

СТРУКТУРА И АВТОМОРФИЗМЫ НЕКОТОРЫХ ЦИКЛИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП

Е. А. Шапорина

Аннотация. Рассматриваются группы торических узлов, которые задаются двумя образующими и соотношением между ними. Для любой пары взаимно простых чисел показано, как представить такую группу в виде циклического расширения некоторой свободной группы. Это достигается путем поиска порождающего множества для свободной группы и поиска нужного автоморфизма. Полученный результат позволяет изучать автоморфизмы таких циклических расширений через изучение автоморфизмов групп торических узлов.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.413

Ключевые слова: свободная группа, расщепляемое циклическое расширение, группа внешних автоморфизмов, группа торического узла.

§ 1. Введение

Всюду в работе будем считать, что $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$.

Циклическим расширением свободной группы ранга n с помощью автоморфизма φ называется группа $F_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z} \cong \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle$, где $\varphi \in \text{Aut}(F_n)$ — автоморфизм свободной группы, задающий это расширение.

Рассмотрим далее два циклических расширения с помощью автоморфизмов φ, ψ . Обозначим через $\hat{a}$ сопряжение с помощью a ; $\hat{a}$ действует по правилу $g^a = aga^{-1}$.

Если

$$\varphi = \hat{a} \circ \psi, \quad a \in F_n,$$

то соответствующие им циклические расширения

$$M_{\varphi} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle, \quad M_{\psi} = \langle F_n, s \mid sgs^{-1} = \psi(g) \rangle$$

связаны следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{\varphi} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \varphi(g) \rangle &= \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = (\hat{a} \circ \psi)(g) \rangle \\ &= \langle F_n, t \mid a^{-1}tgt^{-1}a = \psi(g) \rangle. \end{aligned}$$

Значит, отображение $\theta : M_{\varphi} \rightarrow M_{\psi}$, тождественное на F_n и отправляющее t в as , продолжается до изоморфизма групп.

Поэтому можно рассматривать циклическое расширение свободной группы с помощью внешнего автоморфизма, определение которого дано, например, в работе [1]:

Работа выполнена за счет гранта РНФ 24-11-00119.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть F_n — свободная группа ранга n , $\Phi \in \text{Out}(F_n)$. Циклическим расширением свободной группы ранга n с помощью внешнего автоморфизма Φ называется группа

$$M_\Phi = F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} = \langle F_n, t \mid tgt^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $\xi \in \text{Aut}(F_n)$ — произвольный представитель Φ .

Циклические расширения свободных групп, также известные как *mapping tori*, представляют собой классический объект в геометрической и комбинаторной теории групп. Эти группы имеют вид $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ и используются для построения и изучения новых групп из заданной свободной.

Исследования mapping tori развиваются в нескольких основных направлениях.

С геометрической точки зрения важнейшие результаты получили Бествина и Фейн [2]. Они изучали циклические расширения свободных групп с точки зрения кривизны. В работе Бринкмана [3] доказано, что автоморфизм φ свободной группы F_n является гиперболическим в смысле Громова, если он не имеет нетривиальных периодических классов сопряженности.

Алгебраические свойства mapping tori исследовались в целой серии работ. Например, Бринкман [4] изучил необходимые и достаточные условия существования расщепления над $\mathbb{Z}$ для циклического расширения $M_\varphi = F_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}$ автоморфизмом φ свободной группы.

Пусть φ имеет полиномиальный рост. В работе [5] определяется, какие эпиморфизмы из циклического расширения на $\mathbb{Z}$ имеют конечно порожденное ядро, и вычисляется ранг ядра. Таким образом, авторы решают существенную задачу по описанию всех возможных способов представления M_φ в виде циклического расширения с помощью произвольного автоморфизма свободной группы. Это аналогично случаю групп трехмерных многообразий и отличается от случая циклического расширения с помощью автоморфизма экспоненциального роста.

Обзор современных результатов, касающихся mapping tori, можно найти в работе И. Каповича [6], где для широкого класса эндоморфизмов конечно порожденных свободных групп доказывается, что их циклические расширения являются гиперболическими тогда и только тогда, когда они не содержат подгрупп Баумслэга — Солитера.

Изучение групп автоморфизмов циклических расширений является сложной и актуальной задачей. Одним из первых шагов в этом направлении стала работа [7], в которой было начато систематическое исследование группы внешних автоморфизмов $\text{Out}(M_\varphi)$. В частности, в теореме 1.1 из [7] получено описание групп $\text{Out}(M_\varphi)$ для всех циклических расширений свободной группы ранга 2 в зависимости от вида матрицы $\varphi^{ab} \in GL_2(\mathbb{Z})$.

Методы, разработанные в [7], оказались применимы и для групп более высокого ранга. Так, в 2021 г. [8] они были частично адаптированы для поиска копредставления группы внешних автоморфизмов группы Герстена

$$H = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba, c^t = ca^2 \rangle,$$

и было показано, что $\text{Out}(H) \cong (\mathbb{F}_3 \times \mathbb{Z}^3) \rtimes (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$.

В 2024 г. [9] была изучена серия циклических расширений свободной группы ранга три

$$G_k = \mathbb{F}_3 \rtimes \mathbb{Z} = \langle a, b, c, t \mid a^t = a, b^t = ba^k, c^t = c \rangle, \quad k \neq 0,$$

и получено описание группы $\text{Out}(G_k)$.

В настоящей работе для изучения группы внешних автоморфизмов циклического расширения свободной группы задействован новый подход.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Обобщенной группой Баумслага — Солитера* (или *GBS-группой*) называется конечно порожденная группа, которая действует на дереве так, что все стабилизаторы вершин и ребер — бесконечные циклические группы.

По теореме Басса — Серра (см., например, [10, 11]) такая группа представляется в виде фундаментальной группы графа групп.

Вместо изучения автоморфизмов M_Φ напрямую мы пользуемся результатом Левитта [1] о том, что всякому циклическому расширению свободной группы с помощью внешнего автоморфизма конечного порядка можно поставить в соответствие GBS-группу с нетривиальным центром (автоморфизмы которой изучались, например, в работе [12]).

В статье рассмотрена конкретная бесконечная серия GBS-групп — серия групп торических узлов для взаимно простых p и q (рис. 1)

$$T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle, \quad p > q > 1.$$



Рис. 1. Граф групп для $T_{p,q}$.

Основные результаты статьи формулируются в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть $T_{p,q} = \langle a, b \mid a^p = b^q \rangle$, где p и q взаимно просты, $p > q > 1$ — группа торического узла. Тогда

$$T_{p,q} \cong \mathbb{F}_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z} \cong \langle \mathbb{F}_n, t \mid t g t^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $n = (p-1)(q-1)$, $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(k_{ij})$ при $0 < i < p$, $0 < j < q$, а $\xi \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$ определяет $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$ и может быть задан на порождающих следующим образом.

СЛУЧАЙ 1. При $1 \leq i < p-1$, $1 \leq j < q-1$

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1} k_{(i+1)(j+1)} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 2. При $i = p-1$, $1 \leq j < q-1$

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11} k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 3. При $j = q-1$, $1 \leq i < p-1$

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11} k_{(i+1)1}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 4. При $i = p-1$, $j = q-1$

$$\xi : k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

В работе [12] (теорема C) доказано, что группа внешних автоморфизмов группы торического узла изоморфна циклической группе порядка 2. Это доказывает следующую теорему.

Теорема 2. Пусть n , Φ заданы, как в теореме 1. Тогда

$$\text{Out}(\mathbb{F}_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

§ 2. Основной результат

В 2015 г. Левитт [1] доказал следующий результат.

Утверждение 1 [1, утверждение 4.1]. Пусть G — группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. G — GBS-группа с нетривиальным центром.
2. Существуют $n \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ конечного порядка такие, что $G \cong M_\Phi$.

Для дальнейших рассуждений отметим следующий факт (лемма 2.4 в [13]): $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$.

Ввиду того, что $Z(T_{p,q}) = \langle a^p \rangle$, утверждение 1 применимо к $T_{p,q}$. Но из текста работы [1] неясно, как именно искать n и Φ для данной GBS-группы с центром. Проведем это для $T_{p,q}$.

Рассмотрим фактор-группу $T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Известно (см. утверждение 3.28 в [14]), что

$$T_{p,q}/Z(T_{p,q}) \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q.$$

Далее построим эпиморфизм $\delta : \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Подробнее о таком эпиморфизме можно посмотреть в [15, гл. 4, разд. 4.1]. Если $\langle a \rangle = \mathbb{Z}_p$, $\langle b \rangle = \mathbb{Z}_q$, то известен следующий факт (подробнее можно посмотреть, например, в [15, гл. 4, окончание разд. 4.1]):

$$\ker(\delta) \cong [\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q, \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q] \cong \langle [a^i, b^j], 0 < i < p, 0 < j < q \rangle \cong F(k_{ij}),$$

где $k_{ij} = [a^i, b^j]$.

Построим каноническую проекцию $\pi_1 : T_{p,q} \rightarrow T_{p,q}/Z(T_{p,q})$. Заметим, что ограничение проекции π_1 на $[T_{p,q}, T_{p,q}]$ отождествляет коммутант с $\ker(\delta)$, поскольку центральный элемент $a^p = b^q$ имеет ненулевой образ в абелианизации $T_{p,q}^{ab} \cong \mathbb{Z}$ и потому не лежит в коммутанте.

Лемма 1. Пусть F_n — свободная группа конечного ранга, $\Phi, \Psi \in \text{Out}(F_n)$, конечного порядка, причем

$$\langle \Phi \rangle = \langle \Psi \rangle \leq \text{Out}(F_n).$$

Тогда соответствующие циклические расширения изоморфны:

$$F_n \rtimes_\Phi \mathbb{Z} \cong F_n \rtimes_\Psi \mathbb{Z}.$$

Доказательство леммы 1. Пусть

$$M_\Phi = \langle F_n, t \mid txt^{-1} = \varphi(x) \rangle, \quad M_\Psi = \langle F_n, s \mid xsx^{-1} = \psi(x) \rangle,$$

где $\varphi, \psi \in \text{Aut}(F_n)$ представляют классы Φ, Ψ соответственно.

Так как $\langle \Phi \rangle = \langle \Psi \rangle$, существует целое число r , взаимно простое с порядком группы $\langle \Phi \rangle$ такое, что $\Phi = \Psi^r$ в $\text{Out}(F_n)$. Следовательно, существует элемент $f \in F_n$, для которого

$$\varphi(x) = f\psi^r(x)f^{-1} \quad \forall x \in F_n.$$

Определим отображение

$$\Theta : M_\Phi \rightarrow M_\Psi$$

условиями

$$\Theta(x) = x \ (x \in F_n), \quad \Theta(t) = fs^r.$$

Проверим определяющее соотношение:

$$\Theta(txt^{-1}) = (fs^r)x(fs^r)^{-1} = f\psi^r(x)f^{-1} = \varphi(x) = \Theta(\varphi(x)).$$

Следовательно, Θ корректно определено и является изоморфизмом. Лемма 1 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Обозначим через

$$\chi : T_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}$$

эпиморфизм, задаваемый условиями $\chi(a) = q$, $\chi(b) = p$. Тогда

$$\ker \chi \cong F_n,$$

где $n = (p-1)(q-1)$, и $T_{p,q} \cong F_n \rtimes_{\Phi} \mathbb{Z}$ для некоторого $\Phi \in \text{Out}(F_n)$ порядка pq .

Так как $\chi(ab) = p+q$, сопряжение с помощью ab задает автоморфизм, представляющий степень Φ^{p+q} .

Поскольку $p+q$, pq взаимно просты, элементы Φ и Φ^{p+q} порождают одну и ту же циклическую подгруппу в $\text{Out}(F_n)$. Следовательно, по лемме 1 соответствующее циклическое расширение изоморфно $T_{p,q}$.

Обозначим через ξ автоморфизм свободной группы F_n , задаваемый сопряжением с помощью ab , и вычислим его действие на образующих.

СЛУЧАЙ 1. $1 \leq i < p-1$, $1 \leq j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{ij}^{ab} &= [a^i, b^j]^{ab} = (ab)[a^i, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^i b^j a^{-i} b^{-j} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{i+1}b^{-1}a^{-(i+1)})(a^{i+1}b^{j+1}a^{-(i+1)}b^{-(j+1)})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) \\ &= [a, b][a^{i+1}, b]^{-1}[a^{i+1}, b^{j+1}][a, b^{j+1}]^{-1} = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{ij} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}k_{(i+1)(j+1)}k_{1(j+1)}^{-1}.$$

Остальные случаи рассматриваем аналогично.

СЛУЧАЙ 2. $i = p-1$, $1 \leq j < q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{(p-1)j}^{ab} &= [a^{(p-1)}, b^j]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^j](ab)^{-1} = (ab)a^{(p-1)}b^j a^{-(p-1)}b^{-j}(ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(b^{j+1}ab^{-(j+1)}a^{-1}) = [a, b][a, b^{j+1}]^{-1} = k_{11}k_{1(j+1)}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{(p-1)j} \mapsto k_{11}k_{1(j+1)}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 3. $j = q-1$, $1 \leq i < p-1$. Имеем

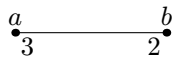
$$\begin{aligned} k_{i(q-1)}^{ab} &= [a^i, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^i, b^{(q-1)}](ab)^{-1} = (ab)a^i b^{(q-1)} a^{-i} b^{-(q-1)} (ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1})(ba^{(i+1)}b^{-1}a^{-(i+1)}) = [a, b][a^{i+1}, b]^{-1} = k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\xi : k_{i(q-1)} \mapsto k_{11}k_{(i+1)1}^{-1}.$$

СЛУЧАЙ 4. $i = p-1$, $j = q-1$. Имеем

$$\begin{aligned} k_{(p-1)(q-1)}^{ab} &= [a^{(p-1)}, b^{(q-1)}]^{ab} = (ab)[a^{(p-1)}, b^{(q-1)}](ab)^{-1} \\ &= (aba^{-1}b^{-1}) = [a, b] = k_{11}. \end{aligned}$$

Рис. 2. Граф групп для $T_{3,2}$.

Поэтому

$$\xi : k_{(p-1)(q-1)} \mapsto k_{11}.$$

Теорема 1 доказана.

ПРИМЕР. Рассмотрим группу трилистника $T_{3,2} = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle$ (рис. 2). Тогда

$$T_{3,2} \cong M_\Phi = \langle F_n, t \mid t g t^{-1} = \xi(g) \rangle,$$

где $n = 2$. Вычислим ξ .

В обозначениях теоремы 1 порождающие свободной группы имеют такой вид: $k_{11} = [a, b]$, $k_{21} = [a^2, b]$. Заметим, что автоморфизм $\xi : x \mapsto x^{ab}$ действует на порождающих таким образом:

$$k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1}, \quad k_{21} \mapsto k_{11}.$$

Применяя ξ шесть раз, получаем

$$k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} k_{21} k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{11}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]},$$

$$k_{21} \mapsto k_{11} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} \mapsto k_{11} k_{21}^{-1} k_{11}^{-1} \mapsto \dots \mapsto k_{21}^{[k_{11}, k_{21}^{-1}]}. \quad \square$$

Значит, ξ^6 действует как сопряжение на порождающих, тем самым ξ представляет $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_2)$, $|\Phi| = 6$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В работе [16] показано, что по заданным $\Phi \in \text{Out}(\mathbb{F}_n)$, $|\Phi| < \infty$, $\Psi \in \text{Out}(\mathbb{F}_m)$, $|\Psi| < \infty$ можно вычислить, когда $M_\Phi \cong M_\Psi$.

Тем самым можно установить, когда построенное циклическое расширение изоморфно данному (и когда это не так), и расширить изучаемый класс групп внешних автоморфизмов на классы изоморфных циклических расширений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Levitt G. Generalized Baumslag-Solitar groups: rank and finite index subgroups // Ann. Inst. Fourier. 2015. V. 65, N 2. P. 725–762.
2. Bestvina M., Feighn M. A combination theorem for negatively curved groups // J. Differ. Geom. 1992. V. 35, N 1. P. 85–101.
3. Brinkmann P. Hyperbolic automorphisms of free groups // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 10, N 5. P. 1071–1089.
4. Brinkmann P. Splittings of mapping tori of free group automorphisms // Geom. Dedicata. 2002. V. 93. P. 191–203.
5. Cashen C. H., Levitt G. Mapping tori of free group automorphisms, and the Bieri–Neumann–Strebel invariant of graphs of groups // J. Group Theory. 2016. V. 19, N . P. 191–216.
6. Kapovich I. Mapping tori of endomorphisms of free groups // Commun. Algebra. 2000. V. 28, N 6. P. 2895–2917.
7. Bogopolski O. V., Martino A., Ventura E. The automorphism group of a free-by-cyclic group in rank 2 // Commun. Algebra. 2007. V. 35, N 5. P. 1675–1690.
8. Дудкин Ф. А., Шапорина Е. А. Автоморфизмы группы Герстена // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 3. С. 514–524.
9. Shaporina E. A. Automorphisms of some cyclic extensions of free groups of rank three // Sib. Electron. Math. Rep. 2024. V. 21, N 2. P. 1400–1413.
10. Bogopolski O. V. Introduction to group theory. Zurich: EMS, 2008.
11. Serre J.-P. Trees. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1980.
12. Gilbert N. D., Howie J., Metaftsis V., Raptis E. Tree actions of automorphism groups // J. Group Theory. 2000. V. 3, N 2. P. 213–223.

13. Jones O. Fixed points of automorphisms of torus knot groups. arXiv:2309.10648. 2023.
14. Burde G., Zieschang H. Knots. Berlin; New York: de Gruyter, 2002.
15. Magnus W., Karrass A., Solitar D. Combinatorial group theory. New York: Dover Publications, 1976.
16. Forester M. Splittings of generalized Baumslag–Solitar groups // Geom. Dedicata. 2006. V. 121. P. 43–59.

Поступила в редакцию 3 июня 2025 г.

После доработки 24 января 2026 г.

Принята к публикации 14 февраля 2026 г.

Шапорина Елизавета Алексеевна (ORCID 0009-0003-3039-2842)

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,

пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090

grambergea@gmail.com