

О СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ
СО СПЕЦИФИЧЕСКИМ
АЛГОРИТМОМ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЙ
В. И. Лотов

Аннотация. Изучаются свойства траекторий случайного блуждания с независимыми слагаемыми, у которого распределение скачков меняется между F_1 и F_2 в соответствии со следующим правилом. Распределение F_1 с положительным математическим ожиданием сохраняется до момента первого достижения траекторией множества $(-\infty, -a)$, $a \geq 0$, после чего происходит переключение на блуждание с отрицательным сносом, соответствующим распределению F_2 . Это продолжается до момента первого достижения траекторией горизонтальной границы на уровне $b \geq 0$, после чего распределение скачков вновь переключается на F_1 , и так далее. В работе приводятся оценки для вероятностей конечности моментов переключений и для вероятности равенства бесконечности супремума траектории, а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. В общем случае найдены двойные преобразования над совместными распределениями моментов переключений и положений процесса в эти моменты, а также получены асимптотические представления для них при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2 .

DOI 10.33048/smzh.2026.67.516

Ключевые слова: случайное блуждание с переключениями, моменты остановки, экстремумы траектории.

Памяти академика А. А. Боровкова

1. Введение. Оценки сверху

Рассматриваемые в работе случайные блуждания с переключениями обычно относят к разряду осциллирующих, т. е. таких, у которых распределение скачков траектории меняется при достижении некоторых регулирующих уровней. Например, это может происходить вследствие желания ограничить в некоторой степени выход траектории выше какого-то уровня или даже выход за пределы полосы, регулируя тем самым движение траектории в обоих направлениях. Свойства осциллирующих случайных блужданий с различными механизмами переключений изучались во многих работах (см., например, [1–4] и литературу там). Интерес к исследованиям таких случайных блужданий возникает при построении различных стохастических моделей, в том числе в теории систем обслуживания и теории управления запасами.

Обычно в большинстве известных конструкций механизм переключений способствует перенаправлению траектории вниз, если она забралась слишком

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект FWNF-2026-0030).

высоко, либо наоборот, переключение стимулирует движение вверх, чтобы ограничить сползание вниз. В настоящей работе рассматривается весьма специфический механизм переключений. Если траектория с положительным сносом впервые ушла ниже горизонтальной границы на уровне $-a \leq 0$, то с этого момента она далее движется с отрицательным сносом. Если же после этого траектория в какой-то момент достигнет множества $[b, \infty)$, $b \geq 0$, то снос опять меняется на положительный, и так далее. Тем самым механизм переключений в некотором смысле отслеживает возможности скорейшего ухода траектории в одном из двух направлений. Оказывается, подобная конструкция представляет интерес в исследованиях моделей стохастического градиентного спуска в одномерных ландшафтах [5], что в свое время явилось стимулом к написанию работы автора [6]. Отметим, что ряд асимптотических результатов для случайных блужданий с такого сорта специфическими переключениями содержится в недавних работах [7, 8].

В [6] предполагалось, что $a = b = 0$. Настоящая работа продолжает и расширяет исследования [6] в более общей ситуации.

Итак, пусть имеются две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi_n^+, n \geq 1\}$ и $\{\xi_n^-, n \geq 1\}$ такие, что

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < x) = F_1(x), \quad \mathbf{P}(\xi_1^- < x) = F_2(x), \quad \mathbf{E} \xi_1^+ > 0, \quad \mathbf{E} \xi_1^- < 0,$$

при этом $\mathbf{P}(\xi_1^+ < 0) > 0$, $\mathbf{P}(\xi_1^- > 0) > 0$. Обозначим частичные суммы этих последовательностей через

$$S_n^\pm = \xi_1^\pm + \dots + \xi_n^\pm, \quad n \geq 1, \quad S_0^\pm = 0,$$

и введем случайное блуждание $\{X_n, n \geq 0\}$ следующим образом.

Пусть $X_0 = 0$, и для $1 \leq n \leq \eta_1^-$ положим $X_n = S_n^+$, где

$$\eta_1^- = \eta_1^-(a) = \inf \{n \geq 1 : S_n^+ < -a\}, \quad a \geq 0.$$

При этом полагаем всегда $\inf \emptyset = \infty$. Ясно, что $\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) < 1$ вследствие положительности сноса последовательности S_n^+ . После достижения момента η_1^- на событии $\{\eta_1^- < \infty\}$ скачки процесса X_n будем выбирать из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-, n \geq 1\}$. Если $\eta_1^- = k$ и $X_k = x$, $x < -a$, то при $k < n \leq \eta_2^+$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^-,$$

где

$$\eta_2^+ = k + \inf \{n \geq 1 : x + S_n^- \geq b\}, \quad b \geq 0.$$

Далее на траекториях, удовлетворяющих условию $\{\eta_2^+ < \infty\}$, процесс X_n вновь эволюционирует скачками с положительным средним, выбираемым из вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^+, n \geq 1\}$. Если $\eta_2^+ = k$ и $X_k = x$, $x \geq b$, то для $\eta_2^+ < n \leq \eta_3^-$ полагаем

$$X_n = x + S_{n-k}^+,$$

где

$$\eta_3^- = k + \inf \{n \geq 1 : x + S_n^+ < -a\},$$

и так далее. Таким образом, получаем последовательность моментов переключения

$$\eta_0^+ = 0, \quad \eta_{2k-1}^- = \inf \{j > \eta_{2k-2}^+ : X_j < -a\},$$

$$\eta_{2k}^+ = \inf\{j > \eta_{2k-1}^- : X_j \geq b\}, \quad k \geq 1.$$

Введем события $A_k^\pm = \{\eta_k^\pm < \infty\}$. Ясно, что $A_1^- \supset A_2^+ \supset A_3^- \supset \dots$.

Положим

$$\overline{X} = \sup\{X_n, n \geq 0\}, \quad \underline{X} = \inf\{X_n, n \geq 0\}.$$

В работе приводятся оценки для вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$, $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$ и $\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty)$ (теоремы 1, 2 и их следствия), а также точные формулы для этих характеристик в некоторых частных ситуациях. Найдены двойные преобразования над совместными распределениями пар $(\eta_k^\pm, X_{\eta_k^\pm})$ (теоремы 3, 4), а также получены асимптотические представления для них при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ в условиях крамеровского типа на распределения F_1 и F_2 (теорема 5 и ее следствие).

Положим

$$\overline{S} = \sup\{S_n^-, n \geq 0\}, \quad \underline{S} = \inf\{S_n^+, n \geq 0\}.$$

Эти случайные величины конечны с вероятностью 1, свойства их распределений весьма подробно изложены в [9, гл. 12].

Пусть также

$$p_1(x) = \mathbf{P}(\underline{S} < -x), \quad p_2(x) = \mathbf{P}(\overline{S} \geq x).$$

Теорема 1. При всех $k \geq 1$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}(A_{2k}^+) \leq p_1(a)p_1^{k-1}(a+b)p_2^k(a+b), \quad \mathbf{P}(A_{2k-1}^-) \leq p_1(a)p_1^{k-1}(a+b)p_2^{k-1}(a+b). \quad (1)$$

Доказательство. Если $\eta_1^- < \infty$, то до момента η_1^- скачки блуждания $\{X_n\}$ совпадают по распределению с ξ_1^+ и $\mathbf{P}(A_1^-) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = p_1(a)$.

Для траекторий, удовлетворяющих условию $\eta_{2k-1}^- < \infty$, $k \geq 1$, будем фиксировать значение $X_{\eta_{2k-1}^-} = -x < -a$ и далее рассматривать последующую часть траектории X_n , стартующую в момент времени η_{2k-1}^- с точки $-x$. Скачки этой части траектории до момента η_{2k}^+ не зависят от предыстории при фиксации положения в момент η_{2k-1}^- и будут иметь одинаковое распределение с ξ_1^- . Не ограничивая общности, эти скачки будем выбирать из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^-\}$. Пусть $\tilde{S}_i$ — сумма первых i членов этой вероятностной копии, $S_0 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(-x + \sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b, X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b+x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty). \quad (2) \end{aligned}$$

Далее это выражение будем анализировать в разных условиях. Во-первых, в подынтегральном выражении при $x > a$ можно использовать оценку

$$\mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b+x) \leq \mathbf{P}(\overline{S} \geq a+b),$$

что дает нам неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &\leq \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\bar{S} \geq a + b) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= p_2(a + b) \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

В частности,

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq p_1(a)p_2(a + b). \quad (3)$$

Аналогично получаем при $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(x + \inf_{i \geq 0} \tilde{S}_i < -a) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty), \quad (4) \end{aligned}$$

откуда сразу же следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &\leq \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - b) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= p_1(a + b) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty), \quad (5) \end{aligned}$$

где $\tilde{S}_i$ обозначает сумму первых i случайных величин из независимой вероятностной копии последовательности $\{\xi_n^+\}$. Из (3) и (5) при $k = 1$ получаем

$$\mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) \leq p_1(a)p_1(a + b)p_2(a + b), \quad \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty) \leq p_1(a)p_1(a + b)p_2^2(a + b),$$

и так далее. Тем самым завершается доказательство теоремы 1.

Неравенства (1) ранее установлены в [6] при $a = b = 0$. Там же обсуждались возможности нахождения величин $p_1(0)$, $p_2(0)$ в точном виде и проведено их вычисление в случае экспоненциальных хвостов распределений случайных величин $\xi_1^\pm$.

Следствие 1. *Имеют место оценки*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}, \\ \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &= 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}, \\ \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &\leq 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a + b)}{1 - p_1(a + b)p_2(a + b)}. \end{aligned}$$

Доказательство. В теореме 1 установлено, в частности, что $\mathbf{P}(A_k^\pm) \rightarrow 0$ с экспоненциальной скоростью при $k \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что множество траекторий, имеющих бесконечное число переключений, имеет нулевую вероятность. Перечисляя теперь траектории с конечным количеством переключений, для которых $\bar{X} = +\infty$ и для которых $\underline{X} = -\infty$, приходим к следующим соотношениям:

$$\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty, \eta_5^- = \infty) + \dots, \quad (6)$$

$$\mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ = \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty, \eta_4^+ = \infty) + \dots \quad (7)$$

Действительно, если рассматривать целиком траекторию случайного блуждания $\{S_n^+, n \geq 0\}$, то хорошо известно, что $\mathbf{P}(\sup\{S_n^+, n \geq 0\} = \infty) = 1$. Рассмотрим теперь событие $\{\eta_1^- = \infty\}$. На нем траектории процесса X_n совпадают с траекториями случайного блуждания $\{S_n^+\}$, которые никогда не опускаются ниже прямой на уровне $-a$. Разумеется, супремум каждой такой траектории по-прежнему равен бесконечности, но вероятностная мера этого пучка траекторий уже меньше единицы:

$$\mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) = 1 - \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = 1 - p_1(a) < 1.$$

Далее рассмотрим событие $\{\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$. Оно содержит траектории процесса X_n , которые впервые достигли уровня $-a$ в момент времени η_1^- , затем, поменяв распределение скачков, в момент времени η_2^+ впервые достигли уровня $b \geq 0$, после чего уже не опускались ниже уровня $-a$. Таким образом, оставшаяся часть траектории процесса X_n после момента времени η_2^+ является траекторией случайного блуждания с положительным сносом, супремум которой равен бесконечности. И это происходит на событии $\{\eta_1^- < \infty, \eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$, которое совпадает с $\{\eta_2^+ < \infty, \eta_3^- = \infty\}$ в силу свойства $A_1^- \supset A_2^+$. Рассмотрение дальнейших слагаемых в (6) происходит аналогично.

Точно так же в правой части формулы (7) происходит перебор пучков траекторий, которые после очередного попадания в множество $(-\infty, -a)$ начинают блуждать с отрицательным сносом и больше никогда не достигают уровня $b \geq 0$; это означает, что каждый раз инфимум оставшейся части траектории равняется минус бесконечности.

Отметим, что события $\{\bar{X} = +\infty\}$ и $\{\underline{X} = -\infty\}$ несовместны и $\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) + \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) = 1$.

Из теоремы 1 и (7) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) + \mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) + \dots \\ &\leq p_1(a) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b) = \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) = 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{p_1(a)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}.$$

Одновременно из теоремы 1 и (6) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\bar{X} = +\infty) &\leq \mathbf{P}(\eta_1^- = \infty) + \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) + \mathbf{P}(\eta_4^+ < \infty) + \dots \\ &\leq 1 - p_1(a) + p_1(a)p_2(a+b) \sum_{k=1}^{\infty} p_1^{k-1}(a+b) p_2^{k-1}(a+b) \\ &= 1 - p_1(a) + \frac{p_1(a)p_2(a+b)}{1 - p_1(a+b)p_2(a+b)}. \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Если $a > 0$ и $b > 0$, то можно предложить другие оценки для $\mathbf{P}(A_k^\pm)$. Для этого обозначим $\varphi^\pm(\lambda) = \mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1^\pm\}$, и предположим, что выполнены следующие условия крамеровского типа:

$$\varphi^-(C) < \infty \quad \text{для некоторого } C > 0, \quad \varphi^-(C) > 1; \quad (8)$$

$$\varphi^+(c) < \infty \quad \text{для некоторого } c < 0, \quad \varphi^+(c) > 1. \quad (9)$$

Функции φ^- и φ^+ выпуклы вниз соответственно на промежутках $[0, C]$ и $[c, 0]$, и уравнения $\varphi^\pm(\lambda) = 1$ имеют ненулевые вещественные решения $-\mu$ и ν такие, что

$$\varphi^-(\nu) = 1, \quad \varphi^+(-\mu) = 1, \quad \text{при этом} \quad 0 < \nu < C, \quad 0 < \mu < -c.$$

Известно [10, теорема 16], что при $x \geq 0$ имеют место оценки

$$\mathbf{P}(\overline{S} \geq x) \leq e^{-\nu x}, \quad \text{если выполнено условие (8),}$$

$$\mathbf{P}(\underline{S} \leq -x) \leq e^{-\mu x}, \quad \text{если выполнено условие (9).}$$

Итак, пусть выполнено (8). Тогда правую часть равенства (2) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(\sup_{i \geq 0} \tilde{S}_i \geq b + x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &\leq \int_{(a, \infty)} e^{-\nu(b+x)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &\leq e^{-\nu(a+b)} \int_{(a, \infty)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} \in -dx, \eta_{2k-1}^- < \infty) = e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Аналогично при выполнении условия (9) из (4) выводим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \\ &\leq \int_b^\infty e^{-\mu(a+x)} \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} \in dx, \eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &\leq e^{-(\mu+\nu)(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Добавим еще, что

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) \leq e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_3^- < \infty) \leq e^{-\mu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) \leq e^{-(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a},$$

и так далее. Приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Пусть $a > 0$, $b > 0$ и выполнены условия (8) и (9), тогда для всех $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) \leq e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a}, \quad \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \leq e^{-\nu(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty).$$

Используя эти неравенства, можно переписать оценки, полученные ранее в следствии 1.

Следствие 2. В условиях теоремы 2 справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) &\leq \exp\{-\mu a\} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(k-1)(\mu + \nu)(a+b)\} \\ &= \frac{\exp\{-\mu a\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}, \\ \mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) &= 1 - \mathbf{P}(\underline{X} = -\infty) \geq 1 - \frac{\exp\{-\mu a\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}, \\ \mathbf{P}(\overline{X} = +\infty) &\leq 1 - p_1(a) + \exp\{-\mu a - \nu(a+b)\} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\{-(k-1)(\mu + \nu)(a+b)\} \\ &= 1 - p_1(a) + \frac{\exp\{-\mu a - \nu(a+b)\}}{1 - \exp\{-(\mu + \nu)(a+b)\}}. \end{aligned}$$

2. Точные формулы

Изучение распределений граничных функционалов для случайных блужданий с прямолинейными горизонтальными границами обычно приводит к нахождению решений в точном виде только в известных частных ситуациях. Однако нахождение в явном виде преобразований Лапласа — Стилтеса искомых распределений оказывается доступным в значительно более широких классах задач. В связи с этим в данном разделе сначала будем интересоваться преобразованиями Лапласа — Стилтеса совместных распределений пар $(\eta_k^\pm, X_{\eta_k^\pm})$.

Введем двойные преобразования над распределениями этих векторов:

$$\begin{aligned} U_k(z, \lambda) &:= \mathbf{E}(z^{\eta_k^-} \exp\{\lambda X_{\eta_k^-}\}; \eta_k^- < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_{(-\infty, -a)} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\eta_k^- = n, X_{\eta_k^-} \in dy), \\ V_k(z, \lambda) &:= \mathbf{E}(z^{\eta_k^+} \exp\{\lambda X_{\eta_k^+}\}; \eta_k^+ < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\eta_k^+ = n, X_{\eta_k^+} \in dy), \end{aligned}$$

здесь $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$.

Ниже будут введены два оператора, назовем их **A** и **B**, которые действуют на множестве введенных двойных преобразований и с помощью которых будут получены рекуррентные соотношения вида

$$U_{2k+1}(z, \lambda) = (\mathbf{A}V_{2k})(z, \lambda), \quad V_{2k}(z, \lambda) = (\mathbf{B}U_{2k-1})(z, \lambda), \quad k \geq 1. \quad (10)$$

Перейдем к введению этих операторов. Для этого потребуется использовать теорему 1 из [11], формулировка которой требует введения дополнительных обозначений и подробного описания.

Итак, в этой теореме рассматривается произвольное случайное блуждание

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad S_0 = 0,$$

порожденное последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, и пусть $\tau \geq 0$ — произвольный момент остановки для этого блуждания, возможно, несобственный. Предположим, что известно двойное преобразование над распределением пары случайных величин (τ, S_τ) :

$$g(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} \mathbf{P}(\tau = n, S_n \in dy), \quad |z| \leq 1, \quad \operatorname{Re} \lambda = 0. \quad (11)$$

Если $\mathbf{P}(\tau = 0) = 1$, то в этом случае $g(z, \lambda) \equiv e(z, \lambda) \equiv 1$. На событии $\{\tau < \infty\}$ вводятся случайные величины

$$\tau_+(b) = \inf\{n \geq \tau : S_n \geq b\}, \quad \tau_-(a) = \inf\{n \geq \tau : S_n < -a\}.$$

Особенностью этих величин является то, что здесь определяются моменты достижений соответствующих уровней впервые не после нуля, а после некоторого произвольного момента остановки τ . Возникает вопрос: как выразить двойные преобразования над распределениями векторов $(\tau_-(a), S_{\tau_-(a)})$, $(\tau_+(b), S_{\tau_+(b)})$ через $g(z, \lambda)$. Теорема 1 в [11] утверждает, что

$$\mathbf{E}(z^{\tau_-(a)} \exp\{\lambda S_{\tau_-(a)}\}; \tau_-(a) < \infty) = (Ag)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0,$$

$$\mathbf{E}(z^{\tau_+(b)} \exp\{\lambda S_{\tau_+(b)}\}; \tau_+(b) < \infty) = (Bg)(z, \lambda), \quad |z| < 1, \quad \operatorname{Re} \lambda \leq 0.$$

Участвующие здесь операторы A и B определяются ниже следующим образом. Пусть

$$\eta_+ = \min\{n \geq 1 : S_n \geq 0\}, \quad \eta_- = \min\{n \geq 1 : S_n < 0\}, \quad \chi_{\pm} = S_{\eta_{\pm}}$$

соответственно первые лестничные моменты и лестничные высоты для случайного блуждания S_n , и пусть для $|z| \leq 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$r_-(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_-} \exp\{\lambda \chi_- \}; \eta_- < \infty), \quad (12)$$

$$r_+(z, \lambda) = 1 - \mathbf{E}(z^{\eta_+} \exp\{\lambda \chi_+ \}; \eta_+ < \infty), \quad (13)$$

— компоненты известной факторизации [9, гл. 12]

$$1 - z\mathbf{E} \exp\{\lambda \xi_1\} = r_-(z, \lambda)r_+(z, \lambda).$$

Условимся обозначать через Π множество функций f , имеющих вид

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dF(y)| < \infty.$$

Здесь F — произвольная функция с конечной полной вариацией. Наконец, введем операторы A и B следующим образом. Для всякой функции $f \in \Pi$ положим по определению при $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$

$$(Af)(z, \lambda) = r_-(z, \lambda)[r_-^{-1}(z, \lambda)f(\lambda)]^{(-\infty, -a)}, \quad a > 0,$$

$$(Bf)(z, \lambda) = r_+(z, \lambda)[r_+^{-1}(z, \lambda)f(\lambda)]^{[b, \infty)}, \quad b > 0,$$

где принято обозначение

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y} dF(y) \right]^D = \int_D e^{\lambda y} dF(y)$$

для любого измеримого $D \subset \mathbb{R}$. Функция f в этом определении может также зависеть от z . Заметим, что так определяемые операторы сами зависят от z , но для краткости это не подчеркивается в их обозначениях. Стоящие в квадратных скобках функции $r_{\pm}^{-1}(z, \lambda)$ по переменной λ также принадлежат Π для $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$, это известно из [9, гл. 12].

Итак, выбирая в качестве f введенную в (11) функцию g , получим утверждение теоремы 1 из [11]. Если же в этой теореме с самого начала $\mathbf{P}(S_\tau \geq b) = 1$, то, очевидно, будем иметь в этом случае $(Bg)(z, \lambda) \equiv g(z, \lambda)$.

Хорошо известно, что движение траектории случайного блуждания вверх к горизонтальной границе осуществляется, шаг за шагом, независимыми случайными скачками, одинаково распределенными с первой лестничной высотой χ_+ , а промежутки времени между этими скачками независимы и одинаково распределены с первым лестничным моментом η_+ . Поэтому вполне естественным является тот факт, что двойное преобразование над распределением пары случайных величин $(\tau_+(b), S_{\tau_+(b)})$ выражается через двойное преобразование над лестничной парой (η_+, χ_+) , которое почти совпадает с соответствующей компонентой факторизации.

Отметим важную особенность приведенной теоремы. Распределение скачков случайного блуждания до момента τ может быть произвольным и никак не влияет на результат, используется только знание функции g . Участвующие в определении операторов A и B компоненты факторизации определяются скачками блуждания S_n после момента τ , распределения скачков блуждания после момента τ не обязаны совпадать с распределениями скачков до τ .

Обратимся к первому из соотношений (10). Для его обоснования применим теорему 1 из [11], положив $\tau = \eta_{2k}^+$ и напомним, что после момента η_{2k}^+ до момента η_{2k+1}^- приращения процесса X_n распределены одинаково с ξ_1^+ . Поэтому берем независимую вероятностную копию последовательности $\{\xi_n^+\}$, строим по ней последовательные суммы и для использования в формуле (12) в качестве η_- берем номер первой отрицательной суммы из них, а χ_- будет равно величине этой суммы. Оператор A в этой ситуации будем обозначать через $\mathbf{A}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_-(z, \lambda)$ будем обозначать просто $r(z, \lambda)$, для краткости опуская индекс. При рассмотрении второго соотношения в (10) роль момента остановки τ выполняет $\tau = \eta_{2k-1}^-$, и дальнейшие скачки процесса X_n распределены одинаково с ξ_1^- . Поэтому в формуле (13) в качестве η_+ берем номер первой неотрицательной суммы, построенной по независимой вероятностной копии последовательности ξ_n^- , а χ_+ полагаем равным величине этой суммы. Оператор B в этой ситуации будем обозначать через $\mathbf{B}$, а участвующую в определении этого оператора компоненту факторизации $r_+(z, \lambda)$ для краткости будем обозначать просто $R(z, \lambda)$.

Таким образом, применение теоремы 1 из [11] влечет справедливость соотношений (10), в которых операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задаются формулами

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = r(z, \lambda)[r^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{(-\infty, -a)}, \quad a > 0,$$

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = R(z, \lambda)[R^{-1}(z, \lambda)g(\lambda)]^{[b, \infty)}, \quad b > 0.$$

Получаем теперь из (10)

$$U_1(z, \lambda) = (\mathbf{A}e)(z, \lambda), \quad V_2(z, \lambda) = (\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda), \quad U_3(z, \lambda) = (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda),$$

и так далее. В итоге устанавливаем следующее утверждение.

Теорема 3. При $|z| < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ для всех $a > 0$, $b > 0$ и $k \geq 1$ имеют место соотношения

$$U_{2k-1}(z, \lambda) = (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda), \quad V_{2k}(z, \lambda) = ((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda), \quad (14)$$

в которых степени операторов понимаются как суперпозиции.

После нахождения двойных преобразований возникает вопрос об их обращении. В общем случае формулы (14) трудны для вычисления в явном виде. При использовании операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ хотелось бы иметь явные выражения компонент факторизации $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$ через характеристики исходных распределений F_1 и F_2 , однако это доступно далеко не всегда. Классы распределений, для которых это удастся сделать, обсуждаются в [6]. Ниже продемонстрируем вычисление величин (14) при выполнении условий

$$\mathbf{P}(\xi_1^- \geq t) = q \exp\{-\alpha t\}, \quad t > 0, \quad \alpha > 0, \quad (15)$$

$$\mathbf{P}(\xi_1^+ < t) = r \exp\{\beta t\}, \quad t < 0, \quad \beta > 0. \quad (16)$$

Эта ситуация подробно рассмотрена в [3]. Функция $\varphi^+(\lambda)$ конечна при $-\beta < \lambda \leq 0$, $\varphi^-(\lambda)$ определена при $0 \leq \lambda < \alpha$. Обе функции выпуклы вниз, поэтому с учетом требований $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$ нетрудно видеть, что при $0 < z \leq 1$ уравнение $1 - z\varphi^+(\lambda) = 0$ имеет единственный отрицательный корень. Обозначим его через $\lambda(z)$, и обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1 - z\varphi^-(\lambda) = 0$. Ясно, что условие (15) влечет введенное ранее условие (8), условие (16) влечет (9). Во введенных ранее обозначениях $\lambda(1) = -\mu$, $\Lambda(1) = \nu$. В [3] показано, что при выполнении условий (15) и (16) функции $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$ имеют весьма простую форму:

$$r(z, \lambda) = \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta}, \quad R(z, \lambda) = \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha}.$$

Более того, там же показано, что если функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} g(\lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} r(z, \lambda) [r^{-1}(z, \lambda) g(\lambda)]^{(-\infty, -a)} \\ = r(z, \lambda) \left[\left(1 + (\lambda(z) + \beta) \int_{-\infty}^0 e^{(\lambda - \lambda(z))y} dy \right) g(\lambda) \right]^{(-\infty, -a)} \\ = \frac{\lambda - \lambda(z)}{\lambda + \beta} (\lambda(z) + \beta) \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \int_0^\infty e^{-\lambda(z)(y-t)} dG(t) dy = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} g(\lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}. \end{aligned}$$

Если же функция g имеет вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dG(y), \quad \operatorname{Re} \lambda = 0,$$

где также полная вариация G конечна, то

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = R(z, \lambda) [R^{-1}(z, \lambda) g(\lambda)]^{[b, \infty)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha} \left[\left(1 + (\alpha - \Lambda(z)) \int_0^\infty e^{(\lambda - \Lambda(z))y} dy \right) g(\lambda) \right]^{[b, \infty)} \\
&= \frac{\lambda - \Lambda(z)}{\lambda - \alpha} (\alpha - \Lambda(z)) \int_b^\infty e^{\lambda y} \int_{-\infty}^0 e^{-\Lambda(z)(y-t)} dG(t) dy = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} g(\Lambda(z)) e^{(\lambda - \Lambda(z))b}.
\end{aligned}$$

Эти утверждения позволяют вычислить

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} e^{(\lambda(z) - \lambda)a}, \\
(\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))a} e^{(\lambda - \Lambda(z))b}, \\
(\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \cdot \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(a+b)} e^{(\lambda(z) - \lambda)a}, \\
((\mathbf{B}\mathbf{A})^2 e)(z, \lambda) &= \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} \cdot \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha} \cdot \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta} e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(2a+b)} e^{(\lambda - \Lambda(z))b},
\end{aligned}$$

и так далее, т. е.

$$(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{ka+(k-1)b}(z) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} \quad (17)$$

для всех $k \geq 1$, где $d(z) = e^{\lambda(z) - \Lambda(z)}$ и

$$\delta_1(z) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\Lambda(z) + \beta}, \quad \delta_2(z) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda(z) - \alpha}.$$

Для $0 < z < 1$ выполняется $-\beta < \lambda(z) < 0$ и $0 < \Lambda(z) < \alpha$; поэтому $|\delta_i(z)| < 1$, $i = 1, 2$.

Далее,

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^2 e)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^2(z) \delta_2^2(z) d^{2(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Продолжая эти вычисления, убеждаемся, что

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^k(z) \delta_2^k(z) d^{k(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a}.$$

Таким образом, получена

Теорема 4. Пусть выполнены условия (15) и (16). Тогда при $0 < z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda = 0$ для всех $a > 0$, $b > 0$ и $k \geq 1$ имеют место соотношения

$$U_{2k-1}(z, \lambda) = \frac{\lambda(z) + \beta}{\lambda + \beta} \delta_1^{k-1}(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{(k-1)(a+b)}(z) e^{(\lambda(z) - \lambda)a},$$

$$V_{2k}(z, \lambda) = \frac{\Lambda(z) - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k(z) \delta_2^{k-1}(z) d^{ka+(k-1)b}(z) e^{(\lambda - \Lambda(z))b}.$$

Следствие 3. В условиях теоремы 4

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k-1}^-}\}; \eta_{2k-1}^- < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} U_{2k-1}(z, \lambda) \\ &= \frac{\beta - \mu}{\lambda + \beta} \delta_1^{k-1} \delta_2^{k-1} d^{(k-1)(a+b)} e^{-(\mu+\lambda)a}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} V_{2k}(z, \lambda) = \frac{\nu - \alpha}{\lambda - \alpha} \delta_1^k \delta_2^{k-1} d^{ka+(k-1)b} e^{(\lambda-\nu)b},$$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) = \frac{\beta - \mu}{\beta} \delta_1^{k-1} \delta_2^{k-1} d^{(k-1)(a+b)} e^{-\mu a},$$

$$\mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \frac{\alpha - \nu}{\alpha} \delta_1^k \delta_2^{k-1} d^{ka+(k-1)b} e^{-\nu b},$$

где обозначено

$$\delta_1 = \delta_1(1) = \frac{\beta - \mu}{\nu + \beta}, \quad \delta_2 = \delta_2(1) = \frac{\alpha - \nu}{\mu + \alpha}, \quad d = e^{-(\mu+\nu)}.$$

Замечание 1. Отметим, что результаты следствия 3 можно получить и без теоремы 4. Действительно, при одновременном выполнении условий (15) и (16) абсолютные значения всех перескоков блуждания $\{X_n, n \geq 1\}$ в моменты $\eta_k^\pm$ имеют условные экспоненциальные распределения и не зависят от моментов достижения уровня, а именно: при $k \geq 1$

$$\mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} + a \in dy \mid \eta_{2k-1}^- < \infty) = \beta e^{\beta y} dy, \quad y < 0,$$

$$\mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dy \mid \eta_{2k}^+ < \infty) = \alpha e^{-\alpha y} dy, \quad y > 0.$$

Кроме того, известно, что если выполнено (15), то с вероятностью 1 конечен супремум $\bar{S}$ траектории блуждания $\{S_n\}$ и

$$\mathbf{P}(\bar{S} = 0) = \frac{\nu}{\alpha},$$

$$\mathbf{P}(\bar{S} \in dx) = \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \nu e^{-\nu x} dx, \quad x > 0,$$

см. [9, гл. 12, пример 5.1]. Здесь, напомним, ν — единственный положительный корень уравнения $\varphi^-(\lambda) = 1$, $0 < \nu < \alpha$. Аналогично, если выполнено (16), то

$$\mathbf{P}(\underline{S} = 0) = \frac{\mu}{\beta},$$

$$\mathbf{P}(\underline{S} \in dx) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \mu e^{\mu x} dx, \quad \text{если } x < 0,$$

здесь $\varphi^+(-\mu) = 1$.

Вычисляя в точном виде правую часть (2), получаем для $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) &= \int_{-\infty}^{-a} \mathbf{P}(\bar{S} \geq b - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k-1}^-} + a \in dx + a \mid \eta_{2k-1}^- < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \int_{-\infty}^0 e^{-\nu(b-y+a)} \beta e^{\beta y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty) = \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\beta e^{-\nu(a+b)}}{\beta + \nu} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\mathbf{P}(\eta_1^- < \infty) = \mathbf{P}(\underline{S} < -a) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu a}.$$

$$\mathbf{P}(\eta_2^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\beta e^{-\mu a - \nu(a+b)}}{\beta + \nu}.$$

Для правой части (4) находим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k+1}^- < \infty) &= \int_b^\infty \mathbf{P}(\underline{S} < -a - x) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b | \eta_{2k}^+ < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \int_0^\infty e^{-\mu(a+b+y)} \alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) = \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \frac{\alpha e^{-\mu(a+b)}}{\alpha + \mu} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \left(1 - \frac{\nu}{\alpha}\right) \frac{\alpha \beta}{(\alpha + \mu)(\beta + \nu)} e^{-(\mu+\nu)(a+b)} \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- < \infty). \end{aligned}$$

Приведенные соотношения полностью определяют значения вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$ при всех $k \geq 1$.

Кроме того, при выполнении условий (15) и (16) легко вычисляются все слагаемые в формуле (6) для подсчета $\mathbf{P}(\overline{X} = +\infty)$, поскольку, действуя, как и в (4), получаем при всех $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty, \eta_{2k+1}^- = \infty) &= \int_b^\infty (1 - \mathbf{P}(\underline{S} < -x - a)) \mathbf{P}(X_{\eta_{2k}^+} - b \in dx - b | \eta_{2k}^+ < \infty) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) e^{-\mu(a+b+y)}\right) \alpha e^{-\alpha y} dy \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty) \\ &= \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{\beta}\right) \frac{\alpha}{\alpha + \mu} e^{-\mu(a+b)}\right) \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ < \infty). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Вместо условий (15) и (16) можно рассмотреть более общую ситуацию, в которой плотность распределения F_1 на отрицательной полуоси равна линейной комбинации экспонент с постоянными коэффициентами, и одновременно плотность распределения F_2 на положительной полуоси также равна линейной комбинации экспонент. В этих условиях участвующие в определении операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ функции

$$r(z, \lambda), \quad r^{-1}(z, \lambda), \quad R(z, \lambda), \quad R^{-1}(z, \lambda) \quad (18)$$

будут рациональными, они выражаются через показатели экспонент в плотностях и через корни уравнений $1 - z\varphi^\pm(\lambda) = 0$ (которые еще надо найти). Соответствующие объяснения приведены в [6]. Разложение рациональных функций (18) на простые дроби делает доступным в этой ситуации нахождение точных формул для выражений вида $(\mathbf{A}g)(z, \lambda)$ и $(\mathbf{B}g)(z, \lambda)$, однако дальнейшее вычисление суперпозиций вида $((\mathbf{B}\mathbf{A})^k g)(z, \lambda)$ при больших k окажется чрезвычайно громоздким процессом.

3. Асимптотические представления функций $U_k(z, \lambda)$ и $V_k(z, \lambda)$ при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$

Как уже отмечалось, нахождение точных формул для распределений различных функционалов, связанных с моментом достижения траекторией случайного блуждания определенных границ, доступно только для некоторых частных ситуаций. Демонстрацией этого факта являются теорема 4 и ее следствие. В граничных задачах для блужданий общего вида приходится довольствоваться различными аппроксимациями искомых распределений и их характеристик. Одним из способов построения таких аппроксимаций является использование первых членов асимптотических разложений нужных распределений (или хотя бы их преобразований Лапласа — Стильтеса) в рамках подходящего метода асимптотического анализа. Можно, например, рассматривать схему серий с уменьшающимися размерами скачков блуждания, и такие работы имеются. Другой подход предполагает, что распределение скачков блуждания остается неизменным, но асимптотические результаты получаются при условии неограниченного удаления границ. Этому подходу посвящено большое число работ. Для случайных блужданий с прямолинейными неограниченно удаляющимися горизонтальными границами весьма эффективным оказался факторизационный метод получения асимптотических разложений, разработанный А. А. Боровковым [12] и получивший дальнейшее развитие в работах его последователей.

Этому направлению будем следовать в данном разделе, пользуясь разработанными в [13] асимптотическими представлениями для введенных выше операторов **A** и **B**.

В этом разделе всюду будем предполагать, что при некоторых $c_i > 0$, $i = 1, \dots, 4$, выполнено условие (A) крамеровского типа, состоящее из следующих трех пунктов:

- 1) $|\varphi^-(\lambda)| < \infty$ для $-c_1 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_2$, $\varphi^-(c_2) > 1$;
- 2) $|\varphi^+(\lambda)| < \infty$ для $-c_3 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq c_4$, $\varphi^+(-c_3) > 1$;
- 3) распределения случайных величин $\xi_1^\pm$ содержат абсолютно непрерывные компоненты.

Напомним, что $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$. Как и в теореме 4, в этих условиях, но уже для вещественных значений z , достаточно близких к единице, т. е. для $1 - \delta \leq z \leq 1$ при некотором $\delta > 0$, уравнение $1 - z\varphi^+(\lambda) = 0$ имеет единственный отрицательный корень, обозначим его через $\lambda(z)$. Также обозначим через $\Lambda(z)$ положительный корень уравнения $1 - z\varphi^-(\lambda) = 0$ и по-прежнему сохраним обозначения $\lambda(1) = -\mu$, $\Lambda(1) = \nu$.

В [13] доказаны две леммы, которые в обозначениях нашей работы имеют следующий вид.

Лемма 1. Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g , имеющей вид

$$g(\lambda) = \int_0^\infty e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_0^\infty |dG(y)| < \infty,$$

при $1 - \delta \leq z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda \geq -\mu$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$(\mathbf{A}g)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z) - \lambda)a} g(\lambda(z)) + r(z, \lambda) \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} d\theta_z(y),$$

в котором $u_z(\lambda) = r(z, \lambda)((\lambda - \lambda(z))r'(z, \lambda(z)))^{-1}$ и равномерно по z

$$\int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| = O(e^{-(\mu+\varepsilon)a}) \int_0^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $[b, \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| = O(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}) \int_b^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty.$$

Лемма 2. Пусть выполнено условие (A). Тогда для всякой функции g , имеющей вид

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda y} dG(y), \quad \int_{-\infty}^0 |dG(y)| < \infty,$$

при $1 - \delta \leq z < 1$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \nu$ и некотором $\varepsilon > 0$ имеет место представление

$$(\mathbf{B}g)(z, \lambda) = v_z(\lambda)e^{(\lambda - \Lambda(z))b}g(\Lambda(z)) + R(z, \lambda) \int_b^{\infty} e^{\lambda y} d\varphi_z(y),$$

в котором $v_z(\lambda) = R(z, \lambda)((\lambda - \Lambda(z))R'(z, \Lambda(z)))^{-1}$ и равномерно по z

$$\int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| = O(e^{-(\nu+\varepsilon)b}) \int_{-\infty}^0 |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty.$$

Если дополнительно известно, что носитель обобщенной меры $dG(y)$ сосредоточен на множестве $(-\infty, -a)$, то

$$\int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| = O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \int_{-\infty}^{-a} |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty.$$

Замечание 3. В дальнейшем потребуется рассматривать значения величин $(\mathbf{A}g)(z, \Lambda(z))$ и $(\mathbf{B}g)(z, \lambda(z))$. Для них остаточные члены в леммах 1 и 2 будут иметь следующий вид (здесь буквой C обозначены некоторые константы):

$$\begin{aligned} \left| r(z, \Lambda(z)) \int_{-\infty}^{-a} e^{\Lambda(z)y} d\theta_z(y) \right| &\leq C e^{-\Lambda(z)a} \int_{-\infty}^{-a} |d\theta_z(y)| \\ &= O(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a}) \int_0^{\infty} |dG(y)|, \quad a \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| R(z, \lambda(z)) \int_b^{\infty} e^{\lambda(z)y} d\varphi_z(y) \right| &\leq C e^{\lambda(z)b} \int_b^{\infty} |d\varphi_z(y)| \\ &= O(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b}) \int_{-\infty}^0 |dG(y)|, \quad b \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

с заменой величин $O(e^{-(\Lambda(z)+\mu+\varepsilon)a})$ и $O(e^{(\lambda(z)-\nu-\varepsilon)b})$ соответственно на величины $O(e^{-\Lambda(z)a-(\mu+\varepsilon)(a+b)})$ и $O(e^{(\lambda(z)b-(\nu+\varepsilon)(a+b)})$ в упомянутых выше случаях, касающихся носителей функции G .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Вернемся к соотношениям (14). В этих формулах каждое применение операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеет вид $(\mathbf{A}g)(z, \lambda)$ или $(\mathbf{B}g)(z, \lambda)$, где в силу теоремы 1 из [11] функция $g = g(z, \lambda)$ в каждом случае есть двойное преобразование Лапласа — Стильтеса над двумерным распределением момента первого достижения некоторого уровня и положения в этот момент. По этой причине каждый раз выполняется

$$g(z, \lambda) = \int e^{\lambda y} dG_z(y), \quad \int |dG_z(y)| \leq 1.$$

Более того, для всякого $k \geq 1$ в силу (14) имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda) &= U_{2k-1}(z, \lambda) = \mathbf{E}(z^{\eta_{2k-1}^-} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k-1}^-}\}; \eta_{2k-1}^- < \infty) \\ &= \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- = n, X_{\eta_{2k-1}^-} \in dy) \end{aligned}$$

и в представлении

$$(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^{k-1}e)(z, \lambda) = \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

будем иметь равномерно по z

$$\|G_z\| := \int_{-\infty}^{-a} |dG_z(y)| = \left\| \int_{-\infty}^{-a} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k-1}^- = n, X_{\eta_{2k-1}^-} \in dy) \right\| \leq \mathbf{P}(A_{2k-1}^-).$$

Напомним, что ранее обозначено $\mathbf{P}(A_k^\pm) = \mathbf{P}(\eta_k^\pm < \infty)$. Далее, по тем же соображениям при всех $k \geq 1$

$$((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ = n, X_{\eta_{2k}^+} \in dy),$$

и в представлении

$$((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) = \int_b^{\infty} e^{\lambda y} dG_z(y)$$

выполняется равномерно по z

$$\|G_z\| = \int_b^{\infty} |dG_z(y)| = \left\| \int_b^{\infty} e^{\lambda y} \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbf{P}(\eta_{2k}^+ = n, X_{\eta_{2k}^+} \in dy) \right\| \leq \mathbf{P}(A_{2k}^+).$$

Отметим, что двустороннее условие Крамэра (A) влечет одновременное выполнение ранее введенных односторонних условий (8) и (9), поэтому ниже будем пользоваться экспоненциальными оценками теоремы 2 для вероятностей $\mathbf{P}(A_k^\pm)$ в приведенных оценках для $\|G_z\|$.

Теорема 5. Пусть выполнено условие (A). Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ равномерно по $1 - \delta < z < 1$ выполняется

$$\mathbf{E}(z^{\eta_1^-} \exp\{\lambda X_{\eta_1^-}\}; \eta_1^- < \infty) = (\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \quad (19)$$

и для $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^{\eta_{2k}^+} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) &= ((\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z^{\eta_{2k+1}^-} \exp\{\lambda X_{\eta_{2k+1}^-}\}; \eta_{2k+1}^- < \infty) &= (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) \\ &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \end{aligned} \quad (21)$$

где для краткости обозначено $h_1(z) = u_z(\Lambda(z))$, $h_2(z) = v_z(\lambda(z))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приводимые ниже рассуждения основываются на применении лемм 1 и 2, а также оценок, содержащихся в замечаниях 3 и 4. Отметим также, что в силу известных свойств компонент факторизации абсолютные значения функций $r(z, \lambda)$, $R(z, \lambda)$, $u_z(\lambda)$ и $v_z(\lambda)$ ограничены равномерно по z каждая в своей области аналитичности по переменной λ .

Воспользуемся методом математической индукции. Соотношение (19) сразу следует из леммы 1:

$$(\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} + O(e^{-(\mu+\varepsilon)a}) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).$$

Далее, применяя лемму 2 и оценки, сформулированные в замечаниях 3 и 4, получаем

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}\mathbf{A}e)(z, \lambda) &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} (u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a})) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_1^-) O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} + O(e^{-(\nu+\mu+\varepsilon)a-\nu b}) + O(e^{-\mu a-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})). \end{aligned}$$

Предположим, что для некоторого $k \geq 1$ выполнено (20). Тогда

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e)(z, \lambda) &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} \\ &\quad \times (v_z(\lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))b} h_1^k(z) h_2^{k-1}(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))(ka+(k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a}))) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_{2k}^+) O(e^{-(\mu+\varepsilon)(a+b)}) = u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} \\ &\quad + O(e^{-\mu a-k(\mu+\nu)(a+b)-\varepsilon a}) + e^{-\nu(a+b)-\mu a} e^{-(k-1)(\mu+\nu)(a+b)} O(e^{-(\mu+\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\ &= u_z(\lambda) e^{(\lambda(z)-\lambda)a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})). \end{aligned}$$

В частности, из установленного выше равенства (20) при $k = 1$ следует справедливость (21) при $k = 1$. Пусть теперь выполнено (21) для произвольного $k \geq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} ((\mathbf{B}\mathbf{A})^{k+1} e)(z, \lambda) &= (\mathbf{B}(\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{A})^k e))(z, \lambda) = v_z(\lambda) e^{(\lambda-\Lambda(z))b} \\ &\quad \times (u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z)-\Lambda(z))k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a}))) \\ &\quad + \mathbf{P}(A_{2k+1}^-) O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_z(\lambda) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} u_z(\Lambda(z)) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))a} h_1^k(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))k(a+b)} \\
&+ O(e^{-\varepsilon a - (k+1)(\mu+\nu)a - k(\mu+\nu)b}) + e^{-k(\mu+\nu)(a+b)} e^{-\mu a} O(e^{-(\nu+\varepsilon)(a+b)}) \\
&= v_z(\lambda) e^{(\lambda - \Lambda(z))b} h_1^{k+1}(z) h_2^k(z) e^{(\lambda(z) - \Lambda(z))(k+1)a + kb} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).
\end{aligned}$$

Таким образом, представления (20) и (21) выполняются для всех $k \geq 1$. Теорема доказана.

Отметим, что при дополнительном выполнении условий (15) и (16) остаточные члены в формулах (19)–(21) исчезают.

По-видимому, утверждения теоремы 5 сохраняются в силе, если вместо двусторонних условий Крамера в (A) ограничиться односторонними при соблюдении требований $\mathbf{E}\xi_1^- < 0$ и $\mathbf{E}\xi_1^+ > 0$, как это происходило в теореме 4. Однако доказательство теоремы 5 использует леммы 1 и 2 из [13], где предполагалось именно выполнение двусторонних условий. Разумеется, значения величин $\lambda(z)$ и $\Lambda(z)$ определяются распределениями случайных величин на обоих полуосях.

Обращение по переменной z полученных главных членов асимптотики функций $((\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda)$ и $(\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda)$ является весьма сложной задачей и в данной работе производиться не будет. Более доступной выглядит возможность обращения по пространственной переменной λ , хотя для этого потребуются дополнительные сведения о факторизационных компонентах $r(z, \lambda)$ и $R(z, \lambda)$.

Следствие 4. Пусть выполнено условие (A), тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_1^-}\}; \eta_1^- < \infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (\mathbf{A}e)(z, \lambda) = u_1(\lambda) e^{-(\mu+\lambda)a} (1 + O(e^{-\varepsilon a})), \quad a \rightarrow \infty,$$

и для $k \geq 1$ при $a \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$ выполняется

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k}^+}\}; \eta_{2k}^+ < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} ((\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda) \\
&= v_1(\lambda) e^{(\lambda-\nu)b} h_1^k(1) h_2^{k-1}(1) e^{-(\mu+\nu)(ka + (k-1)b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\exp\{\lambda X_{\eta_{2k+1}^-}\}; \eta_{2k+1}^- < \infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} (\mathbf{A}(\mathbf{BA})^k e)(z, \lambda) \\
&= u_1(\lambda) e^{-(\mu+\lambda)a} h_1^k(1) h_2^k(1) e^{-(\mu+\nu)k(a+b)} (1 + O(e^{-\varepsilon a})).
\end{aligned}$$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение текста и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рогозин Б. А., Фосс С. Г. Возвратность осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т. 23, № 1. С. 161–169.
2. Keilson J., Servi L. D. Oscillating random walk models for GI/G/1/1 vacation systems with Bernoulli schedules // J. Appl. Probab. 1986. V. 23, N 3. P. 790–802.
3. Лотов В. И. Об осциллирующих случайных блужданиях // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 869–880.
4. Ким Д. К., Лотов В. И. Асимптотика стационарного распределения осциллирующего случайного блуждания // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1112–1129.
5. Dudukalov D., Logachov A., Lotov V., Prasolov T., Prokopenko E., Tarasenko A. Convergence, sticking and escape: Stochastic dynamics near critical points in SGD. ArXiv.2505.18535.
6. Лотов В. И. Об одной модели осциллирующего случайного блуждания // Мат. заметки. 2026. Т. 119, № 5. С. 721–731.

7. Ветрова Е. Л. Асимптотика вероятностей больших уклонений для простого осциллирующего случайного блуждания // *Фундамент. и прикл. математика*. 2020. Т. 23, № 1. С. 89–94.
8. Peigné M., Pham C., Vo T. D. A local limit theorem for lattice oscillating random walks. Arxiv.2509.15647.
9. Боровков А. А. Теория вероятностей. М.: ЛИБРОКОМ, 2009.
10. Боровков А. А. Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
11. Лотов В. И. Об одном подходе в двуграничных задачах // *Статистика и управление случайными процессами*. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
12. Боровков А. А. Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых // *Сиб. мат. журн.* 1962. Т. 3, № 5. С. 645–694.
13. Лотов В. И. Предельные теоремы в одной граничной задаче для случайных блужданий // *Сиб. мат. журн.* 1999. Т. 40, № 5. С. 1095–1108.

Поступила в редакцию 8 апреля 2026 г.

После доработки 13 апреля 2026 г.

Принята к публикации 13 апреля 2026 г.

Лотов Владимир Иванович (ORCID 0000-0002-3556-2033)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru