

КУБИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ГАМИЛЬТОНОВОЙ
СИСТЕМЫ С ПОТЕНЦИАЛОМ
КЛАССА C^1 НА ПЛОСКОМ 2-ТОРЕ
В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Рассматривается двумерная гамильтонова динамическая система с потенциалом, периодическим относительно некоторой решетки. Если система обладает интегралом F , являющимся многочленом третьей степени по импульсам с коэффициентами, периодическими относительно той же решетки, то она также обладает линейным по импульсам интегралом G , а F выражается через G и гамильтониан H . В случае целочисленной решетки этот результат был ранее получен М. Л. Бялым, а в случае произвольной решетки и аналитического потенциала — Н. В. Денисовой и В. В. Козловым. В настоящей работе это утверждение доказывается в случае произвольной решетки для потенциала класса C^1 . Доказательство значительно усложняется.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.518

Ключевые слова: гамильтонова динамическая система, полиномиальный интеграл, периодичность относительно решетки.

1. Постановка задачи
и формулировка основного результата

Рассматривается двумерная гамильтонова динамическая система. В качестве гамильтоновых переменных мы используем $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ и $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Предполагается, что гамильтониан имеет вид

$$H(x, y) = H_2 + V(x), \quad H_2 = (y_1^2 + y_2^2)/2. \quad (1.1)$$

При этом H_2 именуется *кинетической энергией*, а $V(x)$ — *потенциалом*.

Функция $F(x, y)$ называется *интегралом* гамильтоновой системы (1.1), если она удовлетворяет уравнению $\{H, F\} = 0$, где

$$\{H, F\} = y_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1} \frac{\partial F}{\partial y_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2} \frac{\partial F}{\partial y_2} \quad (1.2)$$

— скобка Пуассона.

Решетка $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ есть дискретная подгруппа ранга 2 аддитивной группы $\mathbb{R}^2$. Говорим, что функция $f \in C(\mathbb{R}^2)$ Γ -периодична, если $f(x + k) = f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^2$ и всех $k \in \Gamma$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0026.

Предполагаем, что потенциал $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ является действительной Γ -периодической функцией относительно некоторой заданной решетки Γ . Нас интересует случай, когда динамическая система (1.1) обладает интегралом F , являющимся многочленом степени $n \geq 1$ по скоростям (y_1, y_2) . Если такой интеграл представить в виде $F = F_+ + F_-$, где F_+ (F_-) — четный (нечетный) многочлен по скоростям, то, как видно из (1.2), F_+ и F_- также являются интегралами. Поэтому достаточно рассматривать полиномиальные интегралы вида $F = F_n + F_{n-2} + F_{n-4} + \dots + F_j$ — однородный многочлен степени j по (y_1, y_2) . Коэффициенты этих многочленов предполагаются Γ -периодическими функциями, принадлежащими $C^1(\mathbb{R}^2)$.

Следует сказать пару слов о геометрической значимости рассматриваемой задачи. Гамильтонова механика тесно связана с симплектической геометрией, а ее связи с римановой геометрией весьма эпизодичны. Но для системы (1.1) очевидна роль евклидовой метрики $dx_1^2 + dx_2^2$. Напомню, что двумерное риманово многообразие (M^2, g) называется *плоским*, если его гауссова кривизна тождественно равна нулю. Плоское двумерное риманово многообразие, диффеоморфное тору, изометрично $(\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$ для некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Поэтому система (1.1) с Γ -периодическим потенциалом $V(x)$ описывает движение материальной частицы в плоском торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$ под действием силы $-\nabla V$.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1.1. Пусть потенциал $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ действителен, не постоянен и Γ -периодичен относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Предположим, что гамильтонова динамическая система (1.1) обладает кубическим интегралом

$$F = a_0(x_1, x_2)y_1^3 + a_1(x_1, x_2)y_1^2y_2 + a_2(x_1, x_2)y_1y_2^2 + a_3(x_1, x_2)y_2^3 + b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2, \quad (1.3)$$

с Γ -периодическими коэффициентами, принадлежащими $C^1(\mathbb{R}^2)$, причем старшая часть $F_3 = a_0y_1^3 + a_1y_1^2y_2 + a_2y_1y_2^2 + a_3y_2^3$ не равна тождественно нулю. Тогда эта система обладает также линейным интегралом с постоянными коэффициентами

$$G = c_1y_1 + c_2y_2 \quad (c_1 = \text{const}, c_2 = \text{const})$$

и F выражается через G и H , т. е. существуют такие постоянные C_1, C_2, C_3 , что

$$F = C_1G^3 + C_2HG + C_3G. \quad (1.4)$$

Спектр потенциала лежит на прямой, проходящей через начало координат.

Последняя фраза в этой формулировке будет пояснена позже.

В случае целочисленной решетки $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ этот результат принадлежит М. Л. Бялому [1]. Для произвольной решетки теорема 1.1 доказана Н. В. Денисовой и В. В. Козловым в [2] при важном дополнительном условии: потенциал $V(x)$ является действительно-аналитической функцией. Правда, это условие не упомянуто в формулировке теоремы 2 из [2], но во введении сказано (цитирую): «В настоящей работе рассматривается задача о полиномиальных интегралах n -й степени с кинетической энергией общего вида и произвольным аналитическим потенциалом.» Аналитичность потенциала существенно используется в доказательстве, приведенном в [2]. Следует также сказать, что Н. В. Денисова и В. В. Козлов почему-то не любят термин «решетка», используют это слово крайне редко, предпочитая говорить о «кинетической энергии, являющейся

положительно определенной квадратичной формой $(ap_1^2 + 2bp_1p_2 + cp_2^2)/2$ с постоянными коэффициентами a, b, c . Тем не менее, после замены координат они приходят к (1.1) (см. формулу (2.2) в [2]) и основная часть их статьи состоит в исследовании поставленной задачи.

Изложим вкратце схему доказательства теоремы 1.1, обращая внимание на общность и различия между нашим подходом и методами работ [1, 2].

Легко доказывается, что коэффициенты a_j многочлена (1.3) постоянны. Анализируя уравнение $\{H, F\} = 0$ посредством представления функций V, b_0, b_1 их рядами Фурье, М. Л. Бялый приходит к уравнению

$$\sum_{j,k=1}^3 \alpha_{jk} f_j(m_j x + n_j y) f'_k(m_k x + n_k y) + \sum_{j=1}^3 \beta_j f'_j(m_j x + n_j y) = 0, \quad (1.5)$$

где $f_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) — некоторые 2π -периодические функции, (m_j, n_j) — целые числа, для которых $\rho_j = n_j/m_j$ являются корнями кубического уравнения

$$a_1 \rho^3 + (3a_0 - 2a_2) \rho^2 + (3a_3 - 2a_1) \rho + a_2 = 0, \quad (1.6)$$

постоянные коэффициенты α_{jk} выражаются явными формулами через a_j, ρ_j и, наконец, $\beta_j = \hat{b}_{0,0} m_j + \hat{b}_{1,0} n_j$. Доказательство теоремы 1.1 сводится к доказательству утверждения: не существует решения (f_1, f_2, f_3) уравнения (1.5) с непостоянными периодическими функциями $f_j(t)$. После линейной замены независимых переменных в ряде Фурье левой части уравнения (1.5) выделяются слагаемые, не зависящие от одной из переменных, и затем используются некоторые соотношения между коэффициентами α_{jk}, β_j уравнения (1.5), вытекающие из явных формул, выражающих эти коэффициенты через корни характеристического уравнения (1.6).

Н. В. Денисова и В. В. Козлов также получают некоторый аналог уравнения (1.5) [2, уравнение (4.9)] относительно трех периодических функций, но, в отличие от М. Л. Бялого, периоды этих функций могут быть различны. К сожалению, Н. В. Денисова и В. В. Козлов не обсуждают это обстоятельство, в силу чего у меня остаются вопросы и сомнения по поводу приведенного в [2] доказательства. Зафиксировав критическую точку x_2^0 функции $f_2(x_2)$, они ограничиваются лишь исследованием уравнения

$$f'_1(\sqrt{3}x_1 + x_2^0)(-f_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2^0) + c_0) + f'_3(-\sqrt{3}x_1 + x_2^0)(f_1(\sqrt{3}x_1 + x_2^0) + c_1) = 0,$$

вытекающего из [2, уравнение (4.9)]. Посредством элементарных манипуляций из этого уравнения извлекается следствие $g_1(x_1)g_3(x_1) = c = \text{const}$, где функции g_1 и g_3 выражаются явными формулами через f_1 и f_3 . Затем следуют малопонятные рассуждения, доказывающие, что $c = 0$ (у меня остается сомнение в справедливости этого утверждения). Доказательство завершается фразой (цитирую): «Так как в кольце аналитических функций нет делителей нуля, то либо g_1 , либо g_3 тождественно равны нулю.»

Ниже мы получим следующий вариант уравнения (1.5):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{\delta} f'_1(x_1)[f_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2) - f_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2) - c_0] \\ & + p_2 f'_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)[2f_1(x_1) - 2f_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2) - c_0 - c_1] \\ & + q_2 f'_3((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)[2f_1(x_1) - 2f_2((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2) + c_0 - c_1] = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

с некоторыми постоянными c_0 и c_1 . Здесь $f_j(t)$ — 2π -периодические функции, (p_1, p_2) и (q_1, q_2) — две пары взаимно простых целых чисел и β, δ — некоторые постоянные, определяющие геометрию решетки. В отличие от [1, 2] мы исследуем уравнение (1.7), преобразуя его с сохранением полной информации на каждом шаге. Представляя левую часть уравнения ее рядом Фурье и приравнявая коэффициенты Фурье к нулю, приходим к бесконечной системе квадратных уравнений (уравнение (7.9) ниже) относительно коэффициентов Фурье $\hat{f}_{j,n}$ функций f_j . Доказательство завершается применением следующего утверждения, играющего решающую роль в нашем подходе.

Теорема 1.2 (о трех последовательностях). Пусть три последовательности комплексных чисел $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$, $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}}$ образуют решение системы

$$X_{n_1}Y_{n_2} - X_{n_1+n_2}Z_{n_2} + Y_{n_1+n_2}Z_{-n_1} = 0 \quad (n_1 \neq 0, n_2 \neq 0, n_1 + n_2 \neq 0). \quad (1.8)$$

Предположим также, что эти последовательности удовлетворяют условию четности

$$X_{-n} = \overline{X_n}, \quad Y_{-n} = \overline{Y_n}, \quad Z_{-n} = \overline{Z_n} \quad (1.9)$$

и условию убывания

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (|X_n| + |Y_n| + |Z_n|) < \infty. \quad (1.10)$$

Тогда это решение одномерно, т. е. справедливо одно из следующих трех утверждений: (1) $X_n = Y_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (2) $X_n = Z_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, (3) $Y_n = Z_n = 0$ для всех $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Доказательство этой теоремы приведено в [3].

Настоящая работа возникла в значительной степени под влиянием статьи [2]. В частности, все приводимые в разд. 4 утверждения принадлежат Н. В. Денисовой и В. В. Козлову. Тем не менее мы приводим полные доказательства по двум причинам. Во первых, они доказывают предложение 4.1 для интеграла произвольной степени n , а мы лишь для $n = 3$; при этом доказательство значительно упрощается. Но главная причина состоит в следующем. При доказательстве предложений 4.1–4.3 в [2] используются некоторые вспомогательные утверждения, приводимые без доказательства со ссылкой на книги [4, 5], но я не нашел эти утверждения в указанных книгах. К счастью, оказывается, что доказательства всех вспомогательных утверждений получаются «сами собой» по ходу доказательства предложений 4.1–4.3. Надеюсь, выбранный мною стиль изложения облегчит заинтересованному читателю понимание сути дела. За исключением теоремы 1.2, настоящая статья самодостаточна, т. е. не отсылает читателя к другим источникам за доказательствами. В частности, знакомство с [1, 2] также не предполагается, хотя настоящая работа выросла из этих статей.

Мы не обсуждаем довольно долгую историю вопроса. Такое обсуждение и обширная библиография приведены в [2, 6].

2. Ряд Фурье Γ -периодической функции

Для решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ двойственная решетка определяется равенством

$$\Gamma' = \{k \in \mathbb{R}^2 \mid k_1 m_1 + k_2 m_2 \in 2\pi\mathbb{Z} \text{ для всех } m \in \Gamma\}.$$

Любая Γ -периодическая функция $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ представима своим рядом Фурье

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k \in \Gamma'} \hat{f}_k e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (2.1)$$

Множество тех узлов $k \in \Gamma'$ решетки Γ' , для которых $\widehat{f}_k \neq 0$, называется *спектром* функции f . Γ -периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ можно трактовать как функцию на торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$, т. е. $f \in C^1(\mathbb{T}^2)$. В частности, нулевой коэффициент Фурье есть среднее значение функции:

$$\widehat{f}_0 = \frac{1}{\sigma} \int_{\mathbb{T}^2} f d\sigma, \quad (2.2)$$

где $d\sigma = dx_1 dx_2$ — форма площади на торе и σ — площадь тора.

Мы рассматриваем гамильтонову динамическую систему с гамильтонианом вида (1.1), где потенциал $V(x_1, x_2)$ Γ -периодичен относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, и ставим задачу изучения кубических интегралов вида (1.3) для этой системы. Прежде всего отметим, что поставленная задача инвариантна относительно поворотов решетки Γ вокруг начала координат и гомотетий решетки Γ относительно начала координат. Изменив точку зрения, ту же инвариантность можно выразить фразой: наша задача инвариантна относительно преобразований независимых переменных $(x, y) = (x_1, x_2; y_1, y_2)$ вида

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mu A \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mu^{-1} A \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где μ — положительная постоянная и A — ортогональная 2×2 -матрица. В настоящей работе мы придерживаемся второй точки зрения, т. е. решетка Γ (а следовательно, и двойственная решетка Γ') будет зафиксирована, в то время как в процессе доказательства теоремы 1.1 нам придется неоднократно использовать замены переменных вида (2.3).

Легко убедиться, что линейная по скоростям функция $F_1 = b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2$ при замене (2.3) преобразуется по правилу

$$F_1 = b'_0(x'_1, x'_2)y'_1 + b'_1(x'_1, x'_2)y'_2, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \mu A \begin{pmatrix} b'_0 \\ b'_1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

При замене (2.3) ряд Фурье (2.1) немного видоизменяется:

$$f(x'_1, x'_2) = \sum_{k \in \Gamma'} \widehat{f}_k e^{i(k'_1 x'_1 + k'_2 x'_2)}, \quad \text{где} \quad k' = \mu A^{-1} k.$$

3. Основные дифференциальные уравнения. $F\Gamma'$ -прямые

Пусть (1.3) — кубический интеграл гамильтоновой системы (1.1). Подставляя выражение (1.3) в уравнение $\{H, F\} = 0$ и используя (1.2), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{\partial a_0}{\partial x_1} y_1^4 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_0}{\partial x_2} \right) y_1^3 y_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right) y_1^2 y_2^2 + \left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} \right) y_1 y_2^3 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} y_2^4 \\ & + \left(\frac{\partial b_0}{\partial x_1} - 3a_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_1^2 + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_0}{\partial x_2} - 2a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 2a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_1 y_2 \\ & + \left(\frac{\partial b_1}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 3a_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} \right) y_2^2 - b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Поскольку это уравнение выполняется тождественно по $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, из него следуют дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial a_0}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_0}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0; \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_0}{\partial x_1} - 3a_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial b_0}{\partial x_2} + \frac{\partial b_1}{\partial x_1} - 2a_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 2a_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0, \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 3a_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0; \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1} + b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \quad (3.3)$$

Напомним, что функции $a_j \in C^1(\mathbb{R}^2)$ ($j = 0, 1, 2, 3$) Γ -периодичны; в частности, они ограничены. С учетом этого обстоятельства из (3.1) следует, что эти функции постоянны. Действительно, первое уравнение системы (3.1) означает, что a_0 не зависит от x_1 , т. е. $a_0 = a_0(x_2)$. Подставляя это выражение во второе уравнение системы (3.1), получаем $a'_0(x_2) + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0$. Отсюда $a_1(x_1, x_2) = c_1(x_2) - a'_0(x_2)x_1$ с некоторой функцией $c_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Поскольку a_1 ограничена, отсюда следует $a'_0 = 0$, т. е. функция a_0 постоянна. Теперь система (3.1) упрощается до следующей:

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0.$$

Повторяя те же аргументы, убеждаемся, что функции a_1, a_2, a_3 также постоянны.

Займемся линейными уравнениями (3.2). Без ограничения общности можно считать, что среднее значение потенциала по тору равно нулю, поскольку прибавление постоянной к функции V не меняет уравнения (3.2), (3.3). В силу (2.2) это означает, что нулевой коэффициент Фурье функции V равен нулю. Таким образом, ряд Фурье потенциала имеет вид

$$V(x_1, x_2) = \sum_{k \in \Gamma' \setminus \{0\}} \hat{V}_k e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)}. \quad (3.4)$$

Что касается функций b_0 и b_1 , мы не можем априори считать их нулевыми коэффициенты Фурье равными нулю, поскольку они участвуют в уравнении (3.3). Таким образом,

$$b_j(x_1, x_2) = \hat{b}_{j,0} + \sum_{k \in \Gamma' \setminus \{0\}} \hat{b}_{j,k} e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2)} \quad (j = 0, 1). \quad (3.5)$$

Если условие $V, b_j \in C^1(\mathbb{R}^2)$ усилить до $V, b_j \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2)$ ($\alpha > 0$), то ряды Фурье (3.4), (3.5) можно почленно дифференцировать в классическом смысле. Впрочем, можно обойтись без этого усиления, если производные $\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial b_j}{\partial x_i}$ трактовать как функции из $L^2(\mathbb{T}^2)$, что вполне достаточно для наших целей. То же верно для произведений $b_j \frac{\partial V}{\partial x_i}$, участвующих в (3.3). Это стандартное обоснование наших действий с рядами Фурье будет в дальнейшем опускаться ради краткости.

Дифференцируем равенства (3.4), (3.5) и подставляем производные в уравнения (3.2). Приравнявая затем к нулю коэффициенты Фурье левых частей полученных уравнений, для каждого узла $k = (k_1, k_2) \neq (0, 0)$ решетки Γ' получаем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{aligned} -k_1 \hat{b}_{0,k} + (3a_0 k_1 + a_1 k_2) \hat{V}_k &= 0, \\ -k_2 \hat{b}_{0,k} - k_1 \hat{b}_{1,k} + (2a_1 k_1 + 2a_2 k_2) \hat{V}_k &= 0, \\ -k_2 \hat{b}_{1,k} + (a_2 k_1 + 3a_3 k_2) \hat{V}_k &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда прежде всего следует: если $\widehat{V}_k = 0$ для некоторого $0 \neq k \in \Gamma'$, то и $\widehat{b}_{0,k} = \widehat{b}_{1,k} = 0$. Приравнявая определитель системы (3.6) к нулю, получаем

$$a_2 k_1^3 + (3a_3 - 2a_1)k_1^2 k_2 + (3a_0 - 2a_2)k_1 k_2^2 + a_1 k_2^3 = 0. \quad (3.7)$$

Следовательно, отношение $\rho = k_2/k_1$ является корнем *характеристического уравнения* (1.6), если $V_k \neq 0$. Подчеркнем, что не исключается случай бесконечного корня $\rho = \infty$ уравнения (1.6), который имеет место при $a_1 = 0$; в этом случае $(k_1, k_2) = (0, 1)$ является решением уравнения (3.7).

Полученный результат можно выразить в терминах так называемых спектральных прямых потенциала V . Пусть $L_{(1,\rho)} = \{(k_1, k_2) = t(1, \rho) \mid t \in \mathbb{R}\}$ — прямая в плоскости переменных (k_1, k_2) , проходящая через начало координат с направляющим вектором $(1, \rho)$. Говорим, что $L_{(1,\rho)}$ является $F\Gamma'$ -прямой, если $L_{(1,\rho)} \cap (\Gamma' \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ и ρ является корнем характеристического уравнения (1.6). Присоединим ось ординат $L_{(0,1)} = \{(k_1, k_2) = (0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ к числу $F\Gamma'$ -прямых, если $L_{(0,1)} \cap (\Gamma' \setminus \{0\}) \neq \emptyset$ и уравнение (1.6) имеет бесконечный корень. Название « $F\Gamma'$ -прямая» объясняется тем, что в нем участвуют коэффициенты многочлена F и решетка Γ' . Пусть M — число $F\Gamma'$ -прямых. Тогда $M \leq 3$, поскольку кубическое уравнение (1.6) имеет не более трех различных действительных корней. Для произвольного многочлена F вполне может оказаться $M = 0$. Но в условиях теоремы 1.1 $M \geq 1$, поскольку $\widehat{V}_k \neq 0$ хотя бы для одного $0 \neq k \in \Gamma'$. Пусть $L_1, \dots, L_M$ — все $F\Gamma'$ -прямые. Обозначим через $\text{Sp}(V) = \{k \in \Gamma' \mid \widehat{V}_k \neq 0\}$ спектр потенциала. Напомним, что $0 \notin \text{Sp}(V)$. Тогда

$$\text{Sp}(V) \subset \bigcup_{m=1}^M (L_m \cap (\Gamma' \setminus \{0\})).$$

Говорим, что $F\Gamma'$ -прямая L_m является *спектральной прямой* потенциала, если $L_m \cap (\text{Sp}(V) \setminus \{0\}) \neq \emptyset$. Последнее утверждение теоремы 1.1 эквивалентно следующему: потенциал имеет лишь одну спектральную прямую.

Для каждой из $F\Gamma'$ -прямых L_m выберем одну из двух ближайших к началу координат точек из $L_m \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, обозначив ее (k_1^m, k_2^m) . Тогда $L_m \cap \Gamma' = \{(nk_1^m, nk_2^m) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ и ряд Фурье (3.4) приобретает вид

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)} e^{in(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)}. \quad (3.8)$$

Введя 2π -периодические функции

$$f_m(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)} e^{int} \quad (m = 1, \dots, M), \quad (3.9)$$

запишем (3.8) в виде

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^M f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2).$$

Отметим, что $f_m \equiv 0$, если $L_m \cap \text{Sp}(V) = \emptyset$. Мы можем написать эту формулу в виде

$$V(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2), \quad (3.10)$$

считая, что $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ при $M = 1$ или $f_3 \equiv 0$ при $M = 2$.

Как отмечено выше, коэффициенты Фурье $\widehat{b}_{0,k}$ и $\widehat{b}_{1,k}$ могут быть отличны от нуля лишь для тех $0 \neq k \in \Gamma'$, для которых $\widehat{V}_k \neq 0$. Полагая $k = (nk_1^m, nk_2^m)$ в (3.6), имеем для $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ систему

$$\begin{aligned} k_1^m \widehat{b}_{0,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (3a_0 k_1^m + a_1 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}, \\ k_2^m \widehat{b}_{0,(nk_1^m, nk_2^m)} + k_1^m \widehat{b}_{1,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (2a_1 k_1^m + 2a_2 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}, \\ k_2^m \widehat{b}_{1,(nk_1^m, nk_2^m)} &= (a_2 k_1^m + 3a_3 k_2^m) \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}. \end{aligned}$$

Решение этой системы может быть записано в виде $\widehat{b}_{j,(nk_1^m, nk_2^m)} = \alpha_{jm} \widehat{V}_{(nk_1^m, nk_2^m)}$, где

$$\begin{aligned} \alpha_{0,m} &= \begin{cases} 3a_0 + a_1 k_2^m / k_1^m, & \text{если } k_1^m \neq 0, \\ 2a_2, & \text{если } k_1^m = 0; \end{cases} \\ \alpha_{1,m} &= \begin{cases} a_2 k_1^m / k_2^m + 3a_3, & \text{если } k_2^m \neq 0, \\ 2a_1, & \text{если } k_2^m = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Отсюда с помощью (3.5) и (3.9) вытекает представление

$$b_j(x_1, x_2) = \widehat{b}_{j,0} + \sum_{m=1}^3 \alpha_{jm} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) \quad (j = 0, 1). \quad (3.12)$$

4. Спектральные прямые потенциала

Лемма 4.1. Если непостоянная периодическая функция $f(t)$ класса C^1 удовлетворяет $(\alpha f(t) + \beta) f'(t) = 0$ с постоянными α и β , то $\alpha = \beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываем от противного. Предположим, что $\alpha \neq 0$. Поскольку f — непостоянная функция, найдется такое t_0 , что $f'(t_0) \neq 0$. Существует такое $\varepsilon > 0$, что $f'(t) \neq 0$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Теперь из $(\alpha f(t) + \beta) f'(t) = 0$ следует, что $\alpha f(t) + \beta = 0$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, т. е. $f(t) = -\beta/\alpha = \text{const}$ для $t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Следовательно, $f'(t_0) = 0$, что противоречит предположению. Итак, $\alpha = 0$ и уравнение приобретает вид $\beta f'(t) = 0$. Поскольку f не постоянна, отсюда следует $\beta = 0$. $\square$

Предложение 4.1. Если в условиях теоремы 1.1 подвергнуть независимые переменные преобразованию вида (2.3) так, чтобы после преобразования ось абсцисс $k_2 = 0$ стала спектральной прямой потенциала, то после этого преобразования коэффициенты многочлена (1.3) будут удовлетворять $a_0 = a_2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы уже доказали, что коэффициенты a_j многочлена (1.3) постоянны. Пусть $L_1, \dots, L_M$ ($1 \leq M \leq 3$) — все $F\Gamma'$ -прямые. Упорядочим их так, чтобы на прямой L_1 была хоть одна точка спектра потенциала. Подвергнем независимые переменные преобразованию вида (2.3) так, чтобы после преобразования L_1 совпала с осью абсцисс и $(1, 0)$ была бы ближайшей к началу координат точкой из $L_1 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$. Теперь на оси абсцисс имеется хотя бы одна отличная от начала координат точка спектра функции V , т. е. существует такое $k_1 \neq 0$, что $(k_1, 0) \in \Gamma'$ и $\widehat{V}_{(k_1, 0)} \neq 0$. Разумеется, уравнения (3.6) останутся справедливыми после преобразования координат. Полагая $k = (k_1, 0)$ в последнем из уравнений (3.6), имеем $a_2 k_1 \widehat{V}_{(k_1, 0)} = 0$. Следовательно, $a_2 = 0$. Ввиду этого уравнение (3.7) принимает вид

$$(3a_3 - 2a_1) k_1^2 k_2 + 3a_0 k_1 k_2^2 + a_1 k_2^3 = 0.$$

В частности,

$$(3a_3 - 2a_1)k_1^2 + 3a_0k_1k_2 + a_1k_2^2 = 0, \quad \text{если } k_2 \neq 0. \quad (4.1)$$

Формула (3.10) теперь принимает вид

$$V(x_1, x_2) = f_1(x_1) + \sum_{m=2}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2), \quad (4.2)$$

причем функция f_1 не постоянна и $k_2^2 \neq 0, k_2^3 \neq 0$. Поэтому в силу (4.1)

$$(3a_3 - 2a_1)(k_1^m)^2 + 3a_0k_1^m k_2^m + a_1(k_2^m)^2 = 0 \quad (m \geq 2). \quad (4.3)$$

В формулах (3.12) надо положить $(k_1^1, k_2^1) = (1, 0)$ и $k_2^m \neq 0$ ($2 \leq m \leq M$). С учетом равенства $a_2 = 0$ формулы (3.11), (3.12) дают

$$b_1(x_1, x_2) = 2a_1f_1(x_1) + 3a_3 \sum_{m=2}^3 f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{1,0}, \quad (4.4)$$

$$b_0(x_1, x_2) = 3a_0f_1(x_1) + \sum_{k_1^m \neq 0} \left(3a_0 + a_1 \frac{k_2^m}{k_1^m} \right) f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{0,0}.$$

Здесь $\sum_{k_1^m \neq 0}$ означает суммирование по тем $2 \leq m \leq 3$, для которых $k_1^m \neq 0$ (условившись, что $k_1^m \neq 0$, если $f_m \equiv 0$). Согласно (4.3)

$$3a_0 + a_1 \frac{k_2^m}{k_1^m} = (2a_1 - 3a_3) \frac{k_1^m}{k_2^m}.$$

Поэтому последняя формула упрощается до следующей:

$$b_0(x_1, x_2) = 3a_0f_1(x_1) + (2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) + \widehat{b}_{0,0}. \quad (4.5)$$

Из (4.2) и (4.4) следует равенство

$$b_1 = 3a_3V + (2a_1 - 3a_3)f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}. \quad (4.6)$$

Дифференцируя равенство (4.2), получаем

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1'(x_1) + \sum_{m=2}^3 k_1^m f_m'(k_1^m x_1 + k_2^m x_2).$$

Напомним, что $k_2^m \neq 0$ при $m \geq 2$. Поскольку

$$f_m'(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) = \frac{1}{k_2^m} \frac{\partial (f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2))}{\partial x_2},$$

предыдущая формула может быть записана в виде

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1'(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2) \right). \quad (4.7)$$

Теперь обратимся к уравнению (3.3), которое пока не использовалось. Подставив выражения (4.5)–(4.7) для функций $b_0, b_1, \frac{\partial V}{\partial x_1}$ в уравнение (3.3), получим

$$\begin{aligned} & \left(3a_0 f_1(x_1) + (2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \widehat{b}_{0,0} \right) \left(f_1'(x_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) \right) \\ & + (3a_3 V + (2a_1 - 3a_3) f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}) \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Ради краткости аргументы функций V и f_m здесь не указаны, но подразумевается, что $V = V(x_1, x_2)$ и $f_m = f_m(k_1^m x_1 + k_2^m x_2)$. Раскрыв скобки, запишем это уравнение так:

$$\begin{aligned} & 3a_0 f_1(x_1) f_1'(x_1) + 3a_0 \frac{\partial}{\partial x_2} \left(f_1(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) + (2a_1 - 3a_3) f_1'(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \\ & + \frac{1}{2} (2a_1 - 3a_3) \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right)^2 \right) + \widehat{b}_{0,0} f_1'(x_1) + \widehat{b}_{0,0} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right) \\ & + \frac{3a_3}{2} \frac{\partial V^2}{\partial x_2} + (2a_1 - 3a_3) \frac{\partial(f_1(x_1)V)}{\partial x_2} + \widehat{b}_{1,0} \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение можно также записать в виде

$$[(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0}) f_1'(x_1)] + (2a_1 - 3a_3) f_1'(x_1) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{3a_3}{2} V^2 + ((2a_1 - 3a_3) f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}) V \\ & + (3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0}) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m + \frac{1}{2} (2a_1 - 3a_3) \left(\sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m \right)^2. \end{aligned}$$

Все участвующие в уравнении (4.8) функции Γ -периодичны и могут рассматриваться в качестве функций на торе $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2/\Gamma, dx_1^2 + dx_2^2)$. Обозначив через κ среднее значение функции $(2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m$ по тору (см. (2.2)), запишем уравнение (4.8) в виде

$$[(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0} + \kappa) f_1'(x_1)] + f_1'(x_1) \left((2a_1 - 3a_3) \sum_{m=2}^3 \frac{k_1^m}{k_2^m} f_m - \kappa \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0. \quad (4.9)$$

К уравнению (4.9) применимы изящные аргументы М. Л. Бялого [1], заключающиеся в следующем. Разложим левую часть уравнения (4.9) в ряд Фурье вида (2.1) и в этом ряду проследим слагаемые вида $ce^{i\nu x_1}$ ($c = \text{const}$), не зависящие от x_2 (случай $\nu = 0$ не исключается). Ряд Фурье функции в квадратных скобках полностью состоит из таких гармоник, а последние два слагаемых не содержат таких гармоник. Поэтому из (4.9) следует, что $(3a_0 f_1(x_1) + \widehat{b}_{0,0} + \kappa) f_1'(x_1) = 0$. Применяя лемму 4.1, получаем $a_0 = 0$. $\square$

Предложение 4.2. Если в условиях теоремы 1.1 потенциал имеет две различные спектральные прямые, то они пересекаются друг с другом под углом $\pi/3$. Если при этом независимые переменные подвергнуть преобразованию вида (2.3) так, чтобы одна из двух спектральных прямых стала горизонтальной, то после преобразования коэффициенты многочлена (1.3) будут удовлетворять $a_0 = 0$, $a_2 = 0$, $a_1 + 3a_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть L_1 и L_2 — спектральные прямые потенциала, пересекающиеся под углом φ . Согласно предложению 4.1 после соответствующего преобразования независимых переменных прямая L_1 становится горизонтальной и $a_0 = a_2 = 0$. Старшая часть многочлена (1.3) имеет вид $F_3 = a_1 y_1^2 y_2 + a_3 y_2^3$. Теперь подвергнем независимые переменные преобразованию вида (2.3), где A — матрица поворота от L_2 до L_1 , т. е.

$$y_1 = \mu(y'_1 \cos \varphi - y'_2 \sin \varphi), \quad y_2 = \mu(y'_1 \sin \varphi + y'_2 \cos \varphi) \quad (0 < \mu = \text{const}).$$

При этом $\sin \varphi \neq 0$, поскольку прямые L_1 и L_2 различны. Простыми вычислениями убеждаемся, что после преобразования

$$F_3 = a'_0 (y'_1)^3 + a'_1 (y'_1)^2 y'_2 + a'_2 y'_1 (y'_2)^2 + a'_3 (y'_2)^3,$$

где

$$\begin{aligned} a'_0 &= \mu^3 \sin \varphi (a_1 \cos^2 \varphi + a_3 \sin^2 \varphi), \\ a'_1 &= \mu^3 \cos \varphi (a_1 (-2 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) + 3a_3 \sin^2 \varphi), \\ a'_2 &= \mu^3 \sin \varphi (a_1 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) + 3a_3 \cos^2 \varphi), \\ a'_3 &= \mu^3 \cos \varphi (a_1 \sin^2 \varphi + a_3 \cos^2 \varphi). \end{aligned} \quad (4.10)$$

После этого преобразования L_2 становится горизонтальной прямой. Согласно тому же предложению 4.1 $a'_0 = a'_2 = 0$, т. е. угол φ должен быть таким, что

$$a_1 \cos^2 \varphi + a_3 \sin^2 \varphi = 0, \quad a_1 (\sin^2 \varphi - 2 \cos^2 \varphi) + 3a_3 \cos^2 \varphi = 0. \quad (4.11)$$

Если рассматривать (4.11) как систему линейных уравнений относительно (a_1, a_3) , то ее определитель должен равняться нулю, поскольку $(a_1, a_3) \neq (0, 0)$. Приравняв определитель к нулю, приходим к уравнению

$$3 \cos^4 \varphi + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi - \sin^4 \varphi = 0. \quad (4.12)$$

При этом важно отметить, что $\cos \varphi \neq 0$. Действительно, в противном случае $a'_1 = a'_3 = 0$, как видно из (4.10). Вместе с $a'_0 = a'_2 = 0$ это означает, что $F_3 = 0$, что противоречит условию теоремы 1.1. Итак, уравнение (4.12) может быть записано в виде $\text{tg}^4 \varphi - 2 \text{tg}^2 \varphi - 3 = 0$. Отсюда $\text{tg} \varphi = \pm \sqrt{3}$, т. е. $\varphi = \pm \pi/3$. Подставляя $\sin \varphi = \pm \sqrt{3}/2$, $\cos \varphi = 1/2$ в первое уравнение системы (4.11), получаем $a_1 + 3a_3 = 0$. $\square$

Все наши уравнения существенно упрощаются с помощью предложения 4.2. Во-первых, многочлен (1.3) можно умножить на любую ненулевую постоянную. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 0$, $a_1 = -3$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$. Многочлен (1.3) теперь имеет вид

$$F = -3y_1 y_2^2 + y_2^3 + b_0(x_1, x_2)y_1 + b_1(x_1, x_2)y_2.$$

Характеристическое уравнение (1.6) упрощается до $\rho^3 - 3\rho = 0$, корни которого $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = \sqrt{3}$, $\rho_3 = -\sqrt{3}$. Поэтому в формуле (4.2)

$$k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2, \quad k_3^2 = -\sqrt{3}k_1^2 \quad (k_2^2 \neq 0, k_3^2 \neq 0).$$

Напомним, что (k_1^2, k_2^2) — одна из двух ближайших к началу координат точек, принадлежащих $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$. Без ограничения общности можно считать, что $k_2^2 > 0$. Аналогично можно считать, что $k_2^3 > 0$. Предыдущая формула уточняется до

$$k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2, \quad k_2^3 = -\sqrt{3}k_1^3 \quad (k_1^2 > 0, k_1^3 < 0). \quad (4.13)$$

Это уточнение будет использовано в следующем разделе.

Из (4.2) следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = f_1' + k_1^2 f_2' + k_1^3 f_3', \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2^2 f_2' + k_2^3 f_3'.$$

Формулы (4.4), (4.5) принимают вид

$$b_0 = 3\sqrt{3}(-f_2 + f_3 + \sqrt{3}\widehat{b}_{0,0}/9), \quad b_1 = 3(-2f_1 + f_2 + f_3 + \widehat{b}_{1,0}/3). \quad (4.14)$$

Ради краткости аргументы здесь не указаны, но подразумевается, что $f_1 = f_1(x_1)$, $f_2 = f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2)$, $f_3 = f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2)$. Подставляя эти выражения в уравнение (3.3), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \left(-\sqrt{3}f_2 + \sqrt{3}f_3 + \frac{1}{3}\widehat{b}_{0,0}\right)(f_1' + k_1^2 f_2' + k_1^3 f_3') \\ & + \left(-2f_1 + f_2 + f_3 + \frac{1}{3}\widehat{b}_{1,0}\right)(k_2^2 f_2' + k_2^3 f_3') = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок происходят существенные сокращения (с помощью (4.13)) и уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}f_1' \left(f_2 - f_3 - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}}\right) + k_2^2 f_2' \left(2f_1 - 2f_3 - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}\right) \\ & + k_2^3 f_3' \left(2f_1 - 2f_2 + \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}\right) = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Предложение 4.3. В условиях теоремы 1.1 потенциал не может иметь ровно двух спектральных прямых.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим вопреки утверждению, что имеются ровно две спектральные прямые потенциала. Как выше отмечалось, это означает, что функция f_2 не постоянна, в то время как $f_3 \equiv 0$ (или наоборот). Рассматриваем первый из этих случаев (второй рассматривается так же). Уравнение (4.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}f_1'(x_1) \left(f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}}\right) \\ & + k_2^2 f_2'(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) \left(2f_1(x_1) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Поскольку функция f_1 периодична и не постоянна, найдутся такие x_1^0 и x_1^1 , что $f_1'(x_1^0) = f_1'(x_1^1) = 0$, но $f_1(x_1^0) \neq f_1(x_1^1)$. Полагая $x_1 = x_1^j$ в последнем уравнении, имеем

$$f_2'(k_1^2 x_1^j + k_2^2 x_2) \left(2f_1(x_1^j) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}\right) = 0 \quad (j = 0, 1).$$

Хотя бы одно из чисел $2f_1(x_1^0) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}$ и $2f_1(x_1^1) - \frac{\widehat{b}_{0,0}}{3\sqrt{3}} - \frac{\widehat{b}_{1,0}}{3}$ отлично от нуля. Поэтому из предыдущей формулы следует, что $f_2' \equiv 0$, т. е. функция f_2 постоянна; противоречие. $\square$

5. Три спектральные прямые потенциала

Далее предполагаем, что потенциал имеет 3 различные спектральные прямые L_j ($j = 1, 2, 3$), надо из этого предположения получить противоречие. Применив предложение 4.2, считаем, что L_1 — ось абсцисс, а L_2 и L_3 — прямые с направляющими векторами $(1, \sqrt{3})$ и $(1, -\sqrt{3})$ соответственно. Справедливы формулы (4.2) и (4.14), а также уравнение (4.15), в которых f_j ($j = 1, 2, 3$) — непостоянные 2π -периодические функции. Напомню также, что $(1, 0)$, (k_1^2, k_2^2) , (k_1^3, k_2^3) — ближайшие к началу координат точки, принадлежащие $L_1 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$, $L_3 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$ соответственно.

Покажем, что решетка Γ' обладает базисом вида

$$e_1 = (1, 0), \quad e_2 = (\beta, \delta) \quad (\beta \in [0, 1), \delta > 0). \quad (5.1)$$

Действительно, пусть $e'_1 = (e'_1, e'_2)$, $e'_2 = (e'_2, e'_3)$ — какой-нибудь базис решетки Γ' . Представим вектор e_1 в виде $e_1 = n_1 e'_1 + n_2 e'_2$ ($n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$). Тогда $(n_1, n_2) \neq 0$ и целые числа (n_1, n_2) взаимно просты, поскольку e_1 — ближайшая к началу координат точка из $L_1 \cap \Gamma'$, отличная от начала координат. Существует такая пара целых чисел (l_1, l_2) , что $n_1 l_2 - n_2 l_1 = 1$. Матрица $A = \begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ l_1 & l_2 \end{pmatrix}$ принадлежит $SL(2, \mathbb{Z})$ и, следовательно, пара векторов $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix}$ является базисом решетки Γ' . Пусть $e_2 = (\beta, \delta)$, тогда $\delta \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\delta > 0$, поскольку $(e_1, -e_2)$ — также базис решетки Γ' . Вместе с базисом (e_1, e_2) пара векторов $(e_1, n e_1 + e_2)$ также является базисом решетки Γ' для любого целого n . Поскольку $n e_1 + e_2 = (\beta + n, \delta)$, можно выбрать такое целое n , что $\beta + n \in [0, 1)$. Тем самым мы установили существование базиса решетки Γ' вида (5.1).

Напомним, что $(k_1^2, k_2^2) = (k_1^2, \sqrt{3}k_1^2)$ — ближайшая к началу координат точка, принадлежащая $L_2 \cap (\Gamma' \setminus \{0\})$ и такая, что $k_1^2 > 0$, см. (4.13). Это означает существование пары взаимно простых целых чисел (p_1, p_2) таких, что $(k_1^2, k_2^2) = p_1(1, 0) + p_2(\beta, \delta)$, т. е.

$$k_1^2 = p_1 + p_2 \beta, \quad k_2^2 = \sqrt{3}k_1^2 = p_2 \delta \quad (p_2 > 0). \quad (5.2)$$

Точно так же устанавливаем существование пары взаимно простых целых чисел (q_1, q_2) таких, что

$$k_1^3 = q_1 + q_2 \beta, \quad k_2^3 = -\sqrt{3}k_1^3 = q_2 \delta \quad (q_2 > 0). \quad (5.3)$$

Из (5.2), (5.3) следуют равенства $-\beta + \delta/\sqrt{3} = p_1/p_2$, $-\beta - \delta/\sqrt{3} = q_1/q_2$. Решая эту систему, имеем

$$\beta = -\frac{1}{2} \left(\frac{p_1}{p_2} + \frac{q_1}{q_2} \right), \quad \delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{p_1}{p_2} - \frac{q_1}{q_2} \right). \quad (5.4)$$

Равенства (5.4) позволяют исключить β и δ из всех наших формул. Теперь решетка Γ' определяется двумя парами $(p_1, p_2 > 0)$ и $(q_1, q_2 > 0)$ взаимно простых целых чисел. Но эти пары должны удовлетворять некоторым неравенствам. Действительно, условия $\delta > 0$ и $\beta \in [0, 1)$ означают, что

$$d = p_1 q_2 - p_2 q_1 > 0, \quad -2p_2 q_2 < p_1 q_2 + p_2 q_1 \leq 0. \quad (5.5)$$

Это эквивалентно системе неравенств

$$p_2 > 0, \quad q_2 > 0, \quad q_1 < 0, \quad \max \left\{ \frac{q_1}{q_2} p_2, - \left(2 + \frac{q_1}{q_2} \right) p_2 \right\} < p_1 \leq - \frac{q_1}{q_2} p_2. \quad (5.6)$$

Легко убедиться в справедливости обратного утверждения: если две пары взаимно простых целых чисел (p_1, p_2) и (q_1, q_2) удовлетворяют (5.6), то определенные равенствами (5.4) числа (β, δ) удовлетворяют $\beta \in [0, 1), \delta > 0$.

Воспроизведем уравнение (4.15) в подробной записи

$$\begin{aligned} & \sqrt{3} f'_1(x_1) (f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) - f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) - \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3})) \\ & + k_2^2 f'_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) (2f_1(x_1) - 2f_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) - \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3}) - \hat{b}_{1,0}/3) \\ & + k_2^3 f'_3(k_1^3 x_1 + k_2^3 x_2) (2f_1(x_1) - 2f_2(k_1^2 x_1 + k_2^2 x_2) + \hat{b}_{0,0}/(3\sqrt{3}) - \hat{b}_{1,0}/3) = 0. \end{aligned}$$

Подставляя сюда значения (5.2), (5.3) и вводя обозначения $c_0 = \hat{b}_{0,0}/3\sqrt{3}$, $c_1 = \hat{b}_{1,0}/3$, приходим к уравнению (1.7).

6. Анализ уравнения (1.7)

Напомним, что $f_j(t)$ ($j = 1, 2, 3$) — 2π -периодические функции с нулевыми средними значениями по периоду. Представим их рядами Фурье

$$f_j(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{j,n} e^{int}, \quad f'_j(t) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \hat{f}_{j,n} e^{int},$$

причем $\hat{f}_{j,0} = 0$ ($j = 1, 2, 3$). Подставляем эти выражения в уравнение (1.7):

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{1,k} e^{ikx_1} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{2,\ell} e^{i\ell((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} - \hat{f}_{3,\ell} e^{i\ell((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)}] \\ & + p_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{2,k} e^{ik((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{1,\ell} e^{i\ell x_1} - \hat{f}_{3,\ell} e^{i\ell((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)}] \\ & + q_2 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} k \hat{f}_{3,k} e^{ik((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right) \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} [\hat{f}_{1,\ell} e^{i\ell x_1} - \hat{f}_{2,\ell} e^{i\ell((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)}] \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \hat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \hat{f}_{2,n} e^{in((p_1+\beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\ & \quad \left. + q_2 (c_1 - c_0) \hat{f}_{3,n} e^{in((q_1+\beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right] = 0. \end{aligned}$$

После раскрытия скобок это уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \hat{f}_{1,k} \hat{f}_{2,\ell} e^{i((k+p_1\ell+\beta p_2\ell)x_1 + \delta p_2 \ell x_2)} \\ & - \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \hat{f}_{1,k} \hat{f}_{3,\ell} e^{i((k+q_1\ell+\beta q_2\ell)x_1 + \delta q_2 \ell x_2)} \\ & + \sum_{k,\ell=-\infty}^{\infty} p_2 k \hat{f}_{2,k} \hat{f}_{1,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + \ell)x_1 + \delta p_2 k x_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} p_2 k \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + (\delta p_2 k + \delta q_2 \ell)x_2)} \\
& + \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} q_2 k \widehat{f}_{3,k} \widehat{f}_{1,\ell} e^{i((q_1 k + \beta q_2 k + \ell)x_1 + \delta q_2 k x_2)} \\
& - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} q_2 k \widehat{f}_{3,k} \widehat{f}_{2,\ell} e^{i((q_1 k + \beta q_2 k + p_1 \ell + \beta p_2 \ell)x_1 + (\delta q_2 k + \delta p_2 \ell)x_2)} \\
& - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \widehat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,n} e^{in((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\
& \quad \left. + q_2 (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,n} e^{in((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Это уравнение можно немного упростить. Действительно, переставим переменные суммирования k и ℓ в первой сумме, после чего объединим 1-ю и 3-ю суммы. Аналогично объединим 2-ю и 5-ю суммы, а также 4-ю и 6-ю суммы. Полученное уравнение можно записать в виде

$$A_{12} + A_{13} + A_{23} + B = 0, \quad (6.1)$$

где

$$A_{12} = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} \left(p_2 k + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \ell \right) \widehat{f}_{1,\ell} \widehat{f}_{2,k} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + \ell)x_1 + \delta p_2 k x_2)}, \quad (6.2)$$

$$A_{13} = \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\delta} k + q_2 \ell \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + \delta q_2 \ell x_2)}, \quad (6.3)$$

$$A_{23} = - \sum_{k, \ell=-\infty}^{\infty} (p_2 k + q_2 \ell) \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i((p_1 k + \beta p_2 k + q_1 \ell + \beta q_2 \ell)x_1 + (\delta p_2 k + \delta q_2 \ell)x_2)}, \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}
B = -\frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \left[\frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \widehat{f}_{1,n} e^{in x_1} + p_2 (c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,n} e^{in((p_1 + \beta p_2)x_1 + \delta p_2 x_2)} \right. \\
\left. + q_2 (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,n} e^{in((q_1 + \beta q_2)x_1 + \delta q_2 x_2)} \right]. \quad (6.5)
\end{aligned}$$

Представим левую часть уравнения (6.1) в качестве ряда Фурье по переменной δx_2 , коэффициенты которого зависят от x_1 . Для этого преобразуем формулы (6.2)–(6.4).

В формуле (6.2) сменим обозначение переменных суммирования согласно равенствам $k = m$, $\ell = k$:

$$A_{12} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(p_2 m + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,m} e^{i(p_1 m + \beta p_2 m + k)x_1} \right) e^{i(p_2 m)(\delta x_2)}.$$

В формуле (6.3) сменим обозначение переменной суммирования согласно $\ell = m$:

$$A_{13} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2\delta} k + q_2 m \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,m} e^{i(k + q_1 m + \beta q_2 m)x_1} \right) e^{i(q_2 m)(\delta x_2)},$$

Введя обозначение $\widehat{f}_{j,[a]} = \widehat{f}_{j,a}$, если $a \in \mathbb{Z}$; $\widehat{f}_{j,[a]} = 0$, если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, две предыдущие формулы запишем в виде

$$A_{12} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(\beta n + p_1 n/p_2 + k)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}, \quad (6.6)$$

$$A_{13} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(\beta n + q_1 n/q_2 + k)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}. \quad (6.7)$$

Формулу (6.4) запишем в виде

$$A_{23} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} n \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(\beta n + p_1 k + q_1 \ell)x_1} \right) e^{in(\delta x_2)}. \quad (6.8)$$

Здесь и далее $\sum_{p_2 k + q_2 \ell = n}$ означает суммирование по тем $(k, \ell) \in \mathbb{Z}^2$, которые удовлетворяют $p_2 k + q_2 \ell = n$.

Наконец, формулу (6.5) записываем в виде

$$\begin{aligned} B = & -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{\delta} c_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \widehat{f}_{1,k} e^{ikx_1} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n ((c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{in(p_1/p_2 + \beta)x_1} + (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{in(q_1/q_2 + \beta)x_1}) e^{in(\delta x_2)}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Подставляя (6.6)–(6.9) в (6.1), приходим к уравнению вида

$$\sum_n C_n(x_1) e^{in(\delta x_2)} = 0.$$

Поскольку функции $e^{in(\delta x_2)}$ ($n \in \mathbb{Z}$) линейно независимы, отсюда следует, что

$$c_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \widehat{f}_{1,k} e^{ikx_1} = 0, \quad (6.10)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(\beta n + p_1 n/p_2 + k)x_1} \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(\beta n + q_1 n/q_2 + k)x_1} - n \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(\beta n + p_1 k + q_1 \ell)x_1} \\ & - \frac{n}{2} (((c_0 + c_1) \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{in(p_1/p_2 + \beta)x_1} + (c_1 - c_0) \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{in(q_1/q_2 + \beta)x_1}) = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Разумеется, из (6.10) следует, что $c_0 \widehat{f}_{1,k} = 0$ ($0 \neq k \in \mathbb{Z}$). Напомним, что $\widehat{f}_{1,k} \neq 0$ хотя бы для одного $k \neq 0$ согласно предположению. Поэтому из последней формулы вытекает, что $\widehat{b}_{0,0} = 3\sqrt{3}c_0 = 0$. Теперь докажем, что постоянная c_1 в (6.11) также равна нулю. Для этого вспомним, что наша задача инвариантна относительно поворота плоскости на угол $\pi/3$ вокруг начала координат. Следовательно, уравнение (6.11) инвариантно относительно замены (2.3), где

$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ — матрица поворота на $\pi/3$. При этом преобразовании линейная форма $b_0 y_1 + b_1 y_2$ преобразуется по правилу (2.4). В частности, нулевые коэффициенты Фурье функций b_0, b_1 преобразуются так:

$$\widehat{b}_{0,0} = \frac{\mu}{2}(\widehat{b}'_{0,0} - \sqrt{3}\widehat{b}'_{1,0}), \quad \widehat{b}_{1,0} = \frac{\mu}{2}(\sqrt{3}\widehat{b}'_{0,0} + \widehat{b}'_{1,0}) \quad (\mu > 0).$$

В этих формулах $\widehat{b}_{0,0} = 0$ и $\widehat{b}'_{0,0} = 0$, как мы установили. Следовательно, $\widehat{b}_{1,0} = 0$.

Итак, $c_0 = c_1 = 0$. Умножив уравнение (6.11) на $e^{-in\beta x_1}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n + \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 n/p_2 + k)x} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(n - \frac{\sqrt{3}}{2\delta} k \right) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(q_1 n/q_2 + k)x} \\ - n \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 k + q_1 \ell)x} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что β здесь не участвует. Исключим также δ из этого уравнения, для чего используем целое положительное число d , определенное в (5.5). Как следует из (5.4), $\frac{\sqrt{3}}{2\delta} = \frac{p_2 q_2}{d}$. Подставляя это значение, приводим предыдущее уравнение к виду

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 n/p_2 + k)x} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(q_1 n/q_2 + k)x} \\ - dn \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 k + q_1 \ell)x} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}). \quad (6.12) \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1.7) с двумя независимыми переменными (x_1, x_2) сведено к системе уравнений (6.12) с одной независимой переменной x .

7. Анализ системы (6.12)

В уравнении (6.12) сделаем замену $x = p_2 q_2 y$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 q_2 n + p_2 q_2 k)y} \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(p_2 q_1 n + p_2 q_2 k)y} \\ - dn \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell)y} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{R}). \quad (7.1) \end{aligned}$$

Преобразуем каждую из сумм, участвующих в этом уравнении. В первой сумме меняем переменную суммирования по формуле $k = \frac{m}{p_2 q_2} - \frac{p_1 n}{p_2}$ или $m = p_1 q_2 n + p_2 q_2 k$. Разумеется, суммирование будет выполняться лишь по тем $m \in \mathbb{Z}$,

для которых определяемое последним равенством k является целым. Результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn + p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{i(p_1 q_2 n + p_2 q_2 k)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m/(p_2 q_2) - p_1 n/p_2]} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Аналогично преобразуется вторая сумма из (7.1):

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (dn - p_2 q_2 k) \widehat{f}_{1,k} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{i(p_2 q_1 n + p_2 q_2 k)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m/(p_2 q_2) - q_1 n/q_2]} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Теперь разберемся с третьей суммой в (7.1). Эта сумма содержит слагаемое с гармоникой e^{imy} тогда и только тогда, когда существуют такие $k, \ell \in \mathbb{Z}$, что

$$p_2 k + q_2 \ell = n, \quad p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell = m. \quad (7.4)$$

Эта система имеет единственное решение $k = \frac{m - p_2 q_1 n}{dp_2}$, $\ell = \frac{p_1 q_2 n - m}{dq_2}$. Правда, это решение далеко не всегда является целым. Результат можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sum_{p_2 k + q_2 \ell = n} \widehat{f}_{2,k} \widehat{f}_{3,\ell} e^{i(p_1 p_2 q_2 k + p_2 q_1 q_2 \ell)y} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \widehat{f}_{2,[m - p_2 q_1 n]/(dp_2)} \widehat{f}_{3,[p_1 q_2 n - m]/(dq_2)} e^{imy}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Подставляем выражения (7.2)–(7.5) в (7.1), приходим к уравнению вида $\sum_m C_{mn} e^{imy} = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m - p_1 q_2 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} \\ + ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m - p_2 q_1 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} \\ - dn \widehat{f}_{2,[m - p_2 q_1 n]/(dp_2)} \widehat{f}_{3,[p_1 q_2 n - m]/(dq_2)} = 0 \quad (m, n \in \mathbb{Z}). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Третье слагаемое в левой части уравнения (7.6) равно нулю, если $m - p_1 q_2 n$ не делится на dq_2 или $m - p_2 q_1 n$ не делится на dp_2 . Таким образом, справедливо утверждение

$$\begin{aligned} (m + (d - p_1 q_2)n) \widehat{f}_{1,[m - p_1 q_2 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{2,[n/p_2]} \\ + ((d + p_2 q_1)n - m) \widehat{f}_{1,[m - p_2 q_1 n]/(p_2 q_2)} \widehat{f}_{3,[n/q_2]} = 0, \end{aligned}$$

если $(m - p_1 q_2 n)$ не делится на dq_2 или $(m - p_2 q_1 n)$ не делится на dp_2 . (7.7)

Уравнение (7.6) можно существенно упростить. Для этого сменим целочисленные параметры (m, n) по формулам

$$m = p_2 q_2 (p_1 k + q_1 \ell), \quad n = p_2 k + q_2 \ell. \quad (7.8)$$

Все участвующие в (7.6) индексы выражаем через (k, ℓ) с помощью (7.8) и (5.5):

$$(m - p_1 q_2 n)/(p_2 q_2) = -d\ell/p_2, \quad n/p_2 = (p_2 k + q_2 \ell)/p_2, \quad (m - p_2 q_1 n)/(p_2 q_2) = dk/q_2,$$

$$n/q_2 = (p_2k + q_2\ell)/q_2, \quad (m - p_2q_1n)/(dp_2) = k, \quad (p_1q_2n - m)/(dq_2) = \ell.$$

Коэффициенты этого уравнения также выражаем через (k, ℓ) :

$$m + (d - p_1q_2)n = dp_2k, \quad (d + p_2q_1)n - m = dq_2\ell, \quad dn = d(p_2k + q_2\ell).$$

Подставляя эти значения в (7.6), приходим к уравнению

$$p_2k\hat{f}_{1,[-d\ell/p_2]}\hat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]} + q_2\ell\hat{f}_{1,[dk/q_2]}\hat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]} - (p_2k + q_2\ell)\hat{f}_{2,k}\hat{f}_{3,\ell} = 0 \quad (k, \ell \in \mathbb{Z}). \quad (7.9)$$

Подчеркнем, что система уравнений (7.7), (7.9) по-прежнему содержит полную информацию о нашей задаче.

Поскольку $\hat{f}_{1,0} = \hat{f}_{2,0} = \hat{f}_{3,0} = 0$, уравнение (7.9) выполняется тривиальным образом, если $k = 0$ или $\ell = 0$ или $p_2k + q_2\ell = 0$. Если же каждое из этих трех чисел отлично от нуля, то уравнение может быть записано в виде

$$\frac{\hat{f}_{1,[-d\ell/p_2]}}{q_2\ell} \frac{\hat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]}}{p_2k + q_2\ell} + \frac{\hat{f}_{1,[dk/q_2]}}{p_2k} \frac{\hat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]}}{p_2k + q_2\ell} - \frac{\hat{f}_{2,k}}{p_2k} \frac{\hat{f}_{3,\ell}}{q_2\ell} = 0.$$

Это также можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\hat{f}_{1,[-dq_2\ell/(p_2q_2)]}}{-q_2\ell} \frac{\hat{f}_{2,[(p_2k+q_2\ell)/p_2]}}{p_2k + q_2\ell} - \frac{\hat{f}_{1,[dp_2k/(p_2q_2)]}}{p_2k} \frac{\hat{f}_{3,[(p_2k+q_2\ell)/q_2]}}{p_2k + q_2\ell} \\ + \frac{\hat{f}_{2,[p_2k/p_2]}}{p_2k} \frac{\hat{f}_{3,[q_2\ell/q_2]}}{q_2\ell} = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

для $k, \ell \in \mathbb{Z}; k \neq 0, \ell \neq 0, p_2k + q_2\ell \neq 0$.

Введя обозначения (i — мнимая единица)

$$X_n = \frac{i\hat{f}_{1,[dn/(p_2q_2)]}}{n}, \quad Y_n = \frac{i\hat{f}_{2,[n/p_2]}}{n}, \quad Z_n = \frac{i\hat{f}_{3,[n/q_2]}}{n} \quad (0 \neq n \in \mathbb{Z}), \quad (7.11)$$

запишем уравнение (7.10) в виде

$$X_{-q_2\ell}Y_{p_2k+q_2\ell} - X_{p_2k}Z_{p_2k+q_2\ell} + Y_{p_2k}Z_{q_2\ell} = 0. \quad (7.12)$$

Если обозначить

$$n_1 = -q_2\ell, \quad n_2 = p_2k + q_2\ell, \quad (7.13)$$

то $n_1 + n_2 = p_2k$ и уравнение (7.12) примет вид

$$X_{n_1}Y_{n_2} - X_{n_1+n_2}Z_{n_2} + Y_{n_1+n_2}Z_{-n_1} = 0. \quad (7.14)$$

Это совпадает с уравнением (1.8) из теоремы о трех последовательностях. Но непосредственно применять эту теорему мы пока не можем, поскольку далеко не все целые n_1 и n_2 представимы в виде (7.13), для этого необходимо и достаточно, чтобы n_1 делилось на q_2 и $n_1 + n_2$ делилось на p_2 . Для возможности применения теоремы 1.2 мы должны установить, что (7.14) выполняется также для таких n_1, n_2 , что n_1 не делится на q_2 или $n_1 + n_2$ не делится на p_2 . Подставляем выражения (7.11) в уравнение (7.14), приходим к необходимости доказательства утверждения:

$$(n_1 + n_2)\hat{f}_{1,[dn_1/(p_2q_2)]}\hat{f}_{2,[n_2/p_2]} - n_1\hat{f}_{1,[d(n_1+n_2)/(p_2q_2)]}\hat{f}_{3,[n_2/q_2]} = 0, \\ \text{если } (n_1 \text{ не делится на } q_2) \text{ или } (n_1 + n_2 \text{ не делится на } p_2). \quad (7.15)$$

Покажем, что (7.15) вытекает из (7.7). Для этого в (7.7) полагаем $m = dn_1 + p_1q_2n_2$, $n = n_2$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} m - p_1q_2n &= dn_1, \quad m - p_2q_1n = d(n_1 + n_2), \quad n/p_2 = n_2/p_2, \quad n/q_2 = n_2/q_2, \\ m + (d - p_1q_2)n &= d(n_1 + n_2), \quad (d + p_2q_1)n - m = -dn_1. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в (7.7), приходим в точности к (7.15), включая вторые строки утверждений (7.7) и (7.15). Тем самым доказано основное условие (1.8) теоремы 1.2. Поскольку функции f_j ($j = 1, 2, 3$) действительны, их коэффициенты Фурье удовлетворяют $\widehat{f}_{j,-n} = \overline{\widehat{f}_{j,n}}$. Отсюда с помощью (7.11) вытекает справедливость условия четности (1.9) (мнимая единица включена в формулы (7.11) с этой целью). Наконец, условие убывания (1.10) обеспечивается тем, что $f_j \in C^1(\mathbb{R})$, поскольку $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Применяя теорему 1.2, приходим к утверждению ($Y_n = 0 \forall n$) или ($Z_n = 0 \forall n$). В силу (7.11) отсюда следует, что ($\widehat{f}_{2,[n/p_2]} = 0 \forall n$) или ($\widehat{f}_{3,[n/q_2]} = 0 \forall n$). Поскольку здесь n произвольно, это утверждение усиливается до ($\widehat{f}_{2,n} = 0 \forall n$) или ($\widehat{f}_{3,n} = 0 \forall n$). Это противоречит предположению: для каждого $j = 1, 2, 3$ существует такое n_j , что $\widehat{f}_{j,n_j} \neq 0$.

Полученное противоречие показывает, что потенциал не может иметь трех спектральных прямых. Вместе с предложением 4.3 это означает, что потенциал имеет ровно одну спектральную прямую. Выберем независимые переменные так, чтобы эта прямая стала горизонтальной. Согласно предложению 4.1 $a_0 = a_2 = 0$ и $f_2 \equiv f_3 \equiv 0$ в (4.2), т. е. $V = f_1(x_1)$. Следовательно,

$$F = a_1y_1^2y_2 + a_3y_2^3 + b_0y_1 + b_1y_2, \quad H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1).$$

Поскольку H не зависит от x_2 , функция $G = y_2$ является линейным интегралом нашей динамической системы. Формулы (4.4), (4.5) упрощаются до следующих: $b_0 = \widehat{b}_{0,0}$, $b_1 = 2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0}$. Если эти значения подставить в уравнение (3.3), то получим $\widehat{b}_{0,0}f_1'(x_1) = 0$. Отсюда следует $\widehat{b}_{0,0} = 0$, поскольку функция f_1 не постоянна. Таким образом,

$$F = a_1y_1^2y_2 + a_3y_2^3 + (2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0})y_2, \quad H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1), \quad G = y_2. \quad (7.16)$$

Теперь мы можем доказать справедливость утверждения (1.4) теоремы 1.1. Подставляя выражения (7.16) в (1.4), приходим к уравнению

$$a_1y_1^2 + a_3y_2^2 + 2a_1f_1(x_1) + \widehat{b}_{1,0} = C_1y_2^2 + C_2((y_1^2 + y_2^2)/2 + f_1(x_1)) + C_3.$$

Это уравнение удовлетворяется постоянными $C_1 = a_3 - a_1$, $C_2 = 2a_1$, $C_3 = \widehat{b}_{1,0}$. Это завершает доказательство теоремы 1.1.

ЗАМЕЧАНИЕ. В силу (7.11) условие убывания (1.10) выполняется, если

$$\sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{|n|} (|\widehat{f}_{1,n}| + |\widehat{f}_{2,n}| + |\widehat{f}_{3,n}|) < \infty. \quad (7.17)$$

Это наводит на мысль, что условие $V \in C^1(\mathbb{R}^2)$ теоремы 1.1 может быть ослаблено. Достаточно потребовать, чтобы потенциал был Γ -периодическим распределением (обобщенной функцией), удовлетворяющим некоторым дополнительным условиям регулярности. Все дифференциальные уравнения следует трактовать в смысле теории распределений. Видимо, самым трудным пунктом этого плана является поиск условия, гарантирующего существование распределений $b_0 \frac{\partial V}{\partial x_1}$ и

$b_1 \frac{\partial V}{\partial x_2}$, участвующих в (3.3); возможно, это условие придется формулировать в терминах волнового фронта распределения V . Модифицировав таким образом доказательство, надо на распределение V наложить условие, обеспечивающее выполнение (7.17). В настоящей статье эта возможность не реализована. Но в дальнейшем к этому плану можно вернуться, если появится необходимость такого обобщения.

Благодарность. Автор благодарен Михаилу Бялому за возможность ознакомиться с рукописью его работы, в которой доказательства изложены подробнее, чем в краткой заметке [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсу первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функцион. анализ. 1987. Т. 21, № 4. С. 64–65.
2. Денисова Н. В., Козлов В. В. Полиномиальные интегралы обратимых механических систем с конфигурационным пространством в виде двумерного тора // Мат. сб. 2000. Т. 191, № 2. С. 43–63.
3. Sharafutdinov V. A. Killing tensor fields of third rank on a two-dimensional Riemannian torus // J. Math. Research. 2022. V. 14, N 1. P. 1–29.
4. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды. М.: Наука, 1971. Т. 1.
5. Козлов В. В. Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УдГУ, 1995.
6. Козлов В. В. Дискретные симметрии уравнений динамики с полиномиальными интегралами высших степеней // Изв. РАН. Сер. мат. 2023. Т. 87, № 5. С. 124–139.

Поступила в редакцию 3 июня 2026 г.

После доработки 11 августа 2026 г.

Принята к публикации 11 августа 2026 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович (ORCID 0000-0003-4269-5085)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

sharafut@list.ru