

УДК 512.54

ОБ УСЛОВИЯХ КОНЕЧНОСТИ ДЛЯ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАМИ ПОРЯДКА 3

Б. Ли, Ч. Сюй, Б. Е. Дураков,
А. С. Мамонтов

Аннотация. Пусть D — класс сопряженных элементов порядка 3 в группе, причем любые два элемента из D порождают гомоморфный образ $SL(2, 3)$, $SL(2, 5)$ либо экстраспециальную группу периода 3 и порядка 27. Основное внимание в работе уделяется описанию групп, порожденных тремя элементами из D , два из которых коммутируют.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.514

Ключевые слова: локально конечная группа, класс сопряженных элементов порядка 3.

1. Введение

В теории конечных групп есть целый ряд замечательных результатов, где описываются подгруппы, порожденные классом сопряженности C , исходя из ограничений на подгруппы, порожденные двумя элементами из C . Например, теорема Бэра — Сузуки гласит, что класс сопряженности C в конечной группе порождает нильпотентную подгруппу, если любые два элемента из C порождают нильпотентную подгруппу. Вообще говоря, интересно, какие из подобных результатов о конечных группах можно распространить на более широкие классы групп. Другими словами, какие из условий на подгруппы, порожденные двумя элементами из C , являются хорошими условиями конечности, например, обеспечивают локальную конечность группы $\langle C \rangle$. Так, известно, что группы 3-транспозиций являются локально конечными [1]. А вот в теореме Бэра — Сузуки нельзя так просто отказаться от условия конечности группы: см. обсуждение в работе [2].

Более конкретно, статья посвящена развитию следующей программы исследований в этом направлении.

Пусть $\mathfrak{M}$ — некоторое множество групп. Будем говорить, что G является $\mathfrak{M}$ -группой, если G порождается классом D сопряженных элементов порядка 3 таким, что любая пара элементов из D порождает подгруппу, являющуюся гомоморфным образом некоторой группы из $\mathfrak{M}$. Например, знакопеременная группа $A_n = \langle (1, 2, 3)^{A_n} \rangle$ является $\mathfrak{M}_0 = \{3^2, A_4, A_5\}$ -группой, поскольку она порождается тройными циклами и два различных тройных цикла либо не имеют

The research was supported by NNSF of P. R. China (Grant 12371021). The last author was supported by the Mathematical center in Akademgorodok under the agreement No. 075-15-2025-348 with the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation.

общих элементов и коммутируют, либо содержат два общих элемента и порождают A_4 , либо содержат один общий элемент и порождают A_5 . Отметим, что если G является $\mathfrak{M}$ -группой, то любой ее гомоморфный образ также является $\mathfrak{M}$ -группой.

Для $\mathfrak{M}_1 = \{3^2, SL_2(3)\}$ и $\mathfrak{M}_2 = \{3^2, SL_2(3), A_5\}$ конечные $\mathfrak{M}_i$ -группы изучались в работах [3, 4] соответственно. Одной из мотиваций было наблюдение о том, что группа Конвея, являющаяся группой автоморфизмов 24-мерной решетки Лича, оказывается $\mathfrak{M}_3 = \{3^2, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группой [3].

Приведем еще несколько интересных серий примеров. Группа $PSL_n(3)$ является $\{3^{1+2}, SL_2(3)\}$ -группой (см. пример 1). В группе 3-транспозиций симплектического типа класс элементов порядка 3, инвертируемых 3-транспозициями, порождает $\mathfrak{M}_2$ -группу (см. пример 2).

В связи с этим интересно ввести класс групп $\mathfrak{M}_4 = \{3^{1+2}, SL_2(3), SL_2(5)\}$, который содержит все рассматриваемые выше классы. Нас интересует

Вопрос i. Является ли $\mathfrak{M}_i$ -группа локально конечной ($i = 0, \dots, 4$)?

Для $i = 0$ положительный ответ на вопрос получен в работе [5]. Для $i = 3, 4$ интересно также получить описание конечных $\mathfrak{M}_i$ -групп. Также отметим, что в [6] описаны $\{3, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группы.

Цель настоящей работы — начать систематическое изучение этих групп. В работе описываются подгруппы, порожденные тремя элементами x, y, z из D для самого общего класса $\mathfrak{M}_4$ -групп при условиях $xy = yx$ и $y \notin \langle x, z \rangle$ в зависимости от изоморфного типа группы $\langle x, z \rangle$. В некотором смысле мы надеемся таким образом охватить большой объем единообразной, но необходимой технической работы. В дальнейшем предполагается продолжать рассмотрение более частных случаев, используя эти наработки.

2. Обозначения и примеры

Цель данного раздела — описать нужные нам свойства подгрупп из $\mathfrak{M}_i$ и ввести обозначения. Большинство утверждений данного раздела хорошо известны, поэтому доказательства часто опускаются.

Будем использовать следующие обозначения для групп: p^n — элементарная абелева группа порядка p^n ; S_n, A_n — симметрическая и знакопеременная группы подстановок степени n соответственно.

Пусть a и b — элементы некоторой группы G . Будем писать:

$a \equiv b$, если порядки элементов a и b равны;

$[a, b]$ для обозначения коммутатора $a^{-1}b^{-1}ab$ элементов a и b ;

$a \sim b$, если выполнены соотношения $aba = bab$ и $a^3 = b^3 = 1$;

$a \square b$, если $a^3 = b^3 = (ab)^5 = (a^b a)^2 = 1$;

$a \triangle b$, если $ababa = babab$; $ab^{-1}ab^{-1}a = b^{-1}ab^{-1}ab^{-1}$ и $a^3 = b^3 = 1$;

$a \sharp b$, если $a^3 = b^3 = (ab)^3 = (ab^{-1})^3 = 1$.

Говоря о вычислениях, мы подразумеваем вычисления в GAP [7] по алгоритму перечисления смежных классов. Для группы G , заданной набором порождающих и определяющих соотношений, и ее подгруппы H алгоритм, закончив работу, возвращает индекс $|G : H|$, в частности, доказывает в этом случае его конечность, а также подстановочное представление группы G с ядром $\text{core}_G(H) = \bigcap_{g \in G} H^g$.

Далее $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_4 = \{3^{1+2}, SL_2(3), SL_2(5)\}$. Известные свойства групп из $\mathfrak{M}$ перечислены в следующих трех леммах.

Лемма 1. Пусть $K = \langle a, b \mid a \sim b \rangle$. Тогда $K \simeq SL_2(3)$. Центр $Z(K) = \langle (ab^{-1})^2 \rangle$ имеет порядок 2 и $K/Z(K) \simeq A_4$. В группе K два класса сопряженных элементов порядка 3: $C = \{a, b, a^b, b^a\}$ и C^{-1} . Если a и b — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(3)$, то либо $a \sim b$, либо $a \sim b^{-1}$.

Действительно, матрицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из $SL_2(3)$ удовлетворяют соотношениям $a \sim b$ и $(ab^{-1})^2 = -E$. Следовательно, группа $SL_2(3)$ является гомоморфным образом K . Вычисления показывают, что порядок K равен 24. Таким образом, $K \simeq SL_2(3)$. Остальные утверждения леммы проверяются вычислениями в матрицах.

Лемма 2. Пусть $K = \langle a, b \mid a \triangle b \rangle$. Тогда $K \simeq SL_2(5)$. Центр $Z(K) = \langle (ab)^5 \rangle$ имеет порядок 2 и $K/Z(K) \simeq A_5$. В группе K все 20 элементов порядка 3 сопряжены: это $a, b, x_1 = a^b, x_2 = b^a, x_3 = a^{ba}, x_4 = a^{ba^2}, x_5 = a^{b^2a}, x_6 = a^{b^2a^2}, x_7 = a^{bab}, x_8 = a^{b^2}$ и обратные к ним. Если a и b — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(5)$, то $a \triangle b$. Если a и b — элементы порядка 3, порождающие A_5 , то $a \square b$; и наоборот, группа $\langle a, b \mid a \square b \rangle$ изоморфна A_5 .

Действительно, матрицы

$$a = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

из $SL_2(5)$ удовлетворяют соотношениям $a \triangle b$. Далее можно рассуждать так же, как при доказательстве леммы 1. Также эти матрицы удовлетворяют соотношению $a^{-1} \sim a^b$, т. е. справедливо

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $a \triangle b$, то $a^{-1} \sim a^b$ и $\langle a, a^b \rangle \simeq SL_2(3)$.

Следующее утверждение хорошо известно

Лемма 3. Пусть $K = \langle u, v \mid u \sharp v \rangle$. Тогда $K \simeq 3^{1+2}$ — экстраспециальная группа периода 3 и порядка 3^3 : центр $Z(K) = \langle [u, v] \rangle$ имеет порядок 3 и $K/Z(K)$ — абелева группа. Наоборот, если u и v — не коммутирующие элементы из K , то они порождают K и $u \sharp v$.

Приведем примеры, где вводятся обозначения и описываются некоторые $\mathfrak{M}$ -группы.

ПРИМЕР 1. $PSL_n(3)$ является $\{3^{1+2}, SL_2(3)\}$ -группой. Точнее, две трансвекции в $PSL_n(3)$ порождают подгруппу, являющуюся гомоморфным образом группы 3^{1+2} либо изоморфную группе $SL_2(3)$.

Действительно, пусть V — соответствующее пространство, а $t = t_1$ и t_2 — две трансвекции, порождающие различные циклические подгруппы. По определению это означает, что $[V, t]$ одномерно и содержится в $C_V(t)$. С точностью до перестановки имеет место один из следующих случаев:

- 1) $[V, t_1] \subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \subseteq C_V(t_1)$; тогда $\langle t_1, t_2 \rangle \simeq 3^2$;
- 2) $[V, t_1] \not\subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \not\subseteq C_V(t_1)$; тогда $\langle t_1, t_2 \rangle$ содержится в $SL([V, t_1] \oplus [V, t_2]) \simeq SL_2(3)$;
- 3) $[V, t_1] \subseteq C_V(t_2)$ и $[V, t_2] \not\subseteq C_V(t_1)$; тогда $[t_1, t_2]$ тоже трансвекция, поэтому в этом случае $\langle t_1, t_2 \rangle \simeq 3^{1+2}$.

ПРИМЕР 2. Заметим, что если G является группой 3-транспозиций типа S_4 [8] (также говорят, что она имеет симплектический тип), т. е. транспозиции не порождают $3^2 : 2$ или $3^{1+2} : 2$, то любая пара элементов порядка 3 из

G , инвертируемых 3-транспозициями, либо коммутирует, либо порождает подгруппу, изоморфную A_4 , A_5 или $SL_2(3)$. Действительно, пусть x и y — такие элементы порядка 3, обозначим через $a, b = ax$, c и $d = ay$ соответственно пары 3-транспозиций, которые их инвертируют. По лемме 2.6 из [8] группа $\langle a, b, c, d \rangle$ — это либо S_5 , либо фактор $W^*(D_4)$. В этих группах некоммутирующие x и y порождают A_4 , A_5 или $SL_2(3)$.

ПРИМЕР 3. $3^{1+2} : SL_2(3)$.

Пусть u и v порождают группу 3^{1+2} , как в лемме 3, и $w = [u, v]$. Тогда любой элемент группы $\langle u, v \rangle$ записывается единственным образом в виде слова $u^\alpha v^\beta w^\gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \{0, \pm 1\}$.

Пусть

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— матрицы, порождающие $SL_2(3)$. Определим действие $\langle x, z \rangle$ на $\langle u, v \rangle$ следующим образом: $u^x = u$, $v^x = u^{-1}v$, $u^z = uvw$, $v^z = v$, так, что на элементарной абелевой 3-группе $\langle u, v \rangle / \langle w \rangle$ действие согласуется с действием соответствующих матриц на векторном пространстве над полем из трех элементов. Получившееся расширение является $\mathfrak{M}$ -группой, которую обозначим через $3^{1+2} : SL_2(3)$. Отметим, что элемент w порождает центр этой группы.

ПРИМЕР 4. $2^4 : SL_2(5)$.

Пусть V — подстановочный модуль над полем из двух элементов для группы A_5 . Разложим его в сумму $V = U \oplus W$ “all one” и “sum zero” модулей соответственно. Обозначим через $\varphi : SL_2(5) \rightarrow A_5$ факторизацию по центру. Пусть элементы y, z порядка 3, порождающие $SL_2(5)$, действуют на W как подстановки $\varphi(y) = (1, 2, 3)$ и $\varphi(z) = (2, 4, 5)$, а центр $SL_2(5)$ действует на W тривиально. Обозначим соответствующее расширение W посредством $SL_2(5)$ через $2^4 : SL_2(5)$ и зададим эту группу определяющими соотношениями. Пусть u, y, z — порождающие элементы. Положим

$$R(u, y, z) = \{u^3, y^3, z^3, y \triangle z, u \triangle y, u \sim z, (uz^y)^2, uz^y i^{y-1} i^{yz^{-1}}\},$$

где $i = (uz^{-1})^2$ — центральная инволюция из $\langle u, z \rangle \simeq SL_2(3)$, при факторизации по 2-радикалу u^{-1} и z^y склеиваются: поэтому предпоследнее соотношение выражает то, что uz^y является инволюцией (которая окажется в 2-радикале), а последнее соотношение показывает, как эта инволюция выражается через естественные порождающие 2-радикала.

ПРИМЕР 5. В этом примере $\mathfrak{M}$ -группы задаются порождающими и определяющими соотношениями. Приводимые свойства легко проверяются вычислениями. Пусть $U = \langle a, b, c \mid a \sim c \sim b, a \square b, a \square b^c, a \square c^b \rangle$; $V = \langle a, b, c \mid b \sim a \square c, [b, c] \rangle$. Группы U и V являются расширениями 2-групп посредством $U_4(2)$ и A_6 соответственно, при этом $O_2(U)$ — центральное произведение трех кватернионных групп порядка 8, $|O_2(V)| = 2^6$.

Пусть $K_{768} = \langle x, y, z \mid y^z \sim x \sim y \sim z \sim x \sim z^y \rangle$. Представление $K = K_{768}$ по подгруппе $\langle x \rangle$ является точным подстановочным представлением на 256 смежных классах, $|Z(K)| = 2^4$. Для любой подгруппы H в K , изоморфной $SL_2(3)$, центр H содержится в центре K . Группа $K/Z(K)$ является расширением элементарной абелевой 2-группы порядка 2^4 посредством группы порядка 3, которая действует на 2-радикале без нетривиальных неподвижных точек.

Символ G_i обозначает для $i = 2, 3$ расширение группы порядка i^{11} посредством $SL_2(5)$, как указано в доказательстве леммы 8.

3. Предварительные результаты

Доказательство п. 1 следующей леммы содержит подробности, которые далее при аналогичных рассуждениях опускаются.

Лемма 4. Пусть $G = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y, x\sharp y^z, x\Delta y^{z^{-1}} \rangle$. Тогда G является $\mathfrak{M}$ -группой, $Z(G) \simeq 3$, $G/Z(G) \simeq 3^8 : (2.A_7)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим точное подстановочное представление для G . Вычисления показывают, что $|G : \langle x, z \rangle| = 2 \cdot 3^{10} \cdot 7$ и $|G : \langle x, x^z, y \rangle| = 3^5 \cdot 7$. Перечисляя смежные классы по $\langle x, z \rangle$ и $\langle x, x^z, y \rangle$, строим два подстановочных представления B_1 и B_2 группы G соответственно, при этом

$$|G : \langle x, z \rangle| \cdot |\langle x, z \rangle| = |B_1| = |B_2|,$$

поэтому оба эти представления точные. Вычислениями в подстановках проверяется, что B_2 является $\mathfrak{M}$ -группой. Действуя B_2 на x^{B_2} , получаем точное представление C для группы $B_2/Z(B_2)$ на 5670 точках. При этом $Z(B_2) \simeq 3$ и $C \simeq 3^8 : (2.A_7)$.

Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. $G/[x, y^z] \simeq 2.A_7$ является $\{3^2, SL_2(3), SL_2(5)\}$ -группой.

Лемма 5. Пусть $G = \langle x, y, z \rangle$ — $\mathfrak{M}$ -группа, $x, y, z \in D$ и $\langle x, y \rangle \simeq \langle y, z \rangle \simeq A_4$. Тогда либо G изоморфна A_4 или A_5 , либо $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя, если необходимо, x и z на обратные, можно считать, что $x \sim y \sim z$ и выполнены соотношения множества $R = \{y^3, (xy)^2, (yz)^2\}$. Группа $\langle x, y, z \mid R \cup \{x\Delta z\} \rangle$ изоморфна $SL_2(5) : A_5$. В частности, группа $\langle x, y^z \rangle$ является гомоморфным образом $SL_2(5) : A_4$, лежащим в $\mathfrak{M}$, т. е. изоморфна A_4 или A_5 . Поэтому если в G выполнено соотношение $x\Delta z$, то выполнено и соотношение $x\Box z$, а сама группа G изоморфна A_5 .

Группа $\langle x, y, z \mid R \cup \{x\sharp z\} \rangle$ изоморфна $3^3 : (2^2 : 3)$, при этом $\langle y, y^{zx} \rangle$ не является фактором группы из $\mathfrak{M}$. Поэтому если в $\mathfrak{M}$ -группе G выполнено соотношение $x\sharp z$, то выполнено и соотношение $x = z$, а сама группа G изоморфна A_4 .

Лемма доказана.

Следующая лемма проверяется непосредственными вычислениями.

Лемма 6. Пусть

$$G = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y, y\Delta x^z, x\Delta y^z \rangle.$$

Тогда

$$G/\text{core}_G(\langle x, y, x^z, y^z \rangle) \simeq K = 4^6 : O_5(3).$$

Группа K в лемме задана представлением на 288 точках и является $\mathfrak{M}$ -группой.

В следующей лемме описывается «склейка» двух подгрупп $2^4 : SL_2(5)$ с общей подгруппой $SL_2(5)$. В частности, лемма показывает, что в некоторых ситуациях подобное рассмотрение «амальгам» может быть полезным. Этот подход планируется использовать для более полного изучения группы G из прошлой леммы в дальнейшем. Напомним обозначение для набора соотношений из примера 4, задающего группу $2^4 : SL_2(5)$:

$$R(u, y, z) = \{u^3, y^3, z^3, y\Delta z, u\Delta y, u \sim z, (uz^y)^2, uz^y i^{y^{-1}} i^{yz^{-1}}\},$$

где $i = (uz^{-1})^2$.

Лемма 7. Пусть $G = \langle u, y, z, v \rangle$ — $\mathfrak{M}$ -группа, $u, v, y \neq z \in D$ и выполнены соотношения $R(u, y, z)$ и $R(v, y, z)$. Тогда G конечна и является расширением $\{2, 3\}$ -группы посредством A_5 либо фактором центрального расширения $2.U_4(2)$. При этом если элементы $a, b \in D \cap G$ порождают подгруппу, изоморфную $SL_2(5)$, то $Z(\langle a, b \rangle) \subseteq Z(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подгруппы $\langle u, y, z \rangle$ и $\langle v, y, z \rangle$ являются гомоморфными образами $2^4 : SL_2(5)$, поэтому $(uy)^5 = (yz)^5 = (vy)^5 \in Z(G)$. Действительно, $(yz)^5$ является центральным элементом $\langle y, z \rangle$ по лемме 2, а по примеру 4 центральный элемент $(uy)^5$ из $\langle y, u \rangle$ равен $(yz)^5$, а значит, перестановочен с u, y, z ; в силу симметрии он перестановочен с v . Центральный фактор $G/\langle (yz)^5 \rangle$ является гомоморфным образом

$$K(*, \circ, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \langle u, v, y, z \mid R(u, y, z) \cup R(v, y, z), u \square y \square v, u * v^{\varepsilon_1}, u \circ (z^v)^{\varepsilon_2} \rangle,$$

где $*, \circ \in \{\Delta, \sharp, \sim\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{\pm 1\}$. Вычисления показывают, что индекс $|K(*, \circ, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \langle u, y, z \rangle|$ тривиален за исключением трех различных случаев, описанных ниже. Группа $K(\sim, \Delta, -1, \pm 1)$ изоморфна $U_4(2)$. Пусть $K_1 = K(\sim, \sim, 1, 1)$. Тогда $Z(K_1) = \langle (uyzv)^5 \rangle$ порядка 2 и

$$K_1/Z(K_1) \simeq (\langle \langle uv^{-1} \rangle \rangle \times \langle \langle (uz^{-1})^2 \rangle \rangle) : A_5$$

— расширение прямого произведения двух естественных модулей порядка 2^4 посредством A_5 . Пусть $K_2 = K(\sharp, \sim, \pm 1, 1)$. В группе K_2 образы u и v порождают подгруппу, изоморфную 3^{1+2} ; нормальное замыкание образа $i = [u, v]$ порождает элементарную абелеву группу порядка 3^5 , фактор по которой изоморфен $\langle u, y, z \rangle \simeq 2^4 : A_5$. Остальные утверждения леммы проверяются непосредственными вычислениями в группах K_i . Лемма доказана.

В заключение этого раздела приведем две леммы, которые дополняют описание 3-порожденных подгрупп, приводимое в теореме из следующего раздела.

Следующую лемму удобно проверять вычислениями, перебирая все возможности для соотношений между выделенными элементами. Входные данные для вычислений собраны в форме таблиц.

Лемма 8. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $G = \langle x, y, z \rangle$ и $z \notin \langle x, y \rangle \simeq \langle y, z \rangle \simeq \langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$. Тогда G является гомоморфным образом одной из следующих групп: K_{768} , $(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$, $U_3(3)$, $2.HJ$, $L_3(3)$, G_2 , G_3 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заменяя, если необходимо, порождающие x, y, z на обратные, можно считать, что выполнены соотношения одного из следующих двух случаев:

$$1. R_1 := \{x \sim y \sim z \sim x\}.$$

Опишем шаги проверки, результаты которой представлены в табл. 1.

Таблица 1. Случай соотношений R_1

$x \sim y^z$	$x \sim z^y$	K_{768}
$x \sim y^z$	$(xz^y)^3, (x^{-1}z^y)^3$	$(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$
$x^{-1} \sim y^z$	$x^{-1} \sim z^y$	$U_3(3)$
$x \square y^z$	$x \square z^y$	$2.HJ$
$(xy^z)^3, (x^{-1}y^z)^3$	$x \sim z^y$	$(3^2 \times 3^{1+2}) : SL_2(3)$

Рассмотрим группу, заданную порождающими x, y, z и определяющими соотношениями R_1 . Рассмотрим факторы этой группы по всем различным наборам соотношений между двумя парами D -элементов: x, y^z и x, z^y . Перечисляя

смежные классы в системе GAP [7] по подгруппе $H = \langle x, y \rangle$, вычислим индексы $|G : H|$, в частности, таким образом исключим те наборы соотношений, которые невозможны. Далее строится подстановочное представление группы G на смежных классах по H . Сравнение порядков показывает, что во всех случаях (за исключением K_{768} , когда необходимо рассматривать $H = \langle x \rangle$) это представление оказывается точным. Последнее позволяет установить строение группы G . Нетривиальные результаты вычислений приведены в табл. 1.

Например, группа $\langle x, y, z \mid R_1 \cup \{x\Delta y^z, x\Delta z^y\} \rangle$ изоморфна центральному расширению $2.HJ$ спорадической группы Холла — Янко.

Таблица 2. Случай соотношений R_2

$z^{\pm 1} \sim x^y$	$y^{-1} \sim z^{y x z}$	$U_3(3)$
$z \square x^y$	$y \sim z^{y x z}$	G_2
$z \square x^y$	$(y z^{y x z})^3, (y^{-1} z^{y x z})^3$	G_3
$(z x^y)^3, (z^{-1} x^y)^3$	$y \sim z^{y x z}$	$L_3(3)$

2. $R_2 := \{x \sim y \sim z^{-1} \sim x^{-1}\}$.

Действуем аналогичным образом, приводя результаты в табл. 2. Опишем строение групп G_i , возникающих в этом случае. Группа G_i является расширением нормальной i -подгруппы порядка i^{11} посредством $SL_2(5)$, $i = 2, 3$. При этом центр группы G_i является элементарной абелевой группой порядка 2^4 и 3^3 соответственно и порождается элементами $\langle (xyz)^5, (xyz^{-1})^5, (xy^{-1}z)^5, (x^{-1}yz)^5 \rangle$. При этом $G_3/Z(G_3)$ является расширением элементарной абелевой группы порядка 3^8 посредством $SL_2(5)$; $G_2/Z(G_2) \simeq (2^4) : (2^4 : A_5)$.

Лемма доказана.

Лемма 9. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $G = \langle x, y, z \rangle$, $z \notin \langle x, y \rangle \simeq \langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Тогда G является расширением 3-группы порядка, не превосходящего 3^5 , посредством $SL_2(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Группа G является гомоморфным образом одной из групп

$$K(i, j) = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, y \sim x \sim z, (yz)^3, (yz^{-1})^3, w_i(x, y^z), w_j(x, z^y) \rangle.$$

Вычисления показывают, что $K(i, j)$ либо не содержит подгрупп, изоморфных $SL_2(3)$, либо удовлетворяет заключению леммы.

Лемма доказана.

4. 3-Порожденные подгруппы

Далее в этом разделе x, y, z лежат в классе D из определения $\mathfrak{M}$ -группы, причем $xy = yx$. Также будем считать, что элементы x, y, z различны, более того, $y \notin \langle x, z \rangle$. Нашей целью является доказательство следующей теоремы, где описывается группа $\langle x, y, z \rangle$.

Теорема. Пусть G — $\mathfrak{M}_4$ -группа, $x, y, z \in D$, $y \notin \langle x, z \rangle$, $G = \langle x, y, z \rangle$, $xy = yx$.

0. Если $[x, z] = 1$, то $G \simeq 3 \times \langle y, z \rangle$.

1. Если $\langle x, z \rangle \simeq A_4$, то $G \simeq A_6$ или $G \simeq 3 \times A_4$.

2. Если $\langle x, z \rangle \simeq A_5$, то G является фактором одной из групп U, V, A_6, A_7 .

3. Если $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$, то либо G изоморфна $3^{1+2} : SL_2(3)$, $3 \times (3^2 : SL_2(3))$, либо $G/Z(G)$ — фактор $i^8 : SL_2(9)$, где $i \in \{2, 3\}$.

4. Если $\langle x, z \rangle \simeq 3^{1+2}$, то G является фактором одной из групп выше либо фактором $3^4 : SL_2(5)$, либо 3-группой порядка, делящего 3^6 .

5. Если $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(5)$, то G является фактором одной из групп выше либо центральным расширением группы S порядка, делящего 3, посредством факторов одной из групп $3^8 : (2.A_7)$ или $3^4 : SL_2(5)$, либо $y\Delta x^z, x\Delta y^z$ и $G/\text{core}_G(\langle x, y, x^z, y^z \rangle) \simeq 4^6 : O_5(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в разборе случаев из теоремы и разбито на соответствующие шаги. Нулевое утверждение очевидно.

1. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq A_4$. Рассмотрим группу

$$K = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^2 \rangle,$$

заданную соотношениями из утверждения. Ее подгруппа $\langle x, z \rangle$ является гомоморфным образом группы $\langle x, z \mid x^3, z^3, (xz)^2 \rangle \simeq A_4$. Следовательно, G является гомоморфным образом K .

Отметим, что подстановки $x = (1, 2, 3)$, $y = (4, 5, 6)$ и $z = (2, 4, 3)$ удовлетворяют определяющим соотношениям группы K и порождают A_6 , при этом $\langle y, z \rangle \simeq A_5$. В частности, K имеет гомоморфный образ, изоморфный A_6 . Вычислениями в подстановках проверяется, что A_6 действительно является $\mathfrak{M}$ -группой.

Осталось доказать, что любой фактор K , являющийся $\mathfrak{M}$ -группой, изоморфен A_6 , если $[y, z] \neq 1$ и $y \notin \langle x, z \rangle$. Если же $yz = zy$, то, очевидно, $G \simeq 3 \times A_4$ удовлетворяет заключению теоремы. Рассмотрим все возможности для подгруппы $\langle y, z \rangle$.

Если $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$, то $|yz| = 3$. Фактор группы K по соотношению $(yz)^3 = 1$ изоморфен $A_4 \times A_4$. Однако в этом факторе у подгруппы $\langle y, z \rangle \simeq 3 \times A_4$ нет гомоморфных образов, изоморфных 3^{1+2} ; противоречие.

Аналогично, если $\langle y, z \rangle$ является $\{SL_2(3)\}$ -группой, то либо $(yz)^4 = 1$, либо $(y^{-1}z)^4 = 1$. Фактор K по каждому из этих соотношений изоморфен $A_4 \times A_6$ и порождается образами элементов y и z . Значит, в соответствующей $\mathfrak{M}$ -группе G выполнено $\langle y, z \rangle \simeq A_4$ и $y \in \langle x, z \rangle$; противоречие.

Наконец, фактор K по соотношению $y\Delta z$ изоморфен A_6 , что и требовалось.

2. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq A_5$. Из замечания 1 и леммы 2 следует, что $\langle x, x^z \rangle \simeq A_4$, и по доказанному либо $[x^z, y] = 1$, либо $\langle x, x^z, y \rangle \simeq A_6$, в последнем случае $\langle y, x^z \rangle \simeq A_5$. Аналогично $\langle x, x^{z^{-1}} \rangle \simeq A_4$, поэтому либо $[x^{z^{-1}}, y] = 1$, либо $\langle x, x^{z^{-1}}, y \rangle \simeq A_6$.

Пусть снова

$$K = \{x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], x\Box z\}$$

— группа, заданная соотношениями из утверждения. Рассмотрим следующие факторы группы K по дополнительным соотношениям: $K/\langle [x^z, y], (yz)^3 \rangle \simeq GL_2(4)$ не является $\mathfrak{M}$ -группой, а $K/\langle [x^z, y], (yz)^4 \rangle$ тривиальна. Таким образом, если $[x^z, y] = 1$ или $[x^{z^{-1}}, y] = 1$, то

$$G \simeq K/\langle [x^z, y], yzyzyz = zyzyzy \rangle \simeq A_7.$$

Пусть далее $x^z, x^{z^{-1}} \notin C_D(y)$. Тогда, как отмечалось выше, $\langle y, x^z \rangle \simeq \langle y, x^{z^{-1}} \rangle \simeq A_5$. Поэтому G является гомоморфным образом группы

$$F = K/\langle y\Box x^z, y\Box x^{z^{-1}} \rangle.$$

При этом

$$F/\langle (yz)^3 \rangle \simeq A_6, \quad F/\langle (yz)^4 \rangle \simeq V, \quad F/\langle yzyzyz = zyzyzy \rangle \simeq U.$$

3. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(3)$. Поскольку условия теоремы не меняются при замене z на z^{-1} , то по лемме 1 можно считать $x \sim z$.

Пусть сначала $\langle z, y \rangle \simeq SL_2(3)$. Заменяя, если необходимо, y на y^{-1} , по лемме 1 можно считать, что $z \sim y$. Тогда G является гомоморфным образом группы

$$K = \{x, y, z \mid [x, y], x \sim z \sim y\} \simeq 3^{1+2} : SL_2(3).$$

В терминах примера 3 изоморфизмом служит отображение:

$$x, z \mapsto x, z, \quad xy^{-1} \mapsto u, \quad u^{-1}u^z(xyz)^{-4} \mapsto v,$$

в частности, $(xyz)^4 \mapsto [u, v]$ — порождающий центра.

По доказанному можно считать, что $\langle y, z \rangle \notin \{3^2, A_4, A_5, SL_2(3)\}$. Рассмотрим две оставшиеся возможности.

Пусть сначала $\langle y, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Подгруппа $H = \langle x, z, z^y \rangle$ является нормальной в G подгруппой индекса ≤ 3 , в которой $x \sim z^y$. По доказанному H является гомоморфным образом $3^{1+2} : SL_2(3)$. При этом $(xzz^y)^y = xz^{-1}$, поэтому по лемме 1 элемент xzz^y имеет порядок 4, а значит, H без центра. Следовательно, в этом случае $G \simeq 3 \times (3^2 : SL_2(3))$.

Пусть теперь $y\Delta z$. Тогда G — гомоморфный образ группы

$$A = \{x, y, z \mid [x, y], x \sim z\Delta y\}.$$

Рассмотрим $B = \langle x, y, y^z \rangle$ — подгруппу в A . Перечисляя смежные классы A по B , получим подстановочное представление (возможно, не точное) C , являющееся расширением 2-группы порядка 2^{11} посредством $SL_2(9)$. При этом C не является $\mathfrak{M}$ -группой, поскольку для соответствующих элементов в C выполнено $|\langle x, w \rangle| = 192$ при $w = y^{zxz^{-1}yz^{-1}xyz^{-1}xz}$. Вычисления показывают, что индекс подгруппы $\langle y, z \rangle$ в фактор-группах $A/\langle x\Delta w \rangle$ и $A/\langle x \sim w^{-1} \rangle$ равен 1.

Рассмотрим случай, когда $x \sim w$ в G . Пусть $\bar{A} = A/\langle x \sim w \rangle$. Перечисление смежных классов $\bar{A}$ по $\langle y, z \rangle$ дает подстановочное представление E этой группы. Это представление точно, поскольку

$$|\bar{A}| = |\bar{A} : \langle y, z \rangle| \cdot |\langle y, z \rangle| = 2^{16} \cdot 120 = |E|.$$

Вычислениями в подстановках получаем, что подгруппа $\langle x, x^i \rangle$ имеет порядок $2^5 \cdot 3$ в E , где $i = (yz)^5$ — центральная инволюция из $\langle y, z \rangle$. Поскольку G является гомоморфным образом E , то в G подгруппа $\langle x, x^i \rangle$ не изоморфна $3^2, 3^{1+2}, A_5$ или $SL_2(5)$. Рассмотрим оставшиеся возможности. Поскольку при $x = x^i$ выполнено соотношение $x \sim x^i$ и группа $\bar{A}/\langle x^{-1} \sim x^i \rangle$ тривиальна, то можно считать $x \sim x^i$ и G — гомоморфный образ группы $\bar{\bar{A}} = \bar{A}/\langle x \sim x^i \rangle$, для которой $F := E/\langle x \sim x^i \rangle$ является точным подстановочным представлением. Вычислениями в подстановках проверяется, что F является $\mathfrak{M}$ -группой и $Z(F)$ — циклическая группа порядка 4. Действуя F при помощи сопряжения на x^F , получим точное подстановочное представление I группы $\bar{\bar{A}}/Z(\bar{\bar{A}})$ на 640 точках. Вычисления в подстановках позволяют теперь явно установить строение группы. Таким образом, в этом случае G является гомоморфным образом группы $\bar{\bar{A}}$, при этом $\bar{\bar{A}}/Z(\bar{\bar{A}}) \simeq I \simeq 2^8 : SL_2(9)$.

Рассмотрим оставшийся случай, когда $x\sharp w$ в G . Пусть $\tilde{A} := A/\langle x\sharp w \rangle$. Действуем по аналогии с предыдущим случаем. Пусть $i = (yz)^5$. Индекс подгруппы $\langle y, z \rangle$ в группах $\tilde{A}/\langle x\Delta x^i \rangle$ и $\tilde{A}/\langle x^{-1} \sim x^i \rangle$ равен 1. Перечисление смежных классов $\tilde{A}/\langle x \sim x^i \rangle$ дает точное подстановочное представление, доказывающее изоморфизм $\tilde{A} \simeq 2^5.A_6$, причем в этой фактор-группе $x = w$. В частности, $x \sim w$, а этот случай рассмотрен выше.

Рассмотрим $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}/\langle x\sharp x^i \rangle$. Перечисление смежных классов $\tilde{\tilde{A}}$ по $\langle y, z \rangle$ дает точное подстановочное представление J этой группы. Вычислениями в подстановках проверяется, что J является $\mathfrak{M}$ -группой и $Z(J) \simeq 3^3$. Действуя J при помощи сопряжения на x^J получим точное представление K группы $\tilde{\tilde{A}}/Z(\tilde{\tilde{A}})$ на 3240 точках. Вычисления в подстановках позволяют явно установить строение группы. Таким образом, в этом случае G является гомоморфным образом группы $\tilde{\tilde{A}}$, при этом $\tilde{\tilde{A}}/Z(\tilde{\tilde{A}}) \simeq K \simeq 3^8 : SL_2(9)$.

4. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq 3^{1+2}$. Группа

$$\langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^3, (x^{-1}z)^3, (yz)^3, (yz^{-1})^3 \rangle$$

имеет порядок 3^6 , поэтому далее по модулю доказанного можно считать, что $y\Delta z$.

Можно считать, что группа G имеет гомоморфный образ $3 \times SL_2(5)$, в котором образы x и y^z порождают 3^2 . Поэтому можно считать, что $\langle x, y^z \rangle$ является гомоморфным образом 3^{1+2} . Тогда группа $\langle x, y, z \rangle$, в свою очередь, является гомоморфным образом группы

$$K = \langle x, y, z \mid x^3, y^3, z^3, [x, y], (xz)^3, (x^{-1}z)^3, y\Delta z, (xy^z)^3 \rangle,$$

изоморфной $3^4 : SL_2(5)$.

5. СЛУЧАЙ $\langle x, z \rangle \simeq SL_2(5)$.

По лемме 2 и по модулю доказанного можно считать, что в G выполнены соотношения $x\Delta z\Delta y$. Обозначим $A = \langle x, y, z \mid [x, y], x\Delta z\Delta y \rangle$. Тогда по замечанию 1 выполнены соотношения $x \sim z_1 = (x^z)^{-1}$, $y \sim z_2 = (y^z)^{-1}$ и, кроме того, $[z_1, z_2] = 1$. По п. 3 подгруппы $\langle x, y, z_i \rangle$ конечны и известны. Естественно действовать по аналогии с доказательством п. 3.

Предположим, что в G выполнено соотношение $x\sharp y^z$ и $A_\sharp = A/\langle x\sharp y^z \rangle$. Вычисления показывают, что группы $A_\sharp/\langle x^{\pm 1} \sim y^{z^{-1}} \rangle$ и $A_\sharp/\langle x\sharp y^{z^{-1}} \rangle$ тривиальны. Следовательно, по лемме 4 G является центральным расширением группы S порядка, делящего 3, посредством фактора группы $3^8 : (2.A_7)$ и выполнено заключение теоремы.

В силу симметрии далее можно считать, что соотношения $x\sharp y^z$ и $y\sharp x^z$ в G не выполняются. Тогда по п. 3 либо порождающие подгруппы $H = \langle x, y, z_1 \rangle$ удовлетворяют соотношениям $R_1 = \{x \sim z_1 \sim y\}$, либо $y\Delta z_1$.

Рассмотрим сначала случай, когда в G выполнены соотношения R_1 . Пусть $B_1 = A/R_1$ и $x_1 = y^z$. Вычисления показывают, что группы $B_1/\langle x \sim x_1 \rangle$ и $B_1/\langle x\Delta x_1 \rangle$ тривиальны. Поэтому в G выполнено соотношение $x \sim x_1^{-1}$. Пусть $C = B_1/\langle x \sim x_1^{-1} \rangle$. Перечисляя смежные классы C по $\langle x, z \rangle$, получаем точное подстановочное представление E группы C , которое является $\mathfrak{M}$ -группой. Таким образом, G является фактором E ,

$$Z(E) \simeq 3, \quad E/Z(E) \simeq 3^4 : SL_2(5).$$

Таким образом, можно считать, что выполнено $y\Delta z_1$ и в силу симметрии выполнено $x\Delta z_2$. Теперь заключение теоремы следует из леммы 6.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cuypers H., Hall J. I. The 3-transposition groups with trivial center // J. Algebra. 1995. V. 178, N 1. P. 149–193.
2. Цзюпин Т., Ян Н., Мамонтов А. С. Теорема Бэра — Сузуки для групп 3-периода 1 // Алгебра и логика. 2023. Т. 62, № 3. С. 400–407.
3. Aschbacher M., Hall M. Groups generated by a class of elements of order 3 // J. Algebra. 1973. V. 24, N 3. P. 591–612.
4. Stellmacher B. Einfache Gruppen, die von einer Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei erzeugt werden // J. Algebra. 1974. V. 30, N 1-3. P. 320–354.
5. Мазуров В. Д. Характеризация знакопеременных групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 54–69.
6. Максименко А. А., Мамонтов А. С. Локальная конечность некоторых групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 631–644.
7. GAP-Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.16.0; 2026. (www.gap-system.org)
8. Созутов А. И. О группах типа Σ_4 , порожденных 3-транспозициями // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 1. С. 140–149.

Поступила в редакцию 17 ноября 2025 г.

После доработки 3 мая 2026 г.

Принята к публикации 31 мая 2026 г.

Ли Баоцзюнь (ORCID 0000-0003-0355-7827)
School of Mathematics and statistics,
Nantong University, Nantong 226019, China,
libj@ntu.edu.cn

Сюй Чжиянь
School of Mathematics and statistics,
Nantong University, Nantong 226019, China
2396887139@qq.com

Дураков Борис Евгеньевич (ORCID 0000-0001-6353-6484)
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79, Красноярск 660041
durakov96@gmail.com

Мамонтов Андрей Сергеевич (ORCID 0000-0002-0324-5287)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mamontov@math.nsc.ru