

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ОБЕРТЫВАЮЩАЯ АЛГЕБРЫ n СОГЛАСОВАННЫХ СКОБОК ЛИ

В. Ю. Губарев, Ч. Чжан

Аннотация. Изучается (мультипликативная) универсальная обертывающая алгебра в смысле В. Гинзбурга и М. Капранова $U(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ набора n согласованных скобок Ли. При помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры $U(\mathfrak{g})$. Найдена асимптотика скорости роста алгебры $U(\mathfrak{g})$ при $n, \dim \mathfrak{g} \gg 1$.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.509

Ключевые слова: универсальная мультипликативная обертывающая алгебра, алгебра Ли согласованных скобок, скорость роста, базис Гребнера — Ширшова.

Введение

Алгебра $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, [\cdot, \cdot]_2 \rangle$ над полем $\mathbb{k}$ принадлежит многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, если $\alpha[\cdot, \cdot]_1 + \beta[\cdot, \cdot]_2$ есть скобка Ли для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{k}$. Аналогично определяется многообразие Lie_n алгебр $\langle L, [\cdot, \cdot]_1, \dots, [\cdot, \cdot]_n \rangle$ n согласованных скобок Ли. Свободные алгебры в многообразии Lie_2 исследовались в работах [1–3]. Кожулевість операды, соответствующей многообразию Lie_2 , была показана в [4].

В 1994 г. В. Гинзбург и М. Капранов [5] определили так называемую (мультипликативную) универсальную обертывающую ассоциативную алгебру $U(A)$ данной алгебры A . Ключевое свойство такой обертывающей заключается в том, что категория модулей над A и категория левых модулей над $U(A)$ эквивалентны.

В 2022 г. А. Хорошкин активно исследовал [6] универсальную мультипликативную обертывающую алгебру в смысле Гинзбурга и Капранова, получив ее явное задание в терминах порождающих и соотношений. Там же А. Хорошкин установил, что универсальная мультипликативная обертывающая алгебра $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$, принадлежащей многообразию Lie_2 пар согласованных скобок Ли, удовлетворяет свойству Пуанкаре — Биркгофа — Витта. Последнее означает, в частности, что базис $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ не зависит от обеих скобок Ли, заданных на $\mathfrak{g}$. В работе 2022 г. [7] В. Ю. Губарев при помощи техники базисов Гребнера — Ширшова нашел базис алгебры $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$ и вычислил ее скорость роста как $m + 1$, где $m = \dim \mathfrak{g}$.

В работе при помощи базисов Гребнера — Ширшова найден базис алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ для произвольного n . Обозначим $m = \dim \mathfrak{g}$. При помощи частично коммутативных алгебр показано, что при $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ асимптотически равна $\alpha n m$, где $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$, а $J_0(z)$ — функция Бесселя первого рода.

В данной работе считаем, что $\text{char } \mathbb{k} = 0$.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, тема FWNF-2026-0017.

Основные сведения о базисах Гребнера — Ширшова

Пусть X непусто, порядок $\leq$, заданный на множестве X^* всех слов в алфавите X , называется *мономиальным*, если из $u \leq v$ следует $wu \leq wv$ и $uw \leq vw$ для любого $w \in X^*$.

Пусть $(X, \leq)$ вполне упорядочено. Зададим на X^* порядок следующим образом: $u = x_1 \dots x_n < v = y_1 \dots y_m$, если и только если $n < m$ или $n = m$ и найдется i такое, что $x_i < y_i$, а $x_j = y_j$ для всех $j < i$. Полученный порядок называется порядком *deg-lex*, и он мономиален.

Зафиксируем некоторое множество X и мономиальный порядок $\leq$ на множестве X^* такой, что $(X^*, \leq)$ является вполне упорядоченным множеством.

Через $\text{As}(X)$ будем обозначать свободную ассоциативную алгебру, порожденную множеством X . Пусть $f \in \text{As}(X)$ — ассоциативный некоммутативный многочлен от X , $f \neq 0$. Обозначим через $\bar{f} \in X^*$ старшее слово многочлена f — самое большое $u \in X^*$, входящее в f с ненулевым коэффициентом. Многочлен f называется *унитарным*, если старшее слово $\bar{f}$ входит в него с коэффициентом, равным единице.

Свойство мономиальности порядка обеспечивает равенство $\overline{fg} = \bar{f}\bar{g} \in X^*$ для любых ненулевых $f, g \in \text{As}(X)$.

Пусть $S \subset \text{As}(X)$ — некоторое множество унитарных многочленов. Слово $u \in X^*$ называется *редуцированным относительно S* , если u нельзя представить в виде $u = u_1 \bar{f} u_2$ ни для каких $u_1, u_2 \in X^*$, $f \in S$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, причем $\omega = \bar{f} = u_1 \bar{g} u_2$ для некоторых $u_1, u_2 \in X^*$. Тогда многочлен $h = f - u_1 g u_2$ называется *композицией включения многочленов f и g* .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть f и g — унитарные многочлены в $\text{As}(X)$, $\omega \in X^*$ — такое слово, что $\omega = \bar{f}u = v\bar{g}$ для некоторых слов $u, v \in X^*$, причем длина ω строго меньше суммы длин $\bar{f}$ и $\bar{g}$. Последнее условие означает, что подслова $\bar{f}$ и $\bar{g}$ пересекаются, а именно, непустое начало слова $\bar{g}$ совпадает с окончанием слова $\bar{f}$. *Композицией пересечения f и g* называется многочлен $h = fu - vg$.

Как видно из определений, с каждой композицией связано некоторое слово $\omega \in X^*$, которое равно большему старшему слову для композиций включения и «объединению» старших слов для композиций пересечения. Чтобы подчеркнуть связь слова ω с той или иной композицией многочленов f и g , используется следующее обозначение: $h = (f, g)_\omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$ и $\omega \in X^*$ — некоторое слово. Многочлен h называется *тривиальным относительно (S, ω)* , если $h = \sum \lambda_i u_i f_i v_i$ для некоторых $\lambda_i \in \mathbb{k}$, $f_i \in S$, $u_i, v_i \in X^*$, причем $u_i \bar{f}_i v_i < \omega$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть S — множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Множество S называется *базисом Гребнера — Ширшова* в $\text{As}(X)$, если любая композиция $(f, g)_\omega$ для $f, g \in S$ тривиальна относительно (S, ω) .

Будем использовать стандартное обозначение $\text{As}(X \mid S)$ копредставления для алгебры $A \cong \text{As}(X)/(S)$.

Теорема 1. Пусть S — некоторое множество унитарных многочленов в $\text{As}(X)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(C1) S является базисом Гребнера — Ширшова;

(C2) если $0 \neq f \in (S)$, то слово $\bar{f}$ не является редуцированным относительно S ;

(C3) образы редуцированных относительно S слов при естественном гомоморфизме $\text{As}(X) \rightarrow \text{As}(X \mid S)$ образуют базис алгебры $\text{As}(X \mid S)$ как векторного пространства.

Базис $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Пусть X — базис алгебры $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок Ли, через $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ обозначим попарно не пересекающиеся множества, каждое из которых биективно X . Согласно следствию 2.11 из статьи [6] мультипликативная универсальная обертывающая ассоциативная алгебра данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок задается как $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(i)} + [x, y]_i = 0$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} - y^{(j)}x^{(i)} + x^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(j)} + ([x, y]_i)^{(j)} + ([x, y]_j)^{(i)} = 0, i < j$.

В [6] для случая $n = 2$ было установлено свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта: существует такая фильтрация на $U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g})$, что $\text{gr } U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}) \cong U_{\text{Lie}_2}(\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0$ есть векторное пространство $\mathfrak{g}$ с тривиальными скобками $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$. Наша ближайшая цель — установить свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта для произвольного n . Свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта означает, что для алгебры $\mathfrak{g}$ с n согласованными скобками Ли и ее универсальной обертывающей алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$ можно найти такую подходящую фильтрацию, что ее градуированная алгебра изоморфна $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0$ представляет собой векторное пространство $\mathfrak{g}$ с n тривиальными скобками Ли.

Мы не будем давать в силу его громоздкости строгого определения операды [5]. Тем не менее попытаемся пояснить суть этого понятия.

Набор линейных пространств $\{\mathcal{C}(n)\}_{n \geq 1}$ над полем $\mathbb{k}$ и множество линейных отображений (правило композиции)

$$\text{Comp}^\pi: \mathcal{C}(n) \otimes \mathcal{C}(m_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{C}(m_n) \rightarrow \mathcal{C}(m),$$

где $\pi = (m_1, \dots, m_n)$ есть n -разбиение числа m , называется *операдой*, если для правила композиции выполнены естественные аналоги ассоциативности и наличия нейтрального элемента. Мы также полагаем, что есть согласованное с правилом композиции действие группы S_n на пространствах $\mathcal{C}(n)$.

Операда $\mathcal{P}$ называется *бинарной*, если она порождена пространством операций $E = \mathcal{P}(2)$, и *квадратичной*, если все соотношения между операциями из $\mathcal{P}(2)$ задаются действием S_2 на $\mathcal{P}(2)$ и определяющими соотношениями R пространства $\mathcal{P}(3)$. Именно, пространство полилинейных термов степени 3 будем отождествлять с $E(3) = \mathbb{k}S_3 \otimes_{\mathbb{k}S_2} (E \otimes E)$, $\mathcal{P}(3) = E(3)/R$, действие (12) на $E \otimes E$ определяется как $\text{id} \otimes (12)$. Полученную операду будем обозначать через $\mathcal{P}(E, R)$.

Для бинарной квадратичной операды $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ кожух-двойственная операда $\mathcal{P}^!$ определяется как $\mathcal{P}(E^\vee, R^\perp)$, где $E^\vee$ — дуальное пространство к пространству E , снабженное знакопеременным действием группы S_2 , а $R^\perp$ — подпространство в $E^\vee(3) \cong E(3)^\vee$, ортогональное к R .

Алгебра A называется *градуированной*, если $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$, где A_i является подпространством в A для любого натурального i и при этом $A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j}$. Напомним, что по каждой коммутативной (ассоциативной) градуированной алгебре $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ можно задать симметрическую операд $\mathcal{O}_A$, пространство $\mathcal{O}_A(n)$ n -арных операций еоторого изоморфно A_{n-1} , действие S_n берется тривиальным, а правила композиции определяются при помощи умножения в алгебре A так:

$$\circ_i: \mathcal{O}_A(m) \otimes \mathcal{O}_A(n) = A_{m-1} \otimes A_{n-1} \rightarrow A_{m+n-2} = \mathcal{O}_A(m+n-1).$$

Предложение. Имеется изоморфизм операд $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]} \simeq \text{Lie}_n^!$.

Доказательство. Для того чтобы доказать это утверждение, необходимо и достаточно (см. следствие 2.2.9 из [5]) установить, что $D \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольных алгебр $D \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}$ и $B \in \text{Lie}_n$. Поскольку алгебра $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ является свободной в классе $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}$ -алгебр, достаточно проверить условие $A \otimes B \in \text{Lie}$ для произвольной алгебры $B \in \text{Lie}_n$. Обозначим $\mathcal{O}_{\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]}(2) = L(x_1, \dots, x_n)$ и $\text{Lie}_n(2) = L(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Ясно, что операция $\xi = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \mu_i$ в $(A \otimes B)(2)$ антикоммутирует, поскольку $(x_i \otimes \mu_i)^{(12)} = x_i^{(12)} \otimes \mu_i^{(12)} = x_i \otimes (-\mu_i)$. Нам нужно проверить выполнение тождества Якоби для ξ :

$$1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\xi \otimes \xi) = 0.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые в левой части выражения, получаем при x_i^2 выражение

$$1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_i),$$

которое равно нулю из-за выполнения тождества Якоби для операции μ_i в $B \in \text{Lie}_n$. При $x_i x_j$, $i \neq j$, получаем выражение

$$\begin{aligned} & - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) + 1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_j \otimes \mu_i) \\ & - (13) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) - (23) \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j) + 1 \otimes_{\mathbb{K}S_2} (\mu_i \otimes \mu_j), \end{aligned}$$

равное нулю из-за выполнения тождества Якоби для операций $\mu_i, \mu_j, \mu_i + \mu_j$ в $B \in \text{Lie}_n$. $\square$

Перед тем как установить важное свойство мультипликативной универсальной обертывающей от алгебры набора согласованных скобок Ли, приведем необходимые сведения. Градуированная ассоциативная алгебра $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ называется *кожулевой* [8], если 1) A_0 полупроста и 2) A_0 , рассматриваемая как левый A -модуль, допускает градуированную проективную резольвенту

$$\dots \rightarrow P^2 \rightarrow P^1 \rightarrow P^0 \twoheadrightarrow A_0,$$

при этом каждый из градуированных модулей P^i порождается своей i -й компонентой, т. е. $P^i = AP_i^i$.

Следствие 1. Пусть $n \geq 1$. Для пары $(U_{\text{Lie}_n}, \text{Lie}_n)$ выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта.

Доказательство. Известно, что алгебра многочленов $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ кожулева (здесь $A_0 \cong \mathbb{K}$). Согласно теореме 5.3 из [9] кожулевість алгебры A влечет кожулевість операды $\mathcal{O}_A$. По теореме 4.1 из [6] (см. также обсуждение в примере 4.6 из [6]) выполняется свойство Пуанкаре — Биркгофа — Витта. $\square$

Алгебру $\mathfrak{g}$ n согласованных скобок Ли будем обозначать через $\mathfrak{g}_0$, если все n скобок на ней тривиальны. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай алгебры $\mathfrak{g}_0$. Полагаем, что множество X вполне упорядочено. Тогда $U_{\text{Lie}_n}(X) = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid S \rangle$, где S состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)} y^{(i)} = y^{(i)} x^{(i)}$, $x > y$,
- 2) $x^{(i)} y^{(j)} - y^{(j)} x^{(i)} + x^{(j)} y^{(i)} - y^{(i)} x^{(j)} = 0$, $x > y$, $i < j$.

Продолжаем порядок с множества X на множество $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ так: $x^{(i)} > y^{(j)}$, если $i < j$ или $i = j$ и $x > y$. На слова из $\text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \rangle$ данный порядок распространяем по правилу deg-lex.

Теорема 2. Соотношения S образуют базис Гребнера — Ширшова алгебры $U_{\text{Lie}_n}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим возможные композиции соотношений. Ясно, что композиция вида $x^{(i)}y^{(i)}z^{(i)}$, где $x > y > z$, тривиальна.

1) $x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(i)}z^{(j)} &\xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(i)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(i)} \\
 &\quad - (y^{(j)}x^{(i)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)}) + x^{(i)}z^{(i)}y^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(x^{(j)}y^{(i)} + x^{(i)}y^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}(y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)}) - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)}x^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)}) + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad \quad - (y^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}x^{(j)})z^{(i)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(i)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(i)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(j)}z^{(i)} \equiv y^{(i)}x^{(i)}z^{(j)} \pmod{(S, \omega)}.
 \end{aligned}$$

2) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)}$, где $x > y > z$, $i < j$. Тогда

$$\begin{aligned}
 x^{(i)}y^{(j)}z^{(j)} &\xrightarrow{(2)} y^{(j)}x^{(i)}z^{(j)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - (x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)}) + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} \\
 &\quad - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} + y^{(j)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + y^{(i)}z^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow y^{(j)}z^{(j)}x^{(i)} + (y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)}) \\
 &\quad \xrightarrow{(1)(2)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + (z^{(j)}y^{(i)} + z^{(i)}y^{(j)})x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) \\
 &\rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} \\
 &\quad \rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
 &\quad \quad + z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(1)} z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}y^{(j)}z^{(i)} \\
 &\quad \quad + x^{(j)}z^{(j)}y^{(i)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\rightarrow z^{(j)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(j)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(j)} - x^{(j)}(y^{(j)}z^{(i)} - z^{(j)}y^{(i)} + y^{(i)}z^{(j)}) + z^{(i)}y^{(j)}x^{(j)} \\
 &\quad \xrightarrow{(2)} z^{(j)}x^{(i)}y^{(j)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(j)}y^{(j)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(j)}y^{(j)}.
 \end{aligned}$$

3) $x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)}$, где $x > y > z$, $i < j < k$. С одной стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& \underline{x^{(i)}y^{(j)}}z^{(k)} \xrightarrow{(2)} y^{(j)}\underline{x^{(i)}z^{(k)}} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} y^{(j)}(\underline{z^{(k)}x^{(i)}} - x^{(k)}z^{(i)} + z^{(i)}x^{(k)}) - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}x^{(j)}z^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}\underline{x^{(j)}z^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} + y^{(j)}z^{(i)}x^{(k)} \\
& \quad - x^{(j)}y^{(i)}z^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + \underline{y^{(i)}z^{(j)}x^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} \\
& \quad - x^{(j)}\underline{y^{(i)}z^{(k)}} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - y^{(j)}x^{(k)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)} \\
& \quad + \underline{x^{(j)}y^{(k)}z^{(i)}} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} \\
& \quad - \underline{x^{(j)}z^{(k)}y^{(i)}} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} \\
& \quad + \underline{y^{(i)}z^{(k)}x^{(j)}} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} \\
& \quad - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} \\
& \quad + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)}.
\end{aligned}$$

С другой стороны, получаем

$$\begin{aligned}
& x^{(i)}y^{(j)}z^{(k)} \xrightarrow{(2)} x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)} - \underline{x^{(i)}y^{(k)}z^{(j)}} + \underline{x^{(i)}z^{(j)}y^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} \underline{x^{(i)}z^{(k)}y^{(j)}} - y^{(k)}x^{(i)}z^{(j)} + x^{(k)}y^{(i)}z^{(j)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} \\
& \quad + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}\underline{x^{(j)}y^{(k)}} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}\underline{x^{(i)}y^{(j)}} - x^{(k)}z^{(i)}y^{(j)} + z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} - y^{(k)}\underline{x^{(i)}z^{(j)}} + x^{(k)}\underline{y^{(i)}z^{(j)}} \\
& \quad - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}x^{(i)}y^{(k)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} - z^{(i)}x^{(k)}y^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} \\
& \quad - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} + z^{(j)}\underline{x^{(i)}y^{(k)}} \\
& \quad - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)} \\
& \xrightarrow{(2)} z^{(k)}y^{(j)}x^{(i)} - z^{(k)}x^{(j)}y^{(i)} + z^{(k)}y^{(i)}x^{(j)} + y^{(k)}x^{(j)}z^{(i)} - y^{(k)}z^{(i)}x^{(j)} \\
& \quad - y^{(k)}z^{(j)}x^{(i)} - x^{(k)}y^{(j)}z^{(i)} + x^{(k)}z^{(j)}y^{(i)} - y^{(i)}x^{(k)}z^{(j)} - z^{(j)}x^{(k)}y^{(i)} \\
& \quad + z^{(j)}y^{(i)}x^{(k)} + z^{(j)}y^{(k)}x^{(i)} - x^{(j)}z^{(i)}y^{(k)} + z^{(i)}y^{(k)}x^{(j)} + z^{(i)}y^{(j)}x^{(k)}.
\end{aligned}$$

Остается заметить, что в обеих ветвях редукции получены одни и те же выражения. Тем самым мы проверили тривиальность всех композиций и S является базисом Гребнера — Ширшова. $\square$

Следствие 2. В качестве базиса алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}_0)$ берем редуцированные относительно S слова, т. е. слова, не содержащие в качестве подслов $x^{(i)}y^{(i)}$, $x > y$, и $x^{(i)}y^{(j)}$, $x > y$, $i < j$, для $x, y \in X$.

Скорость роста алгебры $U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})$

Экспоненциальная скорость роста $\rho(A)$ ассоциативной алгебры A относительно порождающего множества X вычисляется как

$$\rho(A) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n},$$

где $a_n = \dim V_n$, V_n — линейная оболочка слов длины n в алфавите X .

Вопрос. Пусть $\mathfrak{g} \in \text{Lie}_n$, $\dim \mathfrak{g} = m$. Чему равна скорость роста $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g}))$ относительно порождающего множества $X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)}$ при $|X| = m$?

Покажем, как можно переформулировать вопрос в терминах более просто задаваемой ассоциативной алгебры.

Рассмотрим алгебру $V_{n,m} = \text{As}\langle X^{(1)} \cup X^{(2)} \cup \dots \cup X^{(n)} \mid T \rangle$, где T состоит из соотношений

- 1) $x^{(i)}y^{(i)} = y^{(i)}x^{(i)}$, $x > y$,
- 2) $x^{(i)}y^{(j)} = y^{(j)}x^{(i)}$, $x > y$, $i < j$.

Это так называемая частично коммутативная алгебра, т. е. ассоциативная алгебра, получающаяся факторизацией свободной ассоциативной алгебры по множеству соотношений коммутирования, выполненных для определенных пар порождающих элементов. В работе 1969 г. [10] Картье и Фоата ввели понятие частично коммутативного моноида. Пусть задан простой граф $G(V, E)$, тогда *частично коммутативный моноид* $M(G)$ определяется через копредставление следующим образом: $M\langle V \mid v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E \rangle$, т. е. как фактор свободного моноида $M\langle V \rangle$ по отношению эквивалентности, порожденной множеством $\{v_1v_2 = v_2v_1, (v_1, v_2) \in E\}$. Позднее изучались частично коммутативные ассоциативные алгебры [11], частично коммутативные алгебры Ли [12] и другие подобные структуры. Частично коммутативную ассоциативную алгебру, построенную по графу G , будем обозначать через $\text{As}(G)$.

Легко проверить, что соотношения T образуют базис Гребнера — Ширшова и поэтому множество редуцированных относительно соотношений S и T слов совпадает. Отсюда $\rho(U_{\text{Lie}_n}(\mathfrak{g})) = \rho(V_{n,m})$.

Введем простой конечный граф G так: вершины G соответствуют порождающим $x^{(i)}$, а ребро между двумя вершинами проводится, если и только если перестановочность соответствующих этим вершинам порождающих входит в T . Известно [13], что $\rho(\text{As}(G)) = \beta(G)$, где $\beta(G)$ — наибольший по модулю вещественный корень многочлена

$$PC(G, x) = x^{t_0} - c_1(G)x^{t_0-1} + c_2(G)x^{t_0-2} + \dots + (-1)^{t_0-1}c_{t_0-1}x + (-1)^{t_0}c_{t_0}(G),$$

где c_i обозначает количество клик размера i в графе G ($c_0 := 1$), а t_0 — размер максимальной клики в G .

Поскольку мы работаем с очень конкретным графом G , мы сможем явно посчитать все коэффициенты $c_i(G)$.

Всего в графе G вершин $mn = C_m^1 C_n^1$, ребер, возникающих из первых соотношений — $C_m^2 C_n^1$, а из вторых — $C_m^2 C_n^2$, здесь C_m^2 отвечает за выбор подходящих x, y из алфавита X , а C_n^2 отвечает за выбор пары индексов (i, j) .

Для произвольного $1 \leq k \leq m$ сперва выбираем k букв $x_1, \dots, x_k \in X$, далее выбираем C_n^s способами s -элементное подмножество $Z \subset \{0, \dots, n-1\}$. Теперь

для каждого Z мы C_{k-1}^{s-1} способами расставляем перегородки, что соответствует тому, как мы распределяем элементы Z по индексам $i_1, \dots, i_k$. Тем самым

$$c_k = C_m^k (C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k).$$

Комбинаторно легко увидеть, что

$$C_{k-1}^0 C_n^1 + C_{k-1}^1 C_n^2 + C_{k-1}^2 C_n^3 + \dots + C_{k-1}^l C_n^{l+1} + \dots + C_{k-1}^{k-1} C_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Отметим, что m — размер максимальной клики рассматриваемого графа. Из предыдущих выводов получаем

$$\begin{aligned} PC(G, x) &= x^m - C_m^1 C_n^1 x^{m-1} + C_m^2 C_{n+1}^2 x^{m-2} + \dots + (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k} \\ &\quad + \dots (-1)^m C_{n+m-1}^m = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k C_{n+k-1}^k x^{m-k}. \end{aligned}$$

При помощи WolframAlpha мы приближенно вычислили $\beta(G)$ для малых значений n, m :

$n \setminus m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4.73	6.45	8.16	9.87	11.58	13.29	15.00	16.71	18.42	20.12
4	6.45	8.87	11.29	13.70	16.11	18.52	20.93	23.33	25.74	28.15
5	8.16	11.29	14.40	17.51	20.62	23.72	26.83	29.93	33.03	36.14
6	9.87	13.70	17.51	21.32	25.12	28.92	32.72	36.52	40.31	44.11
7	11.58	16.11	20.62	25.12	29.62	34.11	38.60	43.10	47.59	52.08
8	13.29	18.52	23.72	28.92	34.12	39.30	44.49	49.67	54.85	60.04
9	15.00	20.93	26.83	32.72	38.60	44.49	50.36	56.24	62.12	68.00
10	16.71	23.33	29.93	36.52	43.10	49.67	56.24	62.81	69.38	75.95
11	18.42	25.74	33.03	40.31	47.59	54.85	62.12	69.38	76.65	83.91

Для поиска асимптотики $\beta(G)$ нам понадобится следующая

Лемма. Если $m \geq n$, то

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство многочленов сводится после раскрытия скобок и подсчета коэффициентов при x^{m-k} к проверке комбинаторного равенства

$$\sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} = C_{n+k-1}^k C_m^k. \quad (1)$$

Первый множитель выбираем из первой скобки $(x-1)^{m-n+1}$ с коэффициентом $(-1)^s C_{m-n+1}^{m-n+1-s} = (-1)^s C_{m-n+1}^s$. Из второй скобки $x^{n-1-(k-s)}$ приходит с коэффициентом $(-1)^{k-s} C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s}$. Перемножая $(-1)^s$ и $(-1)^{k-s}$, получаем $(-1)^k$.

Рассмотрим случай $k < n$. Левую часть (1) можно представить как

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^k C_{m-n+1}^s C_{m+k-s}^{k-s} C_{n-1}^{k-s} \\ = C_{m+k}^k C_{n-1}^k {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1), \quad (2) \end{aligned}$$

где ${}_3F_2(a, b, c; d, e; z)$ обозначает обобщенный гипергеометрический ряд

$${}_3F_2(a, b, c; d, e; z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a)_i (b)_i (c)_i}{(d)_i (e)_i} \cdot \frac{z^i}{i!},$$

здесь

$$(x)_i = \frac{\Gamma(x+i)}{\Gamma(x)} = \begin{cases} 1, & i = 0, \\ x(x+1) \dots (x+i-1), & i > 0, \end{cases}$$

обозначает символ Похгаммера.

Известная теорема Заальшутца (1890) гласит, что

$${}_3F_2(a, b, -N; c, 1+a+b-c-N; 1) = \frac{(c-a)_N (c-b)_N}{(c)_N (c-a-b)_N}.$$

Тем самым в формуле (2) переписываем

$$\begin{aligned} {}_3F_2(-m+n-1, -k, -k; -m-k, n-k; 1) &= \frac{(-k-n+1)_k (-m)_k}{(-m-k)_k (-n+1)_k} \\ &= \frac{(-k-n+1) \dots (-n) \cdot (-m) \dots (-m+k-1)}{(-m-k) \dots (-m-1) \cdot (-n+1) \dots (-n+k)} \\ &= \frac{(k+n-1) \dots (n) \cdot (m) \dots (m-k+1)}{(m+k) \dots (m+1) \cdot (n-1) \dots (n-k)} \\ &= \frac{(C_{n+k-1}^k \cdot k!) \cdot (C_m^k \cdot k!)}{(C_{m+k}^k \cdot k!) \cdot (C_{n-1}^k \cdot k!)} = \frac{C_{n+k-1}^k C_m^k}{C_{m+k}^k C_{n-1}^k}, \end{aligned}$$

что и дает после домножения на $C_{m+k}^k C_{n-1}^k$ правую часть (1).

Рассмотрим случай $k \geq n$. Легко видеть, что $C_{n-1}^{k-s} = 0$ при всех $s = 0, \dots, k-n$. Поэтому совершим в левой части (1) замену индекса $j = s - (k - n + 1)$; тогда левая часть (1) примет вид

$$L = \sum_{j=0}^{n-1} C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{m+n-j-1}^{n-j-1} C_{n-1}^j.$$

Заметим, что при $k = m$ получаем $L = C_{m+n-1}^{n-1}$, что совпадает с правой частью (1). Поэтому можно считать, что $k < m$. Теперь введем $\tilde{k} = n - 1$, $\tilde{n} = k + 1$. Для этих параметров равенство (1) уже доказано; запишем его:

$$\sum_{j=0}^{\tilde{k}} C_{m-\tilde{n}+1}^j C_{m+\tilde{k}-j}^{\tilde{k}-j} C_{\tilde{n}-1}^{\tilde{k}-j} = C_{\tilde{n}+\tilde{k}-1}^{\tilde{k}} C_m^{\tilde{k}}.$$

Подставляя новые параметры в правую часть последнего равенства, получаем $C_{n+k-1}^{n-1} C_m^{n-1}$; отсюда его правая часть отличается от правой части (1) только вторым сомножителем. Введем $\Delta = C_m^k / C_m^{n-1}$. Умножим последнее равенство на Δ и внесем его под знак суммы в левой части. Подставляя выражения для $\tilde{n}$ и $\tilde{k}$, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} \Delta C_{m-k}^j C_{m+n-1-j}^{n-1-j} C_k^{n-1-j} = C_{n+k-1}^k C_m^k.$$

При $j > m - k$ обе части следующего равенства равны нулю, поэтому достаточно рассмотреть $0 \leq j \leq m - k$. Распишем

$$\begin{aligned} \Delta C_{m-k}^j C_k^{n-1-j} &= \frac{(n-1)!(m-n+1)!}{k!(m-k)!} \cdot \frac{(m-k)!}{j!(m-k-j)!} \cdot \frac{k!}{(n-1-j)!(k-n+1+j)!} \\ &= \frac{(n-1)!(m-n+1)!}{j!(m-k-j)!(n-1-j)!(k-n+1+j)!} = C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в левую часть последнего равенства, получаем

$$\sum_{j=0}^{n-1} C_{m-n+1}^{k-n+1+j} C_{m+n-1-j}^{n-1-j} C_{n-1}^j = C_{n+k-1}^k C_m^k,$$

при этом левая часть равенства полностью совпадает с L . $\square$

Перед тем как вывести асимптотику $\beta(G)$, напомним определение функции Бесселя первого рода: $J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z^2/4)^k}{k!k!}$.

Ниже будем использовать следующие математические знаки: $\gg$ — «много больше», $\ll$ — «много меньше», $\sim$ — «асимптотически эквивалентны».

Теорема 3. При $\min\{m, n\} \rightarrow \infty$ справедливо соотношение $\beta(G) = \alpha mn + o(mn)$, где $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наша цель — показать, что α удовлетворяет следующему соотношению:

$$0 = \alpha^m - \frac{\alpha^{m-1}}{1!1!} + \frac{\alpha^{m-2}}{2!2!} - \dots + (-1)^k \frac{\alpha^{m-k}}{k!k!} + \dots \quad (3)$$

Его наибольший корень равен $\alpha = \frac{4}{q_0^2} \approx 0,69166$, где q_0 — первый положительный нуль функции $J_0(z)$.

СЛУЧАЙ 1: $n - 1 \geq m$. Докажем сперва локально равномерную сходимость последовательности функций

$$P_{n,m}(y) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} y^k$$

к предельной функции

$$f(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} y^k$$

на $\mathbb{C}$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Обозначим модуль коэффициента при y^k через $a_k(n, m)$. Тогда

$$a_k(n, m) = \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} = \frac{1}{(k!)^2} \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{m} \right) \right] \left[\prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{n} \right) \right].$$

Зафиксируем индекс k . Легко видеть, что выполняется поточечная сходимость коэффициентов:

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} a_k(n, m) = \frac{1}{(k!)^2}.$$

Для доказательства локально равномерной сходимости зафиксируем произвольный компакт

$$K_R = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| \leq R\},$$

где $R > 0$. Нам необходимо найти не зависящую от n и m мажоранту для общего члена ряда.

Используя неравенство $1 + x \leq e^x$ и условие $k \leq m < n$, оцениваем

$$(k!)^2 a_k(n, m) \leq \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \frac{j}{n}\right) \leq \prod_{j=0}^{k-1} e^{j/n} = e^{\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{k-1} j} = e^{\frac{k(k-1)}{2n}} \leq e^{k/2}.$$

Отсюда

$$\left| (-1)^k \frac{C_m^k C_{n+k-1}^k}{(mn)^k} y^k \right| \leq \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}.$$

Обозначим

$$D_k = \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}.$$

Из того, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{D_{k+1}}{D_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(R\sqrt{e})^{k+1} (k!)^2}{((k+1)!)^2 (R\sqrt{e})^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R\sqrt{e}}{(k+1)^2} = 0,$$

по признаку Даламбера ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(R\sqrt{e})^k}{(k!)^2}$$

абсолютно сходится для любого фиксированного $R > 0$.

Согласно признаку Вейерштрасса из сходимости мажорирующего числового ряда следует равномерная сходимость функционального ряда на компакте K_R . В силу произвольности выбора R последовательность $P_{n,m}(y)$ сходится локально равномерно на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ к функции $f(y)$.

Положим $N = mn$ и $K = |E(G)|$. Согласно утверждению 7.1 из [14] при $K \leq N^2/4$ выполнено

$$\beta(G) \geq \frac{N + \sqrt{N^2 - 4K}}{2} \geq \frac{N}{2}.$$

С другой стороны, очевидно, что $\beta(G) \leq N$. Следовательно, для $y_{n,m} = N/\beta(G(m, n))$ имеем $y_{n,m} \in [1, 2]$. По определению

$$PC(G, x) = x^m P_{n,m}(N/x).$$

Поэтому число $y_{n,m} = N/\beta(G(m, n))$ является нулем многочлена $P_{n,m}$. На отрезке $[1, 2]$ предельная функция $f(y) = J_0(2\sqrt{y})$ имеет единственный нуль $q_0^2/4$. Из локально равномерной сходимости $P_{n,m} \rightarrow f$ и теоремы Гурвица следует $y_{n,m} \rightarrow q_0^2/4$. Тем самым

$$\frac{\beta(G(m, n))}{mn} = \frac{1}{y_{n,m}} \rightarrow \frac{4}{q_0^2}.$$

СЛУЧАЙ 2: $m \geq n$. По лемме выполнено

$$PC(G(m, n), x) = (x-1)^{m-n+1} PC(G(n-1, m+1), x),$$

и мы приходим к случаю 1. Следовательно,

$$\beta(G(m, n)) = \beta(G(n-1, m+1)) \sim \alpha(n-1)(m+1) \sim \alpha n m.$$

Тем самым теорема доказана. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят П. С. Колесникова и рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bershtein M., Dotsenko V., Khoroshkin A. Quadratic algebras related to the biHamiltonian operad // Int. Math. Res. Not. 2007. V. 2007, ram 122. 30 pp.
2. D'León R. G. On the free Lie algebra with multiple brackets // Adv. Appl. Math. 2016. V. 79. P. 37–97.
3. Liu F. Combinatorial bases for multilinear parts of free algebras with two compatible brackets // J. Algebra. 2010. V. 323, N 1. P. 132–166.
4. Dotsenko V., Khoroshkin A. Gröbner bases for operads // Duke Math. J. 2010. V. 153, N 2. P. 363–396.
5. Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads // Duke Math. J. 1994. V. 76, N 1. P. 203–272.
6. Khoroshkin A. PBW property for associative universal enveloping algebras over an operad // Int. Math. Res. Not. 2022. V. 2022, N 4. P. 3106–3143.
7. Gubarev V. Universal enveloping algebra of a pair of compatible Lie brackets // Intern. J. Algebra Comput. 2022. V. 32, N 7. P. 1335–1344.
8. Beilinson A., Ginzburg V., Soergel W. Koszul duality patterns in representation theory // J. Am. Math. Soc. 1996. V. 9. P. 473–527.
9. Dotsenko V., Khoroshkin A. Quillen homology for operads via Gröbner bases // Documenta Math. 2013. V. 18. P. 707–747.
10. Cartier P., Foata D. Problèmes combinatoires de commutation et réarrangements. Berlin: Springer-Verl., 1969. (Lecture Notes Math.; V. 85).
11. Kim K., Makar-Limanov L., Neggers J., Roush F. Graph algebras // J. Algebra. 1980. V. 64, N 1. P. 46–51.
12. Duchamp G., Krob D. The free partially commutative Lie algebra: Bases and ranks // Adv. Math. 1992. V. 95. P. 92–126.
13. Fisher D. C., Solow A. E. Dependence polynomials // Discrete Math. 1990. V. 82. P. 251–258.
14. Gubarev V. PC-polynomial of graph. 2018. 118 p. arXiv:1808.03932.

Поступила в редакцию 7 июля 2025 г.

После доработки 13 декабря 2025 г.

Принята к публикации 20 декабря 2025 г.

Чжан Чжэн

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

2268663734@qq.com

Губарев Всеволод Юрьевич (ORCID 0000-0002-7839-5714)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;

Новосибирский государственный университет,

ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

wsewolod89@gmail.com