

УСЛОВИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ
И УНИТАРНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ
ЛЕБЕГА ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ СО СПЕЦИАЛЬНЫМИ
ФУНКЦИЯМИ ЛЕЖАНДРА В ЯДРАХ
С. М. Ситник, О. В. Скоромник

Аннотация. Рассматривается класс интегральных операторов со специальными функциями Лежандра в ядрах. Основное содержание составляет обзор результатов по условиям ограниченности и унитарности таких операторов в классических пространствах Лебега. К указанному классу относятся, например, одномерные операторы Бушмана — Эрдейи, многомерные операторы аналогичной структуры, в том числе с интегрированием по специальным пирамидам. Используется техника преобразований Меллина с применением гипергеометрических функций Фокса и формулы обращения для указанного класса интегральных операторов. Во второй части статьи на основе результатов по унитарности операторов Бушмана — Эрдейи для специальных значений параметров рассматриваются обобщения известного свойства операторов Харди, строятся новые дополнительные примеры для этой задачи.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.412

Ключевые слова: интегральные операторы, функции Лежандра, условия ограниченности, условия унитарности, пространства Лебега, операторы Бушмана — Эрдейи, преобразование Меллина, операторы Харди.

*Посвящается замечательному математику и человеку
Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием*

1. Интегральные преобразования
с функциями Лежандра первого рода

1.1. Введение. Рассматриваются многомерные интегральные преобразования:

$$(P_{\delta,1}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (1)$$

$$(P_{\delta,2}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (2)$$

$$(P_{\delta,3}^{\gamma}f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^2 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_{\delta}^{\gamma}\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) f(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (3)$$

$$(P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma \left(\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \right) f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = g(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (4)$$

$$(H_{\sigma,\kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\sigma \int_0^{\mathbf{x}} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] \mathbf{t}^\kappa f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (5)$$

$$(Hf)(\mathbf{x}) = \int_0^{\mathbf{x}} H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0); \quad (6)$$

здесь (см., например, [1–6]) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ — векторы, $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство; $\mathbf{x} \cdot \mathbf{t} = \sum_{k=1}^n x_k t_k$ — скалярное произведение; в частности, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} = \sum_{k=1}^n x_k$ для $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$. Выражение $\mathbf{x} > \mathbf{t}$ означает $x_1 > t_1, \dots, x_n > t_n$, и аналогично для знаков $\geq, <, \leq, =$;

$$\int_0^{\mathbf{x}} = \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n};$$

$\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} > 0\}$; $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $m_1 = m_2 = \dots = m_n$; $\mathbf{n} = (\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = \dots = \bar{n}_n$; $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $p_1 = p_2 = \dots = p_n$; $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{N}_0^n$ и $q_1 = q_2 = \dots = q_n$ ($0 \leq \mathbf{m} \leq \mathbf{q}$, $0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{p}$); $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{C}^n$; $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n) \in \mathbb{C}^n$; $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) \in \mathbb{C}^n$; $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{C}^n$; $0 < \gamma < 1$; $\mathbf{a}_i = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n} \in \mathbb{C}$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\mathbf{b}_j = (b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_n} \in \mathbb{C}$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$); $\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n})$, $1 \leq i \leq \mathbf{p}$, $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($i_1 = 1, 2, \dots, p_1; \dots; i_n = 1, 2, \dots, p_n$); $\beta_j = (\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n})$, $1 \leq j \leq \mathbf{q}$, $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \dots, \beta_{j_n} \in \mathbb{R}_+^1$ ($j_1 = 1, 2, \dots, q_1; \dots; j_n = 1, 2, \dots, q_n$); $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \dots \times \mathbb{N}_0$ ($k_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2, \dots, n$) — мультииндекс с $\mathbf{k}! = k_1! \dots k_n!$ и $|\mathbf{k}| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$; для $l = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n$

$$\mathbf{D}^l = \frac{\partial^{|\mathbf{l}|}}{(\partial x_1)^{l_1} \dots (\partial x_n)^{l_n}}, \quad d\mathbf{t} = dt_1 \cdot dt_2 \dots dt_n; \quad \mathbf{t}^l = t_1^{l_1} \dots t_n^{l_n};$$

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{t}^2 = (x_1^2 - t_1^2) \dots (x_n^2 - t_n^2); \quad f(\mathbf{t}) = f(t_1, t_2, \dots, t_n);$$

функция в ядрах преобразований (5) и (6)

$$H_{\mathbf{p},\mathbf{q}}^{\mathbf{m},\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \left| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \prod_{k=1}^n H_{p_k, q_k}^{m_k, \bar{n}_k} \left[\frac{x_k}{t_k} \left| \begin{matrix} (a_{i_k}, \alpha_{i_k})_{1,p_k} \\ (b_{j_k}, \beta_{j_k})_{1,q_k} \end{matrix} \right. \right], \quad (7)$$

представляет собой произведение Н-функций Фокса $H_{p,q}^{m,n}[z]$. Н-функция Фокса определяется для целых неотрицательных m, n, p, q ($0 \leq m \leq q$, $0 \leq n \leq p$), комплексных $a_i, b_j \in \mathbb{C}$ и положительных $\alpha_i > 0$, $\beta_j > 0$ ($i = 1, \dots, p$; $j = 1, \dots, q$) равенством

$$H_{p,q}^{m,n}[z] \equiv H_{p,q}^{m,n} \left[z \left| \begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) z^{-s} ds, \quad z \neq 0, \quad (8)$$

где

$$\mathcal{H}_{p,q}^{m,n}(s) \equiv \mathcal{H}_{p,q}^{m,n} \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \middle| s \right] = \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(b_j + \beta_j s) \prod_{i=1}^n \Gamma(1 - a_i - \alpha_i s)}{\prod_{i=n+1}^p \Gamma(a_i + \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - b_j - \beta_j s)}. \quad (9)$$

Здесь L — специально выбранный бесконечный контур, пустые произведения, если таковые имеются, считаются равными единице. Более подробно с теорией H -функции (8) можно ознакомиться в [7, гл. 1, 2]. Функция в ядрах преобразований (1)–(4):

$$P_{\delta}^{\gamma}[\mathbf{z}] = \prod_{k=1}^n P_{\delta_k}^{\gamma_k}[z_k],$$

представляет собой произведение функций Лежандра первого рода $P_{\delta}^{\gamma}(z)$. Эта функция определяется при комплексных $\bar{\gamma}, \bar{\delta}, z \in \mathbb{C}$ равенствами

$$P_{\delta}^{\bar{\gamma}}(z) = \frac{1}{\Gamma(1 - \bar{\gamma})} \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{2}} {}_2F_1 \left(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; \frac{1-z}{2} \right), \quad |\arg(z-1)| < \pi,$$

$$P_{\delta}^{\bar{\gamma}}(x) = \frac{1}{\Gamma(1 - \bar{\gamma})} \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^{\frac{\bar{\gamma}}{2}} {}_2F_1 \left(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; \frac{1-x}{2} \right), \quad -1 < x < 1$$

[8, формулы 3.2(3) и 3.4(6); 9, п. 11.18], где ${}_2F_1(-\bar{\delta}, 1 + \bar{\delta}; 1 - \bar{\gamma}; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса [8, § 2.1].

Интегральные преобразования (1)–(4) обобщают соответствующие одномерные интегральные преобразования:

$$(P_{\delta,1}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (10)$$

$$(P_{\delta,2}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (11)$$

$$(P_{\delta,3}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_x^{\infty} (t^2 - x^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0); \quad (12)$$

$$(P_{\delta,4}^{\bar{\gamma}} f)(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\bar{\gamma}/2} P_{\delta}^{\bar{\gamma}} \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt = g(x) \quad (x > 0). \quad (13)$$

Интерес к интегральным преобразованиям $P_{\delta,k}^{\bar{\gamma}} f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) вызван тем, что интегральные уравнения (10)–(13) возникают при решении дифференциальных уравнений. Уравнение (13) было впервые получено в [10, с. 353] при решении задачи Дирихле в первом квадранте $x > 0, y > 0$ для гиперболического уравнения

$$U_{xx} - U_{yy} + \frac{2\gamma}{x} U_x - \frac{2\delta}{y} U_y = 0.$$

В [10] было дано обращение уравнения (13). Однако этот результат специально не выделялся и поэтому статья [11], в которой были найдены формулы

обращения уравнений (12) и (13), долгое время считалась первой работой в этом направлении. Результаты в [10, 11] были приведены формально без указания классов функций, в которых ищутся решения.

В [12] были получены необходимые и достаточные условия для существования интегрируемого на конечном отрезке решения уравнения при $\operatorname{Re}(\bar{\gamma}) < 1$, $\operatorname{Re}(\bar{\delta}) \geq (-\frac{1}{2})$ и дано его явное решение. В [12] также указано решение уравнения (11). Это уравнение ранее было исследовано в [13], но в его формуле решения содержится ошибка (см. также [14]). В [15] изучено уравнение (10) с произвольными действительными $\bar{\gamma}$ и $\bar{\delta}$ в классе обобщенных функций с носителем на $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, а также выделены условия, при которых полученное решение будет обычной функцией.

Результаты в [12, 15] были основаны на представлении $P_{\bar{\delta},1}^{\bar{\gamma}} f$ и $P_{\bar{\delta},2}^{\bar{\gamma}} f$ в виде композиций двух операторов дробного интегрирования от функции по степенной функции x^2 (см. [6, § 18.2]). Эта методика была применена в [6, § 35.2] для получения формул обращения уравнений (10)–(13) в пространствах $L_p(a, b)$, $0 < a < b < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$. В работе [16] аналогичные результаты были получены для (10)–(13) в весовых пространствах вида (14) суммируемых функций на полусоси.

Отметим также работы [17, 18], в которых были указаны достаточные условия обратимости и формулы обращения двух уравнений вида (10) и (13), но записанных в иной форме.

В работе [19] одномерные преобразования (10)–(13) $P_{\bar{\delta},k}^{\bar{\gamma}} f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) были изучены в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ измеримых по Лебегу, вообще говоря, комплекснозначных функций f на $\mathbb{R}_+$, для которых $\|f\|_{\nu,r} < \infty$, где

$$\|f\|_{\nu,r} = \left(\int_0^\infty |t^\nu f(t)|^r \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (1 \leq r < \infty, \nu \in \mathbb{R}). \quad (14)$$

В [19] с помощью формул преобразования Меллина от (10)–(13) было доказано, что такие преобразования являются специальными случаями преобразований с Н-функцией Фокса (8). На основании этого была построена теория преобразований $P_{\bar{\delta},k}^{\bar{\gamma}} f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\nu,r}$. При этом даны условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (10)–(13) из одних пространств $\mathfrak{L}_{\nu,r}$ в другие, доказаны аналоги формулы интегрирования по частям, установлены различные интегральные представления для рассматриваемых преобразований, дано описание образов $P_{\bar{\delta},k}^{\bar{\gamma}}(\mathfrak{L}_{\nu,r})$ ($k = 1, 2, 3, 4$) и выведены формулы обращения.

Следует отметить, что все полученные в [19] результаты верны для классических пространств r -суммируемых функций $L_r(\mathbb{R}_+) = \mathfrak{L}_{\frac{1}{r},r}$ ($1 \leq r < \infty$).

В работах [1, 2] были изучены функциональные свойства многомерных преобразований (1) и (4) и выведены формулы их обращения в весовых простран-

ствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ суммируемых функций $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ на $\mathbb{R}_+^n$ таких, что

$$\|f\|_{\overline{\nu}, \overline{2}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot 2 - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot 2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot 2 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \right] dx_2 \right\} \dots \right\} dx_n \right\}^{1/2} < \infty \quad (15)$$

($\overline{2} = (2, \dots, 2)$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$).

Далее перейдем к изложению результатов исследования многомерных интегральных преобразований (1)–(4) в весовых пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}$ интегрируемых функций $f(\mathbf{x})$ таких, что

$$\|f\|_{\overline{\nu}, \overline{r}} = \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_n^{\nu_n \cdot r_n - 1} \left\{ \dots \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^1} x_2^{\nu_2 \cdot r_2 - 1} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \times \left[\int_{\mathbb{R}_+^1} x_1^{\nu_1 \cdot r_1 - 1} |f(x_1, \dots, x_n)|^{r_1} dx_1 \right]^{r_2/r_1} dx_2 \right\}^{r_3/r_2} \dots \right\}^{r_n/r_{n-1}} dx_n \right\}^{1/r_n} < \infty \quad (16)$$

($\overline{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$, $1 \leq \overline{r} < \infty$, $r_1 = r_2 = \dots = r_n$, $\overline{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$, $\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$). Исследования основаны на представлении преобразований $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в виде модифицированного преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ (5), при этом устанавливаются условия ограниченности и взаимной однозначности операторов преобразований (1)–(4), приводятся различные интегральные представления для них, даются описания образов таких операторов и выводятся формулы обращения.

1.2. Вспомогательные сведения. Многомерное преобразование Меллина функции $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, определяется по формуле

$$(\mathfrak{M}f)(\mathbf{s}) = \int_0^\infty f(\mathbf{t}) \mathbf{t}^{\mathbf{s}-1} d\mathbf{t}, \quad \operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu}, \quad (17)$$

$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$. Обратное преобразование Меллина дается формулой

$$(\mathfrak{M}^{-1}g)(\mathbf{x}) = \mathfrak{M}^{-1}[g(\mathbf{p})](\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \dots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathbf{x}^{-\mathbf{s}} g(\mathbf{s}) d\mathbf{s},$$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$, $\gamma_j = \operatorname{Re}(s_j)$ ($j = \overline{1, n}$). С теорией многомерного преобразования Меллина (17) можно ознакомиться, например, в книгах [20–22].

Пусть $\mathbf{M}_\zeta$, $\mathbf{R}$ — элементарные операторы [21, гл. 1]:

$$(\mathbf{M}_\zeta f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\zeta f(\mathbf{x}) \quad (\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^n), \quad (\mathbf{R}f)(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}} f\left(\frac{1}{\mathbf{x}}\right). \quad (18)$$

Справедлива следующая

Лемма 1 [2, лемма 1]. Пусть $\bar{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) и $1 \leq \bar{\nu} < \infty$, $r_1 = r_2 = \dots = r_n$.

(а) $\mathbf{M}_\zeta$ — изометрический изоморфизм $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\zeta), \bar{\nu}}$. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ ($1 \leq \bar{\nu} \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M}\mathbf{M}_\zeta f)(s) = (\mathfrak{M}f)(s + \zeta) \quad (\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\zeta)). \quad (19)$$

(б) $\mathbf{R}$ — изометрический изоморфизм $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ на $\mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}, \bar{\nu}}$. Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ ($1 \leq \bar{\nu} \leq 2$), то

$$(\mathfrak{M}\mathbf{R}f)(s) = (\mathfrak{M}f)(1-s) \quad (\operatorname{Re}(s) = \overline{1-\nu}). \quad (20)$$

Операторы $\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha$ и $\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha$ дробного интегрирования типа Эрдеи — Кобера определяются при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ ($\operatorname{Re}(\alpha) > 0$), $\sigma \in \mathbb{R}_+^n$, $\eta \in \mathbb{C}^n$ равенствами [1, формулы (55), (56)]:

$$(\mathbf{I}_{0+; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{-(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\mathbf{x}} (\mathbf{x}^\sigma - \mathbf{t}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma\eta+\sigma-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0),$$

$$(\mathbf{I}_{-; \sigma, \eta}^\alpha f)(\mathbf{x}) = \frac{\sigma \mathbf{x}^{\sigma\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_{\mathbf{x}}^{\infty} (\mathbf{t}^\sigma - \mathbf{x}^\sigma)^{\alpha-1} \mathbf{t}^{\sigma(1-\alpha-\eta)-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (\mathbf{x} > 0).$$

Через $[X, Y]$ обозначим множество ограниченных линейных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y .

1.3. Функциональные свойства и формулы обращения преобразования $\mathbf{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$.

Для формулировки утверждений, представляющих функциональные свойства и формулы обращения модифицированного $\mathbf{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ -преобразования (5) в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\nu}}$ нам понадобятся следующие постоянные, определяемые через параметры $\mathbf{H}$ -функции (7) [2, формулы (57)–(60)]:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_1 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_1 \leq m_1} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_1})}{\beta_{j_1}} \right], & m_1 > 0, \\ 0, & m_1 = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_1 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_1 \leq \bar{n}_1} \left[\frac{1-\operatorname{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & \bar{n}_1 > 0, \\ 0, & \bar{n}_1 = 0; \end{cases} \\ \bar{\alpha}_2 &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_2 \leq m_2} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_2})}{\beta_{j_2}} \right], & m_2 > 0, \\ 0, & m_2 = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_2 = \begin{cases} \min_{1 \leq i_2 \leq \bar{n}_2} \left[\frac{1-\operatorname{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & \bar{n}_2 > 0, \\ 0, & \bar{n}_2 = 0; \dots \end{cases} \\ \bar{\alpha}_n &= \begin{cases} -\min_{1 \leq j_n \leq m_n} \left[\frac{\operatorname{Re}(b_{j_n})}{\beta_{j_n}} \right], & m_n > 0, \\ 0, & m_n = 0; \end{cases} \quad \bar{\beta}_n = \begin{cases} \min_{1 \leq i_n \leq \bar{n}_n} \left[\frac{1-\operatorname{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & \bar{n}_n > 0, \\ 0, & \bar{n}_n = 0; \end{cases} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a_1^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_1} \alpha_{i_1} - \sum_{i=\bar{n}_1+1}^{p_1} \alpha_{i_1} + \sum_{j=1}^{m_1} \beta_{j_1} - \sum_{j=m_1+1}^{q_1} \beta_{j_1}, \quad \Delta_1 = \sum_{j=1}^{q_1} \beta_{j_1} - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_{i_1}, \\ a_2^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_2} \alpha_{i_2} - \sum_{i=\bar{n}_2+1}^{p_2} \alpha_{i_2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_{j_2} - \sum_{j=m_2+1}^{q_2} \beta_{j_2}, \quad \Delta_2 = \sum_{j=1}^{q_2} \beta_{j_2} - \sum_{i=1}^{p_2} \alpha_{i_2}, \dots, \\ a_n^* &= \sum_{i=1}^{\bar{n}_n} \alpha_{i_n} - \sum_{i=\bar{n}_n+1}^{p_n} \alpha_{i_n} + \sum_{j=1}^{m_n} \beta_{j_n} - \sum_{j=m_n+1}^{q_n} \beta_{j_n}, \quad \Delta_n = \sum_{j=1}^{q_n} \beta_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_{i_n}; \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mu_n = \sum_{i=1}^{q_n} b_{j_n} - \sum_{i=1}^{p_n} a_{i_n} + \frac{p_n - q_n}{2};$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^1 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_1+1 \leq j_1 \leq q_1} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_1})-1}{\beta_{j_1}} \right], & q_1 > m_1, \\ -\infty, & q_1 = m_1, \end{cases} \\ \beta_0^1 &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_1+1 \leq i_1 \leq p_1} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_1})}{\alpha_{i_1}} \right], & p_1 > \bar{n}_1, \\ \infty, & p_1 = \bar{n}_1; \end{cases} \\ \alpha_0^2 &= \begin{cases} 1 + \max_{m_2+1 \leq j_2 \leq q_2} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_2})-1}{\beta_{j_2}} \right], & q_2 > m_2, \\ -\infty, & q_2 = m_2, \end{cases} \\ \beta_0^2 &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_2+1 \leq i_2 \leq p_2} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_2})}{\alpha_{i_2}} \right], & p_2 > \bar{n}_2, \\ \infty, & p_2 = \bar{n}_2; \end{cases} \\ \dots & \\ \alpha_0^n &= \begin{cases} 1 + \max_{m_n+1 \leq j_n \leq q_n} \left[\frac{\text{Re}(b_{j_n})-1}{\beta_{j_n}} \right], & q_n > m_n, \\ -\infty, & q_n = m_n, \end{cases} \\ \beta_0^n &= \begin{cases} 1 + \min_{\bar{n}_n+1 \leq i_n \leq p_n} \left[\frac{\text{Re}(a_{i_n})}{\alpha_{i_n}} \right], & p_n > \bar{n}_n, \\ \infty, & p_n = \bar{n}_n. \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

Исключительным множеством $\mathcal{E}_{\mathcal{H}}$ функции

называется множество векторов $\overline{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n) \in \mathbb{R}^n$ ($\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n$) таких, что $\overline{\alpha}_k < 1 - \nu_k < \overline{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$) и функции $\mathcal{H}_{p_k, q_k}^{m_k, \overline{n}_k}(s_k)$ ($k = \overline{1, n}$), определенные в (9), имеют нули на прямых $\text{Re}(s_k) = 1 - \nu_k$ ($k = \overline{1, n}$) соответственно.

Многомерное интегральное преобразование Меллина (17) от преобразования (5) представляется формулой [2, формула (62)]:

Известно, что преобразование (5) связано с преобразованием (6) соотношением [7, формула (5.1.9)]

$$(\mathbf{H}_{\sigma,\kappa}^1 f)(\mathbf{x}) = (\mathbf{M}_\sigma \mathbf{H} \mathbf{R} \mathbf{M}_\kappa f)(\mathbf{x}), \quad (27)$$

где $\mathbf{M}_\zeta$ и $\mathbf{R}$ — операторы преобразований в (18).

Свойства преобразования (5) в пространстве $\mathfrak{L}_{\overline{\mathcal{D}}, \overline{\mathcal{Z}}}$ (15) следуют из [1, теорема 3] для преобразования (6), представлений (27) и (19), (20).

Теорема 1 [2, теорема 9]. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_k &< \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k; \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}); \\ a_k^* &= 0; \quad \Delta_k[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) < 0 \quad (k = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (28)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (26) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

Если $a_k^* = 0$, $\Delta_k[\nu_1 - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то оператор $H_{\sigma, \kappa}^1$ преобразования (5) биективно отображает $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$.

(б) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют условиям (28) и если преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ и $\tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (26), то $H_{\sigma, \kappa}^1 f = \tilde{H}_{\sigma, \kappa}^1 f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $a_k^* = 0$, $\Delta_k[\nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) < 0$ ($k = \overline{1, n}$), то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (5).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде

$$\begin{aligned} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) &= \bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}}, (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \end{aligned} \quad (29)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$

$$\begin{aligned} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{x}) &= -\bar{h} \mathbf{x}^{\sigma+1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{m}+1, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{\kappa-1} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (30)$$

(е) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{2}}$, то справедливо равенство

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (H_{\sigma, \kappa}^1 g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty (H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (31)$$

где

$$(H_{\sigma, \kappa}^2 f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\kappa \int_0^\infty H_{\mathbf{p}, \mathbf{q}}^{\mathbf{m}, \mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\mathbf{a}_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{p}} \\ (\mathbf{b}_j, \beta_j)_{1, \mathbf{q}} \end{matrix} \right] \mathbf{t}^\sigma f(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}}.$$

Функциональные свойства преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ (16) следуют из результатов [4, теорема 3] для преобразования (6), представления (27), леммы 1 и теоремы 1.

Теорема 2. Пусть $a_k^* = \Delta_k = \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\bar{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k$; $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$) и $1 < \bar{\tau} < \infty$.

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma), \bar{\tau}}]$. Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (26) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (29) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и дается формулой (30) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (31).

(г) Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}.$$

Из [5, теорема 5] для преобразования (6), теоремы 1 и теоремы 2 следует

Теорема 3. Пусть $a_k^* = \Delta_k = 0$, $\operatorname{Re}(\mu_k) < 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\bar{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \bar{\beta}_k$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$); $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$), и пусть $\mathbf{m} > 0$ или $\mathbf{n} > 0$.

Имеют место следующие утверждения.

(а) Преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $H_{\sigma, \kappa}^1 \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{s}}]$ для всех $\bar{s} \geq \bar{\tau}$ таких, что $1/\bar{s} > 1/\bar{\tau} + \operatorname{Re}(\mu)$. Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (26) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa + \sigma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ дается формулой (5).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ представимо в виде (29) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$ и дается формулой (30) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(\kappa))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\mu)$, то имеет место формула (31).

(д) Пусть $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \notin \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то преобразование $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = I_{-\bar{l}, (\sigma-\bar{\alpha})/\bar{l}}^{-\mu}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}) \quad (32)$$

при $\mathbf{m} > 0$ и соотношением

$$H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = I_{0+, \bar{l}, (\bar{\beta}-\sigma)/\bar{l}-1}^{-\mu}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(\kappa+\sigma), \bar{\tau}}) \quad (33)$$

при $\mathbf{n} > 0$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa) \in \mathcal{E}_{\mathcal{H}}$, то $H_{\sigma, \kappa}^1(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}})$ является подмножеством правых частей (32) и (33) соответственно при $\mathbf{m} > 0$ и $\mathbf{n} > 0$.

Формулы обращения преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ даются равенствами [2, формулы (68) и (69)]

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -\bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-\kappa} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}, \mathbf{p}-\mathbf{n}+1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{array}{l} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1, \mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{n}} \\ (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1, \mathbf{m}} \end{array} (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \right] \\ &\times \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t} \quad (34) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \bar{h}\mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{\mathbf{p}+1, \mathbf{q}+1}^{\mathbf{q}-\mathbf{m}+1, \mathbf{p}-\mathbf{n}} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{array}{l} (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{\mathbf{n}+1, \mathbf{p}}, (1-\mathbf{a}_i - \alpha_i, \alpha_i)_{1, \mathbf{n}}, (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{\mathbf{m}+1, \mathbf{q}}, (1-\mathbf{b}_j - \beta_j, \beta_j)_{1, \mathbf{m}} \end{array} \right] \\ &\times \mathbf{t}^{-\sigma} (H_{\sigma, \kappa}^1 f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (35) \end{aligned}$$

Условия справедливости формул (34) и (35) следуют из [2, теорема 10; 23] и представлены в следующей теореме.

Теорема 4. Пусть $a_k^* = 0$ ($k = \overline{1, n}$); $\overline{\alpha}_k < \nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k) < \overline{\beta}_k$ ($k = \overline{1, n}$); $\alpha_0^k < 1 - \nu_k + \operatorname{Re}(\kappa_k) < \beta_0^k$ ($k = \overline{1, n}$), и пусть $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $\Delta_k[\nu_k - \operatorname{Re}(\kappa_k)] + \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}(\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n)$, то формулы обращения (34) и (35) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $\Delta_k = \operatorname{Re}(\mu_k) = 0$ ($k = \overline{1, n}$) и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{r}}(\nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n)$, $1 < \overline{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$), то формулы обращения (34) и (35) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(\kappa))\overline{h} - 1$ соответственно.

1.4. Представление $P_{\delta, k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в виде модифицированного преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$.

В [2, формулы (70) и (71)] были введены односторонние функции

$$K_1(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}^2 - 1)_+^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} (\mathbf{x}^2 - 1)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}), & \mathbf{x} > 1, \\ 0, & 0 < \mathbf{x} < 1; \end{cases} \quad (36)$$

$$K_2(\mathbf{x}) = (1 - \mathbf{x}^2)_+^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1 - \mathbf{x}^2)^{-\gamma/2} P_\delta^\gamma(\mathbf{x}), & 0 < \mathbf{x} < 1, \\ 0, & \mathbf{x} > 1. \end{cases} \quad (37)$$

На основании (18), (36), (37), [2, формулы (72) и (73)] получены представления для преобразований (1)–(4) соответственно:

$$(P_{\delta, 1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty K_1\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-\gamma} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (38)$$

$$(P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{1-\gamma} \int_0^\infty (R K_1)\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-1} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (39)$$

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \int_0^\infty K_2\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-\gamma} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}; \quad (40)$$

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^{1-\gamma} \int_0^\infty (R K_2)\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) (M_{-1} f)(\mathbf{t}) \, d\mathbf{t}. \quad (41)$$

Следующие вспомогательные утверждения дают формулы преобразования Меллина функций $K_1(\mathbf{x})$ и $K_2(\mathbf{x})$ в (36), (37).

Лемма 2 [2, лемма 2]. Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$.

(а) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) < 1 + \operatorname{Re}(\gamma + \delta)$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) < \operatorname{Re}(\gamma - \delta)$, то

$$(\mathfrak{M} K_1)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1 + \gamma + \delta - \mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma - \delta - \mathbf{s})/2)}{\Gamma(1 - \mathbf{s}/2) \Gamma((1 - \mathbf{s})/2)}. \quad (42)$$

(б) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) > 0$, то

$$(\mathfrak{M} K_2)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\mathbf{s}/2) \Gamma((\mathbf{s} + 1)/2)}{\Gamma((1 - \gamma - \delta + \mathbf{s})/2) \Gamma(1 + (\delta - \gamma + \mathbf{s})/2)}. \quad (43)$$

Используя формулу преобразования Меллина свертки Меллина [21, (1.4.56)]:

$$\left(\mathfrak{M} \int_0^\infty K\left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}\right) y(\mathbf{t}) \frac{d\mathbf{t}}{\mathbf{t}} \right) (\mathbf{s}) = (\mathfrak{M} K)(\mathbf{s})(\mathfrak{M} y)(\mathbf{s}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n);$$

справедливую для подходящих функций $K(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}}) = \prod_{k=1}^n K(\frac{x_k}{t_k})$ и $y(\mathbf{x})$, и формулы (19), (20) для преобразований $M_\zeta f, R f$, находим преобразования Меллина выражений (38)–(41).

Применяя (42), для $P_{\delta,1}^\gamma f$ и $P_{\delta,2}^\gamma f$ имеем

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1+\gamma+\delta-\mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma-\delta-\mathbf{s})/2)}{\Gamma(1-\mathbf{s}/2) \Gamma((1-\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}); \quad (44)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((1+\delta+\mathbf{s})/2) \Gamma((-\delta+\mathbf{s})/2)}{\Gamma((1-\gamma+\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\mathbf{s}-\gamma)/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}). \quad (45)$$

Согласно (9) и (25) соотношения (44) и (45) принимают вид

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2} \left[\left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma); \quad (46)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0} \left[\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma). \quad (47)$$

Поэтому в силу (26) исходные интегралы преобразований (1) и (2) являются модифицированными преобразованиями вида (5) с $\sigma = 0$, $\kappa = 1 - \gamma$:

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{0,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \quad (48)$$

$$(P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{2,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (49)$$

Аналогично, используя формулу (43), для $P_{\delta,3}^\gamma f, P_{\delta,4}^\gamma f$ имеем

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma(\mathbf{s}/2) \Gamma((\mathbf{s}+1)/2)}{\Gamma((1-\gamma-\delta+\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\delta-\gamma+\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}); \quad (50)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \frac{\Gamma((\gamma-\mathbf{s})/2) \Gamma((\gamma-\mathbf{s}+1)/2)}{\Gamma((1-\delta-\mathbf{s})/2) \Gamma(1+(\delta-\mathbf{s})/2)} (\mathfrak{M} f)(1-\gamma+\mathbf{s}). \quad (51)$$

В силу (9) и (25) равенства (50) и (51) принимают вид

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0} \left[\left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma); \quad (52)$$

$$(\mathfrak{M} P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{s}) = 2^{\gamma-1} \overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2} \left[\left(\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \middle| \mathbf{s} \right] (\mathfrak{M} f)(\mathbf{s}+1-\gamma). \quad (53)$$

Согласно (26) исходные интегралы преобразований (3) и (4) являются модификациями преобразования (5) с $\sigma = 0$, $\kappa = 1 - \gamma$:

$$(P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{2,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \left(\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2} \right), \left(1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2} \right) \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}; \quad (54)$$

$$(P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \int_0^\infty H_{2,2}^{0,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (55)$$

1.5. Преобразования $P_{\delta,k}^\gamma$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ -пространствах. Свойства преобразований (1)–(4) в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ следуют из соответствующих утверждений теоремы 1 для преобразования (5).

На основании (48), (49), (54), (55) и (5) для каждого из операторов (1)–(4) параметры

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) = (2, 2, \dots, 2); \quad \mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) = (2, 2, \dots, 2); \quad (56)$$

$$\alpha_i = (\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_n}) = (1/2, \dots, 1/2), \quad \beta_j = (\beta_{j_1}, \dots, \beta_{j_n}) = (1/2, \dots, 1/2) \quad (57)$$

($1 \leq i \leq \mathbf{p}$; $1 \leq j \leq \mathbf{q}$) и параметры (22), (23):

$$a_k^* = 0; \quad \Delta_k = 0; \quad \mu_k = \gamma_k - 1 \quad (k = \overline{1, n}) \quad (58)$$

принимают одинаковые значения.

Для оператора (1):

$$\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} = 2; \quad \overline{\alpha}_k = \infty, \quad \overline{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)] \quad (k = \overline{1, n}). \quad (59)$$

Для оператора (2):

$$\mathbf{m} = 2, \quad \mathbf{n} = 0; \quad \overline{\alpha}_k = -\min[\operatorname{Re}(1 + \delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)], \quad \overline{\beta}_k = \infty \quad (k = \overline{1, n}). \quad (60)$$

Для оператора (3):

$$\mathbf{m} = 2, \quad \mathbf{n} = 0; \quad \overline{\alpha}_k = 0, \quad \overline{\beta}_k = \infty \quad (k = \overline{1, n}). \quad (61)$$

Для оператора (4):

$$\mathbf{m} = 0, \quad \mathbf{n} = 2; \quad \overline{\alpha}_k = -\infty, \quad \overline{\beta}_k = \operatorname{Re}(\gamma_k) \quad (k = \overline{1, n}). \quad (62)$$

Согласно (44) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2}$ в правой части (46), если

$$\mathbf{s} \neq 2m + 1, \quad \mathbf{s} \neq 2l + 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (63)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (45) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0}$ в правой части (47), если

$$\mathbf{s} \neq \gamma - 2m - 1, \quad \mathbf{s} \neq \gamma - 2l - 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (64)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (50) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{2,0}$ в правой части (52), если

$$\mathbf{s} \neq \delta + \gamma - 2m - 1, \quad \mathbf{s} \neq \gamma - \delta - 2l - 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (65)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Согласно (51) $1 - \overline{\nu}$ не принадлежит исключительному множеству $\mathcal{E}_{\overline{\mathcal{H}}}$ функции $\overline{\mathcal{H}}_{2,2}^{0,2}$ в правой части (53), если

$$\mathbf{s} \neq -\delta + 2m + 1, \quad \mathbf{s} \neq \delta + 2l + 2 \quad (l = (l_1, l_2, \dots, l_n); \quad m = (\overline{m}_1, \overline{m}_2, \dots, \overline{m}_n) \in \mathbb{N}_0^n), \quad (66)$$

для $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = 1 - \overline{\nu}$.

Функциональные свойства преобразований (1)–(4) $P_{\delta,k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ следуют из представлений (48), (49) и (54), (55) значений параметров (56)–(62), утверждений теоремы 1 и представлены в теоремах 5–8 соответственно.

Теорема 5 [2, теорема 11]. Пусть

$$-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)], \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad (67)$$

$$\nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}).$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta,1}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}]$$

такое, что равенство (46) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (63), то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ не зависит от $\overline{\nu}$ в том смысле, что если $\overline{\nu}$ и $\tilde{\overline{\nu}}$ удовлетворяют (67) и если преобразования $P_{\delta,1}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta,1}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\overline{\nu}}, \overline{2}}$ равенством (46), то $P_{\delta,1}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta,1}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\overline{\nu}}, \overline{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}} P_{\delta,1}^\gamma f$ дается формулами (1) и (48).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta,1}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (68)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1 - (\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (69)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta,1}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty g(\mathbf{x}) (P_{\delta,2}^\gamma f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (70)$$

где $P_{\delta,2}^\gamma f$ — преобразование (2).

Теорема 6. Пусть

$$-\min[\operatorname{Re}(1 + \delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty, \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad (71)$$

$$\nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}).$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta,2}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}, \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{2}}]$$

такое, что равенство (47) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (64), то преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (71) и если преобразования $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 2}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (47), то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 2}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ дается формулами (2) и (49).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 2}^{\gamma} f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (72)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 2}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^{\infty} H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (73)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^{\infty} f(\mathbf{x}) (P_{\delta, 2}^{\gamma} g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^{\infty} g(\mathbf{x}) (P_{\delta, 1}^{\gamma} f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (74)$$

где $P_{\delta, 1}^{\gamma} f$ — преобразование (1).

Теорема 7. Пусть

$$0 < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty, \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \quad (k, l = \overline{1, n}). \quad (75)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta, 3}^{\gamma} \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (52) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (65), то преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (75) и если преобразования $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ и $\tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (52), то $P_{\delta, 3}^{\gamma} f = \tilde{P}_{\delta, 3}^{\gamma} f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 3}^{\gamma} f$ дается формулами (3) и (54).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 3}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (76)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$(P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{x}) = -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (\frac{1-\gamma-\delta}{2}, \frac{1}{2}), (1 + \frac{\delta-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (0, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (77)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta, 3}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty g(\mathbf{x}) (P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (78)$$

где $P_{\delta, 4}^\gamma f$ — преобразование (4).

Теорема 8 [2, теорема 12]. Пусть

$$-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \operatorname{Re}(\gamma_k), \quad \operatorname{Re}(\gamma_k) \leq 1, \quad \nu_k = \nu_l, \quad k \neq l \ (k, l = \overline{1, n}). \quad (79)$$

Справедливы следующие утверждения.

(а) Существует взаимно однозначное преобразование

$$P_{\delta, 4}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}, \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}]$$

такое, что равенство (53) выполняется для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$. Если $\operatorname{Re}(\gamma) = 1$ и выполняются условия (66), то преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$.

(б) Преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ не зависит от $\bar{\nu}$ в том смысле, что если $\bar{\nu}$ и $\tilde{\bar{\nu}}$ удовлетворяют (79) и если преобразования $P_{\delta, 4}^\gamma f$ и $\tilde{P}_{\delta, 4}^\gamma f$ определены в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $\mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$ равенством (53), то $P_{\delta, 4}^\gamma f = \tilde{P}_{\delta, 4}^\gamma f$ для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}} \cap \mathfrak{L}_{\tilde{\bar{\nu}}, \bar{2}}$.

(в) Если $\operatorname{Re}(\gamma) < 1$, то для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ преобразование $P_{\delta, 4}^\gamma f$ дается формулами (4) и (55).

(г) Пусть $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$. Если $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$, то $P_{\delta, 4}^\gamma f$ представимо в виде

$$(P_{\delta, 4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = 2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (80)$$

а при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ дается формулой

$$\begin{aligned} (P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{x}) = & -2^{\gamma-1} \bar{h} \mathbf{x}^{1-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \\ & \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{t}} \middle| \begin{matrix} (1 - \frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1-\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda} - 1, \bar{h}), (\frac{1+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] \mathbf{t}^{-\gamma} f(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \end{aligned} \quad (81)$$

(д) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{2}}$, то имеет место формула

$$\int_0^\infty f(\mathbf{x}) (P_{\delta,4}^\gamma g)(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_0^\infty g(\mathbf{x}) (P_{\delta,3}^\gamma f)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (82)$$

где $P_{\delta,3}^\gamma f$ — преобразование (3).

1.6. Преобразования $P_{\delta,k}^\gamma$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ -пространствах. Функциональные свойства преобразований (1)–(4) $P_{\delta,k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$) в пространствах $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ следуют из теорем 2, 3 для преобразования $H_{\sigma, \kappa}^1 f$ (5) представлений (48), (49) и (54), (55) с использованием (58)–(66).

На основании (1) из теоремы 2 и теоремы 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,1}^\gamma f$.

Теорема 9. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[\operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$. Если $1 < \bar{\tau} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ биективно и выполняется равенство (46) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ представимо в виде (68) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (69) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}, \bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (70).

(г) Если выполняются условия (63), то преобразование (1) $P_{\delta,1}^\gamma f$ биективно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,1}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$.

Теорема 10. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(1 + \gamma_k + \delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,1}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (46) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ дается формулой (48).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,1}^\gamma f$ представимо в виде (68) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (69) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma), \bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (70).

(д) Если выполняются условия (63), то преобразование $P_{\delta,1}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,1}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = I_{0+;\bar{l},\bar{\tau}/\bar{l}-1}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{\tau}}), \quad (83)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{\beta} = (\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n)$, $\bar{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(1+\gamma_k+\delta_k), \operatorname{Re}(\gamma_k-\delta_k)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,1}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}})$ является подмножеством правой части (83).

На основании (2) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,2}^\gamma f$.

Теорема 11. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$. Если $1 < \bar{\tau} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (47) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ представимо в виде (72) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (73) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{\tau}'}$, где $\bar{\tau}' = \bar{\tau}/(\bar{\tau} - 1)$, то имеет место формула (74).

(г) Если выполняются условия (64), то преобразование (2) $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$.

Теорема 12. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)] < \nu_k - \operatorname{Re}(1-\gamma_k) < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,2}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (47) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ дается формулой (49).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,2}^\gamma f$ представимо в виде (72) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (73) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1-\gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (74).

(д) Если выполняются условия (64), то преобразование $P_{\delta,2}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}}) = I_{-;\bar{l},-\bar{\alpha}/\bar{l}}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{\tau}}), \quad (84)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n)$, $\bar{\alpha}_k = -\min[\operatorname{Re}(1+\delta_k), \operatorname{Re}(-\delta_k)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,2}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{\tau}})$ является подмножеством правой части (84).

На основании (3) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,3}^\gamma f$.

Теорема 13. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $0 < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$. Если $1 < \bar{r} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (52) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ представимо в виде (76) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (77) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{r}'}$, где $\bar{r}' = \bar{r}/(\bar{r} - 1)$, то имеет место формула (78).

(г) Если выполняются условия (65), то преобразование (3) $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$.

Теорема 14. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $0 < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ до элемента $P_{\delta,3}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}; \mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}]$ для всех $\bar{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\bar{s} \geq \bar{r}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \bar{r} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (52) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ дается формулой (54).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,3}^\gamma f$ представимо в виде (76) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$ и дается формулой (77) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (\bar{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\bar{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu}+\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{s}}$, где $1 < \bar{s} < \infty$, $1 \leq 1/\bar{s} + 1/\bar{r} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (78).

(д) Если выполняются условия (65), то преобразование $P_{\delta,3}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = I_{-\bar{l},0}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\bar{\nu}-\operatorname{Re}(1-\gamma),\bar{r}}), \quad (85)$$

где $\bar{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$. Если $1 - \bar{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma) \notin \mathcal{E}\mathcal{H}$, то $P_{\delta,3}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}})$ является подмножеством правой части (85).

На основании (4) из теорем 2, 3 следуют результаты для преобразования $P_{\delta,4}^\gamma f$.

Теорема 15. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < 1$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \bar{r} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Верны следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$. Если $1 < \bar{r} \leq \bar{2}$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (53) для $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $\operatorname{Re}(s) = \bar{\nu}$.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ представимо в виде (80) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > \bar{\nu}\bar{h} - 1$ и дается формулой (81) при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < \bar{\nu}\bar{h} - 1$.

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1-\bar{\nu},\bar{r}'}$, где $\bar{r}' = \bar{r}/(\bar{r} - 1)$, то имеет место формула (82).

(г) Если выполняются условия (66), то преобразование (4) $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$ и его образ описывается равенством $P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}) = \mathfrak{L}_{\bar{\nu},\bar{r}}$.

Теорема 16. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) < 1$, $-\infty < \nu_k - \operatorname{Re}(1 - \gamma_k) < \min[\operatorname{Re}(\gamma_k), \operatorname{Re}(\gamma_k + 1)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и $1 < \overline{\tau} < \infty$ ($r_1 = r_2 = \dots = r_n$).

Справедливы следующие утверждения.

(а) Преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$, определенное на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{2}}$, может быть продолжено на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ до элемента $P_{\delta,4}^\gamma \in [\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}; \mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{s}}]$ для всех $\overline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, $\overline{s} \geq \overline{\tau}$, таких, что $1/s_k > 1/r_k + \operatorname{Re}(\gamma_k - 1)$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 < \overline{\tau} \leq 2$, то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно и выполняется равенство (53) для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и $\operatorname{Re}(\mathbf{s}) = \overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma)$.

(б) Для $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ дается формулой (55).

(в) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$ и $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$, то $P_{\delta,4}^\gamma f$ представимо в виде (80) при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\overline{h} - 1$ и дается формулой (81) при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma))\overline{h} - 1$.

(г) Если $f \in \mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и $g \in \mathfrak{L}_{1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{s}}$, где $1 < \overline{s} < \infty$, $1 \leq 1/\overline{s} + 1/\overline{\tau} \leq 1 - \operatorname{Re}(\gamma - 1)$, то имеет место формула (82).

(д) Если выполняются условия (66), то преобразование $P_{\delta,4}^\gamma f$ взаимно однозначно на $\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$ и его образ описывается равенством

$$P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}) = I_{0+; \overline{l}, \overline{\beta}/\overline{l}-1}^{1-\gamma}(\mathfrak{L}_{\overline{\nu} - \operatorname{Re}(1 - \gamma), \overline{\tau}}), \quad (86)$$

где $\overline{l} = (l_1, l_2, \dots, l_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\beta} = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n)$, $\overline{\beta}_k = \min[\operatorname{Re}(\gamma_k), \operatorname{Re}(\gamma_k + 1)]$ ($k = \overline{1, n}$). Если $1 - \overline{\nu} + \operatorname{Re}(1 - \gamma) \notin \mathcal{E}$, то $P_{\delta,4}^\gamma(\mathfrak{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}})$ является подмножеством правой части (86).

1.7. Формулы обращения преобразований $P_{\delta,k}^\gamma f$ ($k = 1, 2, 3, 4$). На основании представлений (48), (49), (54), (55) и (4) параметры (24) принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} \alpha_0^k &= 0, \quad \beta_0^k = \infty \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= -\infty, \quad \beta_0^k = \operatorname{Re}(2 - \gamma_k) \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= -\infty, \quad \beta_0^k = 1 + \min[\operatorname{Re}(1 - \gamma_k - \delta_k), \operatorname{Re}(2 + \delta_k - \gamma_k)] \quad (k = \overline{1, n}); \\ \alpha_0^k &= 1 + \max[\operatorname{Re}(\delta_k - 1), \operatorname{Re}(-\delta_k - 2)], \quad \beta_0^k = \infty \quad (k = \overline{1, n}); \end{aligned}$$

соответственно для операторов преобразований (1)–(4).

Согласно представлению (48) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta,1}^\gamma f$ принимают вид

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= -2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1+\gamma} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \quad (87) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \\ &\times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}, \overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,1}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (88) \end{aligned}$$

Условия справедливости формул (87) и (88) следуют из теоремы 4.

Теорема 17. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[1, \operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формулы обращения (87) и (88) справедливы при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, то формулы обращения (87) и (88) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (49) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta, 2}^\gamma f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1+\gamma} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}, \quad (89)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 2}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (90)$$

Условия справедливости формул (89) и (90) следуют из теоремы 4.

Теорема 18. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $\max[0, \operatorname{Re}(-1 - \delta_k), \operatorname{Re}(\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{2}}$, то формулы обращения (89) и (90) справедливы при $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathfrak{L}_{\bar{\nu}, \bar{\tau}}$, то формулы обращения (89) и (90) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) > (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\bar{\lambda}) < (1 - \bar{\nu})\bar{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (54) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta, 3}^\gamma f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1+\gamma} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{0,3} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\bar{\lambda}, \bar{h}), (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}, \quad (91)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \bar{h} \mathbf{x}^{(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}-1} \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\bar{\lambda}+1)/\bar{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{1,2} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma+\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma-\delta-1}{2}, \frac{1}{2}), (-\bar{\lambda}, \bar{h}) \\ (-\bar{\lambda}-1, \bar{h}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta, 3}^\gamma f)(\mathbf{t}) \, \mathbf{d}\mathbf{t}. \quad (92)$$

Условия справедливости формул (91) и (92) следуют из теоремы 4.

Теорема 19. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $\max[0, \operatorname{Re}(-1 - \delta_k), \operatorname{Re}(\delta_k)] < \nu_k < \infty$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\bar{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\bar{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{z}}$, то формулы обращения (91) и (92) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, то формулы обращения (91) и (92) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

Согласно представлению (55) формулы обращения (34) и (35) для преобразования $P_{\delta,4}^\gamma f$ принимают вид

$$f(\mathbf{x}) = -2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1+\gamma} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{2,1} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (-\overline{\lambda}, \overline{h}), (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}) \\ (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}, \quad (93)$$

или

$$f(\mathbf{x}) = 2^{1-\gamma} \overline{h} \mathbf{x}^{(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}-1} \frac{d}{d\mathbf{x}} \mathbf{x}^{-(\overline{\lambda}+1)/\overline{h}} \times \int_0^\infty H_{3,3}^{3,0} \left[\frac{\mathbf{t}}{\mathbf{x}} \middle| \begin{matrix} (\frac{\gamma-1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\gamma}{2}, \frac{1}{2}), (-\overline{\lambda}, \overline{h}) \\ (-\overline{\lambda}-1, \overline{h}), (-\frac{\delta}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{\delta+1}{2}, \frac{1}{2}) \end{matrix} \right] (P_{\delta,4}^\gamma f)(\mathbf{t}) d\mathbf{t}. \quad (94)$$

Условия справедливости формул (93) и (94) следуют из теоремы 4.

Теорема 20. Пусть $\operatorname{Re}(\gamma_k) = 1$, $-\infty < \nu_k < \min[1, \operatorname{Re}(2 + \delta_k), \operatorname{Re}(1 - \delta_k)]$, $\nu_k = \nu_l$, $k \neq l$ ($k, l = \overline{1, n}$), и пусть $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}^n$, $\overline{h} \in \mathbb{R}_+^n$.

(а) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{z}}$, то формулы обращения (93) и (94) справедливы при $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

(б) Если $f \in \mathcal{L}_{\overline{\nu}, \overline{\tau}}$, то формулы обращения (93) и (94) справедливы при выполнении условий $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) > (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ и $\operatorname{Re}(\overline{\lambda}) < (1 - \overline{\nu})\overline{h} - 1$ соответственно.

2. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи

Во второй части статьи в форме небольшого обзора изложены основные факты об операторах Бушмана — Эрдейи. Это один из важных классов операторов с функциями Лежандра в ядрах. Первоначально эти операторы возникли в работах Бушмана и Эрдейи, они рассматривали интегральные уравнения с такими операторами и их обращения (см. [6]). Эти операторы и их модификации в неявном виде были введены и изучались в работах В. В. Катрахова [24]. Само название "операторы Бушмана — Эрдейи" было введено в начале 1980-х С. М. Ситником, им была построена достаточно полная теория этих операторов и как интегральных, и как операторов преобразования, эти результаты последовательно излагались, уточнялись и дополнялись в [6, 25–28] и других работах.

В этой части работы рассматриваются основные определения теории операторов преобразования, приводятся исторические сведения об интегральных операторах Бушмана — Эрдейи. Вводится удобная классификация операторов типа Бушмана — Эрдейи и их обобщений на основе явного вида ядер. Далее вводятся и изучаются операторы преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода, а также их предельный подкласс — операторы нулевого порядка гладкости. Ядра операторов этого класса выражаются через функции Лежандра первого рода. Частными случаями являются известные операторы преобразования Сони́на и Пуассона, а также некоторые классические интегральные

преобразования, в том числе известные операторы дробного интегрирования, в том числе Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера. Затем вводятся операторы преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода, ядра которых выражаются через функции Лежандра второго рода. Приводятся применения общей схемы построения операторов преобразования композиционным методом на основе комбинирования классических операторов преобразования, рассматривается пример применения композиционного метода к определению и изучению операторов преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода. Основное внимание уделяется условиям ограниченности или унитарности введенных операторов в классических пространствах Лебега. В качестве приложений рассматриваются обобщения условий унитарности «сдвинутых» неравенств Харди.

3. Основные понятия теории операторов преобразования

Теория операторов преобразования — это существенное обобщение теории подобия конечномерных матриц. Дадим основное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть дана пара операторов (A, B) . Ненулевой оператор T называется *оператором преобразования* (ОП, сплетающий оператор, transmutation, intertwining operator), если на элементах подходящих функциональных пространств выполняется соотношение

$$TA = BT. \quad (95)$$

Как обычно используются операторы преобразования? Пусть, например, мы изучаем некоторый достаточно сложно устроенный оператор A . При этом нужные свойства уже известны для модельного более простого оператора B . Тогда если существует ОП (95), то часто удается перенести свойства модельного оператора B и на A . Такова в нескольких словах примерная схема типичного использования ОП в конкретных задачах.

В частности, если рассматривается уравнение $Au = f$ с оператором A , то применяя к нему ОП T со сплетающим свойством (95), получаем уравнение с оператором B вида $Bv = g$, где обозначено $v = Tu$, $g = Tf$. Поэтому если второе уравнение с оператором B является более простым и для него уже известны формулы для решений, то мы получаем и представления для решений первого уравнения $u = T^{-1}v$. Разумеется, при этом обратный оператор преобразования должен существовать и действовать в рассматриваемых пространствах, а для получения явных представлений решений должно быть получено и явное представление этого обратного оператора. Таково одно из простейших применений техники ОП в теории дифференциальных уравнений, как обыкновенных, так и с частными производными.

Изложению теории ОП и их приложениям посвящены монографии, например, [24, 27–29], а также многочисленные работы, процитированные в них. В настоящее время теория операторов преобразования представляет собой полностью оформившийся самостоятельный раздел математики, находящийся на стыке дифференциальных и интегральных уравнений, функционального анализа, теории функций, комплексного анализа, теории специальных функций и дробного интегродифференцирования. Необходимость теории операторов преобразования доказана большим числом ее приложений.

Фактически современная теория операторов преобразования возникла из двух примеров, ставших классическими. Первым примером являются ОП, переводящие оператор Штурма — Лиувилля с некоторым потенциалом $q(x)$ во вторую производную:

$$TD^2y(x) + q(x)y(x) = D^2Ty(x), \quad D^2y(x) = y''(x), \quad (96)$$

при некотором выборе естественных краевых условий (см., например, [30, 31]).

Второй пример — это задача о преобразовании оператора Бесселя во вторую производную:

$$TB_\nu f = D^2Tf, \quad B_\nu = D^2 + \frac{2\nu + 1}{x}D, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad \nu \in \mathbb{C}, \quad (97)$$

или возмущенного потенциалом оператора Бесселя

$$TB_\nu + q(x)f = D^2Tf, \quad \nu \in \mathbb{C}. \quad (98)$$

На этом пути возникли ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи и их многочисленные обобщения (см., например, [24, 27, 28, 32, 33]). Такие операторы преобразования находят многочисленные приложения при изучении уравнений с частными производными с особенностями.

4. Операторы Бушмана — Эрдейи первого рода

Рассмотрим важный класс интегральных операторов, который при определенном выборе параметров является одновременным обобщением ОП Сонина — Пуассона — Дельсарта и их сопряженных, операторов дробного интегродифференцирования Римана — Лиувилля и Эрдейи — Кобера, а также интегральных преобразований Мелера — Фока (см. [25, 26]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Операторами Бушмана — Эрдейи первого рода* называются интегральные операторы

$$B_{0+}^{\nu, \mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (99)$$

$$E_{0+}^{\nu, \mu} f = \int_0^x (x^2 - t^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (100)$$

$$B_-^{\nu, \mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} P_\nu^\mu \left(\frac{t}{x} \right) f(t) dt, \quad (101)$$

$$E_-^{\nu, \mu} f = \int_x^\infty (t^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} \mathbb{P}_\nu^\mu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt. \quad (102)$$

Здесь $P_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра первого рода [8], $\mathbb{P}_\nu^\mu(z)$ — та же функция на разрезе $-1 \leq t \leq 1$, $f(x)$ — локально суммируемая функция, удовлетворяющая некоторым ограничениям на рост при $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow \infty$. Параметры μ, ν — комплексные числа, $\operatorname{Re} \mu < 1$, можно ограничиться значениями $\operatorname{Re} \nu \geq -1/2$.

Важность операторов Бушмана — Эрдейи во многом обусловлена их многочисленными приложениями. Например, они встречаются в следующих вопросах теории уравнений с частными производными: при решении задачи Дирихле для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в четверти плоскости, установлении соотношений между значениями решений уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу на многообразии начальных данных и характеристике, теории преобразования Радона, так как в силу результатов Людвига действие преобразования Радона при разложении по сферическим гармоникам сводится как раз к операторам Бушмана — Эрдейи (или, что то же самое, — операторам Чебышева — Гегенбауэра) по радиальной переменной [34–37], при исследовании краевых задач для уравнений с особенностями внутри области (см. [24, 27, 28]).

Приведем основные свойства введенных выше интегральных операторов (99)–(102). Вначале распространим их определения на случай значения параметра $\mu = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Введем при $\mu = 1$ операторы Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости по формулам

$$B_{0+}^{\nu,1} f = \frac{d}{dx} \int_0^x P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (103)$$

$$E_{0+}^{\nu,1} f = \int_0^x P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \frac{df(t)}{dt} dt, \quad (104)$$

$$B_-^{\nu,1} f = \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{t}{x} \right) \left(-\frac{df(t)}{dt} \right) dt, \quad (105)$$

$$E_-^{\nu,1} f = \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{t} \right) f(t) dt, \quad (106)$$

где $P_\nu(z) = P_\nu^0(z)$ — функция Лежандра.

Теорема 21. Справедливы следующие формулы факторизации операторов Бушмана — Эрдейи на подходящих функциях через дробные интегралы Римана — Лиувилля и Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости:

$$B_{0+}^{\nu,\mu} f = I_{0+}^{1-\mu} {}_1S_{0+}^\nu f, \quad B_-^{\nu,\mu} f = {}_1P_-^\nu I_-^{1-\mu} f, \quad (107)$$

$$E_{0+}^{\nu,\mu} f = {}_1P_{0+}^\nu I_{0+}^{1-\mu} f, \quad E_-^{\nu,\mu} f = I_-^{1-\mu} {}_1S_-^\nu f. \quad (108)$$

Эти формулы позволяют «разделить» параметры ν и μ . Мы докажем, что операторы (103)–(106) являются изоморфизмами пространств $L_2(0, \infty)$, если ν не равно некоторым исключительным значениям. Поэтому операторы (103)–(106) по действию в пространствах типа L_2 в определенном смысле подобны операторам дробного интегродифференцирования $I^{1-\mu}$, с которыми они совпадают при $\nu = 0$.

Исходя из этого, введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Число $\rho = 1 - \operatorname{Re} \mu$ назовем *порядком гладкости операторов Бушмана — Эрдейи* (103)–(106).

Таким образом, при $\rho > 0$ (т. е. при $\operatorname{Re} \mu < 1$) операторы Бушмана — Эрдейи являются сглаживающими, а при $\rho < 0$ (т. е. при $\operatorname{Re} \mu < 1$) уменьшающими гладкость в пространствах типа $L_2(0, \infty)$. Операторы (103)–(106), для которых $\rho = 0$, являются по данному определению операторами нулевого порядка гладкости.

Перечислим основные свойства операторов Бушмана — Эрдейи первого рода (103)–(106) с функцией Лежандра I рода в ядре. При некоторых специальных значениях параметров ν, μ операторы Бушмана — Эрдейи сводятся к более простым. Так, при значениях $\mu = -\nu$ или $\mu = \nu + 2$ они являются операторами Эрдейи — Кобера; при $\nu = 0$ — операторами дробного интегродифференцирования $I_{0+}^{1-\mu}$ или $I_-^{1-\mu}$; при $\nu = -\frac{1}{2}$, $\mu = 0$ или $\mu = 1$ ядра выражаются через эллиптические интегралы; при $\mu = 0$, $x = 1$, $\nu = it - \frac{1}{2}$ оператор $B_-^{\nu,0}$ лишь на постоянную отличается от преобразования Мелера — Фока [25, 26].

Будем рассматривать наряду с оператором Бесселя также тесно связанный с ним дифференциальный оператор

$$L_\nu = D^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{x^2} = \left(\frac{d}{dx} - \frac{\nu}{x} \right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{\nu}{x} \right), \quad (109)$$

который при $\nu \in \mathbb{N}$ является оператором углового момента из квантовой механики. Их взаимосвязь устанавливает

Теорема 22. Пусть пара ОП X_ν, Y_ν сплетает L_ν и вторую производную:

$$X_\nu L_\nu = D^2 X_\nu, \quad Y_\nu D^2 = L_\nu Y_\nu. \quad (110)$$

Введем новую пару ОП по формулам

$$S_\nu = X_{\nu-1/2} x^{\nu+1/2}, \quad P_\nu = x^{-(\nu+1/2)} Y_{\nu-1/2}. \quad (111)$$

Тогда пара новых ОП S_ν, P_ν сплетает оператор Бесселя и вторую производную:

$$S_\nu B_\nu = D^2 S_\nu, \quad P_\nu D^2 = B_\nu P_\nu. \quad (112)$$

Теорема 23. Пусть $\operatorname{Re} \mu \leq 1$. Тогда оператор $B_{0+}^{\nu,\mu}$ является оператором преобразования типа Сонина и удовлетворяет на подходящих функциях соотношению (110).

Аналогичный результат справедлив и для других операторов Бушмана — Эрдейи. При этом $E_-^{\nu,\mu}$ также является оператором типа Сонина, а $E_{0+}^{\nu,\mu}$ и $B_-^{\nu,\mu}$ — операторами типа Пуассона.

Теперь сделаем важное замечание. Из приведенной теоремы следует, что ОП Бушмана — Эрдейи связывают собственные функции операторов Бесселя и второй производной. Таким образом, половина ОП Бушмана — Эрдейи переводят тригонометрические или экспоненциальные функции в приведенные функции Бесселя, а другая половина наоборот. Эти формулы здесь не приводятся, их нетрудно выписать явно. Все они являются обобщениями исходных формул Сонина и Пуассона и представляют существенный интерес. Еще раз отметим, что подобные формулы являются непосредственными следствиями доказанных сплетающих свойств ОП Бушмана — Эрдейи и могут быть непосредственно проверены при помощи таблиц интегралов от специальных функций.

Важнейшим свойством операторов Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости является их унитарность при целых ν . Отметим, что при интерпретации L_ν как оператора углового момента в квантовой механике параметр ν как раз и принимает целые неотрицательные значения.

Теорема 24. Для унитарности в L_2 операторов (103)–(106) необходимо и достаточно, чтобы число ν было целым. В этом случае пары операторов $({}_1S_{0+}^\nu, {}_1P_-^\nu)$ и $({}_1S_-^\nu, {}_1P_{0+}^\nu)$ взаимно обратны.

Эта теорема будет использована ниже для установления унитарности одного класса «сдвинутых» операторов типа Харди.

5. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи второго рода

Теперь определим и изучим операторы Бушмана — Эрдейи второго рода. Их ядра выражаются через функции Лежандра второго рода.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Введем новую пару операторов Бушмана — Эрдейи с функциями Лежандра второго рода в ядре

$${}_2S^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \quad (113)$$

$${}_2P^\nu f = \frac{2}{\pi} \left(- \int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right). \quad (114)$$

Эти операторы являются аналогами операторов первого рода нулевого порядка гладкости. При $y \rightarrow x \pm 0$ интегралы понимаются в смысле главного значения. Отметим без доказательства, что эти операторы определены и являются сплетающими при некоторых условиях на функции $f(x)$ (при этом оператор (113) будет типа Сонина, (114) — типа Пуассона).

Теорема 25. Справедливы формулы для норм

$$\|{}_2S^\nu\|_{L_2} = \max(1, \sqrt{1 + \sin \pi \nu}), \quad (115)$$

$$\|{}_2P^\nu\|_{L_2} = 1/\min(1, \sqrt{1 + \sin \pi \nu}). \quad (116)$$

Оператор ${}_2S^\nu$ ограничен при всех ν . Оператор ${}_2P^\nu$ не является непрерывным тогда и только тогда, когда $\sin \pi \nu = -1$.

Для унитарности в L_2 операторов ${}_2S^\nu$ и ${}_2P^\nu$ необходимо и достаточно, чтобы параметр ν был целым числом.

Операторы второго рода связаны с преобразованиями Гильберта на полуоси.

Теорема 26. Справедливы представления

$${}_2S^0 f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{y}{x^2 - y^2} f(y) dy, \quad (117)$$

$${}_2S^{-1} f = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x}{x^2 - y^2} f(y) dy. \quad (118)$$

Для операторов второго рода введем также более общие аналоги операторов преобразования Бушмана — Эрдейи первого рода с двумя параметрами по формулам

$${}_2S^{\nu, \mu} f = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{\mu}{2}} e^{-\mu\pi i} Q_\nu^\mu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{\mu}{2}} Q_\nu^\mu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right) \quad (119)$$

где $Q_\nu^\mu(z)$ — функция Лежандра второго рода, $Q_\nu^\mu(z)$ — значение этой функции на разрезе, $\operatorname{Re} \mu < 1$. Второй подобный оператор определяется как формально сопряженный в $L_2(0, \infty)$ к (119).

6. Операторы преобразования Бушмана — Эрдейи третьего рода

Перейдем к построению операторов преобразования, унитарных при всех ν . Такие операторы определяются по формулам

$$S_U^\nu f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2S^\nu f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1S_-^\nu f, \quad (120)$$

$$P_U^\nu f = -\sin \frac{\pi\nu}{2} {}_2P^\nu f + \cos \frac{\pi\nu}{2} {}_1P_-^\nu f. \quad (121)$$

Для любых значений $\nu \in \mathbb{R}$ они являются линейными комбинациями операторов преобразования Бушмана — Эрдейи 1 и 2 рода нулевого порядка гладкости. Их можно отнести к операторам Бушмана — Эрдейи третьего рода (см. ниже). В интегральной форме эти операторы имеют вид

$$S_U^\nu f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \left(-\frac{d}{dx} \right) \int_x^\infty P_\nu \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy + \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \times \left(\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{x}{y} \right) f(y) dy \right), \quad (122)$$

$$P_U^\nu f = \cos \frac{\pi\nu}{2} \int_0^x P_\nu \left(\frac{y}{x} \right) \left(\frac{d}{dy} \right) f(y) dy - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi\nu}{2} \times \left(-\int_0^x (x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy - \int_x^\infty (y^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}} Q_\nu^1 \left(\frac{y}{x} \right) f(y) dy \right). \quad (123)$$

Теорема 27. Операторы (120)–(123) при всех $\nu \in \mathbb{R}$ являются унитарными, взаимно сопряженными и обратными в L_2 . Они являются сплетающими и действуют по формулам (120)–(123). При этом S_U^ν является оператором типа Сонина (Сонина — Катрахова), а P_U^ν — типа Пуассона (Пуассона — Катрахова).

Все рассмотренные выше интегральные операторы имеют ОП в форме подобной (122), (123), но только с ядрами, выражающимися через общую гипергеометрическую функцию Гаусса, были впервые построены в 1980 г. В. В. Катраховым [38]. Он построил их, возмущая дробные интегралы Римана — Лиувилля экспоненциальными заменами. Поэтому в [24] были предложены логичные соответствующие названия: операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова. Их выражение через функции Лежандра первого и второго родов получено в [25, 26], кроме того, их удастся включить в общую схему построения операторов преобразования композиционным методом [27, 28, 39–44]. На этом пути построение ОП перестает быть набором специальных отдельных приемов, а встраивается в общую методику построения целых классов подобных операторов преобразования композиционным методом.

7. Приложения операторов Бушмана — Эрдейи

Приведем здесь только краткий список приложений, подробное изложение в [24, 27, 28].

- С помощью ОП Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости дан положительный ответ на вопрос, который давно обсуждался в устном «фольклоре»: пространства *И. А. Киприянова изоморфны весовым пространствам С. Л. Соболева* (см. [45]). Разумеется, с помощью ОП Бушмана — Эрдейи рассмотрен только самый простой случай, результаты можно обобщать на другие виды нормировок, многомерный случай, замену неограниченных областей на ограниченные, что еще предстоит рассмотреть в будущем, но это не изменит принципиально основного вывода. Сказанное ни в коем случае не умаляет ни существенного значения, ни необходимости использования пространств *И. А. Киприянова* для подходящего круга задач теории функций и дифференциальных уравнений с частными производными. Принципиальная важность пространств *И. А. Киприянова* для теории уравнений в частных производных различных типов с операторами Бесселя отражает общий методологический подход, который автор услышал в виде красивого афоризма на пленарной лекции Л. Д. Кудрявцева: «Каждое уравнение должно изучаться в своем собственном пространстве!»

Полученные вложения могут быть использованы для прямого переноса известных оценок для решений *B*-эллиптических уравнений в пространствах *И. А. Киприянова* [45] на оценки в весовых пространствах *С. Л. Соболева*, это непосредственное применение приведенных в статье условий ограниченности и сплетающих свойств операторов преобразования Бушмана — Эрдейи.

- Построенные операторы преобразования позволяют выписывать явные формулы, выражающие решения уравнений в частных производных с операторами Бесселя через невозмущенные уравнения. Примером служит *B*-эллиптическое уравнение с операторами Бесселя по каждой переменной вида

$$\sum_{k=1}^n B_{\nu, x_k} u(x_1, \dots, x_n) = f, \quad (124)$$

аналогичные *B*-гиперболические и *B*-параболические уравнения [45]. Эта идея ранее осуществлялась с использованием операторов преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта, а новые типы операторов преобразования позволяют получить новые классы подобных формул соответствия.

- Рассмотрим уравнение Эйлера — Пуассона — Дарбу в полупространстве

$$B_{\alpha,t}u(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\alpha+1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_x u + F(t,x),$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$. Дадим нестрогое описание процедуры, позволяющей получать различные постановки начальных условий при $t = 0$ единым методом. Образует по формулам (109) операторы преобразования $X_{\alpha,t}$ и $Y_{\alpha,t}$. Предположим, что существуют выражения $X_{\alpha,t}u = v(t,x)$, $X_{\alpha,t}F = G(t,x)$. Пусть обычная (несингулярная) задача Коши

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta_x v + G, \quad v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v'_t|_{t=0} = \psi(x) \quad (125)$$

корректно разрешима в полупространстве. Тогда в предположении, что $Y_{\alpha,t} = X_{\alpha,t}^{-1}$, получаем следующие начальные условия для уравнения ЭПД:

$$X_{\alpha}u|_{t=0} = a(x), \quad (X_{\alpha}u)'|_{t=0} = b(x). \quad (126)$$

При этом различному выбору операторов преобразования $X_{\alpha,t}$ (операторы Сонина — Пуассона — Дельсарта, Бушмана — Эрдейи первого, второго, третьего родов, Бушмана — Эрдейи нулевого порядка гладкости, унитарные операторы преобразования Сонина — Катрахова и Пуассона — Катрахова, обобщенные операторы Бушмана — Эрдейи) будут соответствовать различные начальные условия. Следуя изложенной методике, в каждом конкретном случае их можно привести к более простым аналитическим формулам.

- Еще с 1950-х гг. специалистам было известно, что никакой новой теории для построения полиномиальных решений В-эллиптических уравнений не требуется. Это следует из простого факта, что уже операторы преобразования Сонина — Пуассона — Дельсарта переводят степень в степень. Следовательно, они переводят В-гармонические полиномы в гармонические и наоборот по явным формулам с очевидными оценками норм. Поэтому и обобщенные сферические гармоники строятся по явным формулам из обычных, так как они являются сужениями соответствующих полиномов на единичную сферу. Данный подход подробно изложен, например, в работах Рубина [36, 37]. Операторы Бушмана — Эрдейи добавляют новую степень свободы ко всем этим построениям.

- Унитарность сдвинутых на единичный классических операторов Харди — это известный результат, он получается как частный случай из приведенных выше теорем. Подстановка других натуральных значений параметра приводит к новому бесконечному семейству интегральных операторов простого вида, унитарных в $L_2(0, \infty)$.

Приведем последний результат более подробно для нескольких первых натуральных значениях параметра.

Теорема 28. Следующие операторы, действующие на дифференцируемые функции на $(0, \infty)$, образуют пары взаимно обратных изометричных операторов в $L_2(0, \infty)$:

$$U_3 f = f + \int_0^x f(y) \frac{dy}{y}, \quad U_4 f = f + \frac{1}{x} \int_x^\infty f(y) dy,$$

$$\begin{aligned}
U_5 f &= f + 3x \int_0^x f(y) \frac{dy}{y^2}, & U_6 f &= f - \frac{3}{x^2} \int_0^x y f(y) dy, \\
U_7 f &= f + \frac{3}{x^2} \int_x^\infty y f(y) dy, & U_8 f &= f - 3x \int_x^\infty f(y) \frac{dy}{y^2}, \\
U_9 f &= f + \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{15x^2}{y^3} - \frac{3}{y} \right) f(y) dy, & U_{10} f &= f + \frac{1}{2} \int_x^\infty \left(\frac{15y^2}{x^3} - \frac{3}{x} \right) f(y) dy.
\end{aligned}$$

Подобные результаты обобщаются на любые целые параметры и выписываются явно через многочлены Лежандра. По мнению авторов, эти результаты могут стать полезным добавлением к небольшому числу примеров унитарных операторов, которые обычно приводятся в монографиях, учебниках и лекциях для студентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. Multi-dimensional integral transform with Fox function in kernel in Lebesgue-type spaces // Mathematics. 2024. V. 12, N 12. 1829. 10 pp.
2. Sitnik S. M., Skoromnik O. V. One-dimensional and multi-dimensional integral transforms of Buschman–Erdelyi type with Legendre functions in kernels // Transmutation Operators and Applications. Trends in Mathematics. Basel: Birkhauser; Springer Nature Switzerland AG, 2020. P. 293–319.
3. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Shlapakov S. A. Multi-dimensional generalized integral transform in the weighted spaces of summable functions // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43, N 6. P. 1408–1416.
4. Sitnik S. M., Skoromnik O. V., Papkovich M. V. A special type of multi-dimensional integral transform with Fox H-function in Lebesgue-type weighted spaces // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 9. P. 4613–4623.
5. Скоромник О. В., Папкович М. В. Многомерное интегральное преобразование с H-функцией в ядре в весовых пространствах интегрируемых функций // Вестн. Могилевск. гос. ун-та им. А. А. Кулешова. Сер. В. Естественные науки. 2025. Т. 2. С. 27–44.
6. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
7. Kilbas A. A., Saigo M. H-Transforms. Theory and applications. Boca Raton, Fl.: Chapman and Hall, 2004.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. Гипергеометрическая функция Гаусса. М.: Наука, 1973.
9. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука, 1966.
10. Copson E. T. On a singular boundary value problem for an equation of hyperbolic type // Arch. Ration. Mech. Anal. 1958. V. 1, N 4. P. 349–356.
11. Buschman R. G. An inversion integral for a general Legendre transformation // SIAM Rev. 1963. V. 5, N 3. P. 232–233.
12. Erdélyi A. An integral equation involving Legendre functions // J. Soc. Indust. Appl. Math. 1964. V. 12, N 1. P. 15–30.
13. Srivastava K. N. On some integral transforms // Math. Japon. 1962. V. 6, N 3. P. 65–72.
14. Habibullah G. M. An integral operator involving a Legendre function // J. Natur. Sci. Math. 1981. V. 21, N 2. P. 147–153.
15. Erdélyi A. Some integral equations involving finite parts of divergent integrals // Glasgow Math. J. 1967. V. 8, N 1. P. 50–54.
16. Скоромник О. В. Решение интегральных уравнений с функцией Лежандра в ядрах в $\mathcal{L}_{\eta,r}$ -пространствах // Вест. Бел. гос. ун-та. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. 2008. № 13. С. 68–73.

17. Смирнов М. М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика и астрономия. 1981. Т. 3, № 13. С. 117–119.
В 17 и 18 название действительно одно и то же?
18. Смирнов М. М. Об одном уравнении Вольтерра с гипергеометрической функцией в ядре // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. математика, механика и астрономия. 1984. Т. 3, № 7. С. 111–113.
19. Kilbas A. A., Skoromnik O. V. Integral transforms with the Legendre function of the first kind in the kernels on $\mathcal{L}_{\nu,r}$ -spaces // Integral Transforms and Special Functions. 2009. V. 20, N 9. P. 653–672.
20. Brychkov Yu. A., Glaeske H.-J., Prudnikov A. P., Vu Kim Tuan. Multidimensional integral transformations. Philadelphia, PA: Gordon and Breach, 1992.
21. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
22. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Вычисление интегралов и преобразование Меллина. М.: ВИНТИ, 1989. (Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. 27).
23. Скоромник О. В., Папкович М. В. Формулы обращения для отдельных случаев многомерного интегрального преобразования с Н-функцией в ядре в весовых пространствах интегрируемых функций // Мат. методы в технологиях и технике. 2025. № 12-4. С. 24–26.
24. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2018. Т. 64, № 2. С. 211–426.
25. Ситник С. М. Унитарность и ограниченность операторов Бушмана — Эрдеи нулевого порядка гладкости. Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 1990.
26. Ситник С. М. Факторизация и оценки норм в весовых лебеговых пространствах операторов Бушмана — Эрдеи // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320, № 6. С. 1326–1330.
27. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. М.: Физматлит, 2019.
28. Elina Shishkina, Sergei Sitnik Transmutations, singular and fractional differential equations with applications to mathematical physics. Ser. Mathematics in Science and Engineering. 1st Ed.. Basel: Elsevier, 2020.
29. Carroll R. Transmutation theory and applications. Amsterdam: North-Holland, 1986.
30. Марченко В. А. Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наук. Думка, 1972.
31. Марченко В. А. Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. Думка, 1977.
32. Левитан Б. М. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. 1951. Т. 6, № 2. С. 102–143.
33. Левитан Б. М. Обратные задачи Штурма — Лиувилля. М.: Наука, 1984.
34. Deans S. R. The Radon transform and some of its applications. New York: John Wiley & Sons, 1983.
35. Natterer F. The mathematics of computerized tomography. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.
36. Rubin B. Weighted spherical harmonics and generalized spherical convolutions. Jerusalem: The Hebrew University of Jerusalem, 1999/2000.
37. Rubin B. Introduction to Radon transforms (with elements of fractional calculus and harmonic analysis. New York: Camb. Univ. Press, 2015.
38. Катрахов В. В. Изометрические операторы преобразования и спектральная функция для одного класса одномерных сингулярных псевдодифференциальных операторов // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 5. С. 1048–1051.
39. Катрахов В. В., Ситник С. М. Метод факторизации в теории операторов преобразования // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. (Мемориальный сборник памяти Бориса Алексеевича Бубнова, отв. ред. В. Н. Врагов). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1990. С. 104–122.
40. Катрахов В. В., Ситник С. М. Композиционный метод построения В-эллиптических, В-гиперболических и В-параболических операторов преобразования // Докл. АН СССР. 1994. Т. 337, № 3. С. 307–311.

41. Ситник С. М. Метод факторизации операторов преобразования в теории дифференциальных уравнений // Вестн. Самарск. гос. ун-та (СамГУ). Естественная серия. 2008. Т. 8/1. С. 237–248.
42. Shishkina E. L., Sitnik S. M., Jebabli I. Application of integral transforms composition method (ITCM) to obtaining transmutations via integral transforms with Bessel functions in kernels // Сиб. электрон. мат. изв. 2021. V. 18, N 2. P. 884–900.
43. Sitnik S. M., Jebabli I. On applications of integral transforms composition method // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44, N 3. P. 1029–1042.
44. Sitnik S. M., Jebabli I. The integral transforms composition method for generalized index shifted transmutations // Lobachevskii J. Math. 2024. V. 45, N 7. P. 3401–3415.
45. Киприянов И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи. М.: Наука. Физматлит, 1997.

Поступила в редакцию 1 апреля 2026 г.

После доработки 3 апреля 2026 г.

Принята к публикации 3 апреля 2026 г.

Ситник Сергей Михайлович (ORCID 0000-0001-9661-4338)
Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет (МГСУ),
Ярославское шоссе, 26, Москва 129337
mathsms@yandex.ru

Скоромник Оксана Валерьевна (ORCID 0009-0009-7222-4250)
Полоцкий государственный университет имени Ефросинии Полоцкой,
ул. Блохина, 29, Новополоцк 211440. Беларусь
skoromnik@gmail.com