

УДК 517.444

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ НА ГРУППЕ H_{red}^n

Вит. В. Волчков, Н. П. Волчкова

Аннотация. Исследуется задача о структуре решений одного класса уравнений свертки на редуцированной группе Гейзенберга, а также ее локальные аналоги. Рассматривается случай, когда свертыватель в уравнении имеет компактный носитель и инвариантен относительно унитарной группы. Для широкого класса таких свертывателей получено разложение произвольного распределения, удовлетворяющего соответствующему уравнению свертки, в ряд по его элементарным решениям.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.508

Ключевые слова: периодичность в среднем, скрученная (twisted) свертка, группа Гейзенберга, сферические гармоники.

Посвящается нашему учителю, профессору
Розальду Михайловичу Тригубу,
в честь его 90-летия

§ 1. Введение

В негармоническом анализе Фурье весьма важную роль играет следующая проблема (см., например, [1, § 4; 2]).

Проблема 1. Пусть T — ненулевое распределение с компактным носителем на вещественной оси $\mathbb{R}$. Требуется выяснить возможность представления произвольного решения $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ уравнения свертки

$$f * T = 0 \quad (1)$$

рядом по элементарным решениям этого уравнения, т. е. функциям вида

$$e^{i\lambda t} p_{k-1}(t), \quad (2)$$

где λ — нуль преобразования Фурье распределения T , k — порядок нуля λ , $p_{k-1}(t)$ — алгебраический многочлен степени $k-1$.

Проблема 1 включает в себя классические задачи о решении обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и разложении периодических функций в тригонометрический ряд Фурье, вопрос об общем виде решений линейных дифференциально-разностных уравнений с постоянными

Исследование Вит. В. Волчкова проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FREM-2026-0004 и тема № FRRE-2026-0015). Исследование Н. П. Волчковой проводилось в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (тема № FRRE-2026-0015).

коэффициентами, изучение структуры решений некоторых типов интегродифференциальных уравнений и др. (см. [3, 4]). Следуя Дельсарту [5], функции $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, удовлетворяющие уравнению (1), называют *периодическими в среднем* функциями на $\mathbb{R}$ относительно свертывателя T .

Один из общих результатов для периодических в среднем функций на $\mathbb{R}$ был получен Л. Шварцем [6]. Он показал, что всякое решение $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ уравнения (1) имеет спектральное разложение по экспоненциальным полиномам вида (2), которое суммируемо к f методом Абеля, после подходящего объединения в группы членов этого разложения. Эренпрайс [7, § 3] обнаружил, что для обратимых распределений T абелево суммирование в теореме Л. Шварца можно опустить, а Эренпрайс — Мальявен [8] и Беренштейн — Тейлор [1, теорема 5] полностью охарактеризовали те обратимые свертыватели T , для которых и группировка слагаемых в ней не является необходимой. Некоторые локальные аналоги указанных результатов были установлены А. Ф. Леонтьевым [9–11] и В. В. Волчковым [12, 13].

Проблема 1 допускает различные обобщения и модификации. Так, скажем, можно рассматривать ее аналоги для уравнений свертки в $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$, уравнений свертки на симметрических пространствах и в других случаях. Эти аспекты теории периодических в среднем функций частично отражены в обзорах и книгах [12–15]. Отметим, что к указанным направлениям исследований относятся фундаментальный принцип Эренпрайса — Паламодова о представлении решений произвольной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в $\mathbb{R}^n$ интегралом по множеству экспоненциально-полиномиальных решений, обобщения фундаментального принципа на системы сверточных уравнений, теоремы о разложении периодических в среднем функций на сферически симметричных областях двухточечно-однородных пространств в ряды Фурье — Лапласа с радиальными коэффициентами специального вида и др. Полученные результаты нашли разнообразное применение в теории дифференциальных уравнений с частными производными, комплексном анализе, теории аппроксимации, теории лакунарных рядов и теории интегрально-геометрических преобразований типа Радона и Помпейю (см. [12–15]).

В работах [16–18] было начато изучение периодических в среднем функций на некоторых локально компактных группах. Дальнейшее развитие данного направления инициировалось в [19, § 4; 20, § 5; 21, § 4; 22, § 5]. Однако, несмотря на прошедшие с тех пор почти сорок лет, на текущий момент в указанной области остается много нерешенных вопросов даже для конкретных классических случаев. В частности, представляют интерес аналоги проблемы 1 для групп Гейзенберга (см., например, [19, § 4]).

Данная работа посвящена исследованию этой задачи, а наш основной результат состоит в следующем (см. теорему 2 и следствие 1 в § 4 ниже). Изучается пространство решений уравнения свертки $F * \mathcal{T} = 0$ (или $\mathcal{T} * F = 0$) на редуцированной группе Гейзенберга H_{red}^n , где $\mathcal{T}$ — заданное распределение на H_{red}^n с компактным носителем, инвариантное относительно унитарной группы $\mathcal{U}(n)$. Для широкого класса свертывателей $\mathcal{T}$ получено описание решений F в виде ряда Фурье специального вида

$$F = \sum_{m,p,q} \mathcal{P}_m^{p,q} F, \quad (3)$$

компоненты $\mathcal{P}_m^{p,q} F$ которого представляются по корневым векторам лапласиана

Гейзенберга, удовлетворяющим тому же уравнению свертки:

$$\mathcal{P}_m^{p,q} F = \sum_{\lambda} X_{\lambda,m}^{p,q}. \quad (4)$$

Индекс m в (3) отвечает за степень гармоник на единичной окружности, а индексы p, q — за гармоники бистепени (p, q) на единичной сфере в n -мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. В разложении (4) суммирование производится по нулям соответствующего преобразования Фурье распределения $\mathcal{T}$. При этом для сходимости найденного разложения нет необходимости в упомянутой выше группировке слагаемых и процедуре абелева суммирования. В этом смысле установленный результат аналогичен указанным теоремам Эренпрайса — Мальявена [8], Беренштейна — Тейлора [1] и В. В. Волчкова [12, часть 3, § 2.4].

Всюду в дальнейшем предполагается, что $n \geq 2$. В случае $n = 1$ требуются незначительные изменения, связанные с заменой гармоник бистепени (p, q) на обычные экспоненты.

§ 2. Основные обозначения

На протяжении статьи будут использоваться следующие преимущественно стандартные обозначения (см. [23–26]):

1) $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+$ — соответственно множества вещественных, комплексных, натуральных, целых и целых неотрицательных чисел; i — мнимая единица; $\delta_{k,j}$ — символ Кронекера; $\binom{N}{M}$ — биномиальные коэффициенты; $\binom{N}{M}_{\lambda}$ — биномиальные коэффициенты, зависящие от $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\binom{N}{M}_{\lambda} = \binom{N}{M}, \quad \text{если } \lambda \neq 0, \quad \text{и} \quad \binom{N}{M}_0 = \binom{2N}{2M};$$

Γ — гамма-функция; $P_s^{(\alpha,\beta)}(t)$ — многочлены Якоби, удовлетворяющие условию $P_s^{(\alpha,\beta)}(1) = 1$; J_{ν} — функция Бесселя первого рода порядка ν ; $\mathbf{j}_{\nu}$ — нормированная функция Бесселя:

$$\mathbf{j}_{\nu}(t) = 2^{\nu} \Gamma(\nu + 1) J_{\nu}(t) t^{-\nu};$$

${}_1F_1(a; b; t)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера; $w^{(N)}$ — производные четной целой функции $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ вида

$$w^{(N)}(\lambda) = \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N w(\lambda) = \begin{cases} w^{(N)}(\lambda), & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \\ w^{(2N)}(0), & \lambda = 0; \end{cases}$$

Id — тождественный оператор;

2) $C(\mathcal{M})$ — пространство непрерывных комплекснозначных функций на вещественно аналитическом многообразии $\mathcal{M}$; $C^k(\mathcal{M})$ — k раз непрерывно дифференцируемые функции на $\mathcal{M}$ со значениями в $\mathbb{C}$; $\mathcal{E}(\mathcal{M}) = C^{\infty}(\mathcal{M})$; $\mathcal{D}(\mathcal{M})$ — функции из $\mathcal{E}(\mathcal{M})$ с компактными носителями; $\mathcal{D}'(\mathcal{M})$ — пространство распределений на $\mathcal{M}$ с обычной топологией; функция $f \in C(\mathcal{M})$ отождествляется с распределением

$$\varphi \rightarrow \int_{\mathcal{M}} f \varphi dv, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M}) \quad (5)$$

(dv — гладкая положительная плотность на $\mathcal{M}$); $\langle f, \varphi \rangle$ — значение функционала $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$ на функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M})$; $\bar{f}$ — комплексное сопряжение к $f \in \mathcal{D}'(\mathcal{M})$:

$$\langle \bar{f}, \varphi \rangle = \overline{\langle f, \bar{\varphi} \rangle}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{M});$$

$\text{supp } f$ — носитель распределения f ; $\mathcal{E}'(\mathcal{M})$ — распределения на $\mathcal{M}$ с компактными носителями; $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$ — класс всех четных распределений из $\mathcal{E}'(\mathbb{R})$; $r(T) = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } T \subset [-\varrho, \varrho]\}$, где $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$;

3) $\mathbb{C}^n$ — n -мерное комплексное пространство; $\bar{z} = (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$, где $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$; $z \cdot \bar{w}$ — эрмитово скалярное произведение векторов $z, w \in \mathbb{C}^n$ и $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ — соответствующая ему норма; ρ, σ — полярные координаты точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ($\rho = |z|$, $\sigma = |z|^{-1}z$); dm — мера Лебега в $\mathbb{C}^n$;

B_R — открытый шар радиуса $R \in (0, +\infty]$ в $\mathbb{C}^n$ с центром в нуле (для $\mathcal{M} = B_R$ в качестве плотности dv в (5) используется мера dm); $\bar{B}_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq r\}$ ($r \in [0, +\infty)$);

$f(\bar{z})$ — отражение распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$:

$$\langle f(\bar{z}), \varphi \rangle = \langle f, \varphi(\bar{z}) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R); \quad (6)$$

$f(az)$ — растяжение с коэффициентом $a > 0$ распределения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$:

$$\langle f(az), \varphi \rangle = a^{-2n} \langle f, \varphi(a^{-1}z) \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_{R/a}); \quad (7)$$

$\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R) = \mathcal{D}'_{\mathbb{H}}(B_R) \cap \mathcal{E}'(B_R)$, где $\mathcal{D}'_{\mathbb{H}}(B_R)$ — класс радиальных распределений на B_R ; $r(T)$ — радиус наименьшего замкнутого шара, содержащего носитель распределения $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$;

D_j и $\bar{D}_j$ — операторы дифференцирования по переменным z_j и $\bar{z}_j$ соответственно;

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n (z_j D_j + \bar{z}_j \bar{D}_j) \text{ — дифференциальный оператор Эйлера;}$$

$$\mathbf{C} = i \sum_{j=1}^n (z_j D_j - \bar{z}_j \bar{D}_j); \quad \Delta = 4 \sum_{j=1}^n D_j \bar{D}_j \text{ — оператор Лапласа в } \mathbb{C}^n;$$

$$\mathcal{L}_m = -\Delta - im\mathbf{C} + \frac{m^2|z|^2}{4} \text{Id}, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ — скрученный (twisted) лапласиан в } \mathbb{C}^n; \quad (8)$$

$$\mathbf{L} = |z|^2 \Delta - \mathbf{E}^2 + (2 - 2n)\mathbf{E} \text{ — «угловая» часть оператора } \Delta$$

(см. лемму 2 ниже);

$H^{p,q}$ — пространство всех гармонических однородных многочленов на $\mathbb{C}^n$, имеющих полную степень p по переменным $z_1, \dots, z_n$ и полную степень q по переменным $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ ($p, q \in \mathbb{Z}_+$); $d(p, q)$ — размерность пространства $H^{p,q}$:

$$d(p, q) = \frac{(p+n-2)!(q+n-2)!(p+q+n-1)}{p!q!(n-1)!(n-2)!} \quad (9)$$

(см. [27]);

4) $\mathbb{S}^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{C}^n$ с поверхностной мерой $d\omega$; ω_{2n-1} — площадь $\mathbb{S}^{2n-1}$; $\mathcal{H}^{p,q}$ — подпространство в $L^2(\mathbb{S}^{2n-1}, d\omega)$, состоящее из сужений элементов $H^{p,q}$ на $\mathbb{S}^{2n-1}$;

$\{S_l^{p,q}\}_{l=1}^{d(p,q)}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathcal{H}^{p,q}$, $S_1^{0,0} = \omega_{2n-1}^{-1/2}$;

Δ_0 — оператор Лапласа — Бельтрами на $\mathbb{S}^{2n-1}$; $\lambda_{p,q} = (p+q)(2-2n-p-q)$ — собственное значение оператора Δ_0 , соответствующее собственной функции $S_l^{p,q}$:

$$\Delta_0(S_l^{p,q}) = \lambda_{p,q} S_l^{p,q} \quad (10)$$

(см. [25, гл. 9, § 5, п. 1]);

$\mathbb{S} = \{\tau \in \mathbb{C} : |\tau| = 1\}$ — мультипликативная группа окружности с инвариантным интегрированием, определяемым соотношением

$$\int_{\mathbb{S}} f(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) d\theta, \quad f \in C(\mathbb{S});$$

$\mathbf{d}_{\mathbb{S}} = i\tau \frac{\partial}{\partial \tau}$ — оператор дифференцирования на $\mathbb{S}$ по угловой координате; (11)

5) $\mathcal{U}(n)$ — группа всех линейных преобразований $\mathbb{C}^n$, сохраняющих эрмитово скалярное произведение (унитарная группа); $\{a_{i,j}(U)\}_{i,j=1}^n$ — матрица оператора $U \in \mathcal{U}(n)$ в стандартном базисе пространства $\mathbb{C}^n$; dU — мера Хаара на $\mathcal{U}(n)$, нормированная условием

$$\int_{\mathcal{U}(n)} dU = 1;$$

$T(U)$ — квазирегулярное представление группы $\mathcal{U}(n)$, задаваемое на функциях $f \in L^2(\mathbb{S}^{2n-1}, d\omega)$ соотношением

$$(T(U)f)(\xi) = f(U^{-1}\xi), \quad \xi \in \mathbb{S}^{2n-1}, \quad U \in \mathcal{U}(n);$$

$T^{p,q}(U)$ — сужение представления $T(U)$ на $\mathcal{U}(n)$ -инвариантное подпространство $\mathcal{H}^{p,q}$; $\{t_{k,l}^{p,q}(U)\}_{k,l=1}^{d(p,q)}$ — матрица (унитарная) представления $T^{p,q}(U)$ в базисе $\{S_l^{p,q}\}_{l=1}^{d(p,q)}$:

$$S_l^{p,q}(U^{-1}\sigma) = \sum_{k=1}^{d(p,q)} t_{k,l}^{p,q}(U) S_k^{p,q}(\sigma), \quad t_{k,l}^{p,q}(U^{-1}) = \overline{t_{l,k}^{p,q}(U)}; \quad (12)$$

$\chi^{p,q}(U)$ — характер представления $T^{p,q}(U)$;

6) $G = H_{\text{ред}}^n$ — редуцированная группа Гейзенберга, представляющая собой декартово произведение $\mathbb{C}^n \times \mathbb{S}$ с законом умножения

$$(z, \tau)(w, \eta) = (z + w, \tau\eta e^{\frac{i}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})}), \quad (13)$$

единицей $(0, 1)$ и операцией взятия обратного элемента $(z, \tau)^{-1} = (-z, \bar{\tau})$ (G является нильпотентной группой Ли степени два); $dg = dm(z)d\tau$ — мера Хаара на G ;

$C_R = B_R \times \mathbb{S}$, $R \in (0, +\infty]$ (для $\mathcal{M} = C_R$ в качестве плотности dv в (5) используется мера dg); $\check{\mathcal{T}}$ — отражение распределения $\mathcal{T} \in \mathcal{D}'(C_R)$:

$$\langle \check{\mathcal{T}}, \Phi \rangle = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g^{-1}) \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R);$$

$\mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R)$ — совокупность всех радиальных (по z) распределений в $\mathcal{E}'(C_R)$, т. е. распределений $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'(C_R)$ таких, что

$$\langle \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle \mathcal{T}(z, \tau), \Phi(Uz, \tau) \rangle \quad \text{для всех } U \in \mathcal{U}(n), \quad \Phi \in \mathcal{E}(C_R);$$

$r(\mathcal{T}) = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } \mathcal{T} \subset C_{\varrho}\}$, где $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R)$;

$$L_G = -\Delta + \mathbf{d}_{\mathbb{S}} \mathbf{C} - \frac{|z|^2}{4} \mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 \quad \text{— лапласиан Гейзенберга.} \quad (14)$$

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Некоторые формулы для операторов $\mathbf{d}_S$, $\mathbf{L}$, Δ_0 , L_G и $\mathcal{L}_m$.

Лемма 1. Пусть $f_1, f_2 \in C^k(\mathbb{S})$ при некотором $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$\int_{\mathbb{S}} f_1(\tau) (\mathbf{d}_S^k f_2)(\tau) d\tau = (-1)^k \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S^k f_1)(\tau) f_2(\tau) d\tau, \quad (15)$$

$$\int_{\mathbb{S}} f_1(\tau) \tau^{-m} d\tau = \frac{1}{(im)^k} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S^k f_1)(\tau) \tau^{-m} d\tau, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (11) и формулу интегрирования по частям, индукцией по k получаем (15). Полагая в (15)

$$f_2(\tau) = \frac{\tau^{-m}}{(-im)^k},$$

приходим к (16).

Лемма 2. Пусть $f \in C^2(B_R)$. Тогда

$$(\mathbf{L}f)(\rho\sigma) = \Delta_0(f(\rho\sigma)), \quad \rho \in (0, R), \quad \sigma \in \mathbb{S}^{2n-1}. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действие оператора Δ на функцию f можно записать в виде

$$(\Delta f)(\rho\sigma) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2n-1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (f(\rho\sigma)) + \frac{1}{\rho^2} \Delta_0(f(\rho\sigma))$$

(см., например, [25, гл. 9, § 5, п. 1]). Кроме того,

$$(\mathbf{E}f)(\rho\sigma) = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} (f(\rho\sigma)), \quad (\mathbf{E}^2 f)(\rho\sigma) = \left(\rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) (f(\rho\sigma)).$$

Из этих равенств и определения оператора $\mathbf{L}$ следует соотношение (17).

Лемма 3. Пусть $F_1, F_2 \in C^2(G)$ и по крайней мере одна из этих функций имеет компактный носитель. Тогда

$$\int_G F_1(g) (L_G F_2)(g) dg = \int_G (L_G F_1)(g) F_2(g) dg. \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства $dg = dm(z) d\tau$ и симметрии оператора Δ имеем

$$-\int_G F_1(g) (\Delta F_2)(g) dg = -\int_G (\Delta F_1)(g) F_2(g) dg. \quad (19)$$

Далее, используя (15) при $k = 1$, антисимметричность $\mathbf{C}$ и его перестановочность с $\mathbf{d}_S$, получаем

$$\begin{aligned} \int_G F_1(g) (\mathbf{d}_S \mathbf{C} F_2)(g) dg &= - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_S F_1)(z, \tau) (\mathbf{C} F_2)(z, \tau) d\tau dm(z) \\ &= \int_{\mathbb{S}} \int_{\mathbb{C}^n} (\mathbf{C} \mathbf{d}_S F_1)(z, \tau) F_2(z, \tau) dm(z) d\tau = \int_G (\mathbf{d}_S \mathbf{C} F_1)(g) F_2(g) dg. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично формула (15) при $k = 2$ влечет равенство

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} \frac{|z|^2}{4} F_1(z, \tau) (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 F_2)(z, \tau) d\mathbf{m}(z) d\tau \\ = - \int_{\mathbb{C}^n} \int_{\mathbb{S}} \frac{|z|^2}{4} (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^2 F_1)(z, \tau) F_2(z, \tau) d\mathbf{m}(z) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Складывая (19)–(21) и учитывая (14), приходим к (18).

Доказательство леммы 3 показывает, что операторы $\mathcal{L}_m$ и L_G действуют на распределения по формулам

$$\langle \mathcal{L}_m f, \varphi \rangle = \langle f, \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad (22)$$

$$\langle L_G F, \Phi \rangle = \langle F, L_G \Phi \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad F \in \mathcal{D}'(C_R). \quad (23)$$

Установим связь между $\mathcal{L}_m$ и L_G . Положим

$$\begin{aligned} \langle \Pi_m f, \Phi \rangle &= \left\langle f(z), \int_{\mathbb{S}} \Phi(z, \tau) \tau^m d\tau \right\rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \\ \langle \pi_m F, \varphi \rangle &= \langle F, \Pi_{-m} \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad F \in \mathcal{D}'(C_R). \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда $\Pi_m f \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\pi_m F \in \mathcal{D}'(B_R)$ и имеют место равенства

$$\langle \Pi_m f, \Phi \rangle = \langle f, \pi_{-m} \Phi \rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R), \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad (25)$$

$$(\Pi_m f)(z, \tau) = f(z) \tau^m, \quad f \in C(B_R), \quad (26)$$

$$(\pi_m F)(z) = \int_{\mathbb{S}} F(z, \tau) \tau^{-m} d\tau, \quad F \in C(C_R), \quad (27)$$

$$\pi_m \Pi_k = \delta_{m,k} \text{Id}. \quad (28)$$

Лемма 4. Операторы L_G и $\mathcal{L}_m$ связаны соотношениями

$$\pi_{-m} L_G = \mathcal{L}_m \pi_{-m}, \quad L_G \Pi_m = \Pi_m \mathcal{L}_{-m}. \quad (29)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\Phi \in \mathcal{D}(C_R)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$. Поскольку $\mathbf{d}_{\mathbb{S}}(\tau^m) = im\tau^m$, в силу (8), (14) и (26) получаем $L_G \Pi_m \varphi = \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \varphi$. Поэтому (см. (22)–(24))

$$\begin{aligned} \langle \pi_{-m} L_G F, \varphi \rangle &= \langle L_G F, \Pi_m \varphi \rangle = \langle F, L_G \Pi_m \varphi \rangle = \langle F, \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle \\ &= \langle \pi_{-m} F, \mathcal{L}_{-m} \varphi \rangle = \langle \mathcal{L}_m \pi_{-m} F, \varphi \rangle, \end{aligned} \quad (30)$$

что доказывает первое равенство в (29). Пусть теперь $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Из (23), (25), (22) и (30) имеем

$$\begin{aligned} \langle L_G \Pi_m f, \Phi \rangle &= \langle \Pi_m f, L_G \Phi \rangle = \langle f, \pi_{-m} L_G \Phi \rangle \\ &= \langle f, \mathcal{L}_m \pi_{-m} \Phi \rangle = \langle \mathcal{L}_{-m} f, \pi_{-m} \Phi \rangle = \langle \Pi_m \mathcal{L}_{-m} f, \Phi \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует второе равенство в (29).

Лемма 5. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Тогда

$$(\mathcal{L}_m f)(z) = m \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \quad (31)$$

$$(\mathcal{L}_{-m} f)(z) = m \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}) = m \mathcal{L}_{-1}(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z). \quad (32)$$

Доказательство. Для $f \in C^2(B_R)$ утверждение леммы проверяется непосредственным вычислением с помощью (8) и цепного правила (см. [24, гл. 1, § 1.3.3]). Предположим теперь, что $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Учитывая сказанное выше и (22), (7), для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_m f, \varphi \rangle &= m \langle f, \mathcal{L}_1(\varphi(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}) \rangle \\ &= m \langle f, \mathcal{L}_{-1}(\varphi(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z) \rangle = m^{1-n} \langle f(m^{-1/2}z), \mathcal{L}_{-1}(\varphi(m^{-1/2}z)) \rangle \\ &= m^{1-n} \langle \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z)), \varphi(m^{-1/2}z) \rangle = m \langle \mathcal{L}_1(f(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \varphi \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует (31). Равенство (32) доказывается аналогично.

Далее нам потребуются некоторые специальные функции. Пусть $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Для $\lambda \in \mathbb{C}$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $(z, \tau) \in G$ положим

$$\mathfrak{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z, \tau) = E_{\lambda, N, -m}^{p, q, l}(z) \tau^m, \quad \mathcal{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z, \tau) = E_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z) \tau^m, \quad (33)$$

где

$$E_{\lambda, N, m}^{p, q, l}(z) = \begin{cases} \varphi_{\lambda, N}^{p, q}(\sqrt{m}\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m > 0, \\ \varphi_{\lambda, N}^{q, p}(\sqrt{|m|}\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m < 0, \\ \psi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) S_l^{p, q}(\sigma), & m = 0, \end{cases} \quad (34)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) &= \sqrt{\omega_{2n-1}} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N \left({}_1F_1 \left(p + \frac{n - \lambda^2}{2}; n + p + q; \frac{\rho^2}{2} \right) \right) \rho^{p+q} e^{-\frac{\rho^2}{4}}, \\ \psi_{\lambda, N}^{p, q}(\rho) &= \sqrt{\omega_{2n-1}} \left(\frac{d}{d\lambda} \right)_N (\mathbf{j}_{n+p+q-1}(\lambda\rho)) \rho^{p+q}. \end{aligned} \quad (35)$$

Лемма 6. Имеют место равенства

$$(\mathcal{L}_m - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 \text{Id})^{N+1} E_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0, \quad (36)$$

$$(L_G - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 \text{Id})^{N+1} \mathfrak{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0, \quad (37)$$

$$(L_G + (2m(p - q) - (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2) \text{Id})^{N+1} \mathcal{E}_{\lambda, N, m}^{p, q, l} = 0. \quad (38)$$

Доказательство. Из (8) следует, что

$$(\mathcal{L}_m - \mathcal{L}_{-m} - 2m(p - q) \text{Id})f = 0, \quad \text{если } f \text{ имеет вид } f(z) = h(\rho) S_l^{p, q}(\sigma). \quad (39)$$

Поэтому формулы (9.30), (12.35) в [13, гл. 9, 12] и их доказательства показывают, что

$$(\mathcal{L}_j - \lambda^2 \text{Id})^{N+1} E_{\lambda, N, j}^{p, q, l} = 0 \quad \text{при } j = 0, \pm 1.$$

Преобразуя левую часть этого равенства по формуле бинома и учитывая (31), (32), приходим к (36). Аналогично, используя (29), (28), (39) и (36), получаем (37) и (38).

3.2. Ряды Фурье на B_R и C_R . Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$. Для произвольных $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ и $m \in \mathbb{Z}$ положим

$$\langle \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}z) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R),$$

$$\langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi \rangle = \left\langle F(z, \tau), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}z, \tau\eta) \eta^m d\eta dU \right\rangle, \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R).$$

Тогда $\pi^{p,q,l} f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $\mathcal{P}_m^{p,q,l} F \in \mathcal{D}'(C_R)$ и имеют место равенства

$$(\pi^{p,q,l} f)(z) = d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} f(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU, \quad f \in C(B_R), \quad (40)$$

$$\langle \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \langle f, \overline{\pi^{p,q,l} \varphi} \rangle, \quad f \in \mathcal{D}'(B_R), \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R), \quad (41)$$

$$(\mathcal{P}_m^{p,q,l} F)(z, \tau) = d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} F(Uz, \tau\eta) \eta^{-m} d\eta dU, \quad F \in C(C_R), \quad (42)$$

$$\langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} \rangle, \quad F \in \mathcal{D}'(C_R), \quad \Phi \in \mathcal{D}(C_R). \quad (43)$$

Далее нам потребуются некоторые соотношения для операторов

$$\pi^{p,q,l} : \mathcal{D}'(B_R) \rightarrow \mathcal{D}'(B_R) \text{ и } \mathcal{P}_m^{p,q,l} : \mathcal{D}'(C_R) \rightarrow \mathcal{D}'(C_R).$$

Лемма 7. Для любых $k, l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ имеет место равенство

$$\pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} = \delta_{k,l} \pi^{p,q,k}. \quad (44)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что

$$d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU = \delta_{k,l} t_{k,k}^{p,q}(V). \quad (45)$$

Действительно, учитывая (12) и используя равенство

$$t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) = \sum_{j=1}^{d(p,q)} t_{k,j}^{p,q}(V) t_{j,k}^{p,q}(U^{-1})$$

(см. [25, гл. 1, § 1, п. 2, формула (4)]), получаем

$$\int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU = \sum_{j=1}^{d(p,q)} t_{k,j}^{p,q}(V) \int_{\mathcal{U}(n)} t_{l,l}^{p,q}(U) \overline{t_{k,j}^{p,q}(U)} dU.$$

Отсюда и из соотношений ортогональности для матричных элементов (см. [25, гл. 1, § 4, п. 3, формулы (2), (3)]) следует (45).

Далее, пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$. Тогда (см. (41))

$$\langle \pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \langle f, \overline{\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \varphi} \rangle. \quad (46)$$

Используя (40), свойство инвариантности меры Хаара относительно сдвигов и теорему Фубини, находим

$$(\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi})(z) = (d(p,q))^2 \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathcal{U}(n)} t_{k,k}^{p,q}(VU^{-1}) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \overline{\varphi}(Vz) dV.$$

Это соотношение и формулы (45), (40) влекут равенство

$$\pi^{p,q,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi} = \delta_{k,l} \pi^{p,q,k} \overline{\varphi}.$$

Отсюда и из (46), (41) получаем

$$\langle \pi^{p,q,k} \pi^{p,q,l} f, \varphi \rangle = \delta_{k,l} \langle f, \overline{\pi^{p,q,k} \overline{\varphi}} \rangle = \delta_{k,l} \langle \pi^{p,q,k} f, \varphi \rangle,$$

что и требовалось.

Лемма 8. Операторы $\mathcal{P}_m^{p,q,l}$ и $\pi^{p,q,l}$ связаны соотношением

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l} = \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m. \quad (47)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\Phi \in \mathcal{D}(C_R)$. Тогда (см. (25), (41), (24), (27))

$$\begin{aligned} \langle \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m F, \Phi \rangle &= \langle \pi^{p,q,l} \Pi_m F, \Pi_m \Phi \rangle = \langle \Pi_m F, \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle \\ &= \langle F, \Pi_m \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle = \langle F, \Pi_m \overline{\pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi} \rangle = \langle F, \Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi \rangle. \end{aligned} \quad (48)$$

Далее, используя (26), (40), (27) и (42), получаем

$$\begin{aligned} (\Pi_m \pi^{p,q,l} \Pi_m \Phi)(z, \tau) &= d(p,q) \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} (\Pi_m \Phi)(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p,q) \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \overline{\Phi}(Uz, \eta) \eta^{-m} d\eta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p,q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \overline{\Phi}(Uz, \tau\eta) \eta^{-m} d\eta t_{l,l}^{p,q}(U) dU = (\mathcal{P}_m^{p,q,l} \overline{\Phi})(z, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда и из (48), (43) следует формула (47).

Положим

$$\pi^{p,q} = \sum_{l=1}^{d(p,q)} \pi^{p,q,l}, \quad \mathcal{P}_m^{p,q} = \sum_{l=1}^{d(p,q)} \mathcal{P}_m^{p,q,l}. \quad (49)$$

Лемма 9. Пусть $f \in C(B_R)$. Тогда

$$(\pi^{p,q} f)(z) = \frac{d(p,q)}{\omega_{2n-1}} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) Q^{p,q}(\sigma \cdot \overline{\xi}) d\omega(\xi), \quad z \in B_R, \quad (50)$$

где

$$Q^{p,q}(te^{i\theta}) = t^{|p-q|} e^{i(p-q)\theta} P_{\min\{p,q\}}^{(n-2, |p-q|)}(2t^2 - 1), \quad t \in [-1, 1], \quad e^{i\theta} \in \mathbb{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (40) и [28, лемма 1] имеем

$$(\pi^{p,q,l} f)(z) = S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi) \quad (51)$$

при всех $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Отсюда и из (49) получаем

$$(\pi^{p,q}f)(z) = \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} f(\rho\xi) \sum_{l=1}^{d(p,q)} S_l^{p,q}(\sigma) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi).$$

Используя это представление и равенство

$$\sum_{l=1}^{d(p,q)} S_l^{p,q}(\sigma) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} = \frac{d(p,q)Q^{p,q}(\sigma \cdot \bar{\xi})}{\omega_{2n-1}}$$

(см. [29, формулы (4.1), (4.4), (4.5)]), приходим к (50).

Лемма 10. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$. Тогда

$$\pi^{p,q}(f(\bar{z}))(\bar{z}) = (\pi^{q,p}f)(z). \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $f \in C(B_R)$ формула (52) следует из (50) и равенства

$$Q^{p,q}(te^{-i\theta}) = Q^{q,p}(te^{i\theta}).$$

В общем случае отсюда и из (6), (41), (49) имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi^{p,q}(f(\bar{z}))(\bar{z}), \varphi \rangle &= \langle \pi^{p,q}(f(\bar{z})), \varphi(\bar{z}) \rangle = \langle f(\bar{z}), \overline{\pi^{p,q}(\varphi(\bar{z}))} \rangle \\ &= \langle f, \overline{\pi^{p,q}(\overline{\varphi(\bar{z})})}(\bar{z}) \rangle = \langle f, \overline{\pi^{q,p}(\overline{\varphi})} \rangle = \langle \pi^{q,p}f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_R). \end{aligned}$$

Тем самым равенство (52) установлено для $f \in \mathcal{D}'(B_R)$.

Лемма 11. Пусть $\varphi \in \mathcal{E}(B_R)$, $\Phi \in \mathcal{E}(C_R)$, $p + q + |m| > 0$ и $A, B \in \mathbb{Z}_+$. Тогда

$$(\pi^{p,q}\varphi)(z) = \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} (\mathbf{L}^A \varphi)(Uz) \chi^{p,q}(U) dU \quad \text{при } p + q \geq 1 \quad (53)$$

и

$$(\mathcal{P}_m^{p,q}\Phi)(z, \tau) = \tau^m \int_{\mathcal{U}(n)} \chi^{p,q}(U) \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B)\Phi)(Uz, \eta) \eta^{-m} d\eta dU, \quad (54)$$

где дифференциальные операторы $\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B)$ определяются равенствами:

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = d(p, q) \lambda_{p,q}^{-A} (im)^{-B} \mathbf{L}^A \mathbf{d}_S^B, \quad \text{если } p + q \geq 1, \quad m \neq 0,$$

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = d(p, q) \lambda_{p,q}^{-A} \mathbf{L}^A, \quad \text{если } p + q \geq 1, \quad m = 0,$$

$$\mathbf{D}_m^{p,q}(A, B) = (im)^{-B} \mathbf{d}_S^B, \quad \text{если } p = q = 0, \quad m \neq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $p + q \geq 1$. Учитывая (10), симметричность оператора Δ_0 , (17) и (51), находим

$$\begin{aligned} (\pi^{p,q,l}\varphi)(z) &= \lambda_{p,q}^{-A} S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \varphi(\rho\xi) \Delta_0^A(\overline{S_l^{p,q}(\xi)}) d\omega(\xi) \\ &= \lambda_{p,q}^{-A} S_l^{p,q}(\sigma) \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} (\mathbf{L}^A \varphi)(\rho\xi) \overline{S_l^{p,q}(\xi)} d\omega(\xi) \end{aligned}$$

$$= \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} (\mathbf{L}^A \varphi)(Uz) t_{l,l}^{p,q}(U) dU,$$

откуда в силу (49) получаем (53). Далее, если $m \neq 0$, то по лемме 1

$$(\pi_m \Phi)(z) = \frac{1}{(im)^B} \int_{\mathbb{S}} (\mathbf{d}_{\mathbb{S}}^B \Phi)(z, \eta) \eta^{-m} d\eta. \quad (55)$$

Равенства (53), (55), (49) и (47) влекут (54) при $p+q \geq 1$, $m \neq 0$. Случаи $p+q \geq 1$, $m = 0$ и $p = q = 0$, $m \neq 0$ рассматриваются аналогично с использованием равенств

$$(\pi_0 \Phi)(z) = \int_{\mathbb{S}} \Phi(z, \eta) d\eta, \quad (\pi^{0,0} \varphi)(z) = \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(Uz) dU$$

(см. (27), (40), (49) и (12)).

Лемма 12. Пусть $f \in \mathcal{D}'(B_R)$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$. Тогда

$$f \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \pi^{p,q} f, \quad F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{m \in \mathbb{Z}, p,q \in \mathbb{Z}_+} \mathcal{P}_m^{p,q} F, \quad (56)$$

где ряды сходятся безусловно в указанных пространствах.

Доказательство. Из (40), (49) видно, что для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_R)$ носители всех функций $\pi^{p,q} \varphi$ содержатся в $\overline{B}_r$, где $r = \inf\{\varrho > 0 : \text{supp } \varphi \subset B_{\varrho}\}$. Оценим модуль производных $D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi$ на B_R , где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+$ и $\{k_{\mu}\}_{\mu=1}^{\alpha}, \{j_{\nu}\}_{\nu=1}^{\beta}$ — произвольные наборы, состоящие из натуральных чисел, не превосходящих n (здесь, как обычно, произведение операторов с нулевым числом множителей определяется как тождественный оператор). Используя (53) и цепное правило (см. [24, гл. 1, § 1.3.3]), для любого $A \in \mathbb{Z}_+$ и $p+q \geq 1$ имеем

$$\begin{aligned} & (D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z) \\ &= \lambda_{p,q}^{-A} d(p, q) \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha}=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{\beta}=1}^n \int_{\mathcal{U}(n)} a_{l_1, k_1}(U) \dots a_{l_{\alpha}, k_{\alpha}}(U) \overline{a_{i_1, j_1}(U)} \dots \overline{a_{i_{\beta}, j_{\beta}}(U)} \\ & \quad \cdot (D_{l_1} \dots D_{l_{\alpha}} \overline{D}_{i_1} \dots \overline{D}_{i_{\beta}} \mathbf{L}^A \varphi)(Uz) \chi^{p,q}(U) dU. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$d(p, q) \leq (p+q+n-1)^{2n-3}, \quad |a_{i,j}(U)| \leq 1, \quad \int_{\mathcal{U}(n)} |\chi^{p,q}(U)| dU \leq 1$$

(см. (9) и [25, гл. 1, § 4, п. 7, формула (9)]), получаем

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in B_R} |(D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z)| \\ & \leq \frac{(p+q+n-1)^{2n-3}}{(p+q)^{2A}} \sum_{l_1, \dots, l_{\alpha}=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_{\beta}=1}^n \sup_{z \in B_R} |(D_{l_1} \dots D_{l_{\alpha}} \overline{D}_{i_1} \dots \overline{D}_{i_{\beta}} \mathbf{L}^A \varphi)(z)|. \end{aligned}$$

В силу произвольности A отсюда следует, что

$$\sum_{p,q \in \mathbb{Z}_+} \sup_{z \in B_R} |(D_{k_1} \dots D_{k_{\alpha}} \overline{D}_{j_1} \dots \overline{D}_{j_{\beta}} \pi^{p,q} \varphi)(z)| < +\infty.$$

Это рассуждение, равенства (41), (49) и [24, гл. 12, теорема 12.3.3] влекут требуемую сходимость первого ряда из (56). Для второго ряда доказательство проводится аналогично (см. (54), (49), (47)).

3.3. Свертки и преобразования Фурье. Пусть $m \in \mathbb{Z}$. Скрученная (twisted) m -свертка $f \star^m T$ распределений $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$ является функционалом в $\mathcal{D}'(B_{R-r(T)})$, действующим по правилу

$$\langle f \star^m T, \varphi \rangle = \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)}) \quad (57)$$

(см. [13, гл. 12, § 12.1; 26, гл. 1, § 1.2]).

Свертки $F * \mathcal{T}$ и $\mathcal{T} * F$ распределений $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(C_R)$ определяются как распределения в $\mathcal{D}'(C_{R-r(\mathcal{T})})$ следующим образом:

$$\langle F * \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle F(\mathbf{g}), \langle \mathcal{T}(g), \Phi(\mathbf{g}g) \rangle \rangle, \quad \langle \mathcal{T} * F, \Phi \rangle = \langle F(\mathbf{g}), \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g\mathbf{g}) \rangle \rangle,$$

где $\Phi \in \mathcal{D}(C_{R-r(\mathcal{T})})$. Основные свойства свертки на группах содержатся в [30, гл. 2, § 5, п. 1; 31, гл. 5]. В частности, $\Phi * \mathcal{T}$ и $\mathcal{T} * \Phi$ являются гладкими функциями вида

$$(\Phi * \mathcal{T})(\mathbf{g}) = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(\mathbf{g}g^{-1}) \rangle, \quad (\mathcal{T} * \Phi)(\mathbf{g}) = \langle \mathcal{T}(g), \Phi(g^{-1}\mathbf{g}) \rangle. \quad (58)$$

При этом

$$\langle F * \mathcal{T}, \Phi \rangle = \langle F, \Phi * \overset{\vee}{\mathcal{T}} \rangle, \quad \langle \mathcal{T} * F, \Phi \rangle = \langle F, \overset{\vee}{\mathcal{T}} * \Phi \rangle. \quad (59)$$

Лемма 13. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$. Тогда

$$(f \star^m T)(z) = m^{-n} (f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \quad (60)$$

$$(f \star^{-m} T)(z) = (f(\bar{z}) \star^m T)(\bar{z}), \quad (61)$$

$$(f \star^{-m} T)(z) = m^{-n} (f(m^{-1/2}\bar{z}) \star^1 T(m^{-1/2}\bar{z}))(m^{1/2}\bar{z}). \quad (62)$$

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)})$ имеем (см. (57), (7))

$$\begin{aligned} \langle (f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z))(m^{1/2}z), \varphi \rangle &= m^{-n} \langle f(m^{-1/2}z) \star^1 T(m^{-1/2}z), \varphi(m^{-1/2}z) \rangle \\ &= m^{-n} \langle f(m^{-1/2}z), \langle T(m^{-1/2}w), \varphi(m^{-1/2}(z+w)) e^{\frac{i}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(m^{-1/2}z), \langle T(w), \varphi(m^{-1/2}z+w) e^{\frac{im^{1/2}}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= m^n \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle = m^n \langle f \star^m T, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

что доказывает (60). Далее, используя (6), (57) и радиальность распределения T , получаем

$$\begin{aligned} \langle (f(\bar{z}) \star^m T)(\bar{z}), \varphi \rangle &= \langle f(\bar{z}) \star^m T, \varphi(\bar{z}) \rangle = \langle f(\bar{z}), \langle T(w), \varphi(\bar{z} + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot \bar{w})} \rangle \rangle = \langle f(z), \langle T(\bar{w}), \varphi(z + \bar{w}) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle f(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \text{Im}(\bar{z} \cdot w)} \rangle \rangle = \langle f \star^{-m} T, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (61), которое вместе с (60) влечет (62).

Лемма 14. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_h(B_R)$. Тогда

$$\pi^{p,q,l}(f \star^m T) = (\pi^{p,q,l} f) \star^m T \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(T)})$ имеем (см. (41), (40), (12), (57))

$$\begin{aligned} \langle \pi^{p,q,l}(f \star^m T), \varphi \rangle &= \langle f \star^m T, \overline{\pi^{p,q,l} \varphi} \rangle \\ &= \left\langle f(z), \left\langle T(w), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}(z+w)) t_{l,l}^{p,q}(U) dU e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Аналогично, используя (57), (41), (40), (12) и радиальность распределения T , получаем

$$\begin{aligned} \langle (\pi^{p,q,l} f) \star^m T, \varphi \rangle &= \langle (\pi^{p,q,l} f)(z), \langle T(w), \varphi(z+w) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \langle T(w), \varphi(U^{-1}z+w) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \bar{w})} \rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle f(z), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle T(w), \varphi(U^{-1}(z+w)) e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \overline{(U^{-1}w)})} \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle f(z), \left\langle T(w), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \varphi(U^{-1}(z+w)) t_{l,l}^{p,q}(U) dU e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \right\rangle \right\rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая установленные соотношения, приходим к (63).

Лемма 15. Если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_h(C_R)$, то

$$\pi_m(F * \mathcal{T}) = (\pi_m F) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}) \quad \text{и} \quad \pi_m(\mathcal{T} * F) = (\pi_m F) \star^m (\pi_m \mathcal{T}) \quad (64)$$

в $B_{R-r(\mathcal{T})}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(B_{R-r(\mathcal{T})})$. В силу (24), (26) и (58) имеем

$$\begin{aligned} \langle \pi_m(F * \mathcal{T}), \varphi \rangle &= \langle F * \mathcal{T}, \Pi_{-m} \varphi \rangle \\ &= \langle F(z, \tau), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} (\tau \eta)^{-m} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что

$$r(\pi_m \mathcal{T}) \leq r(\mathcal{T}), \quad (65)$$

и используя (57), (24), находим

$$\begin{aligned} \langle (\pi_m F) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}), \varphi \rangle &= \langle (\pi_m F)(z), \langle (\pi_m \mathcal{T})(w), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \rangle \rangle \\ &= \langle (\pi_m F)(z), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \eta^{-m} \rangle \rangle \\ &= \langle F(z, \tau), \langle \mathcal{T}(w, \eta), \varphi(z+w) e^{-\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} (\tau \eta)^{-m} \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Сравнивая равенства выше, получаем первую формулу в (64). Вторая формула в (64) доказывается аналогично.

Лемма 16. Если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_b(C_R)$, то

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}) = (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) * \mathcal{T} = \Pi_m((\pi^{p,q,l} \pi_m F)^{-m} (\pi_m \mathcal{T})) \quad (66)$$

и

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(\mathcal{T} * F) = \mathcal{T} * (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) = \Pi_m((\pi^{p,q,l} \pi_m F)^m (\pi_m \mathcal{T})) \quad (67)$$

в $C_{R-r}(\mathcal{T})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\Phi \in \mathcal{D}(C_{R-r}(\mathcal{T}))$, $\mathcal{S} = \overset{\vee}{\mathcal{T}}$. Тогда (см. (43), (59))

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}), \Phi \rangle &= \langle F * \mathcal{T}, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi * \mathcal{S}} \rangle, \\ \langle (\mathcal{P}_m^{p,q,l} F) * \mathcal{T}, \Phi \rangle &= \langle \mathcal{P}_m^{p,q,l} F, \Phi * \mathcal{S} \rangle = \langle F, \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} (\Phi * \mathcal{S})} \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S}$ и $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} (\Phi * \mathcal{S})}$ с использованием (58), (42), (13) и радиальности распределения $\mathcal{S}(z, \tau)$ по переменной z . Имеем

$$\begin{aligned} (\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S})(z, \tau) &= \langle \mathcal{S}(w, \eta), \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi}((z, \tau)(w, \eta)^{-1}) \rangle \\ &= \langle \mathcal{S}(w, \eta), \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi}(z - w, \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \rangle \\ &= \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \zeta \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \zeta^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle \\ &= \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), d(p, q) (\bar{\tau} \eta)^m e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \varkappa \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \varkappa^m d\varkappa t_{l,l}^{p,q}(U) dU \right\rangle. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} (\Phi * \mathcal{S})}(z, \tau) &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} (\Phi * \mathcal{S})(U^{-1}z, \zeta) (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \langle \mathcal{S}(w, \eta), \Phi((U^{-1}z, \zeta)(w, \eta)^{-1}) \rangle (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \int_{\mathbb{S}} \langle \mathcal{S}(w, \eta), \Phi(U^{-1}z - w, \zeta \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}((U^{-1}z) \cdot \bar{w})}) \rangle (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \zeta \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) (\zeta \bar{\tau})^m d\zeta \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU \\ &= d(p, q) \int_{\mathcal{U}(n)} \left\langle \mathcal{S}(w, \eta), (\bar{\tau} \eta)^m e^{\frac{im}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})} \int_{\mathbb{S}} \Phi(U^{-1}(z - w), \varkappa \tau \bar{\eta} e^{-\frac{i}{2} \operatorname{Im}(z \cdot \bar{w})}) \varkappa^m d\varkappa \right\rangle t_{l,l}^{p,q}(U) dU. \end{aligned}$$

Тем самым $\overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} \Phi} * \mathcal{S} = \overline{\mathcal{P}_m^{p,q,l} (\Phi * \mathcal{S})}$, что влечет первое равенство в (66). Теперь в силу (47) и (64) получаем

$$\mathcal{P}_m^{p,q,l}(F * \mathcal{T}) = \Pi_m \pi^{p,q,l} \pi_m(F * \mathcal{T}) = \Pi_m \pi^{p,q,l}((\pi_m F)^{-m} (\pi_m \mathcal{T})).$$

Отсюда и из (63) следует второе равенство в (66). Формула (67) доказывается аналогично.

Преобразование Фурье — Лапласа распределения $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ является целой функцией $\widehat{T}$, заданной равенством

$$\widehat{T}(\lambda) = \langle T(t), e^{-i\lambda t} \rangle, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Определим необходимые нам аналоги этого преобразования.

Пусть $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(G)$. Для $m \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ положим

$$(\mathcal{F}_m T)(\lambda) = \langle T, E_{\lambda,0,m}^{0,0,1} \rangle, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) = \langle \mathcal{T}, \mathfrak{E}_{\lambda,0,-m}^{0,0,1} \rangle. \quad (68)$$

Отметим, что

$$\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m} = \mathcal{F}_m \pi_m \mathcal{T} = \mathcal{F}_{-m} \pi_m \mathcal{T} \quad (69)$$

(см. (24), (26), (33) и (34)).

Лемма 17. Пусть $j \in \{0, 1\}$. Для того чтобы четная целая функция w являлась преобразованием $\mathcal{F}_j$ от распределения из $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$ с носителем в $\overline{B}_r$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторых констант c_1 и c_2 имело место неравенство

$$|w(\lambda)| \leq c_1(1 + |\lambda|)^{c_2} e^{r|\operatorname{Im} \lambda|}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является частным случаем теорем 9.2 и 12.2 в [13].

Из леммы 17 и теоремы Винера — Пэли — Шварца для преобразования Фурье — Лапласа (см. [32, теорема 7.3.1]) следует существование и единственность биекций Λ_0 , Λ_1 , действующих из $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{R})$, таких, что

$$\widehat{\Lambda_j T} = \mathcal{F}_j T, \quad r(\Lambda_j T) = r(T), \quad T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(\mathbb{C}^n), \quad j = 0, 1. \quad (70)$$

Лемма 18. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(B_R)$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и

$$\mathcal{L}_m f = (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 f \quad \text{в } B_R$$

при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда

$$f \stackrel{m}{\star} T = (\mathcal{F}_m T)(\lambda) f \quad \text{в } B_{R-r(T)}. \quad (71)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $m = 1$ это утверждение установлено в [13, гл. 12, предложение 12.13]. Поскольку

$$\mathcal{F}_1(T(|m|^{-1/2}z)) = |m|^n \mathcal{F}_m T, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (72)$$

(см. (68), (7)), отсюда и из лемм 5, 13 получаем (71) для $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Наконец, случай $m = 0$ сводится к известной теореме о среднем для решений уравнения Гельмгольца $\Delta f = -\lambda^2 f$ (см. (8) и [12, часть 1, гл. 7, формула (7.10)]).

Лемма 19. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $F \in \mathcal{P}_m^{p,q}(\mathcal{D}'(C_R))$ и $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathbb{H}}(C_R)$.

(1) Если $L_G F = (|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 F$ в C_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$F * \mathcal{T} = \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) F \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}. \quad (73)$$

(2) Если $L_G F = ((|m| + \delta_{m,0})\lambda^2 + 2m(q-p))F$ в C_R при некотором $\lambda \in \mathbb{C}$, то

$$\mathcal{T} * F = \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) F \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим первое утверждение. По условию существует распределение $F_1 \in \mathcal{D}'(C_R)$ такое, что $F = \mathcal{P}_m^{p,q} F_1$. Отсюда и из (49), (66) имеем

$$F * \mathcal{T} = \Pi_m((\pi^{p,q} \pi_m F_1) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T})) \quad \text{в } C_{R-r(\mathcal{T})}. \quad (74)$$

Далее, в силу (28), (29), (49) и (47) получаем в шаре B_R равенства

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{-m} \pi^{p,q} \pi_m F_1 &= \pi_m \Pi_m \mathcal{L}_{-m} \pi^{p,q} \pi_m F_1 = \pi_m L_G \Pi_m \pi^{p,q} \pi_m F_1 = \pi_m L_G F \\ &= (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi_m F = (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi_m \Pi_m \pi^{p,q} \pi_m F_1 = (|m| + \delta_{m,0}) \lambda^2 \pi^{p,q} \pi_m F_1. \end{aligned}$$

Тогда (см. лемму 18 и (69))

$$\begin{aligned} (\pi^{p,q} \pi_m F_1) \star^{-m} (\pi_m \mathcal{T}) &= (\mathcal{F}_{-m} \pi_m \mathcal{T})(\lambda) \pi^{p,q} \pi_m F_1 \\ &= \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}(\lambda) \pi^{p,q} \pi_m F_1 \quad \text{в } B_{R-r(\pi_m \mathcal{T})}. \end{aligned}$$

Теперь (73) следует из (74), (49), (47) и (65).

Второе утверждение доказывается аналогично с использованием (67) и (39).

Лемма 20. Пусть $T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{C}^n)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_b(G)$. Тогда

$$E_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \star^m T = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda (\mathcal{F}_m T)^{\langle M \rangle}(\lambda) E_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}, \quad (75)$$

$$\mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l} * \mathcal{T} = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}^{\langle M \rangle}(\lambda) \mathfrak{E}_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}, \quad (76)$$

$$\mathcal{T} * \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l} = \sum_{M=0}^N \binom{N}{M}_\lambda \mathfrak{F}_{\mathcal{T},m}^{\langle M \rangle}(\lambda) \mathcal{E}_{\lambda,N-M,m}^{p,q,l}. \quad (77)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (36) и леммы 18 следует, что

$$E_{\lambda,0,m}^{p,q,l} \star^m T = (\mathcal{F}_m T)(\lambda) E_{\lambda,0,m}^{p,q,l}.$$

Дифференцируя это равенство по переменной λ с использованием правила Лейбница и учитывая (34), приходим к (75). Далее, в силу (49), (33), (47), (28) и (51) имеем

$$\mathcal{P}_m^{p,q}(\mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}) = \mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad \mathcal{P}_m^{p,q}(\mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}) = \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}.$$

Поэтому, повторяя рассуждение выше, с помощью (37), (38) и леммы 19 получаем формулы (76), (77).

§ 4. Описание решений уравнений свертки

Пусть $w : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ — ненулевая целая функция, $\mathcal{Z}(w)$ — множество всех ее нулей, $\mathfrak{P} = \widehat{\mathcal{E}'(\mathbb{R})}$ — алгебра Шварца целых функций экспоненциального типа, растущих не быстрее многочлена на вещественной оси. Изучение проблемы 1 и ее аналогов тесно связано с классом ненулевых функций $w \in \mathfrak{P}$, у которых $\mathcal{Z}(w) \neq \emptyset$ и для любого $\lambda \in \mathcal{Z}(w)$ выполнены оценки

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leq c_1 \ln(2 + |\lambda|), \quad |w^{(m_\lambda)}(\lambda)| \geq (2 + |\lambda|)^{m_\lambda - c_2}, \quad (78)$$

где c_1, c_2 — положительные константы, зависящие только от w , и $m_\lambda = m_\lambda(w)$ — кратность нуля λ функции w (см. [12, часть 3, § 1.1; 13, гл. 8, § 8.1]). Множество, состоящее из всех таких функций и ненулевых констант, обозначим буквой

3. Отметим, что первое условие из (78) возникает, в частности, при определении гиперболических распределений (см. [20, § 5]), а второе условие отвечает за отсутствие быстро сближающихся нулей у w . Класс $\mathfrak{Z}$ является достаточно широким.

ПРИМЕР 1. Пусть

$$T(t) = \begin{cases} (r+t)^\alpha (r-t)^\beta h(t), & |t| < r, \\ 0, & |t| \geq r, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta \in (-1, +\infty)$, $h \in C^\infty[-r, r]$ и $h^{(\mu)}(-r)h^{(\nu)}(r) \neq 0$ при некоторых $\mu, \nu \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\widehat{T} \in \mathfrak{Z}$ (см. [13, гл. 8, § 8.1]).

При рассмотрении четной целой функции w вместо $\mathcal{Z}(w)$ и $m_\lambda(w)$ удобно использовать множество

$$\mathcal{Z}^+(w) = \{\lambda \in \mathcal{Z}(w) : \operatorname{Re} \lambda \geq 0, i\lambda \notin (0, +\infty)\}$$

и соответственно кратность $\mathbf{m}_\lambda(w)$, совпадающую с $m_\lambda(w)$, если $\lambda \in \mathcal{Z}^+(w) \setminus \{0\}$, и равную $m_0(w)/2$, если $\lambda = 0 \in \mathcal{Z}^+(w)$.

Пусть $\mathcal{Z}^+(w) \neq \emptyset$ и $\mathcal{A}$ — функция на $\mathcal{Z}^+(w)$ со значениями в топологическом векторном пространстве X . Будем писать

$$\mathcal{B} \stackrel{X}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(w)} \mathcal{A}(\lambda), \quad (79)$$

если

$$\mathcal{B} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{\lambda_j \in \mathcal{Z}^+(w), |\lambda_j| < N} \mathcal{A}(\lambda_j),$$

где сходимость понимается в пространстве X и $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ — точки множества $\mathcal{Z}^+(w)$, занумерованные в порядке неубывания модулей (для точек с равными модулями нумерация выбирается произвольно). Если $\mathcal{Z}^+(w) = \emptyset$, то выражение в правой части (79) считается равным нулю.

Положим

$$\mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n) = \{T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{C}^n) : \mathcal{F}_m T \in \mathfrak{Z}\}, \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$\mathfrak{N}(G) = \{\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_b(G) \setminus \{0\} : \mathfrak{F}_{\mathcal{T},s} \in \mathfrak{Z} \text{ для всех } s \in \operatorname{spec} \mathcal{T}\},$$

где

$$\operatorname{spec} \mathcal{T} = \{s \in \mathbb{Z} : \pi_s \mathcal{T} \neq 0\}.$$

Из (70) и (72) следует, что $\mathfrak{N}_0(\mathbb{C}^n) = \Lambda_0^{-1}(\mathfrak{N}_b(\mathbb{R}))$, а при $m \neq 0$

$$T \in \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n) \Leftrightarrow T(|m|^{-1/2}z) \in \Lambda_1^{-1}(\mathfrak{N}_b(\mathbb{R})), \quad (80)$$

где $\mathfrak{N}_b(\mathbb{R}) = \{T \in \mathcal{E}'_b(\mathbb{R}) : \widehat{T} \in \mathfrak{Z}\}$. Отметим также, что $\Pi_m(\mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)) \subset \mathfrak{N}(G)$ при любом $m \in \mathbb{Z}$ (см. (69), (28)).

Если $T \in \mathcal{E}'_b(B_R) \cap \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)$, то решения $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ уравнения $f \star^m T = 0$ можно описать следующим образом.

Теорема 1. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $0 < R \leq \infty$, $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ и $T \in \mathcal{E}'_b(B_R) \cap \mathfrak{N}_m(\mathbb{C}^n)$. Тогда для того чтобы

$$f \star^m T = 0 \quad \text{в } B_{R-r(T)}, \quad (81)$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ имело место равенство

$$\pi^{p,q,l} f \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_m T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_m T)-1} c_{\lambda,N,m}^{p,q,l} E_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad (82)$$

где $c_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность в теореме следует из (75), (56) и (49). Установим необходимость. При $m = 1$ требуемое утверждение содержится в [13, теорема 17.8 (ii)], поскольку: 1) множество $\mathcal{Z}_T$, величина $n(\lambda, T)$ и функция $\varphi_{\lambda,\eta,p,q,l}$ из формулировки указанной теоремы соотносятся с нашими обозначениями следующим образом:

$$\mathcal{Z}_T = \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_1 T), \quad n(\lambda, T) = \mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_1 T) - 1, \quad \varphi_{\lambda,\eta,p,q,l}(z) = E_{\lambda,\eta,1}^{p,q,l}(z);$$

2) класс $\mathfrak{M}(\mathbb{C}^n)$, используемый в теореме 17.8(ii) из [13], включает в себя класс $\mathfrak{N}_1(\mathbb{C}^n)$, определенный ранее (см. [12, часть 3, гл. 1, формулы (1.16)–(1.18); 13, формула (8.6) и предложение 8.2]).

Далее, пусть $m > 1$ и распределение $f \in \mathcal{D}'(B_R)$ удовлетворяет (81). Тогда (см. (60))

$$f(m^{-1/2}z) \star T(m^{-1/2}z) = 0 \quad \text{в } B_{\sqrt{m}(R-r(T))}.$$

При этом $T(m^{-1/2}z) \in \mathfrak{N}_1(\mathbb{C}^n)$ в силу равенства (72). Используя установленный результат при $m = 1$, легко проверяемое соотношение

$$(\pi^{p,q,l} f)(m^{-1/2}z) = \pi^{p,q,l}(f(m^{-1/2}z))(z),$$

а также (72), (34), получаем (82) в случае $m > 1$.

Пусть теперь $m < 0$ и выполнено условие (81). Фиксируем $p, q \in \mathbb{Z}_+$ и $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Поскольку

$$f(\bar{z}) \stackrel{-m}{\star} T = 0 \quad \text{в } B_{R-r(T)}$$

(см. (61)), то из (49), (52) и (34) по доказанному выше имеем

$$(\pi^{p,q} f)(\bar{z}) = \pi^{q,p}(f(\bar{z}))(z)$$

$$\stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_{-m} T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_{-m} T)-1} \sum_{k=1}^{d(q,p)} \gamma_{\lambda,N,m}^{q,p,k} S_k^{q,p}(\sigma) \varphi_{\lambda,N}^{q,p}(\sqrt{-m}\rho),$$

где $\gamma_{\lambda,N,m}^{q,p,k} \in \mathbb{C}$. Учитывая, что $\mathcal{F}_{-m} = \mathcal{F}_m$ и $S_k^{q,p}(\bar{\sigma}) \in \mathcal{H}^{p,q}$, отсюда получаем

$$(\pi^{p,q} f)(z) \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathcal{F}_m T)} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_\lambda(\mathcal{F}_m T)-1} \sum_{j=1}^{d(p,q)} c_{\lambda,N,m}^{p,q,j} S_j^{p,q}(\sigma) \varphi_{\lambda,N}^{q,p}(\sqrt{-m}\rho),$$

где $c_{\lambda,N,m}^{p,q,j} \in \mathbb{C}$. Действуя на обе части этого разложения оператором $\pi^{p,q,l}$ и используя (49), (44), (40), (51), (34), приходим к (82) в случае $m < 0$.

Наконец, если $m = 0$, то (57) является обычной евклидовой сверткой, а $\mathcal{F}_m T$ совпадает со сферическим преобразованием распределения T в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. (68), (34), (35) и [12, часть 1, гл. 6, формула (6.14)]). Поэтому разложение (82) при $m = 0$ непосредственно следует из (63), (34), (35) и [12, часть 3, гл. 2, теорема 2.4].

Перейдем теперь к описанию классов

$$\mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R) = \{F \in \mathcal{D}'(C_R) : F * \mathcal{T} = 0 \text{ в } C_{R-r(\mathcal{T})}\}$$

и

$$\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R) = \{F \in \mathcal{D}'(C_R) : \mathcal{T} * F = 0 \text{ в } C_{R-r(\mathcal{T})}\},$$

где $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R) \cap \mathfrak{N}(G)$.

Теорема 2. Пусть $0 < R \leq \infty$, $F \in \mathcal{D}'(C_R)$, $\mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(C_R) \cap \mathfrak{N}(G)$ и

$$r(\mathcal{T}) = r(\pi_m \mathcal{T}) \quad \text{для любого } m \in \text{спес } \mathcal{T}. \quad (83)$$

Тогда $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ (соответственно $F \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$) в том и только том случае, когда

$$\mathcal{D}_m^{p,q,l} F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \mathfrak{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}, \quad (84)$$

для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ (соответственно когда

$$\mathcal{D}_m^{p,q,l} F \stackrel{\mathcal{D}'(C_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} b_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \mathcal{E}_{\lambda,N,m}^{p,q,l}, \quad b_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}, \quad (85)$$

для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай класса $\mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$. Пусть $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ и $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$. Тогда из (83) и (64) имеем

$$(\pi_m F)^{-m} \star (\pi_m \mathcal{T}) = 0 \quad \text{в } B_{R-r(\pi_m \mathcal{T})}.$$

При этом $\pi_m \mathcal{T} \in \mathcal{E}'_{\mathfrak{h}}(B_R) \cap \mathfrak{N}_{-m}(\mathbb{C}^n)$ (см. (69)). Отсюда по теореме 1

$$\pi^{p,q,l} \pi_m F \stackrel{\mathcal{D}'(B_R)}{=} \sum_{\lambda \in \mathcal{Z}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})} \sum_{N=0}^{\mathbf{m}_{\lambda}(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},m})-1} a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} E_{\lambda,N,-m}^{p,q,l}, \quad a_{\lambda,N,m}^{p,q,l} \in \mathbb{C}.$$

Действуя на обе части этого равенства оператором Π_m и используя (47), (33) и (26), приходим к (84). Обратно, если $F \in \mathcal{D}'(C_R)$ и для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ справедливо разложение (84), то $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ в силу (76), (66), (56) и (49).

Для класса $\mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$ доказательство проводится аналогично (см. (64), (67), (77)).

Следствие 1. Пусть $F \in \mathcal{D}'(G)$, $\mathcal{T} \in \mathfrak{N}(G)$. Тогда для того чтобы $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(G)$ (соответственно $F \in \mathcal{D}'_{\mathcal{T}}(G)$), необходимо и достаточно, чтобы для любых $m \in \text{спес } \mathcal{T}$, $p, q \in \mathbb{Z}_+$, $l \in \{1, \dots, d(p, q)\}$ и $R = \infty$ имело место разложение (84) (соответственно разложение (85)).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(G)$, то $(\pi_m F)^{-m} \star (\pi_m \mathcal{T}) = 0$ на $\mathbb{C}^n$ для любого $m \in \text{спес } \mathcal{T}$ (см. (64)). Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 2, приходим к требуемому результату.

В заключение отметим, что при $0 < R < \infty$ условие (83) в теореме 2, вообще говоря, опустить нельзя. Действительно, пусть $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathcal{T} = \Pi_k \delta + \Pi_{k+1} u, \quad F = \Pi_k v,$$

где δ — дельта-функция в нуле на $\mathbb{C}^n$, распределение $u \in \mathfrak{N}_{k+1}(\mathbb{C}^n)$ таково, что $r(u) = \varrho \in (0, R)$ (см. (80), (70) и пример 1), v — ненулевая радиальная непрерывная функция на B_R , равная нулю в $B_{R-\varrho}$. Тогда $r(\mathcal{T}) = \varrho$ и $\mathcal{T} \in \mathfrak{N}(G)$ в силу соотношений

$$\text{спес } \mathcal{T} = \{k, k+1\}, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},k} = 1 \in \mathfrak{Z}, \quad \mathfrak{F}_{\mathcal{T},k+1} = \mathcal{F}_{k+1}u \in \mathfrak{Z}$$

(см. (28), (69)). Используя радиальность функции v и (42), (66), (28), (40), заключаем, что $F = \mathcal{P}_k^{0,0,1}F$ и $F \in \mathfrak{D}'_{\mathcal{T}}(C_R)$. Однако для указанных F и $\mathcal{T}$ разложение (84) при $m = k$, $p = q = 0$, $l = 1$ приводит к противоречивому равенству $v \equiv 0$ в B_R , поскольку $\mathcal{L}^+(\mathfrak{F}_{\mathcal{T},k}) = \emptyset$.

Благодарность. Авторы благодарят рецензента за внимание к работе и замечания, позволившие устранить неточности и улучшить первоначальный вариант статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Berenstein C. A., Taylor B. A. A new look at interpolation theory for entire functions of one variable // Adv. Math. 1979. V. 33. P. 109–143.
2. Berenstein C. A., Taylor B. A. Mean-periodic functions // Int. J. Math. Math. Sci. 1980. V. 3, N 2. P. 199–235.
3. Леонтьев А. Ф. Дифференциально-разностные уравнения // Мат. сб. 1949. Т. 24, № 2. С. 347–374.
4. Мышкис А. Д. Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4, № 5. С. 99–141.
5. Delsarte J. Les fonctions 'moyenne-périodiques' // J. Math. Pures Appl. 1935. V. 14, N 1–4. P. 403–453.
6. Schwartz L. Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques // Ann. Math. 1947. V. 48. P. 857–929.
7. Ehrenpreis L. Solution of some problems of division. IV // Am. J. Math. 1960. V. 82. P. 522–588.
8. Ehrenpreis L., Malliavin P. Invertible operators and interpolation in AU-spaces // J. Math. Pures Appl. 1974. V. 53. P. 165–182.
9. Леонтьев А. Ф. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 2. С. 269–328.
10. Леонтьев А. Ф. Последовательности полиномов из экспонент. М.: Наука, 1980.
11. Леонтьев А. Ф. Представление функций рядами экспонент. Уфа: Диалог, 2017.
12. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.
13. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Harmonic analysis of mean periodic functions on symmetric spaces and the Heisenberg group. London: Springer-Verl. London Limited, 2009.
14. Беренштейн К. А., Струппа Д. К. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 54. С. 5–111.
15. Паламодов В. П. Обобщенные функции и гармонический анализ // Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1991. Т. 72. С. 5–134.
16. Ehrenpreis L., Mautner F. I. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. II // Trans. Am. Math. Soc. 1957. V. 84. P. 1–55.
17. Bagchi S. Ch., Sitaram A. Spherical mean periodic functions on semisimple Lie groups // Pacific J. Math. 1979. V. 84, N 2. P. 241–250.
18. Weit Y. On Schwartz's theorem for the motion group // Ann. Inst. Fourier, Grenoble. 1980. V. 30, N 1. P. 91–107.
19. Кучмент П. А. Сферическое представление решений инвариантных дифференциальных уравнений на римановом симметрическом пространстве некомпактного типа // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1985. Т. 49, № 6. С. 1260–1273.

20. Berenstein C. A., Gay R. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. 1986. V. 55. P. 267–288.
21. Berenstein C. A. Spectral synthesis on symmetric spaces // Contemp. Math. 1987. V. 63. P. 1–25.
22. Scott D., Sitaram A. Some remarks on the Pompeiu problem for groups // Proc. Am. Math. Soc. 1988. V. 104, N 4. P. 1261–1266.
23. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. I, II. М.: Наука, 1973.
24. Рудин У. Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
25. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1991.
26. Thangavelu S. Lectures on Hermite and Laguerre expansions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.
27. Smith R. T. The spherical representations of groups transitive on $\mathbb{S}^n$ // Indiana Univ. Math. J. 1975. V. 24, N 4. P. 307–325.
28. Волчков Вит. В. О функциях с нулевыми шаровыми средними на комплексных гиперболических пространствах // Мат. заметки. 2000. Т. 68, № 4. С. 504–512.
29. El Harchaoui M. Inversion de la transformation de Pompéiu locale dans les espaces hyperboliques réel et complexe (Cas de deux boules) // J. Anal. Math. 1995. V. 67. P. 1–37.
30. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.: Мир, 1987.
31. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975.
32. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.

Поступила в редакцию 18 января 2026 г.

После доработки 7 июня 2026 г.

Принята к публикации 8 июня 2026 г.

Волчков Виталий Владимирович (ORCID 0000-0003-4274-0034)

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001;
Институт прикладной математики и механики,
ул. Розы Люксембург, 74, Донецк 283048
danil.bystrov@gmail.com

Волчкова Наталья Петровна (ORCID 0000-0001-6193-2782)

Донецкий государственный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк 283001;
Донецкий национальный технический университет,
ул. Артема, 58, Донецк 283000
volna936@gmail.com