

КОВРОВЫЕ КОЛЬЦА ЛИ, НЕ ИНВАРИАНТНЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО КОВРОВЫХ ПОДГРУПП

Я. Н. Нужин

Аннотация. Эта статья является продолжением работ автора (Тр. ИММ УрО РАН, 2012; Журн. СФУ. Сер. Математика и физика, 2023; Сиб. мат. журн., 2026). В первой найдены необходимые и достаточные условия инвариантности коврового кольца Ли относительно ковровой подгруппы, а во второй и в третьей установлено, что они являются достаточными для замкнутости исходного ковра. Здесь строятся примеры неприводимых замкнутых ковров над полем такие, что ковровые кольца Ли не инвариантны относительно соответствующих ковровых подгрупп, при этом на характеристику поля накладываются некоторые ограничения в зависимости от типа системы корней, ассоциированной с ковром, в частности, если характеристика поля не меньше 5, то такие ковры существуют для любого типа. Из полученных результатов следует существование неприводимых замкнутых элементарных матричных ковров над полем любой характеристики, не дополняемых до полных матричных ковров. Примеры таких элементарных матричных ковров над полями характеристики 2 и 0 указал ранее В. А. Койбаев (Тр. ИММ УрО РАН, 2011; Сиб. мат. журн., 2021).

DOI 10.33048/smzh.2026.67.409

Ключевые слова: ковер аддитивных подгрупп, ковровое кольцо Ли, группа Шевалле, ковровая подгруппа, определяющие соотношения.

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l , Π — множество ее фундаментальных корней. Простая комплексная алгебра Ли типа Φ обладает базисом Шевалле

$$\{e_r, r \in \Phi; h_s, s \in \Pi\}, \quad (1)$$

структурные константы которого являются целыми числами. Поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi, K)$ с базисом Шевалле (1) над произвольным коммутативным кольцом K (см., например, [1, с. 62]).

Элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ типа Φ над кольцом K порождается корневыми подгруппами $x_r(K) = \{x_r(t) \mid t \in K\}$, $r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(K)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \quad (2)$$

Ковром типа Φ ранга l над K называется набор подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ аддитивной группы кольца K с условиями

$$C_{ij,rs} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js} \quad \text{при } r, s, ir+js \in \Phi, i > 0, j > 0, \quad (3)$$

Работа поддержана Российским научным фондом и Красноярским краевым фондом науки, проект 25-21-20059, <https://rscf.ru/project/25-21-20059/>.

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \quad (4)$$

Заметим, что при $l = 1$ условия ковровости (3) вырождаются, и в этом случае любой паре подгрупп аддитивной группы кольца коэффициентов K соответствует ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$ ранга 1.

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ определяет ковровую подгруппу $E(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi \rangle$ группы $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M . Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е. если $E(\mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r)$ для любого $r \in \Phi$. По определению ковер называется *неприводимым*, если все его аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r$ ненулевые.

Как и в [2], по определению считаем, что подкольцо $L(\mathfrak{A})$ кольца Ли $L(\Phi, K)$ порождается относительно обеих операций (сложение и лиево умножение) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, где элементы e_r из базиса (1). Будем называть $L(\mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Отметим, что базисные элементы e_r, h_s не обязаны лежать в $L(\mathfrak{A})$.

Группа $E(\Phi, K)$ действует на $L(\Phi, K)$, следовательно, подгруппа $E(\mathfrak{A})$ также действует на кольце Ли $L(\Phi, K)$, но его ковровое подкольцо $L(\mathfrak{A})$ уже не обязано быть инвариантным относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$. В действительности автором установлен следующий критерий: подкольцо $L(\mathfrak{A})$ инвариантно относительно подгруппы $E(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$ [2, теорема 3.1].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. Пусть $p \neq 0, 2$, если Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 , и $p \neq 0, 2, 3$, если Φ типа G_2 . Тогда существует неприводимый замкнутый ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем характеристики p такой, что ковровое кольцо Ли $L(\mathfrak{A})$ не инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$, в частности, при $p \geq 5$ такой ковер существует для любой системы корней Φ .

Если кратко, то доказательство теоремы 1 заключается в следующем. Для фиксированного корня $r_0 \in \Phi$ определяем подгруппу $G = \langle x_{r_0}(y), x_s(z) \mid s \in \Phi \setminus \{r_0\} \rangle$, где y, z — свободные переменные над полем F характеристики p , и показываем, что аддитивные подгруппы $\mathfrak{A}_r = \{t \mid x_r(t) \in G\}$ составляют замкнутый ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом полиномов $F[y, z]$ такой, что нарушается по крайней мере одно из включений $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. В частности, в этом доказательстве указывается способ построения неприводимых замкнутых ковров любого типа Φ .

2. Некоторые результаты о коврах и ковровых кольцах Ли

Здесь и далее мы используем обозначения и определения, указанные во введении, остальные приводятся по мере надобности.

Замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ исходного ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K по определению состоит из аддитивных подгрупп

$$\overline{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in E(\mathfrak{A})\}, \quad r \in \Phi.$$

Если все корни из Φ имеют одинаковую длину, то замыкание является ковром (см., например, [3, с. 528]). В общем случае ответ неизвестен — это вопрос автора из Коуровской тетради [4, вопрос 19.61]. Однако справедлив следующий частичный результат

Лемма 1 [5, теорема 1]. Замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K нечетной характеристики p является ковром, если 3 не делит p , когда Φ типа G_2 .

На самом деле доказательство теоремы 1 из [5] проходит для следующего более сильного утверждения, поскольку в [5] используется только определение ковра и инвариантность любой подгруппы G группы $E(\Phi, K)$, порожденной своими пересечениями $G \cap x_r(K)$, $r \in \Phi$, относительно сопряжений элементами из диагональной подгруппы над подкольцом, порожденным 1.

Лемма 2. Пусть G — подгруппа группы $E(\Phi, K)$ над кольцом K характеристики p , и пусть $p \neq 0, 2$ для Φ типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 , и $p \neq 0, 2, 3$ для Φ типа G_2 . Тогда набор аддитивных подгрупп $\mathfrak{G}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in G\}$, $r \in \Phi$, является ковром типа Φ над кольцом K .

Следующий результат доказан в работах автора [6, 7]; в [6] он доказан для всех типов кроме симплектического, в [7] — для симплектического типа C_l .

Лемма 3. Включения $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, являются достаточными для замкнутости ковра аддитивных подгрупп $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$. В частности, любой ковер идеалов замкнут.

Как уже отмечалось выше, доказательство теоремы 1 настоящей статьи состоит в том, что устанавливается существование неприводимых замкнутых ковров $\mathfrak{A}$ любого типа Φ , для которых нарушается включение $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$ для некоторого $r \in \Phi$. Таким образом, утверждение леммы 3 нельзя обратить.

Ковер $\mathfrak{A}$ назовем L -замкнутым, если $L(\mathfrak{A}) \cap Ke_r = \mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, т. е. если в ковровом кольце Ли $L(\mathfrak{A})$ не появятся элементы вида te_r , отличные от порождающих. (В [2] такой ковер называется L -допустимым.)

Лемма 4 [2, теорема 2.1]. Ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L -замкнутым тогда и только тогда, когда $2\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$. В частности, над кольцом K характеристики 2 любой ковер L -замкнут.

Лемма 5 [2, теорема 3.1]. Подкольцо $L(\mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$.

Лемма 6 [2, с. 199]. Всякое ковровое подкольцо $L(\mathfrak{A})$, инвариантное относительно соответствующей ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$, является L -замкнутым.

Лемма 6 подчеркивает согласованность определений инвариантности коврового кольца Ли относительно соответствующей ковровой подгруппы и L -замкнутости исходного ковра.

Пусть $F[x_1, \dots, x_n]$ — кольцо полиномов от коммутативных переменных $x_1, \dots, x_n$ над полем F , $\mathbb{N}$ — множество целых неотрицательных чисел. Линейный лексикографический порядок множества $\mathbb{N}^n = \{(i_1, \dots, i_n) \mid i_j \in \mathbb{N}\}$ индуцирует такой же порядок на множестве M_f всех мономов

$$cx_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}, \quad (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}^n, \quad 0 \neq c \in F\},$$

входящих в произвольный полином $f \in F[x_1, \dots, x_n]$. Наибольший элемент множества M_f называется *высшим членом* полинома f . Утверждение следующей леммы хорошо известно.

Лемма 7. Высший член произведения двух полиномов кольца $F[x_1, \dots, x_n]$ равен произведению высших членов сомножителей.

Через $G_1 * G_2$ будем обозначать свободное произведение групп G_1 и G_2 .

Лемма 8. Пусть A и B — нетривиальные аддитивные подгруппы кольца полиномов $F[x_1, \dots, x_n]$ над полем F , состоящие из полиномов с нулевыми свободными членами. Тогда

$$G := \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \right\rangle * \left\langle \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

В частности, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$ ранга 1, где $\mathfrak{A}_r = A$, $\mathfrak{A}_{-r} = B$, является замкнутым.

Доказательство. Пусть полиномы $f_2, f_4 \in A$ и $f_1, f_3 \in B$ ненулевые. Тогда матрицы из правых частей следующих равенств:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ f_2 & 1 + f_1 f_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & f_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + f_2 f_3 & f_1 + f_3 + f_1 f_2 f_3 \\ f_2 & 1 + f_1 f_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + f_2 f_3 & f_1 + f_3 + f_1 f_2 f_3 \\ f_2 + f_4 + f_2 f_3 f_4 & 1 + f_1 f_2 + f_1 f_4 + f_3 f_4 + f_1 f_2 f_3 f_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

лежат в группе G , причем степени высших членов полиномов на всех четырех позициях (для наших целей достаточно лишь одной позиции) этих матриц не убывают по лемме 7. Индукцией по числу сомножителей получим, что это справедливо для любого числа сомножителей. Таким образом, поочередное произведение неединичных элементов из групп

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

никогда не будет единичной матрицей. Следовательно, группа G есть свободное произведение двух указанных групп. Отсюда, очевидно, следует утверждение «в частности».

Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть y, z — свободные переменные над полем F , а F_1 — подкольцо поля F , порожденное единицей 1. Зафиксируем корень $r_0 \in \Phi$ и определим подгруппы

$$G_{r_0} = G_{-r_0} = \langle x_{r_0}(y), x_{-r_0}(z) \rangle, \quad G_r = \langle x_r(z), x_{-r}(z) \rangle, \quad r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\}.$$

Мы считаем, что они являются подгруппами универсальной группы Шевалле $E(\Phi, K)$ над полем рациональных функций $K = F(y, z)$. Каждая из групп G_r , $r \in \Phi$, является свободным произведением двух циклических групп, а именно,

$$G_{r_0} = \langle x_{r_0}(y) \rangle * \langle x_{-r_0}(z) \rangle, \quad G_r = \langle x_r(z) \rangle * \langle x_{-r}(z) \rangle, \quad r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\}.$$

Это следует из леммы 8 в силу изоморфизма $\langle X_r, X_{-r} \rangle \simeq SL_2(K)$, который справедлив для любого $r \in \Phi$, и он получается продолжением отображения

$$\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} = x_r(v), \quad \phi \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = x_{-r}(v), \quad v \in K;$$

см., например, [1, теорема 6.3.1] или [8, с. 45, следствие 6].

Пусть

$$G = \langle G_{r_0}, G_r \mid r \in \Phi \setminus \{r_0, -r_0\} \rangle = \langle G_r \mid r \in \Phi \rangle.$$

В силу предположений теоремы и леммы 2 набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}, \quad \text{где } \mathfrak{A}_r = \{t \in K \mid x_r(t) \in G\},$$

является ковром, и, очевидно, он замкнутый. Покажем, что ковровое кольцо Ли $L(\mathfrak{A})$ не инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$.

Пусть ранг Φ равен 1. Тогда по определению $G = G_{r_0}$ и $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{r_0}, \mathfrak{A}_{-r_0}\}$, где $\mathfrak{A}_{r_0} = F_1 y$, $\mathfrak{A}_{-r_0} = F_1 z$. Включение $\mathfrak{A}_{r_0}^2 \mathfrak{A}_{-r_0} \subseteq \mathfrak{A}_{r_0}$ нарушается, так как $y^2 z \notin \mathfrak{A}_{r_0}$. Следовательно, в этом случае теорема верна в силу леммы 5.

Пусть ранг Φ больше 1. Тогда определяющие соотношения группы $E(\Phi, K)$ состоят из соотношений в группах $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ и коммутаторных соотношений (4) в силу известной теоремы Стейнберга [8, теорема 8], а группа G порождается пересечениями $G_r \cap X_r$, $r \in \Phi$. Следовательно, все соотношения в группе G для порождающих множеств $G_r \cap X_r$, $r \in \Phi$, состоят только из соотношений (2) и (4), которые определяют условия ковровости. Конечно, пересечения $G \cap X_r$ будут больше пересечений $G_r \cap X_r$ для всех $r \in \Phi$, но в силу леммы 8 справедливо равенство

$$\langle G \cap X_r, G \cap X_{-r} \rangle = \langle G \cap X_r \rangle * \langle G \cap X_{-r} \rangle,$$

поскольку коэффициенты f_r и f_{-r} у корневых элементов $x_r(f_r) \in G \cap X_r$ и $x_{-r}(f_{-r}) \in G \cap X_{-r}$ лежат в $F[y, z]$ и имеют нулевой свободный член. Поэтому элементы подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, возникают в качестве коэффициентов исходных порождающих $x_{r_0}(y)$ и $x_r(z)$, $r \in \Phi \setminus \{r_0\}$, а затем — в качестве коэффициентов новых корневых элементов, полученных из коммутаторной формулы Шевалле (4). Оценим вид подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, сверху.

Пусть I и соответственно J — идеалы кольца $F_1[y, z]$, порожденные элементами z и соответственно z^2 . Тогда

$$\mathfrak{A}_r \subseteq \begin{cases} I, & \text{если } r \in \Phi \setminus \{r_0\}, \\ F_1 y + J, & \text{если } r = r_0. \end{cases}$$

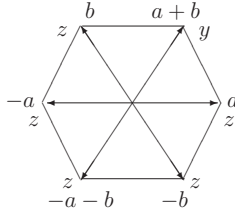


Рис. 1.

Данные включения аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, нетрудно получить для Φ типа A_2 , используя рис. 1, где $r_0 = a + b$. Для остальных систем корней ситуация подобна.

Поскольку $\mathfrak{A}_{r_0} \subseteq F_1 y + J$, то $y^2 z \notin \mathfrak{A}_{r_0}$. С другой стороны, по лемме 5 для инвариантности кольца Ли $L(\mathfrak{A})$ относительно ковровой подгруппы $E(\mathfrak{A})$ необходимо, чтобы выполнялось включение $\mathfrak{A}_{r_0}^2 \mathfrak{A}_{-r_0} \subseteq \mathfrak{A}_{r_0}$, из которого следует, что $y^2 z \in \mathfrak{A}_{r_0}$. Таким образом, необходимое условие инвариантности нарушается.

Теорема доказана.

4. Следствие для матричных ковров

Для любого натурального числа $n \geq 2$ набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\} \quad (5)$$

кольца K , удовлетворяющих включениям

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, \quad (6)$$

называется *полным матричным ковром степени n* . В силу (6) диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$ являются подкольцами из K .

Удалив из набора (5) диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, получим так называемый элементарный матричный ковер

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n, i \neq j\}. \quad (7)$$

В действительности такой подход существенно ограничивает множество элементарных ковров. По определению *элементарным матричным ковром степени n* назовем произвольный набор аддитивных подгрупп (7), удовлетворяющих включениям

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, r, j \leq n, i \neq r, r \neq j, i \neq j. \quad (8)$$

Элементарный ковер называется *дополняемым*, если можно определить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$ так, что дополненное множество аддитивных подгрупп является полным ковром. Отметим, что возможное дополнение элементарного ковра до полного определяется неоднозначно, а любой дополняемый элементарный ковер замкнут. Хорошо известен следующий критерий (см., например, [9, с. 25] или [10, лемма 6]).

Лемма 9. Элементарный матричный ковер $\mathfrak{A}$ дополняется до полного ковра тогда и только тогда, когда

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, i \neq j. \quad (9)$$

В частности, любой элементарный матричный ковер идеалов дополняется до полного ковра.

Если Φ типа A_{n-1} , то универсальная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ над полем K изоморфна группе матриц $SL_n(K)$ с определителем 1. Ковер типа A_{n-1} совпадает с элементарным матричным ковром, и в лиевой терминологии условие (9) записывается так:

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{A}_{-r}\mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \quad (10)$$

Конечно, включения (10) сильнее включений $\mathfrak{A}_r^2\mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, поэтому при Φ типа A_{n-1} из теоремы 1 и леммы 5 вытекает

Следствие 1. Для любого $n \geq 2$ существует неприводимый замкнутый элементарный матричный ковер степени n над полем любой характеристики, не дополняемый до полного ковра.

Ранее примеры элементарных матричных ковров над полями характеристики 2 и 0, не дополняемых до полных ковров, указал В. А. Койбаев в работах [11, 12], где аддитивные подгруппы, составляющие ковер, приводятся в явном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Carter R. W. Simple groups of Lie type. London; New York; Sydney; Toronto: Wiley and Sons, 1972.
2. Нужин Я. Н. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 3. С. 195–200.
3. Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. СФУ. Сер. Математика и физика. 2011. Т. 4, № 4. С. 527–535.
4. *The Kurovka notebook: Unsolved problems in group theory*, Eds. Mazurov V. D., Khukhro E. I. Novosibirsk: Sobolev Institute of Mathematics, 2022. N 20.
5. Troyanskaya E. N. To the question of the closure of the carpet // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2024. Т. 17, № 5. С. 684–688.
6. Nuzhin Ya. N. On the closedness of carpets of additive subgroups associated with a Chevalley group over a commutative ring // Журн. СФУ. Сер. математика и физика. 2023. Т. 16, № 6. С. 732–737.
7. Нужин Я. Н. Кольца Ли и группы, определяемые коврами симплектического типа // Сиб. мат. журн. 2026. Т. 67, № 1. С. 135–145.
8. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. М.: Мир, 1975.
9. Борович З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. 1978. Т. 75. С. 22–31.
10. Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых АВА-групп // Мат. заметки. 1982. Т. 31, № 4. С. 509–525.
11. Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 4. С. 134–141.
12. Койбаев В. А. Замкнутые элементарные сети над полем нулевой характеристики // Сиб. мат. журн. 2021. Т. 62, № 2. С. 326–332.

Поступила в редакцию 8 марта 2026 г.

После доработки 8 марта 2026 г.

Принята к публикации 22 апреля 2026 г.

Нужин Яков Нифантьевич (ORCID 0009-0003-0426-9525)
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
nuzhin2008@rambler.ru