

УДК 512.54:517.986.6

ТРАНСЛЯЦИОННО ИНВАРИАНТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ОДНОМЕРНЫЕ КОГОМОЛОГИИ ОРЛИЧА

Я. А. Копылов

Аннотация. Обсуждается связь одномерных ℓ^Φ -когомологий бесконечной конечно порожденной группы, где Φ — N -функция, вместе с дополнительной N -функцией удовлетворяющей условию удвоения, и трансляционно инвариантных линейных функционалов на факторпространстве пространства Φ -Дирихле конечных функций по константам.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.512

Ключевые слова: конечно порожденная группа, пространство Орлича, когомологии, трансляционно инвариантный линейный функционал.

Введение

Пусть G — локально компактная хаусдорфова топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство вещественных функций на G , инвариантное относительно левых сдвигов. Для $g \in G$ и $f \in E$ положим $(\lambda_G(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$, $x \in G$. Линейный функционал $\varkappa$ на E называется *трансляционно инвариантным*, если $\varkappa(\lambda_G(g)f) = \varkappa(f)$ для любых $g \in G$ и $f \in E$. Интересным является вопрос о существовании разрывных трансляционно инвариантных линейных функционалов на E .

Трансляционно инвариантные линейные функционалы в различных функциональных пространствах и, в частности, в пространствах L^p , на локально компактных топологических группах изучались различными авторами (см., например, [1–4]). В [5] рассматривались вопросы о существовании нетривиальных трансляционно инвариантных линейных функционалов на пространствах Орлича на локально компактных группах.

В [4] Палс установил связь между одномерными L_p -когомологиями бесконечной конечно порожденной группы G и трансляционно инвариантными линейными функционалами на факторпространстве $D^p(G)/\mathbb{R}$, где $D^p(G)$ — пространство p -Дирихле конечных функций на G .

В настоящей работе некоторые из результатов [4] обобщаются на пространства Орлича $\ell^\Phi(G)$, где Φ — N -функция, которая вместе с дополнительной N -функцией удовлетворяет условию удвоения (для малых значений переменной).

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF–2026–0026).

§ 1. N -функции и пространства Орлича

Напомним некоторые понятия теории (дискретных) пространств Орлича, необходимые для дальнейшей работы. Далее X — счетное множество, наделенное считающей мерой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется N -функцией, если

- (i) Φ четна и выпукла;
- (ii) $\Phi(x) = 0 \iff x = 0$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$.

N -функция Ψ , *дополнительная* к N -функции Φ , задается формулой

$$\Psi(y) = \sup\{x|y| - \Phi(x) : x \geq 0\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно видеть, что если Ψ — дополнительная N -функция к Φ , то Φ — дополнительная N -функция к Ψ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Говорят, что N -функция Φ *удовлетворяет Δ_2 -условию* (или *условию удвоения*) *для малых x* , и пишут $\Phi \in \Delta_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$, $K > 2$ такие, что $\Phi(2x) \leq K\Phi(x)$ для $0 \leq x \leq x_0$, и говорят, что функция Φ *удовлетворяет ∇_2 -условию для малых x* , и пишут $\Phi \in \nabla_2(0)$, если существуют константы $x_0 > 0$ и $c > 1$ такие, что $\Phi(x) \leq \frac{1}{2c}\Phi(cx)$ для $0 \leq x \leq x_0$.

Если указанные неравенства выполнены для всех $x \geq 0$, то говорят, что Φ принадлежит Δ_2 (соответственно Φ принадлежит ∇_2).

Как хорошо известно, N -функция Φ принадлежит $\Delta_2(0)$ тогда и только тогда, когда дополнительная N -функция Ψ принадлежит $\nabla_2(0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Линейное пространство

$$\ell^\Phi(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in X} \Phi(af(x)) < \infty \text{ для некоторого } a > 0 \right\}$$

называется *пространством Орлича* $\ell^\Phi(X)$.

Как известно, если $\Phi \in \Delta_2(0)$, то

$$\ell^\Phi(X) = \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{R} : \sum_{x \in X} \Phi(f(x)) < \infty \right\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Калибровочной нормой* (или *нормой Люксембурга*) функции $f \in \ell^\Phi(X)$ называется

$$\|f\|_{(\Phi)} := \|f\|_{\ell^{(\Phi)}(X)} := \inf \left\{ k > 0 : \sum_{x \in X} \Phi\left(\frac{f(x)}{k}\right) \leq 1 \right\}.$$

Неравенство Гёльдера. Если Φ и Ψ — дополнительные друг к другу N -функции, $f \in \ell^\Phi(X)$, $g \in \ell^\Psi(X)$, то $fg \in \ell^1(X)$ и

$$\|fg\|_1 \leq 2\|f\|_{(\Phi)}\|g\|_{(\Psi)}.$$

**§ 2. ℓ^Φ -когомологии, Φ -гармонические
функции и трансляционно
инвариантные линейные функционалы**

Пусть G — локально компактная топологическая группа, и пусть E — топологическое векторное пространство вещественных функций на G , инвариантное относительно левых сдвигов. Следуя [4], обозначим символом $\text{Diff}(E)$ линейную оболочку множества $\{\lambda_G(g)f - f : f \in E, g \in G\}$.

Всюду далее предполагается, что G — бесконечная конечно порожденная группа с симметричным порождающим множеством S . Все рассматриваемые ниже пространства вещественны.

Если Φ — N -функция, то определено пространство Орлича $\ell^\Phi(G)$, как и выше, снабженное калибровочной нормой $\|\cdot\|_{(\Phi)}$.

Всюду ниже предполагается, что $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$.

Пусть $\mathcal{F}(G, \mathbb{R})$ — множество всех вещественных функций на G . Следуя [6], определим пространство Φ -Дирихле конечных функций на G следующим образом:

$$\begin{aligned} D^\Phi(G) &= \{f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}) \mid \lambda_G(x)f - f \in \ell^\Phi(G) \text{ для всех } x \in G\} \\ &= \{f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R}) \mid \lambda_G(s)f - f \in \ell^\Phi(G) \text{ для всех } s \in S\}. \end{aligned}$$

Положим $\mathcal{D}^\Phi(G) = D^\Phi(G)/\mathbb{R}$. Пространство $\mathcal{D}^\Phi(G)$ банахово относительно нормы

$$\|f\|_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \sum_{s \in S} \|\lambda_G(s)f - f\|_{(\Phi)}.$$

Из определения следует, что выполнены вложения

$$\text{Diff}(\ell^\Phi(G)) \subset \text{Diff}(\mathcal{D}^\Phi(G)) \subset \ell^\Phi(G) \subset \mathcal{D}^\Phi(G).$$

Если A — подмножество нормированного пространства X , то везде символом $(\overline{A})_X$ обозначено замыкание A в X .

Как известно, для счетного множества X со считающей мерой из совпадения двух N -функций Φ_1 и Φ_2 в окрестности нуля следует, что $\ell^{\Phi_1}(X)$ и $\ell^{\Phi_2}(X)$ совпадают как множества, а соответствующие нормы Люксембурга эквивалентны. Нетрудно видеть также, что любую функцию класса $\Delta_2(0)$ можно изменить вне некоторой окрестности нуля таким образом, чтобы полученная функция была N -функцией класса Δ_2 . Тем самым в утверждениях, где для общих пространств с мерой требуется выполнение для N -функции Φ условия Δ_2 (соответственно ∇_2), для пространств со считающей мерой всегда достаточно требовать, чтобы $\Phi \in \Delta_2(0)$ (соответственно $\Phi \in \nabla_2(0)$). Это же справедливо для доказательств в [5]. Учитывая это замечание, получаем следующую дискретную версию теорем 2 и 3 для конечно порожденной бесконечной группы.

Теорема 2.1. Пусть G — конечно порожденная бесконечная группа, Φ — N -функция. Справедливы следующие утверждения.

1) Пусть G аменабельна, $\Phi \in \Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Тогда на пространстве $\ell^\Phi(G)$ имеются разрывные ТИЛФ.

2) Пусть G неаманабельна, $\Phi \in \nabla_2(0)$. Тогда на $\ell^\Phi(G)$ нет ненулевых ТИЛФ.

Следующая лемма играет важную роль в дальнейшем.

Лемма 2.2. $\overline{(\text{Diff}(\mathcal{D}^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \ell^\Phi(G)$. По лемме 1 работы [5], примененной с учетом замечания перед теоремой 2.1, существует последовательность $\{f_n\}$ в $\text{Diff}(\ell^\Phi(G))$, сходящаяся к f по ℓ^Φ -норме. Тогда для $s \in S$ имеем

$$\begin{aligned} \|(\lambda_G(s))(f - f_n) - (f - f_n)\|_{(\Phi)} \\ \leq \|(\lambda_G(s))(f - f_n)\|_{(\Phi)} + \|f - f_n\|_{(\Phi)} = 2\|f - f_n\|_{(\Phi)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, $\|f - f_n\|_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, откуда $f \in \overline{(\text{Diff}(\ell^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. Следовательно, $\ell^\Phi(G) \subset \overline{(\text{Diff}(\ell^\Phi(G)))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. $\square$

Как известно (см. [6]), пространство $\mathcal{D}^\Phi(G)/\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$ совпадает с редуцированными одномерными ℓ^Φ -когомологиями $\overline{H}_\Phi^1(G)$ группы G , т. е. редуцированными одномерными групповыми когомологиями G с коэффициентами в G -модуле $\ell^\Phi(G)$. Таким образом, $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$.

Рассмотрим вопрос существования непрерывных трансляционно инвариантных линейных функционалов на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.3. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Следующие утверждения эквивалентны.

- (i) $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$;
- (ii) Единственным непрерывным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ является нулевой.

Если группа G неамenable, то эти утверждения также эквивалентны следующему утверждению.

- (iii) Нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) $\iff$ (ii) Если $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$. Из теоремы Хана — Банаха следует, что существует ненулевой непрерывный линейный функционал T на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ такой, что $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \subset \text{Ker } T$. Функционал T трансляционно инвариантен по лемме 2.2.

Обратно, если T — непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$, то $T(f) = 0$ для всех $f \in \overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$. Следовательно, если существует ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал $\mathcal{D}^\Phi(G)$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \neq \mathcal{D}^\Phi(G)$.

Предположим теперь, что группа G неамenable.

Заметим также, что если $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$, то $\overline{(\ell^\Phi(G))}_{\mathcal{D}^\Phi(G)} = \mathcal{D}^\Phi(G)$. Известно, что $\ell^\Phi(G)$ замкнуто в $\mathcal{D}^\Phi(G)$ тогда и только тогда, когда G неамenable (см. [6, предложение 2.2] или [7, теорема 3.2]). По теореме 2.1(2) так как G неамenable, то нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\ell^\Phi(G)$. Следовательно, нулевой функционал является единственным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$, если G неамenable и $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$. $\square$

Пусть $f \in \mathcal{F}(G, \mathbb{R})$ и $g \in G$. Для непрерывно дифференцируемой N -функции Φ положим

$$\Delta_\Phi f(g) = \sum_{s \in S} \Phi'(f(s^{-1}g) - f(g)).$$

Будем называть функцию f Φ -гармонической, если $f \in D^\Phi(G)$ и $\Delta_\Phi f(g) = 0$ для всех $g \in G$. Обозначим множество Φ -гармонических функций на G символом $HD^\Phi(G)$. Все постоянные функции принадлежат $HD^\Phi(G)$. Φ -гармонические функции на группах и графах рассматривались, например, в [6, 8, 9].

Теорема 2.4. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (i) $HD^\Phi(G) = \mathbb{R}$.
- (ii) Единственным непрерывным трансляционно инвариантным линейным функционалом на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ является нулевой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из следствия 3.7 работы [6] вытекает, что $\overline{H}_\Phi^1(G) = 0$ тогда и только тогда, когда единственными Φ -гармоническими функциями на G являются постоянные функции. Результат теперь следует из теоремы 2.3. $\square$

В случае, когда Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$ и $\overline{H}_\Phi^1(G) \neq 0$ (что эквивалентно $HD^\Phi(G) \neq \mathbb{R}$), нетрудно явно построить ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

Пусть $f, h \in \mathcal{D}^\Phi(G)$. Положим

$$\langle \Delta_\Phi h, f \rangle = \sum_{g \in G} \sum_{s \in S} \Phi'(h(s^{-1}g) - h(g))(f(s^{-1}g) - f(g)). \quad (1)$$

Сумма в (1) определена в силу неравенства Гёльдера для пространств Орлича, поскольку, как известно (см., например, [6, предложение 1.9]), для N -функции Φ класса $\Delta_2(0)$ и функции $a \in \ell^\Phi(G)$ функция $\Phi'(|a|)$ (а вместе с ней и $\Phi'(a)$ в силу нечетности Φ') принадлежит пространству ℓ^Ψ , где Ψ — дополнительная к Φ N -функция.

Следующее утверждение содержится в [6, лемма 3.5].

Предложение 2.5. Пусть Φ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Если $h \in HD^\Phi(G)/\mathbb{R}$ и $f \in (\overline{\ell^\Phi(G)})_{\mathcal{D}^\Phi(G)}$, то $\langle \Delta_\Phi h, f \rangle = 0$.

Следовательно, в случае ненулевого $h \in HD^\Phi(G)/\mathbb{R}$ выражение $\langle \Delta_\Phi h, \cdot \rangle$ определяет ненулевой непрерывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$. В самом деле, так как $\lambda_G(x)f - f \in \ell^\Phi(G)$ при всех $x \in G$, то $\langle \Delta_\Phi h, \lambda_G(x)f - f \rangle = 0$ и тем самым $\langle \Delta_\Phi h, \lambda_G(x)f \rangle = \langle \Delta_\Phi h, f \rangle$ при всех $x \in G$, т. е. рассматриваемый функционал трансляционно инвариантен. Докажем, что он ненулевой. Рассмотрим выражение

$$\langle \Delta_\Phi h, h \rangle = \sum_{g \in G} \sum_{s \in S} \Phi'(h(s^{-1}g) - h(g))(h(s^{-1}g) - h(g)). \quad (2)$$

Так как дифференцируемая функция Φ четна и строго выпукла, то ее производная Φ' строго возрастает и потому $x\Phi'(x) > 0$ при $x \neq 0$. Значит, все слагаемые в правой части (2) неотрицательны, причем слагаемое, соответствующее паре (g, s) , равно нулю тогда и только тогда, когда $h(s^{-1}g) - h(g) = 0$. Так как S порождает группу G , а функция h непостоянна, то хотя бы одно из слагаемых положительно. Стало быть, $\langle \Delta_\Phi h, h \rangle > 0$.

Для аменабельной группы справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.6. Пусть G — бесконечная конечно порожденная группа и Φ — N -функция класса $\Delta_2(0) \cap \nabla_2(0)$. Если G — аменабельная группа, то существует разрывный трансляционно инвариантный линейный функционал на $\mathcal{D}^\Phi(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in (\overline{\ell^\Phi(G)})_{\mathcal{D}^\Phi(G)} \setminus \ell^\Phi(G)$. Такой элемент существует, поскольку $\ell^\Phi(G)$ не замкнуто в $\mathcal{D}^\Phi(G)$, когда G аменабельна. Пусть Σ — базис Гамеля для $\ell^\Phi(G)$ и Ξ — базис Гамеля для $\mathcal{D}^\Phi(G)$, содержащий Σ и h . Значит, существует линейный функционал T на $\mathcal{D}^\Phi(G)$ такой, что $T(h) \neq 0$ и $T(f) = 0$ для всех $f \in \ell^\Phi(G)$. Таким образом, функционал T трансляционно инвариантен. Он разрывен по лемме 2.2. $\square$

Благодарность. Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение статьи и очень полезные замечания, которые способствовали улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Woodward G. S. Translation-invariant linear forms on $C_0(G)$, $C(G)$, $L^p(G)$ for noncompact groups // J. Func. Anal. 1974. V. 16, N 2. P. 205–220.
2. Willis G. A. Translation invariant functionals on $L^p(G)$ when G is not amenable // J. Aust. Math. Soc., Ser. A. 1986. V. 41, N 2. P. 237–250.
3. Willis G. A. Continuity of translation invariant linear functionals on $C_0(G)$ for certain locally compact groups G // Monatsh. Math. 1988. V. 105, N 2. P. 161–164.
4. Puls M. J. Graphs of bounded degree and the p -harmonic boundary // Pacif. J. Math. 2010. V. 248, N 2. P. 429–452.
5. Копылов Я. А. Трансляционно инвариантные линейные функционалы в пространствах Орлича на локально компактных группах // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 901–908.
6. Копылов Я. А., Паненко Р. А. Φ -гармонические функции на дискретных группах и первые ℓ^Φ -когомологии // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1104–1117.
7. Kopylov Ya. A. The first Orlicz cohomology of general discrete groups // J. Math. Sci., New York. 2024. V. 281, N 5. P. 692–705.
8. Паненко Р. А. Φ -гармонические функции на графах // Сиб. электрон. мат. изв. 2017. Т. 14. С. 1–9.
9. Kopylov Ya., Sequeira E. On asymptotic and continuous group Orlicz cohomology // Ann. Inst. Fourier. 2025. V. 75, N 5. P. 1855–1898.

Поступила в редакцию 13 мая 2026 г.

После доработки 7 августа 2026 г.

Принята к публикации 7 августа 2026 г.

Копылов Ярослав Анатольевич (ORCID 0000-0002-0343-4424)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
yakor@math.nsc.ru