

МНОГООБРАЗИЕ РЕШЕТОК, ПОРОЖДЕННОЕ L_4 . II

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

Аннотация. Установлена дуальная эквивалентность для категории биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию, порожденному конечной решеткой L_4 , с полными гомоморфизмами решеток в качестве морфизмов, расширяя таким образом дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.505

Ключевые слова: дуальность, биалгебраическая решетка, многообразие.

1. Введение

В работах [1, 2] дуальность Биркгофа для биалгебраических дистрибутивных решеток была продолжена на многообразии $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденное пентагоном N_5 ; таким образом была получена дуальная эквивалентность категории, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие $\mathbf{SP}(N_5)$, а морфизмами — полные решеточные гомоморфизмы, и категории так называемых N_5 -пространств с N_5 -отображениями в качестве морфизмов. Оказалось, что подобная дуальность биркгофовского типа может быть получена и для других конечно порожденных многообразий решеток. А именно, такие дуальности были установлены ранее для:

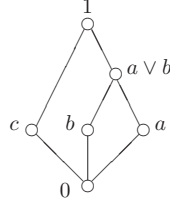
- многообразия $\mathbf{SP}(L_6)$, порожденного решеткой L_6 подпорядков трехэлементной цепи, в [3, 4];
- многообразия $\mathbf{SP}(M_3)$, порожденного алмазом M_3 , в [5, 6] (перевод на английский язык см. в [7]);
- многообразий, порожденных решетками подпорядков частичных порядков длины 2, в [8, 9].

Все эти дуальности расширяли дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток, а также дуальность, найденную в работах [1, 2], в случае, когда данное многообразие содержало многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$.

Здесь мы рассматриваем многообразие $\mathbf{SP}(L_4)$, порожденное конечной решеткой L_4 (см. рис. 1, а также [10, с. 127]). Согласно теореме Маккензи [11] это многообразие имеет конечный базис тождеств. Более того, оно является верхним покрытием для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$ в решетке всех многообразий решеток (см. [12, разд. 2.2]).

Основываясь на результатах из [13], мы находим дуальную категорию для категории биалгебраических решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(L_4)$, — категорию

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, проект FWNF-2026-0032, и при поддержке Комитета по науке Министерства науки и образования Республики Казахстан, проект AP23485395.

Рис. 1. Решетка L_4 .

$\mathbb{C}_4$, объектами которой являются L_4 -пространства, а морфизмами — L_4 -отображения, — и устанавливаем дуальную эквивалентность категории $\mathbb{C}_4$ и категории $\mathbb{BL}_4$ биалгебраических решеток, принадлежащих $\mathbf{SP}(L_4)$ с полными решеточными гомоморфизмами в качестве морфизмов (см. теорему 1). Отметим, что установленная здесь дуальная эквивалентность является расширением дуальной эквивалентности для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденного пентагоном, из работ [1, 2]. (Многообразие $\mathbf{SP}(L_4)$ содержит $\mathbf{SP}(N_5)$ в качестве собственного подмногообразия.) Таким образом, эта дуальная эквивалентность расширяет и дуальную эквивалентность Биркгофа для дистрибутивных решеток.

За всеми основными определениями и обозначениями теории решеток, не представленными здесь, мы отсылаем читателя к монографиям [10, 12]. За специфическими определениями, связанными с понятием минимального покрытия в решетке, а также за фактами о строении многообразия $\mathbf{SP}(L_4)$ мы отсылаем к [14, 10, 2, 13].

2. Категории $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$

Следующее определение является аналогом [2, определение 2.1]; оно отличается от последнего в пп. (s3) и (m4).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Структура $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_4 -пространством, если выполнены следующие условия:

- (s1) $X \cap Y = \emptyset$; более того, если $Y \neq \emptyset$, то $X \neq \emptyset$;
- (s2) $\leq$ является частичным порядком на $X \cup Y$;
- (s3) $f: Y \rightarrow (X \cup Y) \times X$ является функцией, причем для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$, выполняются следующие условия:
 - (a) $y \not\leq \{a, b\}$ и $b \not\leq y$ являются антицепями;
 - (b) если $a \in X$, то $a < y$;
 - (c) если $a \in Y$, то $f(a) = (y, b)$;
 - (d) если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $y \leq z$;
 - (e) если $z \leq y$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $z \ll \{a, b\}$ или $z \in Y$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$, где $f(z) = (c, d)$.

Для удобства также пишем $X(\mathbb{S})$ вместо X и $Y(\mathbb{S})$ вместо Y .

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f' \rangle$ — L_4 -пространства. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется L_4 -отображением, если выполнены следующие условия:

- (m1) φ отображает $X \cup Y$ в $X' \cup Y' \cup 2X'$, где $2X'$ обозначает семейство всех 2-элементных антицепей в $\langle X', \leq' \rangle$;
- (m2) если $u, v \in X \cup Y$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in X' \cup Y'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$;
- (m3) для любого $x \in X$ справедливо включение $\varphi(x) \in X'$;
- (m4) для любого $y \in Y$ такого, что $f(y) = (a, b)$, выполнено следующее:

- (а) если $\varphi(y) \in X'$, то $\varphi(y) \ll \varphi(a)$ или $\varphi(y) \leq \varphi(b)$;
 (б) если $\varphi(y) \in Y'$, то $\varphi(a) \in X' \cup Y'$ и $f(\varphi(y)) = (\varphi(a), \varphi(b))$;
 (с) если $\varphi(y) \in 2X'$, то $\varphi(y) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq X'$ и $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \varphi(z)$ для любого $z \in X \cup Y$ с условием $y \leq z$.

Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1$ и $\mathbb{S}_2$ — L_4 -пространства, пусть

$$X_i = X(\mathbb{S}_i), \quad Y_i = Y(\mathbb{S}_i) \quad \text{для } i < 3,$$

и пусть $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_4 -отображения. Композиция $\varphi_0 \circ \varphi_1: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_2$ L_4 -отображений φ_0 и φ_1 определяется следующим образом. Пусть $u \in X_0 \cup Y_0$.

(с1) Если $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(u), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(u) \in X_2 \cup Y_2, \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(u) \in 2X_2 \text{ и } f(u) = (a, b). \end{cases}$$

(с2) Если $\varphi_0(u) \in 2X_1$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(a), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(b) \leq \varphi_1 \varphi_0(a), \\ \varphi_1 \varphi_0(b), & \text{если } \varphi_1 \varphi_0(a) \leq \varphi_1 \varphi_0(b), \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \text{если } \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \in 2X_2, \end{cases}$$

где $f(u) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$ и $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ в силу (m4-с) в последнем случае.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в условии (с1) в случае, когда $\varphi_1 \varphi_0(u) \in 2X_2$, имеем $\varphi_0(u) \in Y_1$ и $u \in Y_0$ в силу условия (m3), примененного сначала к φ_1 , а затем к φ_0 . Это означает, что $f(u) = (a, b)$ для некоторых $a \in X_0 \cup Y_0$ и $b \in X_0$. Кроме того, $f(\varphi_0(u)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Таким образом, определение во второй строке условия (с1) корректно.

Лемма 1. Если $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ — L_4 -пространства, а $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — L_4 -отображения, то $\varphi_0 \circ \varphi_1$ также является L_4 -отображением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем для краткости $\psi = \varphi_0 \circ \varphi_1$ и

$$X_i = X(\mathbb{S}_i), \quad Y_i = Y(\mathbb{S}_i) \quad \text{для } i < 3.$$

Условия (m1) и (m3) определения 1 очевидным образом выполняются для ψ .

Утверждение 1. Условие (m2) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u, v \in X_0 \cup Y_0$ таковы, что $u \leq v$ в $\mathbb{S}_0$, и пусть $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$. Покажем, что $\psi(u) \leq \psi(v)$ в $\mathbb{S}_2$. Возможны следующие случаи.

СЛУЧАЙ m2.1: $\varphi_0(u), \varphi_0(v) \in X_1 \cup Y_1$. Этот случай рассматривается в точности так, как это сделано в начале доказательства утверждения 2.1 в доказательстве [2, лемма 2.2]. Действительно, в силу (m2), примененного к φ_0 , получаем, что $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(v)$. Поскольку $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$, заключаем по (m2), примененному к φ_1 , и (с1), что $\psi(u) = \varphi_1 \varphi_0(u) \leq \varphi_1 \varphi_0(v) = \psi(v)$.

СЛУЧАЙ m2.2: $\varphi_0(u) \in X_1 \cup Y_1$ и $\varphi_0(v) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(v) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(v) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$ и $\psi(v) = \max\{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \in X_2$ в силу условия (с2), так как $\psi(v) \in X_2 \cup Y_2$.

Поскольку $u \leq v$ в $\mathbb{S}_0$, имеем в этом случае в силу (s3-e), что либо $u \ll \{a, b\}$, либо $u \in Y_0$, $f(u) = (c, d)$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$ в $\mathbb{S}_0$. В первом случае

$$\psi(u) = \varphi_1 \varphi_0(u) \ll \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \ll \max\{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} = \psi(v) \in X_2$$

согласно (m3) и (c2), поскольку $\psi(v) \in X_2 \cup Y_2$. Следовательно, $\psi(u) \leq \psi(v)$ в $\mathbb{S}_2$, что и требовалось.

Предположим теперь, что $u \in Y_0$, $f(u) = (c, d)$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$ в $\mathbb{S}_0$. Тогда в силу включения $b, d \in X_0$, выполненного по условию (s3), заключаем с использованием условий (m2), (m3), примененных к φ_0 , что $\varphi_0(d) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v),$$

$$\psi(d) = \varphi_1\varphi_0(d) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v).$$

Ввиду нашего предположения о $\varphi_0(u)$ и условия (m4) возможны следующие два случая.

СЛУЧАЙ m2.2a: $\varphi_0(u) \in X_1$. В этом случае по (m3) получаем, что $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in X_2$. Более того, имеем по (m4-a), что либо $\varphi_0(u) \ll \varphi_0(c)$, либо $\varphi_0(u) \leq \varphi_0(d)$. Во втором случае применяем (m2), (m3) к φ_1 и получаем, что

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(d) = \psi(d) \leq \psi(v).$$

В первом случае есть три возможности.

- $\varphi_0(c) \in X_1$. В этом случае применяем (m2), (m3) к φ_1 и получаем, что

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \varphi_1\varphi_0(c) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v).$$

- $\varphi_0(c) \in Y_1$. В этом случае $c \in Y_0$ и $f(c) = (u, d)$ по (s3-c), а $f(\varphi_0(c)) = (\varphi_0(u), \varphi_0(d)) \in X_1^2$ по (m3), (m4-b), а также в силу нашего предположения о том, что $\varphi_0(u) \in X_1$. Таким образом, имеем

$$\varphi_0(u) \leq \varphi_0(c) \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1.$$

Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v)$$

и $\psi(u) \leq \psi(v)$.

- $\varphi_0(c) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $c \in Y_0$ и $f(c) = (u, d)$ в силу (s3-c). Более того, по условию (m4-c), примененному к φ_0 , имеем

$$\varphi_0(u) \ll \varphi_0(c) = \{\varphi_0(u), \varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1.$$

Следовательно, применяя (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v)$$

и $\psi(u) \leq \psi(v)$.

В любом случае установлено, что $\psi(u) \leq \psi(v)$, что и требовалось.

СЛУЧАЙ m2.2b: $\varphi_0(u) \in Y_1$. В этом случае $\varphi_0(c) \in X_1 \cup Y_1$ и $f(\varphi_0(u)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Следовательно,

$$\{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$$

в $\mathbb{S}_1$ в силу условий (m2), (m3), примененных к φ_0 . Ввиду условий (m2), (m3), примененных к φ_1 , имеем в $\mathbb{S}_2$

$$\begin{aligned} \{\psi(c), \psi(d)\} &= \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \\ &\ll \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \psi(v). \end{aligned}$$

Если $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in X_2$, то, применяя (m4-a) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} \ll \psi(v),$$

что и требовалось. Если $\psi(u) = \varphi_1\varphi_0(u) \in Y_2$, то $\psi(c) = \varphi_1\varphi_0(c) \in X_2 \cup Y_2$ и $f(\psi(u)) = (\psi(c), \psi(d))$ в силу (m4-b), примененного к φ_1 . Поскольку $\{\psi(c), \psi(d)\} \ll \psi(v)$, заключаем по (s3-d), что $\psi(u) \leq \psi(v)$, что и требовалось показать.

СЛУЧАЙ m2.3: $\varphi_0(u) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(u) = (a, b)$. Применяя (m4-c) к φ_0 , получаем, что $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \varphi_0(v)$. Если $\varphi_0(v) \in X_1 \cup Y_1$, то, принимая во внимание включения $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$ и применяя (c1), (c2) и (m2), (m3) к φ_1 , получаем, что

$$\psi(u) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \leq \varphi_1\varphi_0(v) = \psi(v).$$

Если $\varphi_0(v) \notin X_1 \cup Y_1$, то $\varphi_0(v) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$, где $f(v) = (c, d)$. Более того, $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\}$. Принимая во внимание включения $\psi(u), \psi(v) \in X_2 \cup Y_2$ и применяя (c1), (c2) и (m2), (m3) к φ_1 , получаем

$$\psi(u) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \leq \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(v).$$

Таким образом, условие (m2) выполняется для ψ . $\square$

Утверждение 2. Условие (m4-a) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ. Пусть $y \in Y_0$ и $f(y) = (a, b)$ в S_0 , пусть также $\psi(y) \in X_2$. Последнее включение может иметь место в следующих трех случаях.

СЛУЧАЙ m4.1: $\varphi_0(y) \in X_1$. В этом случае $\varphi_0(y) \ll \varphi_0(a)$ или $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(b)$ в S_1 в силу (m4-a), примененного к φ_0 . Поэтому, применяя (m2), (m3) и (c1), (c2) к φ_1 , получаем, что $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \ll \psi(a)$ или $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \leq \varphi_1\varphi_0(b) = \psi(b)$ в S_2 .

СЛУЧАЙ m4.2: $\varphi_0(y) \in Y_1$. В силу условия (m4-b), примененного к φ_0 , имеем $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ и $\varphi_0(a) \in X_1 \cup Y_1$. Более того, $\varphi_0(b) \in X_1$ в силу (m3), примененного к φ_0 . Используя условия (c1), (m3) и (m4-a), примененные к φ_1 , получаем, что $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \ll \varphi_1\varphi_0(a) = \psi(a)$ или $\psi(y) = \varphi_1\varphi_0(y) \leq \varphi_1\varphi_0(b) = \psi(b)$.

СЛУЧАЙ m4.3: $\varphi_0(y) \notin X_1 \cup Y_1$. В этом случае $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$, где $f(y) = (a, b)$. Так как $\psi(y) \in X_2$, получаем по (c2) и по (m2), (m3), примененным к φ_1 , равенства $\psi(y) = \max\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \max\{\psi(a), \psi(b)\}$. Таким образом, $\psi(y) \in \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$ и условие (m4-a) выполнено для ψ . $\square$

Утверждение 3. Условие (m4-b) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\psi(y) \in Y_2$. В силу условий (c1), (c2) и (m3) это означает, что $\varphi_0(y) \in Y_1$, $\varphi_0(a) \in X_1 \cup Y_1$, а $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ по условию (m4-b), примененному к φ_0 . Применяя (m4-b) к φ_1 , получаем, что $\psi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \in X_2 \cup Y_2$ и $f(\psi(y)) = (\psi(a), \psi(b))$, устанавливая таким образом выполнение условия (m4-b) для ψ . $\square$

Утверждение 4. Условие (m4-c) выполняется для ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\psi(y) \in 2X_2$; тогда $y \in Y_0$, $\varphi_0(y) \notin X_1$ в силу условий (m3) и (c1), (c2), и в S_0 имеет место равенство $f(y) = (a, b)$. Далее, если $\varphi_0(y) \in Y_1$, то применяем условие (m4-b) к φ_0 и получаем, что $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$. Применяя теперь условия (c1) и (m4-c) к φ_1 и имея

в виду, что $\psi(y) \in 2X_2$, получаем $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Если же $\varphi_0(y) \in 2X_1$, то применяем (m4-с) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Имея в виду включение $\psi(y) \in 2X_2$, применяем (c1), (c2) и (m3) к φ_1 и заключаем, что $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Таким образом, в любом случае имеем $\psi(y) = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$. Предположим теперь, что элемент $z \in X_0 \cup Y_0$ таков, что $y \leq z$ в $\mathbb{S}_0$. Рассмотрим все возможные случаи для φ_0 , принимая во внимание тот факт, что $\varphi_0(y) \notin X_1$, см. выше.

СЛУЧАЙ m4A: $\varphi_0(y) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \subseteq X_1$. Следующие подслучаи возможны для $\varphi_0(z)$ и $\psi(z)$.

СЛУЧАЙ m4A-1: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. Поскольку $y \leq z$ и $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$, по (m4-с), примененному к φ_0 , получаем, что $\varphi_0(a), \varphi_0(b) \leq \varphi_0(z)$. Условия (m2), (m3), примененные к φ_1 , влекут

$$\psi(a) = \varphi_1\varphi_0(a) \leq \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z); \quad \psi(b) = \varphi_1\varphi_0(b) \leq \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z).$$

Поэтому $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \psi(z)$, что и требовалось.

СЛУЧАЙ m4A-2: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. В этом случае $\varphi_0(z) \in Y_1$ и поэтому $z \in Y_0$ в силу (m3) и (c1); таким образом, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$. Более того, $f(\varphi_0(z)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$ в $\mathbb{S}_1$ в силу условия (m4-b), примененного к φ_0 . Следовательно, применяя (m4-с) к φ_1 , получаем

$$\psi(z) = \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \{\psi(c), \psi(d)\} \subseteq X_2.$$

Поскольку $y \leq z$ и $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$, получаем по условию (m4-с), примененному к φ_0 , что $\varphi_0(a), \varphi_0(b) \leq \varphi_0(z)$. По условию (s3-e), примененному к этим неравенствам, заключаем, что $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\}$. Тогда условия (m2), (m3), примененные к φ_1 , дают:

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4A-3: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. В этом случае $z \in Y_0$ по (m3), примененному к φ_0 , и $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$. Более того, $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$ по (m4-с), примененному к φ_0 , и

$$\psi(z) = \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \max\{\psi(c), \psi(d)\} \in X_2$$

по (m3) и (c2). Поскольку $y \leq z$, по условию (m4-с), примененному к φ_0 , имеем

$$\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z).$$

По условию (m2), примененному к φ_1 , и условию (c2) получаем

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \max\{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4A-4: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. В этом случае $z \in Y_0$, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$, а $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$, как и в случае m4A-3 выше. Поскольку $y \leq z$, по условию (m4-с), примененному к φ_0 , имеем $\{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z)$. По (m2), (m3), примененным к φ_1 , и (c2) получаем

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z).$$

СЛУЧАЙ m4B: $\varphi_0(y) \in Y_1$. В этом случае $f(\varphi_0(y)) = (\varphi_0(a), \varphi_0(b))$ по условию (m4-b), примененному к φ_0 , и $\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \subseteq X_2$ по условию (m4-с), примененному к φ_1 . Возможны следующие четыре случая.

СЛУЧАЙ m4B-1: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$. В этом случае применяем (m2) к φ_0 и получаем, что $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$, откуда

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \varphi_1\varphi_0(z) = \psi(z)$$

в силу (m4-с), примененного к φ_1 .

СЛУЧАЙ m4B-2: $\varphi_0(z) \in X_1 \cup Y_1$ и $\psi(z) \subseteq X_2$. Применяем (m2) к φ_0 и получаем неравенство $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$. Более того, $\varphi_0(z) \in Y_1$ по (m3), примененному к φ_1 , и $z \in Y_0$ по (m3), примененному к φ_0 . Следовательно, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$ для некоторых $c \in X_0 \cup Y_0$ и $d \in X_0$. Так как $\varphi_0(z) \in Y_1$, по условию (m4-b), примененному к φ_0 , заключаем, что $f(\varphi_0(z)) = (\varphi_0(c), \varphi_0(d))$. Таким образом,

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \psi(z)$$

в силу условия (m4-с), примененного к φ_1 , условия (с1) и неравенства $\varphi_0(y) \leq \varphi_0(z)$.

СЛУЧАЙ m4B-3: $\varphi_0(z) \subseteq X_1$. В этом случае, поскольку $\varphi_0(z) \notin X_1$, имеем включение $z \in Y_0$ в силу условия (m3), примененного к φ_0 . Таким образом, $f(z) = (c, d)$ в $\mathbb{S}_0$ для некоторых $c \in X_0 \cup Y_0$ и $d \in X_0$. Более того, $\varphi_0(z) = \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} \subseteq X_1$ по условию (m4-с), примененному к φ_0 . В силу условия (s3-e) либо $y \ll \{c, d\}$, либо $\{a, b\} \ll \{c, d\}$. В силу условий (m2), (m3), примененных к φ_0 или к ψ , см. утверждение 1 выше, получаем, что либо $\varphi_0(y) \ll \{\varphi_0(c), \varphi_0(d)\} = \varphi_0(z) \subseteq X_1$, либо $\{\psi(a), \psi(b)\} \ll \{\psi(c), \psi(d)\}$. В первом случае применяем (m2), (m3) и (m4-с) к φ_1 и получаем, что $\{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} \ll \{\varphi_1\varphi_0(c), \varphi_1\varphi_0(d)\} = \{\psi(c), \psi(d)\}$. Таким образом, в любом из двух случаев

$$\psi(y) = \{\varphi_1\varphi_0(a), \varphi_1\varphi_0(b)\} = \{\psi(a), \psi(b)\} \ll \{\psi(c), \psi(d)\}.$$

Если $\psi(z) \in X_2 \cup Y_2$, то $\psi(y) \ll \max\{\psi(c), \psi(d)\} = \psi(z)$ в силу (с2). Если $\psi(z) \subseteq X_2$, то $\psi(y) \ll \{\psi(c), \psi(d)\} = \psi(z)$ вновь в силу условия (с2). $\square$

Таким образом, условие (m4) выполняется для ψ . Доказательство леммы 1 завершено. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ассоциативность операции композиции $\circ$ может быть установлена так же, как и в работе [2].

Пусть $\mathbb{BL}_4$ обозначает категорию, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(L_4)$, а морфизмами — полные решеточные гомоморфизмы (см. рис. 1). Пусть $\mathbb{C}_4$ обозначает категорию, объектами которой являются L_4 -пространства, а морфизмами — L_4 -отображения.

3. Контравариантный функтор из $\mathbb{C}_4$ в $\mathbb{BL}_4$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [2, определение 3.1]. Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — L_4 -пространство. Подмножество $I \subseteq X \cup Y$ называется *идеалом* в $\mathbb{S}$, если $I = \downarrow I$ относительно частичного порядка $\leq$ и выполняется следующее условие:

$$\text{если } f(y) = (a, b) \text{ в } \mathbb{S} \text{ и } a, b \in I, \text{ то } y \in I.$$

Как и в работе [2], мы рассматриваем множество $F(\mathbb{S})$ всех идеалов в $\mathbb{S}$ как полную $(0, 1)$ -решетку, в которой $\emptyset$ является наименьшим, а $X \cup Y$ — наибольшим элементом.

Следующие утверждения могут быть установлены так же, как и в [2, разд. 3]. При этом отметим, что доказательство утверждения (ii) леммы 2 ниже практически дословно повторяет доказательство утверждения (i) из [2, утверждение 3.2] и использует свойства (s3-d,e) из определения L_4 -пространства.

Лемма 2. Для семейства $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ идеалов в $\mathbb{S}$ справедливы следующие утверждения.

- (i) $\bigwedge_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} Z_i$.
- (ii) $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b) \text{ и } a, b \in \bigcup_{i \in I} Z_i\}$.
- (iii) Если семейство $\{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ направлено вверх относительно $\subseteq$, то $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i$.

Лемма 3. Пусть Z — непустой идеал в $\mathbb{S}$.

- (i) Z является вполне $\vee$ -неразложимым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X \cup Y$.
- (ii) Z является вполне $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X$.
- (iii) Если $z \in X \cup Y$, то идеал $\downarrow z$ $\vee$ -прост в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $z \in X$.

Предложение 1. Если $\mathbb{S} — L_4$ -пространство, то $F(\mathbb{S})$ является биалгебраической решеткой.

Предложение 2. Если $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle — L_4$ -пространство, то $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 3 имеем

$$CJ(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in X \cup Y\},$$

$$CJ_P(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in X\},$$

$$CJ_{NP}(F(\mathbb{S})) = \{\downarrow z \mid z \in Y\}.$$

Поэтому, принимая во внимание лемму 3(iii), заключаем, что для любого элемента $x \in X$ идеал $\downarrow x$ не имеет нетривиального покрытия в $F(\mathbb{S})$. Более того, согласно леммам 2(ii) и 3(i) если $y \in Y$, то единственное минимальное покрытие идеала $\downarrow y$ — это покрытие $\downarrow y \subseteq \downarrow a \vee \downarrow b$, где $f(y) = (a, b)$ в $\mathbb{S}$. Таким образом, решетка $F(\mathbb{S})$ 2-дистрибутивна согласно [15, 14], см. также [13, лемма 2].

По предложению 1 $F(\mathbb{S})$ является биалгебраической J -решеткой для множества $J = CJ(F(\mathbb{S}))$. В силу [3, следствие 5] (см. также [13, лемма 3]) $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет тождеству (C_1) .

Предположим теперь, что $y \in Y$ и $f(y) = (a, b)$. По условию (s3) определения 1 $\downarrow b$ является $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$, поэтому решетка $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет условию (ii) из [13, предложение 2]. В силу [13, предложение 2] это означает, что решетка $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет тождеству (M_w) . Таким образом, $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{SP}(L_4)$ в силу [13, теорема 1]. $\square$

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f \rangle — L_4$ -пространства, и пусть $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}' — L_4$ -отображение. Как и в работе [2], для идеала Z' в $\mathbb{S}'$ полагаем

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in X \cup Y \mid \varphi(z) \in Z'\} \cup \{z \in Y \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}.$$

Рассмотрим отображение

$$F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S}), \quad F(\varphi): Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z').$$

В точности так, как и в доказательстве [2, предложение 3.4], получаем

Предложение 3. Для L_4 -пространств $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ и для L_4 -отображения $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ отображение $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$ является полным решеточным гомоморфизмом.

Следующее утверждение имеет такое же доказательство, как и [2, следствие 3.5].

Следствие 1. $F: \mathbb{C}_4 \rightarrow \mathbb{BL}_4$ является контравариантным функтором.

4. Контравариантный функтор из $\mathbb{BL}_4$ в $\mathbb{C}_4$

Следуя идее из работы [2], для произвольной решетки $L \in \mathbb{BL}_4$ полагаем

$$G(L) = \langle CJ_P(L), CJ_{NP}(L), \leq, f \rangle,$$

где частичный порядок $\leq$ унаследован из L , а для произвольного элемента $y \in CJ_{NP}(L)$ справедливо равенство $f(y) = (a, b)$ в случае, когда $y \leq a \vee b$ является единственным минимальным покрытием y в L таким, что $b \in CJ_P(L)$ и $b \not\leq y$ (см. предложения 2, 3, лемму 3 и теорему 1 из работы [13]).

Предложение 4. Если $L \in \mathbb{BL}_4$, то $G(L) \in \mathbb{C}_4$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что функция f определена корректно в силу предложений 2(ii) и 3 и теоремы 1 из [13]. Более того, ясно, что структура $G(L)$ удовлетворяет условиям (s1), (s2) определения 1.

Покажем, что $G(L)$ удовлетворяет и условию (s3). Для этого предположим, что $f(y) = (a, b)$ для некоторого $y \in Y$. По нашему определению структуры $G(L)$, приведенному выше, заключаем, что $y \leq a \vee b$ является минимальным покрытием элемента y в L таким, что $b \in CJ_P(L)$ и $b \not\leq y$. Более того, $y \not\leq \{a, b\}$, а $(a, b) \in (CJ_P(L) \cup CJ_{NP}(L)) \times CJ_P(L)$, поэтому условие (s3-a) выполнено. Если $a \in CJ_P(L)$, то $a < y$ в силу [13, предложение 3]. В силу того же предложения 3 из работы [13] и нашего определения функции f в $G(L)$ заключаем, что $a \leq y \vee b$ является минимальным покрытием в случае, когда $a \notin CJ_P(L)$; т. е. $f(a) = (y, b)$. Следовательно, условия (s3-b) и (s3-c) выполнены.

Далее, если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in CJ(L)$, то $y \leq a \vee b \leq z$ и условие (s3-d) выполнено. Наконец, пусть элемент $z \in CJ(L)$ таков, что $z \leq y$; в этом случае $z \leq y \leq a \vee b$ в L . Если покрытие $z \leq a \vee b$ тривиально, то $z \ll \{a, b\}$. Если же это покрытие нетривиально, то $z \in CJ_{NP}(L)$ и $\{u, v\} \ll \{a, b\}$, где $z \leq u \vee v$ является единственным минимальным покрытием элемента z в L (см. [13, лемма 3]). Таким образом, условие (s3-e) также выполнено, а структура $G(L)$ действительно является L_4 -пространством. $\square$

Для полных решеток L, M и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ рассмотрим следующее отображение (см. [14, 2]):

$$\beta_g: L \rightarrow M, \quad \beta_g: a \mapsto \bigwedge \{b \in M \mid a \leq g(b)\}.$$

Лемма 4 [2, лемма 4.2]. Пусть L, M — биалгебраические решетки, и пусть $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом. Справедливы следующие утверждения:

- (i) $a \leq g\beta_g(a)$ для всех $a \in L$ и $\beta_g g(b) \leq b$ для всех $b \in M$;
- (ii) $g\beta_g g(b) = g(b)$ для всех $b \in M$;
- (iii) $\beta_g g\beta_g(a) = \beta_g(a)$ для всех $a \in L$;
- (iv) $\beta_g(\bigvee_{i \in I} a_i) = \bigvee_{i \in I} \beta_g(a_i)$ для всех $a_i \in L, i \in I$;

- (v) если $x \in \text{CJ}_P(L)$, то $\beta_g(x) \in \text{CJ}_P(M)$;
- (vi) для каждого $b \in L$ с условием $\beta_g(b) \in \text{CJ}(M)$ найдется $y \in \text{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(b) = \beta_g(y)$; более того, $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$, если $\beta_g(b) \in \text{CJ}_{NP}(M)$;
- (vii) если гомоморфизм g разнозначен, то для каждого $b \in \text{CJ}(M)$ существует $a \in \text{CJ}(L)$ такой, что $\beta_g(a) = b$;
- (viii) если g является отображением «на», то $\beta_g(a) \in \text{CJ}(M)$ для каждого $a \in \text{CJ}(L)$, а ограничение отображения β_g на $\text{CJ}(L)$ является разнозначным отображением из $\text{CJ}(L)$ в $\text{CJ}(M)$.

Лемма 5. Пусть L, M — биалгебраические решетки, и пусть $g: M \rightarrow L$ является полным гомоморфизмом. Пусть также элемент $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ таков, что $\mathfrak{M}_L(y) = \{\{a, b\}\}$. Справедливы следующие утверждения:

- (i) если $\beta_g(y) \in \text{CJ}_{NP}(M)$, то $\mathfrak{M}_M(\beta_g(y)) = \{\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}\}$;
- (ii) если $\beta_g(y) \notin \text{CJ}(M)$, то множество $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$ является антицепью и $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение (i) следует из [16, предложение 8.1(3)].

(ii) Согласно работе [16] отображение β_g является морфизмом в категории верхних полурешеток, дуальным полному гомоморфизму решеток g . Таким образом, применяя предложение 8.1(3) из [16], имеем $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ и $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}(M)$. Если $\beta_g(a) \leq \beta_g(b)$, то

$$\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M),$$

что невозможно в силу нашего предположения. Таким образом, $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(b)$. Аналогично получаем, что $\beta_g(b) \not\leq \beta_g(a)$, и множество $\{\beta_g(a), \beta_g(b)\} \subseteq \text{CJ}(M)$ является антицепью.

Установим теперь, что элементы $\beta_g(a)$ и $\beta_g(b)$ просты. Действительно, пусть $\beta_g(a) \leq u_0 \vee u_1$ для некоторых $u_0, u_1 \in M$; тогда $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) \leq u_0 \vee u_1 \vee \beta_g(b)$. По лемме 4(i) получаем, что $y \leq g\beta_g(y) \leq g(u_0) \vee g(u_1) \vee g\beta_g(b)$. Если $y \leq g\beta_g(b)$, то $\beta_g(y) \leq \beta_g g\beta_g(b) = \beta_g(b) \leq \beta_g(y)$ по лемме 4, откуда получаем включение $\beta_g(y) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M)$, которое противоречит нашему предположению. Следовательно, $y \not\leq g\beta_g(b)$. Если $y \leq g(u_i)$ для некоторого $i < 2$, то $\beta_g(a) \leq \beta_g(y) \leq u_i$.

В противном случае $y \leq g(u_0) \vee g(u_1) \vee g\beta_g(b)$ является нетривиальным покрытием. Поскольку L является $\text{CJ}(L)$ -решеткой, а $\{a, b\}$ — единственное минимальное покрытие элемента y , имеем $\{a, b\} \ll \{g(u_0), g(u_1), g\beta_g(b)\}$. Если $a \leq g\beta_g(b)$, то $\beta_g(a) \leq \beta_g g\beta_g(b) = \beta_g(b)$, поэтому

$$\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}(M),$$

что противоречит нашему предположению. Следовательно, $a \leq g(u_i)$ для некоторого $i < 2$ и поэтому $\beta_g(a) \leq u_i$. В любом случае мы получаем, что $\beta_g(a) \leq u_i$ для некоторого $i < 2$. Это означает, что $\beta_g(a)$ является вполне простым элементом, что и требовалось. Похожим образом можно установить, что элемент $\beta_g(b)$ также вполне прост. $\square$

Для решеток $L, M \in \mathbb{BL}_4$ и полного гомоморфизма $g: M \rightarrow L$ мы определяем отображение $\mathbf{G}(g): \mathbf{G}(L) \rightarrow \mathbf{G}(M)$ в точности так, как это сделано в работе [2]. Для $z \in \text{CJ}(L)$ полагаем

$$\mathbf{G}(g)(z) = \begin{cases} \beta_g(z), & \text{если } \beta_g(z) \in \text{CJ}(M), \\ \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, & \text{если } \beta_g(z) \notin \text{CJ}(M) \text{ и } \mathfrak{M}_L(z) = \{\{a, b\}\}. \end{cases}$$

Предложение 5. Пусть $L, M \in \mathbb{BL}_4$, и пусть $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ является L_4 -отображением.

Доказательство. Вспоминаем определение 1. Ясно, что условие (m1) выполнено для $G(g)$. Условие (m2) следует из леммы 4(iv), а условие (m3) следует из леммы 4(v).

Чтобы доказать, что выполнено условие (m4), рассмотрим произвольный элемент $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ с условием $\mathfrak{M}_L(y) = \{\{a, b\}\}$, где $b \in \text{CJ}_P(L)$ таков, что $b \not\leq y$; т. е. $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$. По лемме 4(v) имеем

$$G(g)(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}_P(M).$$

Если $G(g)(y) \in \text{CJ}_P(M)$, то

$$G(g)(y) = \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$$

в силу леммы 4(iv), поэтому

$$G(g)(y) \ll \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\}.$$

Если $G(g)(a) = \beta_g(a)$, то $G(g)(y) \ll \{G(g)(a), G(g)(b)\}$, и заключение условия (m4-a) выполнено. Если же $G(g)(a) \neq \beta_g(a)$, это означает в силу определения $G(g)$, что $\beta_g(a) \notin \text{CJ}(M)$ и $G(g)(a) = \{\beta_g(y), \beta_g(b)\} = \{G(g)(y), G(g)(b)\}$, поскольку $\mathfrak{M}_L(a) = \{\{y, b\}\}$ в силу предложения 3 и теоремы 1 из [13]. Очевидным образом $G(g)(y) \ll G(g)(a)$, и заключение условия (m4-a) также выполнено.

Для доказательства выполнения условия (m4-b) для $G(g)$ предположим, что $G(g)(y) \in \text{CJ}_{NP}(M)$. В силу леммы 5(i) имеем $\mathfrak{M}_M(\beta_g(y)) = \{\{\beta_g(a), \beta_g(b)\}\}$. Кроме того, в силу равенства $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$ и леммы 4(v) имеем включение $G(g)(b) = \beta_g(b) \in \text{CJ}_P(M)$. Предположим, что $\beta_g(b) \leq \beta_g(y)$. Если $\beta_g(a) \leq \beta_g(y)$, то в силу леммы 5(i) имеем $\beta_g(a) \vee \beta_g(b) \leq \beta_g(y) \leq \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$, поэтому $\beta_g(y) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b)$ и $\beta_g(y) \in \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}$ в силу неразложимости элемента $\beta_g(y)$, что противоречит лемме 5(i). Таким образом, $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(y)$, поэтому $a \not\leq y$ по лемме 4(iv). Если $a \in \text{CJ}_P(L)$, то в силу включений $a, b \in \text{CJ}_P(L)$ и только что установленного неравенства $a \not\leq y$ по предложению 3 из [13] мы имели бы неравенство $b \leq y$, что невозможно, так как $f(y) = (a, b)$ и поэтому $b \not\leq y$. Следовательно, $a \in \text{CJ}_{NP}(L)$ и $\mathfrak{M}_L(a) = \{\{y, b\}\}$ в силу [13, предложение 3]. По лемме 4(iv) получаем $\beta_g(a) \leq \beta_g(y) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y)$. Однако выше мы установили, что $\beta_g(a) \not\leq \beta_g(y)$. Полученное противоречие показывает, что предположение о том, что $\beta_g(b) \leq \beta_g(y)$, неверно. Следовательно, $\beta_g(b) \not\leq \beta_g(y)$, поэтому $f(\beta_g(y)) = (\beta_g(a), \beta_g(b))$, и условие (m4-b) выполнено.

Далее, если $G(g)(y) \notin \text{CJ}(M)$, то $y \in \text{CJ}_{NP}(L)$ и $f(y) = (a, b)$ в $G(L)$. Таким образом, множество

$$G(g)(y) = \{\beta_g(a), \beta_g(b)\} = \{G(g)(a), G(g)(b)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$$

является антицепью по лемме 5(ii). Выберем произвольный элемент $z \in \text{CJ}(L)$ такой, что $y \leq z$. Тогда

$$G(g)(a) \vee G(g)(b) = \beta_g(a) \vee \beta_g(b) = \beta_g(y) \leq \beta_g(z).$$

Если $\beta_g(z) \in \text{CJ}(M)$, то

$$G(g)(a), G(g)(b) \leq \beta_g(z) = G(g)(z).$$

Если $\beta_g(z) \notin \text{CJ}(M)$, то $z \in \text{CJ}_{NP}(L)$ по лемме 4(v); пусть $z \leq c \vee d$ — единственное минимальное покрытие элемента z в L . По лемме 5(ii) имеем $G(g)(z) = \{\beta_g(c), \beta_g(d)\} \subseteq \text{CJ}_P(M)$. Следовательно,

$$G(g)(a), G(g)(b) \leq \beta_g(z) = \beta_g(c) \vee \beta_g(d) = G(g)(c) \vee G(g)(d).$$

Поскольку элементы $G(g)(a)$ и $G(g)(b)$ оба просты, заключаем в силу неравенств $G(g)(a), G(g)(b) \leq G(g)(c) \vee G(g)(d)$, что

$$\{G(g)(a), G(g)(b)\} \ll \{G(g)(c), G(g)(d)\} = G(g)(z),$$

и условие (m4-c) выполнено. $\square$

Доказательство следующего утверждения повторяет доказательство [4, предложение 13], см. также доказательство [2, предложение 4.6].

Предложение 6. $G: \mathbb{BL}_4 \rightarrow \mathbb{C}_4$ является контравариантным функтором.

5. Основной результат

Доказательство следующей теоремы использует те же самые аргументы, что и доказательства предложений 5.1 и 5.3 из работы [2]. В этом доказательстве применяются те же самые естественные изоморфизмы ξ и η , что и в доказательстве предложений 5.1 и 5.3 из [2], где

$$\xi_S: \text{GF}(S) \rightarrow S; \quad \xi_S: \downarrow z \mapsto z; \quad \eta_L: \text{FG}(L) \rightarrow L; \quad \eta_L: I \mapsto \bigvee I.$$

Теорема 1. Функторы G и F устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$.

Как и в [2, с. 199], будем говорить, что L_4 -морфизм $\varphi: S \rightarrow S'$ сюръективен, если для любого $z' \in X' \cup Y'$ найдется $z \in X \cup Y$ такой, что $\varphi(z) = z'$. Кроме того, L_4 -морфизм φ инъективен, если $\varphi(X \cup Y) \subseteq X' \cup Y'$ и неравенство $\varphi(z_0) \leq \varphi(z_1)$ влечет неравенство $z_0 \leq z_1$ для произвольных элементов $z_0, z_1 \in X \cup Y$.

По аналогии со следствием 5.5 из [2] получаем такое утверждение.

Следствие 2. Справедливы следующие утверждения.

- (i) Сюръективные L_4 -морфизмы соответствуют по дуальности разнозначным полным решеточным гомоморфизмам и наоборот.
- (ii) Инъективные L_4 -морфизмы соответствуют по дуальности сюръективным полным решеточным гомоморфизмам и наоборот.
- (iii) Раздельные объединения L_4 -пространств соответствуют по дуальности декартовым произведениям решеток из $\mathbb{BL}_4$ и наоборот.

Пусть $(\mathbb{C}_4)_{fin}$ и $(\mathbb{BL}_4)_{fin}$ — полные подкатегории в категориях $\mathbb{C}_4$ и $\mathbb{BL}_4$ соответственно, объектами которых являются в точности все конечные объекты из больших категорий. Из определения функторов F и G , а также теоремы 1 получаем

Следствие 3. Категории $(\mathbb{C}_4)_{fin}$ и $(\mathbb{BL}_4)_{fin}$ дуально эквивалентны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Dziobiak W., Schwedfsky M. V. Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract // Bull. Sec. Logic. 2022. V. 51, N 3. P. 329–344.
2. Дзебяк В., Швидефски М. В. Дуальность для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $(0, 1)$ -решеток, порожденному пентагоном // Алгебра и логика. 2024. Т. 63, № 2. С. 167–208.

3. Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V., Sultankulov K. D. The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis // Sib. Electron. Math. Rep. 2022. V. 19, N 2. P. 902–911.
4. Башеева А. О., Швидефски М. В. Квазимногообразие $\mathbf{SP}(L_6)$. II. Результат о дуальности // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 446–454.
5. Изьюрова А. Е., Швидефски М. В. Многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$. II. Дуальность // Математика и теоретические компьютерные науки. 2026. Т. 4, № 1. С. 67–91.
6. Изьюрова А. Е., Швидефски М. В. Многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$: базис тождеств // Математика и теоретические компьютерные науки. 2024. Т. 2, № 3. С. 53–62.
7. Izyurova A. E., Schwidefsky M. V. A duality for the variety $\mathbf{SP}(M_3)$ // Lobachevskii J. Math. 2025. V. 46, N 12. P. 6125–6142.
8. Kadyrova O. A., Schwidefsky M. V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases // Sib. Electron. Math. Rep. 2023. V. 20, N 1. P. 62–71.
9. Kadyrova O. A., Schwidefsky M. V. Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. Dualities // Lobachevskii J. Math. 2026. V. 47, N 4. P. 1572–1589.
10. Freese R., Ježek J., Nation J. B. Free lattices. Providence RI: Am. Math. Soc., 1995. (Math. Surveys Monogr.; V. 42).
11. McKenzie R. N. Equational bases and non-modular lattice varieties // Trans. Am. Math. Soc. 1972. V. 174. P. 1–43.
12. Jipsen P., Rose H. Varieties of lattices. Berlin; Heidelberg: Springer, 1992. (Lecture Notes Math.; V. 1533).
13. Basheyeva A. O., Schwidefsky M. V. The lattice variety generated by L_4 . I // Lobachevskii J. Math. 2026. V. 47, N 3. P. 1326–1334.
14. Nation J. B. An approach to lattice varieties of finite height // Algebra Univers. 1990. V. 27, N 4. P. 521–543.
15. Huhn A. P. Schwach distributive Verbände // Acta Sci. Math. (Szeged). 1972. V. 33. P. 297–305.
16. Dziobiak W., Schwidefsky M. V. New results for algebraic lattices // Algebra and Logic. 2025. V. 64, N 3. P. 135–143.

Поступила в редакцию 5 февраля 2026 г.

После доработки 22 июня 2026 г.

Принята к публикации 22 июня 2026 г.

Башеева Айну́р Орынбасаровна (ORCID 0000-0002-9124-0055)
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Казымукан, 13, Астана 010008, Казахстан
basheyeva3006@gmail.com

Швидефски Марина Владимировна (ORCID 0000-0003-4804-8073)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
m.schwidefsky@g.nsu.ru