

УТОЧНЕННЫЙ ПРИНЦИП БОЛЬШИХ
УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ЛОМАНЫХ,
ПОСТРОЕННЫХ ПО СУММАМ
НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

А. В. Логачев

Аннотация. Получен принцип больших уклонений для траекторий ломаных, построенных по суммам независимых случайных величин, заданных в пространстве гёльдеровских функций с гёльдеровой метрикой. Также найдены простые условия на моменты случайных величин, при которых удастся получить такого рода теоремы. В силу того, что гёльдерова метрика сильнее чем равномерная, полученный результат уточняет хорошо известные ранее теоремы, связанные с принципом больших уклонений для траекторий таких ломаных, заданных в пространстве непрерывных функций с равномерной метрикой.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.515

Ключевые слова: случайное блуждание, принцип больших уклонений, функционал уклонений, пространство гёльдеровских функций, гёльдерова метрика.

1. Введение, основной результат

Рассмотрим последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (с.в.) $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, заданных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$. Нас будет интересовать предельное поведение в области больших уклонений траекторий случайной ломаной $s_n(t)$, $t \in [0, 1]$, с узлами в точках

$$\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n,$$

где $S_k := \sum_{r=1}^k X_r$, $S_0 := 0$, т. е.

$$s_n(t) := X_k \left(t - \frac{k-1}{n}\right) + \frac{S_{k-1}}{n}, \quad t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], \quad 1 \leq k \leq n.$$

Отметим, что траектории случайного процесса s_n по определению при каждом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ с вероятностью 1 удовлетворяют условию Липшица.

Для удобства читателя напомним основные определения, которые будут использоваться далее.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2026-0030.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность случайных элементов η_n *экспоненциально плотна* (э.п.) в метрическом пространстве (м.п.) $(\mathbb{X}, \rho_X)$ с нормирующей функцией (н.ф.) $\psi(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$, если для любого $C > 0$ найдется компакт $K_C \subseteq \mathbb{X}$ такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C,$$

где $\overline{K_C}$ — дополнение к множеству K_C .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Последовательность случайных элементов η_n *удовлетворяет принципу больших уклонений* (п.б.у.) в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_X)$ с функционалом уклонений (ф.у.) $I = I(f) : \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty]$ и н.ф. $\psi(n) : \lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$, если для любого множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{X})$ выполнены неравенства

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \leq -I([B]), \quad (1.1)$$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in B) \geq -I((B)), \quad (1.2)$$

где $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ — борелевская σ -алгебра подмножеств м.п. $\mathbb{X}$, $[B]$ и (B) замыкание и внутренность множества B соответственно, $I(B) = \inf_{x \in B} I(x)$, $I(\emptyset) = \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что если, кроме того, для любого $c \geq 0$ множество $\{x \in \mathbb{X} : I(x) \leq c\}$ компактно, то ф.у. называется *хорошим* (good rate function, см., например, [1, 2]) или *плотным* (tight rate function, см., например, [3]). Далее в этой работе будем использовать термин *плотный*.

Будем обозначать через $\mathbb{C}_0[0, 1]$ пространство непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$. Определим в этом пространстве норму и равномерную метрику

$$\|f\| := \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|, \quad \rho(f, g) := \|f - g\|, \quad f, g \in \mathbb{C}_0[0, 1].$$

Сделаем обзор результатов, связанных с рассматриваемой тематикой. В работах [4, 5] (см. также [6, гл. 4, теорема 4.4.2; 1, гл. 5, теорема 5.1.2; 2, пример 1.6; 7, теорема 2.4]) был получен п.б.у. для последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_0[0, 1], \rho)$ при выполнении условия Крамера $[\mathbf{C}_\infty]$, т. е. когда для любого $\lambda > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E} e^{\lambda |X_1|} < \infty. \quad (1.3)$$

Далее в цикле работ [7–9] было показано, что если выполнено более слабое условие Крамера $[\mathbf{C}_0]$: найдется $\lambda > 0$ такое, что выполнено неравенство (1.3), то, вообще говоря, не получится доказать классический п.б.у. для последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_0[0, 1], \rho)$. В этом случае исследователи рассматривают траектории последовательности случайных процессов s_n либо в неполном пространстве функций без разрывов второго рода с топологией типа Скорохода и им удается получить только расширенный п.б.у. (более подробно см. работы [7–9]), либо рассматривают траектории в пространстве $\mathbb{BV}[0, 1]$ функций ограниченной полной вариации на отрезке $[0, 1]$ с метрикой

$$\rho_*(f, g) := \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt + |f(1) - g(1)|, \quad f, g \in \mathbb{BV}[0, 1],$$

и получают в таком м.п. стандартный п.б.у. (более подробно см. работу [10]).

При этом остается открытым вопрос о возможности получения более точной асимптотики больших уклонений для случаев, когда с.в. X_1 удовлетворяет более сильному показательному моментному условию, чем условие Крамера $[C_\infty]$. Ответу на этот вопрос и посвящена данная работа. Далее приведены простые моментные условия, при выполнении которых удастся получить п.б.у. для траекторий последовательности s_n в пространствах гёльдеровских функций с гёльдеровской метрикой. Такая метрика является более сильной, чем равномерная при любом показателе Гёльдера $\alpha \in (0, 1)$ (см. формулу (1.6)). Благодаря этому факту увеличивается класс множеств, для которых оценка сверху (1.1) совпадает с оценкой снизу (1.2) (см. примеры после формулировки теоремы 1).

Введем необходимые нам моментные условия. Будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\kappa,0}]$ (здесь $\kappa > 1$ — фиксированная константа), если найдется константа $\lambda > 0$ такая, что

$$Ee^{\lambda|X|^\kappa} < \infty. \quad (1.4)$$

Если неравенство (1.4) выполнено для любого $\lambda > 0$, то будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\kappa,\infty}]$.

В случае, когда условие $[CL_{\kappa,\infty}]$ выполнено для всех $\kappa > 1$, будем говорить, что с.в. X удовлетворяет условию $[CL_{\infty,\infty}]$.

Легко видеть, что приведенные выше показательные моментные условия удовлетворяют следующему соотношению:

$$[CL_{\infty,\infty}] \Rightarrow [CL_{\kappa,\infty}] \Rightarrow [CL_{\kappa,0}] \Rightarrow [CL_{r,\infty}] \Rightarrow [CL_{r,0}] \Rightarrow [C_\infty] \Rightarrow [C_0],$$

где $1 < r < \kappa$.

Для фиксированного $\alpha \in [0, 1)$ обозначим через $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ подпространство функций $f \in \mathbb{C}_0[0, 1]$ таких, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ 0 < |t-s| \leq \delta}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} = 0. \quad (1.5)$$

Определим в пространстве $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ гёльдерову норму и метрику

$$\|f\|_\alpha := \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha}, \quad \rho_\alpha(f, g) := \|f - g\|_\alpha, \quad f, g \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1].$$

Отметим, что м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ является польским (см., например, [11]).

Легко видеть, что

$$\|f\|_\alpha = \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} \geq \sup_{t \in (0, 1]} \frac{|f(t) - f(0)|}{|t - 0|^\alpha} \geq \sup_{t \in [0, 1]} \frac{|f(t) - 0|}{1} \geq \|f\|. \quad (1.6)$$

Таким образом, метрика ρ_α является более сильной чем метрика ρ . При этом в силу того, что ρ_α и ρ — метрики, а не псевдометрики, будет выполнено соотношение

$$\|f\|_\alpha = 0 \Leftrightarrow \|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0.$$

Отметим, что м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ является замкнутым подпространством м.п. $(\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α , т. е.

$$\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0, 1] := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0, 1] : \sup_{\substack{s, t \in [0, 1], \\ s \neq t}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t - s|^\alpha} < \infty \right\}.$$

Однако решение задач, связанных с асимптотикой больших уклонений в м.п. $(\tilde{\mathbb{C}}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, затруднительно ввиду его несепарабельности.

Также обратим внимание на тот факт, что бессмысленно рассматривать пространство $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$ с показателем $\alpha = 1$, так как в силу условия (1.5) такое пространство будет содержать только функцию $f \equiv 0$, что не дает возможности получить содержательные результаты в области больших уклонений.

Положим $A(a) := \ln \mathbf{E} e^{aX_1}$, $a \in \mathbb{R}$, $\Lambda(x) := \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - A(a))$ и определим функционал

$$I(f) := \begin{cases} \int_0^1 \Lambda(f'(s)) ds, & \text{если } f \in \mathbb{AC}_0[0,1], \\ \infty, & \text{если } f \notin \mathbb{AC}_0[0,1], \end{cases}$$

где $\mathbb{AC}_0[0,1]$ — множество абсолютно непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций f таких, что $f(0) = 0$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. (0) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$.

Тогда

(0.1) ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_0[0,1], \rho)$;

(0.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|} = \infty$;

(0.3) последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_0[0,1], \rho)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(1) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$, где $\kappa > 1$.

Тогда

(1.1) для любого $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(1.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^\kappa} = \infty$ для любого $r < \kappa$;

(1.3) для любого $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(2) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$, где $\kappa > 1$.

Тогда

(2.1) для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{\kappa-1}{\kappa}$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(2.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^\kappa} = \infty$;

(2.3) для любого $0 \leq \alpha \leq \frac{\kappa-1}{\kappa}$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

(3) Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$.

Тогда

(3.1) для любого $0 \leq \alpha < 1$ ф.у. I является плотным в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$;

(3.2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{|x|^r} = \infty$ для любого $r \in \mathbb{R}$;

(3.3) для любого $0 \leq \alpha < 1$ последовательность случайных процессов s_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ и ф.у. I .

Отметим, что, в частности, теорема 1 дает дополнительную информацию о свойствах функционала I , который удастся выписать в явном виде лишь в редких случаях. Например, пусть известно, что с.в. X_1 удовлетворяет условию (1), (2) или (3), а $\alpha \in (0,1)$ удовлетворяет условиям (1.1), (2.1), (3.1) соответственно. Тогда можно утверждать, что для функции $f(t) = t^\alpha$ выполнено равенство $I(f) = \infty$.

Действительно, в этом случае из формул (1.2), (2.2), (3.2) соответственно следует, что при достаточно больших $x > 0$ выполнено неравенство $\Lambda(x) \geq x^{\frac{1}{1-\alpha}}$. Поэтому для достаточно малого $\delta > 0$ будем иметь

$$I(f) = \int_0^1 \Lambda(f'(s)) ds = \int_0^1 \Lambda(\alpha s^{\alpha-1}) ds \geq \int_0^\delta \frac{\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}}{s} ds = \infty.$$

Приведем теперь несколько примеров, которые сравнивают п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ при различных значениях $0 \leq \alpha < 1$.

ПРИМЕР 1. Пусть с.в. X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$ для некоторого $\kappa > 1$. Зафиксируем α и $\tilde{\alpha}$ так, чтобы выполнялось неравенство $0 \leq \tilde{\alpha} < \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$, и рассмотрим множество $B = \mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$. Используя п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ (т. е. утверждение (1.3) теоремы 1) и тот факт, что множество B совпадает со всем пространством $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$, будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) = 0.$$

Если же использовать п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1], \rho_{\tilde{\alpha}})$, то получим тривиальные оценки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in [B]) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in \mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1]) = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in B) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in (B)) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in \emptyset) = -\infty,$$

где $[B]$ и (B) — замыкание и внутренность множества B в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ соответственно.

Рассмотрим более сложный пример.

ПРИМЕР 2. Пусть с.в. X_1 такая, что $\mathbf{P}(X_1 = -1) = \mathbf{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$; $\tilde{X}_1 \sim N(0,1)$. Легко видеть, что в этом случае с.в. $X_1, \tilde{X}_1$ удовлетворяют условиям $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$, $[\mathbf{CL}_{2,0}]$ соответственно. Поэтому нормированная сумма s_n независимых копий с.в. X_1 удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ для любого $0 \leq \alpha < 1$ (см. утверждение (3.3) теоремы 1); нормированная сумма $\tilde{s}_n$ независимых копий с.в. $\tilde{X}_1$ удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ для любого $0 \leq \tilde{\alpha} < \frac{1}{2}$ (см. утверждение (1.3) теоремы 1). Так как $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}\tilde{X}_1 = 0$, в обоих случаях соответствующие функционалы уклонений I и $\tilde{I}$ обращаются в нуль на функции, тождественно равной нулю.

Зафиксируем $0 \leq \tilde{\alpha} < \frac{1}{2} < \alpha < 1$. Рассмотрим множество

$$B := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0,1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < l \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\},$$

где константа $l > 0$ и фиксированные положительные константы a, b, m, p удовлетворяют неравенствам

$$b > a, \quad \frac{1}{2} \leq \frac{b-a}{am-bp} < \alpha.$$

Из леммы 5 (см. разд. 3) следует, что

$$\inf_{f \in B \cap C_{0,\alpha}[0,1]} \|f\|_\alpha > 0, \quad \inf_{f \in B \cap C_{0,\tilde{\alpha}}[0,1]} \|f\|_{\tilde{\alpha}} = 0.$$

Поэтому

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(s_n \in [B]_\alpha) < 0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}(\tilde{s}_n \in [B]_{\tilde{\alpha}}) \leq 0,$$

где $[B]_\alpha$, $[B]_{\tilde{\alpha}}$ — замыкания множества B в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, $(C_{0,\tilde{\alpha}}[0,1], \rho_{\tilde{\alpha}})$ соответственно, т. е. для последовательности s_n оценка сверху в п.б.у. на множестве B нетривиальна, а для последовательности $\tilde{s}_n$ тривиальна.

Таким образом, оба примера показывают, что чем больше значение $0 \leq \alpha < 1$, для которого удастся получить п.б.у., тем богаче класс множеств с нетривиальными оценками в п.б.у. Также отметим, что множество B типа приведенного в примере 2, рассматривалось ранее в работе [12].

В заключение этого раздела сделаем краткий обзор результатов, в которых изучались большие уклонения в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$. В [12] был получен п.б.у. и доказан закон повторного логарифма в форме Штрассена для винеровского процесса в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$; работы [13, 14] посвящены п.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений Ито в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$; в работе [15] был получен п.б.у. для решений стохастических дифференциальных уравнений Маккина–Власова в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, а также доказан закон повторного логарифма в форме Штрассена; в статье [16] изучались большие уклонения для дробных винеровских процессов заданных в м.п. $(C_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$, где допустимые значения α зависят от показателя Херста.

Оставшаяся часть работы состоит из двух разделов, содержащих доказательство основного результата и вспомогательные утверждения соответственно.

2. Доказательство основного результата

Сформулируем и докажем две важные леммы, которые являются основным инструментом доказательства теоремы 1.

Лемма 1. Пусть выполнены условия

(1) последовательность случайных элементов η_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_\mathbb{X})$ с н.ф. $\psi(n)$ и полунепрерывным снизу ф.у. J ;

(2) последовательность случайных элементов $\eta_n \in \mathbb{Y}$ п.н. и является э.п. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$ с н.ф. $\psi(n)$, где $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ и $\rho_\mathbb{Y}(f, g) \geq \rho_\mathbb{X}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{Y}$.

Тогда последовательность случайных элементов η_n удовлетворяет п.б.у. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$ с н.ф. $\psi(n)$ и плотным ф.у. J .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Отметим, что в формулировке леммы 1 изначально не требуется, чтобы ф.у. J был плотным, требуется только чтобы последовательность η_n удовлетворяла п.б.у. (т. е. должны выполняться неравенства (1.1), (1.2)). В этом случае ф.у. J всегда имеет полунепрерывную снизу модификацию (см., например, [2, замечание 3.1]). Также заметим, что в условиях леммы 1 нет никаких требований, касающихся полноты и сепарабельности м.п. $(\mathbb{X}, \rho_\mathbb{X})$ и $(\mathbb{Y}, \rho_\mathbb{Y})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что $J(f) = \infty$, если $f \notin \mathbb{Y}$. Для этого достаточно показать, что для таких f

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_\mathbb{X}(\eta_n, f) < \varepsilon) = -\infty. \quad (2.1)$$

Легко видеть, что

$$\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \leq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon, \eta_n \in K_C) + \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}), \quad (2.2)$$

где K_C — компакт в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ такой, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C.$$

Используя утверждение (ii) леммы 3 (см. разд. 3) и тот факт, что $f \notin K_C$, для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon, \eta_n \in K_C) = 0. \quad (2.3)$$

Из формул (2.2), (2.3) следует, что для любого $C > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \leq -C.$$

Предельный переход $C \rightarrow \infty$ завершает доказательство формулы (2.1).

Пусть теперь $f \in \mathbb{Y}$. Применяя условие $\rho_{\mathbb{Y}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{X}}(f, g)$, п.б.у. для η_n в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и полунепрерывность снизу функционала J , получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) \leq \varepsilon) \\ &\leq -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J(\{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \leq \varepsilon\}) = -J(f). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Осталось показать, что для $f \in \mathbb{Y}$ справедливо неравенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \geq -J(f). \quad (2.5)$$

Если $J(f) = \infty$, то очевидно, что неравенство (2.5) выполнено.

Пусть $J(f) < \infty$. Из утверждения (i) леммы 3 (см. разд. 3) следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $C > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) \\ &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) \geq \varepsilon) \\ &\geq \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon), \rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) \geq \varepsilon, \eta_n \in K_C) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}) \\ &= \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Используя формулу (2.6), п.б.у. для η_n в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и выбирая $C = 2J(f) + 1$, для любого $\varepsilon > 0$ получаем

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{Y}}(\eta_n, f) < \varepsilon) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln (\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) - \mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C})) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \left(\ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) + \ln \left(1 - \frac{\mathbf{P}(\eta_n \in \overline{K_C})}{\mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon))} \right) \right) \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\rho_{\mathbb{X}}(\eta_n, f) < \delta(\varepsilon)) \geq -J(f). \end{aligned}$$

Неравенство (2.5) доказано.

Из неравенств (2.1), (2.4), (2.5) следует, что выполнен слабый п.б.у. (см., например, [2, замечание 3.1,с)). Используя этот факт, э.п. последовательности η_n в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ и [3, теорема 2.19] (см. также [2, абзац перед леммой 3.5]), получаем п.б.у. для последовательности η_n в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ с н.ф. $\psi(n)$ и плотным ф.у. J . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Заметим, что если в формулировке леммы 1 условие (2) заменить условием

(2') последовательность случайных элементов η_n является э.п. в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ с н.ф. $\psi(n)$, где $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ и $\rho_{\mathbb{X}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{Y}}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{X}$, то утверждение этой леммы будет простым следствием из "contraction principle" (см., например, [1, теорема 4.2.1]).

Лемма 2. Пусть для любого $n \in \mathbb{N}$ траектория случайного процесса η_n принадлежит пространству $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ с вероятностью 1, $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi(n) = \infty$ и для любого $\varepsilon > 0$ выполнено равенство

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq \delta}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon \right) = -\infty. \quad (2.7)$$

Тогда последовательность η_n э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ с нормирующей функцией $\psi(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$g_n(\delta, \varepsilon) := \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq \delta}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon \right).$$

Из (2.7) и леммы 6 (см. разд. 3) или леммы 7 работы [17] следует, что для любых $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся $N(Q, \varepsilon) < \infty$ и $\delta(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \geq N(Q, \varepsilon)$, $h \in (0, \delta(\varepsilon, Q))$ выполняется

$$g_n(h, \varepsilon) \leq -Q; \quad (2.8)$$

так как $\eta_n \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ п.н. для любого фиксированного n , то для любого $1 \leq n < N(Q, \varepsilon)$ будем иметь

$$\lim_{h \downarrow 0} g_n(h, \varepsilon) = -\infty. \quad (2.9)$$

Из (2.8), (2.9) следует, что можно выбрать такое $\tilde{\delta}(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$, что для всех $h \in (0, \tilde{\delta}(\varepsilon, Q))$ неравенство (2.8) будет справедливо при всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. для всех $h \in (0, \tilde{\delta}(\varepsilon, Q))$ имеет место неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(h, \varepsilon) \leq -Q. \quad (2.10)$$

Покажем, что из неравенства (2.10) следует э.п. последовательности η_n . Рассмотрим последовательность $\varepsilon_r \downarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Из (2.10) следует, что для любых $C > 0$ и $\varepsilon_r \in (0, 1)$ найдется $h_r > 0$ такое, что

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} g_n(h_r, \varepsilon_r) \leq -rC. \quad (2.11)$$

Из неравенства (2.11) следует, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{P}\left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq h_r}} \frac{|\eta_n(v) - \eta_n(u)|}{|v - u|^\alpha} > \varepsilon_r\right) = e^{\psi(n)g_n(h_r, \varepsilon_r)} \leq e^{-Cr\psi(n)}. \quad (2.12)$$

Для определенной выше последовательности (ε_r, h_r) обозначим через K_C множество функций $f \in \mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1]$ таких, что для любого $r \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v - u| \leq h_r}} \frac{|f(v) - f(u)|}{|v - u|^\alpha} \leq \varepsilon_r.$$

Используя аналог теоремы Арцела — Асколи для пространства $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ (см. разд. 3, теорема 2) и учитывая тот факт, что множество K_C замкнутое в этом пространстве, можем заключить, что K_C — компакт в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$.

Применяя неравенство (2.12), получаем

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \mathbf{P}(\eta_n \notin K_C) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \left(\sum_{r=1}^{\infty} e^{-Cr\psi(n)} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\psi(n)} \ln \left(\frac{e^{-C\psi(n)}}{1 - e^{-C\psi(n)}} \right) = -C. \quad \square \end{aligned}$$

Перейдем к доказательству основного результата.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Утверждение (0) не является новым. Оно приведено для удобства читателя по двум причинам: во-первых, мы будем использовать этот результат для доказательства утверждений (1.3), (2.3), и (3.3); во-вторых, для того, чтобы было понятнее, чем результат текущей работы отличается от ранее полученных результатов, связанных с рассматриваемой тематикой. Утверждения (0.1), (0.3) следуют из теоремы 2.4 работы [7] (см. также [6, гл. 4, теорема 4.4.2]); результат (0.2) содержится, например, в [6, гл. 1, утверждение Л6)].

Докажем утверждение (1.2). Из условия $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$ и леммы 4 следует, что найдется $l > 0$ такое, что для всех $a \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{aX_1} \leq 2 \exp\{b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + l\}, \quad (2.13)$$

где $b_\kappa = \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

Рассмотрим случай, когда $x \rightarrow \infty$. Используя формулу (2.13) и тот факт, что если для всех $a \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $A(a) \leq g(a)$, то для преобразований Лежандра от функций A и g справедливы обратные неравенства (см., например, [18, разд. 3.3]), для $x \geq 0$ получаем

$$\begin{aligned} \Lambda(x) &= \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - A(a)) \geq \sup_{a \in \mathbb{R}} (ax - \tilde{l} - b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}) \\ &= \sup_{a \geq 0} (ax - \tilde{l} - b_\kappa |a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}) = \sup_{a \geq 0} (ax - \tilde{l} - b_\kappa a^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}), \quad (2.14) \end{aligned}$$

где $\tilde{l} := l + \ln 2$.

Применяя неравенство (2.14) и стандартные методы дифференциального исчисления, получаем для $x \geq 0$

$$\Lambda(x) \geq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa b_\kappa} \right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \right) x^\kappa - \tilde{l}. \quad (2.15)$$

Откуда следует утверждение (1.2) для случая, когда $x \rightarrow \infty$. Случай $x \rightarrow -\infty$ рассматривается аналогичным образом.

Докажем утверждение (2.2). Из условия $[\mathbf{CL}_{\kappa, \infty}]$ и следствия 1 вытекает, что для любого $\gamma > 0$ найдется $l_\gamma > 0$ такое, что для всех $a \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{aX_1} \leq 2 \exp\{\gamma|a|^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + l_\gamma\}. \quad (2.16)$$

Поэтому, используя неравенство (2.16) и приведенные выше рассуждения, получим для любого фиксированного $\gamma > 0$ и достаточно больших $x \geq 0$

$$\Lambda(x) \geq \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right) x^\kappa - \tilde{l}_\gamma \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right) x^\kappa,$$

где $\tilde{l}_\gamma := l_\gamma + \ln 2$.

Следовательно, для любого $\gamma > 0$ будем иметь

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(x)}{x^\kappa} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa-1}{\kappa\gamma}\right)^{\kappa-1} \left(1 - \frac{\kappa-1}{\kappa}\right).$$

Предельный переход $\gamma \rightarrow 0$ завершает доказательство утверждения (2.2) для случая, когда $x \rightarrow \infty$. Случай $x \rightarrow -\infty$ рассматривается аналогичным образом.

Если выполнено условие $[\mathbf{CL}_{\infty, \infty}]$, то неравенство (2.15) выполнено для любого $\kappa > 1$. Следовательно справедливо утверждение (3.2).

Далее будем использовать следующий план доказательства: вначале с помощью леммы 2 докажем, что случайная последовательность s_n э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0, \alpha}[0, 1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ (для α , соответствующих утверждениям (1.3), (2.3), (3.3)); затем, применяя лемму 1 и утверждение (0.3), получим соответствующие случаям (1.3), (2.3), (3.3) п.б.у.

Перейдем к доказательству э.п. последовательности s_n . Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, 1)$ и оценим сверху

$$\mathbf{P}_{n, \varepsilon, \delta} := \mathbf{P} \left(\sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ 0 < |v-u| \leq \delta}} \frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right).$$

Пусть $u, v \in [0, 1]$. Легко видеть, что если $0 < |v-u| \leq \frac{1}{n}$, то

$$\frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| \cdot |v-u|}{|v-u|^\alpha} = |v-u|^{1-\alpha} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k|; \quad (2.17)$$

если для некоторого $2 \leq r < n$ выполнено неравенство $\frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}$, то

$$|s_n(v) - s_n(u)| \leq \frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|). \quad (2.18)$$

Используя формулы (2.17), (2.18) и тот факт, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены, получаем для достаточно малых $\delta \in (0, 1)$ и достаточно больших n

$$\mathbf{P}_{n, \varepsilon, \delta} \leq \mathbf{P} \left(\bigcup_{r=1}^{[\delta n]+1} \left\{ \sup_{\substack{u, v \in [0, 1]: \\ \frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}}} \frac{|s_n(v) - s_n(u)|}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right\} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \leq \mathbf{P}\left(\sup_{\substack{u,v \in [0,1]: \\ 0 < |v-u| \leq \frac{1}{n}}} |v-u|^{1-\alpha} \max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > \varepsilon\right) \\
& + \mathbf{P}\left(\bigcup_{r=2}^{[\delta n]+1} \left\{ \sup_{\substack{u,v \in [0,1]: \\ \frac{r-1}{n} < |v-u| \leq \frac{r}{n}}} \frac{\frac{1}{n} \max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|)}{|v-u|^\alpha} > \varepsilon \right\}\right) \\
& \leq \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} |X_k| > n^{1-\alpha} \varepsilon\right) + \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}\left(\max_{1 \leq j \leq n-r} (|X_j| + \dots + |X_{j+r}|) > (r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \\
& \leq n \mathbf{P}(|X_1| > n^{1-\alpha} \varepsilon) + n \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}\left(\sum_{k=1}^{1+r} |X_k| > (r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \\
& =: n \mathbf{P}_1 + n \sum_{r=2}^{[\delta n]+1} \mathbf{P}_r, \quad (2.19)
\end{aligned}$$

здесь и далее $[a] := \max\{b \in \mathbb{Z} : b \leq a\}$.

Применяя лемму 4 (см. разд. 3), неравенство Чебышева и тот факт, что случайные величины $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаковы распределены, для любых достаточно малых $\delta \in (0, 1)$, $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$ и всех достаточно больших $C > 0$ будем иметь

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &= \mathbf{P}\left(C \sum_{k=1}^{1+r} |X_k| > C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbf{E} \exp\left\{C \sum_{k=1}^{1+r} |X_k|\right\}}{\exp\{C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\}} \\
&= \frac{(\mathbf{E} \exp\{C|X_1|\})^{1+r}}{\exp\{C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\}} \leq \exp\{(r+1)(b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \ln 2) - C(r-1)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\} \\
&\leq \exp\left\{2r(b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} + \ln 2) - Cr^\alpha \left(1 - \frac{1}{r}\right)^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon\right\} \\
&\leq \exp\left\{4rb_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{Cr^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon}{2}\right\}, \quad (2.20)
\end{aligned}$$

где, напомним, $b_\kappa = \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

Рассмотрим случай, когда $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$. Выберем

$$C = \frac{1}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \left(\frac{n}{r}\right)^\alpha.$$

Используя формулу (2.20), для любых $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$, $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$, достаточно малых $0 < \delta \leq \left(\frac{\varepsilon}{32b_\kappa}\right)^{\frac{\kappa}{(1-\alpha)\kappa-1}}$ и $n > \frac{1}{\delta}$ получаем

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &\leq \exp\left\{\frac{4rb_\kappa}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \left(\frac{n}{r}\right)^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} - \left(\frac{n}{r}\right)^\alpha \frac{r^\alpha n^{1-\alpha} \varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{4r^{1-\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}}}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\} \\
&\leq \exp\left\{4([\delta n] + 1)^{1-\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n^{\frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}}}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}}\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \exp \left\{ 4 \left(\delta + \frac{1}{n} \right)^{1 - \frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa-1}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \\
&\leq \exp \left\{ 4(2\delta)^{1 - \frac{\alpha\kappa}{\kappa-1}} b_\kappa \frac{n}{\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa-1}}} - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \leq \exp \left\{ 8b_\kappa n - \frac{n\varepsilon}{2\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \\
&\leq \exp \left\{ 8b_\kappa n - \left(\frac{n\varepsilon}{4\frac{\varepsilon}{32b_\kappa}} + \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right) \right\} \leq \exp \left\{ - \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\}. \quad (2.21)
\end{aligned}$$

Полностью аналогичными рассуждениями, которые мы опускаем, можно получить такую же оценку сверху для $\mathbf{P}_1$.

Из формул (2.19), (2.21) следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_{n,\varepsilon,\delta} &\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(n^2 \exp \left\{ - \frac{n\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} \right\} \right) \\
&= - \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\varepsilon}{4\delta^{\frac{(1-\alpha)\kappa-1}{\kappa}}} = -\infty. \quad (2.22)
\end{aligned}$$

Применяя формулу (2.22) и лемму 2, завершаем доказательство э.п. последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ в случае, когда $0 \leq \alpha < \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,0}]$.

Пусть теперь $\alpha = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$. В этом случае можно выбрать любое фиксированное $\lambda > 0$. Положим

$$C = \left(\frac{n}{r} \right)^\alpha \frac{C_1}{\varepsilon} = \left(\frac{n}{r} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{C_1}{\varepsilon}, \quad \lambda = \frac{16^{\kappa-1} C_1}{\varepsilon^\kappa},$$

где константа $C_1 > 0$.

Из формулы (2.20) следует, что для любых $2 \leq r \leq [\delta n] + 1$, достаточно малых $\delta > 0$ и достаточно больших n справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_r &\leq \exp \left\{ 4b_\kappa n \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{C_1 n}{2} \right\} \\
&= \exp \left\{ 4 \left(16^{\kappa-1} \frac{C_1}{\varepsilon^\kappa} \right)^{-\frac{1}{\kappa-1}} n \left(\frac{C_1}{\varepsilon} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - \frac{C_1 n}{2} \right\} \\
&= \exp \left\{ \frac{C_1 n}{4} - \frac{C_1 n}{2} \right\} = \exp \left\{ - \frac{C_1 n}{4} \right\}. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Оценка сверху для $\mathbf{P}_1$ получается аналогичным образом.

Используя формулы (2.19), (2.23), для любых $\varepsilon > 0$, $C_1 > 0$ получаем

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \mathbf{P}_{n,\varepsilon,\delta} \leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(n^2 \exp \left\{ - \frac{C_1 n}{4} \right\} \right) = - \frac{C_1}{4}.$$

Делая предельный переход $C_1 \rightarrow \infty$ и применяя лемму 2, завершаем доказательство э.п. последовательности s_n в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ для случая, когда $\alpha = \frac{\kappa-1}{\kappa}$ и случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$.

В случае, когда случайная величина X_1 удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\infty,\infty}]$, приведенные выше рассуждения верны для любого $\alpha \in [0,1)$. Следовательно, в этом случае последовательность s_n является э.п. в м.п. $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ с н.ф. $\psi(n) = n$ для любого $\alpha \in [0,1)$.

Теперь, когда э.п. последовательности s_n доказана для всех случаев (1)–(3), осталось применить утверждение (0.3) и лемму 1 и тем самым завершить доказательство утверждений (1.3), (2.3), (3.3).

Утверждения (1.1), (2.1), (3.1) являются следствиями полученных п.б.у. (см., например, [1, лемма 1.2.18]). $\square$

3. Вспомогательные результаты

Лемма 3. Пусть м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$ и $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ удовлетворяют условиям

- (1) $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$;
- (2) $\rho_{\mathbb{Y}}(f, g) \geq \rho_{\mathbb{X}}(f, g)$ для любых $f, g \in \mathbb{Y}$.

Тогда

(i) для любой фиксированной функции $f \in \mathbb{Y}$, фиксированного множества K , которое компактно в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ и фиксированной константы $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\mathcal{H} := \{g \in \mathbb{Y} : \rho_{\mathbb{Y}}(g, f) \geq \varepsilon\} \cap K \subseteq \{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \geq \delta(\varepsilon)\}; \quad (3.1)$$

(ii) для любой фиксированной функции $f \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$, фиксированного множества K , которое компактно в м.п. $(\mathbb{Y}, \rho_{\mathbb{Y}})$ найдется $\delta > 0$ такое, что

$$K \subseteq \{g \in \mathbb{X} : \rho_{\mathbb{X}}(g, f) \geq \delta\}.$$

Доказательство. Докажем утверждение (i). Если $\mathcal{H} = \emptyset$, то очевидно, что формула (3.1) верна для любого $\delta(\varepsilon) > 0$.

Пусть $\mathcal{H} \neq \emptyset$. Используем метод доказательства от противного. Допустим, что утверждение леммы неверно, тогда найдется последовательность элементов $g_m \in \mathcal{H}$ такая, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{X}}(g_m, f) = 0. \quad (3.2)$$

В силу того, что K — компакт, а множество $\{g : \rho_{\mathbb{Y}}(g, f) \geq \varepsilon\}$ замкнутое, множество $\mathcal{H}$ также будет компактом. Следовательно найдутся подпоследовательность m_r и элемент $\tilde{g} \in \mathcal{H}$ такие, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{Y}}(g_{m_r}, \tilde{g}) = 0.$$

Так как $\rho_{\mathbb{Y}}(g_{m_r}, \tilde{g}) \geq \rho_{\mathbb{X}}(g_{m_r}, \tilde{g})$, то

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \rho_{\mathbb{X}}(g_{m_r}, \tilde{g}) = 0.$$

Элемент $\tilde{g}$ принадлежит $\mathcal{H}$, а следовательно, $\tilde{g} \neq f$, что противоречит равенству (3.2).

Докажем утверждение (ii). В силу неравенства $\rho_{\mathbb{Y}}(g_1, g_2) \geq \rho_{\mathbb{X}}(g_1, g_2)$, $g_1, g_2 \in \mathbb{Y}$, множество K также будет компактом в м.п. $(\mathbb{X}, \rho_{\mathbb{X}})$. Поэтому в силу того, что $f \notin K$, имеем

$$\inf_{g \in K} \rho_{\mathbb{X}}(g, f) > 0. \quad \square$$

Лемма 4. Пусть $h := \mathbf{E}e^{\lambda|X|^\kappa} < \infty$, где $\lambda > 0$, $\kappa > 1$ — фиксированные константы. Тогда для всех достаточно больших $C > 0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{C|X|} \leq 2 \exp\{b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\},$$

где $b_\kappa := \lambda^{-\frac{1}{\kappa-1}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что для всех достаточно больших $C > 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}e^{C|X|} &= \int_0^\infty e^{Ct} dF(t) = \int_0^{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} e^{Ct} dF(t) + \int_{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}^\infty e^{Ct-\lambda t^\kappa} e^{\lambda t^\kappa} dF(t) \\ &\leq \exp\left\{\frac{C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\lambda^{\frac{1}{\kappa-1}}}\right\} \int_0^{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}} dF(t) + \int_{\left(\frac{C}{\lambda}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}}^\infty e^{\lambda t^\kappa} dF(t) \\ &\leq \exp\left\{\frac{C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}{\lambda^{\frac{1}{\kappa-1}}}\right\} + h \leq 2 \exp\left\{b_\kappa C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right\}, \end{aligned}$$

здесь $F(t)$ — функция распределения случайной величины $|X|$. $\square$

Следствие 1. Если случайная величина X удовлетворяет условию $[\mathbf{CL}_{\kappa,\infty}]$, то для любого фиксированного $\gamma > 0$ найдется C_γ такое, что для всех $C \geq C_\gamma$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E}e^{C|X|} \leq 2 \exp\left\{\gamma C^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}\right\}.$$

Лемма 5. Пусть $0 \leq \tilde{\alpha} < \alpha < 1$ и для положительных констант a, b, m, p выполнены неравенства

$$b > a, \quad \tilde{\alpha} < \frac{b-a}{am-bp} < \alpha. \quad (3.3)$$

Тогда

- (1) $\inf_{f \in B \cap \mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]} \|f\|_\alpha > 0$,
- (2) $\inf_{f \in B \cap \mathbb{C}_{0,\tilde{\alpha}}[0,1]} \|f\|_{\tilde{\alpha}} = 0$, где

$$B := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0,1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < l \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\}, \quad l > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что если $u \in B$, то $v := c \cdot u \in B'$, где $c = l^{\frac{a}{am-bp}}$,

$$B' := \left\{ f \in \mathbb{C}_0[0,1] : \left(\int_0^1 |f(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} < \int_0^1 |f(s)|^m ds \right\}.$$

Поэтому далее, не теряя общности, будем полагать, что $l = 1$.

Докажем утверждение (1). Будем использовать метод доказательства от противного. Предположим, что это утверждение леммы 5 неверно. Тогда найдется последовательность функций $f_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_\alpha = 0.$$

В этом случае для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n \geq n_\varepsilon$ выполнены неравенства

$$\sup_{t \in [0,1]} |f_n(t)| \leq \varepsilon, \quad (3.4)$$

$$|f_n(t) - f_n(s)| \leq |t - s|^\alpha, \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \quad (3.5)$$

Положим $|f_n|_{\max} := \max_{t \in [0,1]} |f_n(t)|$,

$$\mu_k := \mu \left(\left\{ t \in [0,1] : |f_n(t)| \in \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k}, \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}} \right] \right\} \right),$$

где μ — мера Лебега, $k \in \mathbb{N}$.

Используя тот факт, что $\frac{b}{a} > 1$, получаем

$$\left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} \geq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^p}{2^{kp}} \mu_k \right)^{\frac{b}{a}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k^{\frac{b}{a}}. \quad (3.6)$$

Обозначим $t_k := \min \{ t \in [0,1] : |f_n(t)| = \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}} \}$, $k \in \mathbb{N}$. Так как функция $|f_n|$ стартует из нуля, то из неравенства (3.5) следует, что для всех $t \in (t_k - (\frac{|f_n|_{\max}}{2^k})^{\frac{1}{\alpha}}, t_k]$ и $n \geq n_\varepsilon$ выполнено соотношение $|f_n(t)| \in (\frac{|f_n|_{\max}}{2^k}, \frac{|f_n|_{\max}}{2^{k-1}}]$. Поэтому для $n \geq n_\varepsilon$ будем иметь

$$\mu_k \geq \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.7)$$

Применяя неравенства (3.6), (3.7), для $n \geq n_\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k \mu_k^{\frac{b}{a}-1} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a}}}{2^{\frac{kpb}{a}}} \mu_k \left(\frac{|f_n|_{\max}}{2^k} \right)^{\frac{b-a}{a\alpha}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^{\frac{pb}{a} + \frac{b-a}{a\alpha}}}{2^{\frac{kpb}{a} + \frac{k(b-a)}{a\alpha}}} \mu_k. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Положим $c := \frac{pb}{a} + \frac{b-a}{a\alpha}$. Из неравенств (3.3) следует, что

$$c < \frac{pb}{a} + \frac{am - bp}{a} = m. \quad (3.9)$$

Используя формулы (3.4), (3.8), (3.9) и определение множества B , для любых $\varepsilon \in (0, 2^{-\frac{c}{m-c}}]$, $n \geq n_\varepsilon$ будем иметь

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(s)|^m ds &> \left(\int_0^1 |f_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} \geq \frac{1}{2^c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^c}{2^{c(k-1)}} \mu_k \\ &\geq \frac{1}{2^c |f_n|_{\max}^{m-c}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^m}{2^{m(k-1)}} \mu_k \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|f_n|_{\max}^m}{2^{m(k-1)}} \mu_k \geq \int_0^1 |f_n(s)|^m ds. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство утверждения (1).

Докажем утверждение (2). Положим $h := \frac{1}{2}(\frac{b-a}{am-bp} + \tilde{\alpha})$ и определим последовательность функций

$$g_n(t) := \begin{cases} t^h, & \text{если } t \in [0, \beta_n], \\ (2\beta_n - t)^h, & \text{если } t \in (\beta_n, 2\beta_n], \\ 0, & \text{если } t \in (2\beta_n, 1], \end{cases}$$

где последовательность β_n такова, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |g_n(s)|^p ds \right)^{\frac{b}{a}} &= \left(2 \int_0^{\beta_n} s^{hp} ds \right)^{\frac{b}{a}} = \left(\frac{2}{1+hp} \beta_n^{1+hp} \right)^{\frac{b}{a}} = \left(\frac{2}{1+hp} \right)^{\frac{b}{a}} \beta_n^{\frac{b+hp b}{a}}, \\ \int_0^1 |g_n(s)|^m ds &= 2 \int_0^{\beta_n} s^{hm} ds = \frac{2}{1+hm} \beta_n^{1+hm}. \end{aligned}$$

Используя условие (3.3), сравним степени у β_n :

$$\begin{aligned} \frac{b+hp b}{a} - 1 - hm &= \frac{b}{a} + \frac{b-a}{2a(am-bp)}pb + \frac{\tilde{\alpha}bp}{2a} - 1 - \frac{b-a}{2(am-bp)}m - \frac{m\tilde{\alpha}}{2} \\ &= \frac{b-a}{2a} - \tilde{\alpha} \frac{ma-bp}{2a} > \frac{b-a}{2a} - \frac{b-a}{ma-bp} \frac{ma-bp}{2a} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\frac{b+hp b}{a} > 1 + hm$, а следовательно, в силу условия $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ при всех достаточно больших n будем иметь $g_n \in B$. Осталось заметить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_{\tilde{\alpha}} = 0$. $\square$

Для удобства читателя приведем лемму 2.3 статьи [17] и теорему 1.1 работы [13] (аналог теоремы Арцела — Асколи для пространства $(\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$).

Лемма 6. Пусть последовательность функций $g_n(\delta, \varepsilon)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяет условиям:

(1) для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(\delta, \varepsilon) = -\infty;$$

(2) для любых $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$, $\delta \in (0, 1)$, $h \in (0, \delta)$

$$g_n(\delta, \varepsilon) \geq g_n(h, \varepsilon).$$

Тогда для любых $Q > 0$, $\varepsilon > 0$ найдутся $N(Q, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ и $\delta(\varepsilon, Q) \in (0, 1)$ такие, что для всех $n \geq N(Q, \varepsilon)$, $h \in (0, \delta(\varepsilon, Q))$ выполняется

$$g_n(h, \varepsilon) \leq -Q.$$

Теорема 2. Множество функций $K \subseteq (\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1], \rho_\alpha)$ относительно компактно тогда и только тогда, когда

(1) $\sup_{f \in K} \|f\| < \infty$;

(2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\sup_{f \in K} \sup_{\substack{s, t \in [0,1], \\ 0 < |t-s| \leq \delta(\varepsilon)}} \frac{|f(t) - f(s)|}{|t-s|^\alpha} < \varepsilon.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В формулировке теоремы 2 в силу того, что все функции пространства $\mathbb{C}_{0,\alpha}[0,1]$ стартуют из нуля, условие (1) следует из условия (2). Мы записали эту теорему в приведенном выше виде, следуя работе [13], в ней рассматривалось пространство функций, удовлетворяющих условию (1.5), которые стартуют из произвольной точки.

Благодарности. Автор благодарит анонимного рецензента за ценные советы по улучшению изложения и устранению неточностей. В частности, именно благодаря рецензенту в работу был добавлен пример 2, исправлены формулировка и доказательство леммы 2 и расширен литературный обзор. Также автор благодарит А. А. Могульского, который обратил внимание на важность утверждений (1.2)–(3.2) теоремы 1 (в первоначальном варианте работы этих утверждений не было).

ЛИТЕРАТУРА

1. Dembo A., Zeitouni O. Large deviations techniques and applications. New York: Springer-Verl., 1998.
2. Feng J., Kurtz T. G. Large deviations for stochastic processes. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2006.
3. Rassoul-Agha F., Seppäläinen T. A course on large deviations with an introduction to Gibbs measures. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2015.
4. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1967. Т. 12, № 4. С. 635–654.
5. Могульский А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 309–323.
6. Borovkov A. A. Asymptotic analysis of random walks: Light-tailed distributions. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2020.
7. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. I // Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 4. С. 627–655.
8. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. II // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Т. 57, № 1. С. 3–34.
9. Боровков А. А., Могульский А. А. Принципы больших отклонений для траекторий случайных блужданий. III // Теория вероятностей и ее применения. 2013. Т. 58, № 1. С. 37–52.
10. Vysotsky V. Contraction principle for trajectories of random walks and Cramér's theorem for kernel-weighted sums // ALEA, Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. 2021. V. 18, N 2. P. 1103–1125.
11. Ciesielski Z. On the isomorphisms of the spaces H_α and m // Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 1960. V. 8, N 4. P. 217–222.
12. Baldi P., Ben Arous G., Kerkycharian G. Large deviations and the Strassen theorem in Hölder norm // Stochastic Processes and their Applications. 1992. V. 42, N 1. P. 271–180.
13. Hu Y.-J. A large deviation principle for small perturbations of random evolution equations in Hölder norm // Stochastic Processes and their Applications. 1997. V. 68, N 1. P. 83–99.
14. Mellouk M. A large-deviation principle for random evolution equations // Bernoulli. 2000. V. 6, N 6. P. 977–999.
15. Reis G.D., Salkeld W., Tugaut J. Freidlin–Wentzell LDP in path space for McKean–Vlasov equations and the functional iterated logarithm law // Ann. Appl. Probab. 2019. V. 29, N 3. P. 1487–1540.
16. Friz P., Victoir N. Large deviation principle for enhanced Gaussian processes // Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 2007. V. 43, N 6. P. 775–785.
17. Logachov A. V., Mogulskii A. A. Exponential tightness for integral-type functionals of centered independent differently distributed random variables // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 1. P. 273–284.

-
18. Borwein J. M., Lewis A. S. Convex analysis and nonlinear optimization. Theory and examples. New York: Springer-Verl., 2006.

Поступила в редакцию 18 сентября 2025 г.

После доработки 30 марта 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Логачев Артем Васильевич (ORCID 0000-0002-0605-8831)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

omboldovskaya@mail.ru