

УДК 512.7

О ЧИСЛЕ НЕПРИВОДИМЫХ
КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ
ПОЛУСТАБИЛЬНЫХ ПУЧКОВ РАНГА 2
НА РАЦИОНАЛЬНЫХ ТРЕХМЕРНЫХ
МНОГООБРАЗИЯХ ФАНО ОСНОВНОЙ СЕРИИ

А. А. Кытманов, Н. Н. Осипов,
С. А. Тихомиров

Аннотация. Д. А. Васильев и А. С. Тихомиров в 2024 г. построили новую бесконечную серию неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на трехмерных рациональных многообразиях Фано основной серии, описали общие пучки в этих компонентах, а также предъявили формулы для нахождения размерностей данных компонент. Первый класс Черна пучков в этих компонентах может быть четным либо нечетным, а второй и третий классы Черна представляют собой многочлены специального вида от трех переменных. Кроме того, ими были получены оценки сверху для выражений, содержащих третий класс Черна таких пучков. В настоящей работе доказана единственность компонент модулей пучков с такими значениями классов Черна в этой серии и уточнены указанные оценки.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.513

Ключевые слова: полустабильный пучок, рефлексивный пучок, классы Черна, пространство модулей.

Введение

Актуальными проблемами современной алгебраической геометрии являются исследование различных свойств пучков, их компонент в пространствах модулей, построение и изучение серий данных компонент на $\mathbb{P}^3$ (см., например, [1–3]). Вместе с тем в работе [4] Д. А. Васильевым и А. С. Тихомировым было предложено расширить данное исследование на все рациональные трехмерные многообразия Фано основной серии. Как известно, помимо проективного пространства $X_1 = \mathbb{P}^3$ таких многообразий имеется еще три, а именно, трехмерная квадрика X_2 , полное пересечение X_4 двух квадрик в пространстве $\mathbb{P}^5$ и сечение X_5 грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в пространство $\mathbb{P}^9$ подпространством $\mathbb{P}^6$ (см., например, [5, 6]).

Среди результатов, полученных для таких многообразий, отличных от $\mathbb{P}^3$, отметим построение бесконечных серий инстантонных расслоений в статьях [7–9]. Кроме того, в работе [10] были получены результаты, касающиеся числа неприводимых компонент схемы модулей стабильных расслоений ранга 2 на

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2026-1314).

© 2026 Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А.

произвольном трехмерном проективном многообразии. А именно, было доказано, что при фиксированном значении первого класса Черна c_1 расслоения число таких компонент не ограничено с ростом степени c_2 , где c_2 — второй класс Черна расслоения.

Вернемся к работе [4], в которой была построена новая бесконечная серия неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на трехмерных рациональных многообразиях Фано основной серии, описаны общие пучки¹⁾ в этих компонентах, в том числе доказана их рефлексивность, найдены их классы Черна (см. формулы (2) и (3)), а также предъявлены формулы для нахождения размерностей данных компонент.

Интересным вопросом является получение ограничений на третий класс Черна c_3 пучков на таких многообразиях. Одним из первых, кто обратил внимание на важность данного вопроса, был Хартсхорн, получивший в статье [11] оценки вида $c_3 \leq c_2^2 - c_2 + 2$ при $c_1 = 0$ и $c_3 \leq c_2^2$ при $c_1 = -1$ для фиксированных первого и второго классов Черна c_1 и c_2 когерентных пучков на $\mathbb{P}^3$.

В работе [12] Шмидт, исследуя свойства тилт-стабильности в производной категории $D^b(\mathbb{P}^3)$, доказал, что оценки Хартсхорна верны для всех полустабильных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$, и дал явное описание их пространства модулей для $-1 \leq c_1 \leq 0$, $c_2 > 0$ и максимального c_3 . В качестве следствия он получил, что эти пространства являются неприводимыми рациональными и, за исключением одного случая, гладкими проективными многообразиями. В статье [13] Шмидт обобщил вышеуказанные результаты на случай пучков всех рангов от 0 до 4 на $\mathbb{P}^3$. Также для пучков, классы S -эквивалентности которых составляют компоненты упомянутой выше серии, в работе [4] были получены оценки сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна данных пучков, где H — класс гиперплоского сечения.

Настоящая работа посвящена изучению теоретико-числовых вопросов, связанных с компонентами данной серии. Основным результатом работы является теорема 1, в которой мы доказываем единственность компонент модулей пучков, имеющих указанные значения классов Черна, в вышеупомянутой серии. В теореме 2 мы устанавливаем оценки снизу и сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна данных пучков. При этом оценки сверху уточняют оценки, ранее полученные Д. А. Васильевым и А. С. Тихомировым.

§ 1. Компоненты пространств модулей полустабильных пучков

Напомним, что $X_1 = \mathbb{P}^3$ — проективное пространство, X_2 — трехмерная квадрака, X_4 — полное пересечение двух квадрик в $\mathbb{P}^5$ и X_5 — сечение грассманиана $\text{Gr}(2, 5)$, вложенного по Плюккеру в $\mathbb{P}^9$ подпространством $\mathbb{P}^6$. Как было указано во введении, в работе [4] была построена бесконечная серия неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков ранга 2 на многообразиях X_1 , X_2 , X_4 и X_5 . Приведем ее конструкцию, описанную в [4, п. 4.1]. На $X \in \{X_1, X_2, X_4, X_5\}$ рассмотрим расширение вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-n)^{\oplus 2} \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S(m) \rightarrow 0, \quad S \in |\mathcal{O}_X(k)|, \quad k \geq 1, \quad n = \lceil k/2 \rceil, \quad m + n < 0. \quad (1)$$

¹⁾Здесь под общим пучком в плоском неприводимом семействе пучков на X с базой $\mathcal{B}$ понимаются пучки, отвечающие точкам в $\mathcal{B}$, принадлежащим плотному открытому подмножеству в $\mathcal{B}$.

Пучок E из этого расширения имеет ранг 2, и при четном k получаем

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = \left(\frac{k^2}{4} - km\right) H^2, \quad c_3(E) = k \left(\frac{k}{2} - m\right)^2 H^3. \quad (2)$$

При нечетном k соответственно будем иметь

$$c_1(E) = -H, \quad c_2(E) = \left(\frac{(k-1)^2}{4} - km\right) H^2, \quad c_3(E) = k \left(\frac{k-1}{2} - m\right)^2 H^3, \quad (3)$$

где, как известно (см., например, [4, формулы (2.1)]),

$$H^2 = iL, \quad H^3 = i, \quad H \cdot L = 1, \quad X = X_i, \quad i = 1, 2, 4, 5,$$

а $H^4(X, \mathbb{Z}) \ni L$ — класс прямой, понимаемой как проективная прямая в пространстве $\mathbb{P}^{2+i} \supset X_i = X$ при $i = 1, 2$ и в пространстве $\mathbb{P}^{1+i} \supset X_i = X$ при $i = 4, 5$.

Обозначим через $M_X(v)$ схему модулей Гизекера — Маруямы полустабильных пучков на X с характером Черна $v = \text{ch}(E)$, определяемым из (1) (см. также [4, п. 2]). Рассмотрим семейство

$$M_{k,m,n} = \{[E] \in M_X(v) : E \text{ является стабильным по Гизекеру расширением (1)}\}.$$

В [4, теорема 4.2] было доказано, что семейство $M_{k,m,n}$ является плотным открытым подмножеством неприводимой рациональной компоненты в схеме модулей $M_X(v)$, при этом $M_{k,m,n}$ является тонким пространством модулей, и рефлексивные пучки составляют в нем плотное открытое множество. Далее мы покажем, что компоненты данной серии обладают свойством единственности в указанной схеме модулей Гизекера — Маруямы.

Предварительно докажем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Для произвольных вещественных чисел $a > 0$ и $b > 0$ система уравнений

$$-\frac{k^2}{4} + kl = a, \quad kl^2 = b \quad (4)$$

имеет решение (k, l) с условием $0 < k < l$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{a^3}{b^2} < \frac{27}{64}. \quad (5)$$

При выполнении условия (5) такое решение (k, l) единственно и дается формулами

$$k = 2t_* \sqrt{\frac{a}{4t_* - t_*^2}}, \quad l = 2\sqrt{\frac{a}{4t_* - t_*^2}}, \quad (6)$$

где t_* — корень уравнения

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{a^3}{b^2}$$

на интервале $0 < t < 1$.

Доказательство. Положим $t = k/l$. Условие $0 < k < l$ означает, что $0 < t < 1$. Из (4) следует, что $f(t) = a^3/b^2$, где

$$f(t) = \frac{t(4-t)^3}{64}.$$

Поскольку

$$f'(t) = \frac{(1-t)(4-t)^2}{16} > 0$$

при $0 < t < 1$, функция $f(t)$ строго возрастает на интервале $0 < t < 1$. Следовательно, на указанном интервале $f(t) < f(1) = 27/64$. Таким образом, условие (5) необходимо для того, чтобы система (4) имела решения (k, l) указанного вида.

Предположим теперь, что условие (5) выполнено. Тогда уравнение $f(t) = a^3/b^2$ имеет единственный корень t_* на интервале $0 < t < 1$, при этом система (4) равносильна системе

$$k = t_* l, \quad -\frac{k^2}{4} + kl = a.$$

Легко видеть, что последняя имеет единственное решение (k, l) в положительных числах, которое дается формулами (6). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При дополнительном требовании целочисленности неизвестных k и l условие (5) по-прежнему останется необходимым, но перестанет быть достаточным для существования решений (k, l) указанного вида, поскольку число t_* уже может оказаться иррациональным (или, в случае рационального t_* , значения выражений в правых частях формул (6) не окажутся целочисленными).

Всюду далее считаем, что параметры k и m удовлетворяют следующим условиям:

$$k \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m + \lceil k/2 \rceil < 0.$$

В частности, отсюда вытекает, что $m < 0$. Если k четно, то $\lceil k/2 \rceil = k/2$, так что неравенство $m + \lceil k/2 \rceil < 0$ равносильно неравенству

$$k < -2m. \quad (7)$$

Если же k нечетно, то $\lceil k/2 \rceil = (k+1)/2$ и неравенство $m + \lceil k/2 \rceil < 0$ равносильно неравенству

$$k < -2m - 1. \quad (8)$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. В рассматриваемой бесконечной серии неприводимых рациональных компонент пространств модулей полустабильных пучков E ранга 2 на многообразиях Фано основной серии, получаемых из расширения (1), для любого набора классов Черна c_1 , c_2 и c_3 , удовлетворяющего равенствам (2) либо равенствам (3), в схеме модулей $M_X(v)$ имеется не более одной компоненты, состоящей из классов S -эквивалентности таких пучков.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае четного k нужно убедиться, что система уравнений

$$\frac{k^2}{4} - km = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad k \left(\frac{k}{2} - m \right)^2 = \frac{c_3(E)}{H^3} \quad (9)$$

имеет не более одного решения (k, m) , удовлетворяющего условию (7). Для доказательства положим

$$l = \frac{k}{2} - m, \quad a = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad b = \frac{c_3(E)}{H^3}. \quad (10)$$

Тогда, во-первых, условие (7) переписывается в виде $k < l$ и, во-вторых, как нетрудно проверить, система (9) превращается в систему (4). Остается сослаться на лемму, учитывая при этом дополнительное требование целочисленности k и l .

В случае нечетного k рассуждения аналогичны. Здесь требуется доказать, что система уравнений

$$\frac{(k-1)^2}{4} - km = \frac{c_2(E)}{H^2}, \quad k \left(\frac{k-1}{2} - m \right)^2 = \frac{c_3(E)}{H^3} \quad (11)$$

имеет не более одного решения (k, m) , удовлетворяющего условию (8). Для доказательства теперь положим

$$l = \frac{k-1}{2} - m, \quad a = \frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4}, \quad b = \frac{c_3(E)}{H^3}. \quad (12)$$

Условие (8) снова оказывается равносильным условию $k < l$, и наше утверждение опять непосредственно вытекает из леммы, поскольку система (11) становится системой (4). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенное доказательство теоремы 1 позволяет избежать перебора отдельных случаев в зависимости от того, какое именно трехмерное рациональное многообразие Фано основной серии рассматривается.

Проиллюстрируем теорему 1 на следующих примерах.

ПРИМЕР 1. Выясним, возможны ли значения

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = 7H^2, \quad c_3(E) = 32H^3.$$

Здесь k предполагается четным. Имеем $a = 7$ и $b = 32$, так что $a^3/b^2 = 343/1024 < 27/64$. Уравнение

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{343}{1024}$$

имеет рациональный корень $t_* = 1/2$ на интервале $0 < t < 1$. Далее по формулам (6) находим $k = 2$ и $l = 4$. Следовательно (см. первую формулу в (10)), $m = k/2 - l = -3$ и, таким образом, искомая пара $(k, m) = (2, -3)$ найдена.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим аналогичную задачу для значений

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = 14H^2, \quad c_3(E) = 81H^3.$$

Здесь k также четно, $a = 14$ и $b = 81$. Имеем $a^3/b^2 = 2744/6561 < 27/64$. Уравнение

$$\frac{t(4-t)^3}{64} = \frac{2744}{6561}$$

также имеет рациональный корень $t_* = 8/9$ на интервале $0 < t < 1$. Но теперь по формулам (6) получим $k = 4$ и $l = 9/2$. Поскольку значение l оказалось нецелым, искомым пар (k, m) не существует.

§ 2. Об оценках выражений, содержащих третьи классы Черна пучков

В [4, замечание 4.1] получены следующие оценки сверху для деленных на H^3 третьих классов Черна пучков ранга 2 на многообразиях Фано основной серии, где H — класс гиперплоского сечения:

$$\frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{4}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2 \quad (13)$$

в случае четного k , а также

$$\frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{4k}{(k-1)^2} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2 \quad (14)$$

в случае нечетного $k \geq 3$.

В настоящем разделе мы уточняем данные оценки. А именно, справедлива

Теорема 2. Для второго и третьего классов Черна пучков, получаемых из расширения (1),

(i) в случае четного k справедливы оценки

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^{3/2} < \frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{16}{9k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2;$$

(ii) в случае нечетного k верны оценки

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4} \right)^{3/2} < \frac{c_3(E)}{H^3} < \frac{16}{9k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} - \frac{1}{4} \right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Действительно, в обозначениях (10) левое неравенство сводится к необходимому условию (5). Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\frac{kb}{a^2} = g(t) = \frac{16}{(4-t)^2},$$

где $t = k/l$. Поскольку $g(t)$ возрастает на интервале $0 < t < 1$, имеем

$$g(t) < g(1) = \frac{16}{9},$$

что и доказывает правое неравенство.

(ii) Здесь рассуждения полностью аналогичны, но вместо (10) следует использовать (12). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для $k = 1$ в работе [4] приведена отдельная точная формула

$$\frac{c_3(E)}{H^3} = \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2.$$

Легко убедиться, что оценки из теоремы 2 улучшают полученные в [4] оценки (13) в случае четного k и оценки (14) в случае нечетного $k \geq 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Поскольку $g(t) > g(0) = 1$, для случая четного k имеет место альтернативная нижняя оценка:

$$\frac{c_3(E)}{H^3} > \frac{1}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{8}{3\sqrt{3}} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^{3/2} > \frac{1}{k} \left(\frac{c_2(E)}{H^2} \right)^2$$

при $t > 108/283$, поэтому для таких t эта новая оценка будет хуже указанной в теореме 2. Аналогичное замечание справедливо и для случая нечетного k .

Благодарность. Авторы признательны рецензентам за ценные советы и замечания, позволившие улучшить текст статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кытманов А. А., Осипов Н. Н., Тихомиров С. А. Серии компонент пространства модулей полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 на $\mathbb{P}^3$ // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 60–72.
2. Ланских И. Ю., Тихомиров А. С. Модули полустабильных пучков ранга три с особенностями смешанной размерности на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 1. С. 73–87.
3. Comaschi G., Jardim M., Martinez C., Mu D. Instanton sheaves: the next frontier // São Paulo J. Math. Sci. 2024. V. 18. P. 639–675.
4. Васильев Д. А., Тихомиров А. С. Модули полустабильных пучков ранга два на рациональных трехмерных многообразиях Фано основной серии // Мат. сб. 2024. Т. 215, № 10. С. 3–57.
5. Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 3. С. 516–562.
6. Iskovskikh V. A., Prokhorov Yu. G. Fano varieties // Algebraic geometry V. Encyclopaedia Math. Sci. Berlin: Springer, 1999. V. 47. P. 1–247.
7. Costa L., Miró-Roig R. M. Monads and instanton bundles on smooth hyperquadrics // Math. Nachr. 2009. V. 282, N 2. P. 169–179.
8. Kuznetsov A. Instanton bundles on Fano threefolds // Cent. Eur. J. Math. 2012. V. 10, N 4. P. 1198–1231.
9. Faenzi D. Even and odd instanton bundles on Fano threefolds of Picard number one // Manuscripta Math. 2014. V. 144, N 1–2. P. 199–239.
10. Ballico E., Miró-Roig R. M. A lower bound for the number of components of the moduli schemes of stable rank 2 vector bundles on projective 3-folds // Proc. Am. Math. Soc. 1999. V. 127. P. 2557–2560.
11. Hartshorne R. Stable reflexive sheaves // Math. Ann. 1980. V. 254. P. 121–176.
12. Schmidt B. Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space // Mat. Contemp. 2020. V. 47. P. 228–270.
13. Schmidt B. Sheaves of low rank in three-dimensional projective space // Eur. J. Math. 2023. V. 9, N 4. Article no 103. 71 pp.

Поступила в редакцию 19 февраля 2026 г.

После доработки 30 марта 2026 г.

Принята к публикации 6 июня 2026 г.

Кытманов Алексей Александрович (ORCID 0000-0003-3325-099X)
МИРЭА — Российский технологический университет,
пр. Вернадского, 78, Москва 119454
kytmanov@mirea.ru

Осипов Николай Николаевич (ORCID 0000-0002-8894-609X)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nnosipov@gmail.com

Тихомиров Сергей Александрович (ORCID 0000-0002-7409-8464)
Ярославский гос. педагогический университет им. К. Д. Ушинского,
ул. Республиканская, 108, Ярославль 150000
satikhomirov@mail.ru