

УДК 513.813:512.972+513.814+530.12

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИНДУЦИРОВАННОЙ СУБРИМАНОВОЙ МЕТРИКИ НА ВСЕЛЕННОЙ ДЕФРИЗА

В. Н. Берестовский

Аннотация. Рассматривается Вселенная Дефриза с отрицательной космологической постоянной как четырехмерная группа Ли с левоинвариантными лоренцевой метрикой и естественно связанным с координатами ортонормальным базисом. Найдены в элементарных функциях координаты геодезических субримановой метрики на этой группе Ли, индуцированной распределением ранга 3, порожденным пространственноподобными векторными полями из указанного базиса. Все геодезические полные. Строго аномальная экстремаль не является геодезической.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.506

Ключевые слова: алгебра Ли, (а)нормальная экстремаль, Вселенная Дефриза, геодезическая, группа Ли, левоинвариантная субриманова метрика, строго аномальная экстремаль.

Введение

Вселенная (решение уравнения тяготения Эйнштейна) Дефриза DU была введена в работе [1] Дефриза. Автору были доступны лишь источники [2, 3], где приведена без деталей и пояснений некоторая информация о Вселенной Дефриза, в частности, что она имеет тип N Петрова, а группа ее изометрий шестимерна. В [3] выписаны, как утверждает автор, явные уравнения геодезических Вселенной Дефриза с отрицательной космологической постоянной.

Все «физически реализуемые» модели относятся к типу I или типу II; есть и «физически нереализуемые» типы III, IV [4]. В [4] дается детальная общая информация о Вселенных типа II, но не приводится ни одного такого примера и DU не упоминается, хотя DU имеет «наблюдаемый» (вырожденный) тип II Петрова (тип N). Автору не известны примеры Вселенных типа II, кроме DU.

Авторы статьи [5] исследовали модель Вселенной Дефриза DU из [3], но с противоположной сигнатурой как некоторой четырехмерной группы Ли G_4 с левоинвариантной лоренцевой метрикой и нашли ее геодезические (они незамкнуты, но могут быть неполными), все киллинговы векторные поля и структуры алгебр Ли группы Ли G_4 , группы Ли изометрий G_6 для DU и ее подгрупп Ли.

Несмотря на уникальность DU, автору не удалось найти в литературе точных сведений о тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна, Вейля и структуре тензора энергии-импульса для Вселенной Дефриза DU. Поэтому в статье [6]

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF–2026–0022.

вычислены эти тензоры и установлены условие времениподобного схождения, нарушение слабого энергетического условия и тип N Петрова [4]. Статья [6] имеет чисто математический характер, хотя в ней цитируются некоторые физические интерпретации полученных результатов.

Вселенная Дефрiza имеет левоинвариантную лоренцеву метрику и естественно связанный с координатами ортонормальный базис левоинвариантных векторных полей. Пространственноподобные векторные поля этого базиса порождают левоинвариантное распределение ранга три и задают на нем левоинвариантное скалярное произведение. Это распределение вполне не голономно и поэтому задает некоторую левоинвариантную субриманову метрику d на группе Ли G_4 .

В элементарных функциях найдены геодезические на (G_4, d) .

Установлена полнота всех геодезических.

Доказано, что строго аномальная экстремаль не является геодезической. Все геодезические, являющиеся 1-параметрическими подгруппами, составляют два бесконечных двумерных конуса с вершиной в единице группы, пересекающихся по одной образующей.

Для поиска геодезических применяется метод из статьи [7], основанный на принципе максимума Понтрягина. В связи со спецификой соответствующей системы ОДУ для Вселенной Дефрiza этот поиск естественно разбивается на четыре случая. Исследование первых двух случаев нетрудно. В то же время каждый из остальных двух случаев приходится разбивать на четыре подслучая, дающих геодезические разного вида.

§ 1. О Вселенной Дефрiza

Вселенная Дефрiza была впервые введена в [1] (1969) как чисто радиационное решение типа N Петрова уравнения тяготения Эйнштейна с шестимерной группой движений G_6 , как утверждается в [2], и приводится там в следующей форме (12.6):

$$ds^2 = \frac{3}{|\Lambda|y^2} \left[dx^2 + dy^2 - dv \left(du - \frac{\Lambda dv}{|\Lambda|y^2} \right) \right], \quad (x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4, \quad y > 0, \quad (1)$$

где Λ — ненулевая космологическая постоянная.

Здесь мы принимаем форму (1) линейного элемента с $\Lambda = -3$.

Все ненулевые компоненты для метрического тензора (1) в x, y, u, v :

$$g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}, \quad g_{34} = -\frac{1}{2y^2}, \quad g_{44} = \frac{-1}{y^4}. \quad (2)$$

U (1) есть просто транзитивная группа изометрий $G_4(x', y', u', v')$:

$$(x, y, u, v) \rightarrow (y'x + x', y'y, u + u', (y')^2v + v'), \quad (x', u', v') \in \mathbb{R}^3, \quad y' > 0, \quad (3)$$

где единице в G_4 соответствует $(0, 1, 0, 0)$.

Вследствие равенств (1) и (2) касательные векторы к G_4 в единице

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial v} - 2\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right) \quad (4)$$

образуют ортонормальный базис сигнатуры $(+, +, +, -)$ в ds^2 . Вследствие (3) им соответствуют левоинвариантные векторные поля на G_4

$$X_1 = y \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = y \frac{\partial}{\partial y}, \quad X_3 = y^2 \frac{\partial}{\partial v} - 2\frac{\partial}{\partial u}, \quad X_4 = y^2 \frac{\partial}{\partial v}, \quad (5)$$

и для элементов (4) алгебры Ли $(\mathfrak{g}_4, [\cdot, \cdot])$ группы Ли G_4 есть только следующие (с точностью до перестановок) ненулевые скобки Ли:

$$[e_2, e_1] = e_1, \quad [e_2, e_3] = [e_2, e_4] = 2e_4. \quad (6)$$

Отсюда видно, что $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ — базис 4-мерной разрешимой алгебры Ли вида $\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}_3 \oplus \mathfrak{g}_1$, где $\{e_1, e_2, e_4\}$ — базис 3-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$, $\{e_4 - e_3\} = \{2\frac{\partial}{\partial u}\}$ — базис 1-мерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_1$.

В [5] замечено, что $\mathfrak{g}_3 = \mathfrak{g}_{3,4}$ с базисом $\{E_1, E_2, E_3\}$ и $h = 1/2$ по классификации Г. М. Мубаракзянова в [8], где

$$[E_1, E_3] = E_1, \quad [E_2, E_3] = hE_2, \quad -1 \leq h < 1. \quad (7)$$

Действительно, для векторов $E_1 = e_4, E_2 = e_1, E_3 = -e_2/2$ выполнены равенства (7) с $h = 1/2$ вследствие (6).

Алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ и $\mathfrak{g}_{3,4}$ метабелевы с коммутативными нильрадикалами коразмерности один.

На основании (6) для любого элемента X касательной алгебры $\mathfrak{g}_4$ односвязной группы Ли G_4 оператор $\text{ad } X$ не имеет ненулевых мнимых собственных значений, так как все собственные значения таких операторов вещественны. Поэтому по теореме 6.4 второй главы в [9] группа Ли G_4 экспоненциальная, т. е. экспоненциальное отображение $\exp : \mathfrak{g}_4 \rightarrow G_4$ для нее является диффеоморфизмом.

§ 2. Дифференциальные уравнения экстремалей индуцированной субримановой метрики

Из (6) вытекает, что 3-мерное подпространство V алгебры Ли $\mathfrak{g}_4$ с ортонормальным базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ порождает $\mathfrak{g}_4$ скобками Ли $[\cdot, \cdot]$. Как следствие распределение $\mathcal{V}$ ранга 3, являющееся линейной оболочкой над $\mathbb{R}$ ортонормального базиса $\{X_1, X_2, X_3\}$ левоинвариантных векторных полей из (5), вполне неголономно и вследствие теоремы Раппельского — Чжоу задает некоторую левоинвариантную субриманову метрику d на G_4 .

Мы ищем геодезические, т. е. локально кратчайшие $\gamma(t)$ субриманова пространства $(G = G_4, d)$. Они должны быть *экстремалами*, т. е. удовлетворять принципу максимума Понтрягина. Определение нормальных и аномальных экстремалей дано в определении 3 из [7]. Нормальные экстремали — решения системы ОДУ из [7]:

$$\gamma'(t) = d_{\gamma(t)}(u(t)), \quad u(t) = \sum_{i=1}^r \psi_i(t)e_i, \quad |u(0)| = 1, \quad (8)$$

$$\psi_j'(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^n C_{ij}^k \psi_i(t) \psi_k(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (9)$$

Здесь r — ранг левоинвариантного вполне неголономного распределения на группе Ли G , связанного с субримановым пространством (G, d) , $d_{\gamma(t)}$ — дифференциал левого сдвига $l_{\gamma(t)}$ на элемент $\gamma(t) \in G$; $\psi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, — абсолютно непрерывные вещественные функции, C_{ij}^k — структурные константы в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ для $\mathfrak{g}$.

Мы предполагаем, что начало $\gamma(0)$ — единица группы Ли G .

В аппендиксе С из [10] доказано, что нормальные экстремали являются геодезическими.

Аномальные экстремали могут быть нестроого и строго аномальными. Нестрого аномальные экстремали — в точности те, которые можно реализовать и как нормальные экстремали.

Строго аномальные экстремали требуют особого рассмотрения.

В нашем случае (G_4, d) , $n = 4$, $r = 3$, и вследствие (6)

$$C_{21}^1 = 1 = -C_{12}^1, \quad C_{23}^4 = C_{24}^4 = 2 = -C_{32}^4 = -C_{42}^4 \quad (10)$$

— все ненулевые структурные константы для базиса $\{e_1, \dots, e_4\}$ в $\mathfrak{g}_4$. При этом $v = \pm e_1$ — единственные единичные векторы в V такие, что $[v, V] \subset V$. Поэтому на основании предложения 5 в [11] $\gamma(t) = \exp(\pm t e_1)$ — единственные параметризованные длиной дуги аномальные экстремали в (G_4, d) с началом в единице.

Они строго аномальные вследствие п. 2 теоремы 5, п. 2 теоремы 4 в [11] и того, что $\{\mathbb{R}e_1\}$ — нецентральный идеал в $\mathfrak{g}_4 = \mathfrak{g}_{3,4} \oplus \mathfrak{g}_1$.

Вследствие (3) и (5) система ОДУ (8) имеет вид

$$x'(t) = y(t)\psi_1(t), \quad y'(t) = y(t)\psi_2(t), \quad u'(t) = -2\psi_3(t), \quad v'(t) = y^2(t)\psi_3(t) \quad (11)$$

с начальными данными $(x(0), y(0), u(0), v(0)) = (0, 1, 0, 0)$.

На основании (10) система ОДУ (9) имеет вид

$$\psi'_1 = \psi_1\psi_2, \quad \psi'_2 = -(\psi_1^2 + 2\psi_3\psi_4), \quad \psi'_3 = \psi'_4 = 2\psi_2\psi_4 \quad (12)$$

с начальными условиями

$$\psi_i(0) = \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1. \quad (13)$$

Из (12) и (13) следует закон сохранения

$$\psi_1^2(t) + \psi_2^2(t) + \psi_3^2(t) = 1. \quad (14)$$

Из последних двух равенств в (12) вытекают равенства

$$\psi_3 = \psi_4 + \varphi_3 - \varphi_4, \quad \psi'_2 = -(\psi_1^2 + 2\psi_4(\psi_4 + (\varphi_3 - \varphi_4))). \quad (15)$$

Предложение 1. (1) Если $\varphi_1 \neq 0$ ($\varphi_4 \neq 0$), то $\psi_1(t) \neq 0$ ($\psi_4(t) \neq 0$) для всех t из области определения функции ψ_1 (ψ_4).

(2) $\psi_2(t) \equiv 0 \Leftrightarrow \psi_2(t_0) = 0, \psi_1^2(t_0) + 2\psi_3(t_0)\psi_4(t_0) = 0, t_0 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Ясно, что для (12) верны теоремы о существовании и единственности решения системы с заданными начальными условиями. Вследствие теоремы единственности и специального вида первого и четвертого уравнений в (12) решение $\psi_1(t)$ ($\psi_4(t)$) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда $\psi_1(t_1) = 0$ ($\psi_4(t_4) = 0$) для некоторого $t_1 \in \mathbb{R}$ ($t_4 \in \mathbb{R}$). Аналогично с использованием второго равенства в (12) доказывается второе утверждение предложения 1.

Следствие 1. Если $\psi_2(t_0) = 0$ и не $\psi_2(t) \equiv 0$, то $\psi_2(t) \neq 0$ для $t \neq t_0$, близких к t_0 , при разных знаках для $t < t_0$ и $t > t_0$.

§ 3. Ковекторные функции индуцированной субримановой метрики на Вселенной Дефрiza

Согласно предложению 1 рассмотрим четыре возможных случая:

1) $\varphi_4 = 0, \varphi_1 = 0$; 2) $\varphi_4 = 0, \varphi_1 \neq 0$; 3) $\varphi_4 \neq 0, \varphi_1 = 0$; 4) $\varphi_4 \neq 0, \varphi_1 \neq 0$.

1. В этом случае вследствие (12) и предложения 1

$$\psi_i(t) \equiv \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1. \quad (16)$$

2. В этом случае $\psi_3(t) \equiv \varphi_3$, $|\varphi_3| < 1$,

$$\psi_2' = -\psi_1^2 = \psi_2^2 - (1 - \varphi_3^2), \quad \frac{d\psi_2}{\psi_2^2 - (1 - \varphi_3^2)} = dt,$$

$$t + c = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{\psi_2 - a}{\psi_2 + a} \right| = \frac{1}{2a} \ln \left(\frac{a - \psi_2}{a + \psi_2} \right), \quad a := \sqrt{1 - \varphi_3^2}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\psi_2(t) = \frac{a(1 - e^{2a(t+c)})}{1 + e^{2a(t+c)}} = -a \tanh(a(t+c)), \quad \varphi_2 = -a \tanh(ac); \quad (17)$$

$$\psi_1(t) = \pm \sqrt{a^2 - \psi_2^2(t)} = \frac{\pm a}{\cosh(a(t+c))}, \quad \varphi_1 = \frac{\pm a}{\cosh(ac)}. \quad (18)$$

В случаях 3 и 4, применяя первое и последнее равенства в (12), закон сохранения (14) и первое равенство в (15), получаем

$$\psi_1(t) = \varphi_1 \sqrt{\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}}, \quad (\psi_4'(t))^2 = 4\psi_4^2 \psi_2^2, \quad (19)$$

$$\left(\frac{\psi_4'(t)}{2\psi_4(t)} \right)^2 = \psi_2^2(t) = A - B\psi_4(t) - \psi_4^2(t), \quad (20)$$

$$\psi_4'(t) = 2\psi_4(t)\varepsilon_2(t)\sqrt{A - B\psi_4(t) - \psi_4^2(t)}, \quad \varepsilon_2(t) = \text{sign}(\psi_2(t)), \quad (21)$$

$$A = 1 - (\varphi_3 - \varphi_4)^2, \quad B = \frac{\varphi_1^2}{\varphi_4} + 2(\varphi_3 - \varphi_4), \quad A - B\varphi_4 - \varphi_4^2 = \varphi_2^2 \geq 0. \quad (22)$$

Лемма 1. $B^2 + 4A \geq 0$. При этом функция $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем тогда и только тогда, когда $B^2 + 4A > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \varphi_1^2/\varphi_4$. Тогда

$$\begin{aligned} B^2 + 4A &= (\alpha + 2(\varphi_3 - \varphi_4))^2 + 4A = \alpha^2 + 4\alpha(\varphi_3 - \varphi_4) + 4 \\ &= (\alpha + 2\varphi_3)^2 + 4(1 - \varphi_1^2 - \varphi_3^2) = (\alpha + 2\varphi_3)^2 + 4\varphi_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$\varphi_2 = 0, \quad 2\varphi_3 = -\alpha = \frac{-\varphi_1^2}{\varphi_4} \iff \varphi_1^2 + 2\varphi_3\varphi_4 = 0,$$

т. е. $\psi_2(t)$ — тождественный нуль вследствие предложения 1.

Следствие 2. Если $A > 0$ или $A = 0, B \neq 0$, то $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем.

Следствие 3. Если $A > 0$ и $\varphi_2 = 0$, то $\psi_2(t) \neq 0$ для $t \neq 0$, близких к 0, имея при этом значения разных знаков при $t > 0$ и $t < 0$.

Доказательство. Вытекает из следствия 2, леммы 1 и (12).

Лемма 2. (1) $A - B\psi_4(t) > 0$.

(2) Если $A \leq 0$, то $B \neq 0$, $\text{sign}(B) = -\text{sign}(\varphi_4)$.

Доказательство. (1) Вследствие (20) $A - B\psi_4(t) = \psi_2^2(t) + \psi_4^2(t) > 0$.

(2) Пусть $A \leq 0$. Тогда вследствие (22)

$$-B\varphi_4 > 0, \quad B \neq 0, \quad \text{sign}(B) = -\text{sign}(\varphi_4).$$

Пусть $\psi_2(t)$ не является тождественным нулем. Перепишем ОДУ (21) в виде

$$\xi' = 2 \left(\xi - \frac{B}{2} \right) \varepsilon_2 \sqrt{A + \frac{B^2}{4} - \xi^2}, \quad \xi = \psi_4 + \frac{B}{2}.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{d\xi}{\left(\xi - \frac{B}{2} \right) \varepsilon_2 \sqrt{A + \frac{B^2}{4} - \xi^2}} = 2 dt. \quad (23)$$

Замечание 1. Уравнение (23) имеет смысл, если $\psi_2(t) \neq 0$. На основании следствия 1 нули функции $\psi_2(t)$ изолированы. Решив (23) при $\psi_2(t) \neq 0$, переходом к пределу найдем решение (23) и при $\psi_2(t) = 0$.

К решению (23) можно применить один из табличных неопределенных интегралов 2.56.4, 2.56.6, 2.56.7, 2.56.8 в [12]:

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + b)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = \frac{-1}{(a^2 - b^2)^{1/2}} \ln \left| \frac{b\xi + a^2 + (a^2 - b^2)^{1/2}(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\xi + b} \right|, \quad a^2 > b^2. \quad (24)$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + b)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^{1/2}} \arcsin \frac{a^2 + b\xi}{a|\xi + b|}, \quad a^2 < b^2.$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi + a)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \left(\frac{a - \xi}{a + \xi} \right)^{1/2}, \quad a > 0.$$

$$\int \frac{d\xi}{(\xi - a)(a^2 - \xi^2)^{1/2}} = -\frac{1}{a} \left(\frac{a + \xi}{a - \xi} \right)^{1/2}, \quad a > 0.$$

У нас $a := \frac{1}{2}\sqrt{B^2 + 4A}$, $b := -B/2$, $a^2 - b^2 = A$.

В случае 3 $\xi = \psi_3$, $b = -B/2 = \varphi_4 - \varphi_3$, $a^2 - b^2 = A$, $a = 1$.

Если $A > 0$, применяем интеграл 2.56.4, если $A < 0$, то интеграл 2.56.6, если $A = 0$ и $a = b > 0$, то 2.56.7, если $a = -b > 0$, то 2.56.8.

Группа Ли G с левоинвариантной римановой метрикой $(\cdot, \cdot)$ однозначно определяется скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ на ее алгебре Ли $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot])$. Тройка $(\mathfrak{g}, [\cdot, \cdot], (\cdot, \cdot))$ называется *метрической алгеброй Ли*. *Изоморфизмом метрических алгебр* называется изоморфизм алгебр Ли, сохраняющий скалярное произведение.

Дословно так же можно определить *метрические (суб)лоренцевы и субримановы алгебры Ли* и их изоморфизмы. Важно то, что при всех изоморфизмах таких метрических алгебр Ли ОДУ (8), (9) и их аналоги для экстремалей и геодезических соответствующих групп Ли с левоинвариантной метрикой сохраняются.

Вследствие (6) в нашем случае все автоморфизмы метрической субримановой алгебры Ли порождаются преобразованиями базиса

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \rightarrow (-e_1, e_2, e_3, e_4), \quad (e_1, e_2, e_3, e_4) \rightarrow (e_1, e_2, -e_3, -e_4).$$

Они индуцируются изометричными автоморфизмами группы (G_4, d) :

$$(x, y, u, v) \rightarrow (-x, y, u, v), \quad (x, y, u, v) \rightarrow (x, y, -u, -v).$$

Будем считать, что $\varphi_4 > 0$ в I, II, III и $\varphi_4 < 0$ в IV.

I. $A > 0$. Применяя первый неопределенный интеграл, получаем

$$2(t + c) = \frac{-1}{\sqrt{A}} \ln \left| \frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4} \right|.$$

На основании (20)

$$\begin{aligned} b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2} &= \frac{1}{2}(-B\psi_4 + A + A + 2\sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}) \\ &= \frac{1}{2}(\psi_4^2 + \psi_2^2 + 2\sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2} + A) = \frac{1}{2}(\psi_4^2 + (\psi_2 + \sqrt{A})^2) \geq \frac{\psi_4^2}{2} > 0. \end{aligned}$$

Поэтому на основании предыдущего равенства

$$\begin{aligned} -2\sqrt{A}(t + c) &= \ln \left(\frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4} \right), \\ \exp(-2\sqrt{A}(t + c)) &= \frac{b\psi_4 + A + \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}}{\psi_4}, \\ \psi_4(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b) - A &= \sqrt{A}\varepsilon_2(a^2 - \xi^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Возводя в квадрат, приводя подобные и сокращая на ψ_4 , получаем

$$\begin{aligned} \psi_4[(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b)^2 + A] &= 2A \exp(-2\sqrt{A}(t + c)), \\ \psi_4(t) &= \frac{2A \exp(-2\sqrt{A}(t + c))}{(\exp(-2\sqrt{A}(t + c)) - b)^2 + A}. \end{aligned} \quad (26)$$

II. $A < 0$. Применяя второй неопределенный интеграл, получаем

$$\begin{aligned} \arcsin \left(\frac{A + b\psi_4(t)}{a\psi_4(t)} \right) &= 2\sqrt{-A}(t + c), \quad \frac{A + b\psi_4(t)}{a\psi_4(t)} = \sin(2\sqrt{-A}(t + c)), \\ \psi_4(t) &= \frac{-A}{b - a \sin(2\sqrt{-A}(t + c))}. \end{aligned} \quad (27)$$

Функция $\psi_4(t)$ определена корректно, так как $|b| > a$.

Заметим, что из (27) и четвертого равенства в (12) следует

$$\psi_2(t) = \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t + c))}{b - a \sin(2\sqrt{-A}(t + c))},$$

с выбирается так, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\sin(2\sqrt{-A}(c)) = \frac{A + b\varphi_4}{a\varphi_4}, \quad \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{b - a \sin(2\sqrt{-A}c)} = \varphi_2.$$

Пусть $\psi_2(t) \neq 0$, $A = 0$. По лемме 2

$$a = b = -B/2 > 0 \iff \varphi_4 > 0, \quad a = -b = B/2 \iff \varphi_4 < 0.$$

III. Применяем третий интеграл:

$$-\varepsilon_2 \left(\frac{a - \xi(t)}{a + \xi(t)} \right)^{1/2} = 2a(t + c).$$

Здесь выражение в левой части равенства всегда определено, так как

$$a + \xi(t) = \psi_4(t) > 0, \quad \frac{a - \xi(t)}{a + \xi(t)} = \frac{a^2 - \xi^2(t)}{(a + \xi(t))^2} = \frac{\psi_2^2(t)}{(a + \xi(t))^2}.$$

Пусть $\varepsilon := 2a(t + c)$. Тогда

$$\sqrt{\frac{a - \xi}{a + \xi}} = -\varepsilon_2 \varepsilon, \quad \xi = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon^2},$$

$$\psi_4(t) = \xi + a = \frac{2a}{1 + 4a^2(t + c)^2}, \quad c = \frac{\pm 1}{2a} \sqrt{\frac{2a - \varphi_4}{\varphi_4}}, \quad \varphi_4 > 0. \quad (28)$$

IV. С четвертым неопределенным интегралом имеем аналогично:

$$-\varepsilon_2 \left(\frac{a + \xi(t)}{a - \xi(t)} \right)^{1/2} = 2a(t + c), \quad \sqrt{\frac{a + \xi}{a - \xi}} = -\varepsilon_2 \varepsilon, \quad \xi = \frac{a(\varepsilon^2 - 1)}{1 + \varepsilon^2},$$

$$\psi_4(t) = \xi - a = \frac{-2a}{1 + 4a^2(t + c)^2}, \quad c = \frac{\pm 1}{2a} \sqrt{\frac{-(2a + \varphi_4)}{\varphi_4}}, \quad \varphi_4 < 0. \quad (29)$$

3. В этом случае $\psi_2^2(t) + \psi_3^2(t) \equiv 1$ и вследствие (12)

$$\psi_2'(t) = -2\psi_4(t)\psi_3(t), \quad \psi_3'(t) = 2\psi_2(t)\psi_4(t).$$

Отсюда видно, что тождество $\psi_2(t) \equiv 0$ невозможно.

4(а). Предположим, что $\psi_2(t) \equiv 0$. Вследствие (12)

$$\psi_i(t) \equiv \varphi_i, \quad i = 1, 3, 4, \quad 1 - \varphi_3^2 (= \varphi_1^2) = -2\varphi_4\varphi_3.$$

Решая последнее алгебраическое уравнение, получаем $\varphi_3 = \varphi_4 \pm \sqrt{1 + \varphi_4^2}$, причем $|\varphi_3| \leq 1$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_3 = \varphi_4 - \varepsilon_4 \sqrt{1 + \varphi_4^2}, \quad \varepsilon_4 = \text{sign}(\varphi_4). \quad (30)$$

§ 4. Геодезические индуцированной субримановой метрики на Вселенной Дефриза

Теорема 1. В случае 1 нормальные геодезические рассматриваемой задачи с началом $(0, 1, 0, 0)$ имеют одну из двух форм

1а) $\gamma(t) = (0, 1, \mp 2t, \pm t)$;

1б) $\gamma(t) = (0, e^{\varphi_2 t}, -2\varphi_3 t, (\varphi_3/2\varphi_2)(e^{2\varphi_2 t} - 1))$, $\varphi_2 \neq 0$, $\varphi_2^2 + \varphi_3^2 = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это следует из (11) и (16).

Теорема 2. В случае 2 нормальные геодезические рассматриваемой задачи с началом $(0, 1, 0, 0)$ имеют вид

$$y(t) = \frac{\cosh(ac)}{\cosh(a(t+c))}, \quad a = \sqrt{1 - \varphi_3^2}, \quad \varphi_1 = \frac{\pm a}{\cosh(ac)}; \quad (31)$$

$$x(t) = \pm \cosh(ac)(\tanh(a(t+c)) - \tanh(ac)), \quad \varphi_2 = -a \tanh(ac); \quad (32)$$

$$u(t) = -2\varphi_3 t, \quad v(t) = \frac{\varphi_3 \cosh^2(ac)}{a}(\tanh(a(t+c)) - \tanh(ac)). \quad (33)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие (17) и второго равенства в (11)

$$(\ln y)'(t) = \frac{y'}{y}(t) = \psi_2(t) = -a \tanh(a(t+c)), \quad a = \sqrt{1 - \varphi_3^2},$$

откуда следует (31). Из (31), (18) и первого равенства в (11) следует (32); (33) вытекает из (31) и последних двух формул в (11).

Следствие 4. Геодезические из теорем 1(b) и 2 при $\varphi_3 = 0$ дают все геодезические в плоскости Лобачевского L^2 :

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

с началом $(0, 1, 0, 0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Сначала докажем, что если $\varphi_3 = 0$, то указанные геодезические — геодезические в плоскости Лобачевского.

Утверждение о геодезической (b) хорошо известно.

Если $\varphi_3 = 0$, то

$$a = 1, \quad \varphi_1 = \frac{\pm 1}{\cosh(c)}, \quad \varphi_2 = -\tanh(c);$$

$$y(t) = \frac{\cosh(c)}{\cosh(t+c)} = \frac{1}{\cosh t + \tanh(c) \sinh t} = \frac{1}{\cosh t - \varphi_2 \sinh t};$$

$$\begin{aligned} x(t) &= \pm \cosh(c)(\tanh(t+c) - \tanh(c)) = \frac{\pm \cosh(c) \sinh t}{\cosh(t+c) \cosh(c)} \\ &= \frac{\varphi_1 \sinh t}{\cosh t - \varphi_2 \sinh t}. \end{aligned}$$

Полученные равенства для $y(t)$ и $x(t)$ совпадают при взаимной перемене их ролей с формулами для $x(t)$ и $y_1(t)$ в (26) для $n = 2$ из [7], где были найдены геодезические пространств Лобачевского как некоммутативных групп Ли (не допускающих левоинвариантных субримановых метрик) с левоинвариантной римановой метрикой. Заметим, что при $n = 2$ это единственная связная некоммутативная двумерная группа Ли, изоморфная подгруппе $G_2 := \{u = v = 0\}$ группы Ли G_4 .

II. Легко вычислить, что для полученных выражений $y(t)$ и $x(t)$

$$y'(0) = \varphi_2, \quad x'(0) = \varphi_1, \quad \varphi_1^2 + \varphi_2^2 = 1.$$

Теорема 3. *Никакой нетривиальный отрезок строго аномальной экстремали $\gamma(t) = (t, 1, 0, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, не является кратчайшей. Следовательно, строго аномальная экстремаль — не геодезическая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — горизонтальная прямая $y = 1$ в плоскости L^2 . Поэтому, как хорошо известно, концы каждого ее нетривиального отрезка (параметризованного длиной дуги t !) можно соединить более короткой, чем отрезок, кратчайшей в L^2 . На основании следствия 4 эта кратчайшая — левый сдвиг по подгруппе $G_2 \subset G_4$ некоторого отрезка геодезической из следствия 4.

3, 4. На основании (11) и четвертого уравнения в (12)

$$y(t) = \sqrt{\frac{\psi_4(t)}{\varphi_4}}; \quad (34)$$

$$x(t) = \frac{\varphi_1}{\varphi_4} \int_0^t \psi_4(\tau) d\tau := \frac{\varphi_1}{\varphi_4} I_1(t); \quad (35)$$

$$u(t) = -2 \left((\varphi_3 - \varphi_4)t + \int_0^t \psi_4(\tau) d\tau \right); \quad (36)$$

$$v(t) = \frac{1}{\varphi_4} \int_0^t \psi_4(\tau)(\psi_4(\tau) + \varphi_3 - \varphi_4) d\tau := \frac{1}{\varphi_4} (I_2(t) + (\varphi_3 - \varphi_4)I_1(t)). \quad (37)$$

I. Случай $A > 0$:

$$I_1(t) = -\operatorname{arctg} \frac{\exp(-2\sqrt{A}(t+c)) - b}{\sqrt{A}} + \operatorname{arctg} \frac{\exp(-2\sqrt{A}c) - b}{\sqrt{A}}. \quad (38)$$

Применяем интеграл 2.13.6 из [12] для I_2 к функции (26):

$$I_2(t) = bI_1(t) + \sqrt{A} \left(\frac{A - b\xi}{\xi^2 + A} - \frac{A - b\xi_0}{\xi_0^2 + A} \right), \quad (39)$$

где $\xi = \exp(-2\sqrt{A}(t+c)) - b$, $\xi_0 = \exp(-2\sqrt{A}c) - b$.

II. Случай $A < 0$. Применяем интегралы 5.12.5 и 5.12.1 из [12]:

$$J_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c)) - a}{\sqrt{-A}} - \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}c) - a}{\sqrt{-A}}, \quad (40)$$

$$J_2(t) = bJ_1(t) - \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t+c))}{2(b - a \sin(2\sqrt{-A}(t+c)))} + \frac{a\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{2(b - a \sin(2\sqrt{-A}c))}. \quad (41)$$

В случае 3 эти интегралы имеют вид

$$J_1(t) = \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c)) - 1}{\sqrt{-A}} - \operatorname{arctg} \frac{b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}c) - 1}{\sqrt{-A}}, \quad (42)$$

$$J_2(t) = bJ_1(t) - \frac{\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}(t+c))}{2(b - \sin(2\sqrt{-A}(t+c)))} + \frac{\sqrt{-A} \cos(2\sqrt{-A}c)}{2(b - \sin(2\sqrt{-A}c))}. \quad (43)$$

В формулах (40) и (42) используется непрерывная ветвь $\operatorname{arctg}(\cdot)$, принимающая значения в интервале $(-\pi/2 + z\pi, \pi/2 + z\pi)$, на соответствующем интервале непрерывности функции $b \operatorname{tg}(\sqrt{-A}(t+c))$; $z \in \mathbb{Z}$ выбирается с учетом непрерывности и нормировки $J_1(0) = 0$.

III, IV. Случай $A = 0$:

$$K_1(t) = \pm \operatorname{arctg}(2a(t+c)) \mp \operatorname{arctg}(2ac). \quad (44)$$

Здесь верхний знак соответствует формуле (28), нижний знак — формуле (29). Применяем интеграл 2.9.7 из [12]:

$$K_2(t) = a(\operatorname{arctg}(2a(t+c)) - \operatorname{arctg}(2ac)) + \frac{2a^2(t+c)}{1+(2a(t+c))^2} - \frac{2a^2(c)}{1+(2ac)^2}. \quad (45)$$

В случае 3 эти интегралы имеют вид

$$K_1(t) = \pm \operatorname{arctg}(2(t+c)) \mp \operatorname{arctg}(2c), \quad (46)$$

$$K_2(t) = \operatorname{arctg}(2(t+c)) - \operatorname{arctg}(2c) + \frac{2(t+c)}{1+(2(t+c))^2} - \frac{2c}{1+(2c)^2}. \quad (47)$$

В случаях $A < 0$ и $A = 0$ надо в равенствах (35), (36), (37) заменить I_1 , I_2 соответственно на J_1 , J_2 и K_1 , K_2 .

4(а). Здесь $\psi_2(t) \equiv 0$, $\psi_1(t) \equiv \varphi_1$, $\psi_3(t) \equiv \varphi_3$, где φ_1 , φ_3 — произвольные ненулевые числа такие, что $\varphi_1^2 + \varphi_3^2 = 1$. Вследствие (11)

$$\gamma(t) = (\varphi_1 t, 1, -2\varphi_3 t, \varphi_3 t). \quad (48)$$

Предложение 2. Геодезические, являющиеся 1-параметрическими подгруппами, образуют множество, состоящее из двух подмножеств, диффеоморфных бесконечным двумерным конусам с вершинами в единице группы. Эти два подмножества пересекаются по общей образующей, 1-параметрической подгруппе $\exp(te_3) = (0, 1, -2t, t)$.

Доказательство. Одно из этих подмножеств составляют геодезические из теоремы 1, другое — геодезические (48) вместе с их предельной геодезической $\exp(te_3)$.

К большому сожалению пришлось отказаться от формулировки теоремы о геодезических в случаях 3 и 4, потому что даже со ссылками на полученные формулы она была бы очень громоздкой.

Теорема 4. Пространство (G_4, d) метрически полно. Как следствие, все геодезические продолжимы на всю ось параметра.

Доказательство. Геодезические — решения систем ОДУ (11), (12) с начальными данными (13) и законом сохранения (14). Поэтому достаточно доказать метрическую полноту пространства (G_4, d) .

Вследствие теоремы Рашевского — Чжоу метрическая топология пространства (G_4, d) совпадает с естественной топологией многообразия G_4 . Ясно, что наша субриманова структура на G_4 индуцируется левоинвариантной римановой структурой на G_4 с ортонормальным базисом левоинвариантных векторных полей (X_1, X_2, X_3, X_4) . Если d_1 — соответствующая левоинвариантная риманова метрика, то $d_1 \leq d$. Пространство (G_4, d_1) метрически полное, так как известно, что всякая левоинвариантная риманова метрика на связной группе Ли полна. Следовательно, и (G_4, d) метрически полное.

Благодарность. Автор благодарит И. А. Зубареву за помощь в работе и дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Defrise L. Groupes d'isotropie et groupes de stabilité conforme dans les espaces lorentziens. Bruxelles: Thèse, Université Libre de Bruxelles, 1969.
2. Stephani H., Kramer D., MacCallum M., Hoenselaers C., Herlt Ed. Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2003.
3. Podolský J. Exact non-singular waves in the anti-de Sitter Universe // General Relativity and Gravitation. 2001. V. 33, N 6. P. 1093–1113.
4. Хокинг С., Эллис Дж. Крупномасштабная структура пространства-времени. М.: Мир, 1977.
5. Berestovskii V. N., Zubareva I. A. Geodesics and isometry group of Defrise Universe as a Lie group with left-invariant Lorentz metric // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 3. P. 1001–1014.
6. Берестовский В. Н. О тензорах кривизны, Риччи, Эйнштейна и Вейля Вселенной Деффриза // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 818–827.
7. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. ПМП, (ко)присоединенное представление и нормальные геодезические левоинвариантных (суб)финслеровых метрик на группах Ли // Чебышев. сб. 2020. Т. 21, № 2. С. 43–64.
8. Мубаракзянов Г. М. О разрешимых алгебрах Ли // Изв. вузов. Математика. 1963. № 1. С. 114–123.
9. Винберг Э. Б., Горбачевич В. В., Онищик А. Л. Строение групп и алгебр Ли. Группы Ли и алгебры Ли. 3. М.: ВИНТИ, 1990. (Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 41).
10. Liu W., Sussmann H. Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions. Mem. Am. Math. Soc. 1995. V. 118, N 564.
11. Берестовский В. Н., Зубарева И. А. Анормальные экстремали левоинвариантных субфинслеровых квазиметрик на четырехмерных группах Ли с трехмерными порождающими распределениями // Сиб. мат. журн. 2022. Т. 63, № 4. С. 748–767.
12. Брычков Ю. А., Маричев О. И., Прудников А. П. Таблицы неопределенных интегралов. М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 25 февраля 2026 г.

После доработки 19 июня 2026 г.

Принята к публикации 20 июля 2026 г.

Берестовский Валерий Николаевич (ORCID 0000-0001-5739-9380)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

vberestov@inbox.ru