

КВАЗИРЕГУЛЯРНОСТЬ И МНОГОЗНАЧНАЯ КВАЗИМЁБИУСОВОСТЬ В R^n

В. В. Асеев

Аннотация. Доказана следующая теорема. Для квазирегулярности отображения областей в R^n достаточно наличия верхней оценки искажения птолемеевой характеристики обобщенных тетрад у обратного (многозначного) отображения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.504

Ключевые слова: квазиконформность, квазирегулярность, квазимероморфность, квазимёбиусовость, обобщенная тетрада, птолемеева характеристика, многозначная квазимёбиусовость.

Введение

Данная статья служит продолжением работ [1–4]. Приведем некоторые пояснения по поводу используемой терминологии.

КВАЗИРЕГУЛЯРНЫЕ И КВАЗИМЕРОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ. Распространив аналитическое определение квазиконформности (см. например, [5, 4.2]) на случай непрерывных (не обязательно инъективных) отображений областей в $\overline{R}^n$, Ю. Г. Решетняк [6] ввел в рассмотрение класс отображений с ограниченным искажением. В частности, он установил, что непостоянные отображения этого класса являются открытыми и дискретными. Результаты изучения дифференциальных свойств таких отображений были представлены в монографии Ю. Г. Решетняка [7]. С 1969 г. к изучению отображений с ограниченным искажением подключились финские математики Мартио, Рикман и Вяйсяля [8–10]. Акцентируя внимание на метрических и топологических свойствах, они назвали такие отображения «квазирегулярными» и предложили в [8] удобное «метрическое определение» квазирегулярности непрерывного открытого дискретного отображения областей в $\overline{R}^n$ (см. ниже § 2), приводящее к тому же классу отображений, что и у Ю. Г. Решетняка. Благодаря инвариантности метрического определения относительно мёбиусовых преобразований, свойство квазирегулярности естественно распространяется на отображения областей в $\overline{R}^n$ и называется «квазимероморфностью» (см. [9, с. 3]). В случае инъективных отображений квазимероморфность тождественна квазиконформности.

КВАЗИМЁБИУСОВЫ ОТОБРАЖЕНИЯ. Этим термином Вяйсяля [11] наделил инъективные отображения в метрических пространствах, ограниченно искажающие абсолютное двойное отношение четверки точек. Свойство квазимёбиусовости является мёбиусово-инвариантной модификацией свойства квазисиммет-

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0026).

ричности, рассмотренного ранее в [12], и может быть использовано при изучении инъективных отображений в произвольных полуметрических пространствах (в том числе в дискретных пространствах). В $\overline{R}^n$ связь между квазимёбиусовостью и квазиконформностью выражена следующим образом:

- (а) любое квазимёбиусово отображение области является квазиконформным [11, теорема 5.2];
- (b) любое квазиконформное отображение области является локально квазимёбиусовым [11, с. 232];
- (с) квазиконформное отображение всего пространства $\overline{R}^n$ на себя является квазимёбиусовым [11, с. 232].

ПТОЛЕМЕЕВА ХАРАКТЕРИСТИКА ТЕТРАДЫ. Упорядоченная четверка попарно различных точек, разбитая на две пары, называется *тетрадой*. Птолемеева характеристика $\beta(T)$ тетрады T в пространстве $\overline{R}^n$ есть мёбиусово-инвариантная величина, определяемая формулой (1.0.1). При любом η -квазимёбиусовом отображении $f : D \rightarrow f(D) \subset \overline{R}^n$ области $D \subset \overline{R}^n$ для каждой тетрады T в D выполняется неравенство $\beta(f(T)) \leq \omega(\beta(T))$ с контрольной функцией $\omega(t) = 2\eta(t)$ (см. [13, утверждение 3.3]). В случае инъективного отображения f области $D \subset \overline{R}^n$ верно и обратное утверждение: выполнение неравенства $\beta(f(T)) \leq \omega(\beta(T))$ с контрольной функцией ω влечет η -квазимёбиусовость f с контрольной функцией η , зависящей лишь от ω (см. [14, теорема 6.2]).

ОБОБЩЕННЫЕ ТЕТРАДЫ И СВОЙСТВО BAD. В [13] было введено понятие обобщенного угла $\Phi = (A_1, A_2; B_1, B_2)$, стороны A_1, A_2 и вершины B_1, B_2 которого являются множествами в полуметрическом пространстве (X, ρ) , у которых $B_1 \neq \emptyset \neq B_2$ и $\#(B_1 \cup B_2) \geq 2$. В частном случае, когда A_1, A_2, B_1, B_2 попарно не пересекаются, для обобщенного угла используется термин «обобщенная тетрада» (см. [1]). В случае обобщенной тетрады вместо величины $\alpha(\Psi)$ обобщенного угла Ψ , введенной в [13, (4.1.1)], оказалось удобнее использовать числовую характеристику $\beta(\Psi) := 1/\alpha(\Psi)$, названную «птолемеевой характеристикой» (обобщенной) тетрады (см. ниже формулы (1.0.1) и (1.0.2)). В [15, § 4] рассматривались многозначные отображения $F : X \rightarrow 2^Y$ птолемеевых полуметрических пространств. Свойство гиперинъективности $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (F(x_1) \cap F(x_2) = \emptyset)$ гарантирует, что образ $F(\Psi)$ обобщенного угла Ψ в X является обобщенным углом. Выполнение для любого обобщенного угла Ψ в X оценки $\alpha(F(\Psi)) \geq \eta(\alpha(\Psi))$ искажения величин обобщенных углов с некоторой контрольной функцией η было названо свойством η -BAD (bounded angular distortion). Свойство η -BAD имеется, например, у отображений, обратных к проекции пространства $\overline{R}^n$ на подпространство [15, теорема 8.1], а также для отображений, обратных к координатным функциям квазирегулярного отображения $f : \overline{R}^n \rightarrow \overline{R}^n$ (см. [16, теорема 2]). Топологические и метрические свойства многозначных отображений со свойством BAD изучались в [14, 17].

В терминах птолемеевой характеристики обобщенных тетрад свойство ω -BAD для многозначного гиперинъективного отображения F означает выполнение оценки $\beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi))$ для любой тетрады Ψ и ее образа — обобщенной тетрады $F(\Psi)$. В пространстве $\overline{R}^n$ при условии $\#F(y) \leq N < \infty$ для всех y это свойство упоминается в [1, 3, 4] как *многозначная квазимёбиусовость* и сводится к обычной квазимёбиусовости в случае однозначных отображений областей в $\overline{R}^n$.

Цель наших исследований — установить связь между свойством квазиморфности отображения $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset \overline{R}^n$ области $D \subset \overline{R}^n$ и свойством

многозначной квазимёбиусовости обратного отображения $F = f^{-1}$ по аналогии с вышеупомянутыми утверждениями (а), (b) и (с) о связи между квазиконформностью и квазимёбиусовостью.

В [2, теорема 1.7] получен следующий аналог утверждения (с): для семейства всех K -квазимероморфных отображений $f : \overline{R}^n \rightarrow \overline{R}^n$, у которых $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \overline{R}^n$, существует контрольная функция $\omega_{K,N} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, зависящая только от K, N и такая, что

$$\beta(f^{-1}(\Psi)) \leq \omega_{K,N}(\beta(\Psi))$$

для любой тетрады $\Psi = (a_1, a_2; b_1, b_2)$ в $\overline{R}^n$.

Основной результат данной статьи (теорема 5.1) — это обобщение утверждения (а), полученное в следующей форме. Пусть отображение $f : D \rightarrow \Omega$ областей в $\overline{R}^n$ таково, что обратное к нему отображение $F = f^{-1}$ является многозначным квазимёбиусовым с контрольной функцией $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$. Тогда f является K^* -квазирегулярным отображением с $K^* \leq \omega(3)$.

§ 1. Терминология и обозначения

Приведем (с незначительными изменениями в символике) определения и утверждения из [3, § 1], относящиеся к многозначным отображениям со свойством BAD, т. е. со свойством многозначной квазимёбиусовости.

Семейство всех непустых компактных подмножеств в $\overline{R}^n$ обозначаем через $\text{Comp}(\overline{R}^n)$. Через $\sigma(\cdot, \cdot)$ обозначаем *хордовое расстояние* в $\overline{R}^n$, определяемое формулой

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \cdot \sqrt{1 + |y|^2}} \text{ при } x, y \in R^n; \\ \sigma(x, \infty) &= \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}; \quad \sigma(\infty, \infty) = 0. \end{aligned}$$

Тетрадой называем четверку попарно различных точек в $\overline{R}^n$, разбитую на две пары: $(a_1, a_2; b_1, b_2)$. Ее *птолемеева характеристика* есть величина

$$\beta(a_1, a_2; b_1, b_2) = \frac{\sigma(a_1, b_1) \cdot \sigma(a_2, b_2) + \sigma(a_1, b_2) \cdot \sigma(a_2, b_1)}{\sigma(a_1, a_2) \cdot \sigma(b_1, b_2)}. \quad (1.0.1)$$

Заметим, что если $\{a_1, a_2, b_1, b_2\} \subset R^n$, то в формуле (1.0.1) хордовые расстояния можно заменить расстояниями в евклидовой метрике.

Обобщенной тетрадой называем четверку компактных попарно не пересекающихся множеств в $\overline{R}^n$, разбитую на две пары: $(A_1, A_2; B_1, B_2)$. Ее птолемеева характеристика задается формулой

$$\beta(A_1, A_2; B_1, B_2) = \max_{u_1 \in A_1, u_2 \in A_2} \left\{ \min_{v_1 \in B_1, v_2 \in B_2} \beta(u_1, u_2; v_1, v_2) \right\}. \quad (1.0.2)$$

Для натурального $N \geq 1$, открытого множества $\Omega \subset R^n$ и гомеоморфизма $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ рассматриваем семейство $QM^*(\omega, N, \Omega)$ всех многозначных отображений $F : \Omega \rightarrow \text{Comp}(R^n)$ таких, что

(1.0.3) $F(\Omega) := \bigcup \{F(y) : y \in \Omega\}$ — открытое множество в R^n ;

(1.0.4) (гиперинъективность) $(y_1 \neq y_2) \Rightarrow (F(y_1) \cap F(y_2) = \emptyset)$;

(1.0.5) $\sup \{\#F(y) : y \in \Omega\} \leq N$;

(1.0.6) (свойство ω -BAD) для любой тетрады $(a_1, a_2; b_1, b_2)$ в Ω и ее образа $(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2))$ выполняется оценка

$$\beta(F(a_1), F(a_2); F(b_1), F(b_2)) \leq \omega(\beta(a_1, a_2; b_1, b_2)). \quad (1.0.7)$$

Отображения класса $QM^*(\omega, N, \Omega)$ будем называть *многозначными квазимёбиусовыми* отображениями.

Полное доказательство следующего утверждения см. в [3, 1.1].

Утверждение 1.1. Любое отображение $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$ непрерывно как многозначное отображение (см. [18, § 18]) в любой точке $y_0 \in \Omega$. При этом левое обратное к нему отображение $f : F(\Omega) \rightarrow \Omega$ является непрерывным, открытым, замкнутым и дискретным.

Для заданного отображения $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$ положим $\Omega_k := \{y \in \Omega : \#F(y) \geq k\}$ и $\Sigma_k := \{y \in \Omega : \#F(y) = k\}$, где $k = 1, 2, \dots, N$. При этом $\Omega_1 = \Omega$.

Утверждение 1.2. При любом $k = 1, \dots, N$ множества Ω_k и $F(\Omega_k) = f^{-1}(\Omega_k)$ открыты в R^n . Множество $\Sigma_N = \Omega_N$ открыто, а каждое из множеств Σ_k при $1 \leq k < N$ либо пусто, либо замкнуто в Ω_k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В рассматриваемом случае число $H(y)$ — количество компонент множества $F(y)$ — совпадает с $\#F(y)$. Поэтому из [1, утверждение 2.0.2(ii)] следует, что Ω_k открыто в Ω . В силу того, что Ω открыто в R^n , множество Ω_k также открыто в R^n . В силу непрерывности отображения f множество $f^{-1}(\Omega_k)$ открыто в $f^{-1}(\Omega)$. Так как по условию (1.0.3) множество $f^{-1}(\Omega) = F(\Omega)$ открыто в R^n , то $f^{-1}(\Omega_k)$ также открыто в R^n .

Так как $\Sigma_k = \Omega_k \setminus \Omega_{k+1}$ при $1 \leq k < N$, то Σ_k замкнуто относительно Ω_k .

§ 2. Квазирегулярные отображения

В этом параграфе мы следуем [4, §1]. Для непрерывного открытого дискретного отображения $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset R^n$ открытого множества $D \subset R^n$ точка $x_0 \in D$ называется *точкой ветвления*, если не существует такой окрестности U точки x_0 , чтобы ограничение $f|_U$ было инъективным отображением. Множество всех точек ветвления отображения f обозначается символом B_f . Для точки $x_0 \in D$ и $r > 0$ символом $U(x_0, f, r)$ обозначается компонента открытого множества $f^{-1}(B(f(x_0), r))$, содержащая точку x_0 . При этом имеем

Утверждение 2.1 [8, 2.8, лемма 2.9]. Существует положительная функция $\sigma(x)$ на множестве D такая, что при любом $0 < r \leq \sigma(x)$ множество $U(x, f, r)$ имеет компактное замыкание в D и является канонической нормальной окрестностью точки x , т. е.

$$f(U(x, f, r)) = B(f(x), r); \quad f(\partial U(x, f, r)) = \partial f(U(x, f, r)) = \partial B(f(x), r).$$

При этом

$$\text{diam } U(x, f, r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow 0. \quad (2.1.1)$$

Основные свойства канонических нормальных окрестностей указаны в [8, 2.8, лемма 2.9] и приведены в [4, лемма 1.1].

Обратная линейная дилатация отображения f в точке $x_0 \in D$ есть величина (возможно, ∞)

$$H^*(x_0, f) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max\{|z - x_0| : z \in \partial U(x_0, f, r)\}}{\min\{|z - x_0| : z \in \partial U(x_0, f, r)\}}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 [8, теорема 4.14]. Непрерывное открытое дискретное отображение $f : D \rightarrow \Omega = f(D) \subset R^n$ области $D \subset R^n$ называется *K^* -квазирегулярным*, если величина $H^*(x, f)$ локально ограничена в D и $H^*(x, f) \leq K^*$ почти всюду в $D \setminus B_f$.

Утверждение 2.2 [8, лемма 2.11]. Если $D \subset R^n$ — открытое множество и $f : D \rightarrow R^n$ — непрерывное открытое дискретное отображение, то множество его точек ветвления имеет топологическую размерность $\dim B_f \leq n - 2$. Следовательно, для любой компоненты $G \subset D$ множество $G \setminus B_f$ связно и отображение f либо сохраняет ориентацию в G , либо меняет ее на противоположную.

Поэтому в классе открытых дискретных отображений условие сохранения ориентации в области D при определении 2.1 квазирегулярного отображения опущено, т. е. мы допускаем, что квазирегулярное отображение может обращать ориентацию в области D .

§ 3. Слабая квазисимметричность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 [19, определение 1.2]. Инъективное отображение $\varphi : A \rightarrow \varphi(A) \subset R^n$ множества $A \subset R^n$ называется *слабо (h, H) -квазисимметрическим* с константами $h > 0$ и $H \geq 1$, если для любой тройки попарно различных точек $\{x_1, x_2, x_3\} \subset A$ справедлива импликация

$$\left(\frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} \leq h \right) \implies \left(\frac{|\varphi(x_1) - \varphi(x_3)|}{|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|} \leq H \right).$$

Теорема 3.2. Пусть заданы $F \in QM^*(\omega, N, \Omega)$, $h > 1$ и $k \in \{1, \dots, N\}$. Тогда для любой точки $y_0 \in \Sigma_k$ с образом $F(y_0) = \{x_0^1, \dots, x_0^k\}$ существует такое положительное число $r_h < \min\{\sigma(x) : x \in F(y_0)\}$, что при любом $0 < r \leq r_h$ ограничение отображения F на множестве $\Sigma_k \cap B(y_0, r)$ распадается на k однозначных ветвей:

$$F|_{\Sigma_k \cap B(y_0, r)}(y) = \Phi_1(y) \cup \dots \cup \Phi_k(y),$$

каждая из которых осуществляет слабо (h, H) -квазисимметрическое отображение

$$\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r) \rightarrow F(\Sigma_k) \cap U(x_0^j, f, r)$$

с константой $H = \omega(3(1 + 2h))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольную точку $y_0 \in \Sigma_k$ и ее образ $F(y_0) = \{x_0^1, \dots, x_0^k\}$. Отметим какую-нибудь точку $z_0 \in \Omega \setminus \{y_0\}$ и ее образ $Z = F(z_0)$. Фиксируем $d_0 > 0$ такое, что

$$\text{dist}(F(y_0), Z) > d_0, \quad |x_0^i - x_0^j| > d_0$$

при всех $x_0^i \neq x_0^j$ из $F(y_0)$.

По утверждению 1.1 существует левое обратное к F отображение $f : F(\Omega) \rightarrow \Omega$, являющееся непрерывным открытым и дискретным. Применив утверждение 2.1 о существовании и свойствах канонических нормальных окрестностей, найдем достаточно малое $r_0 > 0$ такое, что

$$r_0 < \min\{\sigma(x_0^1), \sigma(x_0^2), \dots, \sigma(x_0^k)\}, \quad r_0 < |y_0 - z_0|/3; \quad \overline{B}(y_0, r_0) \subset \Omega_k,$$

а канонические нормальные окрестности $U_i := U(x_0^i, f, r_0)$ точек $x_0^1, \dots, x_0^k$ имеют настолько малые диаметры (см. (2.1.1)), что

$$\text{dist}(\overline{U}_i, \overline{U}_j) > d_0/3 \quad \text{при } i \neq j; \tag{3.2.1}$$

$$\text{dist}(\overline{U}_j, Z) > d_0/3 \quad \text{при всех } j = 1, \dots, k. \tag{3.2.2}$$

Положив $\Phi_i(y) := F(y) \cap U_i$ ($i = 1, \dots, k$) для всех $y \in B(y_0, r_0)$, получим k ветвей (в общем случае многозначных) отображения $F|_{B(y_0, r_0)}$. Так как $\#\Phi_i(y) = 1$ при $y \in \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$, то каждое из отображений Φ_i однозначно на множестве $\Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$.

Остается доказать, что каждое отображение Φ_i слабо $(h, \omega(3(1+2h)))$ -квазисимметрическое на $\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)$ при некотором $0 < r_h < r_0$.

Пусть задано $h > 1$. В шаре $B(y_0, r)$ радиуса $r < r_0$ рассмотрим произвольную тройку попарно различных точек $(y_1, y_2, y_3) \subset \Sigma_k \cap B(y_0, r)$, у которой

$$\frac{|y_1 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \leq h. \quad (3.2.3)$$

Найдем верхнюю оценку величины

$$\beta(y_1, y_2; y_3, z_0) = \frac{|y_1 - y_3| \cdot |y_2 - z_0| + |y_1 - z_0| \cdot |y_2 - y_3|}{|y_1 - y_2| \cdot |y_3 - z_0|}. \quad (3.2.4)$$

Так как $r < r_0 < |z_0 - y_0|/2$, то $|y_1 - z_0| \leq |z_0 - y_0| + r \leq (3/2)|z_0 - y_0|$ и аналогично $|y_2 - z_0| \leq (3/2)|z_0 - y_0|$. Кроме того,

$$|y_3 - z_0| \geq |z_0 - y_0| - |y_3 - y_0| \geq |z_0 - y_0| - r \geq (1/2)|z_0 - y_0|.$$

Используя указанные неравенства в выражении (3.2.4), получаем оценку

$$\begin{aligned} \beta(y_1, y_2; y_3, z_0) &\leq \frac{(3/2)|z_0 - y_0|}{(1/2)|z_0 - y_0|} \cdot \frac{|y_1 - y_3| + |y_2 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \\ &\leq 3 \cdot \frac{|y_1 - y_3| + (|y_2 - y_1| + |y_1 - y_3|)}{|y_1 - y_2|} = 3 \left(1 + 2 \frac{|y_1 - y_3|}{|y_1 - y_2|} \right). \end{aligned}$$

С учетом (3.2.3) приходим к оценке

$$\beta(y_1, y_2; y_3, z_0) \leq 3(1 + 2h). \quad (3.2.5)$$

Рассмотрим образ $F(\Psi) = (F(y_1), F(y_2); F(y_3), Z)$ тетрады $\Psi = (y_1, y_2; y_3, z_0)$ и отображение Φ_j при некотором $j \in \{1, \dots, k\}$.

Пусть $\Phi_j(y_1) = \{x_1\}$, $\Phi_j(y_2) = \{x_2\}$, $\Phi_j(y_3) = \{x_3\}$ (напомним, что Φ_j — однозначное отображение на $\Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$ и $\{y_1, y_2, y_3\} \subset \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$, поэтому мы можем в дальнейшем рассматривать $\Phi_j(y)$ при $y \in \Sigma_k \cap B(y_0, r_0)$ как точки в R^n). Тогда в силу формулы (1.0.2)

$$\begin{aligned} \beta(F(\Psi)) &\geq \beta(\{x_1\}, \{x_2\}; F(y_3), Z) = \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; v_1, v_2) \\ &= \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \frac{|x_1 - v_1| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - v_1|}{|x_1 - x_2| \cdot |v_1 - v_2|}. \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Так как $\text{diam}(U(x_0^j, f, r)) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ (это одно из свойств канонических нормальных окрестностей, отмеченное в [8, лемма 2.9]), найдется такое $r_h < r_0$, что

$$\text{diam}(U(x_0^j, f, r)) < \min \left\{ \frac{d_0}{3}, \frac{d_0}{3 \cdot \omega(3(1+2h))} \right\} \quad (3.2.7)$$

при любых $0 < r \leq r_h$ и $j \in \{1, \dots, k\}$.

Убедимся, что минимум по $v_1 \in F(y_3)$ в формуле (3.2.6) реализуется при $v_1 = x_3$.

Допустим, от противного, что этот минимум достигается в какой-то другой точке $\tilde{x}_3 \in F(y_3) \setminus \{x_3\}$. Тогда

$$\beta(F(\Psi)) \geq \min_{v_2 \in Z} \frac{|x_1 - \tilde{x}_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |\tilde{x}_3 - v_2|}.$$

Так как $x_1 \in U_j$, а $\tilde{x}_3 \in U_i$ с $i \neq j$, то (см.(3.2.1)) $|x_1 - \tilde{x}_3| > d_0/3$ и (см.(3.2.2)) $|x_1 - v_2| > d_0/3$ при любом $v_2 \in Z$. Кроме того, в силу (3.2.7) $|x_1 - x_2| \leq \text{diam}(U(x_0^j, f, r)) < d_0/(3\omega(3(1+2h)))$.

Следовательно, при любом $v_2 \in Z$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - \tilde{x}_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - \tilde{x}_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |\tilde{x}_3 - v_2|} &> \frac{d_0/3}{|x_1 - x_2|} \cdot \frac{|x_2 - v_2| + |x_2 - \tilde{x}_3|}{|\tilde{x}_3 - v_2|} \\ &\geq \frac{d_0 \cdot 3\omega(3(1+2h))}{3d_0} = \omega(3(1+2h)). \end{aligned}$$

Но тогда $\beta(F(\Psi)) > \omega(3(1+2h))$ и свойство ω -BAD (см.(1.0.6)) отображения F вместе с неравенством (3.2.5) дает противоречие:

$$\omega(3(1+2h)) < \beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi)) \leq \omega(3(1+2h)).$$

Следовательно (см. (3.2.6)),

$$\begin{aligned} \beta(F(\Psi)) &\geq \min_{v_1 \in F(y_3), v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; v_1, v_2) = \min_{v_2 \in Z} \beta(x_1, x_2; x_3, v_2) \\ &= \min_{v_2 \in Z} \frac{|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - x_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |x_3 - v_2|}. \end{aligned}$$

Из оценок (3.2.7) и (3.2.2) вытекает, что $|x_1 - x_3| \leq d_0/3 < |x_1 - v_2|$. Поэтому при любом выборе точки $v_2 \in Z$ имеем оценку

$$\begin{aligned} \frac{|x_1 - x_3| \cdot |x_2 - v_2| + |x_1 - v_2| \cdot |x_2 - x_3|}{|x_1 - x_2| \cdot |x_3 - v_2|} &\geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} \cdot \frac{|x_2 - v_2| + |x_2 - x_3|}{|x_3 - v_2|} \\ &\geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|}. \end{aligned}$$

Тем самым

$$\beta(F(\Psi)) \geq \frac{|x_1 - x_3|}{|x_1 - x_2|} = \frac{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_3)|}{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_2)|}.$$

Используя свойство ω -BAD отображения F и неравенство (3.2.5), получаем требуемую оценку для отображения Φ_j :

$$\frac{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_3)|}{|\Phi_j(y_1) - \Phi_j(y_2)|} \leq \beta(F(\Psi)) \leq \omega(\beta(\Psi)) \leq \omega(3(1+2h)) = H,$$

справедливую при любом выборе точек $\{y_1, y_2, y_3\}$ в $\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)$, удовлетворяющих условию $|y_1 - y_3|/|y_1 - y_2| \leq h$.

Значит, отображение $\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r_h) \rightarrow U(x_0^j, f, r_h)$ является слабо (h, H) -квазисимметрическим. Теорема доказана.

§ 4. Теорема об устранимости

Будем использовать следующую теорему об устранимости в классе квази-регулярных отображений в R^n .

Теорема 4.1 [4, теорема 3.1, следствие 3.2]. Пусть $f : D \rightarrow \Omega = f(D)$ — непрерывное открытое дискретное отображение области $D \subset R^n$ на область $\Omega \subset R^n$, и пусть $N = \max\{\#f^{-1}(y) : y \in \Omega\}$. Пусть множество $E \subset D$ замкнуто относительно D и при этом

- (i) ограничение $f|_{D \setminus E}$ является K^* -квазирегулярным отображением;
- (ii) для каждого $k \in \{1, \dots, N\}$ множество

$$E_k := \{x \in E : \#f^{-1}(f(x)) = k\}$$

либо пусто, либо любая точка $x_0 \in E_k$ имеет окрестность $U \subset D$ такую, что отображение $f|_{U \cap E_k}$ инъективно, а обратное к нему отображение является слабо (h, H) -квазисимметрическим с параметрами $h > 1$, $H \geq 1$.

Тогда отображение f будет $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным в области D , где $\tilde{K}^*$ зависит лишь от $\{K^*, h, H, N, n\}$.

Если при этом множество E имеет нулевую n -мерную меру Лебега, то f будет K^* -квазирегулярным в области D .

§ 5. Основная теорема

Основным результатом данной статьи является

Теорема 5.1. Пусть отображение $f : D \rightarrow \Omega$ области $D \subset R^n$ на область $\Omega \subset R^n$ таково, что $\#f^{-1}(y) \leq N$ для всех $y \in \Omega$. Если обратное к нему многозначное отображение $F = f^{-1}$ имеет свойство ω -BAD с некоторым гомеоморфизмом (контрольной функцией) $\omega : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, то f является K^* -квазирегулярным отображением с $K^* \leq \omega(3)$.

Частный случай этой теоремы был доказан в работе [3].

Утверждение 5.2 [3, лемма 3.4]. Пусть непрерывное открытое дискретное отображение $g : D' \rightarrow \Omega'$ области $D' \subset R^n$ на область $\Omega' \subset R^n$ таково, что $g^{-1} \in QM^*(\omega, N, \Omega')$ и $B_g = \emptyset$, т. е. g не имеет точек ветвления в области D' . Тогда g является $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным отображением с $\tilde{K}^* \leq \omega(3)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не нарушая общности, можно считать, что

$$N = \max\{\#f^{-1}(y) : y \in \Omega\}.$$

Множество B_f замкнуто относительно области D (см. [20, замечание 1.1]). Из непрерывности и замкнутости отображения f (см. утверждение 1.1) следует, что $f(B_f)$ замкнуто относительно Ω и $f^{-1}(f(B_f))$ замкнуто относительно D .

У непрерывного открытого дискретного отображения $\dim B_f = \dim f(B_f) \leq n - 2$ (см. [21, теорема 4.6]). Так как f к тому же замкнутое отображение (см. утверждение 1.1), то $\dim f^{-1}(f(B_f)) \leq n - 2$ (см. [22, теорема 5.5]). Более того (см. [20, следствие 2.3]),

$$\dim B_f = \dim f(B_f) = \dim f^{-1}(f(B_f)) \leq n - 2. \quad (5.2.1)$$

Множество в R^n с топологической размерностью $\leq n - 2$ не нарушает связности области. Поэтому из (5.2.1) следует, что $\Omega \setminus f(B_f)$ и $D \setminus f^{-1}(f(B_f))$ являются областями в R^n .

Положим $E := f^{-1}(f(B_f))$, $D' = D \setminus E$, $\Omega' = \Omega \setminus f(B_f)$, $g = f|_{D'} : D' \rightarrow \Omega'$, $g^{-1} = F|_{\Omega'}$. Так как $F|_{\Omega'} \in QM^*(\omega, N, \Omega')$ (выполняются все условия (1.0.3)–(1.0.6) с заменой Ω на Ω' и $B_g = \emptyset$), то отображение g , будучи левым обратным к $F|_{\Omega'}$, удовлетворяет условию (i) в теореме 4.1 с $K^* \leq \omega(3)$.

Теперь нужно убедиться, что выполняется условие (ii) в теореме 4.1.

Так как $\#F(y) = N$ при всех $y \in \Sigma_N$, то ограничение $F|_{\Sigma_N}$ удовлетворяет условиям утверждения [1, 2.4], в силу которого обратное отображение f является локальным гомеоморфизмом на множестве $F(\Sigma_N)$ и не имеет точек ветвления на этом множестве, т. е. $F(\Sigma_N) \cap B_f = \emptyset$.

Покажем, что множество $E_N = \{x \in f^{-1}(f(B_f)) : \#F(f(x)) = N\}$ пусто.

Допустим от противного, что нашлась точка $x \in E_N$, и рассмотрим образ $y = f(x)$ этой точки. Так как $\#F(y) = \#F(f(x)) = N$, то $y \in \Sigma_N = \Omega_N$.

Поскольку $x \in f^{-1}(f(B_f))$, то $y = f(x) \in f(B_f)$. Это означает, что $y = f(z)$ для некоторой точки $z \in B_f$. Так как $y = f(z) \in \Sigma_N$, точка y имеет в точности N прообразов (максимальное число прообразов) и все они лежат в области $F(\Sigma_N) = F(\Omega_N)$, не содержащей точек ветвления. Но тогда точка $z \in f^{-1}(y)$ — один из этих прообразов — не может быть точкой ветвления. Это противоречит выбору точки $z \in B_f$.

Полученное противоречие доказывает, что $E_N = \emptyset$.

Следовательно, $E = E_1 \cup \dots \cup E_{N-1} \cup E_N = E_1 \cup \dots \cup E_{N-1}$. Поэтому произвольно заданная точка $x_0 \in E$ лежит в некотором множестве $E_k = F(\Sigma_k)$, где $k \in \{1, \dots, N-1\}$. Значит, $y_0 = f(x_0) \in \Sigma_k$, и $F(y_0) = \{x_{01}, \dots, x_{0k}\}$.

Воспользовавшись утверждением 2.1, найдем достаточно малое $r_0 > 0$, для которого $r_0 < \min\{\sigma(x_{01}), \dots, \sigma(x_{0k})\}$ и канонические нормальные окрестности $U(x_{01}, f, r_0), \dots, U(x_{0k}, f, r_0)$ попарно не пересекаются. Для произвольно заданного $h > 1$ применим к точке $y_0 \in \Sigma_k$ теорему 3.2 и найдем $0 < r_h < r_0$ такое, что

$$F|_{\Sigma_k \cap B(y_0, r_h)}(y) = \Phi_1(y) \cup \dots \cup \Phi_k(y),$$

где каждая из однозначных ветвей

$$\Phi_j : \Sigma_k \cap B(y_0, r_h) \rightarrow F(\Sigma_k) \cap U(x_{0j}, f, r_h)$$

является слабо (h, H) -квазисимметрическим отображением с $H = \omega(3(1 + 2h))$. Тогда любая точка x_{0j} , где $j \in \{1, \dots, k\}$, имеет окрестность $U_j = U(x_{0j}, f, r_h)$, в которой отображение $f|_{U_j \cap E_k} = (\Phi_j|_{f(U_j \cap E_k)})^{-1}$ инъективно, а обратное к нему отображение Φ_j является слабо (h, H) -квазисимметрическим. Значит, выполняется условие (ii) в теореме 4.1, в силу которой отображение f является $\tilde{K}^*$ -квазирегулярным в области D с некоторым $\tilde{K}^*$, зависящим только от $\{K^*, h, H, n, N\}$.

Применив к квазирегулярному отображению $f : D \rightarrow \Omega$ последовательно [8, лемма 2.27, теорема 8.3, теорема 8.4], получаем равенства

$$0 = \text{mes } f(B_f) = \text{mes } B_f = \text{mes } f^{-1}(f(B_f)) = \text{mes } E.$$

Поскольку множество E имеет лебегову меру 0, заключительная часть теоремы 4.1 дает равенство $\tilde{K}^* = K^* \leq \omega(3)$, и отображение f является K^* -квазирегулярным во всей области D с $K^* \leq \omega(3)$.

Теорема 5.1 доказана.

Благодарность. Автор выражает искреннюю благодарность рецензенту за внимательное прочтение данной работы и за сделанные им замечания, способствовавшие значительному улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Асеев В. В. Многозначные квазимёбиусовы отображения на римановой сфере // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 3. С. 450–464.
2. Асеев В. В. Графические пределы квазимероморфных отображений и искажение характеристики тетрад // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 6. С. 1119–1131.
3. Асеев В. В. Птолемея характеристика тетрад и квазирегулярные отображения // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 5. С. 785–794.
4. Асеев В. В. Об устранимых особенностях для квазирегулярных отображений // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 3. С. 363–377.
5. Künzi H. P. Quasikonforme Abbildungen. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1960.
6. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением // Сиб. мат. журн. 1967. Т. 8, № 3. С. 629–658.
7. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.
8. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1969. N 448. P. 1–40.
9. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1970. N 465. P. 1–13.
10. Martio O., Rickman S., Väisälä J. Topological and metric properties of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. 1971. N 488. P. 1–31.
11. Väisälä J. QuasiMöbius maps // J. d'Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.
12. Tukia F., Väisälä J. Quasisymmetric embeddings of metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math. 1980. V. 5, N 1. P. 97–114.
13. Асеев В. В., Сычёв А. В., Тетенев А. В. Мёбиусово-инвариантные метрики и обобщенные углы в птолемеях пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 243–263.
14. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеях мёбиусовых структурах. II // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 5. С. 976–987.
15. Асеев В. В. Обобщенные углы в птолемеях мёбиусовых структурах // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 2. С. 241–256.
16. Aseev V. V. On coordinate vector-functions of quasiregular mappings // Sib. Electron. Math. Reports. 2018. V. 15. P. 768–772.
17. Асеев В. В. Многозначные отображения со свойством квазимёбиусовости. // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 5. С. 953–972.
18. Куратовский К. Топология. Т. 1, 2. М.: Мир, 1966, 1969.
19. Xiantao Wang, Qingshan Zhou. Quasimöbius maps, weakly quasimöbius maps and uniformly perfectness in quasi-metric spaces // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 2017. V. 42, N 1. P. 257–284.
20. Church Ph. T., Hemmingsen E. Light open maps on n -manifolds // Duke Math. J. 1960. V. 27, N 4. P. 527–536.
21. Rickman S. Quasiregular mappings. Berlin: Springer-Verl., 1993. (Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge/ A Series; V. 26).
22. Väisälä J. Discrete open mappings on manifolds // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. Math. 1967. N 392. P. 1–10.

Поступила в редакцию 6 октября 2025 г.

После доработки 9 июня 2026 г.

Принята к публикации 15 июня 2026 г.

Асеев Владислав Васильевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
aseevvv@yandex.ru, ase@math.nsc.ru