

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВЕСТЕРВЕЛЬТА

В. Г. Романов

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение Вестервельта. В этом уравнении опускается член, описывающий диффузию звука. Тогда уравнение Вестервельта становится квазилинейным гиперболическим уравнением. Далее это уравнение линеаризуется и для него ставится и изучается обратная задача об определении коэффициента при нелинейности, зависящего от пространственных переменных. Выписывается структура решения задачи Коши в окрестности фронта волны. На этой основе обратная задача сводится к задаче интегральной геометрии на семействе прямых линий с заданной весовой функцией. Весовая функция, так же как и семейство прямых, инвариантна относительно всевозможных вращений вокруг фиксированной точки. Это свойство позволяет установить теорему единственности решения обратной задачи и предложить удобный и эффективный метод построения ее решения.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.411

Ключевые слова: уравнение Вестервельта, линеаризация, обратная задача, единственность, метод решения.

§ 1. Постановка задачи

Нелинейное распространение слабо нелинейных акустических волн описывается уравнением Вестервельта (см. [1–5]):

$$p_{tt} - \Delta p - b\Delta p_t = q(\mathbf{x})(p^2)_{tt} + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (1)$$

в котором $p(\mathbf{x}, t)$ — давление, b и T — постоянные положительные числа, $q(\mathbf{x})$ — гладкая финитная функция, носитель которой расположен в шаре $B_{R_0} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R_0\}$, $f(\mathbf{x}, t)$ — внешняя сила. В этом уравнении члены $b\Delta p_t$ и $q(\mathbf{x})(p^2)_{tt}$ описывают эффекты второго порядка малости (с учетом того, что само давление $p(\mathbf{x}, t)$ предполагается малым). Уравнение Вестервельта находит большие приложения в диагностической медицине (см., например, [5–8]). Основная задача диагностики здесь — отыскание функции $q(\mathbf{x})$ по некоторой известной информации о решениях уравнения (1).

Пренебрегая в уравнении (1) членом $b\Delta p_t$, описывающим диффузию звука, получаем нелинейное уравнение гиперболического типа

$$p_{tt} - \Delta p = q(\mathbf{x})(p^2)_{tt} + f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (2)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2026-0029).

которое в дальнейшем и будем рассматривать. Используя предположение о малости коэффициента $q(\mathbf{x})$, линеаризуем уравнение (2). Для этого представим функцию $p(\mathbf{x}, t)$ в виде

$$p(\mathbf{x}, t) = p_0(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t),$$

в котором функция $u(\mathbf{x}, t)$ мала по сравнению с $p_0(\mathbf{x}, t)$. Тогда для функций $p_0(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t)$ получим уравнения

$$(p_0)_{tt} - \Delta p_0 = f(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad (3)$$

$$u_{tt} - \Delta u = q(\mathbf{x})(p_0^2)_{tt}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)). \quad (4)$$

Поставим задачи Коши для уравнений (3) и (4). Пусть $p_0(\mathbf{x}, t)$ является решением задачи Коши

$$(p_0)_{tt} - \Delta p_0 = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})r(t), \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)), \quad p_0|_{t=0} = 0, \quad (p_0)_t|_{t=0} = 0, \quad (5)$$

в которой $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ — дельта-функция Дирака, локализованная в точке $\mathbf{y} \in S_R$, $S_R = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R\}$, $R > R_0$, $r(t)$ — гладкая функция для всех $t \geq 0$ и такая, что $r(0) = 0$, $r'(0) = 1$.

Решение задачи (5) дается формулой

$$p_0(\mathbf{x}, t) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \frac{r(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times [0, T]),$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 1$, если $t \geq 0$, и $H(t) = 0$, если $t < 0$. Тогда задача Коши для функции $u(\mathbf{x}, t)$ имеет вид

$$u_{tt} - \Delta u = q(\mathbf{x})(p_0^2)_{tt}, \quad (\mathbf{x}, t) \in (\mathbb{R}^3 \times (0, T)); \quad u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \quad (6)$$

Решение задачи (6) зависит от параметра $\mathbf{y} \in S_R$. Обозначим его через $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$.

Постановка обратной задачи. Пусть $T > 2R$. Найти $q(\mathbf{x})$ в области B_{R_0} , если задана функция

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t=|\mathbf{x}-\mathbf{y}|+0}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R), \quad (7)$$

где $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ — решение задачи (6).

Исследованию обратных задач для уравнений нелинейной акустики посвящены публикации [6–11] и ряд других. В них выполнен анализ возможности определения параметра нелинейности $q(\mathbf{x})$, который связан с определенными физическими величинами, представляющими непосредственный интерес в диагностической медицине. В основном эти публикации связаны с исследованием поведения пучка волн определенной частоты и извлечением соотношений, на основе которых определяется желаемый параметр. В настоящей работе предлагается другой подход к исследованию обратной задачи, основанный на вычислении амплитудных характеристик бегущей акустической волны на ее фронте для волн, проходящих через неоднородность среды. Это позволяет свести исходную обратную задачу к задаче, очень близкой в качественном отношении к задаче рентгеновской томографии. Отличие ее от обычной задачи томографии состоит в появлении в заданных интегралах известного весового множителя. В работе выполнено исследование этой задачи, в результате которого установлена теорема единственности решения обратной задачи и предложен эффективный алгоритм ее решения.

§ 2. Структура решения задачи (6)

Теорема 1. Пусть

$$q \in C(\mathbb{R}^3), \quad q(\mathbf{x}) = 0 \text{ для } |\mathbf{x}| \geq R_0, \quad r \in C^\infty[0, T], \quad r(0) = 0, \quad r'(0) = 1. \quad (8)$$

Тогда решение задачи (6) в окрестности фронта $t = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ сферической волны представимо в виде

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)[\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) + v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})], \quad (9)$$

в котором $v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ непрерывная функция, бесконечно малая более высокого порядка, чем $(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$, при $(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \rightarrow 0$, а функция $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вычисляется по формуле

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{(4\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{|\xi - \mathbf{y}|}, \quad (10)$$

в которой $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — отрезок прямой, соединяющей точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, $\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, s — длина отрезка $[\mathbf{y}, \xi]$, ds — ее элемент, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу условий (8) функцию $(p_0^2)_{tt}$ можно представить в виде

$$(p_0^2)_{tt} = H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)A(\mathbf{x}, \mathbf{y})[1 + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)B(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})], \quad (11)$$

в котором $A(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ вычисляется по формуле

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2}{(4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2}, \quad (12)$$

а $B(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ является бесконечно дифференцируемой функцией всех аргументов. Решение задачи (6) с учетом формулы (11) дается формулой Кирхгофа

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} \times \int_{|\xi - \mathbf{x}| \leq t - |\xi - \mathbf{y}|} \frac{q(\xi)A(\xi, \mathbf{y})[1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\xi - \mathbf{x}| - |\xi - \mathbf{y}|)]}{|\xi - \mathbf{x}|} d\xi. \quad (13)$$

В этой формуле интеграл берется по области

$$D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| \leq t\},$$

ограниченной поверхностью эллипсоида вращения

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| = t\}$$

с фокусами в точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Заметим, что при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$ эллипсоид $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ вырождается в отрезок $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Преобразуем интеграл в формуле (13), введя криволинейные координаты точки ξ . С этой целью введем, следуя [12], семейство софокусных эллипсоидов формулой

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau) = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi - \mathbf{x}| + |\xi - \mathbf{y}| = \tau\},$$

где $\tau \in [|\mathbf{x} - \mathbf{y}|, t]$. Параметр τ примем в качестве одной из криволинейных координат.

Введем также декартову систему координат $\xi' = (\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3)$ с центром в точке $\mathbf{y}$ и связанную с ней сферическую систему координат r, θ, φ . Положим

$$\xi = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad \xi'_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad \xi'_3 = r \cos \theta, \quad (14)$$

$$\theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Единичные орты $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, выберем так, чтобы орт $\mathbf{e}_3$ совпал с единичным вектором

$$\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta), \quad \vartheta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi),$$

а орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ примем ортогональными друг другу и орту $\mathbf{e}_3$. При этом ϑ и ϕ являются функциями $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Более точно, выберем $\mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (\cos \vartheta \cos \phi, \cos \vartheta \sin \phi, -\sin \vartheta), \\ \mathbf{e}_2 &= (-\sin \phi, \cos \phi, 0), \\ \mathbf{e}_3 &= (\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta). \end{aligned}$$

Тогда из формулы (14) следует, что

$$|\xi - \mathbf{y}| = r, \quad |\xi - \mathbf{x}| = (|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2r|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta + r^2)^{1/2}, \quad (15)$$

и уравнение, определяющее эллипсоид $E(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \tau)$, имеет вид

$$r = \frac{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{2(\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta)}.$$

В качестве второй криволинейной координаты примем угол φ , а в качестве третьей — цилиндрическую координату

$$z = \xi'_3 = r \cos \theta = \frac{(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2) \cos \theta}{2(\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \cos \theta)}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

Выразим $\cos \theta$ и $\sin \theta$ через z, τ . Используя предыдущую формулу, находим, что

$$\cos \theta(z, \tau) = \frac{2z\tau}{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (16)$$

$$\sin \theta(z, \tau) = \frac{[(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2 - 4z^2\tau^2]^{1/2}}{\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}. \quad (17)$$

Формула (17) позволяет найти уравнение эллипсоида в координатах z, τ :

$$r = r(z, \tau) = \frac{z}{\cos \theta(z, \tau)} = \frac{1}{2\tau}(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|). \quad (18)$$

Из формулы (16) следует, что

$$z \in [z_1(\tau), z_2(\tau)], \quad z_1(\tau) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \tau}{2}, \quad z_2(\tau) = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \tau}{2}.$$

При этом

$$r \in [r_1(\tau), r_2(\tau)], \quad r_1(\tau) = \frac{\tau - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2}, \quad r_2(\tau) = \frac{\tau + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2}.$$

Из формул (17) и (18) следует также равенство

$$r(z, \tau) \sin \theta = \frac{1}{2\tau} [(\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)^2 - 4z^2\tau^2]^{1/2} =: h(z, \tau). \quad (19)$$

В результате этих вычислений формула (14) преобразуется к виду

$$\xi = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \quad \xi'_1 = h(z, \tau) \cos \varphi, \quad \xi'_2 = h(z, \tau) \sin \varphi, \quad \xi'_3 = z, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \quad (20)$$

В криволинейных координатах z, φ, τ имеем

$$d\xi = h(z, \tau) \frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau dz d\varphi.$$

Вычисляя $\frac{1}{2} \frac{\partial h^2(z, \tau)}{\partial \tau}$, находим, что

$$\frac{1}{2} \frac{\partial h^2(z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{4\tau^3} (\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(\tau^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|).$$

Из формул (15) и (18) находим, что

$$|\xi - \mathbf{x}| = \frac{\tau^2 + |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 - 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{2\tau}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\xi}{|\xi - \mathbf{x}|} = \frac{1}{2\tau^2} (\tau^2 - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2 + 2z|\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\tau dz d\varphi = \frac{r(z, \tau)}{\tau} d\tau dz d\varphi. \quad (21)$$

Учитывая формулу (21), запишем уравнение (13) в виде

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} \times \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}^t \int_{z_1(\tau)}^{z_2(\tau)} \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - \tau)] \frac{r(z, \tau)}{\tau} d\varphi dz d\tau, \quad (22)$$

в котором переменная ξ определена формулами (19) и (20). Заменяем в интеграле переменные z и τ на новые переменные ζ и τ' :

$$z = z_1(\tau) + (z_2(\tau) - z_1(\tau))\zeta = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \tau}{2} + \tau\zeta, \quad \tau = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'.$$

При такой замене

$$\frac{dz d\tau}{\tau} = (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) d\zeta d\tau'.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \widehat{z}(\zeta, \tau', t) &= -\frac{\tau'(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{2} + \zeta (|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \widehat{h}(\zeta, \tau', t) &= h(\widehat{z}(\zeta, \tau', t), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \widehat{r}(\zeta, \tau', t) &= r(\widehat{z}(\zeta, \tau', t), |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)\tau'), \\ \xi &= \mathbf{y} + \sum_{i=1}^3 \xi'_i \mathbf{e}_i, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\xi'_1 = \widehat{h}(\zeta, \tau', t) \cos \varphi, \quad \xi'_2 = \widehat{h}(\zeta, \tau', t) \sin \varphi, \quad \xi'_3 = \widehat{z}(\zeta, \tau', t), \quad \varphi \in [0, 2\pi).$$

Уравнение (22) при указанной выше замене переменных интегрирования и введенных обозначениях принимает вид

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{H(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi} (t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \times \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(1 - \tau')] \hat{r}(\zeta, \tau', t) d\varphi d\zeta d\tau'. \quad (24)$$

Так как согласно условию (8) теоремы 1 носитель функции $q(\mathbf{x})$ содержится внутри шара B_{R_0} , то

$$u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \text{ если } D(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \cap B_{R_0} = \emptyset.$$

Отсюда следует также, что

$$u|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0} = 0, \text{ если } L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap B_{R_0} = \emptyset.$$

Нас интересует поведение функции $u(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$ в окрестности фронта волны, т. е. при t , близких к $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$, и при условии $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap B_{R_0} \neq \emptyset$. В этом случае $|\xi - \mathbf{y}| > R - R_0$. Поэтому подынтегральное выражение в формуле (24) представляет собой непрерывную функцию всех переменных при t , близких к $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$, и интеграл определяет непрерывную функцию переменных $\mathbf{x}, t, \mathbf{y}$ в окрестности фронта. Кроме того, согласно обозначениям (23) при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0$ имеют место соотношения

$$\hat{z}(\zeta, \tau', t) \rightarrow \zeta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \hat{h}(\zeta, \tau', t) \rightarrow 0, \quad \hat{r}(\zeta, \tau', t) \rightarrow \zeta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad \xi \rightarrow \mathbf{y} + \zeta(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Учитывая эти соотношения и формулу (12), находим, что

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y}) [1 + B(\xi, t - |\xi - \mathbf{x}|, \mathbf{y})(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)(1 - \tau')] \hat{r}(\zeta, \tau', t) d\varphi d\zeta d\tau' \\ & \rightarrow 2\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \int_0^1 q(\xi) A(\xi, \mathbf{y})|_{\xi = \mathbf{y} + \zeta(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \zeta d\zeta \\ & = \frac{2\pi}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_0^{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} q(\xi) A(\xi, \mathbf{y})|_{\xi = \mathbf{y} + s\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})} s ds = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{s}, \quad (25) \end{aligned}$$

где s и ds — длина отрезка $[\mathbf{y}, \xi]$ и ее элемент соответственно, $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — единичный вектор $\nu(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Из формул (24) и (25) следует представление (9), в котором $v(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = o(t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)$ при $t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, а $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ определена формулой (10). Кроме того, из формулы (9) вытекает равенство

$$u_t(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})|_{t \rightarrow |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + 0} = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{u(\mathbf{x}, |\mathbf{x} - \mathbf{y}| + \tau, \mathbf{y})}{\tau} = \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad \square \quad (26)$$

§ 3. Анализ обратной задачи

Из формул (7) и (26) следует равенство

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R). \quad (27)$$

Воспользуемся формулой (10). Тогда из равенства (27) следует, что задача о восстановлении функции $q(\mathbf{x})$ в области B_{R_0} приводит к задаче интегральной геометрии

$$\int_{L(\mathbf{x}, \mathbf{y})} q(\xi) \frac{ds}{|\xi - \mathbf{y}|} = (4\pi)^2 |\mathbf{x} - \mathbf{y}| F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =: F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \times S_R), \quad (28)$$

об отыскании $q(\mathbf{x})$ по заданным формулой (28) интегралам от этой функции. Если бы в формуле (28) отсутствовал множитель $1/|\xi - \mathbf{y}|$, то эта задача совпадала бы с обычной задачей рентгеновской томографии. В данном случае она отличается от задачи томографии за счет этого множителя. Тем не менее решение задачи единственно и для нее существуют удобные для численного решения алгоритмы. В основе этих фактов лежит инвариантность семейства $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ и весовой функции $1/|\xi - \mathbf{y}|$ к всевозможным вращениям вокруг начала координат. Кроме того, задача распадается на серию задач о реконструкции функции $q(\mathbf{x})$ в произвольных сечениях шара B_R плоскостями, проходящими через центр шара. Таким образом, построение функции $q(\mathbf{x})$ сводится к однопараметрической серии плоских задач. Теорема единственности и алгоритм построения функции через интегралы от нее по семейству кривых линий с известной весовой функцией, которые обладают свойством инвариантности к всевозможным вращениям вокруг фиксированной точки, были получены ранее в работе [13]. Для удобства читателя кратко изложим основные идеи, на которых основан этот результат.

Задачи решения уравнения (28) для любого сечения шара плоскостью, проходящей через центр шара, идентичны друг другу. Для определенности рассмотрим такую задачу на плоскости x_1, x_2 . Введем полярные координаты r, φ и выпишем уравнение (28) для функции $\hat{q}(r, \varphi) = q(r \cos \varphi, r \sin \varphi, 0)$. Обозначим через $C_R = S_R \cap \{x_3 = 0\}$ окружность радиуса R и поставим в соответствие сегменту $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $\mathbf{x} \in C_R$, $\mathbf{y} \in C_R$, полярные координаты (ρ, θ) средней точки $((x_1 + y_1)/2, (x_2 + y_2)/2, 0)$ на $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Очевидно, что эта точка является на $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ближайшей к центру окружности C_R . В дальнейшем будем рассматривать только $(\rho, \theta) \in D_{R_0}$, $D_{R_0} = [0, R_0] \times [0, 2\pi)$, так как только в этом случае интегралы от функции $\hat{q}(r, \varphi)$ не равны нулю. Уравнение сегмента $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ с координатами (ρ, θ) удобно записать в виде

$$\varphi = \theta + (-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right), \quad j = 1, 2, \quad r \in [\rho, R], \quad (29)$$

в котором ветвь $j = 1$ соответствует части сегмента $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, соединяющего на плоскости $x_3 = 0$ точки (ρ, θ) и (x_1, x_2) , а ветвь $j = 2$ соответствует отрезку прямой, соединяющему точки (y_1, y_2) и (ρ, θ) . При этом

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos \varphi_1(\rho, \theta), \quad x_2 = R \sin \varphi_1(\rho, \theta), \quad \varphi_1(\rho, \theta) = \theta - \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \\ y_1 &= R \cos \varphi_2(\rho, \theta), \quad y_2 = R \sin \varphi_2(\rho, \theta), \quad \varphi_2(\rho, \theta) = \theta + \arccos\left(\frac{\rho}{R}\right), \\ s &= |\xi - \mathbf{y}| = \sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}, \quad j = 1, 2, \\ \frac{ds}{s} &= \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}(\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2})}, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь ds — элемент длины. Обозначим

$$\hat{F}(\rho, \theta) = F_1(R(\cos \varphi_1(\rho, \theta), \sin \varphi_1(\rho, \theta), 0), R(\cos \varphi_2(\rho, \theta), \sin \varphi_2(\rho, \theta), 0)).$$

Уравнение для функции $\hat{q}(r, \varphi)$ в принятых выше обозначениях имеет вид

$$\sum_{j=1}^2 \int_{\rho}^{R_0} \hat{q}\left(r, \theta + (-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right) \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}(\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2})} = \hat{F}(\rho, \theta), \quad (30)$$

$$\rho \in [0, R_0], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Сопоставим функции $\hat{q}(r, \varphi)$ ее ряд Фурье

$$\hat{q}(r, \varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k(r) e^{ik\varphi}, \quad q_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{q}(r, \varphi) e^{-ik\varphi} d\varphi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Умножая уравнение (30) на $e^{-in\theta}$ и интегрируя его по переменной θ в пределах от 0 до 2π , приходим к уравнению

$$\int_{\rho}^{R_0} q_n(r) \frac{T_n(r, \rho) r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = F_n(\rho), \quad \rho \in [0, R_0], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (31)$$

в котором

$$T_n(r, \rho) = \sum_{j=1}^2 \frac{\exp\left(in(-1)^j \arccos\left(\frac{\rho}{r}\right)\right)}{\sqrt{R^2 - \rho^2} + (-1)^{j+1} \sqrt{r^2 - \rho^2}}, \quad F_n(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{F}(\rho, \theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

При каждом фиксированном n уравнение (31) является уравнением типа Абеля. При этом $T_n(r, \rho)$ является ограниченной и бесконечно дифференцируемой функцией по обоим аргументам в области $\{(r, \rho) \mid \varepsilon \leq \rho \leq r \leq R_0\}$, где ε — произвольно малое положительное число. Кроме того,

$$T_n(\rho, \rho) = \frac{2}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \neq 0.$$

Хорошо известно, что эти свойства функции $T_n(r, \rho)$ позволяют свести уравнение (31) к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром. Для этого надо применить к обоим частям уравнения (31) оператор дифференцирования половинного порядка. В данном случае удобно использовать оператор

$$\frac{d}{ds} \int_s^{R_0} \frac{(\cdot) d\rho}{\sqrt{\rho^2 - s^2}}.$$

Его применение приводит (31) при каждом n к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром при $\varepsilon \leq s \leq r \leq R_0$. Отсюда следует единственность решения задачи об отыскании любого коэффициента Фурье $q_n(r)$, а значит, и функции $\hat{q}(r, \varphi)$ для всех $r \in [\varepsilon, R_0]$, а в силу произвольности ε и непрерывности $q_n(r)$ и для $r \in [0, R_0]$. Для уравнения Вольтерра второго рода с непрерывным ядром факториально быстро сходится метод последовательных приближений. Поэтому его можно успешно использовать для определения коэффициента Фурье $q_n(r)$. Однако для суммирования ряда Фурье надо использовать методы регуляризации, развитые в работах А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и других авторов.

Резюмируя выполненный анализ обратной задачи, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. Обратная задача имеет не более одного решения. Эта задача сводится к решению уравнения (28), которое, в свою очередь, приводит к решению однопараметрической серии плоских задач в сечениях шара B_R плоскостями, проходящими через его центр. Типичной задачей здесь является задача решения уравнения (30). Последнее уравнение сводится к уравнению Вольтерра второго рода с непрерывным ядром для коэффициентов Фурье $q_n(r)$ функции $\hat{q}(r, \varphi)$. Далее для суммирования ряда Фурье надо использовать методы регуляризации.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поставленная обратная задача является переопределенной, так как для определения функции трех пространственных переменных $q(\mathbf{x})$ используется функция четырех переменных $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S_R \times S_R$. Однако эту переопределенность легко снять. Для этого достаточно рассмотреть однопараметрическое семейство плоскостей $\Sigma(\psi) = \{\xi \mid \xi \cdot \nu(\psi) = 0\}$, $\nu(\psi) = (0, \cos \psi, \sin \psi)$, $\psi \in [0, \pi)$, и задать функцию $F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ только для $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in (S_R \cap \Sigma(\psi)) \times (S_R \cap \Sigma(\psi))$ при $\psi \in [0, \pi)$. При этом размерность данных обратной задачи снижается и совпадает с размерностью искомой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Westervelt P. J. Parametric acoustic array // J. Acoustical Soc. Am. 1963. V. 35. P. 535–537.
2. Заболотская Е. А., Хохлов Р. В. Квазиплоские волны в нелинейной акустике ограниченных пучков // Акуст. журн. 1969. Т. 15, № 1. С. 40–47.
3. Crighton D. G. Model equations of nonlinear acoustics // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. V. 11. P. 11–33.
4. Hamilton M. F., Blackstock D. T. Nonlinear acoustics. New York: Acad. Press, 1998.
5. Kaltenbacher B. Mathematics of nonlinear acoustics // Evol. Equ. Control Theory. 2015. V. 4. P. 447–491.
6. Ichida N., Sato T., Linzer M. Imaging the nonlinear ultrasonic parameter of a medium // Ultrasonic Imaging. 1983. V. 5. P. 295–299.
7. Буров В. А., Горюнов А. А., Сасковец А. В., Тихонова Т. А. Обратные задачи рассеяния в акустике // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 4. С. 433–449.
8. Буров В. А., Гуринович И. Е., Руденко О. В., Тагунов Е. Я. Реконструкция пространственного распределения параметра нелинейности и скорости звука в акустической томографии // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 6. С. 922–929.
9. Hettlich F., Rundell W. A second degree method for nonlinear inverse problems // SIAM J. Numer. Anal. 2000. V. 37. P. 587–620.
10. Zhang D., Chen X., Gong X.-F. Acoustic nonlinearity parameter tomography for biological tissues via parametric array from a circular piston source. Theoretical analysis and computer simulations // J. Acoustical Soc. Amer. 2001. V. 109. P. 1219–1225.
11. Kaltenbacher B., Rundell W. On the identification of the nonlinearity parameter in the Westervelt equation from boundary measurements // Inverse Problems and Imaging. 2021. V. 15, N 5. P. 865–891.
12. Романов В. Г. Обратная задача для полулинейного волнового уравнения с нелинейным интегральным оператором // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 2. С. 245–265.
13. Романов В. Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.

Поступила в редакцию 30 апреля 2026 г.

После доработки 31 мая 2026 г.

Принята к публикации 31 мая 2026 г.

Романов Владимир Гаврилович (ORCID 0000-0002-5426-4277)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru