_0^h(h) = O(h^2)$.

Теперь обработаем коммутаторы, появляющиеся вследствие переноса срезов $\mathfrak{x}_j^h$, для которых носители производных принадлежат множеству $\Omega_j^h(h) = \{x \in \Omega_0^h; h \leq R_j^{-1}r_j \leq 2h\} \subset \mathbb{T}_j^h$ объемом $O(h^3)$. Около точек P^j введем величины $\tilde{\mathbf{w}}_3^{0qj}(y) = \mathbf{w}_3^{0q}(y) - \mathbf{l}_q^0(y^j) = O(r_j^2)$ и $\tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0j}(y)$ из формулы (82). Интегралы, содержащие первую из них и коммутаторы со срезкой $\mathfrak{x}_j^h$, не превосходят

$$\begin{aligned} c \int_{\Omega_j^h(h)} &\left(\sum_{l=0}^3 h^{l-1/2} \sum_{k=0}^{1+l} |\nabla_y^{l+1-k} \mathfrak{x}_j^h(y)| |\nabla_y^k \tilde{\mathbf{w}}_3^{0q}(y)| |\varepsilon(\psi^h; x)| \right. \\ &\quad \left. + |\sigma_{mp}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\zeta, \nabla_y)(\mathbf{w}_3^{0q}(y)e_{(3)}))| |\nabla_y \mathfrak{x}_j^h(y)| |\psi^h(x)| \right) dx \\ &\leq c_j (\text{mes}_3 \Omega_j^h(h))^{1/2} \left(\sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-3/2} \max_{r_j/R_j \in [h, 2h]} r_j^{(2-k)_+} + h^{3/2} h^{-1} (1 + |\ln h|) \right) \\ &\leq C_j h^2 (1 + |\ln h|). \end{aligned} \quad (88)$$

Пояснение: сначала вынесли срезку «из-под напряжений»

$$\sigma_{mp}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y)(\mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)})),$$

которые согласно формулам (27) равны $O(h^{3/2})$, а затем занесли ее «вовнутрь деформаций» $\varepsilon_{mp}(\psi^h)$ и применили неравенства (87). Для функции $\tilde{\mathbf{w}}_{(q)3}^{0j}(y)$ подобные действия приводят к оценке с мажорантой $C_j h^{5/2}(1 + |\ln h|)$, а для решения задачи (83) благодаря соотношениям $\mathbf{w}_{(q)3}^{h\bullet}(y) = O(r_j)$ и присутствию параметров h и $\ln h$ — к оценке с той же мажорантой, что и в (88).

Разберемся со слагаемыми, оставшимися в выражении $I_0^h(\psi^h)$ после переноса срезов. Начнем с суммы $\mathfrak{J}_h^{00}(\psi^h) + \mathfrak{J}_h^{0r}(\psi^h) + \mathfrak{J}_h^{0''}(\psi^h)$ скалярных произведений

$$\begin{aligned} &E_0(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h; \Omega_0^h) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &+ h^{1/2} (E_0(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h; \Omega_0^h) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &- h^2 M_q^{\mathbb{F}'}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q}e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h}) - h^3 M_q^{\mathbb{F}'}(\mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_{(q)3}^{0r}e_{(3)}, \mathfrak{X}_0^h \psi^h)_{\Omega_0^h}, \end{aligned} \quad (89)$$

где $\Sigma_{\pm}^h$ — основания пластины Ω_0^h , а $B^{\pm}(\nabla_x)$ — операторы краевых условий Неймана на них. Благодаря наличию срезок возможно интегрирование по частям. В частности,

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_h^0(\psi^h) &= ((L(\nabla_x) - h^2 M_k^{\mp}) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q} e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} \\ &\quad + \sum_{\pm} (B^{\pm}(\nabla_x) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \nabla_y) \mathbf{w}_3^{0q} e_{(3)}, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Sigma_{\pm}^h} \\ &=: (\mathfrak{F}^h, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Omega_0^h} + \sum_{\pm} (\mathfrak{G}_{\pm}^h, \mathfrak{X}^h \psi^h)_{\Sigma_{\pm}^h}, \end{aligned} \quad (90)$$

и согласно процедуре понижения размерностей (см., например, [6, гл. 4])

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_3^h(y, \zeta) &= h^{1/2} \mathfrak{F}_3^0(y, \zeta) + O(h^{5/2}), \quad \mathfrak{G}_{\pm 3}^h(y) = h^{3/2} \mathfrak{G}_{\pm 3}^0(y, \zeta) + O(h^{7/2}), \\ \mathfrak{F}_m^h(y, \zeta) &= O(h^{3/2}), \quad \mathfrak{G}_{\pm m}^h(y) = O(h^{5/2}), \\ \int_{-1/2}^{1/2} \mathfrak{F}_3^0(y, \zeta) d\zeta + \sum_{\pm} \mathfrak{G}_{\pm m}^h(y) &= 0, \quad y \in \omega_0, \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (91)$$

Обеспеченная неравенством Корна (61)_[1] (см. также, например, [5, § 2]) оценка

$$\begin{aligned} h^2 \|\psi_3^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \|\psi_m^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + h^3 \|\psi_3^h; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 + h \|\psi_m^h; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 \\ \leq C_0 E(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h) \end{aligned} \quad (92)$$

показывает, что модули всех скалярных произведений в (90), кроме содержащих $\mathfrak{F}_3^0$ и $\mathfrak{G}_{\pm 3}^0$, приобретают мажоранту ch^2 . В силу последнего условия ортогональности из (91), выполненного для собственной пары $\{M_k^{\mp}; \mathbf{w}_3^0\}$ задачи (12), в сумме скалярных произведений с указанными ингредиентами возможна замена пробной функции ψ_3^h разностью $\psi_3^{h\perp} = \psi_3^h - \bar{\psi}_3^h$, где $\bar{\psi}_3^h$ — среднее ψ_3^h по отрезку $(0, h) \ni z$. В итоге неравенство Пуанкаре приводит к оценке

$$\begin{aligned} h^{-2} \|\psi_3^{h\perp}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + h^{-1} \|\psi_3^{h\perp}; L^2(\Sigma_{\pm}^h)\|^2 \\ \leq c \|\partial_z \psi_3^{h\perp}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 = c \|\partial \psi_3^h; L^2(\Omega_0^h)\|^2 \leq CE(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h), \end{aligned}$$

благодаря которой рассматриваемая сумма получает ту же мажоранту. Нужная оценка для выражения $\mathfrak{I}''(\psi^h)$ сомнений не вызывает. Для обработки выражения $\mathfrak{I}'(\psi^h)$ требуются только что проведенные выкладки при учете уравнения (62), суженного на подобласть $\text{supp } \mathfrak{X}_0^h \subset \omega_0^{\bullet}$, причем замена $\mathfrak{X}^h \mapsto \mathfrak{X}_0^h$ (см. определения (80)) вызывает малую погрешность $O(h^4)$.

Наконец, рассмотрим разности $E(\mathfrak{r}_0^j \widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}, \psi^h; \Omega_0^h) - E(\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}, \mathfrak{r}_0^j \psi^h; \Omega_0^h)$. Коммутаторы, включающие срезку $\mathfrak{r}_0^j$ и первое слагаемое из представления (32), уже учтены в правой части уравнения из задачи (83), а интегралы от тех, в которых присутствует затухающий остаток $\widehat{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}$, согласно неравенствам (33)

оцениваются следующей величиной:

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta_j^h(R_0)} (|\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j)| |\varepsilon(\psi^h(x))| + |\varepsilon(\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{3+m}(\xi^j))| |\psi^h(x)|) dx \\ & \leq c_j \left(\left(\int_{\Theta_j^h(R_0)} \rho_j^{-2} dx \right)^{1/2} E(\psi^h, \psi^h; \Omega_0^h)^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{\Theta_j^h(R_0)} \rho_j^{-4} dx \right)^{1/2} \|\psi^h; L^2(\Omega_0^h)\| \right) \leq Ch^{5/2}. \end{aligned}$$

Здесь $\Theta_j^h(R_0) = \{x \in \Omega_0^h : R_0^{-1}r_j \in (1, 2), z \in (0, h)\}$ — трехмерное кольцо объемом $O(h)$, а в конце цепочки использовано неравенство (92).

После переноса срезок жесткие смещения (включая последние слагаемые из суммы (84)) аннулируются в функционале энергии, т. е. в нем неучтенными остаются слагаемые, которые после перехода к растянутым координатам помещаем как слагаемое $\mathbf{F}_0^{m+3}(\Psi^h)$ в правую часть интегрального тождества, обслуживающего (неоднородную) задачу (11) для $\hat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}$ (см. [1, разд. 5]):

$$E(\hat{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}, \Psi^h; \Xi^j) = \mathbf{F}_0^{m+3}(\Psi^h) + \mathbf{F}_j^{m+3}(\Psi^h). \quad (93)$$

Пробная вектор-функция $\Xi^j \ni \xi^j \mapsto \Psi^h(\xi^j) = \psi^h(P^j + h\xi^j)\mathbf{r}_0^j(h\eta^j)\mathbf{r}_j^0(h\zeta)$ имеет компактный носитель, а последнее слагаемое возникло в результате переноса срезки $\mathfrak{X}_j^h$ от члена $\frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0)$ формулы Тейлора для главного члена в первой сумме из (84). Оставшийся интеграл, включающий коммутатор с названными срезкой и членом, не превосходит суммы таких величин:

$$\begin{aligned} & c \int_{\mathbf{Q}_j^h} \left(\sum_{l=0}^3 h^{l-1} \sum_{k=0}^{1+l} |\partial_z^{l+1-k} \mathfrak{X}_j^h(z)| \left| \partial_z^k \left(w_{(q)m}^j(z) - \frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0) \right) \right| |\varepsilon(\psi^h; x)| \right. \\ & \quad \left. + \left| \sigma \left(\mathbf{W}_{(j)}^h(\eta^j, \partial_z) \left(w_{(q)m}^j(z) - \frac{1}{2}z^2\partial_z^2 w_{(q)m}^j(0) \right) \right) \right| |\psi^h(x) \partial_z \mathfrak{X}_j^h(z)| \right) dx \\ & \leq c_j (\text{mes}_3 \mathbf{Q}_j^h)^{1/2} \left(\sum_{l=0}^3 \sum_{k=0}^{1+l} h^{k-2} \max_{h \leq |z| \leq 2h} |z|^{(3-k)+} + h^2 h^{-1} (1 + |\ln h|) \right) \\ & \leq C_j h^{5/2} (1 + |\ln h|). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{Q}_j^h = \omega_j^h \times (-2h, -h) \subset \mathbb{T}_j^j$ — цилиндр, на котором компоненты тензора напряжений $\sigma(\mathbf{W}_{(j)}^h(\dots); \eta^j, z)$ суть $O(h|z|)$. Кроме того, использованы неравенства (87) и $|\partial_z \mathfrak{X}_j^h(z)| \leq ch^{-1}$. При обработке аналогичных интегралов, содержащих слагаемое $h^{1/2}(\dots)$ порядка $|z|^2$ из членов первой суммы в (84), приобретаем коэффициент $h^{1/2}$, но теряем множитель h при обработке компонент тензора напряжений. В итоге все-таки получаем приемлемую мажоранту $C_j h^2 (1 + |\ln h|)$.

В связи с интегральным тождеством (93) укажем, что интегралы, появляющиеся вследствие коммутирования со срезкой $\mathfrak{r}_j^0$, оцениваются суммой экспоненциально малой величины, порожденной остатком $\tilde{\mathcal{V}}_{(j)}^{m+3}$ в представлении

(32), и величины, не превосходящей

$$\begin{aligned} ch \|\sigma(\mathbf{W}_{(j)}^h(\mathbf{x}_j^0(d'\mathbf{t}_{(j)}^{3+m'} + d^6\mathbf{t}_{(j)6}^{3+m}); L^2(\Omega_j^h))\| \|\varepsilon(\psi^h); L^2(\Omega_j^h)\| \\ \leq ch(\text{mes}_3 \Omega_j^h)^{1/2} h E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h) = Ch^3. \end{aligned}$$

Еще одно следствие (87) неравенства Корна (71)_[1]

$$\begin{aligned} h^{-\delta_{3,l}} \|\psi_l^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ + \|\nabla_y \psi_l^h; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \leq c_j h^{-2} (1 + |\ln h|) E(\psi^h, \psi^h; \Pi^h), \quad l = 1, 2, 3, \quad (94) \end{aligned}$$

обеспечивает мажоранту

$$c_{mj} h h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) h \|\psi^h; L^2(\Omega_j^h)\| \leq C_{mj} h^{5/2} (1 + |\ln h|)$$

для сопутствующих скалярных произведений, содержащих спектральный параметр.

Для последней пары жестких смещений в формуле (84) модуль суммы

$$\begin{aligned} h^{-1/2} h^2 (M_k^{\mathbb{F}} + h^{1/2} M_q^{\mathbb{F}'}) (\mathbf{x}_j^h(\mathfrak{d}_j^h + h\mathfrak{d}_j'), \psi^h)_{\Pi^h} \\ + h^{5/2} |\omega_j| \sum_{m=1}^2 M_k^{\mathbb{F}} \frac{\partial \mathbf{w}_3^{0q}}{\partial y_m^j}(P^j) \int_{-\ell_j}^0 (1 - \chi(-\zeta)) z \bar{\psi}_m^h(z) dz \quad (95) \end{aligned}$$

не превосходит привычной величины $ch^2(1 + |\ln h|)$. При этом $\bar{\psi}_m^h(z)$ — среднее функции $\psi_m^h(\cdot, z)$ по сечению $\omega_j^h \ni y^j$, для которого верна формула

$$\|\psi_m^h - \bar{\psi}_m^h; L^2(\Omega_j^h)\| \leq c_j h \|\nabla_{y^j} \psi_m^h; L^2(\Omega_j^h)\|.$$

Помимо оценок (87), позволяющих поместить под интеграл срезку $1 - \chi(-\zeta)$, мажоранта получена при учете неравенства (94).

В итоге осталось необработанным выражение с пробной вектор-функцией $\mathfrak{X}_j^h \psi^h$, обращающейся в нуль на торце $\omega_j^h(0)$, после интегрирования по частям аналогично формулам (89), (90) представим его как сумму скалярных произведений $\mathfrak{I}_h^{j0}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{j'}(\psi^h) + \mathfrak{I}_h^{j''}(\psi^h)$. Укажем и оценим первое из них:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_h^{j0}(\psi^h) &= \sum_m^2 a_{jm}^{\mathbb{F}q} ((L(\nabla_x) - h^2 M_k^{\mathbb{F}}) \mathbf{W}_{(q)j}^h(\cdot, \partial_z) w_{(q)m}^j e_{(m)}^j, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Omega_j^h} \\ &\quad + (B^{\pm}(\nabla_x) \mathbf{W}_{(0)}^h(\cdot, \partial_z) w_{(q)m}^j e_{(m)}^j, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Sigma_j^h} + \dots \\ &=: (\mathfrak{F}^{jh}, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Omega_j^h} + \sum_{\pm} (\mathfrak{G}^{hj}, \mathfrak{X}_j^h \psi^h)_{\Sigma_j^h} + \dots \end{aligned}$$

Здесь $\Sigma_j^h = \partial \omega_j^h \times (-\ell_j, 0)$ — боковая поверхность стержня, а многоточием обозначены интегралы по торцу $\omega_j^h(-\ell_j)$, которые в силу второго из краевых условий (18) и простых следствий неравенства Корна (71)_[1] мажорируются величиной $c_j h^2 (1 + |\ln h|)$. Процедура понижения размерностей (см., например, [6, гл. 5]) предоставляет вполне аналогичные (91) соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_m^{hj}(\eta^j, z) &= h \mathfrak{F}_m^{0j}(\eta^j, z) + O(h^3), \quad \mathfrak{G}_m^{hj}(\eta^j, z) = h^2 \mathfrak{G}_m^{0j}(\eta^j, z) + O(h^4), \quad m = 1, 2, \\ \mathfrak{F}_3^{hj}(\eta^j, z) &= O(h^2), \quad \mathfrak{G}_3^{hj}(\eta^j, z) = O(h^3), \end{aligned}$$

$$\int_{\omega_j} \mathfrak{F}_m^{0j}(\eta^j, z) d\eta^j + \int_{\partial\omega_j} \mathfrak{G}_m^{0j}(\eta^j, z) ds_{\eta^j} = 0, \quad z \in \Upsilon_j.$$

Уравнение (16) для собственной пары $\{M_k^\mp; w_{(q)m}^j\}$ и последние условия ортогональности позволяют сделать замену $\psi_m^h \mapsto \psi_m^h - \overline{\psi}_m^h$ и применить неравенство Пуанкаре на малом сечении ω_j^h , дающее дополнительный множитель h . В результате оценка первой нормы из неравенства (94) при $l = 1, 2$ обеспечивает нужную мажоранту $c_{jm}h^2(1 + |\ln h|)$. Остальная часть рассматриваемого выражения обрабатывается при помощи того же неравенства, например,

$$\begin{aligned} |(\mathfrak{F}_3^{hj}, \mathfrak{F}_3^h)_{\Omega_j^h} + (\mathfrak{G}_3^{hj}, \mathfrak{G}_3^h)_{\Sigma_j^h}| &\leq c_j (h^2 (\text{mes}_3 \Omega_j^h)^{1/2} \|\psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\| \\ &\quad + h^3 (\text{mes}_2 \Sigma_j^h)^{1/2} h^{-1/2} (\|\psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\| + h \|\nabla_{y^j} \psi_3^h; L^2(\Omega_j^h)\|)) \\ &\leq C_j h^{5/2} (1 + |\ln h| + h^2). \end{aligned}$$

Аналогично поступаем со слагаемыми $\mathfrak{F}_h^{j'}(\psi^h)$ и $\mathfrak{F}_h^{j''}(\psi^h)$, причем из первого нужно еще вычесть второй член суммы (95) для того, чтобы сформировать уравнение (64) для пары $\{M_q^{\mp'}; w_{(q)m}^{j'}\}$.

Просмотрев полученные оценки, видим, что величина (85) не превосходит $c_q \|\mathbf{u}_{(q)}^h; \mathcal{H}^h\|^{-1} (1 + |\ln h|)$. Кроме того, повторив с серьезными упрощениями проведенные выкладки, находим, что

$$|\langle \mathbf{u}_q^h, \mathbf{u}_p^h \rangle_h - h^2 M_k^\mp \delta_{p,q}| \leq c_{qp} h^{5/2} (1 + |\ln h|), \quad q, p = k, \dots, k + \varkappa_- - 1, \quad (96)$$

и, следовательно, $\|\mathbf{u}_q^h; \mathcal{H}^h\| \geq h M_k^\mp / 2$ при малом $h > 0$. В итоге лемма 1 предоставляет собственные числа $\tau_{N_q^h}^h$ оператора $\mathcal{T}^h$ и $\Lambda_{N_q^h}^h = 1/\tau_{N_q^h}^h$ задачи (4)–(6), для которых верны соотношения

$$|\tau_{N_q^h}^h - T_q^h| \leq C_q h^{-1} (1 + |\ln h|),$$

$$|\Lambda_{N_q^h}^h - h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})| \leq C_q h (1 + |\ln h|) (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'}) \Lambda_{N_q^h}^h.$$

Таким образом,

$$\Lambda_{N_q^h}^h \leq 2h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})$$

в случае $C_q h (1 + |\ln h|) (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'}) \leq 1/2$. В итоге при подходящих положительных c_q и h_q получаем финальную формулу

$$|\Lambda_{N_q^h}^h - h^2 (M_k^\mp + h^{1/2} M_q^{\mp'})| \leq c_q h^3 (1 + |\ln h|) \text{ при } h \in (0, h_q]. \quad (97)$$

Теорема 2. Для каждого $q \in \mathbb{N}$ найдутся такие $c_q > 0$ и $h_k > 0$, что член Λ_q^h последовательности (9) удовлетворяет соотношению (97), в котором $N_q^h = q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Осталось по обычной схеме проверить два факта: во-первых, отображение $q \mapsto N_q^h$ можно сделать мономорфизмом и, во-вторых, $N_q^h = q$ в формуле (97).

В принятых ограничениях на собственное число $M_k^\mp$ построены «почти собственные» векторы $U_{(k)}^h, \dots, U_{(k+\varkappa_k^\mp-1)}^h$, т. е. вторая часть леммы 1, в которой $\epsilon_{k*}^h = \theta^{-1} h^{-1} (1 + |\ln h|) \max\{C_k, \dots, C_{k+\varkappa_k^\mp-1}\}$ в согласии с формулами (78) и $\theta \in (0, 1)$, предоставляет нормированные столбцы $\mathcal{C}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{C}_{(k+\varkappa_k^\mp-1)}^h \in$

$\mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h}$ (выравниваем их высоты добавлением нулевых элементов). Пусть еще $\mathcal{S}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{S}_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$ — соответствующие линейные комбинации ортонормированных собственных векторов $\mathcal{U}_{N_k^h}^h, \dots, \mathcal{U}_{(N_k^h+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$. Первая формула (78) и соотношения (96), которые применяем дважды: сначала для вычисления асимптотик норм, а затем и скалярных произведений, показывают, что

$$\begin{aligned} |(\mathcal{C}_{(q)}^h)^\top \mathcal{C}_{(p)}^h - \delta_{p,q}| &= |\langle \mathcal{S}_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h \rangle_h - \delta_{p,q}| \\ &\leq |\langle \mathcal{S}_{(p)}^h - U_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h \rangle_h| + |\langle U_{(p)}^h, \mathcal{S}_{(q)}^h - U_{(q)}^h \rangle_h| \\ &\quad + |\langle U_{(p)}^h, U_{(q)}^h \rangle_h - \delta_{p,q}| \leq 2\theta + 2\theta + h^{1/2}(1 + |\ln h|)c_{pq}. \end{aligned}$$

Итак, при малых $h > 0$ и $\theta > 0$ столбцы $\mathcal{C}_{(k)}^h, \dots, \mathcal{C}_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$ «почти ортонормированы» в пространстве $\mathbb{R}^{\mathcal{K}_k^h}$, а значит, $\mathcal{K}_k^h \geq \mathcal{K}_k^{\mathbb{F}}$, в чем и требовалось убедиться, так как дополнительный множитель θ^{-1} в неравенстве для разности $\tau_{N_q^h}^h - T_q^h$ не сказывается на выводе формулы (96). Следовательно, $q \leq N_q^h$ и верна оценка

$$\Lambda_q^h \leq \Lambda_{N_q^h}^h \leq C_k(h) := h^2 M_k^{\mathbb{F}} + h^{5/2} M_q^{\mathbb{F}'} + c_q h^3 (1 + |\ln h|), \quad (98)$$

которая обеспечивает соотношение (67) из разд. 7. Теперь можно применить теорему 1. В предположении $N_q^h > q$ обнаруживаем бесконечно малую положительную последовательность $\{\mathbf{h}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, для которой существуют собственные числа $\Lambda_{\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m}}^{\mathbf{h}_m} \leq C_k(h)$ задачи (4)–(6) с соответствующими собственными вектор-функциями $u_{(\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m})}^{\mathbf{h}_m}$, ортогональными в пространстве $L^2(\Pi^h)$ собственным вектор-функциям $u_{(1)}^h, \dots, u_{(k+\mathcal{K}_k^h-1)}^h$. В результате сходимости (73) гарантируют, что, во-первых, $\lim h^{-2} \Lambda_{\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m}}^{\mathbf{h}_m} \leq M_k^{\mathbb{F}}$ и, во-вторых, пределы функций (69), найденных по $u_{(\mathbf{n}_m^{\mathbf{h}_m})}^{\mathbf{h}_m}$, образуют собственную вектор-функцию совокупности предельных задач (12) и (16), (18), ортогональную в $L^2(\omega_0) \times L^2(\Upsilon_1) \times \dots \times L^2(\Upsilon_J)$ собственным вектор-функциям этих же задач в количестве $k + \mathcal{K}_k^{\mathbb{F}} - 1$ штук, отвечающих собственным числам из полуинтервала $(0, M_k^{\mathbb{F}}]$. Этот вывод противоречит способу построения упорядоченной последовательности $\wp^{\mathbb{F}} = \{M_k^{\mathbb{F}}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Теорема доказана.

Вторая часть леммы 1 также дает возможность обосновать асимптотику собственных вектор-функций задачи (4)–(6). Используемые конструкции (81) и (84) включают много «лишних» членов, введенных по технической надобности. Кроме того, произвол в выборе собственных векторов матрицы (66) усложняет формулировку соответствующих асимптотических формул. Поэтому ограничимся рассмотрением простого собственного числа $M_k^{\mathbb{F}} \in \wp^{\mathbb{F}}$ и формулировки оценки «слабой» нормы, позволяющей исключить все пограничные слои.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{K}_k^{\mathbb{F}} = 1$ и $(a_k^0, a_k^{11}, a_k^{12}, \dots, a_k^{J1}, a_k^{J2})^\top$ — дополненный по соглашению из разд. 5 нулями и нормированный в $\mathbb{R}^{1+2J}$ собственный вектор матрицы (66), отвечающий ее собственному числу $M_k^{\mathbb{F}}$. При некоторых положительных величинах $c_k^{\mathbb{F}}$ и $h_k^{\mathbb{F}}$ собственная вектор-функция $u_{(k)}^h$ задачи (4)–(6), подчиненная условию (10), удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} \|u_{(k)}^{h0} - a_k^0 w_{(i_k)3}^0 e_{(3)}; L^2(\Omega_0^h)\|^2 + \sum_{j=1}^J \sum_{m=1}^2 \|u_{(k)}^{hj} - a_k^{jm} w_{(i_{jm})m}^j e_{(m)}^j; L^2(\Omega_j^h)\|^2 \\ \leq c_k^{\mathbb{F}} h (1 + |\ln h|)^2 \quad \text{при } h \in (0, h_k^{\mathbb{F}}]. \end{aligned}$$

9. Три замечания. 1°. МОДИФИКАЦИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. Если условие Дирихле (5) распространить и на нижние торцы $\omega_j^h(-\ell_j)$ стержней, то предельная задача на области ω_0 изменится: из-за жесткости стержней на продольное растяжение/сжатие к соотношениям (12) добавятся корректные ввиду теоремы Соболева о вложении $H^2 \subset C$ на плоскости точечные условия

$$w_3^0(P^j) = 0, \quad j = 1, \dots, J.$$

При этом приходится пересмотреть все асимптотические конструкции и процедуру их обоснования. Иные модификации нужны в случае переноса краевых условий Неймана (6) на кромку Γ_0^h пластины. Такие способы крепления будут разобраны автором в последующих публикациях.

В случае анизотропных или неоднородных материалов пластины и стержней асимптотические анзацы (22) и (24) для собственных чисел сохраняются, однако предельные задачи в области ω_0 и на отрезках Υ_j не распадаются на независимые пару (12), (13) и четверку (16), (17) скалярных уравнений. В частности, изгибные колебания пластины и стержней сопровождаются их продольными деформациями. Это обстоятельство приводит к существенным изменениям в строении внутренних асимптотических разложений собственных вектор-функций около торцов $\omega_j^h(0)$, $j = 1, \dots, J$. Хотя спектральные задачи для анизотропных, даже композитных одиночных пластин и стержней с переменными сечениями исследованы в полном объеме (см., например, [6, гл. 7]), их сочленения вида Π^h никогда не анализировались.

2° ЗАОСТРЕНИЕ КОНЦОВ СТЕРЖНЕЙ. Как упоминалось в [1, разд. 9], конические заострения ($H_j(-\ell_j) = 0$ и $\partial_{z_j} H_j(-\ell_j) > 0$) нижних концов стержней

$$\Omega_j^h = \{x : h^{-1}H(z)^{-1}y^j \in \omega_j, \quad z \in (-\ell_j, 0]\}, \quad (99)$$

где $H_j \in C^\infty(\overline{\Upsilon_j})$, $H_j(z) > 0$ при $z \in (-\ell_j, 0]$, не оказывают существенного влияния на асимптотический анализ статической задачи теории упругости для сочленения Π^h . Этот вывод сохраняется и для спектральной задачи (4)–(6), так как вырождение коэффициентов дифференциальных уравнений (16) сопровождается появлением дополнительных множителей $O(|\ell_j + z|^2)$ при спектральном параметре в их правых частях. Вместе с тем, если хотя бы одно заострение пикообразное, т. е. $H_j(-\ell_j) = \partial_{z_j} H_j(-\ell_j) = 0$ для профиля (99), то возникает эффект «черной дыры» для упругих волн [24, 25] и, в частности, перестает быть верным неравенство Корна в области Ω^h , а спектр задачи теории упругости приобретает непрерывную компоненту (см. [26, 27, 16]). Даже в случае затупленного острия согласно [25] собственные числа задачи для упругого тела Π^h приобретают «странное поведение» при $h \rightarrow +0$.

3°. МЛАДШИЕ ЧЛЕНЫ АСИМПТОТИКИ. В разд. 4 и 5 были продемонстрированы приемы построения младших членов асимптотик собственных чисел и вектор-функций задачи (4)–(6), относящиеся к частным случаям, но описывающие всевозможные осложнения — разнообразные пограничные слои, аналитическую зависимость поправок от параметра $|\ln h|^{-1}$ и пр.

В [6, гл. 7] в формулах для собственных чисел задач об одиночных пластинах и стержнях получены оценки остатков, в которых явно выделена зависимость мажорант от кратности предельного собственного числа $M_k^\mp$ и его номера k в последовательности $\wp^\mp$. Этот результат показывает, что привлечение младших членов чрезвычайно увеличивает мажоранту и одновременно уменьшают зону действия асимптотических формул, так что использование более

одного поправочного члена вряд ли целесообразно в исследованиях, имеющих прикладную направленность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров С. А. Деформация тонкой упругой зажатой по краю пластины с прикрепленными стержнями. 1. Статическая задача // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 3. С. 481–505.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.
3. Фикера Г. Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.
4. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.
5. Назаров С. А. Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 63, № 1. С. 37–110.
6. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. книга, 2002.
7. Mazja W. G., Nasarow S. A., Plamenewski B. A. Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten. Berlin: Akademie-Verl., 1991.
8. Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia É. Coques elastiques mines. Propriétés asymptotiques. Paris: Masson, 1997.
9. Panassenko G. Multi-scale modelling for structures and composites. Dordrecht: Springer, 2005.
10. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
11. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для системы теории упругости в неограниченных областях. Неравенство Корна // Успехи мат. наук. 1988. Т. 43, № 5. С. 55–98.
12. Назаров С. А. Асимптотические разложения на бесконечности решений задачи теории упругости в слое // Тр. Моск. мат. о-ва. 1998. Т. 60. С. 3–97.
13. Ван Дайк М. Д. Методы возмущений в механике жидкостей. М.: Мир, 1967.
14. Ильин А. М. Согласование асимптотических разложений решений краевых задач. М.: Наука, 1989.
15. Зорин И. С., Назаров С. А. Краевой эффект при изгибе тонкой трехмерной пластины // Прикл. математика и механика. 1989. Т. 53, № 4. С. 642–650.
16. Kozlov V., Nazarov S. A. On the spectrum of an elastic solid with cusps // Adv. Differ. Equ. 2016. V. 21, N 9/10. P. 887–944.
17. Кондратьев В. А. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с конечными или угловыми точками // Тр. Моск. мат. о-ва. 1963. Т. 16. С. 219–292.
18. Nazarov S. A., Plamenevsky B. A. Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1994.
19. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
20. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
21. Dauge M., Gruais I. Edge layers in thin elastic plates // Comput. Methods Appl. Mechanics Engin. 1998. V. 157, N 3-4. P. 335–347.
22. Panassenko G. P. Asymptotic analysis of bar systems. 1 // Russian J. Math. Phys. 1994. V. 2, N 3. P. 325–352.
23. Назаров С. А. Асимптотика решений спектральной задачи теории упругости для трехмерного тела с тонкой стяжкой // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 2. С. 345–364.
24. Миронов М. А. Распространение изгибной волны в пластине, толщина которой плавно уменьшается до нуля на конечном интервале // Акустический журн. 1988. Т. 34, № 3. С. 546–547.
25. Назаров С. А. Концентрация собственных частот упругих тел с затупленным пикообразным заострением // Акустический журн. 2022. Т. 68, № 3. С. 249–260.
26. Назаров С. А. О спектре задачи теории упругости для тела пикообразной формы // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1105–1127.

27. Бахарев Ф. Л., Назаров С. А. О структуре спектра задачи теории упругости для тела со сверхострым пиком // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 4. С. 746–756.

Поступила в редакцию 14 ноября 2024 г.

После доработки 14 ноября 2024 г.

Принята к публикации 25 февраля 2025 г.

Назаров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-8552-1264)

Институт Проблем Машиноведения РАН,

лаборатория «Математические методы механики материала»,

ВО, Большой проспект, 61, Санкт-Петербург 199178

srgnazarov@yahoo.co.uk, srgnazarov108@gmail.com

УДК 517.951

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ МЕДЛЕННОГО РОСТА

А. Л. Павлов

Аннотация. Приведены достаточные условия существования решения задачи Коши для линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами соболевского типа второго порядка в пространстве обобщенных функций медленного роста.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.412

Ключевые слова: задача Коши, уравнение соболевского типа, обобщенная функция медленного роста, мультипликатор.

1. Введение

В полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0\}$ рассматривается задача Коши

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_1(D_x)\partial_t u + P_0(D_x)u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (1.1)$$

$$u|_{t=0} = g_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = g_1, \quad (1.2)$$

где $D_{x_j} = \frac{1}{i}\partial_{x_j}$, $D_x = (D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$, $P_k(\sigma)$, $k = 0, 1, 2$, — многочлены с комплексными коэффициентами.

Уравнение (1.1) является уравнением соболевского типа. Так часто называют уравнения, не разрешенные относительно старшей производной по выделенной переменной. Исследование задач для таких уравнений начато С. Л. Соболевым в [1].

Будем предполагать, что уравнение (1.1) удовлетворяет условию Петровского в виде

$$P_2(\sigma)\lambda^2(\sigma) + P_1(\sigma)\lambda(\sigma) + P_0(\sigma) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \lambda(\sigma) \leq \gamma. \quad (P)$$

В настоящее время имеется огромное количество работ, посвященных задачам для уравнений и систем уравнений соболевского типа. Это связано с их широким использованием в математическом моделировании многих процессов. В монографиях [2, 3] представлены обширные перечни работ по данному направлению. Однако работ, в которых рассматривалось решение задачи Коши для уравнений соболевского типа в классах растущих функций, сравнительно немного (см. [4–9] и литературу в них).

Под *решением* задачи (1.1), (1.2) часто понимают обобщенную функцию $u(t)$, зависящую гладко от параметра t и удовлетворяющую (1.1), (1.2) в обобщенном смысле. Такие решения будем называть *сильными обобщенными решениями*. *Слабым обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2) называют обобщенную функцию u , сосредоточенную в полупространстве $\overline{\mathbb{R}_+^{n+1}}$ и удовлетворяющую уравнению

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_1(D_x)\partial_t u + P_0(D_x)u = P_2(D_x)g_0 \otimes \delta'_t + (P_2(D_x)g_1 + P_1(D_x)g_0) \otimes \delta_t, \quad (1.3)$$

где δ_t — дельта-функция на $\mathbb{R}$ [6]. Нетрудно убедиться, что всякое сильное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) является слабым обобщенным решением.

В настоящей работе рассматриваются сильные обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) со значениями в пространстве медленно растущих обобщенных функций $S'(\mathbb{R}^n)$.

После применения преобразования Фурье по пространственным переменным задача (1.1), (1.2) принимает вид

$$P_2(\sigma)\partial_t^2 \hat{u} + P_1(\sigma)\partial_t \hat{u}(t) + P_0(\sigma)\hat{u}(t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (1.4)$$

$$\hat{u}(t)|_{t=0} = \hat{g}_0, \quad \left. \frac{d\hat{u}(t)}{dt} \right|_{t=0} = \hat{g}_1, \quad (1.5)$$

где $\hat{f}$ — преобразование Фурье обобщенной функции f .

В силу изоморфности рассматриваемых в работе пространств относительно преобразования Фурье задачи (1.1), (1.2) и (1.4), (1.5) эквивалентны. В дальнейшем будет изучаться задача (1.4), (1.5).

Если выполнено условие (P) и $\hat{g}_0, \hat{g}_1$ — локально интегрируемые функции, то решением задачи (1.4), (1.5) при каждом $\sigma \notin N_2 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : P_2(\sigma) = 0\}$ является функция

$$v(\sigma, t) = \eta(t)(a_1(\sigma, t)g_0 + a_2(\sigma, t)g_1), \quad (1.6)$$

где $\eta(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $\eta(t) = 0$, если $t < 0$, $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, — решения уравнения (1.4), удовлетворяющие начальным условиям

$$a_1(\sigma, 0) = 1, \quad \frac{da_1}{dt}(\sigma, 0) = 0, \quad a_2(\sigma, 0) = 0, \quad \frac{da_2}{dt}(\sigma, 0) = 1. \quad (1.7)$$

Задача состоит в описании множества начальных данных, для которых задача (1.4), (1.5) имеет сильное обобщенное решение. Решение этой задачи может быть основано на описании подпространств пространства медленно растущих обобщенных функций, в которых функции $a_1(\sigma, t)$ и $a_2(\sigma, t)$ являются мультипликаторами, гладко зависящими от параметра t , т. е. умножение на эти функции элементов этого подпространства является непрерывным отображением этого подпространства в себя, гладко зависящим от t .

Анализ работ, посвященных разрешимости задачи Коши для уравнений, не разрешенных относительно выделенной переменной, в классах функций степенного роста, в частности, работы [7], в которой приведены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши в указанных классах функций для простейшего уравнения соболевского типа

$$(\partial_1^2 + \dots + \partial_n^2)\partial_t^2 u + (-1)^k u = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

показывает, что элементы искомого подпространства в окрестности множества N_2 могут иметь вид $P_2^k(\sigma)f$, где показатель k зависит от порядка регулярности обобщенной функции f .

В [8] этот подход реализован для уравнений вида $P_1(D_x)\partial_t u - P_0(D_x)u = 0$. Приведенное построение решения задачи Коши основано на описании мультипликаторов для подпространств обобщенных функций медленного роста. Этот аналитический аппарат используется и в настоящей работе. Он приведен без доказательства в п. 2.

В работе [9] этот подход был применен для построения решения задачи Коши в классах обобщенных функций медленного роста для уравнения

$$P_2(D_x)\partial_t^2 u + P_0(D_x)u = 0.$$

В настоящей работе полученные в [9] результаты обобщены на случай уравнения (1.1).

Главное содержание работы составляет построение решения задачи (1.4), (1.5) для начальных данных указанного вида с использованием конструкции (1.6). Это построение основано на исследовании дифференциальных свойств функций $a_j(\sigma, t)$ и $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, где $\Delta(\sigma) = P_1^2(\sigma) - 4P_0(\sigma)P_2(\sigma)$.

Функции $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы вне множества $N = N_2 \cup N_1$, где $N_1 = \{\sigma \in \mathbb{R}^n : \Delta(\sigma) = 0\}$, и их производные могут иметь степенные особенности в точках $\sigma \in N$ при выполнении условия (Р). Эти особенности можно «погасить», умножив функции $a_j(\sigma, t)$ на функцию, имеющую нули на множестве N достаточной кратности, например, на $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)$. При соответствующем выборе p и q можно обеспечить дифференциальные свойства функции $\Delta^p(\sigma)P_2^q(\sigma)a_j(\sigma, t)$, необходимые для того, чтобы на них можно было умножать обобщенные функции заданного порядка регулярности. Это позволит строить решения задачи (1.4), (1.5) по формуле (1.6) для начальных данных, которые в окрестности множества N имеют указанную структуру. Преобразование Фурье по пространственным переменным дает решение задачи Коши (1.1), (1.2) для начальных данных вида $\Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f$.

2. Функциональные пространства и мультипликаторы в них

Ниже приведены краткие сведения о тех функциональных пространствах, которые будут использованы для реализации указанной цели. Пространство медленно растущих обобщенных функций S' является пространством линейных непрерывных функционалов над основным пространством $S(\mathbb{R}^n)$, состоящим из бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечны полунормы

$$\|\varphi(x)\|_{l,k} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left[(1 + |x|)^l \sum_{|\alpha| \leq k} |D_x^\alpha \varphi(x)| \right], \quad l, k = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим семейство подпространств S' , зависящих от параметров s и l :

$$H_l^s = \left\{ f \in S' : \|f\|_l^s \equiv \left[\int (1 + |\sigma|^2)^s |\mathcal{F}_x((1 + |x|^2)^{l/2} f)|^2 d\sigma \right]^{1/2} < +\infty \right\}, \quad (2.1)$$

где $\mathcal{F}_x g$ — преобразование Фурье обобщенной функции $g \in S'$ [10]. Это двупараметрическое семейство гильбертовых пространств обладает, например, следующими замечательными свойствами:

- 1) сопряженное к пространству H_l^s изоморфно пространству H_{-l}^{-s} ;
- 2) пространства H_l^s и H_s^l двойственны относительно преобразования Фурье $\mathcal{F}_x$;
- 3) S' является индуктивным пределом семейства пространств H_l^s .

Из свойства 3 следует, что для любой обобщенной функции $g \in S'(\mathbb{R}^n)$ существуют такие числа s и l , что $g \in H_l^s$.

Пространство H_l^s можно рассматривать как пополнение пространства $S(\mathbb{R}^n)$ по указанной норме. Следовательно, пространство $S(\mathbb{R}^n)$ плотно в H_l^s .

Так как результаты будут сначала формулироваться для задачи (1.4), (1.5), полученной из исходной с помощью преобразования Фурье, для удобства изложения будем формулировать утверждения, обозначая рассматриваемые пространства символом H_s^l .

При целых неотрицательных l пространство H_0^l совпадает с пространством Соболева W_2^l , в частности, $H_0^0 = L_2$.

Через $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma, p \in \mathbb{R}$, обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений $v(t)$ замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ в гильбертово пространство H_s^l с конечной нормой

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)} \equiv \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}}_+, 0 \leq \nu \leq r} \left[(1+t)^{-p} e^{-\gamma t} \left\| \frac{d^\nu v(t)}{dt^\nu} \right\|_s^l \right].$$

Пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ банахово. Преобразование Фурье по пространственным переменным отображает изоморфно пространство $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_s^l)$ на $C_{\gamma p}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^s)$.

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию $a(\sigma)$ является линейным непрерывным отображением пространства S' в себя, т. е. функция $a(\sigma)$ является мультипликатором в пространстве S' тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ выполняются неравенства

$$|\partial^\alpha a(\sigma)| \leq c_\alpha (1 + |\sigma|)^{q_\alpha}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2)$$

где $c_\alpha > 0$, q_α — некоторые числа, зависящие от производной функции $a(\sigma)$ порядка α [10].

Теорема 2.1. Умножение на функцию $a(\sigma)$, удовлетворяющую неравенствам (2.2), является непрерывным отображением из пространства H_s^l , $s, l \in \mathbb{R}$, в пространство $H_{s-q(l)}^l$, где

$$q(l) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l)} q_\alpha, \quad \nu(l) = \begin{cases} |l|, & \text{если } l \in \mathbb{Z}, \\ [|l|] + 1, & \text{если } l \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma)g\|_{s-q(l)}^l \leq C \left(\max_{|\alpha| \leq \nu(l)} c_\alpha \right) \|g\|_s^l, \quad (2.3)$$

где $C > 0$ — некоторое число, зависящее от l, s и не зависящее от функции $a(\sigma)$.

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [8]. В нем использовались производные функции $a(\sigma)$ и их оценки до порядка $\nu(l)$. Поэтому справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1'. Умножение на функцию, удовлетворяющую неравенствам (2.2) при $|\alpha| \leq \nu(l)$, является непрерывным отображением $H_{s_1}^{l_1}$, $l_1, s_1 \in \mathbb{R}$, в пространство $H_{s_2}^{l_2}$, $l_2, s_2 \in \mathbb{R}$, в следующих случаях:

- 1) $l \geq |l_1|$, $l_2 \leq l_1$, $s_2 = s_1 - q(l_1)$;
- 2) $0 \leq l \leq l_1$, $l_2 = l$, $s_2 = s_1 - q(l)$.

Рассмотрим семейство функций $a(\sigma, t)$, непрерывно дифференцируемых по переменной σ до порядка $\nu(l)$, гладко зависящих от параметра $t \geq 0$ и при всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+$, $|\alpha| \leq \nu(l)$ и $j \in \mathbb{Z}_+$, $j \leq r + 1$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_t^\alpha \partial_t^j a(\sigma, t)| \leq c_{\alpha j} (1+t)^{p_{\alpha j}} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{q_{\alpha j}}, \quad t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

где $c_{\alpha j} > 0$, $p_{\alpha j}$, $q_{\alpha j}$ — некоторые числа, зависящие от производных функции $a(\sigma, t)$ соответствующих порядков. Функции

$$p(l, r) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l), 0 \leq j \leq r} p_{\alpha j}, \quad q(l, r) = \max_{|\alpha| \leq \nu(l), 0 \leq j \leq r+1} q_{\alpha j}$$

являются неубывающими функциями параметров l и r .

Теорема 2.2. Умножение на функцию $a(\sigma, t)$, удовлетворяющую неравенствам (2.4), является непрерывным отображением пространства H_s^l в пространство $C_{\gamma p(l, r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l, r)}^l)$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $s, l \in \mathbb{R}$, и для любой обобщенной функции $g \in H_s^l$ справедливо неравенство

$$\|a(\sigma, t)g\|_{C_{\gamma p(l, r)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_{s-q(l, r)}^l)} \leq C \|g\|_s^l, \quad (2.5)$$

где $C > 0$ — некоторое число, не зависящее от g .

Доказательство теоремы 2.2 содержится в [8].

3. Построение решения задачи Коши

Для реализации указанного во введении подхода к построению решения задачи (1.4), (1.5) рассмотрим дифференциальные свойства решений $a_1(\sigma, t)$ и $a_2(\sigma, t)$ уравнения (1.4), удовлетворяющие начальным условиям (1.7).

Множество $N = N_1 \cup N_2$ является множеством нулей дискриминанта λ — многочлена $P(\sigma, \lambda)$, $m_i = \deg P_i(\sigma)$, $m = \deg_\sigma P(\sigma, \lambda) = \max_i m_i$.

Так как при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ корни характеристического уравнения $P_2(\sigma)\lambda^2 + P_1(\sigma)\lambda + P_0(\sigma) = 0$ существуют и гладко зависят от параметра σ , то функции $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, бесконечно дифференцируемы в $(\mathbb{R}^n \setminus N) \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

Теорема 3.1. Если выполнено условие (P), то для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $r \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ справедливы неравенства

$$|\partial_t^r \partial_t^\alpha a_j(\sigma, t)| \leq C_{\alpha r} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{\mu(\alpha, r)} |\Delta(\sigma)|^{d(\alpha, r)} |P_2(\sigma)|^{b(\alpha, r)}, \quad (3.1)$$

где $C_{\alpha r} > 0$ — некоторые числа, $\mu(\alpha, r) = |\alpha|(4m + 3m_2 - 1) + mr + 3m$, $d(\alpha, r) = -|\alpha| - \frac{1}{2}$, $b(\alpha, r) = -2|\alpha| - r - 1$.

Доказательство. Из условия (P) и описания решений линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами следует, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ и $r \in \mathbb{Z}_+$ справедливы неравенства

$$|\partial_t^r \partial_t^\alpha a_j(\sigma, t)| \leq C_{\alpha r}(\sigma) (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t}, \quad t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \quad (3.2)$$

где $C_{\alpha r}(\sigma) > 0$ — некоторые функции от параметра σ .

Из неравенств (3.2) следует существование преобразования Лапласа функций $\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, которые являются голоморфными функциями в полуплоскости Π_γ . Обозначим через $Q_j(\sigma, \lambda)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $\lambda \in \Pi_\gamma$, преобразование Лапласа функции $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$: $Q_j(\sigma, \lambda) = L a_j(\sigma, t)$.

Из свойств преобразования Лапласа и определения функций $a_j(\sigma, t)$ следуют равенства

$$Q_1(\sigma, \lambda) = \frac{P_2(\sigma)\lambda + P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)}, \quad Q_2(\sigma, \lambda) = \frac{P_2(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \lambda \in \Pi_\gamma.$$

Из теоремы обращения преобразования Лапласа [11, гл. III, п. 20], примененной к решениям линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, следуют равенства

$$a_j(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j} + (2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} e^{\lambda t} d\tau, \quad (3.3)$$

где $t > 0$, $\xi > \gamma$, $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $j = 1, 2$.

Для нахождения производных функций $a_j(\sigma, t)$ по σ докажем, что для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ справедливо равенство

$$\partial^\alpha \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)}, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \operatorname{Re} \lambda > \gamma, k = 1, 2, \quad (3.4)$$

где $R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ не выше $m_k + |\alpha|(m-1)$.

Если $|\alpha| = 1$, то равенство (3.4) справедливо:

$$\partial_j \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{\partial_j P_k(\sigma) P(\sigma, \lambda) - P_k(\sigma) \partial_j P(\sigma, \lambda)}{P^2(\sigma, \lambda)}.$$

Предположим, что равенство (3.4) справедливо для всех $\beta \in \mathbb{Z}_n^+$, $|\beta| \leq l$, и $\alpha' = \alpha + \gamma_j$, $|\gamma_j| = 1$, $|\alpha| = l$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \partial^{\alpha'} \left(\frac{P_k(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) &= \partial_j \left(\frac{R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} \right) \\ &= \frac{\partial_j R_{k\alpha}(\sigma, \lambda) P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda) - (|\alpha| + 1) P^{|\alpha|}(\sigma, \lambda) \partial_j P(\sigma, \lambda) R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} \\ &= \frac{\partial_j R_{k\alpha}(\sigma, \lambda) P(\sigma, \lambda) - (|\alpha| + 1) \partial_j P(\sigma, \lambda) R_{k\alpha}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} = \frac{R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda)}{P^{|\alpha'|+1}(\sigma, \lambda)}, \end{aligned}$$

где $R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda)$ — многочлен, $\deg_\sigma R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda) \leq m_k + |\alpha|(m-1) - 1 + m = m_k + |\alpha'|(m-1)$, $\deg_\lambda R_{k\alpha'}(\sigma, \lambda) \leq 2|\alpha| + 2 = 2|\alpha'|$. Следовательно, равенство (3.4) справедливо.

Рассмотрим для произвольных $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ функции

$$h_{j\alpha}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi - i\infty}^{\xi + i\infty} \partial^\alpha \left(\frac{P_2(\sigma)\lambda^{2-j} + (2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) e^{\lambda t} d\tau,$$

где $\xi > \gamma$, $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, $t > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $j = 1, 2$.

Воспользовавшись равенством (3.4), их можно представить в таком виде:

$$h_{j\alpha}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma) \frac{P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} \times (R_{2\alpha}(\sigma, \lambda)\lambda^{2-j} + (2-j)R_{1\alpha}(\sigma, \lambda))e^{\lambda t} d\tau. \quad (3.5)$$

Если $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $\operatorname{Re} \lambda > \gamma$ и $\lambda_1(\sigma)$, $\lambda_2(\sigma)$ корни уравнения $P(\sigma, \lambda) = 0$, то справедливы неравенства

$$|\lambda - \lambda_j(\sigma)| \geq |\operatorname{Re} \lambda - \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)| = |\operatorname{Re} \lambda - \gamma + \gamma - \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma)| \geq \operatorname{Re} \lambda - \gamma, \quad j = 1, 2,$$

так как по условию (P) $\gamma - \operatorname{Re} \lambda_j(\sigma) \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda - \gamma > 0$. Следовательно,

$$\frac{|P_2(\sigma)|}{|P(\sigma, \lambda)|} \equiv \frac{1}{|\lambda - \lambda_1(\sigma)||\lambda - \lambda_2(\sigma)|} \leq \frac{1}{(\operatorname{Re} \lambda - \gamma)^2}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \gamma, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N. \quad (3.6)$$

Из неравенства (3.6) следует ограниченность по переменной $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ функции $P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)P^{-|\alpha|-1}(\sigma, \lambda)$ при $\lambda \in \Pi_\gamma$.

Так как $\deg_\lambda P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda) = 2|\alpha| + 2$ при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, подынтегральная функция в (3.5) является правильной рациональной дробью. Применение теоремы обращения преобразования Лапласа к таким дробям (см [11, гл. III, п. 2.1]) обеспечивает существование функций $h_{j\alpha}(\sigma, t)$. Дифференцируя равенство (3.3) по переменной σ , учитывая существование функций $h_{j\alpha}(\sigma, t)$ и неравенство (3.6), получим равенства

$$\partial^\alpha a_j(\sigma, t) = h_{j\alpha}(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N. \quad (3.7)$$

Чтобы оценить функции $\partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, представим равенство (3.5) в виде

$$h_{j\alpha}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma) \left[\sum_{d=0}^{2|\alpha|} A_{\alpha d}(\sigma) \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{\lambda^{d+2-j} e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} d\tau + \sum_{d=0}^{2|\alpha|} (2-j) D_{\alpha d}(\sigma) \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{\lambda^d e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} d\tau \right], \quad (3.8)$$

где $A_{\alpha d}(\sigma)$, $D_{\alpha d}(\sigma)$ — коэффициенты λ многочленов $R_{2\alpha}(\sigma, \lambda)$ и $R_{1\alpha}(\sigma, \lambda)$ соответственно, $\deg A_{\alpha d}(\sigma) \leq m_2 + |\alpha|(m-1)$, $\deg D_{\alpha d}(\sigma) \leq m_1 + |\alpha|(m-1)$.

Подынтегральные дроби в (3.8) можно разложить на простейшие дроби для $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$:

$$\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} = \frac{r_{\alpha j}(\sigma, \lambda)}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1}} + \frac{s_{\alpha j}(\sigma, \lambda)}{(\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}}, \quad (3.9)$$

где $r_{\alpha j}(\sigma, \lambda)$, $s_{\alpha j}(\sigma, \lambda)$ — многочлены по переменной λ степени не выше $|\alpha|$.

Пользуясь разложением (3.9) и свойствами обратного преобразования Лапласа рациональных дробей (см. [11, гл. III, п. 21]), имеем равенство

$$\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} = L f_{\alpha j d}(\sigma, t), \quad (3.10)$$

где

$$f_{\alpha jd}(\sigma, t) = \sum_{s=1}^2 \left\{ \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \frac{1}{(|\alpha|+1-k)!} B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) t^{|\alpha|+1-k} \right\} e^{\lambda_s(\sigma)t}, \quad (3.11)$$

$$B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s(\sigma)} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(\frac{\lambda^{d+2-j}}{(\lambda - \lambda_{3-s}(\sigma))^{|\alpha|+1}} \right).$$

Используя равенства (3.7)–(3.11), получим экспоненциальное представление функций $\partial^\alpha a_j(\sigma, t)$:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha a_j(\sigma, t) &= \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \frac{1}{(|\alpha|+1-k)!} P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma) \\ &\times (A_{\alpha d}(\sigma) ((2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma) + (j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) + (2-j)D_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) \\ &\times t^{|\alpha|+1-k} e^{\lambda_s(\sigma)t}, \quad t \geq 0, \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Дифференцируя это равенство по t и используя формулу Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t) &= \sum_{j=0}^{2|\alpha|} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \frac{1}{(|\alpha|+1-k)!} P_2^{-|\alpha|-1}(\sigma) \\ &\times (A_{\alpha d}(\sigma) ((2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma) + (j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) + (2-j)D_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) \\ &\times \sum_{\rho=0}^r b_{\rho r} \frac{d^{r-\rho} t^{|\alpha|+1-k}}{dt^{r-\rho}} (\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Чтобы оценить правую часть равенства (3.12), найдем выражение для функций $B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)$, используя равенство (3.11) и формулу Лейбница:

$$\begin{aligned} B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s(\sigma)} \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} b'_{\nu k} \frac{\theta(\lambda^{d+2-j-k+1+\nu})}{(\lambda - \lambda_{3-s}(\sigma))^{\alpha+1+\nu}} \right) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\nu=0}^{k-1} b'_{\nu k} \frac{\theta[(\lambda_s(\sigma))^{d+\nu+3-j-k}]}{(\lambda_s(\sigma) - \lambda_{3-s}(\sigma))^{|\alpha|+1+\nu}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $b'_{\nu k}$ — некоторые числа, $\theta(\lambda^p) = \begin{cases} \lambda^p, & \text{если } p \geq 0, \\ 0, & \text{если } p < 0. \end{cases}$

Используя в (3.14) равенства

$$\lambda_s(\sigma) = \frac{-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)}{2P_2(\sigma)}, \quad (\lambda_s(\sigma) - \lambda_{3-s}(\sigma)) = (-1)^s P_2^{-1}(\sigma) \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma),$$

получим новые выражения для функций $B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\nu=0}^{k-1} C_{\nu ks} \theta \left[\left(\frac{P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)}{2P_2(\sigma)} \right)^{d+\nu+3-j-k} \right] \\ &\times (P_2(\sigma))^{|\alpha|+1+\nu} (\Delta(\sigma))^{-\frac{1}{2}(|\alpha|+1+\nu)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1} C'_{\nu ks} \theta [(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(d, \nu, j, k)}] (P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha, d, \nu, j, k)} (\Delta(\sigma))^{-\frac{1}{2}(|\alpha|+1+\nu)}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $C_{\nu ks}$, $C'_{\nu ks}$ — некоторые числа,

$$\gamma(d, \nu, j, k) = d + \nu + 3 - j - k, \quad \text{если } d + \nu + 3 - j - k \geq 0,$$

$$\varphi(\alpha, d, \nu, j, k) = |\alpha| + j + k - d - 2, \quad \text{если } d + \nu + 3 - j - k \geq 0.$$

Подставив выражение $B_{\alpha jd}^{ks}(\sigma)$ из (3.15) в равенство (3.12), получим выражение для функции $\partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $t \geq 0$, удобное для оценивания:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha a_j(\sigma, t) &= (P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1} (\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \sum_{s=1}^2 \sum_{\nu=0}^{k-1} C_{\alpha k \nu s j} (P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha, d, \nu, j, k) + |\alpha|} (\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha|-\nu)} \theta[(-P_1(\sigma) \\ &+ (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(d, \nu, 1, k)}] [(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)) \\ &+ D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma)) + (j-1)A_{\alpha d}(\sigma)] t^{|\alpha|+1-k} e^{\lambda_s(\sigma)t}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как $0 \leq d \leq 2|\alpha|$, $1 \leq k \leq |\alpha|+1$, $0 \leq \nu \leq k-1$, справедливы неравенства $\varphi(\alpha, d, \nu, j, k) + |\alpha| \geq |\alpha| + 1 + 1 - 2|\alpha| - 2 + |\alpha| = 0$, если $d + \nu + 3 - j - k \geq 0$,

$$|\alpha| - \nu = (|\alpha| + 1 - k) + (k - 1 - \nu) \geq 0.$$

Следовательно, имеют место неравенства

$$|(P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha, d, \nu, j, k) + |\alpha|}| \leq C_1(1 + |\sigma|)^{\psi(\alpha, j)m_2},$$

где $\psi(\alpha, j) \leq |\alpha| + j + |\alpha| + 1 - 2 + |\alpha| = 3|\alpha| + j - 1$;

$$|(\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha|-\nu)}| \leq C_2(1 + |\sigma|)^{\frac{1}{2}|\alpha| \deg \Delta(\sigma)} \leq C_2(1 + |\sigma|)^{|\alpha|m},$$

так как $\deg \Delta(\sigma) \leq 2m$;

$$|(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(d, \nu, j, k)}| \leq C_3(1 + |\sigma|)^{\varkappa(\alpha, j)m},$$

где $\varkappa(\alpha, j) \leq (d + \nu + 3 - j - k) \max\{m_1, \frac{1}{2} \deg \Delta(\sigma)\} \leq (2|\alpha| + 2 - j)m$.

Оценим функцию $\partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $t \geq 0$, пользуясь равенством (3.16) и приведенными выше неравенствами:

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha a_j(\sigma, t)| &\leq C_{j\alpha}(1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} |P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1} |\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \sum_{\nu=0}^{k-1} (1 + |\sigma|)^{(3|\alpha|+j-1)m_2 + |\alpha|m + (2|\alpha|+2-j)m} \\ &\times [|A_{\alpha d}(\sigma)|(1 + |\sigma|)^m + |D_{\alpha d}(\sigma)|(1 + |\sigma|)^{m_2} + |A_{\alpha d}(\sigma)|]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Так как $A_{\alpha d}(\sigma)$ и $D_{\alpha d}(\sigma)$ — многочлены и справедливы неравенства

$$\deg A_{\alpha d}(\sigma) \leq m_2 + |\alpha|(m-1), \quad \deg D_{\alpha d}(\sigma) \leq m_1 + |\alpha|(m-1),$$

из неравенства (3.17) при $t \geq 0$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$ следует неравенство

$$|\partial^\alpha a_j(\sigma, t)| \leq C'_{j\alpha}(1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} |P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1} |\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} (1 + |\sigma|)^{\mu(\alpha)}, \quad (3.18)$$

где $\mu(\alpha) \leq (3|\alpha| + j - 1)m_2 + |\alpha|m + (2|\alpha| + 2 - j)m + |\alpha|(m-1) + \max\{m_2 + m, m_1 + m_2\} \leq |\alpha|(4m + 3m_2 - 1) + 3m$. Следовательно, при $r = 0$ неравенство (3.1) справедливо.

Из равенств (3.13) получим выражение для функции $\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)$, аналогичное (3.16):

$$\begin{aligned} \partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t) = & (P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1} (\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \sum_{s=1}^2 \sum_{\nu=0}^{k-1} C_{\alpha k \nu s} \\ & \times (P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha, d, \nu, j, k) + |\alpha|} (\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha| - \nu)} \theta[-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)]^{\gamma(d, \nu, j, k)} \\ & \times [(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)) + D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma)) + (j-1)A_{\alpha d}(\sigma)] \\ & \times \sum_{\rho=0}^r c_{r\rho} \frac{d^{r-\rho} t^{|\alpha|+1-k}}{dt^{r-\rho}} (\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}. \end{aligned}$$

Подставив в полученное равенство выражения для $\lambda_s(\sigma)$, используемые ранее, получим

$$\begin{aligned} \partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t) = & (P_2(\sigma))^{-2|\alpha|-1-r} (\Delta(\sigma))^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \sum_{s=1}^2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\rho=0}^r C'_{\alpha k \nu \rho} \\ & \times (P_2(\sigma))^{\varphi'(\alpha, d, \nu, j, k, \rho)} (\Delta(\sigma))^{\frac{1}{2}(|\alpha| - \nu)} \theta((-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(\alpha, d, \nu, j, k)}) \\ & \times (-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^\rho [(2-j)(A_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)) \\ & + D_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma)) + (j-1)A_{\alpha d}(\sigma)] \theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho}) e^{\lambda_s(\sigma)t}, \quad (3.19) \end{aligned}$$

где $\varphi'(\alpha, d, \nu, j, k, \rho) = \varphi(\alpha, d, \nu, j, k) + |\alpha| + r - \rho$.

Используя оценки, которые применялись при получении неравенства (3.18), получим неравенство

$$|\partial_t^r \partial^\alpha a_j(\sigma, t)| \leq C_{j\alpha r} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} |P_2(\sigma)|^{-2|\alpha|-1-r} |\Delta(\sigma)|^{-|\alpha|-\frac{1}{2}} (1+|\sigma|)^{\mu(\alpha, r)}, \quad (3.20)$$

где $\mu(\alpha, r) = |\alpha|(4m + 3m_2 - 1) + 3m + rm$. При этом использовалось то, что показатели степеней в слагаемых неотрицательны по построению.

Теорема 3.1 доказана.

Неравенства (3.20) свидетельствуют о том, что производные функций $a_j(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, могут иметь особенности на множестве, где обращается в нуль хотя бы один из многочленов $P_2(\sigma)$ и $\Delta(\sigma)$. Для устранения указанных особенностей рассмотрим функции

$$a_{j p q}(\sigma, t) = \Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) a_j(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \quad j = 1, 2, \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Теорема 3.2. Если выполнено условие (Р), то для любых $l \in \mathbb{Z}_+$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ существуют числа $p(l)$ и $q(l, k)$ такие, что функции $a_{j p q}(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, $p \geq p(l)$ и $q \geq q(l, k)$ и их производные по σ до порядка l и по t до порядка k можно продолжить по непрерывности на $\mathbb{R}^n$ и полученные функции $\partial_t^r \partial^\alpha \tilde{a}_{j p q}(\sigma, t)$ удовлетворяют неравенствам

$$|\partial_t^r \partial^\alpha \tilde{a}_{j p q}(\sigma, t)| \leq c_{\alpha r} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{\mu(p, q, \alpha, r)}, \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (3.21)$$

где $c_{\alpha r} > 0$ — некоторые числа, $\mu(p, q, \alpha, r) = (2p + q)m + (6m - 1)|\alpha| + r(m - m_2) + m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции $a_{j p q}(\sigma, t)$ являются решениями уравнения (1.4) при $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, удовлетворяющими начальным условиям

$$a_{1 p q}(\sigma, 0) = \Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma), \quad \partial_t a_{1 p q}(\sigma, 0) = 0,$$

$$a_{2pq}(\sigma, 0) = 0, \quad \partial_t a_{2pq}(\sigma, 0) = \Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma).$$

Используя равенство (3.3), получим интегральные представления этих функций:

$$a_{j pq} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) \frac{P_2(\sigma) \lambda^{2-j} + (2-j) P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} e^{\lambda t} d\tau, \quad (3.22)$$

где $t > 0$, $\xi > \gamma$, $\tau = \operatorname{Im} \lambda$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, $j = 1, 2$.

Для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq p$, $|\alpha| \leq q$, справедливо равенство

$$\partial^\alpha \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} Q_\alpha(\sigma, \lambda), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \quad \operatorname{Re} \lambda > \gamma, \quad (3.23)$$

где $Q_\alpha(\sigma, \lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1)$, $m_3 = \deg \Delta(\sigma)$, $m_3 = \max\{2m_1, m_0 + m_2\} \leq 2m$.

Доказательство равенства (3.23) аналогично доказательству равенства (3.4).

Если $|\alpha| = 1$, то равенство (3.23) справедливо:

$$\begin{aligned} \partial_i \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) &= \frac{\partial_i (\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma)) P(\sigma, \lambda) - \Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) \partial_i P(\sigma, \lambda)}{P^2(\sigma, \lambda)} \\ &= \frac{\Delta^{p-1}(\sigma) P_2^{q-1}(\sigma)}{P^2(\sigma, \lambda)} (p \partial_i \Delta(\sigma) P_2(\sigma) P(\sigma, \lambda) + q \Delta(\sigma) \partial_i P_2(\sigma) P(\sigma, \lambda) \\ &\quad - \Delta(\sigma) P_2(\sigma) \partial_i P(\sigma, \lambda)). \end{aligned}$$

Предположим, что равенство (3.23) справедливо для всех $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $|\alpha| \leq k$, и $\alpha' = \alpha + \gamma_i$, $|\gamma_i| = 1$. Тогда имеем равенства

$$\begin{aligned} \partial^{\alpha'} \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) &= \partial_i \left(\frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} Q_\alpha(\sigma, \lambda) \right) \\ &= \frac{\partial_i (\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma) Q_\alpha(\sigma, \lambda)) P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} \\ &\quad - \frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma) Q_\alpha(\sigma, \lambda) \partial_i P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)}{P^{2|\alpha|+2}(\sigma, \lambda)} = \frac{\Delta^{p-|\alpha'|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha'|}(\sigma)}{P^{|\alpha'|+1}(\sigma, \lambda)} Q_{\alpha'}(\sigma, \lambda), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q_{\alpha'}(\sigma, \lambda) &= [(p - |\alpha|) \partial_i \Delta(\sigma) P_2(\sigma) Q_\alpha(\sigma, \lambda) + (q - |\alpha|) \Delta(\sigma) \partial_i P_2(\sigma) Q_\alpha(\sigma, \lambda) \\ &\quad + \Delta(\sigma) P_2(\sigma) \partial_i Q_\alpha(\sigma, \lambda)] P(\sigma, \lambda) - (|\alpha| + 1) \Delta(\sigma) P_2(\sigma) Q_\alpha(\sigma, \lambda) \partial_i P(\sigma, \lambda) \end{aligned}$$

— многочлен, степень которого по переменной λ не превосходит $2|\alpha| + 2 = 2|\alpha'|$, а по переменной σ — $|\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + m_2 + m_3 + m - 1 = |\alpha'|(m_2 + m_3 + m - 1)$.

Равенство (3.23) доказано.

Из равенства (3.23) следует необходимое для дальнейшего изложения равенство

$$\partial^\alpha \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) = \frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} Q'_\alpha(\sigma, \lambda), \quad (3.24)$$

где $Q'_\alpha(\sigma, \lambda)$ — многочлен, степень которого по переменной λ не выше $2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + m_1$.

Для доказательства равенства (3.24) воспользуемся формулой Лейбница

$$\begin{aligned} \partial^\alpha \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) &= \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta^\alpha \partial^\beta \left(\frac{\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) \partial^{\alpha-\beta} P_1(\sigma) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta^\alpha \frac{\Delta^{p-|\beta|}(\sigma) P_2^{q-|\beta|}(\sigma)}{P^{|\beta|+1}(\sigma, \lambda)} \partial^{\alpha-\beta} P_1(\sigma) Q_\beta(\sigma, \lambda) = \frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} \\ &\quad \times \sum_{\beta \leq \alpha} C_\beta^\alpha P^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma, \lambda) \Delta^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma) P_2^{|\alpha|-|\beta|}(\sigma) \partial^{\alpha-\beta} P_1(\sigma) Q_\beta(\sigma, \lambda) \\ &= \frac{\Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-|\alpha|}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} Q'_\alpha(\sigma, \lambda), \end{aligned}$$

где $Q'_\alpha(\sigma, \lambda)$ — многочлен, удовлетворяющий указанному условию, так как степень каждого слагаемого по переменной λ не выше $2(|\alpha| - |\beta|) + 2|\beta| = 2|\alpha|$, а по переменной σ — не выше $|\beta|(m_2 + m_3 + m - 1) + (|\alpha| - |\beta|)(m + m_3 + m_2) + m_1 - |\alpha| + |\beta| = |\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + m_1$.

Рассмотрим функции

$$h_{j\alpha pq}(\sigma, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \partial^\alpha \left(\Delta^p(\sigma) P_2^q(\sigma) \frac{P_2(\sigma) \lambda^{2-j} + (2-j)P_1(\sigma)}{P(\sigma, \lambda)} \right) e^{\lambda t} d\tau,$$

$$t > 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \quad \xi > \gamma, \quad \tau = \operatorname{Im} \lambda, \quad j = 1, 2.$$

Воспользовавшись равенствами (3.23) и (3.24), их можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} h_{j\alpha pq}(\sigma, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma) \frac{P_2^{|\alpha|+1}(\sigma)}{P^{|\alpha|+1}(\sigma, \lambda)} \\ &\quad \times (P_2(\sigma) \lambda^{2-j} Q_\alpha(\sigma, \lambda) + (2-j) Q'_\alpha(\sigma, \lambda)) e^{\lambda t} d\tau. \quad (3.25) \end{aligned}$$

Функции $h_{j\alpha pq}(\sigma, t)$ являются обобщением функций $h_{j\alpha}(\sigma, t)$ в (3.5) и для них справедливы аналогичные (3.7) и (3.8) равенства:

$$\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t) = h_{j\alpha pq}(\sigma, t), \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} h_{j\alpha pq}(\sigma, t) &= \frac{1}{2\pi i} \Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma) \\ &\quad \times \left[\sum_{d=0}^{2|\alpha|} \tilde{A}_{\alpha d}(\sigma) \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{\lambda^{d+2-j} e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} d\tau \right. \\ &\quad \left. + \sum_{d=0}^{2|\alpha|} (2-j) \tilde{D}_{\alpha d}(\sigma) \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{\lambda^d e^{\lambda t}}{(\lambda - \lambda_1(\sigma))^{|\alpha|+1} (\lambda - \lambda_2(\sigma))^{|\alpha|+1}} d\tau \right], \quad (3.27) \end{aligned}$$

где $\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)$, $\tilde{D}_{\alpha d}(\sigma)$ — многочлены, $\deg \tilde{A}_{\alpha d}(\sigma) \leq |\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + m_2$, $\deg \tilde{D}_{\alpha d}(\sigma) \leq |\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + m_1$.

Преобразовав подынтегральные выражения в (3.27) с помощью равенства (3.9) и воспользовавшись равенствами (3.10), (3.11), (3.26), получим экспоненциальное представление функций $\partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t)$:

$$\begin{aligned} \partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t) &= \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \frac{1}{(|\alpha|+1-k)!} \Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma) \\ &\times [(\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma) + (j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) + (2-j)\tilde{D}_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)] t^{|\alpha|+1-k} e^{\lambda_s(\sigma)t}, \\ &t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Дифференцируя это равенство по t и пользуясь формулой Лейбница, получим

$$\begin{aligned} \partial_t^r \partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t) &= \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{s=1}^2 \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \frac{1}{(|\alpha|+1-k)!} \Delta^{p-|\alpha|}(\sigma) P_2^{q-2|\alpha|-1}(\sigma) \\ &\times [(\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(2-j)B_{\alpha 1d}^{ks}(\sigma) + (j-1)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)) + (2-j)\tilde{D}_{\alpha d}(\sigma)B_{\alpha 2d}^{ks}(\sigma)] \\ &\times \sum_{\rho=0}^r c'_{r\rho} \theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho}) (\lambda_s(\sigma))^\rho e^{\lambda_s(\sigma)t}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенствами (3.15), получим выражение для функций $\partial_t^r \partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t)$, $j = 1, 2$, $\sigma \in \mathbb{R}^n \setminus N$, аналогичное равенству (3.19):

$$\begin{aligned} \partial_t^r \partial^\alpha a_{jpq}(\sigma, t) &= \Delta^{p-2|\alpha|-\frac{1}{2}}(\sigma) P_2^{q-2|\alpha|-1-r}(\sigma) \sum_{d=0}^{2|\alpha|} \sum_{k=1}^{|\alpha|+1} \sum_{s=1}^2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \sum_{\rho=0}^r C''_{\alpha k \nu s \rho} \\ &\times (P_2(\sigma))^{\varphi(\alpha, d, \nu, j, k, \rho)} \Delta(\sigma)^{\frac{1}{2}(|\alpha|-\nu)} \theta((-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^{\gamma(\alpha, d, \nu, j, k)}) \\ &\times ((-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma))^\rho \\ &\times [(2-j)(\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)(-P_1(\sigma) + (-1)^s \Delta^{\frac{1}{2}}(\sigma)) + \tilde{D}_{\alpha d}(\sigma)P_2(\sigma)) + (j-1)\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)] \\ &\times \theta(t^{|\alpha|+1-k-r+\rho}) e^{\lambda_s(\sigma)t}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Если выполняются неравенства

$$p \geq p(l) = 2l + 1, \quad q \geq q(l, r) = 2l + r + 2,$$

то из равенства (3.28) следует, что функции $a_{jpq}(\sigma, t)$ могут быть продолжены на множество N по непрерывности и полученные функции $\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t)$ непрерывно дифференцируемы до порядка l по переменной σ , до порядка r по t и их производные имеют вид (3.29).

Используя оценки для многочленов $\Delta(\sigma)$, $P_2(\sigma)$, $\tilde{A}_{\alpha d}(\sigma)$, $\tilde{D}_{\alpha d}$ и учитывая, что показатели степеней слагаемых в равенстве (3.29) неотрицательны, получим неравенство

$$|\partial_t^r \partial^\alpha \tilde{a}_{jpq}(\sigma, t)| \leq c''_{\alpha jr} (1+t)^{|\alpha|} e^{\gamma t} (1+|\sigma|)^{\mu(p, q, \alpha, r)}, \quad t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

где $\mu(p, q, \alpha, r) \leq (p - 2|\alpha| - \frac{1}{2})m_3 + (q - 2|\alpha| - 1 - r)m_2 + (4|\alpha| + j - 1 + r - \rho)m_2 + \frac{1}{2}(|\alpha| - \nu)m_3 + (2|\alpha| + 2 - j)m + \rho m + |\alpha|(m_2 + m_3 + m - 1) + 2m = pm_3 + qm_2 + |\alpha|(3m_2 - 2m_2 - m_3 + \frac{1}{2}m_3 + 2m + m_2 + m_3 + m - 1) - \frac{1}{2}m_3 - (1+r)m_2 + (j - 1 + r - \rho)m_2 - \frac{1}{2}\nu m_3 + (2-j)m + \rho m + 2m \leq (2p+q)m + (6m-1)|\alpha| + r(m-m_2) + m$.

Теорема доказана.

Из теорем 3.2 и 2.2 следует справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.3. Если выполнено условие (P) и $g_i = \Delta^p(D_x)P_2^q(D_x)f_i$, $f_i \in H_l^s$, $l < 0$, $p \geq 2\nu(l)+1$, $q \geq 2\nu(l)+r+2$, $r \geq 2$, то существует сильное обобщенное решение $u(t)$ задачи (1.1), (1.2), принадлежащее пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})$, где $s' = s - \mu(p, q, \nu(l), r)$, и справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_{C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})} \leq C(\|f_1\|_l^s + \|f_2\|_l^s). \quad (3.30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим семейство обобщенных функций

$$v(t) = \sum_{j=1}^2 \tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) \hat{f}_{j-1}, \quad t \geq 0,$$

где $\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t)$ — продолжение функций $a_{jpq}(\sigma, t) = a_j(\sigma, t)\Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma)$.

Из условия теоремы и теорем 3.2 и 2.2 следует, что это семейство принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})$, где $s' = s - \mu(p, q, \nu(l), r)$.

Из определения функций $a_{jpq}(\sigma, t)$ и свойств их продолжений $\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t)$ следует справедливость равенств

$$P_2(\sigma)\partial_t^2\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_1(\sigma)\partial_t\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_0(\sigma)\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) = 0, \\ t \geq 0, \quad \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad j = 1, 2.$$

Тогда для произвольной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем равенства

$$(P_2(\sigma)\partial_t^2v(t) + P_1(\sigma)\partial_tv(t) + P_0(\sigma)v(t), \varphi) \\ = \sum_{j=1}^2 (\hat{f}_{j-1}, (P_2(\sigma)\partial_t^2\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_1(\sigma)\partial_t\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t) + P_0(\sigma)\tilde{a}_{jpq}(\sigma, t))\varphi(\sigma)) = 0.$$

Следовательно, семейство обобщенных функций $v(t)$ удовлетворяет уравнению (1.4). Из теоремы 2.2 следует справедливость неравенства

$$\|v(t)\|_{C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})} \leq c(\|\hat{f}_1\|_s^l + \|\hat{f}_2\|_s^l). \quad (3.31)$$

Семейство обобщенных функций $v(t)$ удовлетворяет начальным условиям (1.5):

$$v(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^2 \tilde{a}_{jpq}(\sigma, 0) \hat{f}_{j-1} = \tilde{a}_{1pq}(\sigma, 0) \hat{f}_0 = \Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma) \hat{f}_0 = \hat{g}_0, \\ \partial_tv(t)|_{t=0} = \sum_{j=1}^2 \partial_t\tilde{a}_{jpq}(\sigma, 0) \hat{f}_{j-1} = \partial_t\tilde{a}_{2pq}(\sigma, 0) \hat{f}_1 = \Delta^P(\sigma)P_2^q(\sigma) \hat{f}_1 = \hat{g}_1.$$

Следовательно, $v(t)$ является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.4), (1.5), а его преобразование Фурье по пространственным переменным $u(t)$ принадлежит пространству $C_{\gamma\nu(l)}^r(\overline{\mathbb{R}}_+, H_l^{s'})$ и является сильным обобщенным решением задачи Коши (1.1), (1.2). Неравенство (3.30) следует из неравенства (3.31).

Теорема доказана.

Рассмотренный подход к построению сильных обобщенных решений задачи Коши применим для уравнений с постоянными коэффициентами соболевского типа высокого порядка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Свешников А. Г., Алешин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. А. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
4. Костюченко А. Г., Эскин Г. И. Задачи Коши для уравнений типа Соболева — Гальперна // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 273–284.
5. Эскин Г. И. О единственности решения задачи Коши для уравнений не типа Ковалевской // Тр. Моск. мат. о-ва. 1961. Т. 10. С. 285–295.
6. Павлов А. Л. Задача Коши для уравнения типа Соболева — Гальперна в пространствах функций степенного роста // Мат. сб. 1993. Т. 184, № 11. С. 3–20.
7. Павлов А. Л. Задача Коши для одного уравнения соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Мат. тр. 2018. Т. 21, № 1. С. 125–154.
8. Павлов А. Л. Существование решения задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 4. С. 824–844.
9. Павлов А. Л. Разрешимость задачи Коши для некоторого класса уравнений соболевского типа в классе обобщенных функций медленного роста // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 5. С. 1119–1136.
10. Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. Задача Коши и связанные с ней задачи для уравнений в свертках // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 4. С. 65–143.
11. Фукс Б. А., Левин В. И. Функции комплексного переменного и их приложения. М.; Л.: Гостехиздат, 1951.

Поступила в редакцию 5 января 2025 г.

После доработки 5 января 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Павлов Александр Леонидович (ORCID 0000-0003-0532-7486)
Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001, ДНР;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Р. Люксембург, 74, Донецк 283048, ДНР
alex4909@gmail.com

О СМЕШАННЫХ ТОЖДЕСТВАХ ЭНДОМОРФОВ, БИМОДУЛЯХ И ω -АЛГЕБРАХ

А. П. Пожидаев

Аннотация. Описаны смешанные полилинейные тождества степени 3 на правых эндоморфах произвольных алгебр над полем F характеристики не 2. Как следствие, получены неприводимые бимодули над $M_n(F)$ из многообразия, определенного тождеством моноассоциативности, и многообразия $(1, 1)$ -алгебр. Строится огромный класс правосимметрических бимодулей, в частности, неприводимых правосимметрических $M_n(F)$ -бимодулей. Выделен класс ω -правосимметрических алгебр $\mathcal{A}_\omega$ с ω -тождеством, обобщающий класс правосимметрических алгебр, где ω — некоторая билинейная кососимметрическая форма на $\mathcal{A}$. Дано описание строения конечномерных алгебр $\mathcal{A}_\omega$, в частности, простых таких алгебр. Показано, что коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ произвольной ω -правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является алгеброй ω -Ли, и $\mathcal{A}^{(-)}$ разрешима степени ≤ 3 в конечномерном случае.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.413

Ключевые слова: эндоморф, правосимметрическая алгебра, простая алгебра, прелева алгебра, смешанное тождество, бимодуль, неприводимый бимодуль, правосимметрический бимодуль, алгебра ω -Ли.

§ 1. Введение

Алгебра $\mathcal{A}$ называется левосимметрической (*прелевой*), если ассоциатор $(x, y, z) := (xy)z - x(yz)$ на $\mathcal{A}$ левосимметричен: $(x, y, z) = (y, x, z)$ для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$. Правосимметрические алгебры — это алгебры, антиизоморфные левосимметрическим, т. е. для них выполнено тождество

$$(x, y, z)_{rs} := (x, y, z) - (x, z, y) = 0. \quad (1)$$

Как легко видеть, все эти алгебры Ли-допустимы. Алгебры Новикова являются одним из наиболее известных частных случаев левосимметрических алгебр, которые являются естественным обобщением ассоциативных алгебр.

Зафиксируем произвольное основное поле F , для характеристики которого будем использовать символ $\chi(F)$. В дальнейшем будем предполагать, что $\chi(F) \neq 2$, через $\langle \Upsilon \rangle := \langle \Upsilon \rangle_F$ будем обозначать линейную оболочку множества Υ над F , а через $\text{alg}(\Upsilon)$ — алгебру над F , порожденную Υ , где опускаем символ F , если поле ясно из контекста. Через $\text{End}(\mathcal{A})$ будем обозначать алгебру всех F -линейных операторов на алгебре (векторном пространстве) $\mathcal{A}$. Если V — векторное пространство над F , то V^* — дуальное пространство к V . Образ $x\phi := \phi(x)$ элемента x под действием отображения ϕ часто записывается в виде

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2022-0002.

$\phi_x; [x, y] := xy - yx$ — коммутатор элементов x и y ; $\mathbb{S}_3$ — симметрическая группа степени 3.

Пусть $(\mathcal{A}, \cdot)$ — алгебра над полем F (символ умножения $\cdot$ обычно будет опускаться). Обозначим через R_a оператор правого умножения в $\mathcal{A}$ на элемент $a \in \mathcal{A}$: $xR_a := x \cdot a := xa$ для всех $x \in \mathcal{A}$; алгебру $\text{End}(\mathcal{A})$ далее будем обозначать через $\mathcal{M} := \mathcal{M}(\mathcal{A})$; действие $\phi := A \in \mathcal{M}$ на $a \in \mathcal{A}$ будем записывать справа: $\phi(a) := aA$.

Рассмотрим прямую сумму алгебр $E(\mathcal{A}) := \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}$ и наделим ее произведением $\circ$ по правилу

$$A \circ a = aA + [A, R_a], \quad a \circ A = aA, \quad a \circ b = ab, \quad A \circ B = AB \quad (2)$$

для всех $a, b \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}$. Полученная алгебра называется (*правым*) *эндоморфом* алгебры $\mathcal{A}$. По определению $\mathcal{A}$ и $\mathcal{M}$ являются подалгебрами в $E(\mathcal{A})$, а $\mathcal{A}$ — это правый модуль над $\mathcal{M}$.

Напомним, что $\mathcal{A}$ называется *алгеброй правого скалярного умножения*, если существует $\lambda \in \mathcal{A}^*$ такой, что $ab = \lambda(b)a$ для всех $a, b \in \mathcal{A}$. В данном случае $\mathcal{A}$ обозначается через $\mathcal{A}_\lambda := \mathcal{A}_\lambda^r$ (с фиксированным символом λ). Аналогично определяется алгебра левого скалярного умножения $\mathcal{A}_\lambda^l$.

В [1] доказана следующая

Теорема 1.1. *Алгебра $E(\mathcal{A})$ является правосимметрической тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — правосимметрическая алгебра. Если $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_\lambda^r, \mathcal{A}_\lambda^l$, то алгебра $E(\mathcal{A})$ проста.*

Основная цель настоящей работы — описание смешанных однородных тождеств степени 3 для эндоморфов, т. е. тождеств, которые выполняются, когда в них присутствуют элементы разных типов, а также описание возникающих при этом обобщений правосимметрических алгебр. Смешанные тождества важны при изучении тождеств алгебр, у которых есть подалгебра с нефиксированной принадлежностью к многообразию алгебр. Изучив смешанные тождества, можно понять, какие условия нужно наложить на данную подалгебру, чтобы исходная алгебра лежала в некотором определенном многообразии. Заметим, что в эндоморфах есть подалгебра, изоморфная алгебре матриц $M_n(F)$ над полем F . Хорошо известно, что $M_n(F)$ не удовлетворяет никакому полилинейному тождеству степени $< 2n$ (исключая ассоциативность), однако $M_n(F)$ удовлетворяет тождествам, которые следуют из ассоциативности, к примеру: (1) или тождеству $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$, или тождествам $(1, 1)$ -алгебр, и т. п. Таким образом, эндоморф произвольной алгебры в принципе может удовлетворять таким тождествам степени 3. Описание смешанных тождеств на алгебрах вида $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — подалгебры и в тождестве присутствует строго один элемент из $\mathcal{A}$, дает конструкции бимодулей над $\mathcal{B}$ из получаемых многообразий (см. следствия 2.1–2.3). (Заметим, что, к примеру, супералгебры в некотором смысле также можно рассматривать как алгебры, определенные некоторыми «смешанными» тождествами.)

В настоящей работе в § 2 описаны смешанные однородные тождества степени 3 на правых эндоморфах. Заметим, что удастся получить полное описание таких тождеств, не зная тождеств исходной алгебры $\mathcal{A}$. Как следствие получены неприводимые модули над $M_n(F)$ из многообразия, определенного тождеством $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$. Строится огромный класс правосимметрических бимодулей, в частности, неприводимых правосимметрических $M_n(F)$ -бимодулей над произвольным векторным пространством и, как следствие, над

произвольной алгеброй (с левым действием как в эндоморфах). Также в данном параграфе выделен класс алгебр $\mathcal{A}_\omega$ с формой ω и ω -тождеством, обобщающий класс правосимметрических алгебр, где $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto F$ — некоторая билинейная кососимметрическая форма на алгебре $\mathcal{A}$. А именно, ω -правосимметрическая алгебра — это алгебра $\mathcal{A}$, на которой выполняется следующее тождество с формой:

$$(x, y, z)_{rs} = \omega(y, z)x$$

для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$. В §3 дается описание конечномерных алгебр $\mathcal{A}_\omega$, в частности, простых таких алгебр.

Отметим, что примерами алгебр с формами являются также так называемые алгебры ω -Ли [2], исследованию которых посвящено множество работ (см., например, [3, 4] и ссылки в данных работах): векторное пространство L над полем F называется алгеброй ω -Ли, если на L определены антикоммутативное умножение $[\cdot, \cdot]$ и билинейная кососимметрическая форма $\omega(\cdot, \cdot) : L \times L \mapsto F$ такие, что

$$[[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = \omega(x, y)z + \omega(z, x)y + \omega(y, z)x$$

для любых $x, y, z \in L$. Заметим, что в [4] показано, что любая конечномерная алгебра ω -Ли (не являющаяся алгеброй Ли) является «вырожденной» в том смысле, что она содержит абелеву подалгебру малой коразмерности.

В §3 также показано, что коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ произвольной ω -правосимметрической алгебры $\mathcal{A}$ является алгеброй ω -Ли; если $\mathcal{A}$ конечномерна, то $\mathcal{A}^{(-)}$ разрешима степени ≤ 3 и содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

§ 2. О смешанных тождествах эндоморфов

Пусть $\mathcal{A}$ — прямая сумма двух подалгебр $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, f — элемент свободной неассоциативной алгебры $F(X)$ от свободных порождающих $X := \{x_1, \dots, x_n\}$ над полем F . Говорят, что полилинейный элемент $f(x_1, \dots, x_n) \in F(X)$ является смешанным тождеством алгебры $\mathcal{A}$, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_i \in \mathcal{A}$ таких, что по крайней мере два элемента среди $a_1, \dots, a_n$ лежат в разных подалгебрах, т. е. $a_i \in \mathcal{B}$, $a_j \in \mathcal{C}$ для некоторых $1 \leq i \neq j \leq n$. При этом будем говорить, что f является $(k, n-k)$ -тождеством на $\mathcal{A}$, если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ при наличии среди a_i в точности k элементов из $\mathcal{B}$ (и $n-k$ из $\mathcal{C}$).

Рассмотрим вопрос описания смешанных полилинейных тождеств степени 3 (далее: 3-тождеств) на правых эндоморфах $E(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F . Предположим, что на $E(\mathcal{A})$ выполняется нетривиальное 3-тождество. Любое такое тождество имеет следующий вид:

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (\alpha_\sigma x_\sigma^l - \beta_\sigma x_\sigma^r) = 0, \quad (3)$$

где $x_\sigma^l := (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)})x_{\sigma(3)}$, $x_\sigma^r := x_{\sigma(1)}(x_{\sigma(2)}x_{\sigma(3)})$, $\alpha_\sigma, \beta_\sigma \in F$. Заметим, что $\mathbb{S}_3$ естественно действует справа на данных тождествах, т. е.

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_3} (\alpha_\sigma x_{\sigma\tau}^l - \beta_\sigma x_{\sigma\tau}^r) = 0$$

также является тождеством для любой $\tau \in \mathbb{S}_3$. Таким образом, любое полученное соотношение на коэффициенты $\alpha_\sigma, \beta_\sigma \in F$ ($\sigma \in \mathbb{S}_3$) переходит в соотношение на коэффициенты при правом действии $\mathbb{S}_3$.

Пусть $\alpha_i := \alpha_{\sigma_i}$, $\beta_i := \beta_{\sigma_i}$ и σ_i определяются следующим образом:

$$\sigma_1 = \text{Id}, \sigma_2 = (132), \sigma_3 = (123), \sigma_4 = (12), \sigma_5 = (13), \sigma_6 = (23).$$

Выпишем ради удобства правое действие $\mathbb{S}_3$ на данные коэффициенты (в левой части таблицы цифра i обозначает коэффициент α_i):

1	2	3	4	5	6	
5	6	4	3	1	2	(13)
4	5	6	1	2	3	(12)
6	4	5	2	3	1	(23)
3	1	2	5	6	4	(123)
2	3	1	6	4	5	(132)

Учитывая (2), выпишем явно (3) при $x_1 = x \in \mathcal{A}$, $x_2 = A$, $x_3 = B$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$:

$$\begin{aligned} & \alpha_1 xAB + \alpha_2 (xBA + [B, R_x]A) + \alpha_3 (xAB + [AB, R_x]) \\ & \quad + \alpha_4 (xAB + [A, R_x]B) + \alpha_5 (xBA + [BA, R_x]) + \alpha_6 xBA \\ & = \beta_1 xAB + \beta_2 (xAB + [B, R_{xA}]) + \beta_3 (xBA + [A, R_{xB}] + A[B, R_x]) \\ & \quad + \beta_4 (xBA + [A, R_{xB}]) + \beta_5 (xAB + [B, R_{xA}] + B[A, R_x]) + \beta_6 xBA. \end{aligned}$$

Полученное соотношение эквивалентно следующим:

$$((\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) - (\beta_1 + \beta_2 + \beta_5))xAB = ((\beta_3 + \beta_4 + \beta_6) - (\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6))xBA, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_2 ([B, R_x]A) + \alpha_3 ([AB, R_x]) + \alpha_4 ([A, R_x]B) + \alpha_5 ([BA, R_x]) \\ & = \beta_2 ([B, R_{xA}]) + \beta_3 ([A, R_{xB}] + A[B, R_x]) \\ & \quad + \beta_4 ([A, R_{xB}]) + \beta_5 ([B, R_{xA}] + B[A, R_x]). \quad (5) \end{aligned}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_\lambda$ — алгебра правого скалярного умножения. Легко видеть, что в этом случае все соотношения 3-тождеств получаются из (4) и действия $\mathbb{S}_3$. Если $\dim \mathcal{A} = 1$, то легко видеть, что $E(\mathcal{A})$ коммутативна и ассоциативна.

Далее считаем, что $\dim \mathcal{A} > 1$. Тогда все 3-тождества получаются из соотношения $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_5$ и действия $\mathbb{S}_3$. Легко видеть, что получаются еще три линейно независимых уравнения:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = \beta_1 + \beta_5 + \beta_6, \\ \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 = \beta_2 + \beta_4 + \beta_5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_6 = \beta_2 + \beta_3 + \beta_4, \end{cases}$$

и система приводится к следующему ступенчатому виду:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \beta_1 + \beta_2 + \beta_5, \\ \alpha_2 - \alpha_4 = \beta_3 - \beta_5, \\ \alpha_6 - \alpha_3 = \beta_4 - \beta_1, \\ \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_4 + \beta_5 + \beta_6. \end{cases}$$

Полагая свободную неизвестную α_5 равной 1, а остальные свободные неизвестные выбирая нулевыми, получаем решение $\alpha_5 = 1$, $\alpha_4 = -1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_1 = 1$, т. е. приходим к смешанному (1, 2)-тождеству

$$f(x, y, z) := (xy)z - (yx)z + (zy)x - (zx)y = 0. \quad (6)$$

Непосредственная проверка показывает, что (6) является также (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. В случае $\alpha_6 = 1$ получаем эквивалентное тождество, а в остальных случаях получаемые тождества являются следствиями (1, 2)-тождества $g(x, y, z) := (xy)z - z(xy)$ алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. Более того, произвольное (1, 2)-тождество $E(\mathcal{A}_\lambda)$ имеет вид

$$\alpha_5 f(x, y, z) + \alpha_6 f(x, z, y) + \beta_1 g(y, z, x) + \beta_2 g(x, y, z) + \beta_3 g(z, x, y) + \beta_5 g(y, x, z) = 0.$$

Проверим, когда

$$\beta_1 g(y, z, x) + \beta_2 g(x, y, z) + \beta_3 g(z, x, y) + \beta_5 g(y, x, z) = 0 \quad (7)$$

является (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$. Пусть $\lambda \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} g(A, y, z) &= yA \cdot z - z \cdot yA = \lambda_z yA - z \cdot yA, \\ g(x, A, z) &= \lambda_z xA - z \cdot xA, \quad g(x, y, A) = 0. \end{aligned}$$

Полагая $x = A \in \mathcal{M}(\mathcal{A}_\lambda)$, $y, z \in \mathcal{A}_\lambda$ в (7) такими, что $y, z \neq 0$, $yA = 0$, $zA = z$, $\lambda_y = 0$, $\lambda_z \neq 0$, получаем $\beta_3 = 0$. Аналогично случай $y = A$ дает $\beta_1 = 0$, а случай $z = A$ приводит к равенству $\beta_2 + \beta_5 = 0$. Таким образом, на $E(\mathcal{A}_\lambda)$ выполняется смешанное тождество

$$g(x, y, z) = g(y, x, z). \quad (8)$$

Легко видеть, что тождества (6) и (8) эквивалентны тождествам (6) и (1). Таким образом, если $\lambda \neq 0$, то все 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ являются следствиями тождеств правосимметричности и (6).

Если $\lambda = 0$, то из вышеприведенных рассуждений следует, что $x \cdot yz = yz \cdot x$ является (2, 1)-тождеством алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ и при этом оно является следствием смешанной коммутативности. Таким образом, доказана

Теорема 2.1. Все смешанные 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A}_\lambda)$ являются следствиями коммутативности и ассоциативности в случае $\dim \mathcal{A}_\lambda = 1$, в противном случае — следствиями смешанной правосимметричности и тождества (6) при $\lambda \neq 0$ и следствиями смешанной коммутативности и смешанной правосимметричности при $\lambda = 0$.

Далее считаем, что $\mathcal{A}$ не является алгеброй скалярного умножения; в частности, $\dim \mathcal{A} > 1$. Выбирая $y \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ так, что $yA = yB = 0$ и действуя (5) на y , получаем

$$(\alpha_2 + \alpha_5)(yx)BA + (\alpha_3 + \alpha_4)(yx)AB = (\beta_2 + \beta_5)(y \cdot xA)B + (\beta_3 + \beta_4)(y \cdot xB)A. \quad (9)$$

Предположим, что $\text{alg}\langle a, b \rangle \subseteq \langle a, b \rangle$ для любых линейно независимых $a, b \in \mathcal{A}$ и при этом $x^2 = y$ для некоторых линейно независимых $x, y \in \mathcal{A}$. Выберем $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ так, что $xA = xB = 0$, $yA = y$, $yB = x$. Действуя (5) на x , получаем $(\alpha_2 + \alpha_5)x^2BA + (\alpha_3 + \alpha_4)x^2AB = 0$, откуда $\alpha_3 + \alpha_4 = 0$. Далее рассмотрим следующий выбор $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$: $xA = 0$, $xB = y$, $yA = x$, $yB = 0$. Заметим, что при этом $(xy)A, (yx)A \in \langle x \rangle$. Используя действие (5) на x , выводим $-\alpha_3 y - \alpha_4 y + \alpha_5 y \equiv \beta_5 y \pmod{\langle x \rangle}$, откуда, применяя действие $\mathbb{S}_3$ и (4), приходим к тождествам смешанной правосимметричности.

Предположим, что $xy \in \langle x, y \rangle$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$ (назовем такие алгебры «обобщенно квадратичными»); в частности, $x^2 \in \langle x \rangle$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Тогда можно считать, что существуют линейно независимые $x, y \in \mathcal{A}$ такие, что $yx = \alpha x + \beta y$ для некоторых $\alpha, \beta \in F$, $\alpha \neq 0$. Действительно, если $yx = \beta_y^x y$ для

каждого фиксированного $x \in \mathcal{A}$, некоторого $\beta^x \in \mathcal{A}^*$ и всех $y \in \mathcal{A}$, то $x^2 = \beta_x^x x$ для любого $x \in \mathcal{A}$. Вместо y рассмотрим $z = y + x$. Тогда

$$zx = (y + x)x = \beta_y^x y + \beta_x^x x = \beta_y^x (z - x) + \beta_x^x x = \beta_y^x z + (\beta_x^x - \beta_y^x)x.$$

Если $\beta_x^x - \beta_y^x = 0$ для любых x и y из $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}$ — алгебра правого скалярного умножения, что не так.

Теперь, полагая $xA = y, xB = x$ ($yA = yB = 0$ в условиях (9)), имеем $(yx)A = (yx)BA = \alpha y$, $(yx)AB = 0$ и из (9) получаем $\alpha_2 + \alpha_5 = \beta_3 + \beta_4$ (так как $y^2 \in \langle x, y \rangle$, то $y^2 B \in \langle x \rangle$), откуда действие $\mathbb{S}_3$ (с применением равенства $\alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6 = \beta_3 + \beta_4 + \beta_6$, получаемого из (4)) дает $\alpha_i = \beta_i$ для всех i , а также

$$\alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5 = \alpha_1 + \alpha_6.$$

Отсюда выводим, что все 3-тождества являются следствиями правосимметричности и тождества «моноассоциативности»

$$(x, y, z)_s := (x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0. \quad (10)$$

Заметим, что тождество

$$(x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} = (x, y, z)_s - (y, x, z)_s$$

выполняется в любой алгебре, поэтому произвольное 3-тождество, которое следует из правосимметричности и (10), имеет вид

$$\alpha(x, y, z)_{rs} + \beta(y, x, z)_{rs} + \gamma(z, x, y)_{rs} + \delta(x, y, z)_s = 0 \quad (11)$$

для некоторых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$. Так как (2, 1)-тождество $(x, y, z)_{rs} = 0$ нетривиально только при $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, далее можно считать, что $\delta \neq 0$, иначе все тождества следуют из смешанной правосимметричности. Переставляя циклически x, y, z в (11) и вычитая полученное равенство из (11), приходим к тому, что либо в $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность, либо $\alpha = \beta = \gamma$, $\chi(F) = 2$. Во втором случае из (11) следует, что в $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанное тождество $(x, y, z)_s = \tau(y, x, z)_s$, откуда $\tau = 1$. Тогда в $E(\mathcal{A})$ справедливо смешанное тождество $(x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} = 0$, т. е. выполняются смешанная правосимметричность и тождество $(x, y, z)_s = 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда существуют линейно независимые $x, y \in \mathcal{A}$ такие, что $z = yx \notin \langle x, y \rangle$. Рассматривая A и B в (9) такие, что

$$yA = yB = 0, \quad xA = xB = x, \quad zA = x, \quad zB = 0,$$

получаем $\alpha_3 + \alpha_4 = \beta_3 + \beta_4$; а если мы определим A и B в (9) правилом $xA = x$, $xB = x$, $zA = z$, $zB = 0$, $yA = yB = 0$, то выводим $\beta_3 + \beta_4 = 0$. С учетом равенства $\beta_3 + \beta_4 + \beta_6 = \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6$, которое следует из (4), действие $\mathbb{S}_3$ на полученные соотношения опять приводит нас к смешанной правосимметричности.

Найдем необходимые и достаточные условия на $\mathcal{A}$, при которых на $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность. Из (4), (5) следует, что достаточно рассмотреть случай, когда два элемента в $(x, y, z)_{rs} = 0$ выбираются из $\mathcal{A}$. Легко проверяется, что $(x, y, A)_{rs} = 0$ для любых $x, y \in \mathcal{A}$, $A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Далее,

$$\begin{aligned} (A, x, y) &= (xA + [A, R_x]) \cdot y - A \cdot xy \\ &= xA \cdot y + y[A, R_x] + [[A, R_x], R_y] - (xy)A - [A, R_{xy}] \end{aligned}$$

$$= xA \cdot y + yA \cdot x - (yx)A + [[A, R_x], R_y] - (xy)A - [A, R_{xy}],$$

откуда

$$(A, x, y)_{rs} = [[A, R_x], R_y] - [[A, R_y], R_x] + [A, R_{yx}] - [A, R_{xy}] = [A, [R_y, R_x] - R_{[y, x]}].$$

Таким образом, на $E(\mathcal{A})$ выполняется смешанная правосимметричность тогда и только тогда, когда $[R_x, R_y] - R_{[x, y]} = \omega(x, y) \text{Id}$ для некоторой билинейной кососимметрической формы $\omega : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto F$ и для всех $x, y \in \mathcal{A}$. Последнее операторное соотношение на языке тождеств с формой может быть записано следующим образом:

$$(x, y, z)_{rs} = \omega(y, z)x \quad (12)$$

для всех $x, y, z \in \mathcal{A}$, которое далее будем называть ω -тождеством. Обозначим алгебру $\mathcal{A}$ с ω -тождеством (12) через $\mathcal{A}_\omega$ и назовем ω -правосимметрической алгеброй. В итоге доказана

Теорема 2.2. Пусть $\mathcal{A} \not\cong \mathcal{A}_\lambda$ и на $E(\mathcal{A})$ выполняется нетривиальное 3-тождество. Если алгебра $\mathcal{A}$ обобщенно квадратичная, то все 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A})$ следуют из смешанной правосимметричности при $\chi(F) \neq 2$, а также смешанной моноассоциативности при $\chi(F) = 2$. В противном случае все смешанные 3-тождества алгебры $E(\mathcal{A})$ являются следствиями смешанной правосимметричности, которая выполняется тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае обобщенно квадратичных алгебр и $\chi(F) = 2$ легко показать, что смешанная моноассоциативность влечет коммутативность алгебры $\mathcal{A}$, а также что $\mathcal{A}$ будет ω -правосимметрической алгеброй. Из результатов §3 следует, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_0$, т. е. реально данный случай в теореме не возникает.

Напомним определение (γ, δ) -алгебр, введенных А. А. Албертом (см., например, [5, с. 425]). Алгебра $\mathcal{A}$ над полем F называется (γ, δ) -алгеброй, где γ, δ — фиксированные скаляры из F , если на $\mathcal{A}$ выполнены следующие тождества:

$$(x, x, x) = 0, \quad (x, y, z) + (y, z, x) + (z, x, y) = 0, \\ (x, y, z) + \gamma(y, x, z) + \delta(z, x, y) = 0$$

при $\gamma^2 - \delta^2 + \delta = 1$. Легко видеть, что тождество $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$ является следствием тождества $(xy)z = z(xy)$. Обозначим через $\mathcal{P}$ многообразие алгебр с тождеством $(x, y, z) + (z, x, y) + (y, z, x) = 0$. Очевидно, что $M_n(F) \in \mathcal{P}$. Отметим, что при наличии правосимметричности алгебры из $\mathcal{P}$ попадают в класс (γ, δ) -алгебр при $(\gamma, \delta) = (1, 1)$ и $\chi(F) \neq 3$. Заметим, что эндоморф $E(\mathcal{A}_0)$ не является ассоциативной алгеброй в случае $\lambda = 0$ и $\dim \mathcal{A}_0 > 1$, так как $(A, x, B) \neq 0$ в общем случае для подходящих $x \in \mathcal{A}_0, A, B \in \text{End}(\mathcal{A}_0)$. Произвольное векторное пространство V над полем F можно рассмотреть как алгебру с нулевым умножением, которая является алгеброй правого скалярного умножения. Таким образом, получаем

Следствие 2.1. Пусть V_n — векторное пространство размерности n над полем F . Тогда V_n является неприводимым $\mathcal{P}$ -бимодулем (а также $(1, 1)$ -бимодулем) над $M_n(F) = \text{End } V$ относительно действия $Av = vA, v \in V, A \in M_n(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2.2 $E(V) = V \oplus \text{End}(V)$ лежит в многообразии $\mathcal{P}$ (а также в многообразии $(1, 1)$ -алгебр), поэтому V является $\mathcal{P}$ -модулем $((1, 1)$ -бимодулем) над $M_n(F)$. Неприводимость V очевидна, так как на V действует полная матричная алгебра. $\square$

Следствие 2.2. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра размерности n над полем F . Тогда $E(\mathcal{A})$ является правосимметрическим бимодулем над $M_n(F)$ относительно действия $M_n(F)$ как подалгебры. При этом $M_n(F)$ — неприводимый подбимодуль в $E(\mathcal{A})$, а $E(\mathcal{A})/M_n(F)$ — неприводимый $M_n(F)$ -бимодуль, который изоморфен бимодулю V_n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из теорем 2.1 и 2.2 и конструкции $E(\mathcal{A})$. $\square$

В заключение данного параграфа приведем важные конструкции неприводимых правосимметрических бимодулей. Пусть $\mathcal{B}$ — произвольная алгебра над полем F . Положим $\mathcal{D}(\mathcal{B}) := \{b \in \mathcal{B} : [xy, b] = [x, b]y + x[y, b] \ \forall x, y \in \mathcal{B}\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра над полем F (если $\mathcal{A}$ — векторное пространство над F , то считаем $\mathcal{A}$ алгеброй с нулевым умножением). Предположим, что $\mathcal{A}$ является ассоциативным правым $\mathcal{B}$ -модулем, т. е. задано правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ такое, что $(ax)y = a(xy)$ для любых $a \in \mathcal{A}$, $x, y \in \mathcal{B}$. Пусть дано линейное отображение $\phi : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{D}(\mathcal{B})$. Определим на прямой сумме $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ векторных пространств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ структуру алгебры над полем F , считая $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ подалгебрами, правое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ совпадающим с правым модульным ассоциативным действием $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$, а левое действие $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$ следующим:

$$ba = ab + [b, \phi_a]$$

для любых $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$. Обозначим полученную алгебру через $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$.

Теорема 2.3. Для любой алгебры $\mathcal{B}$ в алгебре $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$ выполняется смешанное (1, 2)-тождество правосимметричности. Если $\mathcal{B}$ правосимметрична и $\mathcal{A}$ — неприводимый правый $\mathcal{B}$ -модуль, то $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $\mathcal{B}$ -бимодулем. В частности, если $\mathcal{A}$ — векторное пространство, $\mathcal{B} = \text{End } \mathcal{A}$, ϕ — произвольное линейное отображение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $M_n(F)$ -бимодулем, где $n := \dim_F \mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим (1, 2)-тождество правосимметричности в $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \phi)$. Пусть $a \in \mathcal{A}$, $A, B \in \mathcal{B}$. Тогда $(x, A, B)_{rs} = 0$ следует из ассоциативности правого действия $\mathcal{B}$ на $\mathcal{A}$. Проверим равенство $(A, x, B)_{rs} = 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (A, x, B)_{rs} &= (xA + [A, \phi_x])B - A(xB) - (AB)x + A(xB + [B, \phi_x]) \\ &= xAB + [A, \phi_x]B - xBA - [A, \phi_{xB}] \\ &\quad - x(AB) - [AB, \phi_x] + xBA + [A, \phi_{xB}] + A[B, \phi_x] = 0, \end{aligned}$$

так как $\phi_a \in \mathcal{D}(\mathcal{B})$ для любого $a \in \mathcal{A}$. Неприводимость $\mathcal{A}$ как $\mathcal{B}$ -бимодуля очевидна. Последнее утверждение следует из того, что в данном случае $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$, так как алгебра $\mathcal{B}$ ассоциативна. $\square$

Следствие 2.3. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная ненулевая алгебра размерности n над полем F . Тогда $(\mathcal{A}, \text{End } \mathcal{A}, R) \cong E(\mathcal{A})$, где $R_a := \phi_a$ — оператор правого умножения на $a \in \mathcal{A}$, а подпространство $\mathcal{A}$ является неприводимым правосимметрическим $M_n(F)$ -бимодулем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из определений данных алгебр и теоремы 2.3. $\square$

3. Описание алгебр $\mathcal{A}_\omega$

Приведем конкретный пример нетривиальной ω -правосимметрической алгебры.

ПРИМЕР 3.1. Рассмотрим двумерную алгебру $\mathcal{A}_1$ с базисом a, b и ненулевым умножением $a^2 = -2a$, $ab = a$, $ba = -b$. Легко проверить, что данная алгебра является алгеброй с ω -тождеством (12) при $\omega(a, b) = 1$. Также легко видеть, что данная алгебра проста.

Напомним, что если $\mathcal{A}$ — алгебра, то коммутаторная алгебра $\mathcal{A}^{(-)}$ — это алгебра, получаемая введением на $\mathcal{A}$ нового умножения: $[a, b] := ab - ba$ для любых $a, b \in \mathcal{A}$. Алгебра $\mathcal{A}$ называется *Ли-допустимой*, если $\mathcal{A}^{(-)}$ является алгеброй Ли. Хорошо известно, что правосимметрические алгебры Ли-допустимы. Будем говорить, что алгебра $\mathcal{A}$ является ω -Ли-допустимой, если $\mathcal{A}^{(-)}$ — алгебра ω -Ли.

Предложение 3.1. ω -Правосимметрические алгебры ω -Ли-допустимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}$ — ω -правосимметрическая алгебра. Для любых $x, y, z \in \mathcal{A}$ имеем

$$\begin{aligned} [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] &= (xy - yx)z - z(xy - yx) + (zx - xz)y \\ &\quad - y(zx - xz) + (yz - zy)x - x(yz - zy) = (x, y, z)_{rs} + (y, z, x)_{rs} + (z, x, y)_{rs} \\ &= \omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{A}^{(-)}$ является алгеброй ω -Ли. $\square$

Исследуем нетривиальную алгебру $\mathcal{A}_\omega$ над полем F , т. е. с нетривиальным ω -тождеством (12): $\omega : \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \mapsto F$ — ненулевая кососимметрическая форма на $\mathcal{A}_\omega$. Всюду далее ω -правосимметрические алгебры будут предполагаться нетривиальными.

Покажем, что на $\mathcal{A}_\omega$ выполняется следующее тождество с формой:

$$(\omega(x, [y, z]) + \omega(z, [x, y]) + \omega(y, [z, x]))v = v(\omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z) \quad (13)$$

для всех $x, y, z, v \in \mathcal{A}_\omega$.

Рассмотрим тождество пяти ассоциаторов

$$(v, x, y, z) + (v, x, yz) - v(x, y, z) - (v, x, y)z - (v, xy, z) = 0, \quad (14)$$

выполняющееся в любой алгебре. Сделав в (14) замены $\{x, y, z\} \mapsto \{y, z, x\}$ и $\{x, y, z\} \mapsto \{z, x, y\}$, приходим соответственно к соотношениям

$$\begin{aligned} (vy, z, x) + (v, y, zx) - v(y, z, x) - (v, y, z)x - (v, yz, x) &= 0, \\ (vz, x, y) + (v, z, xy) - v(z, x, y) - (v, z, x)y - (v, zx, y) &= 0. \end{aligned}$$

Суммируя эти три равенства и используя (12), получаем

$$\begin{aligned} (vx, y, z) + (vy, z, x) + (vz, x, y) + (\omega(x, yz) + \omega(y, zx) + \omega(z, xy))v \\ - v(x, y, z) - (v, x, y)z - v(y, z, x) - (v, y, z)x - v(z, x, y) - (v, z, x)y = 0. \end{aligned}$$

Переставив в последнем равенстве x и z и вычитая полученное, после сокращения приходим к (13).

Обозначим ядро отображения ω через $\text{Ker } \omega := \{x \in \mathcal{A}_\omega : \omega(x, \mathcal{A}_\omega) = 0\}$. Напомним, что ω называется *невыврожденным*, если $\text{Ker } \omega = 0$. Алгебру $\mathcal{A}_\omega$ с ω -тождеством (12) назовем *невыврожденной*, если ω невырожденно.

Определим полилинейное отображение $\psi : \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \times \mathcal{A}_\omega \mapsto \mathcal{A}_\omega$ правилом

$$\psi(x, y, z) = \omega(y, z)x + \omega(z, x)y + \omega(x, y)z.$$

Далее для простоты изложения предполагаем конечномерность всех встречающихся векторных пространств над полем F и считаем, что $\chi(F) \neq 2$. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма 3.1. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — векторное пространство над полем F с невырожденной кососимметрической формой ω и $n := \dim \mathcal{A}_\omega \geq 4$. Тогда $\text{Im } \psi = \mathcal{A}_\omega$.

Доказательство. Из невырожденности ω следует, что базис $e_1, \dots, e_{2k}$, $2k = n$, можно выбрать в $\mathcal{A}_\omega$ так, что $\omega(e_{2s-1}, e_{2s}) = 1$, $\omega(e_i, e_j) = 0$ при $\{i, j\} \neq \{2s-1, 2s\}$, $s = 1, \dots, k$. Тогда $\psi(e_i, e_{2s-1}, e_{2s}) = e_i$ при $i \notin \{2s-1, 2s\}$, что и доказывает лемму. $\square$

Пусть $S := \text{Ker } \omega \neq 0$. Из (13) следует, что если $x \in S$, то $vx = \xi_x v$ для некоторого $\xi \in S^*$ и для всех $v \in \mathcal{A}_\omega$. В частности, S является подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$. Представим $\mathcal{A}_\omega$ в виде $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$. Тогда ω невырожденно на U . Если $\dim U > 2$, то из леммы 3.1 и (13) получаем $vx = \theta_x v$ для любых $v \in \mathcal{A}_\omega$, $x \in U$ и некоторого $\theta \in U^*$. Таким образом, $vx = \tau_x v$ для некоторого $\tau \in \mathcal{A}_\omega^*$ и всех $v, x \in \mathcal{A}_\omega$. Теперь $(v, x, y) = (\tau_x \tau_y - \tau_{xy})v$, $\tau_{xy} = \tau(\tau_y x) = \tau_x \tau_y$, т. е. $(v, x, y) = 0$ для любых $x, y, v \in \mathcal{A}_\omega$. Получили противоречие с нетривиальностью ω . Таким образом, $\dim U = 2$. Заметим, что если $\mathcal{A}_\omega$ невырожденна, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и алгебра $\mathcal{A}_\omega$ проста. Действительно, пусть $I = \langle a \rangle$ — ненулевой идеал в $\mathcal{A}_\omega$, $\mathcal{A}_\omega = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $\omega(a, b) = 1$. Тогда $(x, a, b)_{rs} = x \in I$ для любого $x \in \mathcal{A}_\omega$; противоречие.

Заметим, что

$$(U, S, S) = (S, U, S) = (S, S, U) = 0.$$

Действительно, для любых $u \in U, a, b \in S$ имеем

$$\begin{aligned} (u, a, b) &= \xi_a \xi_b u - \xi_{ab} u = \xi_a \xi_b u - \xi_{\xi_b a} u = 0, \\ (a, b, u) &= (a, u, b) = \xi_b a u - \xi_{ba} u = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

так как $xa = \xi_a x$ для любых $x \in \mathcal{A}_\omega, a \in S$. Таким образом, доказана

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра. Тогда $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, где $S := \text{Ker } \omega$ является правосимметрической подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$, $US \subseteq U$, $(U, S, S) = (S, U, S) = (S, S, U) = 0$, $\dim U = 2$ и ω невырожденно на U . В частности, если $\mathcal{A}_\omega$ невырожденна, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и алгебра $\mathcal{A}_\omega$ проста.

Рассмотрим случай $\xi = 0$, т. е. S — алгебра с нулевым умножением и $US = 0$. Если левое действие S на U нулевое, то, полагая в (12) $x \in S, y, z \in U$ при $\omega(y, z) = 1$, приходим к противоречию. Значит, можно считать, что существует $u \in U$ такой, что $au \neq 0$ для некоторого $a \in S$. Пусть $au = b + v$ для ненулевого $v \in U$ и некоторого $b \in S$. Тогда из (15) имеем $s \cdot au = 0$ и $sv = 0$ для любого $s \in S$. Значит, $U = \langle u, v \rangle$, при этом можно предполагать $\omega(u, v) = 1$. Если $su = c + \beta u + \gamma v$ для $s, c \in S, \beta, \gamma \in F$, то $0 = a \cdot su = \beta au$ и $\beta = 0$. Таким образом, получаем следующее левое действие S на U :

$$su = \phi_s + \tau_s v, \quad sv = 0$$

для любого $s \in S$ и некоторых $\phi \in \text{End } S, \tau \in S^*$.

Предположим, что $\tau \neq 0$. Равенства $(u, s, u)_{rs} = 0$ и $(v, s, u)_{rs} = 0$ при $s \in S$ дают $\tau_s uv = 0$ и $\tau_s v^2 = 0$, т. е. $uv = 0 = v^2$. Теперь $(s, u, v)_{rs} = s$ влечет $-s \cdot uv + s \cdot vu = s \cdot vu = s$. Если $vu = d + \theta u + \nu v$ для некоторых $d \in S, \theta, \nu \in F$, то $s \cdot vu = \theta(\phi_s + \tau_s v) = s$, что противоречиво. Таким образом, в случае алгебры S с нулевым умножением левое действие S на U (в $S+U$) — это правое действие U на S , т. е. $SU \subseteq S$. Заметим, что по доказанному равенство $(U, S, U) = 0$ выполнено всегда при условии $S^2 = 0$, а равенство $(s, u_1, u_2)_{st} = \omega(u_1, u_2)s$ для любых

$u_i \in U$ и $s \in S$ эквивалентно $(su)v - s(uv) - (sv)u + s(vu) = s$ для любого $s \in S$ и $U = \langle u, v \rangle$, $\omega(u, v) = 1$. Последнее равенство можно переписать в операторном виде через операторы правого умножения $R_u, R_v, R_{[u,v]}$ действующие из S в S при $u, v \in U$:

$$[R_u, R_v] - R_{[u,v]} = \text{Id}. \quad (16)$$

Осталось определить умножение на U (в $S + U$). Положим

$$u_1 u_2 = h(u_1, u_2) + u_1 \circ u_2, \quad (17)$$

где $h : U \times U \mapsto S$, $u_i \in U$, а $\circ$ — некоторое произведение в U . Тогда из (12) следует, что $(U; \circ) := \langle u, v \rangle$ — двумерная алгебра с ω -тождеством (12), а h согласовано с действием U на S следующим образом:

$$\begin{aligned} h(u, u)v - h(u, v)u &= h(u, u \circ v) - h(u \circ u, v) + h(u \circ v, u) - h(u, v \circ u), \\ h(v, v)u - h(v, u)v &= h(v, v \circ u) - h(v \circ v, u) + h(v \circ u, v) - h(v, u \circ v). \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что если $S \neq 0$, то S — собственный идеал в $\mathcal{A}_\omega$.

Обратно, если $\mathcal{A} = S \oplus U$, где U и S удовлетворяют вышеперечисленным условиям, то легко проверяется, что $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй.

Для построенной алгебры $\mathcal{A} := \mathcal{A}_\omega$ обозначим через $\mathcal{L}$ алгебру $\mathcal{A}^{(-)}$. Тогда легко видеть, что $[\mathcal{L}, \mathcal{L}] = S \oplus \langle u \circ v \rangle$. Так как $SU \subseteq S$, то $[[\mathcal{L}, \mathcal{L}], [\mathcal{L}, \mathcal{L}]] \subseteq S$, а потому $\mathcal{L}$ разрешима степени ≤ 3 . Таким образом, доказана следующая

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра, $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, и $S := \text{Кег } \omega$ — алгебра с нулевым умножением. Тогда $US = 0$, $SU \subseteq S$, умножение на U задается правилом $uv = h(u, v) + u \circ v$, где $\omega(u, v) = 1$, $(U; \circ) = \langle u, v \rangle$ — двумерная ω -правосимметрическая алгебра, умножение на U определено при помощи (17), h согласовано с действием U на S посредством (18) и выполнены соотношения (16). В частности, если $\mathcal{A}_\omega$ проста, то $\dim \mathcal{A}_\omega = 2$ и $\mathcal{A}_\omega = U$. Обратно, если $\mathcal{A} = S \oplus U$, где U и S удовлетворяют вышеперечисленным условиям, то $\mathcal{A}$ является ω -правосимметрической алгеброй. При этом $\mathcal{A}_\omega^{(-)}$ является разрешимой алгеброй ω -Ли степени ≤ 3 , которая содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим $(n+2)$ -мерную алгебру $\mathcal{A}_\omega := S + U$ над полем F , где $S = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $U = \langle u, v \rangle$, $\omega(u, v) = \alpha$, и произведение определено как в теореме 3.2, считая произведение на U заданным по правилу

$$u^2 = u + \beta v, \quad uv = v, \quad vu = \alpha u + (1 - \alpha\beta)v; \quad v^2 = \alpha\beta^{-1}u - \alpha v,$$

для некоторых фиксированных ненулевых $\alpha, \beta \in F$. Легко проверить, что U удовлетворяет ω -тождеству (12), а (16) в данном случае эквивалентно разрешимости уравнения $[X, Y] = Y$ в $M_n(F)$, которое имеет многочисленные решения. Поэтому, определяя h нулевым отображением, получаем многочисленные примеры ω -правосимметрических алгебр.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Двумерные ω -правосимметрические алгебры легко классифицировать, что оставляем заинтересовавшемуся читателю.

Рассмотрим теперь случай ненулевого умножения на S . Будем говорить, что $\mathcal{A}_\omega$ — алгебра с нетривиальным ядром, если $\text{Кег } \omega$ — это алгебра с ненулевым умножением.

Поскольку $\dim \text{Ker } \xi = \dim S - 1$, базис $\{e, f_1, \dots, f_{n-1}\}$ в S можно выбрать так, что ненулевыми являются только следующие произведения базисных элементов:

$$e^2 = e, \quad fe = f \quad (19)$$

при $f \in W := \text{Ker } \xi = \langle f_1, \dots, f_{n-1} \rangle$; $\xi(e) = 1$, откуда $xe = x$ для любого $x \in \mathcal{A}_\omega$. Легко видеть, что S является ассоциативной подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$. Из (15) имеем $ab \cdot u = a \cdot bu$ для любых $u \in U, a, b \in S$, откуда получаем следующие соотношения для левого действия S на U (в $S + U$):

$$eu = e \cdot eu, \quad e \cdot fu = 0, \quad f \cdot gu = 0, \quad fu = f \cdot eu \quad (20)$$

для любых $f, g \in W, u \in U$. Отметим, что случай $W = 0$ также допустим, при этом $S = \langle e \rangle$ — поле.

Заметим, что если $SU = 0$, то из соотношений $(x, e, y)_{rs} = 0$ для любых $x, y \in U$ следует $U^2 = 0$, что противоречит (12). Таким образом, $SU \neq 0$.

Рассмотрим случай $SU \neq 0$ и $SU \subseteq S$. Учитывая (20) и подправляя при необходимости базис $\langle u, v \rangle$ в U , можно считать, что $ev = e, eu = e$. Из равенств $(x, e, y)_{rs} = 0$ для всех $x, y \in U$ получаем, что U является подалгеброй с произведением

$$u^2 = u, \quad v^2 = v, \quad vu = v, \quad uv = u,$$

которое, очевидно, ассоциативно, а потому соотношение (12) противоречиво на U .

Таким образом, $SU \not\subseteq S$. Если $fu = a + v$ для некоторых $f \in W, a \in S, u, v \in U, v \neq 0$, то из $f \cdot eu = fu$ следует $eu \notin S$. Таким образом, всегда можно считать, что $eu = b + v$ для некоторых $b \in S, u, v \in U, v \neq 0$. Тогда $eu = e \cdot eu = eb + ev$, откуда $ev \equiv v$ (здесь и далее, если не оговорено противное, то сравнимость $\equiv$ рассматривается по модулю S). Рассматривая $u - v$ вместо u , получаем $ev \equiv v, eu \equiv 0$. Итак, имеем

$$ev = v + g, \quad eu = \tau e, \quad fu = \tau f$$

для некоторых $g \in W, \tau \in F$ и произвольного $f \in W$, что получается из соотношений (20). Заметим, что $x \cdot f = 0, x \cdot e = x$ для любых $x \in \mathcal{A}_\omega, f \in W$, и можно считать $\omega(u, v) = 1$.

Из соотношения $(v, e, u)_{rs} = 0$ получаем $vu = \tau v$. Из $e \cdot fv = 0$ выводим $fv \equiv \gamma_f(u - \tau e)$ для произвольного $f \in W$ и некоторого $\gamma \in S^*$ (здесь и далее сравнимость по модулю W). Пусть $uv = \beta e + f_1 + \varsigma v + \sigma u$ для некоторых $\beta, \varsigma, \sigma \in F, f_1 \in W$. Тогда из $(e, u, v)_{rs} = e$ следует

$$\tau ev - e \cdot uv - (v + g)u + \tau(v + g) = e,$$

$$\tau(v + g) - (\beta e + \varsigma(v + g) + \sigma \tau e) = e,$$

откуда $\varsigma = \tau, \beta + \sigma\tau = -1$. Из соотношения $(u, e, u)_{rs} = 0$ получаем $u^2 = \tau u$.

Проверяя оставшиеся соотношения, убеждаемся в их истинности при полученных ограничениях. Таким образом, алгебра $\mathcal{A}_\omega$ в данном случае задается произведением (19) в подалгебре S и следующими условиями ($\equiv \text{mod } W$):

$$\begin{aligned} ev \equiv v, \quad au = \tau a, \quad fv \equiv \gamma_f(u - \tau e), \quad \omega(u, v) = 1, \\ uv \equiv -(1 + \sigma\tau)e + \tau v + \sigma u, \quad ae = a, \quad af = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

для любых $a \in \mathcal{A}_\omega, f \in W$ и произвольных фиксированных $\sigma, \tau \in F, \gamma \in W^*$. Отметим, что ограничений на v^2 нет, т. е. v^2 можно положить произвольным

элементом из $\mathcal{A}_\omega$. В случае $W = 0$ доказательство проходит аналогично и в результате получаются те же самые правила для произведения (19) и (21), в которых f и W отсутствуют, а $\equiv$ заменяется равенством. Обратно, легко проверяется, что любая алгебра с произведением, заданным при помощи (19) и (21), ω -правосимметрическая.

Заметим, что $[S, \mathcal{A}_\omega] \subseteq \mathcal{B} := \langle u - \tau e \rangle \oplus S$, $[\mathcal{B}, \mathcal{B}] \subseteq \mathcal{C} := \langle u - \tau e \rangle \oplus W$, а $[\mathcal{C}, \mathcal{C}] = 0$. В итоге доказана

Теорема 3.3. Пусть $\mathcal{A}_\omega$ — конечномерная ω -правосимметрическая алгебра с нетривиальным ядром. Тогда $\mathcal{A}_\omega = S \oplus U$, где $S := \text{Ker } \omega$ и ненулевое произведение в S задается при помощи (19), S является ассоциативной подалгеброй в $\mathcal{A}_\omega$, $SU \neq 0$, $SU \subseteq S$, а произведение $\mathcal{A}_\omega \times U \mapsto \mathcal{A}_\omega$ удовлетворяет условиям (21). Обратно, любая алгебра с произведением, заданным при помощи (19) и (21), ω -правосимметрическая. При этом $\mathcal{A}_\omega^{(-)}$ является разрешимой алгеброй ω -Ли степени ≤ 3 , которая содержит абелеву подалгебру коразмерности 2.

Алгебры, выделенные теоремой 3.3, будем обозначать через $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$, где π, h — наборы соответствующих параметров из F и элементов из W , определяющие умножение в данной алгебре.

В заключение установим критерий простоты ω -правосимметрических алгебр $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$. В формулировке теоремы 3.4 используем обозначения из доказательства теоремы 3.3, а для ее доказательства понадобится

Лемма 3.2. Если I — собственный идеал ω -правосимметрической алгебры, то $I \subseteq \text{Ker } \omega$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — ω -правосимметрическая алгебра. Так как $(x, i, y)_{rs} = (i, y)x$ для любых $i \in I$, $x, y \in \mathcal{A}$, то, выбирая $x \notin I$, получим, что левая часть предыдущего равенства лежит в I , а правая не лежит в I , если $I \not\subseteq \text{Ker } \omega$. $\square$

Теорема 3.4. Алгебра $\mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$ проста тогда и только тогда, когда $\text{Ker } \gamma$ не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств.

Доказательство. Заметим, что если $\text{Ker } \gamma$ содержит ненулевое R_v -инвариантное подпространство Γ , то $\Gamma \trianglelefteq \mathbb{A} := \mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$. Поэтому далее можно считать, что $\text{Ker } \gamma$ не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств.

Докажем простоту алгебры $\mathbb{A}$. Пусть I — ненулевой идеал в $\mathbb{A}$ и x — ненулевой элемент из I . Тогда $x = \alpha e + \beta f$ по лемме 3.2, где $\alpha, \beta \in F$, $f \in W$, откуда $ex = \alpha e \in I$, $\alpha = 0$ и $\beta f \in I$. Таким образом, $f \in I$ для некоторого $f \in W$.

Заметим, что если $f \in I \cap \text{Ker } \gamma$, то $fR_v^k \notin \text{Ker } \gamma$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $u - \tau e + h \in I$ для некоторого $h \in W$, но тогда $I = \mathbb{A}$ по лемме 3.2. Если же $f \in I$, но $f \notin \text{Ker } \gamma$, то опять $u + h \in I$ для некоторого $h \in W$ и $I = \mathbb{A}$, как и выше. В итоге в любом случае приходим к равенству $I = \mathbb{A}$.

Если $W = 0$, то всегда можно считать, что $\text{Ker } \gamma$, равное нулю, не содержит ненулевых R_v -инвариантных подпространств. В этом случае аналогичные рассуждения показывают, что алгебра $\mathbb{A}$ простая. $\square$

Следующая заключительная лемма дает пример простой конечномерной ω -правосимметрической алгебры произвольной размерности $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$.

Лемма 3.3. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $W := \langle f_1, \dots, f_n \rangle$ в $\mathbb{A} := \mathcal{A}_\omega(\gamma, \pi, h)$ и $\gamma \in W^*$ такой, что $\gamma(f_1) = 1$, $\gamma(f_i) = 0$ при $i \geq 2$. Если правое действие v на W (в $W + U$) определено правилом

$$f_1 v = u - \tau e, \quad f_i v = f_{i+1}, \quad 1 < i < n, \quad f_n v = f_1,$$

то алгебра $\mathbb{A}$ простая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, легко видеть, что если $V \leq W$ является R_v -инвариантным и $w = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i \in V$ для некоторых $\alpha_i \in F$, то $\alpha_1 = 0$, откуда следует $\alpha_n = 0$, и далее получаем $\alpha_i = 0$ для любого $i = 2, \dots, n-1$. Таким образом, $V = 0$ и алгебра $\mathbb{A}$ проста по теореме 3.4. $\square$

Учитывая пример 3.1, теорему 3.4 и лемму 3.2, получаем, что простые ω -правосимметрические алгебры существуют в произвольной размерности $k \geq 2$ над произвольным полем F характеристики не 2.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, позволившие улучшить изложение данной статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пожидаев А. П. Об эндоморфах правосимметрических алгебр // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1077–1086.
2. Nurowski P. Deforming a Lie algebra by means of a 2-form // J. Geometry Physics. 2007. V. 57. P. 1325–1329.
3. Zhang R. Representations of ω -Lie algebras and tailed derivations of Lie algebras // Inter. J. Algebra Comput. 2021. V. 31. P. 325–339.
4. Zusmanovich P. ω -Lie algebras // J. Geom. Phys. 2010. V. 60, N 6–8. P. 1028–1044.
5. Общая алгебра / под. ред. Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1990. Т. 1.

Поступила в редакцию 25 февраля 2025 г.

После доработки 24 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Пожидаев Александр Петрович (ORCID 0000-0002-2038-166X)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

app@math.nsc.ru

КОНЕЧНЫЕ МИНИМАЛЬНЫЕ НЕ σ -СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ

О. Л. Шеметкова

Аннотация. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел. Конечная группа G называется σ -сверхразрешимой, если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала циклический. В работе исследуется строение минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не являются σ -разрешимыми.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.414

Ключевые слова: конечная группа, σ -сверхразрешимая группа, минимальная не σ -сверхразрешимая группа, разбиение множества всех простых чисел.

1. Введение

Все рассматриваемые группы конечны.

Следуя [1, с. 206], зафиксируем разбиение $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ множества $\mathbb{P}$ всех простых чисел на попарно не пересекающиеся непустые подмножества σ_i , индексированные элементами некоторого множества индексов I . Понятно, что σ — это отношение эквивалентности на множестве $\mathbb{P}$, при котором простые числа p и q эквивалентны тогда и только тогда, когда существует $i \in I$ такое, что $p, q \in \sigma_i$. Элементы σ_i ($i \in I$) разбиения σ будем называть его σ -слоями, а σ -слой, содержащий число p , будем обозначать через $\sigma(p)$. В частности, $\sigma(2)$ — это тот σ -слой, который содержит число 2.

В последние годы в теории конечных групп активно развивается направление, связанное с изучением их σ -свойств. Один из важных аспектов этой программы связан с установлением строения групп, расположенных критически по отношению к определенному σ -свойству, т. е. групп G , все собственные подгруппы которых обладают рассматриваемым σ -свойством, а сама группа G не обладает. При этом под σ -свойством понимается такое групповое свойство, которое связано с произвольным разбиением σ . Как показывают многочисленные исследования, наличие в группе критических σ -подгрупп с заданным свойством оказывает существенное влияние на ее строение (см., в частности, [2]).

Группа G называется:

- σ -примарной, если существует $i \in I$ такое, что $\pi(G) \subseteq \sigma_i$;
- σ -нильпотентной (пишем $G \in \mathfrak{N}_\sigma$), если G является прямым произведением σ -примарных подгрупп;
- σ -сверхразрешимой (пишем $G \in \mathfrak{U}_\sigma$), если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала циклический;
- σ -разрешимой (пишем $G \in \mathfrak{S}_\sigma$), если G обладает нормальным рядом с σ -примарными факторами.

Ясно, что в случае *минимального разбиения* $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$, состоящего из одноэлементных подмножеств, справедливы равенства $\mathfrak{N}_\sigma = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}_\sigma = \mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}_\sigma = \mathfrak{S}$, где $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{S}$ — классы всех нильпотентных, всех сверхразрешимых и всех разрешимых групп соответственно. Кроме того, $\mathfrak{N}_\sigma \subseteq \mathfrak{U}_\sigma \subseteq \mathfrak{S}_\sigma$ для любого разбиения σ .

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *минимальной не $\mathfrak{F}$ -группой*, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Исследования σ -свойств конечных групп инициировали следующие два вопроса.

Вопрос 1 [3, вопрос 4.9]. Верно ли, что любая минимальная не σ -нильпотентная группа σ -разрешима?

Вопрос 2 [4]. Какова структура минимальной не σ -сверхразрешимой группы?

Как отмечено в [5], из основного результата работы [6], опирающегося на классификацию конечных простых групп, следует, что группа G является минимальной не σ -нильпотентной группой тогда и только тогда, когда G — группа Шмидта и простые делители ее порядка принадлежат различным σ -слоям (*группой Шмидта* называется ненильпотентная группа, все собственные подгруппы которой являются нильпотентными). Отметим, что строение групп Шмидта хорошо изучено (см., например, работы [7–9]).

Общая структура минимальных не σ -сверхразрешимых групп в случае минимального разбиения $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ исследована в работах [10, 11]. Детально такие группы описаны в [12]. При этом выделены 11 типов минимальных несверхразрешимых групп.

В работе [4] рассмотрено произвольное разбиение σ и описано строение σ -разрешимых минимальных не σ -сверхразрешимых групп. При этом дополнительно выделены три класса минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не являются минимальными несверхразрешимыми группами.

Теорема 1 [4]. Пусть G — σ -разрешимая группа, которая не σ -примарна. Если G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, которая не является минимальной несверхразрешимой группой, то $G/\Phi(G)$ — также минимальная не σ -сверхразрешимая группа и выполняется одно из следующих условий.

1. $G = E : K$, где E — σ -примарная минимальная не p -сверхразрешимая группа, подгруппа $K = \langle \alpha \rangle$ циклическая, $|\alpha| = r^s$, где r — простое число, не принадлежащее $\sigma(p)$. Пусть в этом случае $E = PQ$, где P — p -сверхразрешимый корадикал подгруппы E и Q — K -инвариантное дополнение подгруппы P в E . Тогда $[K, Q] = [\langle \alpha^r \rangle, E] = 1$ и α индуцирует нетривиальный степенной автоморфизм на $P/\Phi(P)$.

2. $G = P : (HK)$ — минимальная не p -сверхразрешимая группа (соответствует типу 11 из [12, теорема 9] при $H = M$ и $K = C$) и подгруппа HK σ -примарна.

3. $G = PM$ и $M = HK$, где P — нормальная p -подгруппа в G для некоторого простого p , H и K — силовская q -подгруппа и силовская r -подгруппа из M соответственно, и PH — σ -примарная группа. Группа $P/P \cap \Phi(G)$ NK -неприводима, $K = \langle \alpha \rangle$ и $H = \langle \beta \rangle$ — циклические группы. В этом случае имеются два различных подкласса:

(i) $PK = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, $|\alpha| = q^m$, $|\beta| = r^{n+l}$, $\alpha^q, \beta^{r^n} \in \Phi(G) \cap Z(G)$;

(ii) $PH = G^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$, $|\alpha| = q^{m+n}$, $|\beta| = r^l$, $\alpha^{q^n}, \beta^r \in \Phi(G) \cap Z(G)$.

В данной работе исследуется строение минимальных не σ -сверхразрешимых групп, которые не σ -разрешимы.

Наша главная цель — доказательство следующей теоремы, которая вместе с теоремой 1 дает полный ответ на вопрос 2.

Теорема 2. *Если группа G не σ -разрешима, то G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*

- 1) $G/\Phi(G)$ — простая минимальная не σ -сверхразрешимая группа;
- 2) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$.

Из [10] следует, что в случае минимального разбиения $\sigma = \{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ все минимальные не σ -сверхразрешимые группы (т. е. все минимальные не сверхразрешимые группы) разрешимы. В данной работе показано, что в общем случае существуют минимальные не σ -сверхразрешимые группы, которые не σ -разрешимы. В частности, для разбиения σ с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$ группа $PSL(3, 3)$ является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

2. Обозначения и предварительные результаты

В работе используются определения и обозначения, принятые в [13]. Терминологию теории σ -субнормальных подгрупп можно найти в [3].

Если n — натуральное число, то через $\pi(n)$ обозначается множество всех простых чисел, делящих n ; в частности, $\pi(G) = \pi(|G|)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок группы G .

Если π — некоторое множество простых чисел, то символом π' обозначается множество всех тех простых чисел, которые не принадлежат π .

Напомним, что *формация* — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и конечных подпрямых произведений. Формация $\mathfrak{F}$ называется *насыщенной*, если всегда из $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ следует $G \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то в любой группе G существует наименьшая нормальная подгруппа, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Эта подгруппа обозначается через $G^{\mathfrak{F}}$ и называется *$\mathfrak{F}$ -корадикалом* группы G .

Класс $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

- 1) $\mathfrak{F}$ — нормально наследственный класс;
- 2) из $G = AB$, где A и B — нормальные подгруппы группы G , принадлежащие $\mathfrak{F}$, всегда следует $G \in \mathfrak{F}$.

Формация Фиттинга — это формация, являющаяся классом Фиттинга.

Простая проверка показывает, что класс $\mathfrak{N}_\sigma$ всех σ -нильпотентных групп является наследственной насыщенной формацией Фиттинга.

Группа G называется *σ -сверхразрешимой*, если каждый G -главный фактор ее σ -нильпотентного корадикала $G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ циклический. Из определения, в частности, следует, что сверхразрешимая группа σ -сверхразрешимая для любого разбиения σ множества всех простых чисел.

Отметим следующие важные свойства σ -сверхразрешимых групп для любого разбиения σ множества всех простых чисел.

Лемма 1 [14, теорема 1.3]. 1. *Класс $\mathfrak{U}_\sigma$ является наследственной формацией.*

2. Формация $\mathfrak{U}_\sigma$ насыщенная тогда и только тогда, когда $\pi(p-1) \subseteq \sigma(2)$ для всех $p \in \sigma(2)$ и $|\sigma(q)| = 1$ для всех $q \notin \sigma(2)$.

3. Формация $\mathfrak{U}_\sigma$ является классом Фиттинга тогда и только тогда, когда $\sigma(2)$ — множество всех простых чисел.

Так как ввиду леммы 1 класс $\mathfrak{U}_\sigma$ наследственный, то при исследовании структуры минимальной не $\mathfrak{U}_\sigma$ -группы достаточно ограничиться анализом строения ее максимальных подгрупп.

Лемма 2. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Если G не σ -разрешима, то $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$.

Доказательство. Так как группа G не σ -разрешима, то она обладает неабелевым композиционным фактором A/B , который не является σ -примарной группой. Предположим, что $A \subset G$. Так как G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, то подгруппа A σ -сверхразрешима, а значит, фактор A/B σ -примарен, что противоречит предположению.

Следовательно, $A = G$ и G/B — простая неабелева группа. Предположим, что подгруппа B обладает нефраттиниевым G -главным фактором C/D . Тогда в G найдется максимальная подгруппа M , которая не покрывает фактор C/D , т. е. $D \subseteq M$ и $MC = G$. Понятно, что подгруппа M σ -сверхразрешима. Поэтому из

$$G/B = MC/B = MB/B \simeq M/M \cap B$$

следует, что G/B — σ -примарная группа. Снова пришли к противоречию.

Таким образом, все G -главные факторы подгруппы B фраттиниевы в G , а значит, $B \subseteq \Phi(G)$. Кроме того, так как G не σ -разрешима, то $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$, т. е. G не является σ -примарной группой.

Лемма доказана.

Минимальная неразрешимая группа — это неразрешимая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Простая проверка показывает, что группа G является минимальной неразрешимой группой тогда и только тогда, когда $G/\Phi(G)$ — минимальная простая группа, т. е. неабелева простая группа, все собственные подгруппы которой разрешимы. Полный список минимальных простых групп приведен Томпсоном в [15]. Этот список содержит следующие группы:

- $PSL_2(2^p)$, где p — простое число;
- $PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3;
- $PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
- $PSL_3(3)$;
- $Sz(2^p)$, p — простое нечетное число.

Описание подгрупп группы $PSL_2(q)$ содержится в известной теореме Диксона (см., например, [16, теорема II.8.27]). В дальнейшем будем опираться на нее без дополнительных ссылок.

Для описания расширений групп используются следующие обозначения из [17]: $A \times B$ — прямое произведение подгрупп A и B ; $A : B$ — расщепляемое расширение группы A с помощью группы B .

Если A и B — циклические подгруппы порядка n и m соответственно, то с учетом изложенного понятно обозначение $n : m$.

Нормальная подгруппа E группы G называется *гиперцентральной*, если либо $E = 1$, либо каждый ее G -главный фактор центральный (в G). Далее $Z_\infty(G)$ обозначает произведение всех нормальных гиперцентральных подгрупп

группы G и называется ее *гиперцентром*. Простая проверка показывает, что $Z_\infty(G)$ — нормальная гиперцентральная подгруппа группы G .

3. Доказательство теоремы 2

1. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Тогда по лемме 2 $G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G)\}| > 1$. Из последнего условия следует, что группа $G/\Phi(G)$ не σ -примарна, поэтому $G/\Phi(G)$ не σ -сверхразрешима и ввиду леммы 1 $G/\Phi(G)$ — минимальная не σ -сверхразрешимая группа.

Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой $\Phi(G)$ не совпадает с $Z_\infty(G)$. Если N — минимальная нормальная подгруппа группы G , то $N \subseteq \Phi(G)$. Очевидно, $G/N/\Phi(G/N) \cong G/\Phi(G)$ — простая неабелева группа, являющаяся минимальной не σ -сверхразрешимой группой, и $|\{\sigma(p) \mid p \in \pi(G/N)\}| > 1$. Отсюда ввиду выбора группы G имеем

$$\Phi(G/N) = \Phi(G)/N = Z_\infty(G/N).$$

Если группа G имеет минимальную нормальную подгруппу L , отличную от N , то ввиду выбора группы G подгруппа NL/L центральна в G/L . Но тогда из G -изоморфизма $NL/L \cong N$ следует, что $N \subseteq Z(G)$, значит, $\Phi(G) = Z_\infty(G)$, что невозможно.

Таким образом, N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G . Поэтому $\Phi(G) = O_p(G)$ и из выбора группы G и простоты группы $G/\Phi(G)$ следует, что $C_G(N) = \Phi(G) = O_p(G)$. Отсюда имеем, что группа $G/\Phi(G)$ изоморфна некоторой подгруппе группы автоморфизмов группы N .

Предположим, что все максимальные подгруппы группы $G/\Phi(G)$ σ -нильпотентны. Тогда ввиду теоремы 1 из [5] $G/\Phi(G)$ — группа Шмидта, что в силу выбора группы G невозможно. Таким образом, в группе $G/\Phi(G)$ найдется некоторая максимальная подгруппа $M/\Phi(G)$, которая не принадлежит классу $\mathfrak{N}_\sigma$.

Пусть $D = M^{\mathfrak{N}_\sigma}$ — σ -нильпотентный корадикал подгруппы M . Рассмотрим M -главный ряд

$$1 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_t = D \cap N \subset N_{t+1} \subset \dots \subset N_k = N.$$

Для любого $i = 1, 2, \dots, t$ из $M \in \mathfrak{U}_\sigma$ следует, что N_i/N_{i-1} — циклическая группа порядка p . Тогда $M/C_M(N_i/N_{i-1})$ — циклическая группа порядка, делящего $p-1$. Отсюда, в частности, $M/C_M(N_i/N_{i-1}) \in \mathfrak{U}_\sigma$, а значит, $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$. Если $i = t+1, \dots, k$, то имеет место M -изоморфизм

$$N_i D / N_{i-1} D \cong N_i / N_i \cap N_{i-1} D = N_i / N_{i-1} (N_i \cap D) = N_i / N_{i-1}.$$

Отсюда

$$D \subseteq C_M(N_i D / N_{i-1} D) = C_M(N_i / N_{i-1}).$$

Кроме того, $ND/D \subseteq O_p(M/D)$. Поэтому $C_M(N_i/N_{i-1})$ содержит $\sigma(p)'$ -холлову подгруппу из M , а значит, $C_M(N_i/N_{i-1})$ — $\sigma(p)'$ -группа и $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$. Итак, для любого $i = 1, 2, \dots, k$ имеем $D \subseteq C_M(N_i/N_{i-1})$ и

$$M^{\mathfrak{N}_\sigma} \subseteq \bigcap_{i=1}^k C_M(N_i/N_{i-1}).$$

Таким образом, $M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G)/\Phi(G)$ — стабильная группа автоморфизмов группы N . По лемме 9.3 из [1] $M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G)/\Phi(G)$ является p -группой.

Рассмотрим подгруппу M^x , где $x \in G$. Так как подгруппа M^x максимальна в G , то $\Phi(G) \subseteq M^x$. Очевидно, $(M^x)^{\mathfrak{N}_\sigma} = (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x$. По аналогии с изложенным выше можно доказать, что группа $(M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G)$ является p -группой, действующей стабильно на группе N . Простая проверка показывает, что группа

$$\langle M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G), (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G) \rangle$$

также действует стабильно на группе N . Снова применяя лемму 9.3 из [1], получаем, что $\langle M^{\mathfrak{N}_\sigma}, (M^{\mathfrak{N}_\sigma})^x \Phi(G) / \Phi(G) \rangle$ — p -группа. Отсюда ввиду [18]

$$1 \neq M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G) \subseteq O_p(G / \Phi(G)),$$

что противоречит простоте группы $G / \Phi(G)$.

Таким образом, $C_G(N) = G$ и $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Снова пришли к противоречию с выбором группы G .

2. Пусть $G \notin \mathfrak{S}_\sigma$, $G / \Phi(G)$ — простая минимальная не σ -сверхразрешимая группа и $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G . Тогда $\Phi(G) \subseteq M$. Так как $G / \Phi(G)$ — минимальная не σ -сверхразрешимая группа, то $M / \Phi(G) \in \mathfrak{U}_\sigma$. По определению тогда все M -главные факторы подгруппы $M / \Phi(G)$, расположенные ниже

$$(M / \Phi(G))^{\mathfrak{N}_\sigma} = M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G),$$

циклические. Так как $\Phi(G) = Z_\infty(G)$, из

$$M^{\mathfrak{N}_\sigma} \Phi(G) / \Phi(G) \cong M^{\mathfrak{N}_\sigma} / M^{\mathfrak{N}_\sigma} \cap \Phi(G)$$

следует, что все M -главные факторы, расположенные ниже $M^{\mathfrak{N}_\sigma}$, циклические, т. е. $M \in \mathfrak{U}_\sigma$. Таким образом, все максимальные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{U}_\sigma$, но сама группа G в $\mathfrak{U}_\sigma$ не входит. Следовательно, G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа.

Теорема доказана.

4. Замечания и примеры

Из [10] следует, что любая минимальная не сверхразрешимая подгруппа разрешима. Следующее предложение показывает, что наряду с минимальным разбиением $\{\{p\} \mid p \in \mathbb{P}\}$ существует бесконечное множество разбиений σ множества всех простых чисел, для которых все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы.

Предложение 1. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2\}$. Тогда все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы.

Доказательство. Пусть G — минимальная не σ -сверхразрешимая группа. Предположим, что G не σ -разрешима. Тогда ввиду теоремы 2 выполняются следующие два условия: 1) $G / \Phi(G)$ — простая неабелева группа, являющаяся минимальной не σ -сверхразрешимой группой; 2) $\Phi(G) = Z_\infty(G)$. Отсюда и из $\sigma(2) = \{2\}$ следует, что $G / \Phi(G)$ — минимальная простая группа. С учетом списка минимальных простых групп из [15] рассмотрим следующие возможные случаи.

1. $G / \Phi(G) \cong PSL_3(3)$. В этом случае, как следует из [17, с. 13], $G / \Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу, изоморфную S_4 , которая не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

2. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(2^p)$, где p — простое число. Тогда $G/\Phi(G)$ содержит максимальную подгруппу, изоморфную $2^p : (2^p - 1)$, которая является группой Фробениуса, а значит, не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

3. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(3^p)$, где p — простое число, большее 3. В этом случае $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4 , которая не принадлежит классу $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

4. $G/\Phi(G) \cong PSL_2(p)$, где p — простое число, большее 5, и $p^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$. Как и в предыдущем случае, группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу, изоморфную A_4 . Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

5. $G/\Phi(G) \cong Sz(2^p)$, p — простое нечетное число. Тогда ввиду [19, теорема 9] группа $G/\Phi(G)$ содержит подгруппу Фробениуса $F/\Phi(G)$ порядка $q^2(q-1)$, где $q = 2^p$. Эта подгруппа, очевидно, не принадлежит $\mathfrak{U}_\sigma$. Поэтому G не является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Таким образом, все минимальные не σ -сверхразрешимые группы σ -разрешимы. Предложение доказано.

Следующий пример показывает, что существует бесконечное множество разбиений σ , для которых минимальные не σ -сверхразрешимые группы не являются σ -разрешимыми.

ПРИМЕР 1. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$. Тогда группа $G \cong PSL_3(3)$ является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Действительно, как следует из [17, с. 13], группа G содержит максимальные подгруппы, которые изоморфны группам из списка $\{3^2 : 2S_4, 13 : 3, S_4\}$. Так как $\sigma(2) = \{2, 3\}$, то каждая подгруппа из этого списка σ -сверхразрешима. Следовательно, группа G является минимальной не σ -сверхразрешимой группой.

Отметим, что группа $G \cong PSL_2(2^2) \cong A_5$ также является минимальной не σ -сверхразрешимой группой для разбиения σ множества всех простых чисел с σ -слоем $\sigma(2) = \{2, 3\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
2. Йи С., Ли М., Каморников С. Ф. Конечные группы с системой обобщенно субнормальных подгрупп Шмидта // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 1. С. 89–97.
3. Skiba A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups // J. Algebra. 2015. V. 436. P. 1–16.
4. Li B., Kang W., Gong L. On minimal non- σ -supersoluble groups // Commun. Algebra. 2024. doi.org/10.1080/00927872.2024.2439499.
5. Каморников С. Ф., Тютянов В. Н. Характеризация конечных $\mathfrak{N}_\sigma$ -критических групп // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 2022. № 3. С. 130–132.
6. Arad Z., Chillag D. A criterion for the existence of normal π -complements in finite groups // J. Algebra. 1984. V. 87. P. 472–482.
7. Шмидт О. Ю. Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. 1924. Т. 31, № 3–4. С. 366–372.
8. Гольфанд Ю. А. О группах, все подгруппы которых специальные // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60, № 8. С. 1313–1315.
9. Ballester-Boliches A., Esteban-Romero R., Robinson D. J. S. On finite minimal non-nilpotent groups // Proc. Am. Math. Soc. 2005. V. 133, N 12. P. 3455–3462.
10. Huppert B. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen // Math. Z. 1954. V. 60. P. 409–434.

11. Doerk K. Minimal nicht überauflösbare endliche Gruppen // Math. Z. 1966. V. 91. P. 198–205.
12. Ballester-Bolinches A., Esteban-Romero R. On minimal non-supersoluble groups // Rev. Mat. Iberoam. 2007. V. 23, N 1. P. 127–142.
13. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
14. Guo W., Zhang C., Skiba A. N. On σ -supersoluble groups and one generalization of *CLT*-groups // J. Algebra. 2018. V. 512. P. 92–108.
15. Thompson J. G. Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable // Bull. Am. Math. Soc. 1968. V. 74. P. 383–437.
16. Huppert B. Endliche Gruppen I. Berlin: Springer-Verl., 1968.
17. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.
18. Alperin J., Lyons R. On conjugacy classes of p -elements // J. Algebra. 1971. V. 19, N 2. P. 536–537.
19. Suzuki M. On a class of double transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 1. P. 105–145.

Поступила в редакцию 4 марта 2025 г.

После доработки 4 марта 2025 г.

Принята к публикации 25 апреля 2025 г.

Шемяткова Ольга Леонидовна (ORCID 0009-0004-8754-3303)
Российский экономический университет имени Г. В. Плеханова
Стремянный переулок, 36, Москва 117997
ol-shem@mail.ru

УДК 512.542

СИЛЬНАЯ π -ТЕОРЕМА СИЛОВА ДЛЯ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИЕВА ТИПА РАНГА 1

В. Д. Шепелев

Аннотация. Пусть π — некоторое множество простых чисел. Конечная группа называется π -группой, если все простые делители ее порядка принадлежат π . Следуя Виланду, говорят, что для конечной группы G верна π -теорема Силова, если в G сопряжены все максимальные π -подгруппы; если же π -теорема Силова верна для каждой подгруппы группы G , то говорят, что для G верна *сильная π -теорема Силова*. Вопрос о том, для каких конечных простых неабелевых групп верна сильная π -теорема Силова, поставлен Виландом в 1979 г. В статье завершено арифметическое описание групп лиева типа ранга 1, удовлетворяющих сильной π -теореме Силова.

DOI 10.33048/smzh.2025.66.415

Ключевые слова: π -теорема Силова, сильная π -теорема Силова, группы лиева типа.

Введение

Рассматриваются только конечные группы и термин «группа» всюду означает «конечная группа». Пусть π — некоторое множество простых чисел. Через π' обозначается множество $\mathbb{P} \setminus \pi$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел. Для натурального числа n символом $\pi(n)$ обозначается множество всех простых делителей n . Для группы G полагаем $\pi(G) = \pi(|G|)$. Группа G , для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π -группой. Подгруппа H группы G называется *холловой π -подгруппой*, если H является π -группой и $\pi(|G : H|) \subseteq \pi'$.

Используя терминологию Ф. Холла [1], будем говорить, что конечная группа G *обладает свойством D_π* (пишем $G \in D_\pi$), если все ее максимальные π -подгруппы сопряжены. В терминологии Виланда [2] о группе со свойством D_π говорят также, что для нее *верна π -теорема Силова*.

Учитывая теорему Силова, легко видеть, что свойство D_π для группы G эквивалентно тому, что группа G содержит холлову π -подгруппу, все холловы π -подгруппы группы G сопряжены и всякая π -подгруппа группы G содержится в некоторой холловой π -подгруппе.

В работах Ф. Холла [3, 4] доказано, что группа одновременно для всех множеств π обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда она разрешима.

Известно, что в общем случае свойство D_π не наследуется подгруппами (см. пример в [5]). В 1979 г. Виланд на конференции по конечным группам в г. Санта-Круз поставил следующую проблему.

Работа выполнена за счет РНФ, проект № 24-21-00163, <https://rscf.ru/project/24-21-00163/>.

Проблема А [6, вопрос (h)]. В каких простых конечных группах верна сильная π -теорема Силова: все подгруппы обладают свойством D_π ?

Следуя [7], через W_π будем обозначать класс всех конечных групп, для которых справедлива сильная π -теорема Силова. Если конечная группа G обладает свойством W_π , то для краткости будем писать $G \in W_\pi$. Таким образом, проблема А может быть переформулирована эквивалентным образом: *какие простые конечные группы обладают свойством W_π ?*

Известно [7, следствие 6.7], что группа обладает свойством W_π тогда и только тогда, когда любой ее композиционный фактор обладает данным свойством. Поэтому полное решение проблемы А позволило бы о любой конечной группе с известным композиционным строением сказать, обладает она свойством W_π или нет.

Проблема А к настоящему моменту решена для спорадических [8] и знакопеременных групп [9, теорема 3], а также для серии групп $\mathrm{PSL}_2(q)$ [5] (см. теорему 1 ниже).

В данной статье будет предложено решение проблемы Виланда для оставшихся серий групп лиева типа ранга 1, т. е. групп ${}^2B_2(q) \simeq \mathrm{Sz}(q)$ (теорема 2), ${}^2G_2(q) \simeq \mathrm{Ree}(q)$ (теорема 3) и ${}^2A_2(q) \simeq \mathrm{PSU}_3(q)$ (теорема 4).

Любая группа L лиева типа содержит секцию, изоморфную одной из групп лиева типа ранга 1 с тем же базовым полем. Поскольку свойство W_π наследуется секциями¹⁾, выполнение одного из условий одной из указанных теорем является необходимым для того, чтобы L обладала свойством W_π .

Всюду символом $\gcd(a, b)$ будем обозначать наибольший общий делитель целых чисел a и b .

Пусть $m > 1$ и a — целые числа, причем $\gcd(a, m) = 1$. Мультипликативным порядком числа a по модулю m будем называть число

$$\mathrm{ord}_m a = \min\{d \in \mathbb{N} : a^d \equiv 1 \pmod{m}\}.$$

Также нам понадобится обозначение, введенное в [5]. Пусть r — простое число и a — целое число, взаимно простое с r . По определению полагаем

$$\mathrm{ord}_r^* a := \mathrm{ord}_{r \cdot \gcd(2, r)} a = \begin{cases} \mathrm{ord}_r a, & \text{если } r \text{ нечетно,} \\ \mathrm{ord}_4 a, & \text{если } r = 2. \end{cases}$$

Как упомянуто выше, решение проблемы Виланда для серии групп $\mathrm{PSL}_2(q)$, известно и может быть сформулировано следующим образом.

Теорема 1 [5]. Пусть p — простое число, $q = p^{2^k m}$ для некоторых нечетного числа m и неотрицательного целого числа k . Положим также

$$\bar{q}_2 := {}^{2^k}\sqrt{q} = p^m \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(L_2(q)).$$

Тогда $L_2(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- $(W_1^L) \pi(L_2(q)) = \tau$;
- $(W_2^L) p = 2, \tau = \{2\}$;
- $(W_3^L) 2 \notin \tau, p \in \tau, |\tau \cap \{3, 5\}| \leq 1$ и $\tau \subseteq \{p\} \cup \pi(\bar{q}_2 - 1)$;
- $(W_4^L) p \notin \tau, |\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ и $\mathrm{ord}_r^* \bar{q}_2 = \mathrm{ord}_s^* \bar{q}_2$ для любых $r, s \in \tau$.

Основными результатами работы являются теоремы 2–4.

Необходимые и достаточные условия на множество простых чисел π , при которых группа $\mathrm{Sz}(q)$ обладает свойством D_π , известны (см. [9, теорема 3]). Таким образом, можем на основании этого сформулировать теорему 2.

¹⁾Под секциями группы понимаются гомоморфные образы ее подгрупп.

Теорема 2. Положим $q = 2^n$, где n — натуральное нечетное число. Тогда группа $Sz(q)$ обладает свойством W_π , если и только если $Sz(q)$ обладает свойством D_π , т. е. если выполнено одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} (W_1^S) \quad & \pi(Sz(q)) = \tau; \\ (W_2^S) \quad & \tau = \{2\}; \\ (W_3^S) \quad & \tau \subseteq \pi(q-1); \\ (W_4^S) \quad & \tau \subseteq \pi(2^n - \varepsilon 2^{(n+1)/2} + 1), \text{ где } \varepsilon \in \{+, -\}. \end{aligned}$$

Теорема 3. Пусть $q = 3^{k \cdot m}$ для некоторого неотрицательного k и нечетного m такого, что $\gcd(m, 3) = 1$. Положим также

$$n := 3^k \cdot m, \quad \bar{q}_3 := \sqrt[3]{q} = 3^m \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(\text{Ree}(q)).$$

Тогда $\text{Ree}(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} (W_1^R) \quad & \pi(\text{Ree}(q)) = \tau \text{ или } |\tau| \leq 1; \\ (W_2^R) \quad & 2 \notin \tau \text{ и } \tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q-1); \\ (W_3^R) \quad & \tau \subseteq \pi(3^n - \varepsilon 3^{(n+1)/2} + 1), \text{ где } \varepsilon \in \{+, -\}; \\ (W_4^R) \quad & 2 \in \tau \text{ и } \tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1). \end{aligned}$$

Теорема 4. Пусть p — простое число, $q = p^{2^a \cdot 3^b \cdot m}$, где $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\gcd(m, 6) = 1$ и $a, b \geq 0$. Положим также

$$\bar{q}_2 := \sqrt[2]{q} = p^{3^b \cdot m}, \quad \bar{q}_3 := \sqrt[3]{q} = p^{2^a \cdot m} \text{ и } \tau := \pi \cap \pi(\text{PSU}_3(q)).$$

Тогда $\text{PSU}_3(q) \in W_\pi$, если и только если имеет место одно из следующих утверждений:

$$\begin{aligned} (W_1^U) \quad & \pi(\text{PSU}_3(q)) = \tau \text{ или } |\tau| \leq 1; \\ (W_2^U) \quad & 2 \notin \tau, p \in \tau, |\tau \cap \{3, 5\}| \leq 1 \text{ и } \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q_2 - 1); \\ (W_3^U) \quad & 2, p \notin \tau, \tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q^2 - q + 1), \text{ причем если } 3 \in \tau, \text{ то } q \equiv 4, 7 \pmod{9}; \\ (W_4^U) \quad & p \notin \tau, |\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1, \tau \subseteq \pi(q-1) \text{ и } \text{ord}_r^* \bar{q}_2 = \text{ord}_s^* \bar{q}_2 \text{ для любых } r, s \in \tau; \\ (W_5^U) \quad & p \notin \tau, |\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1, |\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1, \tau \subseteq \pi(q+1) \text{ и } \text{ord}_r^* \bar{q}_3 = \text{ord}_s^* \bar{q}_3 \text{ для любых } r, s \in \tau. \end{aligned}$$

Легко видеть, что существуют примеры, при которых выполняются условия $(W_1^S)-(W_4^S)$, $(W_1^R)-(W_4^R)$ и (W_1^U) . Приведем примеры, показывающие, что условия $(W_2^U)-(W_5^U)$ теоремы 4 могут выполняться для определенных множеств π и бесконечных серий q .

ПРИМЕР 1. Пусть n — натуральное число, $\text{PSU}_3(7^n)$ и $\pi = \{3, 7\}$. Ясно, что в этом случае справедливо утверждение (W_2^U) .

ПРИМЕР 2. Пусть n — натуральное число такое, что $\gcd(n, 6) = 1$, $\text{PSU}_3(17^n)$ и $\pi = \{7, 13\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_3^U) . Заметим, что

$$17^{2n} - 17^n + 1 \equiv 3^n - 4^n + 1 \pmod{13} \quad \text{и} \quad 17^{2n} - 17^n + 1 \equiv 2^n - 3^n + 1 \pmod{7}.$$

Представим число n в виде $n = 6k + i$, где $i \in \{1, 5\}$. Тогда

$$3^n - 4^n + 1 \equiv 3^i - 4^i + 1 \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13},$$

$$2^n - 3^n + 1 \equiv 2^i - 3^i + 1 \pmod{7} \equiv 0 \pmod{7}.$$

Следовательно, для $\text{PSU}_3(17^n)$ выполнено утверждение (W_3^U) .

ПРИМЕР 3. Пусть n — натуральное число, $\text{PSU}_3(157^n)$ и $\pi = \{3, 13\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_4^U) . Представим число в виде $n = 2^a \cdot s$, где s нечетно. Тогда $\bar{q}_2 = 157^s$. Поскольку $157 \equiv 1 \pmod{3, 13}$, имеем

$$\text{ord}_3 157^s = \text{ord}_{13} 157^s = 1.$$

Таким образом, для $\text{PSU}_3(157^n)$ имеет место утверждение (W_4^U) .

ПРИМЕР 4. Пусть n — натуральное число такое, что $\gcd(n, 6) = 1$, $\text{PSU}_3(101^n)$ и $\pi = \{3, 17\}$. Докажем, что для данной группы выполняется утверждение (W_5^U) . Заметим, что в этом случае $101^n = q = \bar{q}_3$. Легко видеть, что

$$\text{ord}_3 101 = \text{ord}_{17} 101 = 2,$$

откуда

$$\text{ord}_3 101^n = \text{ord}_{17} 101^n = \frac{2}{\gcd(2, n)} = 2.$$

В [5] были также приведены примеры множеств π и бесконечных серий q , при которых выполняются условия (W_2^L) – (W_4^L) .

Обозначения и предварительные результаты. Будут использоваться обозначения из [10, 11]. Известно (см. [11]), что

$$|\text{Sz}(q)| = q^2(q-1)(q^2+1), |\text{Ree}(q)| = q^3(q-1)(q^3+1), |\text{SU}_3(q)| = q^2(q^2-1)(q^3+1).$$

Проективная специальная линейная группа $\text{PSL}_2(q)$ над полем из q элементов будет также обозначаться символом $L_2(q)$. Утверждения, требующие использования классификации конечных простых групп, будут помечены символом (mod CFSG) .

Следующая лемма является следствием теоремы Холла [3].

Лемма 1. Если G — разрешимая группа, то $G \in W_\pi$ для любого множества π .

В частности, из леммы 1 следует, что группа обладает свойством W_π , если и только если все ее неразрешимые подгруппы обладают свойством D_π .

Лемма 2 [10, табл. 8.16]. Любая максимальная подгруппа группы $\text{Sz}(q)$ принадлежит указанному ниже списку и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $\text{Sz}(q)$ в качестве подгруппы:

- (1) $E_q^{1+1} : C_{q-1}$;
- (2) $D_{2(q-1)}$;
- (3) $(q - \sqrt{2q} + 1) : 4$;
- (4) $(q + \sqrt{2q} + 1) : 4$;
- (5) $\text{Sz}(q_0)$, где $q = q_0^r$, r простое и $q_0 \neq 2$.

Лемма 3 [12, лемма 2.1]. Если a и b — нечетные числа, причем $a \mid b$, то числа $2^a \pm \chi(a) \cdot 2^{(a+1)/2} + 1$ делят соответственно числа $2^b \pm \chi(b) \cdot 2^{(b+1)/2} + 1$, где

$$\chi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \equiv \pm 1 \pmod{8}, \\ -1, & \lambda \equiv \pm 3 \pmod{8}. \end{cases}$$

Лемма 4 [13, лемма 2, (mod CFSG)]. Класс групп W_π замкнут относительно взятия подгрупп, гомоморфных образов и расширений.

Лемма 5 [10, табл. 8.43]. Любая максимальная подгруппа группы $\text{Ree}(q)$ принадлежит указанному ниже списку и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $\text{Ree}(q)$ в качестве подгруппы.

- (1) $E_q^{1+1+1} : (q-1)$;
- (2) $2 \times L_2(q)$;
- (3) $(2^2 \times D_{\frac{q+1}{2}}) : 3$;
- (4) $(q - \sqrt{3q} + 1) : 6$;
- (5) $(q + \sqrt{3q} + 1) : 6$;
- (6) $\text{Ree}(q_0)$, где $q = q_0^r$, r — простое число.

Лемма 6. Пусть $q = 3^n$ для некоторого нечетного числа n и $\sigma := \pi \cap \pi(L_2(q))$. Тогда $L_2(q) \in W_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- ($\widetilde{L}_1$) $\pi(L_2(q)) = \sigma$;
- ($\widetilde{L}_2$) $2 \notin \sigma$, $3 \in \sigma$ и $\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q-1)$;
- ($\widetilde{L}_3$) $3 \notin \sigma$ и $\text{ord}_r^* q = \text{ord}_s^* q$ для любых $r, s \in \sigma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данный факт является следствием теоремы 1 и того, что при нечетных n число $|L_2(3^n)|$ не делится на 5. $\square$

Лемма 7 [9, теорема 3]. Пусть $q = 3^n$, где n — натуральное нечетное число. Положим $\sigma := \pi \cap \pi(\text{Ree}(q))$. Тогда группа $\text{Ree}(q)$ обладает свойством D_π , если и только если выполнено одно из следующих условий:

- (D_1) $\pi(\text{Ree}(q)) = \sigma$ или $|\sigma| \leq 1$;
- (D_2) $2 \notin \sigma$, $3 \in \sigma$ и $\sigma \subseteq \{3\} \cup \pi(3^n - 1)$;
- (D_3) $\sigma \subseteq \pi(3^n - \varepsilon 3^{(n+1)/2} + 1)$, где $\varepsilon \in \{+, -\}$;
- (D_4) $2 \notin \sigma$ и $\sigma \subseteq \pi(3^n - 1)$;
- (D_5) $3, 7 \notin \sigma$, $2 \in \sigma$ и $\sigma \subseteq \pi(3^n + 1)$.

Лемма 8. Пусть a и b — нечетные числа, причем $a \mid b$ и $\frac{b}{a}$ не делится на 3. Тогда числа $3^a \pm 3^{(a+1)/2} + 1$ делят соответственно числа $3^b \pm \psi(\frac{b}{a}) \cdot 3^{(b+1)/2} + 1$, где

$$\psi(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \equiv \pm 1 \pmod{12}, \\ -1, & \lambda \equiv \pm 5 \pmod{12}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из доказательства леммы 6 в [14]. $\square$

Следующее утверждение хорошо известно.

Лемма 9. Пусть r, m — взаимно простые натуральные числа и k — натуральное число. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\text{ord}_r m^k = \frac{\text{ord}_r m}{\gcd(\text{ord}_r m, k)}.$$

В частности, $\text{ord}_r m^k \mid \text{ord}_r m$.

Лемма 10 [10, табл. 8.5, 8.6]. Пусть $q = p^n$ для некоторого натурального числа n и простого числа p . Тогда любая максимальная подгруппа группы $\text{SU}_3(q)$ принадлежит списку, указанному ниже, и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $\text{SU}_3(q)$ в качестве подгруппы:

- (1) $E_q^{1+2} : (q^2 - 1)$;
- (2) $\text{GU}_2(q)$;
- (3) $(q+1)^2 : S_3$, если $q \neq 5$;
- (4) $(q^2 - q + 1) : 3$, если $q \neq 3, 5$;

- (5) $SU_3(q_0)$, где $q = q_0^r$, r простое и нечетное.
- (6) $(q+1, 3) \times SO_3(q)$, где q нечетно и $q \geq 7$;
- (7) $3_+^{1+2} : Q_8 \cdot \frac{(q+1, 9)}{3}$, где $p = q \equiv 2 \pmod{3}$, $q \geq 11$;
- (8) $(q+1, 3) \times L_2(7)$ при условии $q = p \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$;
- (9) $3 \cdot A_6$ при условии $q = p \equiv 11, 14 \pmod{15}$;
- (10) $3 \cdot A_6 \cdot 2_3$ при условии $q = 5$;
- (11) $3 \cdot A_7$ при условии $q = 5$.

Лемма 11 [9, теорема 3]. Пусть $n \geq 5$ — натуральное число. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) группа A_n обладает свойством D_π ;
- 2) группа A_n обладает свойством W_π ;
- 3) справедливо одно из соотношений: $|\pi \cap \pi(n!)| \leq 1$ или $\pi \subseteq \pi(n!)$.

Лемма 12 [15, гл. II, теорема 8.27]. Любая максимальная подгруппа группы $L_2(q)$ принадлежит списку, указанному ниже, и при соблюдении указанных условий присутствует в группе $L_2(q)$ в качестве подгруппы.

- (1) элементарная абелева p -группа;
- (2) циклическая группа порядка z , где $z \mid \frac{p^n \pm 1}{e}$ и $e = (p^n - 1, 2)$;
- (3) группа диэдра порядка $2z$, где z из (2);
- (4) знакопеременная группа A_4 при условии $p > 2$ или $p = 2$ и $n \equiv 0 \pmod{2}$;
- (5) симметрическая группа S_4 при условии $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$;
- (6) знакопеременная группа A_5 при условии $p = 5$ или $p^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{5}$;
- (7) полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^l и циклической группы порядка t при условии, что $l \leq n$, $t \mid p^l - 1$ и $t \mid p^n - 1$;
- (8) группа $L_2(p^l)$, если $l \mid n$;
- (9) группа $PGL_2(p^l)$, если $2l \mid n$.

В частности, группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную A_5 , если и только если $5 \in \pi(L_2(q))$.

Лемма 13. Группа $L_2(7)$ является секцией группы $SU_3(q)$ если и только либо $L_2(7) \leq L_2(q)$, либо $7 \in \pi(q^3 + 1)$ и $q = p^m$, где m — нечетное число.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 10 следует, что группа $L_2(7)$ является секцией группы $SU_3(q)$, если и только если имеет место один из следующих случаев:

- 1) $L_2(7) \leq L_2(q)$;
- 2) $L_2(7) \leq (q+1, 3) \times L_2(7) \leq SU_3(p) \leq SU_3(q)$.

Рассмотрим случай 2. По лемме 10 условие $SU_3(p) \leq SU_3(q)$ эквивалентно тому, что $q = p^m$ для некоторого нечетного числа m . Группа $(q+1, 3) \times L_2(7)$ является секцией группы $SU_3(p)$ согласно лемме 10, если и только если $p \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$. Остается установить эквивалентность условия $p \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ и соотношения $7 \in \pi(q^3 + 1)$. Ясно, что если $p \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$, то $7 \in \pi(q^3 + 1)$. Допустим, обратное неверно. Очевидно, что $p \not\equiv 0 \pmod{7}$. Если $p \equiv 1, 2 \pmod{7}$, то

$$q^3 + 1 = (p^3)^m + 1 \equiv 1^m + 1 = 2 \pmod{7};$$

противоречие. $\square$

Лемма 14. Группа A_7 является секцией группы $SU_3(q)$, если и только если $q = 5^m$ для некоторого нечетного числа m .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 12 следует, что группа $L_2(q)$ не содержит секции, изоморфной группе A_7 . Следовательно, A_7 является секцией группы

$SU_3(q)$ согласно лемме 10, если и только если

$$3 \cdot A_7 \leq SU_3(p) \leq SU_3(q).$$

Условие $SU_3(p) \leq SU_3(q)$ эквивалентно тому, что $q = p^m$ для некоторого нечетного числа m . Из леммы 10 следует, что $3 \cdot A_7 \leq SU_3(p)$, если и только если $p = 5$. $\square$

Лемма 15 [9, теорема 3]. Пусть $q = p^n$ для некоторого простого числа p и натурального числа n . Положим также $\sigma := \pi \cap \pi(\text{PSU}_3(q))$. Тогда $\text{PSU}_3(q) \in D_\pi$, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- (D_1) $\pi(\text{PSU}_3(q)) = \sigma$ или $|\sigma| \leq 1$;
 - (D_2) $2 \notin \sigma$, $p \in \sigma$, $\sigma \subseteq \{p\} \cup \pi(q-1)$;
 - (D_3) $2, p \notin \sigma$, $3 \in \sigma$, $\text{ord}_3(q) = 1$, $(q^2 - 1)_3 = 3$ и $\text{ord}_s(q) = 6$ для всех $s \in \sigma \setminus \{3\}$;
 - (D_4) $2, p \notin \sigma$, $\text{ord}_s(q) \in \{1, 2, 6\}$ и значение $\text{ord}_s(q)$ одинаково для всех $s \in \sigma$;
 - (D_5) $3, p \notin \sigma$, $2 \in \sigma$, $\sigma \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $q \equiv \varepsilon \pmod{4}$.
- В частности, если $2, 3 \in \pi$, то группа $\text{PSU}_3(q)$ обладает свойством W_π , если и только если $\pi(\text{PSU}_3(q)) = \sigma$.

Лемма 16. Пусть $q = p^n$ для некоторого простого числа p и натурального числа n . Если группа $SU_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе A_6 , то $5 \in \{p\} \cup \pi(q^2 - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $SU_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе A_6 , то

$$5 \in \pi(SU_3(q)) = \{p\} \cup \pi(q^2 - 1) \cup \pi(q^3 + 1).$$

Лемма будет доказана, если установим, что либо $p = 5$, либо $\text{ord}_5 q \leq 2$. Таким образом, можно считать, что $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Заметим, что

$$q^3 + 1 \equiv \begin{cases} -1 \pmod{5}, & q \equiv 2 \pmod{5}, \\ -2 \pmod{5}, & q \equiv -2 \pmod{5}. \end{cases}$$

Отсюда вытекает следующее: если $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$, то $5 \notin \pi(SU_3(q))$; противоречие. $\square$

Лемма 17 [9, теорема 3]. Пусть π — множество простых чисел такое, что $2 \in \pi$ и $|\pi \cap \pi(L_2(q))| > 1$. Предположим, что $q = p^n$, где p — простое и n — натуральное числа. Тогда $L_2(q) \in D_\pi$, если и только если $3, p \notin \pi$ и $\pi \cap \pi(L_2(q)) \subseteq \pi(q - \varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $q \equiv \varepsilon \pmod{4}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Дизъюнкция утверждений $(W_1^S) - (W_4^S)$, как было отмечено, — необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось $Sz(q) \in D_\pi$. В частности, если $Sz(q) \in W_\pi$, то $Sz(q) \in D_\pi$ и выполнено одно из $(W_1^S) - (W_4^S)$. Далее доказывается достаточность каждого из этих условий.

Отметим, что если в условии теоремы $n = 1$, то группа $Sz(q) = Sz(2)$ является разрешимой и согласно лемме 1 обладает свойством W_π для любого множества простых чисел π . Следовательно, для данной группы свойства D_π и W_π эквивалентны и выполняется одно из утверждений $(W_1^S) - (W_4^S)$. Таким образом, считаем, что $n > 1$.

Из леммы 2 вытекает, что в качестве неразрешимых подгрупп группы $Sz(2^n)$ выступают только группы $Sz(2^t)$, где $t > 1$ и $t \mid n$. Таким образом, согласно замечанию после леммы 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что если $Sz(2^n) \in D_\pi$, то $Sz(2^t) \in D_\pi$ для любого числа $t \mid n$.

Отметим, что если $|\tau| \leq 1$ или $\pi(\text{Sz}(q)) = \tau$, то $\text{Sz}(q) \in W_\pi$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $|\tau| > 1$ и $\text{Sz}(q)$ не является π -группой. Следовательно, мы докажем теорему 2, установив достаточность утверждений (W_3^S) и (W_4^S) для того, чтобы $\text{Sz}(2^t) \in D_\pi$ для любого числа $t \mid n$.

СЛУЧАЙ (W_3^S) . Если докажем, что для любого $t \mid n$ справедливо равенство $\pi \cap \pi(2^{2t} + 1) = \emptyset$, то $\pi \cap \pi(\text{Sz}(2^t)) \subseteq \pi(p^t - 1)$ и $\text{Sz}(2^t) \in D_\pi$ согласно условию (W_3^S) . Предположим, что существует число $r \in \pi \cap \pi(\text{Sz}(2^t))$ такое, что $r \in \pi(2^{2t} + 1)$. Тогда в силу нечетности числа n справедливы следующие соотношения:

$$r \mid 2^{2t} + 1 \mid 2^{2n} + 1 = q^2 + 1.$$

Таким образом,

$$r \in \pi(q - 1) \quad \text{и} \quad r \in \pi(q^2 + 1),$$

что невозможно в силу взаимной простоты чисел $q - 1$ и $q^2 + 1$.

СЛУЧАЙ (W_4^S) . Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\text{Sz}(2^t) \notin D_\pi$. В силу справедливости цепочки включений

$$\pi \cap \pi(2^t - 1) \subseteq \pi \cap \pi(2^n - 1) = \pi \cap \pi(q - 1)$$

и взаимной простоты чисел $q - 1$ и $q^2 + 1 = (2^n - 2^{(n+1)/2} + 1) \cdot (2^n + 2^{(n+1)/2} + 1)$ имеем $\pi \cap \pi(2^t - 1) = \emptyset$.

Следовательно, существуют различные числа $r, s \in \pi \cap \pi(\text{Sz}(2^t))$ такие, что

$$r \in \pi(2^t + \chi(t) \cdot 2^{(t+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(2^t - \chi(t) \cdot 2^{(t+1)/2} + 1),$$

где функция χ определена в лемме 3. Из этой же леммы вытекают соотношения

$$r \in \pi(2^n + \chi(n) \cdot 2^{(n+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(2^n - \chi(n) \cdot 2^{(n+1)/2} + 1);$$

противоречие с условием (W_4^S) .

Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. В качестве максимальных неразрешимых подгрупп группы $\text{Ree}(q)$ согласно лемме 5 выступают группы из пп. (2) и (6), т. е. $2 \times L_2(q)$ и $\text{Ree}(q_0)$, где $q = q_0^r$ и r — простое число. При этом из леммы 4 следует, что группа $2 \times L_2(q)$ обладает свойством W_π , если и только если группа $L_2(q)$ обладает данным свойством. С учетом того, что группа $\text{Ree}(q)$ рассматривается над полем, порядок которого равен $q = 3^n$, где n — нечетное число, необходимые и достаточные условия на множество простых чисел π , при которых $L_2(q) \in W_\pi$, указаны в лемме 6. Таким образом, согласно замечанию после леммы 1 доказательство теоремы сводится к доказательству необходимости и достаточности утверждений (W_1^R) – (W_4^R) для того, чтобы группы $\text{Ree}(3^t)$, где $t \mid n$, обладали свойством D_π и было выполнено одно из условий леммы 6.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Если $|\tau| \leq 1$ или $\pi(\text{Ree}(q)) = \tau$, то для группы $\text{Ree}(q)$ справедливо утверждение (W_1^R) . Поэтому будем считать, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\text{Ree}(q)) \not\subseteq \pi$.

Если $2 \notin \tau$, то с необходимостью выполнено одно из утверждений (W_2^R) – (W_3^R) в силу леммы 7. Пусть теперь $2 \in \tau$. Докажем, что выполнено (W_4^R) .

Поскольку $2 \in \tau$, для группы $\text{Ree}(q)$ выполнено условие (D_5) леммы 7. В частности, это означает, что $\tau \subseteq \pi(q + 1)$. Допустим, существует (нечетное)

число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(\bar{q}_3 + 1)$. Тогда по лемме 9 верно равенство $\text{ord}_r \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^a$, где $1 \leq a \leq k$ — целое число. Это означает, что

$$r \in \pi(\bar{q}_3^{3^a} + 1) \subseteq \pi(\text{Ree}(\bar{q}_3^{3^{a-1}})).$$

Следовательно, поскольку $\text{Ree}(q) \in W_\pi$ и $2 \in \tau$, для группы $\text{Ree}(\bar{q}_3^{3^{a-1}})$ выполняется условие (D_5) . Так как $\text{ord}_r \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^a$, по лемме 9 имеем

$$r \in \pi \cap \pi(\text{Ree}(\bar{q}_3^{3^{a-1}})) \quad \text{и} \quad \text{ord}_r \bar{q}_3^{3^{a-1}} = 6.$$

Отсюда следует, что $r \notin \pi(\bar{q}_3^{3^{a-1}} + 1)$. Таким образом, для группы $\text{Ree}(\bar{q}_3^{3^{a-1}})$ нарушается условие (D_5) леммы 7; противоречие. Необходимость утверждения (W_4^R) установлена.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. СЛУЧАЙ (W_2^R) . Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\text{Ree}(3^t) \notin D_\pi$. По лемме 7 это означает, что для данной группы нарушается одно из условий (D_2) или (D_4) в зависимости от принадлежности числа 3 множеству τ . В любом из этих случаев в силу значения порядка группы $\text{Ree}(3^t)$ существует число $r \in \pi \cap \pi(\text{Ree}(3^t))$ такое, что $r \in \pi(3^{3^t} + 1)$. С одной стороны, так как число n нечетно, имеем

$$r \mid 3^{3^t} + 1 \mid 3^{3^n} + 1 = q^3 + 1.$$

С другой стороны, утверждение (W_2^R) влечет принадлежность $r \in \pi(q - 1)$. Следовательно, r делит число $q^3 + 1 - (q^3 - 1) = 2$, откуда $r = 2$; противоречие с условием (W_2^R) .

Следовательно, из условий $(\tilde{L}_2)$ или $(\tilde{L}_3)$ леммы 6 (в зависимости от принадлежности числа 3 множеству π) вытекает, что $L_2(q) \in W_\pi$.

СЛУЧАЙ (W_3^R) . В силу того, что

$$\begin{aligned} \gcd(3^n - 1, (3^n + 3^{(n+1)/2} + 1) \cdot (3^n - 3^{(n+1)/2} + 1)) \\ = \gcd\left(3^n - 1, \frac{3^{3n} + 1}{3^n + 1}\right) \mid \gcd(3^n - 1, 3^{3n} + 1) = 2 \notin \tau \end{aligned}$$

и

$$\gcd(3^n + 1, 3^n \pm 3^{(n+1)/2} + 1) = \gcd(3^n + 1, 3^{(n+1)/2}) = 1,$$

имеет место равенство $\pi \cap \pi(3^{2n} - 1) = \pi \cap \pi(q^2 - 1) = \emptyset$. Таким образом, $\pi \cap \pi(L_2(q)) = \emptyset$, откуда $L_2(q) \in W_\pi$. Поэтому достаточно доказать, что для любого $t \mid n$ группа $\text{Ree}(3^t)$ обладает свойством D_π .

Отметим, что если число $\frac{n}{t}$ делится на 3, то верны следующие соотношения:

$$(3^t + 3^{(t+1)/2} + 1) \cdot (3^t - 3^{(t+1)/2} + 1) = \frac{3^{3t} + 1}{3^t + 1} \mid \frac{3^{\frac{n}{t} \cdot t} + 1}{3^t + 1} \mid 3^n + 1.$$

В силу взаимной простоты чисел $3^n + 1$ и $3^n \pm 3^{(n+1)/2} + 1$ заключаем, что $\pi \cap \pi(\text{Ree}(3^t)) = \emptyset$ и, следовательно, $\text{Ree}(3^t) \in D_\pi$.

Допустим теперь, что $\frac{n}{t}$ не делится на 3. Если $\text{Ree}(3^t) \notin D_\pi$, то для группы $\text{Ree}(3^t)$ нарушается условие (D_3) леммы 7. Таким образом, существуют числа $r, s \in \pi \cap \pi(\text{Ree}(3^t))$ такие, что

$$r \in \pi(3^t + 3^{(t+1)/2} + 1) \quad \text{и} \quad s \in \pi(3^t - 3^{(t+1)/2} + 1).$$

По лемме 8 справедливы соотношения

$$r \in \pi\left(3^n + \psi\left(\frac{n}{t}\right) \cdot 3^{(n+1)/2} + 1\right) \quad \text{и} \quad s \in \pi\left(3^n - \psi\left(\frac{n}{t}\right) \cdot 3^{(n+1)/2} + 1\right);$$

противоречие с условием (W_3^R) .

СЛУЧАЙ (W_4^R) . Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\text{Ree}(3^t) \notin D_\pi$. Тогда в силу того, что $2 \in \tau$, для данной группы нарушается условие (D_5) леммы 7. Поскольку $\tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1)$, легко установить, что $7 \notin \tau$, так как $7 \mid 3^n + 1$ тогда и только тогда, когда $3 \mid n$. Следовательно, существует (нечетное) число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(3^t + 1)$. Иными словами, это означает, что $\text{ord}_r 3^t = 6$. Действительно, если бы $\text{ord}_r 3^t = 1$, то имели бы место следующие соотношения:

$$r \in \pi(3^t - 1) \cap \pi(\bar{q}_3 + 1) \subseteq \pi(3^n - 1) \cap \pi(q + 1) = \pi(q - 1) \cap \pi(q + 1) = \{2\};$$

противоречие. Представим число t в виде $t = 3^a \cdot b$, где $a \leq k$ и $b \mid m$. Тогда из леммы 9 вытекают следующие соотношения:

$$\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^a} = \text{ord}_r(3^{3^a \cdot b})^{\frac{m}{b}} = \frac{\text{ord}_r 3^{3^a \cdot b}}{\gcd(\text{ord}_r 3^{3^a \cdot b}, \frac{m}{b})} = \frac{6}{\gcd(6, \frac{m}{b})} = 6.$$

Последнее равенство верно, поскольку $\gcd(6, m) = 1$. С другой стороны, из утверждения (W_4^R) следует, что $r \in \tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1)$. Таким образом, по лемме 9 имеем

$$\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^a} = 6 \mid \text{ord}_r \bar{q}_3 = 2;$$

противоречие.

Остается доказать, что из утверждения (W_4^R) следует, что $L_2(q) \in W_\pi$. Очевидно, что $4 \mid 3^n + 1 = q + 1$, т. е. $\text{ord}_4 q = 2$. Кроме того, поскольку $\tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1)$, по лемме 9 справедлива следующая цепочка равенств:

$$\text{ord}_r q = \text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^k} = \frac{\text{ord}_r \bar{q}_3}{\gcd(3^k, \text{ord}_r \bar{q}_3)} = \frac{2}{\gcd(3^k, 2)} = 2$$

для всех $r \in \pi \cap \pi(L_2(q))$.

Таким образом, $L_2(q) \in W_\pi$ согласно условию $(\tilde{L}_3)$ леммы 6.

Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 3 и леммы 7 вытекает

Следствие. Пусть $q = 3^n$, где число n нечетно и не делится на 3. Тогда группа $\text{Ree}(q)$ обладает свойством W_π , если и только если $\text{Ree}(q)$ обладает свойством D_π .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Отметим, что в силу леммы 4 свойство W_π для групп $\text{PSU}_3(q)$ и $\text{SU}_3(q)$ эквивалентно, поэтому в дальнейшем будем доказывать справедливость теоремы для $\text{SU}_3(q)$. Кроме того, из леммы 1 вытекает, что группа $\text{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π , если и только если $\text{SU}_3(q) \in D_\pi$ и всякая неразрешимая максимальная подгруппа группы $\text{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π . В качестве таких согласно лемме 10 выступают группы

- $\text{GU}_2(q)$;
- $\text{SU}_3(q_0)$, где $q = q_0^r$, r простое и нечетное.
- $(q + 1, 3) \times \text{SO}_3(q)$, где $q \geq 7$ нечетное;
- $(q + 1, 3) \times L_2(7)$ при условии $q = p \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}$ и $q \neq 5$ или $q = 5$;
- $3 \cdot A_6$ при условии $q = p \equiv 11, 14 \pmod{15}$;
- $3 \cdot A_6 2_3$ при условии $q = 5$;
- $3 \cdot A_7$ при условии $q = 5$.

Покажем, что если A_6 изоморфна секции группы $\text{SU}_3(q)$ при выполнении условия $L_2(q) \in W_\pi$, то $A_6 \in W_\pi$. По лемме 16 из того, что $A_6 \leq \text{SU}_3(q)$,

следует, что $5 \in \pi(q^2 - 1) \cup \{p\} = \pi(L_2(q))$. Таким образом, согласно замечанию после леммы 12 группа $L_2(q)$ содержит подгруппу, изоморфную группе A_5 . Следовательно, пользуясь леммой 11, заключаем следующее: если $A_6 \leq \text{SU}_3(q)$ и $L_2(q) \in W_\pi$, то $A_6 \in W_\pi$. Положим $n = 2^a \cdot 3^b \cdot m$, где числа a , b и m указаны в условии теоремы. Из вышесказанного и лемм 13 и 14 вытекает, что группа $\text{SU}_3(q)$ обладает свойством W_π тогда и только тогда, когда справедливы следующие условия:

$$\begin{aligned} &L_2(q) \in W_\pi; \\ &\text{SU}_3(p^t) \in D_\pi \quad \text{для всех } t \mid n \text{ таких, что } \frac{n}{t} \text{ нечетно;} \\ &L_2(7) \in W_\pi \quad \text{в случае, когда } 7 \in \pi(q^3 + 1) \text{ и } q = \bar{q}_2; \\ &A_7 \in W_\pi \quad \text{в случае, когда } p = 5 \text{ и } q = \bar{q}_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Докажем необходимость и достаточность дизъюнкции условий теоремы для выполнения данных соотношений и тем самым докажем теорему 4.

Снова можем считать, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\text{SU}_3(q)) \neq \tau$. Следовательно, мы установим требуемое, если покажем, что при данных ограничениях условия (1) эквивалентны одному из утверждений $(W_2^U) - (W_5^U)$.

НЕОБХОДИМОСТЬ. Для начала рассмотрим случай $q \neq \bar{q}_2$.

Если $\text{SU}_3(q) \in W_\pi$, то $\text{SU}_3(q) \in D_\pi$, т. е. справедливо одно из условий $(D_1) - (D_5)$ леммы 15. В силу того, что $|\tau| > 1$ и $\pi(\text{SU}_3(q)) \not\subseteq \pi$, достаточно рассматривать только те случаи, когда выполняется одно из условий $(D_2) - (D_5)$.

СЛУЧАЙ 1. Допустим, для группы $\text{SU}_3(q)$ верно условие (D_2) , т. е.

$$2 \notin \tau, p \in \tau \text{ и } \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(q - 1) \subseteq \pi(L_2(q)).$$

Кроме того, группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π , откуда вытекает, что для $L_2(q)$ справедливо условие (W_3^L) теоремы 1, т. е.

$$\pi \cap \pi(L_2(q)) = \tau \subseteq \{p\} \cup \pi(\bar{q}_2 - 1) \text{ и } |\tau \cap \{3, 5\}| \leq 1.$$

Таким образом, выполнено утверждение (W_2^U) .

СЛУЧАЙ 2. Допустим, для группы $\text{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_3) . Тогда выполняются соотношения $3 \in \tau$, $\text{ord}_3 q = 1$, $(q^2 - 1)_3 = 3$ и $\text{ord}_r q = 6$ для всех $r \in \tau \setminus \{3\}$. Легко видеть, что если $\text{ord}_r q = 6$ для некоторого $r \in \tau$, то $r \in \pi(q^2 - q + 1)$, и если $r \neq 3$, то верно и обратное. Таким образом, имеет место включение

$$\tau \subseteq \{3\} \cup \pi(q^2 - q + 1).$$

Так как $3 \in \tau$, должно быть выполнено равенство $\text{ord}_3 q = 1$, т. е. $3 \in \pi(q - 1)$. При этом из условия $(q^2 - 1)_3 = 3$ следует соотношение $(q - 1)_3 = 3$, которое эквивалентно тому, что $q \equiv 4, 7 \pmod{9}$. Отсюда вытекает справедливость утверждения (W_3^U) .

СЛУЧАЙ 3. Допустим, для группы $\text{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_4) и для всех $r \in \tau$ справедливо равенство $\text{ord}_r q = 6$. Отсюда, в частности, следует, что $3 \notin \tau$. Таким образом, исходя из рассуждений, проделанных при доказательстве предыдущего случая, можем заключить, что $\tau \subseteq \pi(q^2 - q + 1)$. Справедливость утверждения (W_3^U) снова установлена.

СЛУЧАЙ 4. Допустим, для группы $\text{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_4) и для всех $r \in \tau$ справедливо одно из равенств $\text{ord}_r q = 1$ или $\text{ord}_r q = 2$. В данном случае имеют место следующие соотношения: $2, p \notin \tau$ и $\tau \subseteq \pi(q - \varepsilon)$ для некоторого числа $\varepsilon = \pm 1$. Отметим, что из указанных условий следует, что $\tau = \pi \cap \pi(L_2(q))$.

Если $\varepsilon = 1$, то необходимость соотношений $\tau \subseteq \pi(q-1)$ и $\text{ord}_r^* \bar{q}_2 = \text{ord}_s^* \bar{q}_2$ вытекает из условия (W_4^L) теоремы 1.

Допустим теперь, что $\varepsilon = -1$. Докажем необходимость утверждения (W_5^U) . Предположим, что утверждение (W_5^U) не выполнено. Поскольку $2 \notin \tau$, заключаем, что

$$|\tau \cap \{2, 7\}| = |\tau \cap \{7\}| \leq 1.$$

Неравенство $|\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ вытекает из условия (W_4^L) теоремы 1. Следовательно, существуют числа $r, s \in \tau$ такие, что $\text{ord}_r^* \bar{q}_3 < \text{ord}_s^* \bar{q}_3$. Поскольку $2 \notin \tau$, имеем $\text{ord}_r^* \bar{q}_3 = \text{ord}_r \bar{q}_3$ и $\text{ord}_s^* \bar{q}_3 = \text{ord}_s \bar{q}_3$. Кроме того, из леммы 9 и из того, что $\tau \subseteq \pi(q+1)$, вытекает следующая цепочка равенств:

$$2 = \text{ord}_r q = \frac{\text{ord}_r \bar{q}_3}{\gcd(\text{ord}_r \bar{q}_3, 3^b)} = \frac{\text{ord}_s \bar{q}_3}{\gcd(\text{ord}_s \bar{q}_3, 3^b)} = \text{ord}_s q.$$

Следовательно, $\text{ord}_r \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^u$ и $\text{ord}_r \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^v$ для некоторых неотрицательных целых чисел u и v , причем $u < v$. Отсюда вытекают следующие включения:

$$r \in \pi(\bar{q}_3^{3^{v-1}} + 1), \quad s \in \pi(\bar{q}_3^{3^v} + 1);$$

при этом $s \notin \pi(\bar{q}_3^{3^{v-1}} + 1)$, так как $\text{ord}_s \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^v$. Таким образом, $r, s \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3^{3^{v-1}}))$. Ясно, что $\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^{v-1}} = 2$, откуда следует, что для группы $\text{SU}_3(\bar{q}_3^{3^{v-1}})$ выполняется условие (D_4) леммы 15. С другой стороны, $\text{ord}_s(\bar{q}_3)^{3^{v-1}} = 6 \neq 2 = \text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^{v-1}}$. Таким образом, $\text{SU}_3(\bar{q}_3^{3^{v-1}}) \notin D_\pi$; противоречие. Следовательно, утверждение (W_5^U) выполнено.

СЛУЧАЙ 5. Допустим, для группы $\text{SU}_3(q)$ выполнено условие (D_5) , т. е. $2 \in \tau$, $3, p \notin \tau$ и $\tau \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, где число $\varepsilon = \pm 1$ таково, что $q \equiv \varepsilon \pmod{4}$. В частности, это означает, что число p нечетно. Если $\varepsilon = 1$, то согласно условию (W_4^L) теоремы 1 справедливо утверждение (W_4^U) .

Пусть теперь $\varepsilon = -1$. В силу того, что $q \neq \bar{q}_2$, имеем $q = q_0^2$ для некоторого натурального числа q_0 . Заметим, что

$$q+1 = q_0^2+1 \equiv \begin{cases} 1 \pmod{7}, & q_0 \equiv 0 \pmod{7}, \\ 2 \pmod{7}, & q_0 \equiv \pm 1 \pmod{7}, \\ 5 \pmod{7}, & q_0 \equiv \pm 2 \pmod{7}, \\ 3 \pmod{7}, & q_0 \equiv \pm 3 \pmod{7}. \end{cases}$$

Таким образом, $7 \notin \tau$ и, следовательно, имеет место равенство $|\tau \cap \{2, 7\}| = |\{2\}| = 1$.

Повторяя рассуждения, проделанные при доказательстве необходимости условия (W_5^U) в предыдущем случае, заключаем, что $|\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ и для всех чисел $r, s \in \tau \setminus \{2\}$ выполнены равенства

$$\text{ord}_r \bar{q}_3 = \text{ord}_s \bar{q}_3 = 2 \cdot 3^k,$$

где k — некоторое неотрицательное целое число (иначе найдутся числа $t \mid n$ и $r, s \in \tau$ такие, что $\text{ord}_r p^t = 2$ и $\text{ord}_s p^t = 6$ вопреки условию (D_5)). Если $k \geq 1$, то $\tau \subseteq \pi(\bar{q}_3^{2^k} + 1)$ и, следовательно, имеет место включение $\tau \subseteq \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3^{2^{k-1}}))$. Отсюда вытекает, что для всех нечетных чисел $r, s \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3^{2^{k-1}}))$ справедливы равенства $\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{2^{k-1}} = \text{ord}_s(\bar{q}_3)^{2^{k-1}} = 6$. С другой стороны, в силу того, что $2 \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3^{2^{k-1}}))$, для данной группы выполняется условие (D_5) ,

из которого следует, что для всех $r \in \tau$ верно неравенство $\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^{k-1}} \leq 2$; противоречие. Значит, $k = 0$ и для всех чисел $r, s \in \tau \setminus \{2\}$ выполнены следующие соотношения:

$$\text{ord}_r \bar{q}_3 = \text{ord}_s \bar{q}_3 = 2.$$

Таким образом, $\tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1) \subseteq \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3))$. Поскольку $2 \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(\bar{q}_3))$, для данной группы справедливо условие (D_5) леммы 15. Следовательно, необходимо, чтобы число 4 делило $\bar{q}_3 + 1$, откуда $\text{ord}_2^* \bar{q}_3 = 2$. Таким образом, $\text{ord}_r^* \bar{q}_3 = \text{ord}_s^* \bar{q}_3$ для всех $r, s \in \tau$.

Рассмотрим теперь случай $q = \bar{q}_2$. Допустим, $7 \in \pi(q^3 + 1)$.

По лемме 13 группа $\text{SU}_3(q)$ содержит секцию, изоморфную группе $L_2(7)$. Кроме того, условие $7 \in \pi(q^3 + 1)$ влечет нечетность числа q , так как если $q = 2^n$, то

$$q^3 + 1 = (2^3)^n + 1 = 8^n + 1 \equiv 2 \pmod{7}.$$

Из теоремы 1 вытекает, что $L_2(7) \in W_\pi$, если и только если либо $\pi(L_2(7)) = \{2, 3, 7\} \subseteq \pi$ и тогда $\pi(\text{PSU}_3(q)) \subseteq \pi$, либо $|\pi \cap \{2, 7\}| \leq 1$ и $|\pi \cap \{2, 3\}| \leq 1$.

Если $7 \notin \pi(q + 1)$, то $\text{ord}_7 q = 6$ и, следовательно, из условий (D_2) – (D_5) леммы 15 вытекают указанные неравенства.

Если $7 \in \pi(q + 1)$, то в силу нечетности числа q следует, что $2 \in \pi(q + 1)$. Отсюда вытекает необходимость неравенства $|\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1$, фигурирующего в утверждении (W_5^U) .

Допустим теперь, что $7 \notin \pi(q^3 + 1)$. Тогда $7 \notin \pi(q + 1)$ и, следовательно, неравенство $|\tau \cap \{2, 7\}| = |\tau \cap \{2\}| \leq 1$ в утверждении (W_5^U) также верно.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Предположим, что выполнено одно из утверждений (W_2^U) – (W_5^U) , и установим справедливость соотношения (1).

Для начала покажем, что $L_2(q) \in W_\pi$ и $\text{SU}_3(p^t) \in W_\pi$, где $t \mid n$ и $\frac{n}{t}$ нечетно.

СЛУЧАЙ (W_2^U) . Группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π , поскольку из утверждения (W_2^U) следует условие (W_2^L) теоремы 1. Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Следовательно, для данной группы нарушено условие (D_2) леммы 15. Таким образом, существует число $r \in \tau$ такое, что $r \notin \pi(p^t - 1) \cup \{p\}$, откуда $r \in \pi(p^{3t} + 1)$. В силу нечетности числа $\frac{n}{t}$ заключаем, что $r \in \pi(p^{3n} + 1) = \pi(q^3 + 1)$. С другой стороны, из утверждения (W_2^U) имеем $r \in \pi(q - 1) \cup \{p\}$ и $r \neq p$ в силу выбора r . Таким образом, справедливо следующее:

$$r \in \pi(q - 1) \quad \text{и} \quad r \in \pi(q^3 + 1),$$

откуда $r = 2 \notin \pi$; противоречие.

СЛУЧАЙ (W_3^U) . Легко видеть, что в этом случае $|\pi \cap \pi(L_2(q))| \leq 1$. Поэтому $L_2(q) \in W_\pi$ по теореме Силова. Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Следовательно, для данной группы нарушено либо условие (D_3) , либо условие (D_4) леммы 15 в зависимости от принадлежности числа 3 множеству τ . Предположим, $3 \in \tau$. Тогда $3 \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t))$ и имеют место соотношения $3 \in \pi(p^t - 1)$ и $(p^{2t} - 1)_3 = 3$. Действительно, по лемме 9 верна следующая цепочка равенств:

$$1 = \text{ord}_3 q = \text{ord}_3 p^n = \frac{\text{ord}_3 p^t}{(\text{ord}_3 p^t, \frac{n}{t})}.$$

Поскольку число $\frac{n}{t}$ нечетно, имеем $\text{ord}_3 p^t = 1$, т. е. $3 \in \pi(p^t - 1)$.

Следовательно, если нарушено одно из условий (D_3) или (D_4) , то существует число $r \in \tau \setminus \{3\}$ такое, что $\text{ord}_r p^t \neq 6$. Таким образом, $r \in \pi(p^{2t} - 1) \subseteq$

$\pi(q^2 - 1)$. С другой стороны, из утверждения (W_3^U) следует, что $r \in \pi(q^2 - q + 1)$. Значит,

$$r \in \pi(q^2 - 1 - (q^2 - q + 1)) = \pi(q - 2).$$

Таким образом, $r \in \pi(q^2 - 1)$ и $r \in \pi(q - 2)$, откуда $r = 3$; противоречие.

СЛУЧАЙ (W_4^U) . Вначале рассмотрим случай $2 \notin \tau$, т. е. $|\tau \cap \{3, 5\}| \leq 1$, $\tau \subseteq \pi(q - 1)$ и $\text{ord}_r \bar{q}_2 = \text{ord}_s \bar{q}_2$ для любых $r, s \in \tau$. Очевидно, что в этом случае $L_2(q) \in W_\pi$ согласно условию (W_4^L) теоремы 1. Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Заметим, что $r \in \pi(p^t - 1)$ для любого $r \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t))$. Действительно, если бы число r принадлежало множеству $\pi(p^{3t} + 1)$, то в силу нечетности числа $\frac{n}{t}$ это означало бы, что $r \in \pi(q^3 + 1)$. Следовательно, число r принадлежало бы множеству $\pi(q - 1) \cap \pi(q^3 + 1)$, откуда $r = 2 \notin \pi$; противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1)$ и $\text{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

Рассмотрим теперь случай $2 \in \tau$. Легко видеть, что группа $L_2(q)$ обладает свойством W_π . Допустим, существует число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Поскольку $2 \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t))$, для данной группы нарушается условие (D_5) леммы 15. В частности, это влечет неравенство $|\tau \setminus \{2\}| \geq 1$. Исключим следующие два случая.

1. Существует нечетное число $r \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t))$ такое, что $r \in \pi(p^{3t} + 1)$. Поскольку число $\frac{n}{t}$ нечетное, имеем $r \in \pi(q^3 + 1)$. Следовательно, $r \in \pi(q - 1) \cap \pi(q^3 + 1)$, откуда $r = 2$; противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1)$.

2. Число 4 делит $p^t + 1$. Отметим, что $\pi \cap \pi(\text{SU}_3(q)) = \pi \cap \pi(L_2(q))$, поскольку

$$\pi \cap \pi(\text{SU}_3(q)) \subseteq \pi(p^t - 1) \subseteq \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(L_2(q)).$$

Следовательно, так как $L_2(p^t) \leq L_2(q) \in W_\pi$ и

$$2 \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) = \pi \cap \pi(L_2(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1),$$

по лемме 17 необходимо, чтобы число 4 делило $p^t - 1$; противоречие.

Таким образом,

$$\pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t - 1) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t - 1,$$

откуда $\text{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

СЛУЧАЙ (W_5^U) . Разберем сначала случай $2 \notin \tau$, т. е. $|\tau \cap \{3, 5\}| \leq 1$, $\tau \subseteq \pi(q + 1)$ и $\text{ord}_r \bar{q}_3 = \text{ord}_s \bar{q}_3$ для любых $r, s \in \tau$. Группа $L_2(q)$ принадлежит W_π , поскольку условие $\tau \subseteq \pi(q + 1)$ означает, что $\text{ord}_r \bar{q}_2 = \text{ord}_s \bar{q}_2 = 2^{a+1}$ для всех $r, s \in \tau$. Отсюда следует, что для $L_2(q)$ выполнено условие (W_4^L) . Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Очевидно, что для данной группы нарушено условие (D_4) леммы 15 и, следовательно, существуют числа $r, s \in \tau$ такие, что $\text{ord}_r p^t = 2$ и $\text{ord}_s p^t = 6$. Действительно, если бы было верно равенство $\text{ord}_r p^t = 1$ для некоторого $r \in \tau$, то это означало бы, что $r \in \pi(p^t - 1)$, откуда $r \in \pi(q - 1)$ вопреки условию (W_5^U) . Представим число t в виде $t = 2^a \cdot 3^k \cdot l$, где $k \leq b$ и $l \mid m$. Пользуясь леммой 9, заключаем, что

$$\text{ord}_r (\bar{q}_3)^{3^k} = \frac{\text{ord}_r p^{2^a \cdot 3^k \cdot l}}{\gcd(\text{ord}_r p^{2^a \cdot 3^k \cdot l}, \frac{m}{l})} = \frac{\text{ord}_r p^t}{\gcd(\text{ord}_r p^t, \frac{m}{l})} = \frac{2}{\gcd(2, \frac{m}{l})} = 2.$$

Последнее равенство верно, поскольку число m по определению является нечетным. Аналогично доказывается, что $\text{ord}_s (\bar{q}_3)^{3^k} = 6$. Согласно утверждению (W_5^U) справедливо равенство

$$\text{ord}_r \bar{q}_3 = \text{ord}_s \bar{q}_3,$$

из которого следует, что

$$2 = \text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^k} = \text{ord}_s(\bar{q}_3)^{3^k} = 6;$$

противоречие.

Рассмотрим теперь случай $2 \in \tau$. Из условий

$$\text{ord}_r^* \bar{q}_3 = \text{ord}_2^* \bar{q}_3 = \text{ord}_4 \bar{q}_3 \in \{1, 2\} \quad \text{для любого } r \in \tau \quad \text{и} \quad \tau \subseteq \pi(q+1)$$

следует, что $\tau \subseteq \pi(\bar{q}_3 + 1)$ и 4 делит $\bar{q}_3 + 1$. В частности, это означает, что 4 делит число $q + 1$, откуда $a = 0$, т. е. $q = p^{3^b \cdot m}$, поскольку квадрат нечетного числа сравним с 1 по модулю 4. Допустим, существует некоторое число $t \mid n$ такое, что $\text{SU}_3(p^t) \notin D_\pi$. Тогда для $\text{SU}_3(p^t)$ нарушается условие (D_5) леммы 15. Исключим следующие два случая.

1. Существует нечетное число $r \in \pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t))$ такое, что $r \notin \pi(p^t + 1)$. Число r не может принадлежать множеству $\pi(p^t - 1)$, поскольку иначе было бы справедливо соотношение $r \in \pi(q - 1)$. Таким образом, $\text{ord}_r p^t = 6$. Представим число t в виде $t = 3^k \cdot l$, где $k \leq b$ и $l \mid m$. Тогда по лемме 9 верна следующая цепочка равенств:

$$\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^k} = \frac{\text{ord}_r p^{3^k \cdot l}}{\gcd(\text{ord}_r p^{3^k \cdot l}, \frac{m}{l})} = \frac{\text{ord}_r p^t}{\gcd(\text{ord}_r p^t, \frac{m}{l})} = 6.$$

Последнее равенство верно, так как число $\frac{m}{l}$ взаимно просто с числом 6. С другой стороны, из того, что $\text{ord}_r \bar{q}_3 = 2$, по лемме 9 имеем

$$\text{ord}_r(\bar{q}_3)^{3^k} = \frac{\text{ord}_r \bar{q}_3}{\gcd(\text{ord}_r \bar{q}_3, 3^k)} = \frac{2}{\gcd(2, 3^k)} = 2;$$

противоречие. Таким образом, $\pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t + 1)$.

2. Число 4 делит $p^t - 1$. Отсюда вытекает, что 4 делит $q - 1$. Следовательно, 4 делит одновременно числа $q - 1$ и $q + 1$; противоречие.

Таким образом, заключаем, что

$$\pi \cap \pi(\text{SU}_3(p^t)) \subseteq \pi(p^t + 1) \quad \text{и} \quad 4 \mid p^t + 1,$$

откуда $\text{SU}_3(p^t) \in D_\pi$.

Докажем теперь, что каждое из утверждений $(W_2^U) - (W_5^U)$ влечет $L_2(7) \in W_\pi$, если $7 \in \pi(q^3 + 1)$ и $q = \bar{q}_2$, и $A_7 \in W_\pi$, если $p = 5$ и $q = \bar{q}_2$.

Рассмотрим для начала случай $p \neq 5$ и $q = \bar{q}_2$. Из утверждений (W_2^U) , (W_3^U) и (W_5^U) легко вытекает, что $L_2(7) \in W_\pi$, поскольку $|\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1$ и $|\tau \cap \{2, 3\}| \leq 1$. В утверждении (W_4^U) фигурирует включение $\tau \subseteq \pi(q - 1)$, из которого вытекает, что если $7 \in \tau$, то либо $L_2(7) \leq L_2(q) \in W_\pi$, либо в группе $\text{SU}_3(q)$ отсутствует секция, изоморфная $L_2(7)$. Если $7 \notin \tau$, то группа $L_2(7)$ будет также обладать свойством W_π , поскольку $|\tau \cap \{2, 3\}| \leq 1$.

Наконец, допустим, что $p = 5$ и $q = \bar{q}_2$. Тогда группа $\text{SU}_3(q)$ обладает секцией, изоморфной A_7 . Установим, что группа A_7 обладает свойством W_π .

СЛУЧАЙ (W_2^U) . Из того, что $p = 5$ и $q = \bar{q}_2$, легко заключить, что $7 \in \pi(\bar{q}_2^3 + 1)$. Следовательно, $7 \notin \pi(\bar{q}_2 - 1)$ и $\pi \cap \{2, 3, 5, 7\} = \{5\}$. Таким образом, $A_7 \in W_\pi$ по теореме Силова.

СЛУЧАЙ (W_3^U) . В этом случае $2, 5 \notin \pi$. Поэтому достаточно показать, что $3 \notin \pi$. Представим число q в виде $q = 5^{2f+1}$. Тогда

$$5^{2f+1} = 25^f \cdot 5 \equiv -1 \pmod{3}.$$

Отсюда вытекает, что $3 \in \pi(q+1)$ и, следовательно, $3 \notin \pi$.

СЛУЧАЙ (W_4^U) . Поскольку $q = \bar{q}_2$ и $p = 5$, имеем $7 \in \pi(q^3 + 1)$. С другой стороны, $\tau \subseteq \pi(q-1)$ согласно утверждению (W_4^U) . Следовательно, $7 \notin \pi$. Из неравенства $|\tau \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ следует, что $A_7 \in W_\pi$ по теореме Силова.

СЛУЧАЙ (W_5^U) . Допустим, $2 \in \pi$. С учетом условий $|\tau \cap \{2, 7\}| \leq 1$ и $|\pi \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$ заключаем, что $3, 5, 7 \notin \pi$, откуда $A_7 \in W_\pi$.

Допустим, $3 \in \pi$. Поскольку $|\pi \cap \{2, 3, 5\}| \leq 1$, имеем $2, 5 \notin \pi$. Предположим, что $7 \in \pi$. Тогда из утверждения (W_5^U) вытекает, что $\text{ord}_3 \bar{q}_3 = \text{ord}_7 \bar{q}_3$. Поскольку $q = \bar{q}_2$, справедливо равенство $\bar{q}_3 = 5^m$, где $\gcd(m, 6) = 1$. Отсюда следует, что $\text{ord}_3 \bar{q}_3 = 2$. Представим число m в виде $m = 3f + i$, где $i \in \{1, 2\}$. Тогда

$$\bar{q}_3 = 5^{3f+i} = 125^f \cdot 5^i \equiv (-1)^f \cdot 5^i \pmod{7} \equiv \begin{cases} \pm 5 \pmod{7}, & i = 1, \\ \pm 4 \pmod{7}, & i = 2. \end{cases}$$

Отсюда вытекает, что $\text{ord}_7 \bar{q}_3 \in \{3, 6\}$; противоречие. Следовательно, $7 \notin \pi$ и $A_7 \in W_\pi$.

В силу того, что $L_2(7) \leq A_7$, группа $L_2(7)$ также обладает свойством W_π . Теорема доказана.

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное чтение рукописи и замечания, позволившие улучшить ее первоначальный вариант.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Theorems like Sylow's // Proc. London Math. Soc. (3). 1956. V. 6. P. 286–304.
2. Wielandt H. Entwicklungslinien in der Strukturtheorie der endlichen Gruppen // Proc. Intern. Congress Math., Edinburgh, 1958. London: Cambridge Univ. Press, 1960. P. 268–278.
3. Hall P. A note on soluble groups // J. London Math. Soc. 1928. V. 3, N 2. P. 98–105.
4. Hall P. A characteristic property of soluble groups // J. London Math. Soc. 1937. V. 12, N 3. P. 198–200.
5. Ревин Д. О., Шепелев В. Д. Сильная π -теорема Силова для групп $\text{PSL}_2(q)$ // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 1011–1021.
6. Wielandt H. Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute // The Santa Cruz conf. on finite groups, Santa Cruz, 1979. Providence RI: Am. Math. Soc., 1980. P. 161–173. (Proc. Sympos. Pure Math. V. 37)
7. Вдовин Е. П., Ревин Д. О. Теоремы силовского типа // Успехи мат. наук. 2011. Т. 66, № 5. С. 3–46.
8. Манзаева Н. Ч. Решение проблемы Виланда для спорадических групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2012. Т. 9. С. 294–305.
9. Ревин Д. О. Свойство D_π в конечных простых группах // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 3. С. 364–394.
10. Bray J. N., Holt D. F., Roney-Dougall C. M. The maximal subgroups of the low-dimensional finite classical groups. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2013. V. 407.
11. Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A. Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
12. Downs M., Jones G. A. The Möbius function of the Suzuki groups // arXiv:1404.5470.2014.
13. Вдовин Е. П., Манзаева Н. Ч., Ревин Д. О. О наследуемости свойства D_π подгруппами // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 44–52.
14. Pierro E. The Möbius function of the small Ree groups // arXiv:1410.8702v3 [math.GR] (2015).

-
15. Huppert B. Endliche Gruppen. I. Berlin: Springer-Verl., 1967.

Поступила в редакцию 20 февраля 2025 г.

После доработки 24 мая 2025 г.

Принята к публикации 26 мая 2025 г.

Шепелев Виталий Денисович (ORCID 0000-0002-8411-2805)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

`v.shepelev@g.nsu.ru`

Зав. редакцией В. Н. Дятлов

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$,
разработанного Американским математическим обществом.

This publication was typeset using $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\text{\TeX}$,
the American Mathematical Society's $\text{\TeX}$ macro system.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-86519 от 29 декабря 2023 г.
Размещение в сети Интернет math-smz.ru.

Подписано к опубликованию 30.06.2025. Уч.-изд. л. 18,6. Формат $70 \times 108^{1/16}$.
Дата размещения в сети Интернет 20.07.2025. Объем файла 2.15 Мб.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия.