

УДК 517.955

ВЫРОЖДАЮЩИЕСЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А. И. Кожанов, Б. В. Жигжитжапов

Аннотация. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Характер вырождения в изучаемых уравнениях определяется тем, что старший операторный коэффициент может быть необратимым оператором.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.408

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, начально-краевые задачи, регулярные решения, вырождение, существование, единственность.

Геннадия Владимировичу Демиденко
в честь его 70-летия

1. Введение

В работе исследуется следующий класс уравнений составного типа:

$$L_1 u_t(x, t) + L_2 u(x, t) = f(x, t), \quad (*)$$

где L_1 и L_2 — дифференциальные операторы второго порядка.

Уравнения данного класса в литературе часто называют *уравнениями соболевского типа* или *псевдопараболическими уравнениями* [1, 2], они применяются в гидродинамике, задачах фильтрации, массо-, влаго- и теплопереноса [3–8]. Уравнения типа (1) исследовались в работах многих авторов, в частности, стоит отметить работы С. Л. Соболева, А. И. Кожанова, Г. А. Свиридюка, В. Е. Федорова и др. [9–15]. Кроме названных также выделим работы, в которых изучаются задачи для уравнений соболевского типа более высокого порядка как близкие к данной [16, 17]. В этих двух статьях изучался случай, когда оператор L_1 при старшей производной по времени имел вид $L_1 = \lambda - \Delta$, причем при некоторых определенных значениях постоянного коэффициента λ оператор L_1 становился необратимым. Особенностью данной работы является то, что старший оператор L_1 имеет переменные коэффициенты и может вырождаться на произвольных множествах при различных значениях временной переменной. Такого рода случаи вырождения еще не изучались в литературе для уравнений рассматриваемого типа.

В настоящей работе используется математический аппарат, описанный в монографиях [18, 19].

Работа выполнена при поддержке Математического центра в Академгородке, соглашение № 075–15–2025–349 с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.

© 2026 Кожанов А. И., Жигжитжапов Б. В.

2. Необходимые определения и построения

Пусть ограниченная область определения пространственных переменных $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ имеет гладкую (для удобства бесконечно гладкую) границу $\partial\Omega = \Gamma$. Область определения переменных (x, t) обозначим через $Q = \Omega \times (0, T)$. Функции $f(x, t)$, $a_1(t)$ и $a_2(t)$ считаем известными, определенными на соответственно замыкании Q и отрезке $[0, T]$ функциями. Оператор Лапласа Δ действует по пространственным переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Операторы L_1 , L_2 и L определяются следующим образом:

$$L_1 v = (a_1(t) - \Delta)v, \quad L_2 v = (a_2(t) - \Delta)v, \quad Lv = L_1 v_t + L_2 v.$$

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$Lu(x, t) = f(x, t), \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, t)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (3)$$

Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейство нормированных в $L_2(\Omega)$ функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ играют ключевую роль в данном исследовании. Они определяются из задачи

$$\Delta\omega(x) = \lambda\omega(x), \quad \omega(x)|_{x \in \Gamma} = 0.$$

Известны свойства (см., например, [19, 20]) последовательности $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и семейства функций $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. В частности, известно, что последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ состоит из отрицательных действительных чисел и имеет единственную предельную точку $-\infty$. Также известно, что функции $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать так, чтобы они образовывали полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$, что и считается выполненным.

В тех случаях, когда коэффициент $a_1(t)$ становится равным каким-либо собственным значениям λ_k в каких-либо точках или подмножествах отрезка $[0, T]$, оператор L_1 становится необратимым и требуется задать некоторые дополнительные условия, чтобы задача (1)–(3) была поставлена корректно.

Вследствие непрерывности $a_1(t)$ и свойств чисел λ_k найдется такое минимальное положительное целое число k_0 , что для $k > k_0$ будет выполняться $a_1(t) > \lambda_k$ на всем отрезке $[0, T]$.

Множество функций $\{f_k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ определяется равенствами

$$f_k(t) = \int_{\Omega} f(x, t) w_k(x) dx.$$

Решение задачи (1)–(3) будем искать в пространстве

$$V = \{v(x, t) : v(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)), \\ v_t(x, t) \in L_2(0, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|_{L_2(Q, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))}^2 + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{L_2(Q, T; W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega))}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Теоремы существования и единственности

Теорема 3.1. Пусть для коэффициентов $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $f(x, t)$ выполняются следующие условия:

$$a_1(t) \in C^1([0, T]), \quad a_2(t) \in C^1([0, T]), \quad f(x, t) \in L_2(Q); \quad (4)$$

$$a_2(t) - \lambda_1 - \frac{1}{2}a_1'(t) > 0, \quad a_2(t) - \lambda_1 + \frac{1}{2}a_1'(t) > 0, \quad t \in [0, T]; \quad (5)$$

$$a_1(0) > \lambda_1, \quad a_1(T) \geq \lambda_1; \quad (6)$$

$$f_k'(t) \in L_2([0, T]), \quad k = 1, 2, \dots, k_0. \quad (7)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V решение, причем только одно.

Доказательство. Решение задачи (1)–(3) представимо в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{k_0} y_k(t) w_k(x) + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} y_k(t) w_k(x). \quad (8)$$

Функции $y_k(t)$ определяются как решения следующих задач:

$$(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \quad (9)$$

$$y_k(0) = 0. \quad (10)$$

Для $k > k_0$ существование и единственность решений $y_k(t)$ задач (9), (10) в пространстве $W_2^1([0, T])$ следует из невырожденности уравнений.

Покажем, что задачи (9), (10) при $k = 1, 2, \dots, k_0$ (т. е. при наличии вырождения) имеют решения, принадлежащие $W_2^1([0, T])$. Рассмотрим следующую задачу для $\varepsilon > 0$:

$$-\varepsilon y_k''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) = f_k(t), \quad (9_\varepsilon)$$

$$y_k(0) = y_k'(T) = 0. \quad (11)$$

Из общей теории краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка следует, что при $\varepsilon > 0$ задача (9_ε), (11) имеет решение $y_{k,\varepsilon}(t)$, принадлежащее пространству $W_2^2([0, T])$. Покажем, что для этих решений имеют место равномерные по ε априорные оценки. Индекс « ε » при получении оценок указывать не будем.

Умножим уравнение (9_ε) на $y_k(t)$ и проинтегрируем, используя условия теоремы и условия задачи (9_ε), (11). Так получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\varepsilon y_k'^2(t) + \left[(a_2(t) - \lambda_k - \frac{1}{2}a_1'(t)) y_k^2(t) \right] \right) dt \\ + \frac{1}{2} [a_1(T) - \lambda_k] y_k^2(T) = \int_0^T f_k(t) y_k(t) dt. \end{aligned}$$

Используя неравенство Юнга, получаем следующую априорную оценку:

$$\int_0^T (\varepsilon y_k'^2(t) + y_k^2(t)) dt \leq N \int_0^T f_k^2(t) dt, \quad N > 0. \quad (12)$$

Умножив уравнение (9_ε) на $-y_k''(t)$ и проинтегрировав, учитывая условия задачи и теоремы, получим равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[\varepsilon y_k''^2(t) + \left(a_2(t) - \lambda_k + \frac{a_1'(t)}{2} \right) y_k'^2(t) \right] dt \\ & + \frac{1}{2} [a_1(0) - \lambda_k] y_k'^2(0) = \int_0^T (f_k'(t) y_k'(t) - a_2'(t) y_k(t) y_k'(t)) dt + f_k(0) y_k'(0). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя формулу интегрирования по частям и неравенство (12), а также неравенство Юнга, получаем, что следствием (13) будет оценка

$$\int_0^T (\varepsilon y_k''^2(t) + y_k'^2(t)) dt \leq M \int_0^T (f_k'^2(t) + f_k^2(t)) dt, \quad (14)$$

постоянная M в которой зависит только от функций $a_1(t)$ и $a_2(t)$.

Оценок (12) и (14) достаточно, чтобы получить существование подпоследовательности решений $y_{k,\varepsilon_m}(t)$ задачи (9_ε) , для которой при $m \rightarrow \infty$

$$\varepsilon = \varepsilon_m \rightarrow 0, \quad \varepsilon_m y_{k,\varepsilon_m}''(t) \rightarrow 0 \text{ слабо в } L_2([0, T]),$$

$$y_{k,\varepsilon_m}(t) \rightarrow y_k(t) \text{ слабо в } W_2^1([0, T]).$$

Это следует из свойств рефлексивности гильбертова пространства.

Указанные сходимости означают, что для любой функции $\eta(t)$ из пространства $L_2([0, T])$ имеет место сходимость при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_0^T [-\varepsilon_m y_{k,m}''(t) + (a_1(t) - \lambda_k) y_{k,m}'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_{k,m}(t)] \eta(t) dt \\ & \rightarrow \int_0^T [(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t)] \eta(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает равенство

$$\int_0^T [(a_1(t) - \lambda_k) y_k'(t) + (a_2(t) - \lambda_k) y_k(t) - f_k(t)] \eta(t) dt = 0.$$

В силу произвольности функции $\eta(t)$ из этого равенства и следует выполнение уравнения (9).

Далее, имеют место равенства

$$|y_k(0)| = |y_k(0) - y_{k,m}(0)| = \left| \frac{1}{T} \int_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)] dt - \frac{1}{T} \int_0^T (T-t) [y_k'(t) - y_{k,m}'(t)] dt \right|.$$

Отсюда

$$|y_k(0)| \leq \frac{1}{T} \left| \int_0^T [y_k(t) - y_{k,m}(t)] dt \right| + \frac{1}{T} \left| \int_0^T (T-t) [y_k'(t) - y_{k,m}'(t)] dt \right|.$$

Вследствие указанных выше сходимостей каждое слагаемое в правой части этого неравенства стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. А это и означает выполнение равенства $y_k(0) = 0$.

Поскольку для функции $y_k(t)$ выполняется уравнение (9), после умножения этого уравнения на функцию $y_k(t)$ получим оценку

$$\int_0^T y_k^2(t) dt \leq N \int_0^T f_k^2(t) dt.$$

Из этой оценки вытекает единственность решений задачи (9), (10) в пространстве $W_2^1([0, T])$.

Докажем принадлежность функции $u(x, t)$, определенной равенством (8), пространству V .

Для натуральных чисел k из промежутка $[k_0 + 1, \infty)$ уравнение для функций $y_k(t)$ можно записать в виде

$$y_k'(t) + \frac{a_2(t) - \lambda_k}{a_1(t) - \lambda_k} y_k(t) = \frac{f_k(t)}{a_1(t) - \lambda_k}. \quad (9')$$

Пусть $k_{0,1}$ — такое натуральное число, что при $k \geq k_{0,1}$ выполняются неравенства $a_1(t) - \lambda_k > 0$, $a_2(t) - \lambda_k > 0$ при $t \in [0, T]$. Умножая уравнение (9') вначале на функцию $\lambda_k^2 y_k(t)$ и интегрируя по отрезку $[0, T]$, затем на функцию $\lambda_k^2 y_k'(t)$ и вновь интегрируя по отрезку $[0, T]$, получим, что при $k \geq k_{0,1}$ выполняется неравенство

$$\lambda_k^2 \int_0^T y_k^2(t) dt + \lambda_k^2 \int_0^T y_k'^2(t) dt \leq N_1 \int_0^T f_k^2(t) dt$$

с постоянной N_1 , определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Определим функцию $u_{k_{0,1},m}(x, t)$:

$$u_{k_{0,1},m}(x, t) = \sum_{k=k_{0,1}}^m y_k(t) w_k(x).$$

Имеем

$$\int_Q [\Delta u_{k_{0,1},m}(x, t)]^2 dx dt = \sum_{k=k_{0,1}}^m \lambda_k^2 \int_0^T y_k^2(t) dt \leq N_1 \sum_{k=k_{0,1}}^m \int_0^T f_k^2(t) dt \leq N_1 \|f\|_{L_2(Q)}^2$$

(последнее неравенство есть следствие неравенства Бесселя). Переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$, получим, что функция

$$\Delta \left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k(t) w_k(x) \right)$$

принадлежит пространству $L_2(Q)$.

Аналогичные выкладки дают принадлежность функции

$$\Delta \left(\sum_{k=k_{0,1}}^{\infty} y_k'(t) w_k(x) \right)$$

также пространству $L_2(Q)$. Но тогда и функция $u(x, t)$ будет принадлежать пространству V .

Из доказанного выше следует, что краевая задача (1)–(3) имеет решение $u(x, t)$, принадлежащее пространству V , причем ровно одно.

Теорема доказана. $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия (4) и (5), а также условия

$$a_i(t) \in C^2([0, T]), \quad i = 1, 2, \quad a_2(t) + \frac{3}{2}a_1'(t) - \lambda_1 > 0 \quad \text{при } t \in [0, T],$$

$$a_1(0) = a_1(T) = \lambda_1, \quad a_2'(0) = a_2'(T) = 0, \quad a_2(0) - \lambda_1 \neq 0; \quad (15)$$

$$f_1(t) \in W_2^2([0, T]), \quad f_1(0) = f_1'(0) = f_1'(T) = 0. \quad (16)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V решение, причем ровно одно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $k = 1$ и $\varepsilon > 0$ рассмотрим краевую задачу

$$\varepsilon y_1^{(4)} + [a_1(t) - \lambda_1]y_1' + [a_2(t) - \lambda_1]y_1 = f_1(t), \quad y_1'(0) = y_1'(T) = y_1'''(0) = y_1'''(T) = 0. \quad (17)$$

Разрешимость при фиксированном ε краевой задачи (17) в $W_2^4([0, T])$ известна; для решений этой задачи будут выполняться равномерные по ε оценки (12) и (14). Дополнительно умножая уравнение (17) на функцию $y_1^{(4)}(t)$, интегрируя полученное равенство по отрезку $[0, T]$, используя условия (15) и (16), краевые условия (17), а также имеющиеся оценки (12) и (14), придем к априорной оценке

$$\varepsilon \int_0^T [y_1^{(4)}(t)]^2 dt + \int_0^T [y_1''(t)]^2 dt \leq M_1 \int_0^T \{f_1^2(t) + [f_1'(t)]^2 + [f_1''(t)]^2\} dt$$

с постоянной M_1 , определяющейся лишь функциями $a_1(t)$ и $a_2(t)$. Из этой оценки и из оценок (12), (14) следует, что существует функция $y_1(t)$, принадлежащая пространству $W_2^2([0, T])$ (см. доказательство теоремы 3.1), являющаяся решением уравнения

$$[a_1(t) - \lambda_1]y_1'(t) + [a_2(t) - \lambda_1]y_1(t) = f_1(t).$$

В этом уравнении функция $y_1'(t)$ ограничена; поскольку $a_1(0) - \lambda_1 = 0$, то будут выполняться равенства

$$[a_1(0) - \lambda_1]y_1'(0) = 0, \quad [a_2(0) - \lambda_1]y_1(0) = 0.$$

Вследствие условия $a_2(0) - \lambda_1 \neq 0$ получим, что необходимо выполняется равенство $y_1(0) = 0$.

Существование остальных функций $y_k(t)$ очевидно. Функция $u(x, t)$, определенная суммой ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t)w_k(x),$$

будет искомым решением краевой задачи (1)–(3).

Теорема доказана. $\square$

Пусть выполняется условие $a_1(T) < \lambda_1$. Обозначим через k_1 натуральное число такое, что $\lambda_{k_1} \leq a_1(T) < \lambda_{k_1-1}$.

Теорема 3.3. Пусть выполняются условия (4), (5), (7), а также условия

$$a_1(0) > \lambda_1, \quad a_1(T) < \lambda_1. \quad (18)$$

Тогда начально-краевая задача (1)–(3) имеет в пространстве V бесконечно много решений. Если же дополнительно к условиям (2), (3) выполняются условия

$$\int_{\Omega} u(x, T)w_k(x) dx = 0, \quad k = 1, \dots, k_1 - 1, \quad (19)$$

то задача (1)–(3) будет иметь в пространстве V ровно одно решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A_k , $k = 1, \dots, k_1 - 1$, — произвольные действительные числа. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $y_k(t)$, удовлетворяющую на интервале $(0, T)$ уравнению (9) и такую, что для нее выполняются условия

$$y_k(0) = 0, \quad y_k(T) = A_k. \quad (20)$$

Положим $z_k(t) = y_k(t) - \frac{A_k t}{T}$. Для функции $z_k(t)$ должно выполняться уравнение

$$(a_1(t) - \lambda_k)z'_k(t) + (a_2(t) - \lambda_k)z_k(t) = f_k(t) - (a_1(t) - \lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t) - \lambda_k)\frac{A_k t}{T}, \quad (21)$$

а также условия

$$z_k(0) = z_k(T) = 0. \quad (22)$$

Используя регуляризацию уравнения (21) уравнением

$$\begin{aligned} -\varepsilon z''_k(t) + (a_1(t) - \lambda_k)z'_k(t) + (a_2(t) - \lambda_k)z_k(t) \\ = \widehat{f}_k(t) = f_k(t) - (a_1(t) - \lambda_k)\frac{A_k}{T} - (a_2(t) - \lambda_k)\frac{A_k t}{T} \end{aligned}$$

($\varepsilon > 0$), далее получая априорные оценки (12) и (14) (с помощью анализа равенств, полученных после умножения регуляризованного уравнения соответственно на функции $z_k(t)$ и $z''_k(t)$ с последующим интегрированием по отрезку $[0, T]$) и осуществляя стандартную процедуру перехода к пределу, нетрудно показать, что краевая задача (21), (22) имеет решение $z_k(t)$, принадлежащее пространству $W_2^1([0, T])$. Но тогда функция $y_k(t)$, определенная равенством $y_k(t) = z_k(t) + \frac{A_k t}{T}$, будет решением из пространства $W_2^1([0, T])$ краевой задачи (9), (20).

Функции $y_k(t)$ при $k = k_1, \dots, k_0$ строим как решения задач (9), (10). Далее, функции $y_k(t)$ при $k > k_0$ строим как решения обычной (невырожденной) задачи Коши. Наконец, функция $u(x, t)$, представленная суммой (8), даст искомое решение краевой задачи (1)–(3). Но поскольку функции $y_k(t)$ при $k = 1, \dots, k_1 - 1$ определяются произвольным действительным числом A_k , то таких функций будет бесконечно много. Следовательно, и решений $u(x, t)$ краевой задачи (1)–(3) будет бесконечно много.

Пусть в задаче (1)–(3) дополнительно выполняется условие (19). Тогда для решения $u(x, t)$ имеем

$$u(x, T) = \sum_{k=1}^{k_1-1} A_k w_k(x) + \sum_{k=k_1}^{\infty} y_k(T) w_k(x).$$

Умножая это равенство последовательно на функции $w_1(x), \dots, w_{k_1-1}(x)$ и интегрируя по области Ω , получим $A_k = 0$, $k = 1, \dots, k_1 - 1$. Другими словами, функция $u(x, t)$, заданная равенством

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) w_k(x),$$

в котором функции $y_k(t)$ при $k = 1, \dots, k_1 - 1$ определяются как решения задачи (9), (20) в случае $A_k = 0$, функции $y_k(t)$ при $k \geq k_1$ определяются как решения задачи (9), (10), будет искомым решением краевой задачи (1)–(3), (19), причем других решений нет. $\square$

4. Заключение

В работе представлены новые результаты о разрешимости в соболевских пространствах первой начально-краевой задачи для вырождающихся псевдопараболических уравнений третьего порядка. Особенностью изучаемых уравнений является то, что операторный коэффициент при первой производной по временной переменной может быть необратимым в произвольном числе точек из интервала $(0, T)$ (в том числе и на множестве ненулевой меры), причем может менять и направление эволюции.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Наряду с первой начально-краевой задачей для уравнения (1) можно аналогичным образом изучить разрешимость и других задач, например, третьей начально-краевой задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kozhanov A. I. Composite-type equations and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
4. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer // Inst. Rech. Agronom. 1964. N 3. P. 60–72.
5. Грачев С. И., Коротенко В. А., Кушакова Н. П. Исследование влияния трансформации двухфазной фильтрации на формирование зон невыработанных запасов нефти // Зап. Горного ин-та. 2020. Т. 241. С. 68–82.
6. Лобковский Л. И., Рамазанов М. М. Обобщенная модель фильтрации в трещиновато-пористой среде с низкопроницаемыми включениями и ее возможные приложения // Физика Земли. 2022. № 2. С. 144–154.
7. Ходос О. А. Численное моделирование фильтрации в трещиновато-пористой среде // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2010. № 3. С. 54–57.
8. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat conduction involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1968. V. 19. P. 614–627.
9. Guseinov F. B., Iskenderov B. A. On a mixed problem for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a domain cylindrical with respect to the space variables // Russian Math. Surveys. 2006. V. 61, N 2. P. 351–352.
10. Moskvicheva P. O. A numerical experiment for the Barenblatt–Zheltov–Kochina equation in a bounded domain // J. Comput. Eng. Math. 2017. V. 4, N 2. P. 41–48.
11. Сагадеева М. А., Бадоян А. Д. Задача оптимального управления решениями нестационарной модели Баренблатта — Желтова — Кочиной // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2014. Т. 14, № 2. С. 5–11.
12. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht: VSP, 2003.
13. Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1954. Т. 18, № 1. С. 3–50.
14. Солдатова Е. А., Келлер А. В. Алгоритмы и обработка информации в численном исследовании стохастической модели Баренблатта — Желтова — Кочиной // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математика. Механика. Физика. 2021. Т. 13, № 4. С. 29–36.
15. Шпилов А. С. Об устойчивости решений уравнений Баренблатта — Желтова — Кочиной на геометрическом графе // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2008. № 15. С. 106–110.
16. Замышляева А. А., Бычков Е. В. Начально-краевая задача для нелинейного модифицированного уравнения Буссинеска // Дифференц. уравнения. 2024. Т. 60, № 8. С. 1076–1085.
17. Замышляева А. А., Юзеева А. В. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска — Лява // Вестн. Южно-Урал. ун-та. Сер. Математическое моделирование и программирование. 2010. № 5. С. 23–31.
18. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

19. Triebel H. Interpolation theory, Function spaces, Differential operators. Berlin: VEB Deutscher Ver. Wiss., 1978.
20. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. М.: Высш. школа, 1977.

Поступила в редакцию 18 марта 2026 г.

После доработки 15 апреля 2026 г.

Принята к публикации 16 апреля 2026 г.

Кожанов Александр Иванович
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Жигжитжапов Бато Валерьевич
Бурятский государственный университет,
ул. Смолина, 24а, Улан-Удэ 670000
zhbat120401@gmail.com