

УДК 517.518

ПРИМЕР ЛИПШИЦЕВА ГРАФИКА ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП ЭНГЕЛЯ И ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для липшицевых отображений-графиков, определенных на группе Энгеля, установлен явный вид субриманова дифференциала и выведен явный вид формулы площади. Приведен пример нетривиального отображения групп Энгеля, график которого является липшицевым во внутреннем смысле отображением трехступенчатых групп Карно.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.511

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, группа Энгеля, трехступенчатая группа Карно.

В недавней статье [1] исследовался вопрос, при каких условиях график, построенный по произвольному отображению групп Энгеля, является липшицевым относительно внутренних (согласованных с субримановой структурой) расстояний. Условия на отображения, в частности, на их дифференциальные свойства, были установлены в явном виде. Кроме того, в [1] приводились примеры, когда графики строились по двум отображениям, фактически зависящим от горизонтальных координат. Сам по себе вопрос существования липшицевых во внутреннем смысле отображений является достаточно трудоемкой задачей; кроме того, условия, установленные в критерии липшицевости графика, являются довольно жесткими и могут привести к системам дифференциальных уравнений, разрешимых только на подмногообразиях области определения, когда часть переменных связана определенными соотношениями, а не на всей группе. Особый интерес представляет случай, когда, во-первых, у отображений, по которым строится график, есть зависимость и от негоризонтальных координат и, во-вторых, когда поля на образе и прообразе отображения не коммутируют. Мы приводим несложный пример такого отображения и структуры. Кроме того, на базе результатов [1] для общего случая липшицевых графиков, построенных по отображениям групп Энгеля, выведен явный вид формулы площади. Отметим, что несмотря на то, что группа Энгеля является модельным случаем трехступенчатой группы Карно и имеет относительно «простую» структуру, ее свойства широко применяются при решении задач субримановой геометрии и связанных с ними прикладных вопросов (см., например, [2] и ссылки на литературу). С другой стороны, классы отображений-графиков неголономных структур исследуется достаточно интенсивно [3–14] в связи с перспективностью применения к практическим задачам [15–17] и др.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

© 2026 Карманова М. Б.

1. Основные определения

Напомним базовые определения, которые потребуются в ходе решения задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [18]. Трехступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде

$$V = \bigoplus_{k=1}^3 V_k, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad [V_1, V_3] = \{0\}.$$

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$. Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_k , $k = 1, 2, 3$.

Группа Энгеля является важным частным случаем трехступенчатой группы Карно (см., например, [2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа Энгеля — это четырехмерная группа Карно, где $V_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$, $V_2 = \text{span}\{X_3\}$, $V_3 = \text{span}\{X_4\}$. Кроме того, верно

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Групповая операция на трехступенчатых группах Карно определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа вида (1.1): если поля X и Y — линейные комбинации базисных полей с постоянными коэффициентами, $x = \exp(X)(\mathbf{0})$, $y = \exp(Y)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp(Y)(x) = \exp(Z)(\mathbf{0})$, где

$$Z = X + Y + 1/2 \cdot [X, Y] + 1/12 \cdot ([X - Y], [X, Y]). \quad (1.1)$$

Нам также потребуется следующее свойство базисных полей на группах Карно (см., например, [18]):

$$[X_i, X_j] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k, \quad (1.2)$$

где c_{ijk} постоянны.

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см., например, [19]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=3} w_j^2\right)^{\frac{1}{6}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$ и $\varphi : E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_2(x, y),$$

где $\tilde{d}_2$ — квазиметрика на $\tilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 3.

Напомним основной результат [1], где описывается критерий липшицевости отображения-графика. Сначала перечислим условия, при которых решается задача, и приведем необходимые термины и факты теории.

Предположение 5. Пусть $\hat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатая группа Карно с базисными векторными полями $\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_8$, которые образуют алгебру Ли $\hat{V} = \bigoplus_{k=1}^3 \hat{V}_k$, где $\hat{V}_1 = \text{span}\{\hat{X}_1, \dots, \hat{X}_4\}$, $\hat{V}_2 = \text{span}\{\hat{X}_5, \hat{X}_6\}$, $\hat{V}_3 = \text{span}\{\hat{X}_7, \hat{X}_8\}$, причем

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = \hat{X}_5, [\hat{X}_3, \hat{X}_4] = \hat{X}_6, [\hat{X}_1, \hat{X}_5] = \hat{X}_7, [\hat{X}_3, \hat{X}_6] = \hat{X}_8,$$

и, кроме того, $[\hat{X}_2, \hat{X}_5] = [\hat{X}_4, \hat{X}_6] = 0$.

Для остальных коммутаторов полей верны соотношения

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_{l: \deg \hat{X}_l = \deg \hat{X}_i + \deg \hat{X}_j} c_{ijl} \hat{X}_l.$$

Тогда поля $\hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_5, \hat{X}_7$ определяют структуру алгебры Ли группы Энгеля $\mathbb{G}$, а поля $\hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{X}_6, \hat{X}_8$ — структуру алгебры Ли группы Энгеля $\tilde{\mathbb{G}}$. Будем также считать, что $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам групп $\mathbf{0}$ и $\tilde{\mathbf{0}}$ соответственно в единице $\hat{\mathbf{0}}$ группы $\hat{\mathbb{G}}$.

Для удобства восприятия текста и согласованности номеров полей, координат элементов и координатных функций у отображений, введем

ОБОЗНАЧЕНИЕ 6. Положим $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{5\}$, $I_3 = \{7\}$ и $\tilde{I}_1 = \{3, 4\}$, $\tilde{I}_2 = \{6\}$, $\tilde{I}_3 = \{8\}$.

Так как $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}} \subset \hat{\mathbb{G}}$, то для $x \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ положим

$$x = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in I_i} x_k \hat{X}_k \right) (\hat{\mathbf{0}})$$

и

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(x) \hat{X}_k \right) (\hat{\mathbf{0}}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Функции φ_k будем называть *координатными функциями* отображения $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Если $k \in \tilde{I}_1$, то такие координатные функции будем называть *горизонтальными*.

Напомним определение отображения-графика на группе Карно для исследуемого случая.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Пусть $u \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Значение *отображения-графика* $\varphi_{\Gamma}(u)$ совпадает с элементом

$$\varphi_{\Gamma}(u) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(u) \hat{X}_k \right) (u).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 9. Пусть $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ — группы Энгеля, $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ и $u, w \in \mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\{\varphi_u^k(w)\}$, где

$$\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_u^k(w) \hat{X}_k\right)(\varphi(u)).$$

Явный вид таких координат играет важную роль в исследовании свойства липшицевости графиков и вывода свойств отображений, по которым эти графики строятся. Из (1.1) и (1.2) следует, что $\varphi_u^k(w) = \varphi_k(w) - \varphi_k(u)$ для $k \in \tilde{I}_1$. Если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)).$$

При $k = 8 \in \tilde{I}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) = & \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)) \\ & - \frac{1}{12}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Для формулировки базового утверждения нам потребуется

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 ([20], см. также [21]). Функция $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является *hc-дифференцируемой*, или *субриманово дифференцируемой*, в точке $x \in \mathbb{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k X_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim V_1} a_i(x) y_i = f(x) + \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - f(x) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(d_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется *hc-дифференциалом*, или *субримановым дифференциалом*, или *горизонтальным градиентом* функции f в точке x .

ОБОЗНАЧЕНИЕ 11. Для $k \in \tilde{I}_1$ положим

$$\nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle = \sum_{l:l \in I_1} \varphi_{kl}(u) w_l.$$

Сформулируем основные утверждения критерия липшицевости [1] графика, которые будут применены в настоящем исследовании.

Теорема 12. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 5 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(w),$$

где $\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(\mathbf{0})$, является локально липшицевым относительно d_2 и $\hat{d}_2$ с hc-дифференцируемыми горизонтальными координатными функциями тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции φ_j локально липшицевы во внутреннем смысле и h -дифференцируемы всюду, если $j \in \tilde{I}_1$.
2. Верно

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек $u \in \mathbb{G}$.

3. Для $k = 6 \in \tilde{I}_2$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_5|$, а при $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$ выполняется $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_7|^{2/3}$ для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

4. Верно

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \tilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) &= c_{167} \varphi_6(u) = c_{267} \varphi_6(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) \\ &= \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0 \end{aligned}$$

для всех точек $u \in \mathbb{G}$.

5. Для $k = 8 \in \tilde{I}_3$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в точке u дважды, ее первый дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j,$$

второй дифференциал равен

$$\begin{aligned} &\sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \varphi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \varphi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l. \end{aligned}$$

Если же $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$, то $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. В точках вида $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$ отображение $\varphi_u^8(w)$ дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен $-\sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u)$, и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

6. Выполнено условие о скоростях сходимости к нулю разностей отображений и их дифференциалов; см. подробности в [1, теорема 12].

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Для вывода формулы площади и для построения примера явный вид условия 6 не потребуется, поэтому оно здесь полностью не приводится. Кроме того, так как в примере мы будем строить гладкое отображение, для

которого условие 6 выполнено всегда, то в нем также нет необходимости. Отметим, что условие 6 выполнено для всех отображений $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$, координатные функции которых принадлежат классу C^3 .

2. Площадь поверхностей-графиков

В данном разделе выведем формулу для липшицевых поверхностей-графиков, где график построен по отображению, удовлетворяющему условиям теоремы 12. В частности, опишем структуру *hc*-дифференциала, который является субримановым аналогом дифференциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 ([20]; см. также [21]). Пусть $\mathbb{G}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $\Omega \subset \mathbb{G}$ и $\xi : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$. Отображение ξ является *hc-дифференцируемым*, или *дифференцируемым в субримановом смысле*, в (предельной) точке $x \in \Omega$, если существует горизонтальный гомоморфизм $\mathcal{L}_x : \mathbb{G} \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ такой, что

$$\widehat{d}_2(\xi(y), \mathcal{L}_x(y)) = o(1) \cdot d_2(x, y), \text{ где } o(1) \rightarrow 0 \text{ при } \Omega \ni y \rightarrow x.$$

hc-Дифференциал (или *субриманов дифференциал*) $\mathcal{L}_x$ обозначается символом $\widehat{D}\xi(x)$.

Следующий результат установлен Пансю в [20] для открытых множеств и С. К. Водопьяновым (см. также, например, [21]) для измеримых множеств. Сформулируем его для нашего случая.

Теорема 15. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widehat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатые группы Карно, $D \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество и $\xi : D \rightarrow \widehat{\mathbb{G}}$ — липшицево во внутреннем смысле отображение. Тогда оно *hc-дифференцируемо почти всюду*. Кроме того, матрица $\widehat{D}\xi$ в базисах $\{X_i\}_{i=1}^N$ и $\{\widehat{X}_j\}_{j=1}^{\widehat{N}}$ состоит из «диагональных» $(\dim \widehat{V}_k \times \dim V_k)$ -блоков, а остальные элементы нулевые, $k = 1, 2, 3$.

Здесь $\widehat{V} = \bigoplus_{j=1}^3 \widehat{V}_j$ — алгебра Ли векторных полей на $\widehat{\mathbb{G}}$.

ОБОЗНАЧЕНИЕ 16. Здесь и далее под «диагональными» блоками понимаются блоки, состоящие из элементов, номер строки которых соответствует полям из $\widehat{V}_k$, а номер столбца — полям из V_k , $k = 1, 2, 3$. Таким образом, размер этих блоков равен $\dim \widehat{V}_k \times \dim V_k$, $k = 1, 2, 3$.

Так как речь идет о субримановой площади, введем понятие соответствующих мер на прообразе и образе.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17. Значение *субримановой меры* для $A \subset \mathbb{G}$ равно

$$\mathcal{H}^\nu(A) = \prod_{k=1}^3 \omega_{\dim V_k} \cdot \liminf_{\delta \rightarrow 0} \left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} r_i^\nu : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{Box}_2(x_i, r_i) \supset A, x_i \in A, r_i < \delta \right\},$$

где $\nu = \sum_{k=1}^3 k \dim V_k$ — хаусдорфова размерность $\mathbb{G}$ относительно d_2 , ω_m обозначает объем единичного шара в $\mathbb{R}^m$, а точная нижняя грань берется по всем покрытиям множества A .

Если же $B = \varphi_\Gamma(A) \subset \widehat{\mathbb{G}}$ — образ измеримого множества при липшицевом отображении-графике, то значение $\mathcal{H}^\nu(B)$ определяется аналогично с той разницей, что шары покрытия берутся относительно $\widehat{d}_2$.

Несмотря на нестандартное определение (добавлено условие принадлежности центров шаров покрытия измеряемому множеству), функция множества

$\mathcal{H}^\nu$ является мерой и на образе, и на прообразе. В частности, она обладает свойством счетной аддитивности на сигма-алгебре борелевских множеств (см. схему доказательства, например, в [22]).

ОБОЗНАЧЕНИЕ 18. Для $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$ положим

$$\varphi_u^H(w) = \exp(\varphi_3(w) \hat{X}_3 + \varphi_4(w) \hat{X}_4)(\varphi(u)).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 19. Фактически для фиксированного $u \in \mathbb{G}$ в условиях обозначения 18 $\varphi_u^H(w)$ является отображением двумерной поверхности на поверхность размерности не выше двух.

Теорема 20. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 5, а $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ удовлетворяет условиям теоремы 12, т. е. построенное по нему отображение-график φ_Γ является липшицевым во внутреннем смысле. Пусть $u \in \mathbb{G}$ — точка hc -дифференцируемости φ_Γ . Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_i(w)$, $i \in \tilde{I}_1$, является дифференцируемой в точке u и значение ее дифференциала в точке $u \in \mathbb{G}$ на элементе w совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_i$. Кроме того, отображение $\varphi_u^H(w)$ также является дифференцируемым в таких точках полями $\hat{X}_1$ и $\hat{X}_2$, а матрица его дифференциала совпадает с блоком матрицы hc -дифференциала φ_Γ , лежащим на пересечении 3 и 4 строк и 1 и 2 столбцов.
2. Если $i \in \tilde{I}_2$ и $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ является дифференцируемой в точке u и значение $\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u} \cdot w_5$ совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_6$.
3. Если $i \in \tilde{I}_3$ и $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ является дифференцируемой в точке u и значение $\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u} \cdot w_7$ совпадает с $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u)\langle w \rangle)_8$.

Кроме того, субриманов дифференциал φ_Γ в точках, где он существует, имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ D\varphi_u^H(u) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где E_2 — единичная матрица размера 2,

$$D\varphi_u^H(u) = \begin{pmatrix} \varphi_{31}(u) & \varphi_{32}(u) \\ \varphi_{41}(u) & \varphi_{42}(u) \end{pmatrix}$$

и для φ_Γ справедлива формула площади

$$\int_A \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u) d\mathcal{H}^\nu(u) = \mathcal{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u)$ совпадает со значением

$$\sqrt{\det(E_2 + (D\varphi_u^H)^*(u)D\varphi_u^H(u)) \cdot (1 + (\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u})^2) \cdot (1 + (\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u})^2)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства утверждений о структуре hc -дифференциала применим выведенные в [1] координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Пусть $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\hat{N}} s_k \hat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u))$. Тогда из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \tilde{I}_1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то $d_2(u, w)$ сравнимо с расстоянием между этими точками, посчитанным относительно римановой метрики. Поэтому первое утверждение вытекает из определения 10 и (2.2). Кроме того, из hc -дифференцируемости φ_Γ следует классическая дифференцируемость отображения $w \mapsto \varphi_u^H(w)$ в точке u , если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. Из доказанного получаем, что первый блок матрицы субриманова дифференциала φ_Γ размера 4×2 равен

$$\begin{pmatrix} E_2 \\ D\varphi_u^H(u) \end{pmatrix}.$$

Установим второе утверждение. Имеем

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5 + o(d_2(u, w)^2),$$

или

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} - o(d_2(u, w)^2) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5,$$

где правая часть не зависит от всех координат за исключением w_5 . Положим $w_1 = w_2 = w_7 = 0$. Тогда, во-первых, $d_2(u, w)^2 = |w_5|$ и, во-вторых,

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + o(d_2(u, w)^2) = (\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65} \cdot w_5,$$

откуда следует дифференцируемость отображения $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ в точке u , если $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, где значение $\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u}$ равно $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{65}$.

Третье утверждение о дифференцируемости s_8 и равенстве $\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u}$ значению $(\hat{D}\varphi_\Gamma(u))_{87}$ доказывается аналогично.

Таким образом, доказаны три утверждения о дифференциальных свойствах φ и установлена структура (2.1) субриманова дифференциала отображения-графика.

Так как отображение-график является липшицевым во внутреннем смысле отображением, то для него справедлива формула площади (см., например, [23, 22]), которая с учетом установленных результатов имеет вид

$$\int_A \mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u) d\mathcal{H}^\nu(u) = \mathcal{H}^\nu(\varphi_\Gamma(A)),$$

где $A \subset \mathbb{G}$ — измеримое множество, $\mathcal{J}(\varphi_\Gamma, u)$ совпадает со значением

$$\sqrt{\det(E_2 + (D\varphi_u^H)^*(u)D\varphi_u^H(u)) \cdot (1 + (\hat{X}_5 \varphi_u^6(w)|_{w=u})^2) \cdot (1 + (\hat{X}_7 \varphi_u^8(w)|_{w=u})^2)}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Выведенная в теореме 20 формула площади имеет явный вид в терминах производных координатных функций определяющего график отображения вдоль базисных векторных полей. Если в [23, 22] установлен общий вид формулы площади для отображений групп Карно, то результат данной теоремы можно рассматривать как уточнение результатов этих работ для специфических классов отображений. В отличие от формул, установленных, например, в [14], необходимости введения новых объектов, не всегда вычисляемых явно, в исследуемом случае не возникает.

3. Пример отображения

Приведем пример отображения, график которого липшицев во внутреннем смысле и которое зависит не только от горизонтальных координат. Напомним, что в [1] описывались примеры, когда функции зависят только от горизонтальных переменных.

Рассмотрим точки $u, w \in \mathbb{G}$ такие, что $w = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k:k \in I_i} w_k \hat{X}_k\right)(u)$. Для анализа свойств напомним выведенные в [1] координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$, где $\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\hat{N}} s_k \hat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u))$. Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \tilde{I}_1. \end{cases}$$

Если $k = 5 \in I_2$, то $s_5 = w_5$. Аналогично если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk6}, \quad (3.1)$$

причем если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, то функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u и ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}. \quad (3.2)$$

Рассмотрим теперь случаи I_3 и $\tilde{I}_3$. Для $k = 7 \in I_3$ имеем $s_7 = w_7$. Для координаты s_8 имеем

$$\begin{aligned} s_8 = & \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 \\ \text{или } i \in \tilde{I}_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8} (\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 \\ \text{или } i \in \tilde{I}_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8} \varphi_i(u) \\ & + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} \varphi_3(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} (\varphi_3(w) + \varphi_3(u)) \varphi_i(w) w_j \\ & + \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j68} (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) w_j w_i \\ & + \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6} \varphi_i(u) w_j \varphi_3(w) + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)) c_{j68}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Если $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $\varphi_u^8(w)$ должно быть дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u). \quad (3.4)$$

Если $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$, то

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \quad (3.5)$$

является первым дифференциалом, а

$$\begin{aligned} & \sum_{j,l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ & - \sum_{j,l \in I_1} \varphi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ & - \sum_{j,l \in I_1} \varphi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l \quad (3.6) \end{aligned}$$

является вторым дифференциалом отображения $w \xrightarrow{\varphi_u^8} \varphi_u^8(w)$ в точке u по w_1, w_2 .

Таким образом, для составления уравнений используем ограничения, описанные в выражениях (3.2), (3.4) и (3.5); кроме того, для проверки нужно будет убедиться, что выражение (3.1) не превосходит $O(d_2(u, w)^2)$, а (3.3) не превосходит $O(d_2(u, w)^3)$. Кроме того, уравнения должны быть согласованы по коммутаторам векторных полей и должны быть согласованы условия (3.5) и (3.6).

Заметим, что для отображений $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, которые зависят не только от горизонтальных переменных, также справедливо доказанное в [1] утверждение о равенстве классов производных, доказательство которого проводится дословно.

Лемма 22. Если отображение $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ таково, что построенный по нему график является локально липшицевым во внутреннем смысле отображением, горизонтальные координатные функции которого h -дифференцируемы всюду, то должно выполняться соотношение

$$\widehat{X}_j \varphi_4(u) \varphi_3(u) (c_{4l6} + c_{l68}) = \widehat{X}_j \varphi_3(u) \varphi_4(u) (c_{4l6} + c_{l68})$$

для всех $j, l = 1, 2$.

Замечание 23. В работе [1] в описании структур 1.1 и 1.2.1 есть ссылка на частный случай леммы 22, в условиях которой говорится о зависимости только от горизонтальных производных, тогда как в описании самих структур о характере зависимости не уточняется. Тем не менее в силу леммы 22 условия которой подразумевают зависимость не только от горизонтальных производных (в общем случае), высказывание в описании структур 1.1 и 1.2.1 остается корректным.

Опишем структуру трехступенчатой группы Карно, на которой будет принимать значения отображение-график. Для существования структуры нужно,

чтобы выполнялось тождество Якоби, которое в терминах структурных констант из (1.2) для горизонтальных полей имеет вид

$$\begin{cases} c_{235} + c_{236}c_{167} - c_{136}c_{267} + c_{357} = 0, \\ c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{245} + c_{246}c_{167} - c_{146}c_{267} + c_{457} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases}$$

Будем рассматривать подкласс структур 1 из [1], когда $c_{167} = c_{267} = 0$. Кроме того, положим $c_{135} = c_{235} = c_{236} = 0$, а также $\varphi_4 \equiv 0$. При этих предположениях выводим $c_{357} = 0$ и $c_{457} = -c_{245}$. Тогда, во-первых, выполнены условия леммы 22 и, во-вторых,

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0, \end{cases}$$

а с учетом $c_{135} = c_{235} = c_{236} = 0$ верно

$$\begin{cases} -c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Убедимся, что константы, удовлетворяющие системе (3.7), существуют. Положим

$$c_{168} = x, \quad c_{458} = y, \quad c_{268} = z, \quad c_{358} = t$$

и исследуем разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} t = c_{136}z, \\ y = c_{146}z - c_{246}x, \\ x = c_{145}t + c_{146}, \\ z = c_{245}t + c_{246}, \end{cases}$$

которая сводится к системе

$$\begin{cases} t = c_{136}z, \\ y = c_{146}z - c_{246}(c_{145}c_{136}z + c_{146}), \\ x = c_{145}c_{136}z + c_{146}, \\ z = c_{245}c_{136}z + c_{246}. \end{cases}$$

Решения существуют, если либо $c_{245}c_{136} \neq 1$, либо одновременно $c_{245}c_{136} = 1$ и $c_{246} = 0$.

Перейдем к построению примера. Сначала запишем выражения для координатных функций φ_3 , φ_6 и φ_8 отображения φ . Имеем

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u)$$

и

$$\varphi_u^8(w) = \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)),$$

т. е.

$$\varphi_8(w) - \varphi_8(u) = \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\varphi_6(w) - \varphi_6(u)\varphi_3(w)),$$

поэтому для всех i из I_1 , I_2 и I_3 верно

$$\widehat{X}_i\varphi_8(w)|_{w=u} = \widehat{X}_i\varphi_u^8(w)|_{w=u} + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_i\varphi_6(w)|_{w=u} - \varphi_6(u)\widehat{X}_i\varphi_3(w)|_{w=u}).$$

Составим систему уравнений, исходя из описания, полученного в теореме 12. Для искомых функций φ_3 , φ_6 и φ_8 должны выполняться соотношения

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}c_{136}(\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_1\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_5\varphi_8(u) = c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(\varphi_3(u)\widehat{X}_5\varphi_6(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u)). \end{cases}$$

С учетом двух первых уравнений и того, что

$$\widehat{X}_5\varphi_6 = \widehat{X}_1\widehat{X}_2\varphi_6 - \widehat{X}_2\widehat{X}_1\varphi_6 = c_{136}\widehat{X}_2\varphi_3,$$

система упрощается до вида

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_5\varphi_8(u) = c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u) - \varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u)). \end{cases}$$

Заметим, что так как $c_{358} = c_{268}c_{136}$ и

$$\widehat{X}_5\varphi_u^8(w) = [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_u^8(w),$$

то должно выполняться

$$\begin{aligned} \widehat{X}_5\varphi_8(u) &= [\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_8(u) = \widehat{X}_1\left(-c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)\right) \\ &\quad - \widehat{X}_2\left(-c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)\right) \\ &= c_{268}c_{136}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2]\varphi_3(u) \\ &= c_{358}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}(c_{136}\varphi_3(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)) - \frac{1}{2}\varphi_6(u)\widehat{X}_5\varphi_3(u), \end{aligned}$$

что является тождеством. Таким образом, пятое уравнение данной системы является следствием первых четырех.

Получаем систему

$$\begin{cases} \widehat{X}_1\varphi_6(u) = -c_{136}\varphi_3(u), \\ \widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0, \\ \widehat{X}_1\varphi_8(u) = -c_{168}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_1\varphi_3(u)), \\ \widehat{X}_2\varphi_8(u) = -c_{268}\varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\widehat{X}_2\varphi_3(u)). \end{cases} \quad (3.8)$$

Будем считать, что $c_{136} \neq 0$. Стандартными рассуждениями проверяем, что система согласована, и выводим, что таким уравнениям удовлетворяет набор функций

$$\begin{cases} \varphi_3 = -b/c_{136}, \\ \varphi_6 = bu_1 + c, \\ \varphi_8 = -c_{268}bu_5 - c_{268}(bu_1/2 + c)u_2 - c_{168}(bu_1^2/2 + cu_1) + a, \end{cases}$$

где b, c, a — произвольные константы.

Заметим также, что

$$\widehat{X}_1(-c_{j68}\varphi_6(u)) = -c_{j68}\widehat{X}_1\varphi_6(u) = c_{136}c_{j68}\varphi_3(u) = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{1k6}c_{j68}\varphi_k(u)$$

и

$$\widehat{X}_2(-c_{j68}\varphi_6(u)) = -c_{j68}\widehat{X}_2\varphi_6(u) = 0 = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{2k6}c_{j68}\varphi_k(u),$$

если $j = 1, 2$, т. е. все горизонтальные производные горизонтальных компонент дифференциала функции $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ совпадают с горизонтальными компонентами второго дифференциала.

Выпишем теперь компоненты отображения-графика φ_Γ , построенного по отображению

$$u \mapsto \varphi(u) = \exp(\varphi_3(u)\widehat{X}_3 + \varphi_6(u)\widehat{X}_6 + \varphi_8(u)\widehat{X}_8)(\widehat{\mathbf{0}}),$$

и проверим липшицевость для координат (3.1) и (3.3). Для

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\widehat{N}} s_k \widehat{X}_k\right)(\varphi_\Gamma(u)),$$

где

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k\right)(u),$$

имеем $s_k = w_k$ для $k = 1, 2, 5, 7$. Если $k = 3, 4$, то $s_k = 0$. Далее,

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))c_{jk6} = bw_1 + \frac{2}{2}w_1 \cdot (-b/c_{136})c_{136} = 0.$$

Окончательно

$$\begin{aligned} s_8 = \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1} w_j c_{jis}(\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i=3, j=5 \\ \text{или } i=6, j \in I_1}} w_j c_{jis} \varphi_i(u) \\ + \frac{1}{12} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} \varphi_3(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} (\varphi_3(w) + \varphi_3(u)) \varphi_i(w) w_j \\ + \frac{1}{4} \sum_{i=3, j=1} c_{ij6} \varphi_i(u) w_j \varphi_3(w). \end{aligned}$$

С учетом того, что координата точки w при $\widehat{X}_5$ равна $u_5 + w_5 + \frac{1}{2}(u_1 w_2 - u_2 w_1)$ в силу (1.1), выводим, что $s_8 = 0$. Таким образом, $s_3 = s_4 = s_6 = s_8 = 0$. Следовательно, график отображения φ будет липшицев во внутреннем смысле.

При этом, во-первых, есть зависимость координатной функции φ_8 от негоризонтальной координаты u_5 при $c_{268}b \neq 0$ и, во-вторых, есть нетривиальные коммутаторы полей на образе и прообразе.

Кроме того, из (2.1) и теоремы 20 следует, что построенный по найденному отображению φ график сохраняет меру множества, так как якобиан равен единице.

Положим $W = w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2 + w_5\hat{X}_5 + w_7\hat{X}_7$ и $V(u) = \varphi_3(u)\hat{X}_3 + \varphi_6(u)\hat{X}_6 + \varphi_8(u)\hat{X}_8$. Заметим, что в данном случае $\varphi_\Gamma(w) = \exp(W)(\varphi_\Gamma(u))$ для любых u и w из области определения отображения. Следовательно, при фиксации точки u выводим, что

$$\exp(-W) \exp(V(w)) \exp(W)(u) = \exp(V(u))(u),$$

т. е. $\exp(-W) \exp(V(w)) \exp(W)(\mathbf{0}) = u_0$, где u_0 — некоторый постоянный элемент, откуда следует вид построенного отображения в терминах экспоненциальных отображений, тогда как его график является сдвигом на некоторый постоянный элемент. Полученный вид решения системы (3.8) связан с ограничениями, возникающими из условий совместимости такой системы, которые являются следствием вида коммутаторов входящих в нее векторных полей, а также неравенства нулю констант, соответствующих коммутаторам полей из прообраза и образа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Карманова М. Б. Графики отображений групп Энгеля и критерий их внутренней липшицевости // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 4. С. 650–673.
2. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
3. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
4. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
5. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
6. Fomenko A. T. (ed.) Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993 (Adv. Soviet Mathematics; V. 15).
7. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
8. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg groups $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. Reine Angew. Mathematik. 2010. V. 2010, N 648. P. 75–110.
9. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
10. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81. P. 251–295.
11. Garofalo N., Pauls S. D. The Bernstein problem in the Heisenberg group. 2005. arXiv:math/0209065v2.
12. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.
13. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301. P. 1369–1406.
14. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. [Электронный ресурс] arXiv:2311.06638v2 [math.MG]. 2026.
15. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2006. V. 3. P. 145–161.

16. Hladky R. K., Pauls S. D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging Vis. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
17. Petitot J. Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
18. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
19. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
20. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
21. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
22. Карманова М. Б. Площадь образов классов измеримых множеств на группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 926–952.
23. Карманова М. Б. Формула площади для липшицевых отображений пространств Карно — Каратеодори // Изв. РАН. Сер. мат. 2014. Т. 78, № 3. С. 53–78.

Поступила в редакцию 31 июля 2026 г.

После доработки 11 августа 2026 г.

Принята к публикации 11 августа 2026 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com