

ГРАФИКИ ОТОБРАЖЕНИЙ ГРУПП ЭНГЕЛЯ И КРИТЕРИЙ ИХ ВНУТРЕННЕЙ ЛИПШИЦЕВОСТИ

М. Б. Карманова

Аннотация. Для классов отображений групп Энгеля установлен критерий о свойстве липшицевости в субримановом смысле построенных по ним графикам. Кроме того, получено полное описание трехступенчатых групп Карно специального вида, допускающих существование на них образов липшицевых во внутреннем смысле графиков. Приведено несколько примеров структур и отображений.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.407

Ключевые слова: липшицево отображение, внутренняя метрика, отображение-график, группа Энгеля, трехступенчатая группа Карно.

В работе исследуется вопрос, при каких условиях график, построенный по произвольному отображению групп Энгеля, является липшицевым относительно внутренних, т. е. согласованных с субримановой структурой, расстояний. Несмотря на то, что группа Энгеля является модельным случаем трехступенчатой группы Карно и имеет относительно «простую» структуру, ее свойства широко применяются при решении задач субримановой геометрии и связанных с ними прикладных вопросов (см., например, [1] и ссылки на литературу). В [2, 3] вопросы липшицевости графиков исследовались на группах Гейзенберга и двухступенчатых группах Карно. Подчеркнем, что переход от групп глубины два к группам глубины три не является тривиальным из-за существенно усложняющейся структуры координатных функций отображений, которая влечет появление новых ограничений на отображение и на свойства образа отображения-графика. В частности, актуальным становится вопрос существования трехступенчатых групп Карно, на которых может принимать значения липшицево отображение-график.

В задачах классического анализа и его обобщений отображения-графики играют существенную роль. Например, классы минимальных и максимальных поверхностей (см. подробности о таких поверхностях, связанных задачах и применениях в [4–7] и цитируемых источниках) локально представимы в виде графиков. Кроме того, в начале XXI века была найдена связь задач нейробиологии о построении моделей визуализации и свойств минимальных поверхностей в субримановой геометрии [8–10]. Ряд работ посвящен исследованию свойств графиков с классическим способом построения и с согласованным с субримановой структурой (см., например, [11–18] и др.). Специфическим свойством таких структур является то, что когда способ построения согласован с ними,

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0022).

а отображение липшицево во внутреннем смысле, то сам график в общем случае липшицевым не является. Это продемонстрировано, например, в [19], когда график строился для модельного случая гладкой функции. По этой причине вывод аналогов дифференциальных и метрических свойств представляет собой отдельную задачу. Один из вариантов ее решения представлен в [20–22] и других работах автора. Ключевой идеей является локальное перестраивание структуры пространства-образа, чтобы сделать отображение-график «почти липшицевым», так как без преобразований аналоги субримановых метрических свойств не выводятся. Однако субриманова структура при таком подходе нарушается. По этой причине возникает естественный вопрос исследования существования и базовых свойств отображений-графиков, способ построения которых согласован с субримановой структурой и которые не требуют изменения неголономной структуры образа, т. е. которые являются (локально) липшицевыми относительно субримановых (квази)метрик. В частности, этот вопрос включает и описание классов отображений, гарантирующих липшицевость построенных по ним графиков.

В статье выведены необходимые и достаточные условия на отображения групп Энгеля и на структурные константы трехступенчатых групп Карно, на которых принимает значение соответствующее отображение-график, обеспечивающие внутреннюю липшицевость таких графиков. Кроме того, установлены условия существования трехступенчатых групп Карно, на которых липшицево отображение-график принимает значение, получены их описания и приведены примеры отображений и структур, обладающих полученными свойствами. Кроме того, найдено ключевое свойство структурных констант образа графика, когда липшицевыми могут быть только графики, построенные по константе.

1. Предварительные сведения

Прежде всего, приведем определения и факты, которые потребуются в аргументах статьи. Исследуемая в статье группа Энгеля является модельным примером трехступенчатой группы Карно, определение которой потребуется в общем виде, так как построенные отображения-графики принимают значения именно на классе трехступенчатых групп Карно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [23]. Трехступенчатая группа Карно — это связная односвязная стратифицированная группа Ли $\mathbb{G}$, алгебра Ли V которой представима в виде

$$V = \bigoplus_{k=1}^3 V_k, \quad [V_1, V_j] = V_{j+1}, \quad j = 1, 2, \quad [V_1, V_3] = \{0\}.$$

Если базисное поле X_l принадлежит V_k , то его *степень* $\deg X_l$ равна k , $l = 1, \dots, N$, $k = 1, 2, 3$. Здесь и далее N — топологическая размерность группы $\mathbb{G}$.

Поля, степень которых равна единице, называются *горизонтальными*.

Подчеркнем, что базисные поля на группе Карно выбираются таким образом, что каждое из них принадлежит только одному из множеств V_k , $k = 1, 2, 3$.

Группа Энгеля является важным частным случаем трехступенчатой группы Карно (см., например, [1]). Далее будем исследовать классы графиков отображений этих групп и выводить свойства таких отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Группа Энгеля — это четырехмерная группа Карно, где $V_1 = \text{span}\{X_1, X_2\}$, $V_2 = \text{span}\{X_3\}$, $V_3 = \text{span}\{X_4\}$. Кроме того, верно

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_1, X_3] = X_4, \quad [X_2, X_3] = 0.$$

Групповая операция на трехступенчатых группах Карно определяется формулой Бейкера — Кэмпбелла — Хаусдорфа вида (1.1): если поля X и Y — линейные комбинации базисных полей с постоянными коэффициентами, $x = \exp(X)(\mathbf{0})$, $y = \exp(Y)(\mathbf{0})$, то $x \cdot y = z = \exp(Y)(x) = \exp(Z)(\mathbf{0})$, где

$$Z = X + Y + 1/2 \cdot [X, Y] + 1/12 \cdot ([X - Y], [X, Y]). \quad (1.1)$$

Так как для базисных полей на группах Карно справедливо соотношение (см., например, [23])

$$[X_i, X_j] = \sum_{k: \deg X_k = \deg X_i + \deg X_j} c_{ijk} X_k, \quad (1.2)$$

где c_{ijk} постоянны, то коэффициенты при базисных полях в поле Z вычисляются однозначно через (1.1).

Опишем субриманов аналог расстояния между точками.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (см., например, [19]). Пусть $w = \exp\left(\sum_{i=1}^N w_i X_i\right)(v)$, $v, w \in \mathbb{G}$. Положим

$$d_2(v, w) = \max\left\{\left(\sum_{j: \deg X_j=1} w_j^2\right)^{\frac{1}{2}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=2} w_j^2\right)^{\frac{1}{4}}, \left(\sum_{j: \deg X_j=3} w_j^2\right)^{\frac{1}{6}}\right\}.$$

Множество $\{w \in \mathbb{G} : d_2(v, w) < r\}$ называется *шаром относительно d_2 радиуса $r > 0$ с центром в точке v* и обозначается символом $\text{Box}_2(v, r)$.

С помощью формул групповой операции нетрудно показать, что d_2 является квазиметрикой: она равна нулю тогда и только тогда, когда точки совпадают, обладает свойством симметричности и локально для нее выполняется обобщенное неравенство треугольника.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$ — группы Карно, $E \subset \mathbb{G}$, и $\varphi : E \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$. Будем говорить, что отображение φ *липшицево во внутреннем смысле*, или *липшицево в субримановом смысле*, если существует константа $0 < L < \infty$ такая, что

$$\tilde{d}_2(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L d_2(x, y),$$

где $\tilde{d}_2$ — квазиметрика на $\tilde{\mathbb{G}}$, построенная по такому же принципу, как в определении 3.

Отображение φ *локально липшицево во внутреннем (субримановом) смысле*, если константа $L < \infty$ существует на компактных подмножествах E и зависит от этих компактных подмножеств.

Еще одно понятие, которое нам понадобится для формулировки и доказательства основного результата, — понятие субриманова аналога дифференцируемости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 ([24], см. также [25]). Функция $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ является *hc-дифференцируемой* в точке $x \in \mathbb{G}$, если существует отображение

$$\nabla_H f(x) : y = \exp\left(\sum_{k=1}^N y_k X_k\right)(x) \mapsto f(x) + \sum_{i=1}^{\dim V_1} a_i(x) y_i = f(x) + \nabla_H f(x) \langle y \rangle$$

такое, что $|f(y) - f(x) - \nabla_H f(x) \langle y \rangle| = o(d_2(x, y))$, где $o(1) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow x$.

Отображение $\nabla_H f(x)$ называется *hc-дифференциалом*, или *горизонтальным градиентом функции f в точке x* .

2. Графики отображений групп Энгеля

Рассмотрим случай, когда график строится по отображению одной группы Энгеля в другую. Опишем условия и введем основные обозначения.

Предположение 6. Пусть $\widehat{\mathbb{G}}$ — трехступенчатая группа Карно с базисными векторными полями $\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_8$, которые образуют алгебру Ли $\widehat{V} = \bigoplus_{k=1}^3 \widehat{V}_k$, где $\widehat{V}_1 = \text{span}\{\widehat{X}_1, \dots, \widehat{X}_4\}$, $\widehat{V}_2 = \text{span}\{\widehat{X}_5, \widehat{X}_6\}$, $\widehat{V}_3 = \text{span}\{\widehat{X}_7, \widehat{X}_8\}$, причем

$$[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2] = \widehat{X}_5, [\widehat{X}_3, \widehat{X}_4] = \widehat{X}_6, [\widehat{X}_1, \widehat{X}_5] = \widehat{X}_7, [\widehat{X}_3, \widehat{X}_6] = \widehat{X}_8$$

и, кроме того, $[\widehat{X}_2, \widehat{X}_5] = [\widehat{X}_4, \widehat{X}_6] = 0$.

Для остальных коммутаторов полей верны соотношения

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j] = \sum_{l: \deg \widehat{X}_l = \deg \widehat{X}_i + \deg \widehat{X}_j} c_{ijl} \widehat{X}_l.$$

Тогда поля $\widehat{X}_1, \widehat{X}_2, \widehat{X}_5, \widehat{X}_7$ определяют структуру алгебры Ли группы Энгеля $\mathbb{G}$, а поля $\widehat{X}_3, \widehat{X}_4, \widehat{X}_6, \widehat{X}_8$ — структуру алгебры Ли группы Энгеля $\widetilde{\mathbb{G}}$. Будем также считать, что $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ пересекаются по своим единицам групп $\mathbf{0}$ и $\widetilde{\mathbf{0}}$ соответственно в единице $\widehat{\mathbf{0}}$ группы $\widehat{\mathbb{G}}$.

Далее, для удобства восприятия текста и согласованности номеров полей, координат элементов и координатных функций у отображений, введем

ОБОЗНАЧЕНИЕ 7. Положим $I_1 = \{1, 2\}$, $I_2 = \{5\}$, $I_3 = \{7\}$ и $\widetilde{I}_1 = \{3, 4\}$, $\widetilde{I}_2 = \{6\}$, $\widetilde{I}_3 = \{8\}$.

Далее будем рассматривать группы $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ как подмножества $\widehat{\mathbb{G}}$. Тогда для $x \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ положим

$$x = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} x_k \widehat{X}_k \right) (\widehat{\mathbf{0}})$$

и

$$\varphi(x) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_k(x) \widehat{X}_k \right) (\widehat{\mathbf{0}}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Функции φ_k , где $k \in \widetilde{I}_1$, будем называть *горизонтальными*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть $u \in \mathbb{G}$ и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$. Значение *отображения-графика* $\varphi_{\Gamma}(u)$ совпадает с элементом

$$\varphi_{\Gamma}(u) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_k(u) \widehat{X}_k \right) (u).$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ 10. Пусть $\mathbb{G}$ и $\widetilde{\mathbb{G}}$ — группы Энгеля, $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \widetilde{\mathbb{G}}$ и $u, w \in \mathbb{G}$. Обозначим координаты элемента $\varphi(w)$ относительно $\varphi(u)$ символами $\{\varphi_u^k(w)\}$, где

$$\varphi(w) = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \widetilde{I}_i} \varphi_u^k(w) \widehat{X}_k \right) (\varphi(u)).$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\varphi_u^k(w) = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) \quad \text{для } k \in \tilde{I}_1. \quad (2.1)$$

Если $k = 6 \in \tilde{I}_2$, то

$$\varphi_u^6(w) = \varphi_6(w) - \varphi_6(u) + \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \quad (2.2)$$

При $k = 8 \in \tilde{I}_3$ имеем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) = & \varphi_8(w) - \varphi_8(u) + \frac{1}{2}(\varphi_6(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_6(w)) \\ & - \frac{1}{12}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Введем еще одно

ОБОЗНАЧЕНИЕ 11. В условиях обозначения 10 положим

$$\hat{\omega}_u^k(w) = \frac{\varphi_u^k(w) - \nabla_H \varphi_u^k(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)} = \frac{\varphi_u^k(w) - \nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)}$$

для $k = 3, 4$. Обозначим компоненты hc -дифференциала функции φ_k в точке $u \in \mathbb{G}$ символами $\phi_{kj}(u)$, $j = 1, 2$.

Положим еще

$$\omega_u^8(w) = \frac{\varphi_u^8(w) - D\varphi_u^8(u) \langle w \rangle - \frac{1}{2}D_2\varphi_u^8(u) \langle w \rangle}{d_2(u, w)^2}.$$

Теорема 12. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 6 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Тогда график $\varphi_\Gamma : \mathbb{G} \rightarrow \hat{\mathbb{G}}$, построенный как

$$\mathbb{G} \ni w \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(w),$$

где $\varphi(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in \tilde{I}_i} \varphi_k(w) \hat{X}_k\right)(\mathbf{0})$, является локально липшицевым (во внутреннем смысле) относительно d_2 и $\hat{d}_2$ с hc -дифференцируемыми горизонтальными координатными функциями тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия.

1. Координатные функции φ_j локально липшицевы во внутреннем смысле и hc -дифференцируемы всюду, если $j \in \tilde{I}_1$.

2. Верно

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек $u \in \mathbb{G}$.

3. Для $k = 6 \in \tilde{I}_2$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6} \quad (2.4)$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_5|$, а при $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$ выполняется $|\varphi_u^6(w)| \leq L|w_7|^{2/3}$ для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

4. Верно

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \tilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) &= c_{167} \varphi_6(u) = c_{267} \varphi_6(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) \\ &= \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0 \end{aligned}$$

для всех точек $u \in \mathbb{G}$.

5. Для $k = 8 \in \tilde{I}_3$ и точек $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$, функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в точке u дважды, ее первый дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j, \quad (2.5)$$

второй дифференциал равен

$$\begin{aligned} &\sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ &- \sum_{j, l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Если же $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$, то $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. В точках вида $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$ отображение $\varphi_u^8(w)$ дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u), \quad (2.7)$$

и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

Кроме того, для некоторого $\widehat{L} < \infty$, зависящего от компактной окрестности, верно

$$\begin{aligned} \left| \omega_u^8(w) + \frac{\widehat{\omega}_u^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\omega}_u^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \right| \leq \widehat{L} d_2(u, w) \quad (2.8) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \left| - \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^3(w^2)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_4(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\ \left. + \frac{\widehat{\omega}_{w^2}^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right| \end{aligned}$$

$$+ \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \Big| \leq \widehat{L} d_2(u, w), \quad (2.9)$$

где

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k \right) (u), \quad w^1 = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u), \quad w^2 = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(w^1).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Если функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ принадлежит классу C^3 по горизонтальным координатам, а функции φ_3 и φ_4 таковы, что они принадлежат классу C^2 по горизонтальным координатам и липшицевы в классическом смысле по всем остальным, то условия (2.8) и (2.9) будут выполняться всегда.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 12. Рассмотрим точки $u, w \in \mathbb{G}$ такие, что

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \widehat{X}_k \right) (u).$$

Вычислим в явном виде координаты элемента $\varphi_\Gamma(w)$ относительно $\varphi_\Gamma(u)$. Положим

$$\varphi_\Gamma(w) = \exp \left(\sum_{k=1}^8 s_k \widehat{X}_k \right) (\varphi_\Gamma(u)).$$

Из (1.1), (1.2) и (2.1) следует, что

$$\begin{cases} s_k = w_k & \text{при } k \in I_1, \\ s_k = \varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \varphi_u^k(w) & \text{при } k \in \widetilde{I}_1. \end{cases}$$

Если $k = 5 \in I_2$, то

$$s_5 = w_5 + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk5}.$$

Аналогично, если $k = 6 \in \widetilde{I}_2$, то

$$s_6 = \varphi_u^6(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) c_{jk6}.$$

Докажем необходимость. Пусть отображение-график φ_Γ липшицево. Тогда $|\varphi_k(w) - \varphi_k(u)| \leq L d_2(u, w)$ для $k \in \widetilde{I}_1$ и некоторого $L < \infty$. Если речь идет о локальной липшицевости, то $L < \infty$ зависит от компактной окрестности.

Далее, рассуждениями, аналогичными приведенным в [3], выводим, что если отображение-график липшицево, то

$$\sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{jk5} \varphi_k(u) = 0 \quad (2.10)$$

для всех $j \in I_1$ и всех точек области определения и поэтому верно $s_5 = w_5$. Кроме того, из липшицевости отображения-графика, построенного по отображению φ , следует

$$\left| \varphi_u^6(w) + \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6} \right| = O(w_1^2 + w_2^2), \quad (2.11)$$

если $w = \exp(w_1 \widehat{X}_1 + w_2 \widehat{X}_2)(u)$. Иными словами, функция $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема (в классическом смысле) в u , ее дифференциал равен

$$- \sum_{j \in I_1, k \in \widetilde{I}_1} w_j \varphi_k(u) c_{jk6}$$

и аппроксимирует эту функцию с точностью до $O(w_1^2 + w_2^2)$.

Если же $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$, то $|\varphi_u^6(w)| = O(|w_5|)$, а при $w = \exp(w_7 \widehat{X}_7)(u)$ должно быть $|\varphi_u^6(w)| = O(|w_7|^{2/3})$.

Рассмотрим теперь случаи I_3 и $\widetilde{I}_3$. Для $k = 7 \in I_3$ имеем

$$\begin{aligned} s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \widetilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1}} c_{ji7} (\varphi_i(u) + \varphi_i(w)) w_j + \frac{1}{4} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(w) \varphi_i(u) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(u) \varphi_i(u) w_j + \frac{1}{12} \sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} (\varphi_k(u) + \varphi_k(w)) \varphi_i(u) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, j \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{i \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im5} w_1 w_i (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{i, k \in \widetilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5} c_{k57} \varphi_k(w) \varphi_i(u) w_j = \sum_{k \in \widetilde{I}_1} c_{k57} \varphi_k(w) \cdot \sum_{j \in I_1} w_j \sum_{i \in \widetilde{I}_1} c_{ij5} \varphi_i(u) = 0$$

в силу (2.10), если отображение-график липшицево. Тогда

$$\begin{aligned} s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \widetilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in \widetilde{I}_2, j \in I_1}} c_{ji7} (\varphi_i(u) + \varphi_i(w)) w_j \\ + \frac{1}{12} \sum_{i, j \in I_1, m \in \widetilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)). \end{aligned}$$

Пусть $w = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(u)$. Тогда аналогично [3] выводим, что при условии липшицевости отображения-графика верно

$$\sum_{i \in \widetilde{I}_1} c_{5i7} \varphi_i(u) = 0,$$

и поэтому

$$s_7 = w_7 + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + \varphi_6(u)) w_j$$

$$+ \frac{1}{12} \sum_{i,j \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u)) \\ + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)).$$

Отметим, что в этой сумме слагаемые w_7 и

$$\sum_{i,j \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6} c_{j67} w_i w_j (\varphi_m(w) - \varphi_m(u))$$

не превосходят значение $d_2(u, w)$ в третьей степени в силу доказанного выше. Поэтому если φ_Γ липшицево, то сравнимое значение не должна превосходить величина

$$\frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + \varphi_6(u)) w_j + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j (\varphi_4(u) \varphi_3(w) - \varphi_3(u) \varphi_4(w)).$$

Такое выражение в силу (2.2) совпадает с

$$\frac{1}{6} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j \cdot \varphi_u^6(w) + \frac{1}{3} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) + 2\varphi_6(u)) w_j \\ = \frac{1}{6} \sum_{j \in I_1} c_{j67} w_j \cdot \varphi_u^6(w) + \frac{1}{3} \sum_{j \in I_1} c_{j67} (\varphi_6(w) - \varphi_6(u)) w_j + \sum_{j \in I_1} c_{j67} \varphi_6(u) w_j. \quad (2.12)$$

Рассмотрим точку $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. В силу (2.2) и (2.11) первые два слагаемых правой части (2.12) соотносимы с $d_2(u, w)$ во второй степени. Следовательно, если отображение-график липшицево, то

$$c_{j67} \varphi_6(u) = 0 \quad (2.13)$$

для всех $u \in \mathbb{G}$ и $j = 1, 2$. Тогда и второе слагаемое правой части (2.12) также равно нулю. Так как в этой точке в силу (2.11) значение $\varphi_u^6(w)$ отличается от своего дифференциала, равного

$$- \sum_{i \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_i \varphi_k(u) c_{ik6},$$

на $O(w_1^2 + w_2^2)$, то из липшицевости отображения-графика должно следовать

$$\left| \sum_{j, i \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{j67} c_{ik6} w_j w_i \varphi_k(u) \right| \leq L (w_1^2 + w_2^2)^{3/2},$$

где $L < \infty$. Отсюда выводим

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167} c_{1k6} \varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{267} c_{2k6} \varphi_k(u) = 0$$

и

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167} c_{2k6} + c_{267} c_{1k6}) \varphi_k(u) = 0.$$

Таким образом, $s_7 = w_7$.

Исследуем координату s_8 . Имеем

$$\begin{aligned}
 s_8 = & \varphi_u^8(w) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} c_{ij8}(\varphi_i(u) + \varphi_i(w))w_j + \frac{1}{12} \sum_{k, i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5}c_{k58}\varphi_k(u)\varphi_i(u)w_j \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{k, i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij5}c_{k58}\varphi_i(u)\varphi_k(w)w_j \\
 & - \frac{1}{12} \sum_{k, m \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{jm5}c_{k58}(\varphi_k(u) + \varphi_k(w))\varphi_m(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_3(u)\varphi_i(u)w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(u) + \varphi_3(w))\varphi_i(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{m, j \in I_1, i \in \tilde{I}_1} c_{ij6}c_{m68}\varphi_i(u)w_jw_m + \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}\varphi_m(w)w_jw_i \\
 & + \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_i(u)w_j\varphi_3(w) - \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j(\varphi_3(u)\varphi_4(w) - \varphi_4(u)\varphi_3(w))c_{j68}.
 \end{aligned}$$

В силу (2.10)

$$\begin{aligned}
 s_8 = & \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2, \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8}(\varphi_i(w) - \varphi_i(u)) + \sum_{\substack{i \in \tilde{I}_1, j \in I_2 m \\ \text{или } i \in I_2, j \in I_1}} w_j c_{ji8}\varphi_i(u) \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_3(u)\varphi_i(u)w_j + \frac{1}{12} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(w) + \varphi_3(u))\varphi_i(w)w_j \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}(\varphi_m(w) - \varphi_m(u))w_jw_i + \frac{1}{4} \sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}\varphi_i(u)w_j\varphi_3(w) \\
 & + \frac{1}{12} \sum_{j \in I_1} w_j(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w))c_{j68}. \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

Тогда для $w = \exp(w_7 \hat{X}_7)(u)$ выводим, что $|\varphi_u^8(w)| \leq L|w_7|$ для некоторого $L < \infty$. Если же $w = \exp(w_5 \hat{X}_5)(u)$, то $\varphi_u^8(w)$ должно быть дифференцируемо по w_5 , где дифференциал равен

$$- \sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u)$$

и аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $O(|w_5|^{3/2})$.

Кроме того, для любых $u, w \in \mathbb{G}$ верно

$$\sum_{j, i \in I_1, m \in \tilde{I}_1} c_{im6}c_{j68}(\varphi_m(w) - \varphi_m(u))w_jw_i = O(d_2(u, w)^3) \quad (2.15)$$

и

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1, j \in I_1} c_{ij6}(\varphi_3(w) - \varphi_3(u))(\varphi_i(w) - \varphi_i(u))w_j = O(d_2(u, w)^3), \quad (2.16)$$

где величина $O(1)$ зависит только от φ .

Пусть теперь $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. В силу вышеизложенного и (2.2) для оценки координаты s_8 достаточно оценить величину

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j68} \varphi_u^6(w) w_j \\ + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_3(w) - \varphi_3(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_4(w) - \varphi_4(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Из (2.11) следует, что

$$\varphi_u^6(w) = - \sum_{l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} w_l \varphi_k(u) c_{lk6} + O(w_1^2 + w_2^2).$$

Кроме того,

$$\varphi_k(w) - \varphi_k(u) = \sum_{l \in I_1} \phi_{kl}(u) w_l + \hat{\omega}_u^k(w) \cdot d_2(u, w),$$

где

$$\sum_{l \in I_1} \phi_{kl}(u) w_l = \nabla_H \varphi_k(u) \langle w \rangle,$$

а $\hat{\omega}_u^k(w) \rightarrow 0$ при $w \rightarrow u$ (см. обозначение 11), $k = 3, 4$.

Таким образом, величиной, сравнимой с $(w_1^2 + w_2^2)^{3/2}$, должно оцениваться сверху значение

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w) + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ - \frac{1}{2} \sum_{j, l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\ + \sum_{j, l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\ + \sum_{j, l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l \\ + \hat{\omega}_u^3(w) \cdot d_2(u, w) \cdot \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + \hat{\omega}_u^4(w) \cdot d_2(u, w) \cdot \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \quad (2.18) \end{aligned}$$

Так как при условии липшицевости φ_Γ выражение (2.18) оценивается через $O(d_2(u, w)^3) = o(d_2(u, w)^2)$, то полином

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \sum_{j,l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l
\end{aligned}$$

аппроксимирует $\varphi_u^8(w)$ с точностью до величины $o(d_2(u, w)^2)$. Иными словами,

$$- \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j$$

является первым дифференциалом, а

$$\begin{aligned}
& \sum_{j,l \in I_1, k \in \tilde{I}_1} c_{lk6} c_{j68} \varphi_k(u) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{2}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j w_l \\
& - \sum_{j,l \in I_1} \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j w_l
\end{aligned}$$

является вторым дифференциалом отображения $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ в точке u по w_1 , w_2 , если $w = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$. Кроме того, если положить

$$\omega_u^8(w) = \frac{\varphi_u^8(w) - D\varphi_u^8(u)\langle w \rangle - \frac{1}{2} D_2\varphi_u^8(u)\langle w \rangle}{d_2(u, w)^2},$$

то условие (2.8), а именно,

$$\begin{aligned}
& \left| \omega_u^8(w) + \frac{\hat{\omega}_u^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \right. \\
& \quad \left. + \frac{\hat{\omega}_u^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j \right| \leq \hat{L} d_2(u, w)
\end{aligned}$$

должно выполняться для некоторого $\hat{L} < \infty$.

Рассмотрим теперь (2.14) для точки

$$w = \exp \left(\sum_{i=1}^3 \sum_{k: k \in I_i} w_k \hat{X}_k \right) (u)$$

без слагаемых (2.15), (2.16) и

$$\sum_{i \in \tilde{I}_1} w_5 c_{5i8} (\varphi_i(w) - \varphi_i(u)),$$

так как они и так не превосходят величины, сравнимой с $d_2(u, w)^3$. Построим вспомогательные точки

$$w^1 = \exp(w_1 \hat{X}_1 + w_2 \hat{X}_2)(u)$$

и

$$w^2 = \exp(w_5 \widehat{X}_5)(w^1).$$

Тогда

$$w = \exp\left(\left(w_7 - \frac{1}{2}w_1w_5\right)\widehat{X}_7\right)(w^2) = \exp(\widehat{w}_7\widehat{X}_7)(w^2),$$

и $\widehat{w}_7 \leq \widehat{c}d_2(u, w)^3$, $\widehat{c} < \infty$. Положим $w^0 = u$ и $w^3 = w$. Из (2.2) выводим

$$\varphi_{w^{l-1}}^6(w^l) = \varphi_6(w^l) - \varphi_6(w^{l-1}) + \frac{1}{2}(\varphi_4(w^{l-1})\varphi_3(w^l) - \varphi_3(w^{l-1})\varphi_4(w^l)),$$

где $l = 1, 2, 3$.

Отсюда с учетом доказанных ранее свойств координатной функции $\varphi_v^6(\cdot)$, $v \in \mathbb{G}$, следует, что

$$\begin{aligned} \varphi_u^6(w) &= \sum_{l=1}^3 \varphi_{w^{l-1}}^6(w^l) + \frac{1}{2}(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1))(\varphi_4(w^0) - \varphi_4(w^1)) \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi_4(w^2) - \varphi_4(w^1))(\varphi_3(w^1) - \varphi_3(w^0)) + \frac{1}{2}(\varphi_3(w^3) - \varphi_3(w^2))(\varphi_4(w^0) - \varphi_4(w^1)) \\ &+ \frac{1}{2}(\varphi_4(w^3) - \varphi_4(w^2))(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^0)) = \varphi_u^6(w^1) + O(d_2(u, w)^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Кроме того, с точностью до величины, сравнимой с $d_2(u, w)^3$, значение $\varphi_u^8(w)$ в силу (1.1) совпадает с суммой

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w^1) + \varphi_{w^1}^8(w^2) + \varphi_{w^2}^8(w) + \frac{1}{2}(\varphi_u^3(w^1)\varphi_{w^1}^6(w^2) - \varphi_u^6(w^1)\varphi_{w^1}^3(w^2)) \\ + \frac{1}{2}(\varphi_{w^1}^3(w^2)\varphi_{w^2}^6(w) - \varphi_{w^1}^6(w^2)\varphi_{w^2}^3(w)), \end{aligned} \quad (2.20)$$

причем значение

$$\max\{\varphi_{w^2}^8(w), \varphi_u^3(w^1)\varphi_{w^1}^6(w^2), \varphi_{w^1}^3(w^2)\varphi_{w^2}^6(w), \varphi_{w^1}^6(w^2)\varphi_{w^2}^3(w)\}$$

сравнимо с $d_2(u, w)^3$ в силу полученных необходимых условий. Преобразуем теперь выражение (2.14) с учетом (2.17), не учитывая слагаемые из (2.19) и (2.20), сравнимые с $d_2(u, w)^2$ и $d_2(u, w)^3$ соответственно. Получаем

$$\begin{aligned} \varphi_u^8(w^1) + \varphi_{w^1}^8(w^2) + \frac{1}{2} \sum_{j \in I_1} c_{j68} \varphi_u^6(w^1) w_j - \frac{1}{2} \varphi_u^6(w^1) \varphi_{w^1}^3(w^2) + \sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u) \\ + \sum_{j \in I_1} \left(c_{j68} \varphi_6(u) + \frac{1}{2} c_{3j6} (\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2} c_{4j6} \varphi_3(u) \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_3(w) - \varphi_3(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2} c_{3j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{3} c_{4j6} \varphi_4(u) - \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_4(u) \right) w_j \\ + (\varphi_4(w) - \varphi_4(u)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6} c_{4j6} \varphi_3(u) + \frac{1}{6} c_{j68} \varphi_3(u) \right) w_j. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Так как

$$\sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(u) = \sum_{i \in \widetilde{I}_1} w_5 c_{5i8} \varphi_i(w^1) + O(d_2(u, w)^3),$$

то из доказанного выше следует

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\varphi_u^6(w^1)\varphi_{w^1}^3(w^2) \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3), \end{aligned}$$

а с учетом (2.11) выводим

$$\begin{aligned} & -(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{2}c_{4j6}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3). \end{aligned}$$

Так как это выражение совпадает с

$$\begin{aligned} & -(\varphi_3(w^2) - \varphi_3(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_4(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_3(w) - \varphi_3(w^2)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + (\varphi_4(w) - \varphi_4(w^1)) \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)^3), \end{aligned}$$

а hc -дифференциалы $\nabla_H \varphi_k$ нулевые в этих точках для $k = 3, 4$, то получаем

$$\begin{aligned} & -\frac{\widehat{\omega}_{w^1}^3(w^2)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_4(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + \frac{\widehat{\omega}_{w^2}^3(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{2}c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_4(u) \right) w_j \\ & + \frac{\widehat{\omega}_{w^1}^4(w)}{d_2(u, w)} \sum_{j \in I_1} \left(\frac{1}{6}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{6}c_{j68}\varphi_3(u) \right) w_j = O(d_2(u, w)). \end{aligned}$$

Таким образом, необходимость условий установлена.

Перейдем к доказательству достаточности. Заметим, что для координат $s_1, \dots, s_5$ все рассуждения обратимы, поэтому условие достаточности для них доказано. Для координаты s_6 достаточность следует из (2.19), а для координаты s_7 необходимые условия являются достаточными в силу обратимости выкладок, касающихся координат точки, а также (2.12), (2.13) и (2.19).

Для доказательства достаточности условий для s_8 , аналогично, достаточно рассмотреть представление (2.21) и обратить выкладки. Теорема доказана.

3. Существование структур и отображений

После доказательства теоремы возникает естественный вопрос, существуют ли группы Карно с выведенными ограничениями на структурные константы, за исключением тривиальных случаев, когда или отображение нулевое, или поля из $\mathbb{G}$ и $\tilde{\mathbb{G}}$ коммутируют.

Прежде всего сформулируем и докажем уточнение утверждения теоремы 12 о дифференциалах координатной функции $\varphi_u^8(w)$.

Теорема 14. Если зависящее только от горизонтальных переменных отображение $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ таково, что построенный по нему график является липшицевым во внутреннем смысле отображением, горизонтальные координатные функции которого непрерывно h -дифференцируемы, то должно выполняться соотношение

$$\phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} + c_{l68}) \quad (3.1)$$

для всех $j, l = 1, 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По установленному критерию при фиксированном $u \in \mathbb{G}$ координатная функция $w \mapsto \varphi_u^8(w)$ является дважды дифференцируемой, если $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$. Кроме того, так как $w \mapsto \varphi_u^6(w)$ дифференцируема в таких же точках и

$$\varphi_6(w) = \varphi_u^6(w) + \varphi_6(u) - \frac{1}{2}(\varphi_4(u)\varphi_3(w) - \varphi_3(u)\varphi_4(w)),$$

где φ_3 и φ_4 дифференцируемы по w_1 и w_2 по условию, то и $\varphi_6(w)$ также дифференцируема по w_1 и w_2 . Следовательно, производная по w_l элемента

$$- \left(c_{j68}\varphi_6(u) + \frac{1}{2}c_{3j6}(\varphi_3(u))^2 + \frac{1}{2}c_{4j6}\varphi_3(u)\varphi_4(u) \right)$$

из (2.5) должна совпадать с коэффициентом при $w_j w_l$ из (2.6):

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{lk6}c_{j68}\varphi_k(u) - \phi_{3l}(u) \left(c_{3j6}\varphi_3(u) + \frac{2}{3}c_{4j6}\varphi_4(u) - \frac{1}{3}c_{j68}\varphi_4(u) \right) \\ - \phi_{4l}(u) \left(\frac{1}{3}c_{4j6}\varphi_3(u) + \frac{1}{3}c_{j68}\varphi_3(u) \right). \end{aligned}$$

Используя производную φ_6 , установленную в (2.4), выводим, что необходимо выполнение следующего условия:

$$\begin{aligned} \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} - c_{l68}) + \phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) \\ = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u) \left(\frac{4}{3}c_{4l6} - \frac{2}{3}c_{l68} \right) + \phi_{4j}(u)\varphi_3(u) \left(\frac{2}{3}c_{4l6} + \frac{2}{3}c_{l68} \right), \end{aligned}$$

или

$$\phi_{4j}(u)\varphi_3(u)(c_{4l6} + c_{l68}) = \phi_{3j}(u)\varphi_4(u)(c_{4l6} + c_{l68}).$$

Теорема доказана.

ПРИМЕР 15. Самым простым примером выполнения соотношения (3.1) являются случаи, когда справедливо одно из следующих условий.

1. Верно $c_{l46} = c_{l68}$ для $l = 1, 2$.
2. Функции $\varphi_3(u)$ и $\varphi_4(u)$ не зависят от горизонтальных координат.

ПРИМЕР 16. Если $c_{l46} \neq c_{l68}$ для $l = 1, 2$ и φ_3 и φ_4 не обращаются в нуль, то верно соотношение

$$\frac{\phi_{3j}(u)}{\varphi_3(u)} = \frac{\phi_{4j}(u)}{\varphi_4(u)}, \quad j = 1, 2.$$

Исследуем свойства структур, определяемых условиями, выведенными в теореме 12. Известно, что структура алгебры Ли (в том числе алгебры Ли векторных полей) определяется тождеством Якоби. В рассматриваемом случае нужно, чтобы это тождество выполнялось для структурных констант на $\widehat{\mathbb{G}}$. Так как коммутаторы второго порядка с базисными полями, степень которых более единицы, равны нулю, то достаточно проверить выполнение тождества Якоби для горизонтальных векторных полей. Иными словами, нужно, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} [X_1, [X_2, X_3]] + [X_2, [X_3, X_1]] + [X_3, [X_1, X_2]] = 0, \\ [X_1, [X_2, X_4]] + [X_2, [X_4, X_1]] + [X_4, [X_1, X_2]] = 0, \\ [X_1, [X_3, X_4]] + [X_3, [X_4, X_1]] + [X_4, [X_1, X_3]] = 0, \\ [X_2, [X_3, X_4]] + [X_3, [X_4, X_2]] + [X_4, [X_2, X_3]] = 0. \end{cases}$$

Запишем их в терминах структурных констант из (1.2). Имеем

$$\begin{cases} c_{235} + c_{236}c_{167} - c_{136}c_{267} + c_{357} = 0, \\ c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{245} + c_{246}c_{167} - c_{146}c_{267} + c_{457} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Чтобы убедиться в том, что примеры описанных в теореме 12 структур и отображений существуют, исследуем выведенные условия на отображения и структурные константы. А именно, требуется выполнение равенств

$$c_{167}\varphi_6(u) = c_{267}\varphi_6(u) = 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{1k5}\varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{2k5}\varphi_k(u) = 0.$$

Заметим, что второе условие эквивалентно соотношению

$$\begin{pmatrix} c_{135} & c_{145} \\ c_{235} & c_{245} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_3(u) \\ \varphi_4(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

где ненулевые значения $\varphi_3(u)$ и $\varphi_4(u)$ возможны, только если

$$c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235} = 0. \quad (3.4)$$

Рассмотрим основные случаи и их варианты.

СТРУКТУРА 1. Пусть $c_{167} = c_{267} = 0$. Из (3.2) следует

$$c_{235} = -c_{357}, \quad c_{245} = -c_{457}.$$

Кроме того, из пятого уравнения системы (3.2) следует, что выполнено условие (3.4), а седьмое уравнение этой системы превращается в тождество. Тогда, во-первых, система (3.3) имеет (в общем случае) ненулевые решения φ_3 и φ_4 , и, во-вторых, для этих решений верно

$$0 = c_{235}\varphi_3(u) + c_{245}\varphi_4(u) = c_{537}\varphi_3(u) + c_{547}\varphi_4(u).$$

Отсюда вытекает, что выполнены все условия п. 4 теоремы 12. Таким образом, в (3.2) остаются четыре уравнения:

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - c_{245}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

СТРУКТУРА 1.1. Пусть

$$c_{135} = c_{245} = c_{145} = c_{235} = 0. \quad (3.6)$$

Тогда $c_{357} = c_{457} = 0$, $c_{168} = c_{146}$ и $c_{268} = c_{246}$, следовательно, $c_{458} = 0$ и

$$c_{236}c_{146} - c_{136}c_{246} + c_{358} = 0.$$

Очевидно, что константы, удовлетворяющие данному соотношению, существуют. Поэтому и группа $\hat{\mathbb{G}}$ с алгеброй Ли векторных полей, определяемых вышеописанными структурными константами, также существует.

В свою очередь, так как $c_{168} = c_{146}$ и $c_{268} = c_{246}$ при условии (3.6), то выполнено соотношение (3.1), и на отображения накладываются только ограничения, связанные со свойствами первых (классических) дифференциалов их координатных функций.

СТРУКТУРА 1.2. Рассмотрим теперь случай, когда условие (3.6) не выполняется. Так как c_{135} и c_{235} входят в систему (3.5) симметрично, то предположим без ограничения общности, что $c_{135} \neq 0$. Тогда

$$c_{245} = \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}, \quad (3.7)$$

а из (3.3) будет следовать

$$\varphi_3(u) = -\frac{c_{145}}{c_{135}}\varphi_4(u). \quad (3.8)$$

Поэтому

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{458} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{135}c_{458} = 0, \\ c_{268} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{458} = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Чтобы убедиться, что константы, удовлетворяющие системе (3.9), существуют, положим

$$c_{168} = x, \quad c_{458} = y, \quad c_{268} = z, \quad c_{358} = t$$

и исследуем разрешимость системы уравнений

$$\begin{cases} x = c_{145}t + c_{146} - c_{135}y, \\ y = c_{146}z - c_{246}x, \\ z = \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}t + c_{246} - c_{235}y, \\ t = c_{136}z - c_{236}x. \end{cases}$$

В свою очередь, она сводится к системе

$$\begin{cases} x(1 + c_{135}(\frac{c_{145}}{c_{135}}c_{236} - c_{246})) + z(c_{135}(c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{136})) = c_{146}, \\ x(c_{235}(\frac{c_{145}}{c_{135}}c_{236} - c_{246})) + z(1 + c_{235}(c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{136})) = c_{246}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Тогда если верно

$$1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} + c_{235}c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{136} \neq 0,$$

то решение (x, y, z, t) существует и единственно. Если же

$$1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} + c_{235}c_{146} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{136} = 0,$$

то для существования решений нужно, чтобы либо $c_{146} = c_{246} = 0$, либо эквивалентность системы (3.10) одному уравнению.

Заметим, что во всех перечисленных случаях константы, входящие в (3.10), можно подобрать так, чтобы описанные выше условия выполнялись. Рассмотрим один из частных случаев.

СТРУКТУРА 1.2.1. Пусть $1 + c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} = 0$ и $c_{235} = 0$. Тогда система (3.10) сведется к системе

$$\begin{cases} z(c_{135}c_{146} - c_{145}c_{136}) = c_{146}, \\ z = c_{246}. \end{cases} \quad (3.11)$$

Система (3.10) имеет решения, если система (3.11) корректна и выполняется условие

$$c_{246}(c_{135}c_{146} - c_{145}c_{136}) = c_{146},$$

а с учетом предположения $c_{135}c_{246} - 1 = c_{145}c_{236}$ оно эквивалентно соотношению

$$c_{145}c_{236}c_{146} = c_{145}c_{136}c_{246}.$$

Если предположить, что $c_{145} = 0$, то с учетом (3.7) и (3.8) получим, что $\varphi_3 \equiv 0$, тогда как на φ_4 ограничений нет; при этом условие (3.1) выполнено. Если же $c_{145} \neq 0$, то условие

$$c_{236}c_{146} = c_{136}c_{246}$$

гарантирует корректность системы (3.11). Так как $c_{145} \neq 0$, то (3.1) выполнено в силу (3.8).

Как видно, ограничений на значения $x = c_{168}$ здесь нет.

СТРУКТУРА 2. Пусть хотя бы одно из значений c_{167} или c_{267} отлично от нуля. Предположим для определенности, что $c_{167} \neq 0$ (случай $c_{267} \neq 0$ является аналогичным). Тогда $\varphi_6(u) \equiv 0$.

Из условия

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{167}c_{1k6}\varphi_k(u) = \sum_{k \in \tilde{I}_1} (c_{167}c_{2k6} + c_{267}c_{1k6})\varphi_k(u) = 0$$

пункта 4 теоремы 12 вытекает, что, во-первых,

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{1k6}\varphi_k(u) = 0, \quad (3.12)$$

и, во-вторых,

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} c_{2k6} \varphi_k(u) = 0. \quad (3.13)$$

Условия (3.12) и (3.13) выполняются, если $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$ или если

$$c_{136} \varphi_3(u) = -c_{146} \varphi_4(u) \quad \text{и} \quad c_{236} \varphi_3(u) = -c_{246} \varphi_4(u),$$

где $c_{136}c_{246} = c_{236}c_{146}$, или если $c_{136} = c_{246} = c_{236} = c_{146} = 0$. Кроме того, из п. 4 теоремы 12 следует, что должно выполняться

$$c_{357} \varphi_3(u) + c_{457} \varphi_4(u) = 0. \quad (3.14)$$

Заметим, что если $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$, то из теоремы 12 следует, что единственным условием липшицевости отображения-графика является липшицевость координатной функции $\varphi_u^8(w)$ относительно d_2 :

$$|\varphi_u^8(w)| \leq L d_2(u, w)^3 \quad (3.15)$$

для некоторого $L < \infty$, зависящего от компактной окрестности.

Рассмотрим случай, когда хотя бы одна из функций φ_3 и φ_4 может не быть равной нулю. В этом случае возможно два вида структур.

СТРУКТУРА 2.1. Пусть $c_{136} = c_{246} = c_{236} = c_{146} = 0$. Тогда из (3.2) имеем

$$\begin{cases} c_{235} + c_{357} = 0, \\ c_{358} = c_{458} = 0, \\ c_{245} + c_{457} = 0, \\ c_{167} - c_{145}c_{357} + c_{135}c_{457} = 0, \\ c_{168} = c_{268} = 0, \\ c_{267} - c_{245}c_{357} + c_{235}c_{457} = 0, \end{cases}$$

откуда следует $c_{267} = 0$ и

$$c_{167} - (c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235}) = 0.$$

Так как $c_{167} \neq 0$, то и $c_{135}c_{245} - c_{145}c_{235} \neq 0$. Следовательно, единственным решением системы (3.3) будет $\varphi_3(u) = \varphi_4(u) \equiv 0$ и должно выполняться (3.15).

Поэтому рассмотрим случай, когда хотя бы один из коэффициентов из (3.12) или (3.13) отличен от нуля.

СТРУКТУРА 2.2. Пусть для определенности $c_{136} \varphi_3(u) = -c_{146} \varphi_4(u)$, где $c_{136} \neq 0$. Тогда $c_{246} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{236}$ и $\varphi_3(u) = -\frac{c_{146}}{c_{136}} \varphi_4(u)$, а с учетом (3.14) выводим

$$-c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} \varphi_4(u) + c_{457} \varphi_4(u) = 0.$$

Если $\varphi_4(u) = 0$, то и $\varphi_3(u) = 0$, поэтому будем считать, что $\varphi_4(u)$ не совпадает тождественно с нулем. Тогда

$$c_{457} = c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}}.$$

Далее, из условия (3.3) выводим

$$-\frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135} \varphi_4(u) + c_{145} \varphi_4(u) = -\frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235} \varphi_4(u) + c_{245} \varphi_4(u) = 0;$$

тогда $c_{145} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135}$ и $c_{245} = \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235}$. Следовательно,

$$c_{135}c_{457} - c_{145}c_{357} = c_{135}c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} - \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{135}c_{357} = 0$$

и

$$c_{235}c_{457} - c_{245}c_{357} = c_{235}c_{357} \frac{c_{146}}{c_{136}} - \frac{c_{146}}{c_{136}} c_{235}c_{357} = 0,$$

и из пятого и седьмого уравнений системы (3.2) получаем $c_{167} = c_{267} = 0$, т. е. ситуацию структуры 1. Подчеркнем, что условие $c_{136}\varphi_3(u) = -c_{146}\varphi_4(u)$, где $c_{136} \neq 0$, включает случай, когда $\varphi_3 \equiv 0$ и $c_{146} = 0$.

Случай, когда $c_{236}\varphi_3(u) = -c_{246}\varphi_4(u)$, где один из коэффициентов отличен от нуля, рассматривается аналогично.

Лемма 17. Пусть отображение групп Энгеля $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ таково, что координатные функции при полях степени один и два равны нулю, а отображение-график φ_Γ липшицево во внутреннем смысле. Тогда $\varphi \equiv \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 12 и (2.5) верно, что для любых $u, w \in \mathbb{G}$ таких, что $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$, производная функции $\varphi_u^8(w)$ в точке u , которая выражается через $\varphi_3(u)$, $\varphi_4(u)$ и $\varphi_6(u)$, равна нулю. Кроме того, для произвольных точек $w_s = \exp(sw_1\hat{X}_1 + sw_2\hat{X}_2)(u)$ и $w_t = \exp(tw_1\hat{X}_1 + tw_2\hat{X}_2)(u)$, лежащих на интегральной линии векторного поля $w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2$, верно

$$w_s = \exp((s-t)w_1\hat{X}_1 + (s-t)w_2\hat{X}_2)(w_t).$$

Следовательно, для всяких точек $u, w \in \mathbb{G}$, связанных соотношением $w = \exp(w_1\hat{X}_1 + w_2\hat{X}_2)(u)$, справедливо равенство $\varphi(w) = \varphi(u)$ (см. аналогичные аргументы в [3]). Так как любые две точки группы $\mathbb{G}$ можно соединить ломаной, состоящей из интегральных линий горизонтальных полей (см., например, [26]), то равенство $\varphi(w) = \varphi(u)$ справедливо для любых точек $u, w \in \mathbb{G}$. Лемма доказана.

Таким образом, установлена

Теорема 18. Пусть для трехступенчатых групп Карно $\mathbb{G}$, $\tilde{\mathbb{G}}$ и $\hat{\mathbb{G}}$ выполнены условия предположения 6 и $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$ — некоторое отображение. Если хотя бы одна из констант c_{167} или c_{267} на $\hat{\mathbb{G}}$ отлична от нуля, то липшицевы графики можно построить только по отображениям $\varphi : \mathbb{G} \rightarrow \tilde{\mathbb{G}}$, тождественно равным некоторой константе.

Если же предположить, что хотя бы одна горизонтальная координатная функция отображения, по которому построен липшицев график, не равна тождественно нулю, то $c_{167} = c_{267} = 0$.

Рассмотрим два простых примера структуры 1.2 и отображений, по которым строится липшицев во внутреннем смысле график.

ПРИМЕР 19. Пусть $\hat{\mathbb{G}}$ — структура, удовлетворяющая условию предположения 6, для структурных констант которой верно $c_{167} = c_{267} = 0$. Пусть еще φ_3 и φ_4 — гладкие функции, зависящие только от горизонтальных переменных, для которых верно (3.8):

$$\varphi_3(u) = -\frac{c_{145}}{c_{135}}\varphi_4(u).$$

Тогда для них верно и условие (3.1). Так как мы считаем, что эти функции зависят только от горизонтальных переменных, то дифференциал (2.7) должен

быть равен нулю, поэтому предположим дополнительно, что $c_{458} = c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}}$. Тогда из (3.9) следует

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{246}c_{168} - c_{146}c_{268} + c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \\ c_{168} - c_{145}c_{358} - c_{146} + c_{358}c_{145} = 0, \\ c_{268} - \frac{c_{145}}{c_{135}}c_{235}c_{358} - c_{246} + c_{235}c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{358} \frac{c_{145}}{c_{135}} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

В свою очередь, из (2.2) и условия 3 теоремы 12 следует, что

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial u_j}(u) = - \sum_{k \in \tilde{I}_1} \varphi_k(u) c_{jk6} = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{j36} - c_{j46} \right) \varphi_4(u), \quad (3.16)$$

где $j = 1, 2$. Так как мы рассматриваем гладкие отображения, то должно выполняться

$$\sum_{k \in \tilde{I}_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_i}(u) c_{jk6} = \sum_{k \in \tilde{I}_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial u_j}(u) c_{ik6},$$

т. е.

$$\left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{j36} - c_{j46} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_i}(u) = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{i36} - c_{i46} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_j}(u),$$

а именно,

$$\left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{136} - c_{146} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u) = \left(\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \right) \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u).$$

Если $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{136} - c_{146} = \frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} = 0$, то на φ_4 ограничений нет. Если же хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля (например, $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \neq 0$), то выводим

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u) = \frac{c_{145}c_{136} - c_{135}c_{146}}{c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246}} \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u)$$

и поэтому φ_4 — это произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{145}c_{136} - c_{135}c_{146}}{c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.17)$$

Тогда из уравнения (3.16) можно восстановить функцию φ_6 , а по соотношениям (2.3) и (2.5) — функцию φ_8 .

ЗАМЕЧАНИЕ 20. Вышеописанный пример подходит, в частности, для структуры 1.2.1 в силу условия $c_{145}c_{236} - c_{135}c_{246} = -1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 21. Если φ_4 зависит еще от w_5 и w_7 и $\frac{c_{145}}{c_{135}} c_{236} - c_{246} \neq 0$, то характер зависимости от горизонтальных координат (3.17) может не сохраняться.

ПРИМЕР 22. Пусть $\widehat{\mathbb{G}}$ — структура, удовлетворяющая условию предположения 6, для структурных констант которой верно $c_{167} = c_{267} = 0$. Пусть еще φ_3 и φ_4 — гладкие функции, зависящие только от горизонтальных переменных, одна из которых тождественно равна нулю.

Предположим, что $\varphi_3 \equiv 0$. Тогда если аналогичное условие не выполняется для φ_4 , то в силу (2.10) верно $c_{145} = c_{245} = 0$. Так как φ_4 зависит только от горизонтальных переменных, то соотношение (2.7) должно быть тождественно равно нулю и поэтому $c_{458} = 0$. Тогда система (3.5) принимает вид

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} + c_{358} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Из (2.2) и условия 3 теоремы 12 следует, что

$$\frac{\partial \varphi_6}{\partial u_j}(u) = -\varphi_4(u)c_{j46},$$

где $j = 1, 2$, а так как мы рассматриваем гладкие отображения, то должно выполняться

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u)c_{246} = \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u)c_{146}.$$

Если $c_{146} = c_{246} = 0$, то выводим $c_{358} = 0$, и φ_4 — произвольная гладкая функция. Если же хотя бы одно из этих значений отлично от нуля (например, $c_{246} \neq 0$), то верно

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial u_1}(u) = \frac{c_{146}}{c_{246}} \frac{\partial \varphi_4}{\partial u_2}(u),$$

и тогда φ_4 — произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{146}}{c_{246}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.18)$$

Пусть теперь $\varphi_4 \equiv 0$. Тогда имеем $c_{135} = c_{235} = c_{358} = c_{458} = 0$ и

$$\begin{cases} c_{236}c_{168} - c_{136}c_{268} = 0, \\ c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Если $c_{136} = c_{236} = 0$, то ограничений на гладкую функцию φ_3 не будет, а единственным ограничением будет система

$$\begin{cases} c_{168} = c_{146}, \\ c_{268} = c_{246}. \end{cases}$$

Если же хотя бы одно из этих значений отлично от нуля (например, $c_{236} \neq 0$), то, аналогично предыдущему случаю, φ_3 — произвольная гладкая функция вида

$$\psi \left(\frac{c_{136}}{c_{236}} u_1 + u_2 \right). \quad (3.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 23. Если при $\varphi_4 \equiv 0$ предположить, что $c_{146} = c_{246} = 0$, то при любом выборе оставшихся констант тождество Якоби будет выполнено.

ЗАМЕЧАНИЕ 24. Если φ_4 зависит еще от w_5 и w_7 и $c_{246} \neq 0$ или если φ_3 зависит еще от w_5 и w_7 и $c_{236} \neq 0$, то характер зависимости от горизонтальных координат (3.18) и (3.19) соответственно может не сохраняться.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ардентов А. А., Сачков Ю. Л. Экстремальные траектории в нильпотентной субримановой задаче на группе Энгеля // Мат. сб. 2011. Т. 202, № 11. С. 31–54.
2. Карманова М. Б. Липшицевы графики на группах Гейзенберга и связанные задачи // Мат. заметки. 2025. Т. 118, № 1. С. 154–158.
3. Карманова М. Б. О липшицевых графиках на классах двухступенчатых групп Карно // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 5. С. 882–900.
4. Миклюков В. М., Клячин А. А., Клячин В. А. Максимальные поверхности в пространстве-времени Минковского. Волгоград: ВолГУ, 2011.
5. Дао Чонг Тхи, Фоменко А. Т. Минимальные поверхности и проблема Плато. М.: Наука, 1987.
6. Тужилин А. А., Фоменко А. Т. Элементы геометрии и топологии минимальных поверхностей. М.: Наука, 1991.
7. Fomenko A. T. (ed.) Minimal surfaces. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1993.
8. Citti G., Sarti A. A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space // Lecture Notes of Seminario Interdisciplinare di Matematica. 2006. V. 3. P. 145–161.
9. Hladky R. K., Pauls S. D. Minimal surfaces in the roto-translation group with applications to a neuro-biological image completion model // J. Math. Imaging and Vision. 2010. V. 36, N 1. P. 1–27.
10. Petitot J. Neurogéométrie de la vision. Modèles mathématiques et physiques des architectures fonctionnelles. Paris: Les Éditions de l'École Polytechnique, 2008.
11. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Regularity of non-characteristic minimal graphs in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // Indiana Univ. Math. J. 2009. V. 58, N 5. P. 2115–2160.
12. Capogna L., Citti G., Manfredini M. Smoothness of Lipschitz intrinsic minimal graphs in Heisenberg group $\mathbb{H}^n$, $n > 1$ // J. Reine Angew. Math. 2010. V. 648. P. 75–110.
13. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M. A notable family of entire intrinsic minimal graphs in the Heisenberg group which are not perimeter minimizing // Am. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 317–339.
14. Danielli D., Garofalo N., Nhieu D. M., Pauls S. D. Instability of graphical strips and a positive answer to the Bernstein problem in the Heisenberg group $\mathbb{H}^1$ // J. Differ. Geom. 2009. V. 81, N 2. P. 251–295.
15. Garofalo N., Pauls S. D. The Bernstein problem in the Heisenberg group. arXiv:math/0209065v2, 2005.
16. Barbieri D., Citti G. Regularity of minimal intrinsic graphs in 3-dimensional sub-Riemannian structures of step 2 // J. Math. Pures Appl. 2011. V. 96, N 3. P. 279–306.
17. Julia A., Nicolussi Golo S., Vittone D. Area of intrinsic graphs and coarea formula in Carnot groups // Math. Z. 2022. V. 301. P. 1369–1406.
18. Corni F., Magnani V. Area of intrinsic graphs in homogeneous groups. [Электронный ресурс] arXiv:2311.06638v1 [math.MG]. 2023.
19. Карманова М. Б. Графики липшицевых функций и минимальные поверхности на группах Карно // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 4. С. 839–861.
20. Карманова М. Б. Формулы площади для классов гёльдеровых отображений групп Карно // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1056–1079.
21. Карманова М. Б. Двухступенчатые сублоренцевы структуры и поверхности-графики // Изв. РАН. Сер. мат. 2020. Т. 84, № 1. С. 60–104.
22. Карманова М. Б. Площадь графиков на произвольных группах Карно с сублоренцевой структурой // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 823–848.
23. Folland G. B., Stein E. M. Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
24. Pansu P. Métriques de Carnot–Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang 1 // Math. Ann. 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.
25. Vodopyanov S. Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings // The Interaction of Analysis and Geometry. Contemporary Mathematics. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2007. V. 424. P. 247–301.
26. Karmanova M., Vodopyanov S. On local approximation theorem on equiregular Carnot–Carathéodory spaces // Geometric Control and Sub-Riemannian Geometry (Proc. INdAM Meet-

ing; Cortona, May 2012). Cham: Springer INDAM Ser., 2014. V. 5. P. 241–262.

Поступила в редакцию 14 апреля 2026 г.

После доработки 14 апреля 2026 г.

Принята к публикации 23 апреля 2026 г.

Карманова Мария Борисовна (ORCID 0000-0002-8562-1513)
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
maryka@math.nsc.ru, maryka84@gmail.com