

УДК 517.956.2

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ
ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО
ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
С ИЗМЕРИМЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Чечкина

Аннотация. Рассматривается задача Зарембы для дивергентного равномерно эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами. Найдена оценка спектральной функции.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.517

Ключевые слова: задача Зарембы, эллиптический оператор, спектральная функция.

1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке спектральной функции для дивергентного эллиптического оператора с измеримыми коэффициентами однородной задачи Зарембы, рассматриваемой в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Напомним, что область D называется *строго липшицевой*, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0 , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0 .

Для постановки задачи Зарембы введем соболевское пространство функций $W_2^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_2^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_2^1(D)$

$$\|v\|_{W_2^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^2 dx + \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенства Фридрихса

$$\int_D |v|^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx. \quad (1)$$

Приведем необходимое и достаточное условие на множество $F \subset \partial D$, гарантирующее выполнение неравенства (1). Для этого нам потребуется понятие емкости.

Обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что строго липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Введем понятие емкости $\mathcal{C}_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}_d}$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ следующим равенством:

$$\mathcal{C}_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи (см. [1, разд. 14.1.2]) и комментариев к результатам главы 14 монографии [1] следует, что для функций $v \in W_2^1(D, F)$ неравенство (1) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{C}_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим спектральную задачу Зарембы

$$\mathcal{L}u := - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = \lambda u, \quad u|_F = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma} \Big|_G = 0 \quad (3)$$

с собственными функциями, нормированными равенством

$$\int_D u^2 dx = 1. \quad (4)$$

Здесь $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ — измеримая симметрическая матрица, удовлетворяющая условию равномерной эллиптичности:

$$\alpha |\eta|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \leq \alpha^{-1} |\eta|^2, \quad \alpha > 0,$$

для всех $\eta \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $x \in D$; $G = \partial D \setminus F$, а

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i,$$

$\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂D .

Под *решением* задачи (3) понимается ненулевая функция $u \in W_2^1(D, F)$ для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \lambda \int_D u \varphi dx,$$

выполненное на пробных функциях $\varphi \in W_2^1(D, F)$. Те значения λ , для которых существуют собственные функции, называются *собственными значениями*.

Поскольку оператор задачи является самосопряженным в $W_2^1(D, F)$ и положительным, при сделанных выше предположениях относительно области D задача (3) имеет полную ортонормированную систему обобщенных собственных функций. Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Оценкам собственных функций задачи Дирихле для равномерно эллиптических операторов посвящены многочисленные исследования (см. [2–7]). В частности, в работе В. А. Ильина и И. А. Шишмарева [5] показано, что если область

и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие, то для классической собственной функции $u_k(x)$, отвечающей собственному значению λ_k , имеет место оценка

$$\max_{x \in \overline{D}} |u_k(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda_k^{\frac{n}{4}}.$$

В. Я. Якубовым показано, что оценка для обобщенной собственной функции

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda^{\frac{n}{4}}$$

является точной. Аналогичные оценки для задачи Зарембы установлены в [8].

Рассмотрим спектральную функцию

$$e_\lambda(x, x') = \sum_{\lambda_j < \lambda} u_j(x) u_j(x'),$$

где u_j — нормированная собственная функция, отвечающая собственному значению λ_j . Нашей целью является оценка максимума модуля данной функции.

Классические оценки максимума модуля спектральной функции и асимптотические формулы для спектральной функции эллиптических операторов восходят к работам [9, 10].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Доказываемая в настоящей работе оценка спектральной функции будет впоследствии использоваться для получения асимптотики «считающей» функции, которая определяется как число собственных значений (с учетом кратности), меньших данного $\lambda > 0$. Для наших дальнейших целей достаточно «грубой» оценки спектральной функции. Отметим, что асимптотика считающей функции для задачи Дирихле впервые установлена в [11].

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Теорема. Если выполнено условие (2), то в предположении (4) для собственных функций задачи (3) справедлива оценка

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C_1 \lambda^{\frac{n}{2}}, \quad n > 2, \quad (5)$$

$$|e_\lambda(x, x')| \leq C_2 \lambda^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}, \quad \kappa > 1, \quad n = 2. \quad (6)$$

с константами $C_1 = C(n, \alpha, D, F)$ и $C_2 = C(\alpha, D, F)$, не зависящими от $x, x' \in D$, где α — константа эллиптичности.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Оценка (6) в теореме верна для каждого фиксированного κ , а константа C_2 зависит от этого κ .

Как отмечалось выше, для функций из пространства $W_2^1(D, F)$ выполнено неравенство Фридрихса (1), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (2), влекущее неравенство Фридрихса (1).

2. Доказательство основного результата

Пусть E_λ — спектральный проектор, другими словами, интегральный оператор с симметричным ядром $e_\lambda(x, x')$:

$$(E_\lambda f)(x) = \int_D e_\lambda(x, x') f(x') dx', \quad f \in L_2(D). \quad (7)$$

Пусть $(\mathcal{L})^l u = \lambda^l u$, где u — собственная функция, отвечающая собственному значению λ , а $(\mathcal{L})^l$ — суперпозиция операторов $\underbrace{\mathcal{L} \circ \mathcal{L} \circ \dots \circ \mathcal{L}}_l$, тогда положим

$$u_l = (\mathcal{L})^l (E_\lambda f), \quad l = 0, 1, \dots \quad (8)$$

По определению $\mathcal{L}u_l = u_{l+1}$, поэтому справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_D u_{l+1} \varphi dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F).$$

Положим

$$u_{l,m} = \begin{cases} u_l, & |u_l| \leq m, \\ -m, & u_l < -m, \\ m, & u_l > m. \end{cases}$$

Выберем пробную функцию $\varphi = u_{l,m}|u_{l,m}|^\beta$, $\beta \geq 0$, которая является допустимой. Применяя неравенство Гёльдера к интегралу в правой части равенства и используя условие эллиптичности, получим

$$(\beta + 1) \int_D |u_{l,m}|^\beta |\nabla u_{l,m}|^2 dx \leq \tilde{C}(\alpha) \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l,m}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{\beta+2}}.$$

Сначала предположим, что $n > 2$.

Из условия (2) следует неравенство Соболева (см. [1, разд. 14.1.2])

$$\left(\int_D |\varphi|^{2\kappa} dx \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \leq qC_0 \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \kappa = \frac{n}{n-2},$$

которое будем применять. Здесь

$$C_0 = C(n, D, F). \quad (9)$$

Имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_D |u_{l,m}|^{\kappa(\beta+2)} dx \right)^{\frac{1}{\kappa(\beta+2)}} \\ & \leq \left(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left(\int_D |u_{l,m}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь

$$C(\alpha) = C_0 \tilde{C}(\alpha). \quad (11)$$

Переходя в (10) к пределу при $m \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} & \left(\int_D |u_l|^{\kappa(\beta+2)} dx \right)^{\frac{1}{\kappa(\beta+2)}} \\ & \leq \left(\frac{C(\alpha)(\beta+2)^2}{4(\beta+1)} \right)^{\frac{1}{\beta+2}} \left(\int_D |u_{l+1}|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{1}{(\beta+2)^2}} \left(\int_D |u_l|^{\beta+2} dx \right)^{\frac{\beta+1}{(\beta+2)^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дальнейшие рассуждения основаны на итерационном методе Мозера. Для получения рекуррентного соотношения положим в (12) $\beta = 2\kappa^j - 2$, $j = 0, 1, \dots$. Обозначим

$$\chi_j = 2\kappa^j, \quad a_j = \left(\frac{C(\alpha)\chi_j^2}{4(\chi_j - 1)} \right)^{\frac{1}{\chi_j}}, \quad \Phi_{l,j} = \left(\int_D |u_l|^{\chi_j} dx \right)^{\frac{1}{\chi_j}}.$$

Тогда (12) запишется в виде

$$\Phi_{l,j+1} \leq a_j (\Phi_{l+1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{l,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (13)$$

В частности, для $l = 0$ имеем

$$\Phi_{0,j+1} \leq a_j (\Phi_{1,j})^{\frac{1}{\chi_j}} (\Phi_{0,j})^{\frac{\chi_j-1}{\chi_j}}. \quad (14)$$

Проитерируем (14), пользуясь (13). Для этого заметим, что сумма степеней множителей в правой части (13) равна 1. Поэтому после каждой итерации в (14) будут появляться множители $a_{j-1}, a_{j-2}, \dots$. В результате найдем, что

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=k}^j a_l \prod_{i=0}^{j-k+1} (\Phi_{i,k})^{\gamma_{ij}^k}, \quad k = 0, 1, \dots, j.$$

Основную роль это неравенство играет при $k = 0$:

$$\Phi_{0,j+1} \leq \prod_{l=0}^j a_l \prod_{i=0}^{j+1} (\Phi_{i,0})^{\gamma_{ij}^0}. \quad (15)$$

Показатели степени γ_{ij}^k могут быть получены как коэффициенты многочлена

$$F_{kj}(x) = \prod_{i=k}^j \left(1 - \frac{1}{\chi_i} + \frac{x}{\chi_i} \right) = \sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k x^i.$$

Имеем

$$\sum_{i=0}^{j+1-k} \gamma_{ij}^k = F_{kj}(1) = 1, \quad (16)$$

а также

$$\sum_{i=0}^{j-k+1} i \gamma_{ij}^k = F'_{kj}(1) = \sum_{i=k}^j \frac{1}{\chi_i}. \quad (17)$$

Далее нам понадобится тождество

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\kappa^i} = \frac{\kappa}{2(\kappa-1)} = \frac{n}{4}, \quad (18)$$

а также следствие тождества

$$\sum_{j=0}^{\infty} j x^j = x(1-x)^{-2}$$

вида

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{\chi_j} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} j \kappa^{-j} = \frac{\kappa}{2(\kappa-1)^2} = \frac{n(n-2)}{8}. \quad (19)$$

В силу неравенства $x^2/(2x-1) \leq 2x$ при $x \geq 1$, из определения a_j получаем $a_j \leq (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j}$. Отсюда, используя соотношения (18), (19), приходим к оценке

$$\prod_{j=0}^{\infty} a_j \leq \prod_{j=0}^{\infty} (2C(\alpha)\varkappa^j)^{1/\chi_j} = ((2C(\alpha))^{\varkappa-1}\varkappa)^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)^2}} := C(n, \alpha, F) < \infty. \quad (20)$$

Поскольку $\Phi_{i,0} \leq \lambda^i \Phi_{0,0}$, ввиду (15) и (20) получаем

$$\Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha, F) \lambda^{\theta_j} (\Phi_{0,0})^{\mu_j},$$

где

$$\theta_j = \sum_{i=1}^{j+1} i \gamma_{ij}^0, \quad \mu_j = \sum_{i=0}^{j+1} \gamma_{ij}^0.$$

В силу (16)–(18) имеем

$$\mu_j = 1, \quad \theta_j = \sum_{i=0}^j \frac{1}{\chi_i} \leq \frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)} = \frac{n}{4}.$$

Окончательно выводим

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} \leq C(n, \alpha) \lambda^{\frac{\varkappa}{2(\varkappa-1)}} \Phi_{0,0}. \quad (21)$$

Поскольку $\Phi_{0,0} = \|u_0\|_{L_2(D)}$ (см. (8)) и

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \Phi_{0,j+1} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u_0|, \quad \text{где } u_0 = E_\lambda f,$$

с учетом величины $\varkappa$ получаем оценку

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |E_\lambda f| \leq C \lambda^{\frac{n}{4}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}. \quad (22)$$

Заметим, что $\|E_\lambda f\|_{L_2(D)} \leq \|f\|_{L_2(D)}$. Значит, из (7) и (22) непосредственно следует оценка

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{n}{4}}. \quad (23)$$

Выбирая в (22) $f = e_\lambda(x, \cdot)$, ввиду равенства $E_\lambda f = e_\lambda(x, \cdot)$ выводим искомое соотношение (5). Действительно,

$$|e_\lambda(x, x')| \leq |(E_\lambda e_\lambda(x, \cdot))(x')| \leq C \lambda^{\frac{n}{4}} \|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C_1 \lambda^{\frac{n}{2}}.$$

Напомним, что в силу (9) и (11) имеем

$$C_1 = C(n, \alpha, D, F),$$

что доказывает теорему в случае $n > 2$.

Теперь рассмотрим случай $n = 2$.

В этом случае применяем неравенство Соболева вида

$$\left(\int_D |\varphi|^{2\kappa} dx \right)^{\frac{1}{2\kappa}} \leq C_0 \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad \kappa > 1,$$

где (см. [1, разд. 14.1.2])

$$C_0 = C(D, F). \quad (24)$$

Рассуждая аналогично случаю $n > 2$, приходим опять к оценке (21). Следовательно, имеем

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |E_\lambda f| \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \|E_\lambda f\|_{L_2(D)}.$$

Отсюда, как и выше при $n > 2$, получим оценку, аналогичную (23), вида

$$\|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}},$$

в силу которой выводим соотношение (6). Действительно,

$$|e_\lambda(x, x')| \leq |(E_\lambda e_\lambda(x, \cdot))(x')| \leq C \lambda^{\frac{\kappa}{2(\kappa-1)}} \|e_\lambda(x, \cdot)\|_{L_2(D)} \leq C_2 \lambda^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Здесь в силу (11), учитывая (24), имеем

$$C_2 = C(\alpha, D, F),$$

что и доказывает теорему при $n = 2$.

Благодарность. Работа посвящается юбилею Геннадия Владимировича Демиденко и вдохновлена участием автора в конференции в Новосибирске осенью 2025 г. с ее атмосферой научного поиска и плодотворными дискуссиями, которые были бы невозможны без деятельного участия, энтузиазма и поддержки Геннадия Владимировича.

ЛИТЕРАТУРА

1. Maz'ya V. Sobolev spaces with applications to elliptic partial differential equations. Berlin: Springer-Verl., 2011.
2. Смолицкий Х. Л. Оценки производных фундаментальных функций // Докл. АН СССР. 1950. Т. 74, № 2. С. 205–208.
3. Эйдуc Д. М. Оценки модуля собственных функций // Докл. АН СССР. 1953. Т. 90, № 6. С. 973–974.
4. Эйдуc Д. М. Некоторые неравенства для собственных функций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 107, № 6. С. 796–798.
5. Ильин В. А., Шишмарев И. А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных // Изв. АН СССР. 1960. Т. 24, № 6. С. 883–896.
6. Якубов В. Я. Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора // Докл. АН. 1993. Т. 331, № 3. С. 286–287.
7. Якубов В. Я. Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов // Функцион. анализ и его прил. 1999. Т. 33, № 2. С. 58–67.
8. Чечкина А. Г. Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка // Сириус. Мат. журн. 2025. Т. 1, № 3. С. 15–26.
9. Avakumovič V. G. Über die Eigenfunktionen auf geschlossenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten // Math. Z. 1956. V. 65. P. 327–344.
10. Hörmander L. The spectral function of an elliptic operator // Acta Math. 1968. V. 121. P. 193–218.
11. Weyl H. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (miteiner Anwendung auf die Theorie Hohlraumstrahlung) // Math. Ann. 1912. V. 71. P. 441–449.

Поступила в редакцию 26 января 2026 г.

После доработки 5 июня 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Чечкина Александра Григорьевна (ORCID 0000-0002-8529-9296)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва 119991
chechkina@gmail.com