

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
УРАВНЕНИЙ С КРИТИЧЕСКИМ РОСТОМ
ПРАВОЙ ЧАСТИ В ЛИПШИЦЕВЫХ
ОБЛАСТЯХ НА МНОГООБРАЗИИ
Д. В. Быстров

Аннотация. Рассматривается задача Неймана в области на многообразии для уравнения с оператором p -Лапласа в главной части и с критическим ростом правой части. Даны точные достаточные условия существования решения с наименьшей энергией при требовании от области только локальной выпуклости, а также доказана теорема существования на сфере. Ранее подобные результаты были известны для областей с гладкой или пустой границей.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.507

Ключевые слова: квазилинейные уравнения на многообразии, задача Неймана, критический показатель, p -лапласиан, липшицева область, выпуклые области.

1. Введение

Пусть (M, g) — замкнутое n -мерное ($n \geq 2$) риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — область на M со строго липшицевой границей.

В работе изучается вопрос о существовании решения с наименьшей энергией задачи Неймана

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u \quad \text{в } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (1)$$

Здесь $\Delta_p u := \operatorname{div}(|Du|^{p-2}Du)$ — оператор p -Лапласа, $1 < p < n$ и $p^* = \frac{np}{n-p}$ — критический показатель вложения пространства Соболева $W_p^1(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$.

Функционал энергии для задачи (1) имеет вид

$$\mathbf{E}_\Omega[u] := \frac{\|u\|_{W_p^1(\Omega)}}{\|u\|_{L_{p^*}(\Omega)}} = \frac{\left(\int_\Omega |Du|^p + \int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}, \quad u \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}. \quad (2)$$

Несложно видеть, что критические точки функционала (2) являются (после подходящей перенормировки) слабыми решениями задачи (1). В частности, если достигается инфимум

$$\lambda(p, \Omega) := \inf_{v \in W_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \mathbf{E}_\Omega[v], \quad (3)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН) и Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

то задача (1) имеет слабое положительное решение (ср., например, [1, лемма 1.1]), которое будем называть *решением с наименьшей энергией*. Однако вложение $W_p^1(\Omega) \hookrightarrow L_{p^*}(\Omega)$ некомпактно и потому вопрос о достижимости инфимума $\lambda(p, \Omega)$ нетривиален.

Хорошо известно, что если Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, то инфимум на финитных функциях

$$\inf_{v \in \overset{\circ}{W}_p^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|v\|_{L_{p^*}(\Omega)}^p}$$

не достигается, не зависит от Ω и равен $\frac{1}{K(n,p)^p}$, где

$$K(n,p) = \sup_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\|v\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)}}{\|Dv\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}} = \omega_{n-1}^{-\frac{1}{n}} k(n,p), \quad (4)$$

а

$$k(n,p) = \sup_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr \right)^{\frac{1}{p^*}}}{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v'(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}}} = n^{-\frac{1}{p}} \left(\frac{p-1}{n-p} \right)^{\frac{1}{p'}} \mathcal{B} \left(\frac{n}{p}, \frac{n}{p'} + 1 \right)^{-\frac{1}{n}}$$

— точная константа в неравенстве Блисса [2]. Здесь и далее $\omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$, $p' = \frac{p}{p-1}$ — сопряженный к p показатель, а $\mathcal{B}$ — бета-функция Эйлера. Отметим, что константа $K(n,p)$ в (4) достигается только на нефинитных радиально симметричных функциях

$$w_\varepsilon(|x|) \equiv w_\varepsilon(r) := (\varepsilon + r^{p'})^{1-\frac{n}{p}}, \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

и на функциях, получаемых из них сдвигами и гомотетиями.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Очевидно, что $u(x) \equiv 1$ является решением задачи (1), однако, как показано в [3, предложение 3.1], если область достаточно велика, то константа не является решением с наименьшей энергией.

Решения с наименьшей энергией задачи (1) при $p = 2$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$) изучались в [4, 5]. Было показано, что такое решение существует в любой области с границей класса $\mathcal{C}^2$.

Результат [4, 5] был обобщен в работе [6], где получено, что решение с наименьшей энергией задачи (1) для $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) с $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ существует при $1 < p < \frac{n+1}{2} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$. В этой же работе показано, что условие на гладкость границы существенно: если Ω — многогранник в $\mathbb{R}^n$ и $1 < p < n$, то в растянутой области

$$\Omega_R = \{Rx : x \in \Omega\}$$

при достаточно больших $R > 0$ решения с наименьшей энергией задачи (1) не существует.

Более того, в работе [6] также рассматривался случай, когда Ω само является многообразием без края, т. е. $\Omega = M$. Было получено, что если $n \geq 5$ и на Ω есть точка с положительной скалярной кривизной, то решение с наименьшей энергией задачи (1) существует при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$, где $\beta = \beta(\Omega) > 0$.

Стоит также отметить, что если $n \geq 2$, $1 < p < n$ и $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — произвольная область со строго липшицевой границей, то решение с наименьшей энергией в Ω_R всегда существует для достаточно малого $R > 0$ (ср. [3, теорема 1.1]).

В настоящей работе будем изучать существование решения с наименьшей энергией задачи (1) в области Ω без условия гладкости $\partial\Omega$, накладывая вместо этого условие локальной выпуклости (см. определение 1.1).

Введем некоторые обозначения. Через $T_y M$ обозначим касательное пространство к M в точке y .

Для $y \in M$ и $r > 0$ будем обозначать геодезические шары и сферы как

$$B_r(y) := \{x \in M : \text{dist}_g(x, y) < r\}, \quad S_r(y) := \{x \in M : \text{dist}_g(x, y) = r\}.$$

Для евклидовых шаров в пространстве размерности n будем использовать обозначение $\mathbb{B}_r^n(y)$ и будем опускать в обозначениях y , если $y = 0$, и r , если $r = 1$.

Мы всегда считаем, что радиус r достаточно мал, так что экспоненциальное отображение $\exp_y : T_y M \supset \mathbb{B}_r^n \rightarrow B_r(y)$ является диффеоморфизмом. Для $x \in B_r(y)$ введем обозначение для прообраза $x_y = \exp_y^{-1}(x) \in T_y M$ и нормальные координаты как декартовы координаты x_y в $T_y M$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Будем говорить, что Ω локально выпукло, если для любой точки $y \in \partial\Omega$ существует $\delta > 0$ такое, что множество

$$\mathbb{V}_\delta(y) := \exp_y^{-1}(B_\delta(y) \cap \Omega) \subset T_y M$$

выпукло.

В дальнейшем всегда считаем, что Ω локально выпукло. Также везде будем считать, что $\partial\Omega \neq \emptyset$, поскольку, как замечено выше, случай $\partial\Omega = \emptyset$ был рассмотрен в работе [6].

Теперь можно сформулировать основной результат статьи.

Теорема 1.1. Пусть $n \geq 5$. Пусть Ω — локально выпуклая область на сфере $\mathbb{S}_R^n$. Тогда существует $\beta = \beta(\Omega) > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум $\lambda(p, \Omega)$ достигается.

Следующая теорема показывает, что результат теоремы 1.1 является точным. Пусть $\Omega = \mathbb{S}_{R,+}^n$ — полусфера радиуса R .

Теорема 1.2. Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$ не достигается.

Через Vol_g или просто через $|\cdot|_n$ будем обозначать меру объема на (M, g) . Известно (см., например, [7]), что при интегрировании функции в малой окрестности точки $y \in M$ форма объема имеет вид

$$d\text{Vol}_g = \left(1 - \frac{1}{6}(\text{Ric}_y)_{ij}x^i x^j + o(|x|^2)\right) dx, \quad (6)$$

где Ric_y — тензор Риччи в точке y .

Запись $o_\rho(1)$ означает величину, стремящуюся к нулю при $\rho \rightarrow 0$. Все положительные константы, значение которых для нас несущественно, обозначаются буквой C . Зависимость этих констант от параметров отмечается в скобках.

Опишем структуру данной статьи. В разд. 2 выводятся некоторые свойства локально выпуклых областей на многообразии. В разд. 3 выводится достаточное условие достижимости инфимума в (3). В разд. 4 доказывается основной результат — теорема 1.1, а также сформулировано ее обобщение на случай более общего многообразия M . В разд. 5 доказывается теорема 1.2, а также точность результата из [6, теорема 4.1].

2. Локально выпуклые области

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Телесным углом* Ω в точке $y \in \overline{\Omega}$ будем называть величину

$$\alpha(y) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|S_r(y) \cap \Omega|_{n-1}}{r^{n-1}}. \quad (7)$$

Очевидно, что для $y \in \Omega$ имеем $\alpha(y) = \omega_{n-1}$. Покажем, что предел (7) определен и для любой точки $y \in \partial\Omega$. Из формулы (6) видно, что

$$\alpha(y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{|\mathbb{S}_r^{n-1} \cap \mathbb{V}_\delta(y)|_{n-1}}{r^{n-1}} = \lim_{r \rightarrow 0} \left| \mathbb{S}^{n-1} \cap \frac{1}{r} \mathbb{V}_\delta(y) \right|_{n-1}. \quad (8)$$

Касательный конус к множеству $\mathbb{V}_\delta(y)$ в начале координат существует в силу выпуклости этого множества и может быть определен как

$$\mathbb{K}(y) := \bigcup_{r>0} \frac{1}{r} \mathbb{V}_\delta(y).$$

Поэтому, пользуясь непрерывностью снизу меры Лебега, получаем, что предел в (8) достигается и

$$\alpha(y) = |\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)|_{n-1}. \quad (9)$$

Несложно видеть, что для локально выпуклых Ω и $y \in \partial\Omega$ имеем $\alpha(y) \leq \frac{\omega_{n-1}}{2}$. А если $y \in \partial\Omega$ и y — точка гладкости $\partial\Omega$, то $\alpha(y) = \frac{\omega_{n-1}}{2}$.

Определим теперь следующую величину:

$$\alpha_\Omega := \inf_{y \in \partial\Omega} \alpha(y). \quad (10)$$

В [8, лемма 6.1] показано, что если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, то инфимум в (10) достигается. Для удобства читателя приведем другое наглядное доказательство и обобщим его на случай локально выпуклой области на многообразии.

Легко видеть, что достижимость α_Ω вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. *Функция $\alpha : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ полунепрерывна снизу, т. е. для любого $y \in \partial\Omega$*

$$\alpha(y) \leq \liminf_{x \rightarrow y, x \in \partial\Omega} \alpha(x). \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем лемму сначала для случая, когда Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Мы утверждаем, что

$$\alpha(y) = -\omega_{n-1} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q = \int_{\partial\Omega} \frac{(q - y, \vec{n}_q)}{|q - y|^n} dS_q,$$

где

$$\mathcal{E}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}|x|^{n-2}}, & n \geq 3, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|}, & n = 2, \end{cases}$$

— фундаментальное решение оператора $-\Delta$. Действительно,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \Delta \mathcal{E}(y - q) dq = \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q + \int_{\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{n}_q}(y - q) dS_q \\ &= -\frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{\partial\Omega \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)} \frac{(q - y, \vec{n}_q)}{|q - y|^n} dS_q + \frac{|\Omega \cap \mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}{|\mathbb{S}_\varepsilon(y)|_{n-1}}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что интеграл $\int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q$ сходится в смысле главного значения к $\alpha(y)$. Но он сходится и в обычном смысле по теореме о монотонной сходимости ввиду неотрицательности интегранта:

$$\int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}_\varepsilon(y)}(q) dS_q = \alpha(y),$$

где χ_S обозначает характеристическую функцию множества S .

Полунепрерывность снизу для α следует из леммы Фату:

$$\alpha(y) = \int_{\partial\Omega} \frac{(q-y, \vec{n}_q)}{|q-y|^n} dS_q \leq \liminf_{x \rightarrow y} \int_{\partial\Omega} \frac{(q-x, \vec{n}_q)}{|q-x|^n} dS_q = \liminf_{x \rightarrow y} \alpha(x).$$

Теперь рассмотрим общий случай, когда Ω не обязательно плоское. Фиксируем $y \in \partial\Omega$. Пусть $x \in B_r(y) \cap \partial\Omega$. Через $\tilde{\alpha}(x_y)$ обозначим телесный угол в точке x_y на $\partial\mathbb{V}_r(y) \subset T_y M$. Из доказанного выше следует, что

$$\tilde{\alpha}(0) \leq \liminf_{x_y \rightarrow 0, x_y \in \partial\mathbb{V}_r(y)} \tilde{\alpha}(x_y).$$

По формуле (9) имеем $\tilde{\alpha}(0) = \alpha(y)$, поэтому достаточно показать, что если x и y близки, то телесный угол $\alpha(x)$ для Ω мало отличается от телесного угла $\tilde{\alpha}(x_y)$ для $\mathbb{V}_r(y)$.

Пользуясь, например, [9, 12.6.1], можно разложить компоненты метрического тензора в нормальных координатах следующим образом:

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(r^2).$$

Поэтому для всех $x \in B_r(y)$ и всех $\xi \in T_x M$ имеем в нормальных координатах

$$(1 - Cr^2)\xi^i \xi^i \leq g_{ij} \xi^i \xi^j \leq (1 + Cr^2)\xi^i \xi^i.$$

Отсюда получаем, что отношение телесного угла касательного конуса $\mathbb{K}(x)$ и касательного конуса в x_y для $\mathbb{V}_r(y)$ равно $1 + O(r^2)$, значит, $\tilde{\alpha}(x_y) = (1 + O(r^2)) \cdot \alpha(x)$.

Возьмем $x_k \in \partial\Omega$, $x_k \rightarrow y$. С какого-то момента x_k лежат в $B_r(y)$, поэтому можно определить $(x_k)_y$, причем $(x_k)_y \rightarrow 0$. Имеем

$$\alpha(y) = \tilde{\alpha}(0) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \tilde{\alpha}((x_k)_y) = (1 + O(r^2)) \liminf_{k \rightarrow \infty} \alpha(x_k).$$

Ввиду того, что r можно взять сколь угодно малым, получаем (11). $\square$

Лемма 2.2. Пусть $y \in \partial\Omega$ и $\varepsilon > 0$. Для любого достаточно малого $\rho_0 > 0$ существуют $0 < \rho_1 < \rho_0$ и ограниченная выпуклая область $\mathbb{U} \subset T_y M$ такие, что

$$\mathbb{V}_{\rho_1}(y) \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{V}_{\rho_0}(y) \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(y) - \varepsilon.$$

PROOF. Положим $\mathbb{W} = \mathbb{V}_{\rho_0}(y)$ и отождествим точку y с началом координат в $T_y M$. Через $\alpha_{\mathbb{W}}(z)$ обозначим телесный угол $\mathbb{W}$ в точке $z \in \partial\mathbb{W}$. Согласно (9) имеем $\alpha_{\mathbb{W}}(0) = \alpha(y)$. Из евклидовой части доказательства леммы 2.1 следует, что функция $\alpha_{\mathbb{W}}$ полунепрерывна снизу. Поэтому существует $r \in (0, \rho_0)$ такое, что $\alpha_{\mathbb{W}}(z) \geq \alpha(y) - \varepsilon$ для всех $z \in \partial\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_r^n$.

Воспользуемся стандартным локальным сглаживанием границы выпуклого тела. Оставляя $\mathbb{W}$ неизменным в достаточно малой окрестности нуля и сглаживая его границу вне этой окрестности, можно построить ограниченную выпуклую область $\mathbb{U}$ и число $\rho_1 \in (0, r)$ так, что

$$\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_{\rho_1}^n \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{W} \cap \mathbb{B}_r^n,$$

причем для каждой негладкой точки $z \in \partial\mathbb{U}$ области $\mathbb{U}$ и $\mathbb{W}$ совпадают в некоторой окрестности точки z . Такое сглаживание получается, например, локальной регуляризацией выпуклой определяющей функции с помощью регуляризованного максимума и гладкой строго выпуклой срезающей функции, причем параметры регуляризации выбираются так, чтобы исходное тело не изменялось в $\mathbb{B}_{\rho_1}^n$, а новая часть границы была гладкой и лежала в $\mathbb{B}_r^n$.

Если точка $z \in \partial\mathbb{U}$ не является гладкой, то в силу выбора r справедливы соотношения $\alpha_{\mathbb{U}}(z) = \alpha_{\mathbb{W}}(z) \geq \alpha(y) - \varepsilon$. В гладкой точке $z \in \partial\mathbb{U}$ имеем $\alpha_{\mathbb{U}}(z) = \omega_{n-1}/2 \geq \alpha(y)$. Таким образом, $\alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(y) - \varepsilon$. Наконец, из $\rho_1 < \rho_0$ следует $\mathbb{W} \cap \mathbb{B}_{\rho_1}^n = \mathbb{V}_{\rho_1}(y)$. $\square$

3. Достаточное условие достижимости инфимума в (3)

Ключевой в этом разделе является теорема 3.1, которая дает достаточное условие достижимости инфимума в (3). Для ее доказательства сначала введем некоторые обозначения.

Пусть $\mathbb{G}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, представляющей собой объединение двух многообразий Γ_0 и Γ_1 , где Γ_0 имеет положительную $(n-1)$ -мерную меру Хаусдорфа. Изопериметрическая константа $\mathbb{G}$ относительно Γ_1 (см. [10]) определяется как

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \sup_{\mathbb{E}} \frac{|\mathbb{E}|^{1-1/n}}{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})},$$

где супремум берется по всем измеримым подмножествам $\mathbb{E} \subset \mathbb{G}$, для которых $\partial\mathbb{E} \cap \Gamma_0$ не содержит множеств положительной $(n-1)$ -мерной меры Хаусдорфа, а $P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E})$ обозначает периметр $\mathbb{E}$ относительно $\mathbb{G}$ (см. [10, 11])

$$P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{E}} \operatorname{div} \psi \, dx \right| : \psi \in [\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{G})]^n, |\psi| \leq 1 \right\}.$$

В дальнейшем всегда для $\mathbb{V}_\rho(y)$ будем считать, что $\Gamma_0 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \cap \mathbb{S}_\rho^{n-1}$ и $\Gamma_1 = \partial\mathbb{V}_\rho(y) \setminus \mathbb{S}_\rho^{n-1}$.

Для измеримой функции u , определенной в $\mathbb{G}$, определим функцию распределения

$$\mu(t) = |\{x \in \mathbb{G} : |u(x)| > t\}|_n, \quad t \geq 0,$$

и монотонную перестановку

$$u^*(s) = \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\}.$$

Пусть $(r, \nu_1, \dots, \nu_{n-1})$ — сферические координаты в $\mathbb{R}^n$, $\nu_i \in [0, \pi]$ для $1 \leq i \leq n-2$ и $\nu_{n-1} \in [0, 2\pi]$. Следуя [12], для угла $\beta \in [0, 2\pi]$ и радиуса $R > 0$ определим сектор

$$\Sigma(\beta, R) = \{x \in \mathbb{B}_R^n : \nu_i \in [0, \pi], \nu_{n-1} \in [0, \beta]\}.$$

Через $\mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})$ обозначим сектор $\Sigma(\beta, R)$, имеющий ту же меру, что и $\mathbb{G}$. Для функции u определим β -симметризацию как

$$\mathcal{C}_\beta u(x) := u^*(|\Sigma(\beta, |x|)|_n), \quad x \in \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G}).$$

Для удобства обозначим $\widehat{\beta} = |\overline{\Sigma(\beta, 1)} \cap \mathbb{S}^{n-1}|_{n-1} = \frac{\beta}{2\pi} \omega_{n-1}$. В работе [12] было доказано равенство

$$\|u\|_{q, \mathbb{G}} = \|\mathcal{C}_\beta u\|_{q, \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})} \quad \forall q \geq 1,$$

а также следующее утверждение [12, утверждение 1.2].

Предложение 3.1. Пусть $p \geq 1$ и β определено из равенства $Q(\Gamma_1, \mathbb{G}) = \widehat{\beta}^{-\frac{1}{n}} n^{-\frac{n-1}{n}}$. Тогда

$$\|Du\|_{p, \mathbb{G}} \geq \|D\mathcal{C}_\beta u\|_{p, \mathcal{C}_\beta(\mathbb{G})}$$

для всех $u \in W_p^1(\mathbb{G})$ таких, что $u|_{\Gamma_0} = 0$.

Важным понятием в изучении изопериметрических неравенств является изопериметрический профиль

$$I_{\mathbb{G}}(\nu) := \inf\{P_{\mathbb{G}}(\mathbb{E}) : \mathbb{E} \subset \mathbb{G}, |\mathbb{E}|_n = \nu\}.$$

В работе [13] было показано, что изопериметрический профиль выпуклого конуса $\mathbb{K}$ с телесным углом $\alpha_{\mathbb{K}}$ имеет вид

$$I_{\mathbb{K}}(\nu) = \alpha_{\mathbb{K}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

В статье [8] изучались свойства $I_{\mathbb{G}}$ для случая, когда $\mathbb{G}$ — произвольная выпуклая область. В частности, в [8, теорема 6.6] был получен следующий результат.

Предложение 3.2. Если $\mathbb{G} \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, то

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{I_{\mathbb{G}}(\nu)}{\alpha_{\mathbb{G}}^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}} = 1$$

(напомним, что величина $\alpha_{\mathbb{G}}$ определена в (10)).

Теперь мы готовы доказать основное утверждение этого раздела.

Теорема 3.1. Пусть инфимум в (3) удовлетворяет условию

$$\lambda(p, \Omega) < \frac{(\alpha_{\Omega}/\omega_{n-1})^{\frac{1}{n}}}{K(n, p)}. \quad (12)$$

Тогда этот инфимум достигается.

Доказательство. Рассмотрим нормированную в $L_{p^*}(\Omega)$ минимизирующую последовательность $\{v_k\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $v_k \rightharpoonup v$ в $W_p^1(\Omega)$. Можно также считать, что $|v_k|^{p^*} \xrightarrow{*} \mu$ и $|Dv_k|^p \xrightarrow{*} \tilde{\mu}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Согласно теореме Лионса [14, ч. 1]¹⁾; см. также [12, лемма 2.2]), имеем

$$\mu = |v|^{p^*} + \sum_j c_j \delta(x - x_j), \quad \tilde{\mu} \geq |Dv|^p + \lambda^p(p, \Omega) \sum_j c_j^{p/p^*} \delta(x - x_j),$$

где $\{x_j\}$ — не более чем счетный набор точек в $\overline{\Omega}$, c_j — положительные константы.

¹⁾В [14] рассматривались области в $\mathbb{R}^n$, но рассуждения проходят и для многообразия.

Поскольку $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность, дословно повторяя доказательство [12, теорема 2.2], получим альтернативу: либо функция v реализует минимум в соответствующей задаче (при этом множество $\{x_j\}$ пусто), либо $v = 0$ (при этом набор $\{x_j\}$ состоит из одной точки x_0 и $c_0 = 1$).

Покажем, что в условиях нашей теоремы второй случай невозможен. Для этого модифицируем схему доказательства [12, следствие 2.1]. Предположим, что

$$|v_k|^{p^*} \xrightarrow{*} \delta(x - x_0), \quad |Dv_k|^p \xrightarrow{*} \lambda^p(p, \Omega) \delta(x - x_0).$$

Домножим v_k на гладкую срезку:

$$v_k^\rho(x) := v_k(x) \varphi\left(\frac{1}{\rho} \text{dist}_g(x, x_0)\right), \quad x \in \Omega, \quad \rho > 0,$$

где

$$0 \leq \varphi(r) \leq 1; \quad \varphi(r) = 1 \text{ при } r \leq \frac{1}{2}; \quad \varphi(r) = 0 \text{ при } r \geq 1. \quad (13)$$

Тогда для любого $\rho > 0$ имеем

$$\lim_k \int_{\Omega} |v_k^\rho|^{p^*} = 1 \quad \text{и} \quad \lim_k \int_{\Omega} |Dv_k^\rho|^p = \lambda^p(p, \Omega).$$

Для каждого $\rho > 0$ подберем $k = k(\rho)$ так, что при $\rho \rightarrow 0$

$$\int_{\Omega} |v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*} = 1 + o_\rho(1) \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} |Dv_{k(\rho)}^\rho|^p = \lambda^p(p, \Omega)(1 + o_\rho(1)). \quad (14)$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любого $\rho < \rho_0$

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon) \frac{\left(\int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} |Dv_{k(\rho)}^\rho|^p\right)^{1/p}}{\left(\int_{B_\rho(x_0) \cap \Omega} |v_{k(\rho)}^\rho|^{p^*}\right)^{1/p^*}} \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{\left(\int_{\mathbb{V}_\rho(x_0)} |Dv_{k(\rho)}^\rho(\exp_{x_0}(x))|^p dx\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{V}_\rho(x_0)} |v_{k(\rho)}^\rho(\exp_{x_0}(x))|^{p^*} dx\right)^{1/p^*}} \geq \\ &\geq (1 - \varepsilon)^2 \inf_{\substack{v \in W_p^1(\mathbb{V}_\rho(x_0)), \\ v|_{\Gamma_0} = 0, v \neq 0}} \frac{\|Dv\|_{p, \mathbb{V}_\rho(x_0)}}{\|v\|_{p^*, \mathbb{V}_\rho(x_0)}} \quad (15) \end{aligned}$$

(здесь использованы формулы (14) и (6)). Более того, инфимум в правой части (15) можно брать по гладким ненулевым функциям на $\mathbb{V}_\rho(x_0)$, которые обращаются в нуль на Γ_0 .

Если $x_0 \notin \partial\Omega$, то $\mathbb{V}_\rho(x_0) = \mathbb{B}_\rho^n(x_0)$ и можно сделать стандартную симметризацию Шварца, получая

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon)^2 \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} \inf_{v \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v'(r)|^p dr\right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^\infty r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr\right)^{\frac{1}{p^*}}} \\ &= (1 - \varepsilon)^2 \omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} k(n, p)^{-1} = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{K(n, p)}, \end{aligned}$$

что при достаточно малом ε противоречит (12), поскольку $\alpha_\Omega < \omega_{n-1}$.

Пусть теперь $x_0 \in \partial\Omega$. При необходимости уменьшая ρ_0 , согласно лемме 2.2 можно выбрать $\rho_1 < \rho_0$ и ограниченную выпуклую область $\mathbb{U}$ так, что

$$\mathbb{V}_{\rho_1}(x_0) \subset \mathbb{U} \subset \mathbb{V}_{\rho_0}(x_0) \quad \text{и} \quad \alpha_{\mathbb{U}} \geq \alpha(x_0) - \varepsilon.$$

В силу предложения 3.2 можно выбрать $\nu_0 > 0$ так, что для всех $0 < \nu < \nu_0$ выполняются неравенства

$$I_{\mathbb{U}}(\nu) \geq (\alpha_{\mathbb{U}} - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}} \geq (\alpha(x_0) - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}} \geq (\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}} \nu^{\frac{n-1}{n}}.$$

Возьмем $\rho < \rho_1$ настолько малым, что $|\mathbb{V}_{\rho}(x_0)|_n < \nu_0$. Несложно видеть, что для множеств $\mathbb{E}$ из определения $Q(\Gamma_1, \mathbb{V}_{\rho}(x_0))$ периметры $P_{\mathbb{V}_{\rho}(x_0)}(\mathbb{E})$ и $P_{\mathbb{U}}(\mathbb{E})$ совпадают, поэтому

$$Q(\Gamma_1, \mathbb{V}_{\rho}(x_0))^{-1} \geq \inf_{\mathbb{E} \subset \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \frac{P_{\mathbb{U}}(\mathbb{E})}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq \inf_{\mathbb{E} \subset \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \frac{I_{\mathbb{U}}(|\mathbb{E}|)}{|\mathbb{E}|^{1-1/n}} \geq (\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{n-1}{n}}.$$

Пользуясь предложением 3.1, можно утверждать, что существует β такое, что $\widehat{\beta} \geq \alpha_{\Omega} - 2\varepsilon$ и для всех $u \in W_p^1(\mathbb{V}_{\rho}(x_0))$ таких, что $u|_{\Gamma_0} = 0$, имеем

$$\|Du\|_{p, \mathbb{V}_{\rho}(x_0)} \geq \|D\mathcal{C}_{\beta}u\|_{p, \mathcal{C}_{\beta}(\mathbb{V}_{\rho}(x_0))}.$$

Проведя β -симметризацию, можно продолжить неравенство (15), как и в случае $x_0 \notin \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} \lambda(p, \Omega) &\geq (1 - \varepsilon)^2 \widehat{\beta}^{\frac{1}{n}} \inf_{v \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_0^{\infty} r^{n-1} |v'(r)|^p dr \right)^{\frac{1}{p}}}{\left(\int_0^{\infty} r^{n-1} |v(r)|^{p^*} dr \right)^{\frac{1}{p^*}}} = \\ &= (1 - \varepsilon)^2 \widehat{\beta}^{\frac{1}{n}} k(n, p)^{-1} \geq (1 - \varepsilon)^2 \frac{(\alpha_{\Omega} - 2\varepsilon)^{\frac{1}{n}}}{\omega_{n-1}^{\frac{1}{n}} K(n, p)}, \end{aligned}$$

что при достаточно малом ε противоречит условию теоремы. $\square$

4. Теорема существования решения и некоторые обобщения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.1. Пусть $y \in \partial\Omega$ такая, что $\alpha(y) = \alpha_{\Omega}$. Введем функцию

$$u_{\varepsilon}(x) := u_{\varepsilon}(r) := \varphi\left(\frac{r}{\rho}\right) w_{\varepsilon}(r),$$

где $r := \text{dist}_g(x, y)$, w_{ε} определена в (5), а φ определена в (13).

Определим «разницу» между касательным конусом $\mathbb{K}(y)$ и областью Ω :

$$\Gamma_{\rho} = (\mathbb{K}(y) \cap \mathbb{B}_{\rho}^n) \setminus \mathbb{V}_{\rho}(y).$$

Для краткости обозначим $\mathbf{g}(x) = \sqrt{|\det\{g_{ij}\}|}$. Формула (6) означает, что

$$\mathbf{g}(x) = 1 - \frac{1}{6}(\text{Ric}_y)_{ij} x^i x^j + o(|x|^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \quad (16)$$

Тогда для функции f с носителем в $B_{\rho}(y)$ справедлива формула

$$\int_{\Omega} f d\text{Vol}_g = I_1(f) - I_2(f) := \int_{\mathbb{K}(y) \cap \mathbb{B}_{\rho}^n} \mathbf{g}(x) f(\exp_y x) dx - \int_{\Gamma_{\rho}} \mathbf{g}(x) f(\exp_y x) dx.$$

Если функция f радиальна относительно y , то интеграл $I_1(f)$ расписывается как

$$I_1(f) = \int_0^\rho f(r) \left(\alpha_\Omega r^{n-1} - \frac{r^{n+1}}{6} \int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega + o(r^{n+1}) \right) dr.$$

Возьмем в качестве f функции u_ε^p , $u_\varepsilon^{p^*}$, $|\nabla u_\varepsilon|^p$. Поскольку в случае сферы

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega = \frac{\alpha_\Omega}{n} \mathcal{R}_g, \quad (17)$$

где $\mathcal{R}_g = n(n-1)R^{-2}$ — скалярная кривизна сферы, можно воспользоваться полученными в [6, § 2] оценками²⁾:

$$I_1(|\nabla u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - E_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{1-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} + C \rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p < \frac{n+2}{3}; \\ E_1 \varepsilon^{1-\frac{n}{p}} - C \ln \varepsilon^{-1} + C \rho^{\frac{p-n}{p-1}}, & \text{если } p = \frac{n+2}{3}; \end{cases}$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^{p^*}) \geq D_1 \varepsilon^{-\frac{n}{p}} - D_2(\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{-\frac{n}{p}+\frac{2}{p'}} - C \rho^{-\frac{n}{p-1}},$$

$$I_1(|u_\varepsilon|^p) \leq \begin{cases} C \varepsilon^{\frac{p^2-n}{p}}, & \text{если } 1 < p < \sqrt{n}; \\ C(1 + |\ln \rho| + \ln \varepsilon^{-1}), & \text{если } p = \sqrt{n}; \\ C, & \text{если } p > \sqrt{n}; \end{cases}$$

где

$$E_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'} + 1, \frac{n}{p} - 1 \right), \quad (18)$$

$$E_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'} \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^p \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'} + 1, \frac{n+2}{p} - 3 \right), \quad (19)$$

$$D_1 = \frac{\alpha_\Omega}{p'} \mathcal{B} \left(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p} \right), \quad (20)$$

$$D_2 = \frac{\alpha_\Omega}{6np'} \mathcal{B} \left(\frac{n+2}{p'}, \frac{n+2}{p} - 2 \right). \quad (21)$$

Из этих оценок аналогично доказательству [6, теорема 4.1] получаем для $2 < p < \frac{n+2}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} &\leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} + \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} + o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}}) \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Прямыми вычислениями выводим

$$\frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} = A \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathbf{g}(x)}{(\varepsilon + |x|^{p'})^n} dx, \quad \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} = \frac{A}{p-1} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\mathbf{g}(x)|x|^{p'}}{(\varepsilon + |x|^{p'})^n} dx,$$

где $A = \frac{p(n-p)}{\alpha(y)n(p-1)\mathcal{B}(\frac{n}{p'}, \frac{n}{p})} > 0$.

²⁾Все коэффициенты в формулах (18)–(21) отличаются от полученных в [6] множителем $\frac{\alpha_\Omega}{\omega_{n-1}}$.

Обозначим $\gamma_\rho = \mathbb{S}^{n-1} \cap \frac{1}{\rho}\overline{\Gamma_\rho}$. Поскольку $\mathbb{V}_\rho(y)$ выпукло, в сферических координатах имеем для некоторого $r(\omega) \geq 0$

$$\Gamma_\rho = \{(r, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \gamma_\rho : r(\omega) < r < \rho\},$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \\ &= A \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho r \mathbf{g}(r\omega) \left(\frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} - \frac{1}{p-1} \frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} \right) dr dS_\omega. \end{aligned}$$

Из равенства

$$\frac{r^{p'+n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} = (p-1) \frac{\varepsilon r^{n-2}}{(\varepsilon + r^{p'})^n} - \frac{p-1}{n-1} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} \right)$$

заключаем для $\tilde{A} = \frac{A}{n-1}$, что

$$\begin{aligned} & \frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho r \mathbf{g}(r\omega) \frac{d}{dr} \left(\frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} \right) dr dS_\omega \\ &= \frac{\tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \rho^n}{(\varepsilon + \rho^{p'})^{n-1}} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(\rho\omega) dS_\omega - \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(r(\omega)\omega) \frac{r(\omega)^n}{(\varepsilon + r(\omega)^{p'})^{n-1}} dS_\omega \\ &\quad - \tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \int_{\gamma_\rho} \int_{r(\omega)}^\rho \frac{d}{dr} (r \mathbf{g}(r\omega)) \frac{r^{n-1}}{(\varepsilon + r^{p'})^{n-1}} dr dS_\omega. \quad (23) \end{aligned}$$

Заметим, что из стандартного C^1 -разложения плотности объема в нормальных координатах равномерно по $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ следует

$$\mathbf{g}(r\omega) = 1 + O(r^2), \quad \frac{d}{dr} \mathbf{g}(r\omega) = O(r).$$

Поэтому при $r \in (r(\omega), \rho)$ и достаточно малом ρ

$$\frac{d}{dr} (r \mathbf{g}(r\omega)) = \mathbf{g}(r\omega) + r \frac{d}{dr} \mathbf{g}(r\omega) = 1 + O(\rho^2) > 0.$$

Поэтому все слагаемые в правой части (23), кроме первого, неположительны и

$$\frac{p}{p^*} \frac{I_2(u_\varepsilon^{p^*})}{D_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}} - \frac{I_2(|\nabla u_\varepsilon|^p)}{E_1} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \leq \frac{\tilde{A} \varepsilon^{\frac{n}{p}-1} \rho^n}{(\varepsilon + \rho^{p'})^{n-1}} \int_{\gamma_\rho} \mathbf{g}(\rho\omega) dS_\omega \leq C(\rho) \varepsilon^{\frac{n}{p}-1}.$$

Подставим это неравенство в (22). Поскольку при $2 < p < \frac{n+2}{3}$ имеем $\varepsilon^{\frac{n}{p}-1} = o(\varepsilon^{\frac{2}{p'}})$, получаем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} \leq \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} \left[1 + \left(\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} \right) (\mathcal{R}_g + o_\rho(1) + o_\varepsilon(1)) \varepsilon^{\frac{2}{p'}} \right].$$

В [6] показано, что $\frac{p}{p^*} \frac{D_2}{D_1} - \frac{E_2}{E_1} < 0$. Поэтому, выбрав достаточно малые ρ и ε , имеем

$$\frac{\|u_\varepsilon\|_{W_p^1(\Omega)}^p}{\|u_\varepsilon\|_{p^*, \Omega}^p} < \frac{E_1}{D_1^{p/p^*}} = \frac{(\alpha_\Omega/\omega_{n-1})^{\frac{p}{n}}}{K(n, p)^p},$$

что дает (12). Аналогично неравенство (12) верно для $p = \frac{n+2}{3}$, а из соображений непрерывности — и при $p < \frac{n+2}{3} + \beta$ для некоторого $\beta > 0$.

Применение теоремы 3.1 завершает доказательство. $\square$

Сформулируем аналогичную теорему для многообразия M общего вида.

Теорема 4.1. Пусть $n \geq 5$. Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область, а точка $y \in \partial\Omega$ такова, что $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Предположим, что тензор Риччи в точке y удовлетворяет условию

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{K}(y)} \text{Ric}_y(\omega, \omega) dS_\omega > 0. \quad (24)$$

Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы повторяет доказательство теоремы 1.1 без существенных изменений, поскольку все предварительные результаты из разд. 2, 3 доказаны для произвольного M . Отметим только, что интеграл из (24) в доказательстве теоремы 1.1 значительно упрощается по формуле (17).

Следствие 4.1. Пусть $n \geq 5$ и для любой точки $x \in M$ выполнено

$$\text{Ric}_x \geq 0, \quad \text{Ric}_x \neq 0.$$

Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть $\alpha(y) = \alpha_\Omega$. Из условия $\text{Ric}_y \neq 0$ получаем, что ядро $\text{Ker}(\text{Ric}_y)$ имеет размерность не больше $n-1$. Отсюда легко выводим (24). $\square$

Следствие 4.2. Пусть $n \geq 5$, M является границей некоторой выпуклой области в $\mathbb{R}^{n+1}$ и в каждой точке M хотя бы одна секционная кривизна строго положительна. Пусть $\Omega \subset M$ — локально выпуклая область. Тогда существует $\beta > 0$ такое, что при $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ инфимум в (3) достигается.

5. Теорема несуществования

В этом разделе для упрощения обозначений будем писать B_ρ вместо $B_\rho(x_0)$, если x_0 — северный полюс сферы $\mathbb{S}_R^n$. Также положим $r = \text{dist}_g(x, x_0)$.

Лемма 5.1. $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n) = 2^{\frac{1}{n}} \lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$. Более того, инфимумы $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ и $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$ достигаются или не достигаются одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [15, гл. 2, § 3.2] показано, что на сфере «сферическая шапочка» $B_\rho(y)$ является множеством с минимальным периметром при заданном объеме. Отсюда следует (см. [16, ч. II]; см. также [17, приложение C]), что при сферической симметризации функционал энергии (2) не возрастает.

Поэтому если $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$, то все v_k можно считать «радиальными» (зависящими только от расстояния до заданной точки y).

С другой стороны, в [15, гл. 3, § 7.1] показано, что на полусфере также есть относительное изопериметрическое неравенство, которое достигается на половинках «сферических шапочек» $B_\rho(y) \cap \mathbb{S}_{R,+}^n$, где $y \in \partial \mathbb{S}_{R,+}^n$. Аналогично получаем, что если $\{v_k\}$ — минимизирующая последовательность для $\lambda(p, \mathbb{S}_{R,+}^n)$, то все v_k можно считать «радиальными».

С помощью четного отражения функции из полусферы на всю сферу можно видеть, что для «радиальной» функции v справедливо соотношение

$$\mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[v] = 2^{\frac{1}{n}} \mathbf{E}_{\mathbb{S}_{R,+}^n}[v],$$

что и доказывает лемму. $\square$

Докажем аналог теоремы 1.2 для сферы.

Теорема 5.1. Пусть $n \geq 2$, $\frac{n+2}{3} < p < n$. Тогда существует $R^* > 0$ такое, что для любого $R > R^*$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается.

Нам понадобится следующий результат [6, теорема 3.2].

Предложение 5.1. Пусть $\Omega = B_\rho \subset \mathbb{S}^n$ — «сферическая шапочка». Для любого $\beta > 0$ существует $\rho_* > 0$ такое, что инфимум

$$\inf_{\mathring{W}_p^1(B_{\rho_*})} \frac{\|Du\|_{p, B_{\rho_*}}}{\|u\|_{p^*, B_{\rho_*}}}$$

не достигается при $p \geq \frac{n+2}{3} + \beta$.

Следствие 5.1. Для $p > \frac{n+2}{3}$ существует $\rho_* > 0$ такое, что

$$\inf_{u \in \mathring{W}_p^1(B_{\rho_*})} \frac{\|Du\|_{p, B_{\rho_*}}}{\|u\|_{p^*, B_{\rho_*}}} \geq \frac{1}{K(n, p)}. \quad (25)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из [6, предложение 1.1] следует, что если неравенство (25) не выполнено, то инфимум достигается, что противоречит предложению 5.1. $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.1. Способ доказательства аналогичен доказательству [6, теорема 7.2].

Предположим, что значения R , при которых инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ достигается, образуют неограниченную последовательность. Обозначим последовательность минимизирующих функций через $\{u_R\}$.

Поскольку $\mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[u_R] = \mathbf{E}_{\mathbb{S}_R^n}[|u_R|]$, можно считать, что $u_R \geq 0$. Расписывая необходимое условие для минимума функционала энергии, получим, что u_R является слабым суперрешением уравнения $-\Delta_p u + u^{p-1} = 0$, т. е.

$$\int_{\mathbb{S}_R^n} |Du_R|^{p-2} \langle Du_R, Dh \rangle + \int_{\mathbb{S}_R^n} u_R^{p-1} h \geq 0 \quad \forall h \in W_p^1(\mathbb{S}_R^n) : h \geq 0.$$

Значит, воспользовавшись неравенством Гарнака (см. [18, теорема 1.2]), можем утверждать, что $u_R > 0$ на $\mathbb{S}_R^n$.

Рассмотрим в $\mathbb{S}^n$ функции

$$v_R(x) := C(R)u_R(Rx),$$

где $C(R)$ подбирается так, чтобы $\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} = 1$. Тогда v_R удовлетворяет интегральному тождеству (здесь и далее $\lambda_R := \lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$)

$$\int_{\mathbb{S}^n} |Dv_R|^{p-2} \langle Dv_R, Dh \rangle + R^p \int_{\mathbb{S}^n} v_R^{p-1} h = \lambda_R^p \int_{\mathbb{S}^n} v_R^{p^*-1} h \quad \forall h \in W_p^1(\mathbb{S}^n). \quad (26)$$

В частности, подставив $h = v_R$ в (26), получим

$$\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + R^p \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p = \lambda_R^p. \quad (27)$$

Для функций $w_\varepsilon(r)$, определенных в (5), имеет место следующее равенство (см., например, оценки, полученные в [6, § 2]):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int_{\mathbb{S}_R^n} |Dw_\varepsilon|^p + \int_{\mathbb{S}_R^n} |w_\varepsilon|^p}{\|w_\varepsilon\|_{p^*, \mathbb{S}_R^n}^p} = \frac{1}{K(n, p)^p}.$$

Поэтому

$$\lambda_R^p \leq \frac{1}{K(n, p)^p}. \quad (28)$$

Из (27) сразу следует, что $\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \rightarrow 0$.

Действуя, как в [12, теорема 2.2], получаем (возможно, переходя к подпоследовательности), что для некоторого $x_0 \in \mathbb{S}^n$ имеет место сходимость $|v_R|^{p^*} \xrightarrow{*} \delta(x - x_0)$ в пространстве мер на $\mathbb{S}^n$. Не умаляя общности, можем считать x_0 северным полюсом сферы. Тогда

$$\forall \rho > 0 \quad \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho} \rightarrow 0. \quad (29)$$

Поскольку сферическая симметризация не увеличивает значение функционала энергии, мы можем считать, что v_R — невозрастающие функции одной переменной r . Поэтому из (29) для любого $\rho > 0$ следует

$$\sup_{\mathbb{S}^n \setminus B_\rho} v_R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (30)$$

Положим теперь $\varphi_1(r) := \varphi(\frac{r}{2\rho})$, где φ определено в (13). Из следствия 5.1 вытекает, что для $\rho < \frac{\rho^*}{2}$

$$\|\varphi_1 v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} \leq K(n, p) \|D(\varphi_1 v_R)\|_{p, \mathbb{S}^n}.$$

Отсюда, используя оценку

$$|D(fg)|^p \leq |fDg|^p + C(|Dfg|^p + |Dfg| \cdot |fDg|^{p-1})$$

и условие $\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n} = 1$, получаем

$$\begin{aligned} \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^{p^*} &\leq \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^p \\ &\leq K(n, p)^p \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + C[\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p-1}]. \end{aligned}$$

Выражая $\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p$ из (27), с учетом (28) выводим

$$R^p K(n, p)^p \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p \leq 1 - \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \cap B_\rho}^{p^*} + C[\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + \|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p-1}],$$

откуда, поделив на $\|v_R\|_{p,\mathbb{S}^n}^p$, имеем

$$R^p K(n, p)^p \leq \frac{\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p^*}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p} + C \left(\frac{\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^{p-1} + C. \quad (31)$$

В силу (30)

$$\frac{\|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}^{p^*}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p} \leq \sup_{\mathbb{S}^n \setminus B_\rho} v_R^{p^*-p} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (32)$$

Положим $\eta(x) := \eta(r) := 1 - \varphi(\frac{r}{\rho})$. Для оценки второго слагаемого в правой части (31) подставим $h = \eta^p v_R$ в (26). Получим

$$\begin{aligned} \lambda_R^p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^{p^*} &= \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2} \langle D\eta, Dv_R \rangle + R^p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p v_R^p \\ &\geq \int_{\mathbb{S}^n} \eta^p |Dv_R|^p + p \int_{\mathbb{S}^n} \eta^{p-1} v_R |Dv_R|^{p-2} \langle D\eta, Dv_R \rangle. \end{aligned}$$

С учетом (28) имеем

$$\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}^p \leq C (\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n} \| \eta Dv_R \|_{p, \mathbb{S}^n}^{p-1} + \|v_R\|_{p^*, \mathbb{S}^n \setminus B_{\rho/2}}^{p^*}),$$

откуда ввиду (32)

$$\left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^p \leq C \left(\frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \right)^{p-1} + o(1), \quad R \rightarrow \infty,$$

и, следовательно,

$$\frac{\|Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n \setminus B_\rho}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \leq \frac{\|\eta Dv_R\|_{p, \mathbb{S}^n}}{\|v_R\|_{p, \mathbb{S}^n}} \leq C.$$

Поэтому из (31) получаем неравенство

$$R^p K(n, p)^p \leq C,$$

которое приводит к противоречию при больших R . $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [19, теорема 8] показано, что для $n \geq 2$ на сфере $\mathbb{S}^n$ при $1 < p < 2$ выполнено так называемое неравенство Соболева с точной константой

$$\|v\|_{p^*, \mathbb{S}^n}^p \leq K^p(n, p) \|Dv\|_{p, \mathbb{S}^n}^p + C(p) \|v\|_{p, \mathbb{S}^n}^p, \quad v \in W_p^1(\mathbb{S}^n), \quad (33)$$

с некоторым $C(p) > 0$. При $n \geq 3$ и $p = 2$ этот результат верен для произвольного многообразия без края (см. [20]). Как было замечено в [6], из (33) следует, что при больших R инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается.

Таким образом, ограничение $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ с $\beta = \beta(M) > 0$ из [6, теорема 4.1] точно с обеих сторон.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Объединяя результат теоремы 5.1 и замечание 5.1, получаем, что для $n \in \{2, 3, 4\}$ и $1 < p < n$ инфимум $\lambda(p, \mathbb{S}_R^n)$ не достигается, если R достаточно велико.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Непосредственно вытекает из теоремы 5.1 и леммы 5.1. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Аналогично замечанию 5.1 ограничение $2 < p < \frac{n+2}{3} + \beta$ с $\beta = \beta(\Omega) > 0$ в теореме 1.1 точно с обеих сторон.

Благодарности. Я благодарен А. И. Назарову за постановку задачи и внимание к работе и С. В. Иванову за полезные советы. Я также признателен анонимному рецензенту за замечания, которые способствовали улучшению изложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Быстров Д. В., Назаров А. И. Задача Робена для квазилинейных уравнений с критическим ростом правой части // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2024. Т. 536. С. 126–139.
2. Bliss G. A. An integral inequality // J. London Math. Soc. 1930. V. 5. P. 40–46.
3. Назаров А. И., Щеглова А. П. О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы математического анализа. Нелинейные задачи и теория функций. 2004. Т. 27. С. 109–136.
4. Adimurthi, Mancini G. The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity // Nonlinear Analysis. A Tribute in Honour of G. Prodi. Sci. Norm. Super. di Pisa Quaderni. 1991. P. 9–25.
5. Wang X. J. Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // J. Differ. Equ. 1991. V. 93, N 2. P. 283–310.
6. Демьянов А. В., Назаров А. И. О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем // Алгебра и анализ. 2005. Т. 17, № 5. С. 105–140.
7. Druet O. Optimal Sobolev inequalities of arbitrary order on compact Riemannian manifolds // J. Funct. Anal. 1998. V. 159. P. 217–242.
8. Ritor M., Vernadakis E. Isoperimetric inequalities in Euclidean convex bodies // Trans. Am. Math. Soc. 2015. V. 367, N 7. P. 4983–5014.
9. Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А. Введение в риманову геометрию. СПб: Наука, 1994.
10. Pacella F., Tricarico M. Symmetrization for a class of elliptic equations with mixed boundary conditions // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena. 1985–86. V. 34. P. 75–94.
11. Fleming W. H., Rishel R. An integral formula for total gradient variation // Arch. Math. 1960. V. 11. P. 218–222.
12. Lions P.-L., Pacella F., Tricarico M. Best constants in Sobolev inequalities for functions vanishing on some part of the boundary and related questions // Indiana Univ. Math. J. 1988. V. 37, N 2. P. 301–324.
13. Lions P.-L., Pacella F. Isoperimetric inequalities for convex cones // Proc. Am. Math. Soc. 1990. V. 109, N 2. P. 477–485.
14. Lions P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. Part 1, 2 // Rev. Mat. Iberoam. 1985. V. 1, N 1, 2. P. 145–201, 45–121.
15. Бурого Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980.
16. Kawohl B. Rearrangements and convexity of level sets in PDE. Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1985.
17. Поля Г., Серё Г. Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962.
18. Trudinger N. S. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20. P. 721–747.
19. Aubin T. Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev // J. Differ. Geom. 1976. V. 11. P. 573–598.
20. Hebey E., Vaugon M. Meilleures constantes dans le théorème d’inclusion de Sobolev // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. 1996. V. 13, N 1. P. 57–93.

Поступила в редакцию 10 января 2026 г.

После доработки 21 июня 2026 г.

Принята к публикации 22 июня 2026 г.

Быстров Данил Владимирович (ORCID 0009-0003-8326-4633)
 Санкт-Петербургский государственный университет,
 математико-механический факультет,
 Университетская набережная, 7–9, Санкт-Петербург 199034,
 Университетский проспект, 28, Санкт-Петербург, Старый Петергоф 198504;
 Санкт-Петербургское отделение
 Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
 Набережная реки Фонтанки, 27, Санкт-Петербург, 191011
 danil.bystrov@gmail.com