

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПЕРЕНОСА

Ю. А. Аминов

Аннотация. В евклидовых пространствах рассматриваются поверхности переноса, получаемые как сумма двух кривых. Внутренняя геометрия таких поверхностей представлена одной функцией — углом между координатными линиями. Это облегчает рассмотрение изгибаний, т. е. деформаций с сохранением внутренней геометрии.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.503

Ключевые слова: изгибания, изометрические погружения метрик, гауссова кривизна, уравнения Петерсона — Кодацци, геодезические и параболические кривые, замкнутые поверхности, индикатриса касательных.

1. Введение

Радиус-вектор $r(\xi, \eta)$ поверхности переноса F^2 записывается в виде $r(\xi, \eta) = X(\xi) + Y(\eta)$, т. е. в виде суммы радиус-векторов двух кривых. Координаты на заданных кривых автоматически переносятся на поверхность F^2 . Заданные кривые, вообще говоря, не лежат на этой поверхности. Но семейство кривых $\xi = \text{const}$ на поверхности составлено из кривых, параллельных и конгруэнтных второй заданной кривой (параллельно перенесенных), и аналогичное свойство имеет место для семейства $\eta = \text{const}$. Эти семейства образуют сеть переноса на F^2 одной кривой $\eta = 0$ вдоль кривой $\xi = 0$. Естественно назвать их *образующими кривыми*. Заметим, что используется и другое определение поверхностей переноса. Приведем определение из книги [1]. Рассмотрим две кривые $R_1 = U(u)$, $R_2 = V(v)$, пересекающиеся в некоторой точке M_0 с радиус-вектором $U(u_0) = V(v_0)$. Если одну из них переносить параллельно так, чтобы ее точка M_0 скользила по другой, то получим поверхность переноса

$$r = U(u) + V(v) - U(u_0).$$

При таком определении заданные кривые лежат на поверхности переноса. Но определение недостаточно конструктивное, так как неясно, в каком именно направлении надо переносить вторую кривую, чтобы она скользила по первой. Поэтому записывают выражение радиус-вектора поверхности в явном виде и с ним работают.

Исследованию поверхностей переноса были посвящены работы С. Ли, А. Пуанкаре, Г. Дарбу и др. в связи с отысканием поверхностей, несущих две и больше сетей переноса. Существуют поверхности, которые несут бесконечное число сетей переноса. Некоторые вопросы по поверхностям переноса описываются в книге В. И. Шуликовского [1]. Интересный результат по поверхностям переноса получен Я. П. Бланком в [2]: *поверхностями переноса с постоянной*

гауссовой кривизной могут быть только цилиндрические поверхности или плоскость. Будем считать, что координаты ξ, η являются длинами дуг на координатных кривых. В этом случае метрика поверхности записывается в чебышевском виде:

$$ds^2 = (d\xi)^2 + 2 \cos \omega d\xi d\eta + (d\eta)^2, \quad \cos \omega = (\tau_1, \tau_2), \quad (1)$$

где τ_i — единичные касательные векторы к координатным линиям. Заметим, что для поверхности переноса в n -мерном евклидовом пространстве E^n вид метрики тот же самый. Отметим сразу, что гауссова кривизна K , если воспользоваться формулой Фробениуса, запишется так:

$$K = \frac{-1}{\sin \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (2)$$

Такой вид позволяет сразу доказать некоторые утверждения о непогружаемости некоторых полных метрик в виде поверхностей переноса в E^n . Затем мы рассматриваем изгибания сначала в классе поверхностей переноса, затем в классе общих поверхностей. При этом используются результаты Э. Г. Позняка. Особый интерес представляют изгибания замкнутых регулярных поверхностей, так как несмотря на значительный прогресс в развитии геометрии до сих пор неизвестно, существуют ли замкнутые регулярные поверхности класса регулярности C^2 , допускающие непрерывные изгибания. Эта проблема неоднократно возникала в работах известных авторов, например, в работах А. Д. Александрова [3] еще в 1947 г., Кейпера [4] в 1978 г., И. Х. Сабитова [5–7] и др. Заметим, что для выпуклых замкнутых поверхностей доказана однозначная определенность своей метрикой: теорема Кон-Фоссена. Красивое доказательство ее было получено Герглотцем с помощью интегральной формулы. Для общих выпуклых поверхностей однозначная определенность была установлена А. В. Погореловым. Как показал Н. В. Ефимов еще в 1940 г., существуют поверхности неизгибаемые в малом [8]. А. Д. Александров доказал неизгибаемость замкнутых (даже невыпуклых) аналитических поверхностей типа T (см. [9]). Вопросам изгибания поверхностей были посвящены многие работы, например, [10–17]. Интерес представляют изгибания замкнутых поверхностей переноса. Мы доказываем некоторые теоремы о неизгибаемости кусков поверхностей переноса с гауссовой кривизной $K \neq 0$ в классе поверхностей переноса и затем изгибаемость в более широком классе общих поверхностей. Для замкнутых регулярных аналитических поверхностей переноса с кривизнами $k_i \neq 0$ образующих кривых доказывается неизгибаемость в классе поверхностей переноса.

2. О полных метриках неположительной кривизны

Рассмотрим изометрические погружения метрик в евклидовы пространства в виде поверхностей переноса. Имеет место

Лемма 1. *Модуль интегральной гауссовой кривизны по координатному прямоугольнику определяющих кривых на поверхности переноса класса регулярности C^3 меньше 2π .*

Для доказательства используем формулу (2). Элемент площади поверхности dS в рассматриваемых координатах равен $\sin \omega d\xi d\eta$. Поэтому, интегрируя по координатному прямоугольнику, получим

$$\left| \iint K dS \right| = \left| \iint \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} d\xi d\eta \right| = |\omega_1 - \omega_2 + \omega_3 - \omega_4|, \quad (3)$$

где $\omega_i = \omega(P_i)$ — значение угла ω в вершинах P_i прямоугольника, которые занумерованы в порядке обхода против часовой стрелки. На регулярной поверхности угол ω удовлетворяет неравенствам $0 < \omega < \pi$. Поэтому выражение в правой стороне (3) меньше 2π , что и доказывает утверждение леммы 1.

Теорема 1. *Полная метрика с гауссовой кривизной, отделенной от нуля: $K \leq -a^2 < 0$, $a = \text{const}$, не погружается изометрически в виде поверхности переноса класса регулярности C^3 , гомеоморфной плоскости, ни в какое конечномерное евклидово пространство.*

Допустим, такое погружение существует и координация поверхности ξ, η регулярна. Координатная сеть не разрывается, так как длины противоположных сторон координатного четырехугольника равны. Рассмотрим интеграл от гауссовой кривизны по координатному четырехугольнику. Площадь полной поверхности отрицательной кривизны, гомеоморфной плоскости, бесконечна. Это легко доказывается, если выбрать на поверхности отрицательной кривизны полярные координаты и рассмотреть геодезические круги. Любой геодезический круг можно включить в координатный четырехугольник. Действительно, геодезический круг вместе с граничной окружностью является компактом. Координаты ξ, η являются непрерывными функциями точки на поверхности. Поэтому они принимают минимальные и максимальные значения ξ_1, ξ_2 и η_1, η_2 соответственно на этом компакте. Следовательно, этот геодезический круг лежит внутри координатного четырехугольника: $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$. Левая часть (3) при условии отделенности гауссовой кривизны от нуля неограниченна, если взять интеграл по последовательности геодезических кругов. В то же время каждая ограниченная область на поверхности накрывается координатным четырехугольником с координатами ξ, η . По лемме 1 площадь каждой ограниченной области равномерно ограничена сверху. Приходим к противоречию.

В частности, плоскость Лобачевского не погружается изометрически в виде поверхности переноса ни в какое конечномерное евклидово пространство. Здесь уместно указать на аналогию (3) с формулой Хаццидакиса, относящейся к асимптотической сети на поверхности постоянной отрицательной кривизны, из которой следует теорема Гильберта о поверхностях постоянной отрицательной кривизны, и указать на отличие в ситуации. Теорема Гильберта и ее обобщение — знаменитая теорема Н. В. Ефимова — касаются только поверхностей в 3-мерном евклидовом пространстве, так как по теореме Э. Р. Розендорна плоскость Лобачевского допускает регулярное изометрическое погружение в 5-мерное евклидово пространство. Но заключение нашей теоремы 1 относится к поверхностям в любом n -мерном евклидовом пространстве. Заметим, что существуют в E^3 полные поверхности переноса с $K < 0$. Поэтому условие в теореме 1 на отделенность кривизны от нуля существенно. Примером такой поверхности является поверхность

$$r(\xi, \eta) = \left(\xi, \frac{\xi^2}{2}, 0 \right) - \left(0, \frac{\eta^2}{2}, \eta \right),$$

гауссова кривизна которой $K = -\frac{1}{(1+\xi^2+\eta^2)^2}$.

3. К вопросу однозначной определенности поверхности переноса своей метрикой

Далее рассматриваем поверхности в E^3 . В условиях следующей теоремы 2 имеются исключительные случаи. Их можно сформулировать в развернутой

форме с помощью функции ω и в краткой более геометрической форме. Исключительным будем называть случай, когда существуют такие функции $A(\eta)$ и $B(\xi)$, а также постоянная C_0 , что выполняются одновременно уравнения

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (4)$$

Так как здесь фигурируют неизвестные функции, то сформулируем исключительные случаи так.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ I. На образующих кривых есть точки, в которых кривизна кривой или кручение равны нулю. Это случай $C_0 = 0$. Если хотя бы одна образующая кривая плоская, то поверхность относится к исключительному случаю.

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ II. Следующее выражение постоянно на поверхности:

$$\left(\frac{(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right)^3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = C_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где β_i — бинормали кривых, k_i — кривизны и κ_i — кручение.

Теорема 2. Область на поверхности переноса класса регулярности C^5 , не принадлежащая исключительным случаям и с $K \neq 0$, не допускает непрерывных изгибаний в классе поверхностей переноса.

Условием теоремы удовлетворяет основная масса поверхностей переноса. Заметим, что в этом случае имеется почти однозначная определенность. Но в зависимости от значений коэффициентов P , Q , R будет однозначная определенность с точностью до симметрии и движения в пространстве, а могут существовать несколько неконгруэнтных поверхностей переноса с одной и той же метрикой. Этот эффект в классе общих поверхностей был известен и раньше. Коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы поверхности переноса имеют вид

$$L(\xi, \eta) = (X_{\xi\xi}, n), \quad M = 0, \quad N(\xi, \eta) = (Y_{\eta\eta}, n),$$

где n — единичный вектор нормали поверхности. Уравнения Петерсона — Кодацци имеют простой вид

$$L_\eta = \frac{N\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad N_\xi = \frac{L\omega_\eta}{\sin \omega}. \quad (6)$$

Уравнение Гаусса имеет вид $LN = K \sin^2 \omega$. В дальнейшем используем обозначение $K \sin^2 \omega = \Phi$. С помощью формулы (2) и уравнений (6) находим два первых интеграла. Существуют две функции одной переменной $C(\xi)$ и $D(\eta)$ такие, что

$$L^2 + (\omega_\xi)^2 = C(\xi), \quad N^2 + (\omega_\eta)^2 = D(\eta). \quad (7)$$

Заметим, что равенства (7) имеют простой геометрический смысл: L^2 -квадрат нормальной кривизны ξ -линии. Ниже покажем, что $(-\omega_\xi)$ является геодезической кривизной этой координатной линии. Поэтому функция $C(\xi)$ — квадрат кривизны $k_1(\xi)$ первой образующей кривой. Аналогично $D(\eta) = k_2^2(\eta)$. Обозначим $N^2 = V$. Составим систему уравнений для V . Сначала запишем следующую систему уравнений:

$$N_\xi = \frac{\Phi \omega_\eta}{N \sin \omega}, \quad L_\eta N + L N_\eta = \Phi_\eta.$$

Заменяем L_η с помощью уравнений Петерсона — Кодацци. Далее используем обозначения $\omega_\xi = p$, $\omega_\eta = q$. После некоторых преобразований получим

$$V_\xi = \frac{2\Phi q}{\sin \omega}, \quad V_\eta = -2V^2 \frac{p}{\Phi \sin \omega} + 2V \frac{\partial \ln |\Phi|}{\partial \eta}.$$

Записывая условие совместности этой системы, получим квадратичное уравнение для определения V :

$$V^2 P + VQ + R\Phi^2 = 0. \quad (8)$$

Коэффициенты этого уравнения имеют вид

$$P = \left(\frac{p}{\Phi \sin \omega} \right)_\xi, \quad Q = - \left[\frac{\partial^2 \ln |\Phi|}{\partial \xi \partial \eta} - 4 \frac{pq}{\sin^2 \omega} \right], \quad R = \left(\frac{q}{\Phi \sin \omega} \right)_\eta. \quad (9)$$

Мы видим, что все коэффициенты P , Q , R выражены с помощью метрики поверхности переноса и можем определить V , исключая тот случай, когда все коэффициенты нулевые. Обозначим $\Delta = Q^2 - 4PR\Phi^2$. Предполагая $P \neq 0$, получим

$$V = \frac{-Q \pm \sqrt{\Delta}}{2P}.$$

Числитель дроби, стоящей в правой части, симметричен относительно координат ξ , η . В приведенной формуле для V два значения. Обозначим $U = L^2$. Для этого выражения имеет место уравнение

$$U^2 R + UQ + P\Phi^2 = 0.$$

При условии $R \neq 0$ можем записать

$$U = \frac{-Q \pm \sqrt{\Delta}}{2R}.$$

В зависимости от выбора знака перед радикалом в выражениях V , U будем писать эти обозначения со знаками $+$ или $-$ снизу. Оба решения должны быть отличны от нуля, так как их произведение $UV = \Phi^2 \neq 0$ по условию теоремы. Если взять пары U , V с одинаковыми знаками при радикалах, то это условие будет выполняться только в случае $\Delta = 0$. Тогда имеем единственное решение

$$V = \frac{-Q}{2P}, \quad U = \frac{-Q}{2R}.$$

Рассмотрим теперь случаи, когда знаки при радикалах различны. Условие на произведение UV выполняется автоматически. Рассмотрим, например, пару V_+ , U_- . Положим $P > 0$, $R < 0$. Тогда $\Delta > Q^2$. Имеем положительные решения

$$V_+ = \frac{-Q + \sqrt{\Delta}}{2P} > 0, \quad U_- = \frac{-Q - \sqrt{\Delta}}{2R} > 0.$$

Если $P < 0$, $R > 0$, то $\Delta > Q^2$. Получим положительные решения для пары $V_- U_+$. Но так как знаки у коэффициентов P , R поменялись, то изменилась внутренняя геометрия. Поэтому можем считать, что в этом случае есть одно положительное решение. Рассмотрим теперь случай, когда P , R одного знака, а Q противоположного знака. Тогда $\Delta < Q^2$. Если $P > 0$, $R > 0$, $Q < 0$, то положительное решение дают две пары $V_+ U_-$ и $V_- U_+$, т. е. внутренняя геометрия допускает два решения. Другой случай двух решений получается для $P < 0$, $R < 0$, $Q > 0$. В качестве решений подходят те же пары. Но

внутренняя геометрия изменилась. Наконец, рассмотрим случай $P = 0$, $R \neq 0$, $Q \neq 0$. Тогда имеем единственное решение

$$V = -\frac{R\Phi^2}{Q}, \quad U = -\frac{Q}{R}.$$

Если $P = 0$, $R = 0$, то и $Q = 0$ — исключительный случай, который рассматривается ниже. Хотя в некоторых случаях получились пары решений, эти решения не соединяются между собой непрерывным семейством решений. Поэтому можно сказать, что рассматриваемая область не допускает непрерывных изгибаний в этом случае в классе поверхностей переноса.

Так как $K \neq 0$, то $V \neq 0$, и достаточно рассмотреть случай $P = R = 0$. Из этих условий находим, что найдутся функции $A(\eta)$, $B(\xi)$ такие, что

$$\omega_\xi = -A(\eta)\Phi \sin \omega, \quad \omega_\eta = -B(\xi)\Phi \sin \omega. \quad (10)$$

Подставив выражение Φ и используя формулу (2), находим

$$\omega_\xi = A(\eta) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} \sin^2 \omega = \sin^2 \omega \frac{\partial}{\partial \xi} (A(\eta) \omega_\eta).$$

Отсюда следует, что найдутся функции $C(\eta)$, $D(\xi)$ такие, что

$$\operatorname{ctg} \omega = -A(\eta) \omega_\eta + C(\eta), \quad \operatorname{ctg} \omega = -B(\xi) \omega_\xi + D(\xi). \quad (11)$$

Заменяя здесь производные угла ω с помощью (10), получим

$$\operatorname{ctg} \omega = AB\Phi \sin \omega + C(\eta) = AB\Phi \sin \omega + D(\xi).$$

Стало быть, $C(\eta) = D(\xi) = -C_0 = \text{const}$. Поэтому (11) переписываются в виде

$$\cos \omega + C_0 \sin \omega = A(\eta) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \eta}, \quad \cos \omega + C_0 \sin \omega = B(\xi) \frac{\partial \cos \omega}{\partial \xi}. \quad (12)$$

Мы пришли к формулировке исключительных случаев, указанных выше. Теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для замкнутой регулярной поверхности переноса исключительный случай II не может выполняться на всей поверхности. Действительно, если поверхность регулярна, то $0 < \sin \omega$ и функция ω принимает максимальные и минимальные значения в некоторых точках. В этих точках $\omega_\xi = \omega_\eta = 0$. Из уравнений (12) тогда следует, что $\operatorname{ctg} \omega = -C_0$, т. е. максимальное и минимальное значение функции ω совпадают и эта функция постоянна на поверхности. Следовательно, гауссова кривизна поверхности $K = 0$ и по теореме Я. П. Бланка эта поверхность цилиндрическая или плоскость, что противоречит условию ее замкнутости.

Однако исключительные случаи I и II могут иметь место в отдельных точках, интервалах и двумерных областях.

Выясним геометрический смысл производных угла ω . Используем формулу Бонне для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_g}$ кривой, заданной уравнением $\varphi(\xi, \eta) = \text{const}$:

$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{1}{W} \left[\left(\frac{F\varphi_\eta - G\varphi_\xi}{\Lambda} \right)_\xi + \left(\frac{F\varphi_\xi - E\varphi_\eta}{\Lambda} \right)_\eta \right],$$

где в классических обозначениях первой квадратичной формы

$$W = \sqrt{EG - F^2}, \quad \Lambda = \sqrt{E\varphi_\eta^2 - 2F\varphi_\xi\varphi_\eta + G\varphi_\xi^2}.$$

Кривая с параметром ξ задается уравнением $\eta = \text{const}$. Поэтому $\varphi_\xi = 0$, $\varphi_\eta = 1$, $\Lambda = 1$, $W = \sin \omega$. Геодезическая кривизна этой линии $\frac{1}{\rho_{g1}} = -\omega_\xi$. Для кривой с параметром η аналогично имеем для геодезической кривизны $\frac{1}{\rho_{g2}} = -\omega_\eta$.

4. Исключительные случаи

Определяющие кривые поверхности переноса обозначим через Γ_1 , Γ_2 и их натуральные реперы — через τ_i , ν_i , β_i .

Лемма 2. *Имеет место следующее выражение для гауссовой кривизны поверхности переноса:*

$$K = -\frac{k_1 k_2 (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}{\sin^4 \omega}.$$

Действительно, для поверхности переноса имеем

$$K = \frac{LN}{\sin^2 \omega}.$$

Для коэффициентов второй квадратичной формы и единичной нормали n можем записать

$$L = (r_{\xi\xi}, n), \quad N = (r_{\eta\eta}, n), \quad n = \frac{[\tau_1, \tau_2]}{\sin \omega}.$$

Следовательно,

$$L = \frac{k_1(\nu_1, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\tau_1, \nu_1, \tau_2)}{\sin \omega} = -\frac{k_1(\beta_1, \tau_2)}{\sin \omega},$$

$$N = \frac{k_2(\nu_2, \tau_1, \tau_2)}{\sin \omega} = \frac{k_2(\tau_1, \beta_2)}{\sin \omega}.$$

Из этих соотношений следует лемма 2.

Если в некоторой области поверхности $K \neq 0$, то $k_i \neq 0$, $(\tau_1, \beta_2) \neq 0$, $(\tau_2, \beta_1) \neq 0$. Рассмотрим простой исключительный случай I, когда $C_0 = 0$. Первое уравнение из (12) перепишем в виде

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega} = \frac{(\tau_1, \tau_2)_\eta}{(\tau_1, \tau_2)}.$$

Дифференцируя обе части уравнения по ξ , после применения формул Френе получим

$$k_1 k_2 [(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\tau_1, \nu_2)(\nu_1, \tau_2)] = 0.$$

Либо одна из кривизн k_i равна нулю и тогда имеем исключительный случай I, либо равно нулю выражение в квадратных скобках. Пусть равно нулю выражение в квадратных скобках. С помощью формулы векторной алгебры $([ab], [cd]) = (a, c)(b, d) - (a, d)(b, c)$ равенство нулю выражения в квадратных скобках можно записать в виде $(\beta_1, \beta_2) = 0$. Дифференцируя это равенство по ξ , получим $\kappa_1(\nu_1, \beta_2) = 0$. Если кручения отличны от нуля, то после дифференцирования по η получим $(\nu_1, \nu_2) = 0$. Опять дифференцируя по η , получим $(\nu_1, -k_2 \tau_2 + \kappa_2 \beta_2) = 0$. Но мы уже получили $(\nu_1, \beta_2) = 0$. Поэтому $(\nu_1, \tau_2) = 0$. Это означает, что кривая γ_2 лежит в постоянной плоскости, ортогональной $\nu_1(\xi)$. Вновь имеем исключительный случай I, что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай $C_0 \neq 0$.

Лемма 3. *Постоянная C_0 имеет выражение*

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}. \quad (13)$$

Используем первое уравнение из (12)

$$\frac{1}{A(\eta)} = \frac{(\cos \omega)_\eta}{\cos \omega + C_0 \sin \omega}.$$

Дифференцируя обе части этого уравнения по ξ , получим

$$(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta})(\cos \omega + C_0 \sin \omega) - (\tau_1, \tau_2)[(\tau_{1\xi}, \tau_2) + C_0 \omega_\xi \cos \omega] = 0. \quad (14)$$

Заменяем ω_ξ с помощью соотношения $\sin \omega \omega_\xi = -(\tau_{1\xi}, \tau_2)$. Сумма слагаемых без C_0 записывается в виде

$$([\tau_{1\xi} \tau_1], [\tau_{2\eta} \tau_2]) = k_1 k_2 ([\nu_1 \tau_1], [\nu_2 \tau_2]) = k_1 k_2 (\beta_1, \beta_2).$$

Слагаемое, содержащее C_0 , приобретает вид

$$C_0 \frac{(\tau_{1\xi}, \tau_{2\eta}) \sin^2 \omega + (\tau_1, \tau_2)(\tau_{1\xi}, \tau_2)(\tau_1, \tau_{2\eta})}{\sin \omega}.$$

Используем соотношение $\sin^2 \omega = 1 - (\tau_1, \tau_2)^2$. Уравнение (14) переписывается в виде

$$\begin{aligned} k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)[(\nu_1, \nu_2)(\tau_1, \tau_2) - (\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \nu_2)]}{\sin \omega} \right\} \\ = k_1 k_2 \left\{ (\beta_1, \beta_2) + C_0 \frac{(\nu_1, \nu_2) - (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right\} = 0. \end{aligned}$$

По нашему предположению $k_1 k_2 \neq 0$. Из равенства нулю выражения в фигурных скобках получим выражение C_0 . Заметим, что имеет место равенство

$$(\nu_1, \nu_2) = ([\tau_1 \beta_1], [\tau_2 \beta_2]) = (\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \beta_2) - (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1).$$

Поэтому получаем выражение

$$C_0 = \frac{(\beta_1, \beta_2) \sin \omega}{(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}. \quad (15)$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. В рассматриваемом исключительном случае II имеют место выражения для отношения кривизн и кручений определяющих кривых

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\beta_1, \tau_2)^2}, \quad \frac{k_2}{\kappa_2} = -\frac{(\tau_2, \beta_1) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_1, \beta_2)^2}. \quad (16)$$

Получим выражение для этого отношения на кривой γ_1 . Дифференцируем выражение C_0 по ξ . Получим в числителе

$$\begin{aligned} [-\kappa_1(\nu_1, \beta_2) \sin \omega + (\beta_1, \beta_2) \cos \omega \omega_\xi](\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) \\ - (\beta_1, \beta_2) \sin \omega [k_1(\nu_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) - \kappa_1(\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \nu_1)] = 0. \end{aligned}$$

Используем уравнение $(\cos \omega)_\xi = -\sin \omega \omega_\xi = k_1(\nu_1, \tau_2)$. После умножения левой и правой частей уравнения на $\sin \omega$ соберем отдельно члены, содержащие k_1 и κ_1 . Получим

$$\begin{aligned} -k_1(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)[(\tau_1, \tau_2)(\nu_1, \tau_2)(\tau_1, \beta_2) + (1 - (\tau_1, \tau_2)^2)(\nu_1, \beta_2)] \\ = -k_1(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)[(\tau_1, \tau_2)(\beta_1, \nu_2) + (\nu_1, \beta_2)]. \end{aligned}$$

Выражение в последних квадратных скобках можно заменить на $(\tau_2, \beta_1)(\tau_1, \nu_2)$. Далее

$$-\kappa_1 \sin^2 \omega(\tau_1, \beta_2)[(\nu_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1) - (\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \nu_1)].$$

Выражение в квадратных скобках можно заменить на (τ_1, ν_2) . Этот же сомножитель имеется среди сомножителей при k_1 . Если бы на некотором куске кривой с параметром ξ этот сомножитель был равен нулю, то этот кусок был бы плоским и поверхность относилась бы к исключительному случаю I. В нашем случае можно на него сократить. В отдельных точках или линиях, где этот сомножитель обращается в нуль, получаемые формулы справедливы в силу непрерывности входящих в них выражений. В результате получим

$$\frac{k_1}{\kappa_1} = -\frac{(\tau_1, \beta_2) \sin^2 \omega}{(\beta_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)^2}.$$

Лемма 4 доказана.

Для произведения таких отношений для двух образующих кривых имеем

$$\frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{\sin^4 \omega}{(\beta_1, \beta_2)^2 (\tau_1, \beta_2)(\tau_2, \beta_1)}.$$

Сравнивая с выражением C_0 в (13), получаем

$$C_0 = \left(\frac{(\beta_1, \beta_2)}{\sin \omega} \right)^3 \frac{k_1 k_2}{\kappa_1 \kappa_2}.$$

Это выражение фигурирует в определении исключительного случая II.

Для иллюстрации выражения C_0 возьмем в качестве образующих поверхности переноса кривые откоса. У кривой откоса отношение кручения κ к кривизне k есть постоянное число: $\frac{\kappa}{k} = \text{const}$. Обозначим $\varphi_i = \arctg \frac{\kappa_i}{k_i}$, $\rho_i = \sqrt{k_i^2 + \kappa_i^2}$,

$$\sigma_i = \int \rho_i ds_i$$

— новый параметр на кривой. Возьмем кривые откоса с совпадающими осями. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в E^3 . Натуральные реперы записываются в простом виде

$$\tau_i = \cos \varphi_i A_i + e_3 \sin \varphi_i,$$

$$\nu_i = e_1 \cos \sigma_i + e_2 \sin \sigma_i,$$

$$\beta_i = -\sin \varphi_i A_i + e_3 \cos \varphi_i,$$

где $A_i = e_1 \sin \sigma_i - e_2 \cos \sigma_i$. В этом случае надо только вычислить отношение

$$\frac{(\beta_1, \beta_2)^2}{1 - (\tau_1, \tau_2)^2},$$

которое обозначим через D_0 . По определению $D_0 \geq 0$. Предположим, что D_0 — постоянное число. Перепишем это условие в таком виде

$$(\beta_1, \beta_2)^2 + D_0(\tau_1, \tau_2)^2 = D_0.$$

Находим

$$(\tau_1, \tau_2) = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\sigma_1 - \sigma_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2,$$

$$(\beta_1, \beta_2) = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos(\sigma_1 - \sigma_2) + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2.$$

Введем обозначение для переменного выражения $\theta = \sigma_1 - \sigma_2$. Заметим, что углы φ_i постоянные. Вышеуказанное условие постоянства D_0 записывается в виде

$$A \cos^2 \theta + 2B(1 + D_0) \cos \theta + C = D_0,$$

где A, B, C — постоянные числа, причем при условии, что $k_i \neq 0, \kappa_i \neq 0$, число $A > 0$. Так как θ изменяется, то левая часть уравнения не может быть постоянным числом. Поэтому поверхность переноса указанных линий откоса к исключительным случаям не относится. Следовательно, теорема 2 применима к ее областям, в которых $K \neq 0$.

5. Образующие кривые плоские

Рассмотрим поверхность переноса, когда образующие кривые лежат в перпендикулярных плоскостях. Нетрудно установить, что поверхность относится к исключительному случаю I. Ниже рассмотрим конкретный простейший пример такой поверхности. Но сейчас укажем пример изгибаемости таких поверхностей в классе поверхностей переноса, предложенный рецензентом после прочтения первого варианта работы. Пусть производные непрерывно дифференцируемых функций $a(\xi), b(\eta)$ удовлетворяют неравенствам $0 < |a'(\xi)| < 1, 0 < |b'(\eta)| < 1$. Следующая поверхность, заданная радиус-вектором $r(\xi, \eta, t)$, дает пример непрерывного семейства изгибаний по параметру t в окрестности числа $t = 1$ в классе поверхностей переноса:

$$r(\xi, \eta, t) = \left(\int_0^\xi \sqrt{1 - t^2(a'(u))^2} du, ta(\xi) + t^{-1}b(\eta), \int_0^\eta \sqrt{1 - t^{-2}(b'(v))^2} dv \right).$$

Метрика каждой такой поверхности из семейства $t = \text{const}$ имеет вид $ds^2 = (d\xi)^2 + 2a'(\xi)b'(\eta)d\xi d\eta + (d\eta)^2$ и не зависит от t . В то же время такие поверхности являются поверхностями переноса. Поверхность относится к исключительному случаю. Коэффициенты уравнения (8) $P = Q = R = 0$. Действительно, в этом случае $\cos \omega = a'b'$. Гауссова кривизна имеет вид

$$K = \frac{a''b''}{(1 - (a'b')^2)^2}.$$

Имеем, например, выражение

$$P = - \left(\frac{(\cos \omega)_\xi}{K \sin^4 \omega} \right)_\xi = - \left(\frac{b'}{b''} \right)_\xi = 0.$$

Аналогично устанавливается, что $Q = R = 0$. Поэтому условия теоремы 2 существенны.

Рассмотрим простейший пример замкнутой поверхности переноса, в котором образующие кривые — окружности единичного радиуса, лежащие в перпендикулярных плоскостях.

$$r(\xi, \eta) = (\cos \xi, \sin \xi, 0) + (0, \cos \eta, \sin \eta), \quad 0 \leq \xi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi.$$

Находим $\cos \omega = -\cos \xi \sin \eta$. Поверхность относится к описанному выше типу. Детерминант метрического тензора равен нулю в точках, где $\cos^2 \omega = 1$, а это

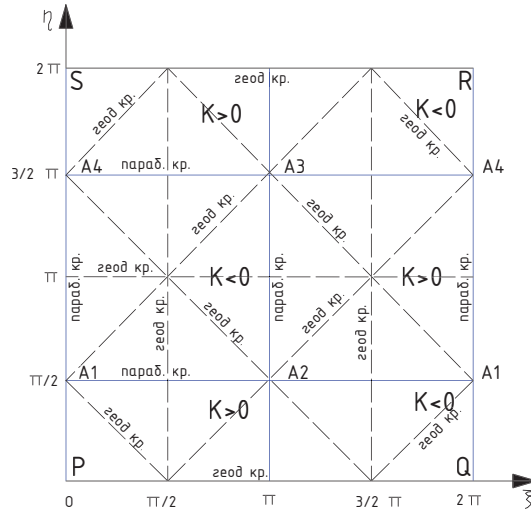


Рис. 1.

значит в точках, где одновременно $\cos^2 \xi = 1$, $\sin^2(\eta) = 1$. Поэтому на поверхности есть четыре особые точки: $A_1(0, \pi/2)$, $A_2(\pi, \pi/2)$, $A_3(\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $A_4(0, \frac{3}{2}\pi)$, в которых нарушается регулярность поверхности. В этих особых точках гауссова кривизна K не определена, и диапазон ее значений в окрестности каждой такой точки составляет $(-\infty, +\infty)$.

Выше найдено выражение для геодезической кривизны координатных линий: $(-\omega_\xi)$ для ξ -линии и $(-\omega_\eta)$ для η -линии. Из полученного выражения для $\cos \omega$ находим выражения для геодезической кривизны координатных линий и затем геодезические, которые являются координатными линиями:

$$\omega_\xi = -\frac{\sin \xi \sin \eta}{\sin \omega}, \quad \eta = 0, \eta = \pi,$$

$$\omega_\eta = \frac{\cos \xi \cos \eta}{\sin \omega}, \quad \xi = \pi/2, \xi = \frac{3}{2}\pi.$$

Поэтому на поверхности, если рассматривать квадрат параметров со стороной 2π и с отождествленными противоположными сторонами, есть две вертикальные и две горизонтальные геодезические петли. Ни одна из них не проходит через особые точки A_i . Имеются также по две наклонные геодезические в правую и левую стороны, задаваемые уравнением $\xi \pm \eta = c = \text{const}$, где $c = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}$. Замкнутая область на поверхности, в которой одновременно соблюдаются строгие неравенства $0 < |\cos \xi| < 1$, $0 < |\sin \eta| < 1$, включая границу (т. е. область, не содержащая особых точек A_i), согласно сказанному выше допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.

Гауссова кривизна поверхности имеет вид

$$K = \frac{\sin \xi \cos \eta}{\sin^4 \omega}.$$

Поэтому на поверхности есть две связные области положительной кривизны и две связные области отрицательной кривизны, которые разделяются четырьмя параболическими линиями (рис. 1). Эти параболические линии являются координатными линиями и они проходят ровно посередине между геодезическими

петлями. Они также проходят через все четыре особые точки A_i . Поверхность имеет самопересечения по отрезкам прямых, соединяющих точки A_1 с A_3 и A_2 с A_4 . Эти отрезки пересекаются в начале координат. Пространственное поведение поверхности довольно сложное (рис. 2). Имеются четыре воронки по осям x_1 и x_3 и две выпуклые области в положительном и отрицательном направлениях оси x_2 . Здесь x_1, x_2, x_3 — обычные декартовы координаты в трехмерном евклидовом пространстве. Вершины квадрата параметров P, Q, R, S отображаются в точку $(1, 1, 0)$, точка $\xi = \pi, \eta = \pi$ отображается в диаметрально противоположную точку $(-1, -1, 0)$.

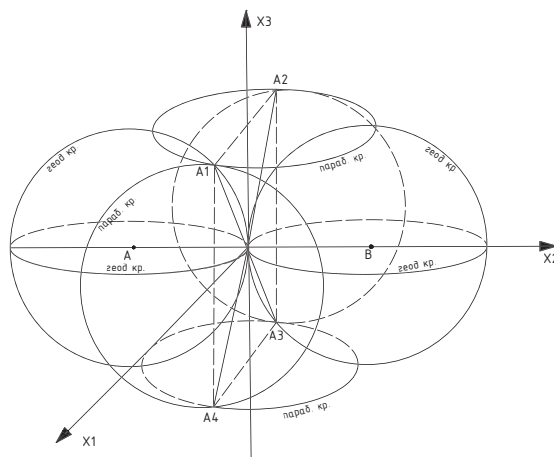


Рис. 2.

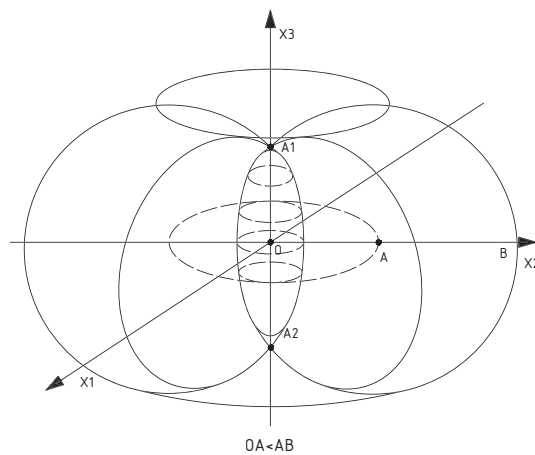


Рис. 3.

Все четыре особые точки лежат в плоскости $x_2 = 0$. Две точки в областях $K < 0$: $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = \pi$ и $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = 0$, отображаются в начало координат $(0, 0, 0)$. В то же время в областях $K > 0$ точка $\xi = \frac{\pi}{2}, \eta = 0$ имеет образом точку $(0, 2, 0)$, а точка $\xi = \frac{3}{2}\pi, \eta = \pi$ имеет образ $(0, -2, 0)$. Заметим, что поведение поверхности не меняется, если брать базовые окружности различных радиусов и с различными центрами.

Для сравнения рассмотрим обычный тор, который образуется тоже с помощью двух окружностей в перпендикулярных плоскостях, но не является поверх-

ностью переноса. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в E^3 . Радиус-вектор тора можно записать в виде

$$r(\xi, \eta) = \rho a + a \cos \eta + e_3 \sin \eta,$$

где $a = e_1 \cos \xi + e_2 \sin \xi$, $\rho = \text{const}$ — радиус окружности в плоскости x_1, x_2 . Координаты ξ, η изменяются на промежутке $[0, 2\pi]$. Метрика имеет вид $ds^2 = (\rho + \cos \eta)^2 d\xi^2 + d\eta^2$. Если $\rho > 1$, то особых точек на поверхности тора нет. Если $\rho = 1$, то имеется одна особая точка в начале координат. При $0 < \rho < 1$ на поверхности тора имеются две особые точки, расположенные симметрично на оси x_3 , соответствующие двум решениям уравнения $\cos \eta = -\rho$ (рис. 3, где радиус горизонтальной окружности OA меньше радиуса вертикальной окружности AB). На поверхности находятся две области с $K > 0$ и две области с $K < 0$. Внутри этой поверхности содержится веретенообразное выпуклое тело. Имеются две параболические линии $\eta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

6. Изгибание поверхностей переноса отрицательной кривизны в общем классе поверхностей

Теорема 3. Пусть в области в виде координатного прямоугольника на поверхности переноса класса регулярности $C^{4,1}$ выполнено $K < 0$. Тогда эта область допускает изгибания в классе общих поверхностей класса регулярности $C^{3,1}$.

Нетрудно доказать: если тождественно $M = 0$ и метрика имеет вид (1), то поверхность является поверхностью переноса. Запишем уравнения Петерсона — Кодаци для метрики поверхности переноса, не предполагая, что $M = 0$, т. е. для общих поверхностей. Используем приведенные коэффициенты второй квадратичной формы l, m, n , положив $L = l \sin \omega$, $M = m \sin \omega$, $N = n \sin \omega$. Тогда основные уравнения теории поверхностей в этом случае приобретают вид

$$m_\xi = l_\eta + l \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega} - n \frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (17)$$

$$m_\eta = n_\xi - l \frac{\omega_\eta}{\sin \omega} + n \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (18)$$

$$ln - m^2 = K. \quad (19)$$

Введем обозначения

$$a_1 = \frac{\cos \omega \omega_\eta}{\sin \omega}, \quad a_2 = -\frac{\omega_\xi}{\sin \omega}, \quad (20)$$

$$b_1 = -\frac{\omega_\eta}{\sin \omega}, \quad b_2 = \frac{\cos \omega \omega_\xi}{\sin \omega}. \quad (21)$$

Если мы найдем семейство решений этой системы, непрерывно зависящее от некоторого параметра t , такое, что при $t = 0$ имеем $m = 0$, а при $t > 0$ и $t < 0$ имеем $m \neq 0$ и коэффициенты l, m, n непрерывно зависят от параметра t , то получим непрерывное изгибание поверхности переноса. Чтобы выполнить уравнение Гаусса в случае $K < 0$, используем преобразование Б. Л. Рождественского [22] и получим систему уравнений для двух переменных r, s , положив

$$l = \frac{2krs}{s-r}, \quad m = -\frac{k(r+s)}{s-r}, \quad n = \frac{2k}{s-r}, \quad k = \sqrt{-K}. \quad (22)$$

Полученная система уравнений имеет симметричный вид. Она использовалась в работах Э. Г. Позняка [18, 19] для построения изометрических погружений в

целом метрик отрицательной кривизны, записанных в полугеодезической системе координат. Но такую же систему уравнений можно вывести и в рассматриваемом случае для метрики (1):

$$r_\xi + sr_\eta = A_0 + A_1r + A_2s + A_3r^2 + A_4rs + A_5r^2s, \quad (23)$$

$$s_\xi + rs_\eta = A_0 + A_2r + A_1s + A_3s^2 + A_4rs + A_5rs^2. \quad (24)$$

Коэффициенты A_i определяются метрикой поверхности и имеют вид

$$A_0 = -a_2, \quad A_1 = b_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi}, \quad A_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \xi},$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_4 = -a_1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \ln k}{\partial \eta}, \quad A_5 = b_1.$$

Предполагаем, что имеется некоторая поверхность переноса F_0 , которая определяет метрику и функцию $\omega(\xi, \eta)$. Приведенные коэффициенты этой поверхности обозначим $l_0(\xi, \eta)$, $m_0 = 0$, $n_0(\xi, \eta)$. Будем рассматривать построение семейства поверхностей $F(\xi, \eta, t)$ в окрестности $t = 0$, включающего F_0 , с помощью системы уравнений на r, s , в которой коэффициенты A_i не меняются (т. е. не зависят от t), а меняются только начальные условия для этой системы с изменением параметра t . В работе Э. Г. Позняка рассматривается полоса на плоскости параметров $T_a = \{0 \leq \xi \leq a, -\infty < \eta < +\infty\}$. Но нам достаточно рассмотреть координатный четырехугольник. Заметим, что для поверхности переноса $m = 0$ и, следовательно, $r = -s$. Начальные условия зададим на линии $\xi = 0$ так, что при $t = 0$ эти условия совпадают с начальными условиями для поверхности F_0 , а для $t > 0$ отличаются от них и $m \neq 0$. Например, можем положить

$$r(0, \eta, t) = r_0(0, \eta) + tk(0, \eta), \quad s(0, \eta, t) = -r_0(0, \eta) + tk(0, \eta). \quad (25)$$

В работе Э. Г. Позняка [18] доказана теорема существования решения системы уравнений

$$\begin{aligned} r_\xi + sr_\eta &= \Phi_1(\xi, \eta, r, s), \\ s_\xi + rs_\eta &= \Phi_2(\xi, \eta, r, s). \end{aligned} \quad (*)$$

Ранее системы такого вида рассматривались Р. Курантом. В работе [18] правые части представляют собой многочлены относительно неизвестных функций r, s :

$$\Phi_k = \sum A_{lm} r^l s^m.$$

В работе Э. Г. Позняка предполагается, что коэффициенты A_{lm} заданы в полосе T_a и начальные данные задачи Коши $r_0(\eta)$, $s_0(\eta)$ являются $C^{1,1}$ -ограниченными функциями в этой полосе и на оси η . Эти условия называются условиями регулярности. Доказывается

Теорема существования (Э. Г. Позняк). Если коэффициенты правых частей системы (*) и начальные данные удовлетворяют условиям регулярности, то в некоторой полосе T_h , $h \leq a$, существует $C^{1,1}$ -ограниченное решение r, s этой системы, обращающееся в r_0, s_0 при $\xi = 0$. Для ширины этой полосы h дается оценка снизу, зависящая от коэффициентов правых частей рассматриваемой системы и от начальных данных.

Доказывается также свойство корректности решений системы типа (*). Дается оценка близости решений двух соответствующих систем. В нашем случае

обе системы даются заданной поверхностью переноса. В работе [18] рассматриваются две системы на r, s , коэффициенты правых частей которых отличаются в T_a в метрике $C^{1,1}$ менее чем на δ . В нашей работе эти соответствующие коэффициенты совпадают. Кроме того, предполагается, что начальные данные для каждой из этих двух систем отличаются от начальных данных r_0, s_0 менее чем на δ . Доказаны следующие утверждения.

Лемма 5. Если коэффициенты правых частей указанных двух систем отличаются в полосе T_a в метрике $C^{1,1}$ менее чем на ε и начальные данные отличаются на оси η в метрике $C^{1,1}$ также менее чем на ε , то решения этих систем, определяемые указанными начальными данными, отличаются менее чем на $P\varepsilon$. Константа P зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и ее решения $\{r, s\}$.

Лемма 6. Можно указать такое δ , что любая система вида (*), коэффициенты правых частей которой отличаются в полосе T_a в метрике $C^{1,1}$ от коэффициентов правых частей заданной системы менее чем на δ , имеет в этой полосе $C^{1,1}$ -ограниченное решение для любых начальных данных, отличающихся на оси η в метрике $C^{1,1}$ от r_0, s_0 менее чем на δ . Константа δ зависит от коэффициентов правых частей заданной системы и от данного ее решения (r, s) .

После получения решений системы уравнений Гаусса — Петерсона — Кодацци с помощью теоремы Бонне определяется семейство поверхностей, изометричных данной области поверхности переноса. Полученные поверхности имеют регулярность $C^{3,1}$. В рассматриваемом нами случае условие регулярности заданной области поверхности переноса в виде координатного четырехугольника имеет вид

$$\min |r_0 - s_0| = b > 0,$$

где минимум берется по этому четырехугольнику. Оно будет выполнено и на близкой поверхности, построенной изгибанием.

В работе [20] рассматривается реализация аналитической метрики переменного знака кривизны, но с помощью другого вида системы дифференциальных уравнений. Заметим, что области поверхностей с $K > 0$ с краем тоже допускают изгибания. Этому вопросу посвящены многочисленные работы, например, А. Д. Александрова, Н. В. Ефимова, А. С. Лейбина [12], И. Н. Векуа [13], К. М. Белова [14–16]. Е. В. Шикиным был предложен в [23] другой метод к вопросу погружения метрик отрицательной кривизны, который позволяет несколько снизить требования регулярности на метрику поверхности.

7. О неизгибаемости в классе поверхностей переноса замкнутых аналитических поверхностей переноса

Рассмотрим замкнутую аналитическую поверхность переноса и возможность непрерывных изгибаний ее в классе поверхностей переноса. Имеет место

Теорема 4. Замкнутая аналитическая поверхность переноса с кривизнами $k_i \neq 0$ образующих кривых не допускает непрерывные изгибания в классе поверхностей переноса.

Поверхность имеет топологический тип тора. Предполагаем, что координатная сеть ξ, η регулярна и покрывает всю поверхность. На замкнутой поверхности переноса обязательно существует параболическая кривая. Так как

кривизны определяющих кривых отличны от нуля, то на параболической кривой выполняется, например, уравнение $(\beta_1, \tau_2) = 0$. Возможны два случая: 1) параболическая кривая имеет окрестность некоторой ее точки, проектирующуюся на координатную ξ -линию в некоторую окрестность некоторой точки ξ_0 , 2) параболическая кривая полностью совпадает с координатной η -линией.

Рассмотрим первый случай. В некоторой окрестности точки ξ_0 параболическая кривая задается в виде $\eta = \varphi(\xi)$. Очевидно, что функция $\varphi(\xi)$ имеет внутренне-геометрический смысл. Выше мы установили первый интеграл для системы уравнений Петерсона — Кодацци

$$L^2(\xi, \eta) + \omega_\xi^2(\xi, \eta) = C(\xi).$$

Найдем выражение функции $C(\xi)$. В некоторой окрестности точки ξ_0 будет выполняться $\omega_\xi^2(\xi, \varphi(\xi)) = C(\xi)$. Поэтому квадрат коэффициента второй квадратичной формы L^2 выражается через величины, относящиеся к внутренней геометрии:

$$L^2(\xi, \eta) = \omega_\xi^2(\xi, \varphi(\xi)) - \omega_\xi^2(\xi, \eta).$$

Тогда выражение второго коэффициента второй квадратичной формы $N(\xi, \eta)$ находится из выражения гауссовой кривизны. Заметим, что эти коэффициенты определяются с точностью до знака, что соответствует выбору поверхности с точностью до зеркального отражения. Всякая поверхность переноса, изометричная рассматриваемой, также аналитична. Действительно, ее замкнутые образующие не могут быть плоскими, поскольку в противном случае индикатриса касательных плоской образующей является большой окружностью и должна пересекаться с индикатрисой касательных второй замкнутой образующей, что дает особую точку поверхности. Поэтому среди касательных к каждой образующей можно выбрать три линейно независимых вектора. Если η_1, η_2, η_3 соответствуют трем таким касательным второй образующей, то равенства

$$(\tau_1(\xi), \tau_2(\eta_j)) = \cos \omega(\xi, \eta_j), \quad j = 1, 2, 3,$$

выражают компоненты $\tau_1(\xi)$ в фиксированном базисе через аналитические функции ξ ; следовательно, τ_1 аналитична. Аналогично аналитична τ_2 , а значит, и поверхность переноса. Поэтому связь второй квадратичной формы с внутренней геометрией распространяется на всю поверхность. Во втором случае, когда параболическая кривая совпадает со второй координатной линией, покажем, что эта линия плоская и лежит на касательной плоскости к поверхности. Дифференцируя уравнение $(\beta_1, \tau_2(\eta)) = 0$ по η и принимая во внимание, что $k_2 \neq 0$, получим $(\beta_1, \nu_2) = 0$. Дифференцируя еще раз по η , получим $\kappa_2(\beta_1, \beta_2) = 0$. Вторым сомножителем в этом равенстве отличен от нуля. Действительно, имеем три равенства

$$(\beta_1, \tau_2) = 0, \quad (\beta_1, \nu_2) = 0, \quad (\beta_1, \tau_2)^2 + (\beta_1, \nu_2)^2 + (\beta_1, \beta_2)^2 = 1.$$

Следовательно, $(\beta_1, \beta_2)^2 = 1$. Поэтому $\kappa_2 = 0$ на всей координатной η -кривой. Кроме того, $\beta_1 = \pm \beta_2$. Касательные векторы к поверхности вдоль этой кривой τ_1, τ_2 ортогональны β_2 , причем этот вектор постоянен вдоль кривой. Итак, в этом случае параболическая кривая плоская и эта плоскость, в которой она лежит, касательная к поверхности. Тем самым можно, рассматривая изгибание в классе поверхностей переноса и учитывая условие аналитичности поверхности, применить метод А. Д. Александрова, когда он рассматривал аналитические

замкнутые поверхности типа (Т) в работе [9]. В доказательстве А. Д. Александрова используется условие: геодезическая кривизна рассматриваемой параболической кривой в некоторой точке отлична от нуля. Оно у нас выполнено, так как главная нормаль этой параболической линии лежит в касательной плоскости и, следовательно, ее геодезическая кривизна совпадает с $k_2 \neq 0$. В [9] доказывается, что вторые квадратичные формы рассматриваемых изометричных аналитических поверхностей совпадают. Здесь мы существенно использовали тот факт, что рассматривали поверхность переноса и изгибание в классе поверхностей переноса. При общем изгибании (если оно существует) могло оказаться, что плоская параболическая кривая переходит в неплоскую кривую. В таком случае мы не можем использовать метод А. Д. Александрова.

Другой способ завершения доказательства: так как η -кривая плоская и замкнутая, то ее индикатриса касательных — большая окружность единичной сферы. Она должна пересекаться с индикатрисой касательных второй образующей ξ -кривой согласно критерию М. Я. Выгодского [21]: индикатриса касательных замкнутой пространственной кривой пересекается со всеми большими окружностями на единичной сфере. Точка пересечения этих индикатрис соответствует особенности на поверхности, что противоречит условию теоремы. Теорема 4 доказана.

Заметим, что в рассматриваемых случаях плоская параболическая кривая выполняет роль шпангоута из корабельного дела. Но там используют их несколько штук на определенном расстоянии друг от друга.

Благодарности. Я благодарен моей дочери Татьяне Аминовой за техническую помощь, моей внучке Ирине Монтян за подготовку чертежей, Анатолию и Наталье Стакун за постоянную поддержку и рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шуликовский В. И. Классическая дифференциальная геометрия в тензорном изложении. М.: Физматгиз, 1963.
2. Бланк Я. П. О поверхностях переноса постоянной кривизны // Докл. АН СССР. 1961. Т. 139, № 5. С. 1037–1039.
3. Александров А. Д. О работах С. Э. Кон-Фоссена // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2. С. 107–141.
4. Кейпер Н. Х. Изгибаемые полиэдральные сферы в E^3 , по Роберту Коннелли // Исследования по метрической теории поверхностей. Сер. Математика. Новое в зарубежной науке. Вып. 18. 1980. С. 210–227.
5. Сабитов И. Х. О метриках, допускающих дисконтинуум неконгруэнтных погружений в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 18, № 2. С. 1023–1026.
6. Сабитов И. Х. Жесткость и неизгибаемость в «малом» и в «целом» поверхностей вращения с уплощениями в полусах // Мат. сб. 2013. Т. 204, № 10. С. 127–160.
7. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибания поверхностей // Итоги науки и техники. Сер. Проблемы геометрии 1991. Т. 23. С. 131–184.
8. Ефимов Н. В. Доказательство существования поверхности, не изгибаемой в малом // Докл. АН СССР. 1940. Т. 27, № 4. С. 314–317.
9. Александров А. Д. Об одном классе замкнутых поверхностей // Мат. сб. 1938. Т. 4, № 1. С. 69–77.
10. Са Эрп Р., Тубиана Э. Дискретные и недискретные изометрические деформации поверхностей в $\mathbb{R}^3$ // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 887–893.
11. Аминов Ю. А. О неизгибаемости замкнутых поверхностей тригонометрического типа // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 12. С. 1710–1720.
12. Лейбин А. С. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 5. С. 149–159.

13. Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.
14. Белов К. М. Об однозначной определенности поверхностей положительной кривизны с краем // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 239–241.
15. Белов К. М. Некоторые замечания о неизгибаемости поверхностей // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131, № 3. С. 475–477.
16. Белов К. М. К вопросу об изгибании поверхностей // Укр. геом. сб. 1969. Т. 7. С. 13–19.
17. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // Успехи мат. наук. 1948. Т. 3, № 2. С. 47–158.
18. Позняк Э. Г. О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны // Укр. геом. сб. 1966. Т. 3. С. 78–92.
19. Позняк Э. Г. Изометрические погружения двумерных римановых метрик в евклидовы пространства // Успехи мат. наук. 1973. Т. 28, № 4. С. 47–76.
20. Позняк Э. Г. Реализация в целом двумерных аналитических метрик знакопеременной кривизны // Укр. геом. сб. 1969. Т. 7. С. 89–97.
21. Выгодский М. Я. О замкнутых линиях с заданной индикатрисой касательных // Мат. сб. 1945. Т. 16, № 1. С. 73–80.
22. Рождественский Б. Л. Система квазилинейных уравнений теории поверхностей // Докл. АН СССР. 1962. Т. 143, № 1. С. 50–52.
23. Шикин Е. В. О регулярной реализации в целом в E^3 двумерных метрик класса C^2 с отрицательной кривизной класса C^1 // Докл. АН СССР. 1969. Т. 188, № 5. С. 1014–1016.

Поступила в редакцию 20 сентября 2025 г.

После доработки 3 февраля 2026 г.

Принята к публикации 11 февраля 2026 г.

Аминов Юрий Ахметович
uaminov0917@gmail.com