

УДК 517.956.2

МЕТОД ПЕРРОНА В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ МЯГКОГО ЛАПЛАСИАНА НА СТРАТИФИЦИРОВАННОМ МНОЖЕСТВЕ

Н. С. Даирбеков,
О. М. Пенкин, Д. В. Савастеев

Аннотация. Доказывается разрешимость задачи Дирихле для мягкого лапласиана на стратифицированном множестве путем модификации известного метода Перрона.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.405

Ключевые слова: стратифицированная мера, мягкий лапласиан, теорема о среднем, неравенство Харнака, теорема Харнака о сходимости.

Классический метод Перрона (см. [1], а также [2, 3]) дает элегантный способ доказательства разрешимости задачи Дирихле для классического уравнения Лапласа. В связи с его простотой специалисты постоянно расширяли сферу его применения, обобщая его на случаи более общих уравнений и краевых условий. В настоящее время наметился существенный интерес к так называемым уравнениям на стратифицированных множествах. Это довольно сильное обобщение классической теории дифференциальных уравнений в областях, а потому естественно оценить перспективы применения метода Перрона к эллиптическим уравнениям на таких множествах. Впервые попытка распространения этого метода на случай задачи Дирихле для стратифицированного лапласиана была предпринята в работе [4]. Однако удалось исследовать лишь случай двумерных стратифицированных множеств; до сих пор неясно, можно ли технику, примененную в [4], распространить на множества, содержащие страты произвольных размерностей. В данной работе, основанной на наших последних результатах [5, 6], метод Перрона обобщается на стратифицированные множества произвольной размерности. Мы рассматриваем, как и в [4], случай задачи Дирихле для так называемого мягкого лапласиана при дополнительном предположении, что «внутренние» страты являются плоскими.

§ 1. Основные понятия

Определение стратифицированного множества в данной работе (см. также [7, 8]) является адаптацией определения работы [9], приспособленной к нашим задачам. *Стратифицированным* мы называем связанное подмножество Ω пространства $\mathbb{R}^N$, составленное из конечного числа его попарно не пересекающихся

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (проект BR31714735).

связных гладких подмногообразий σ_{kj} — *страт*; в этом обозначении индекс k указывает размерность страты, а j служит для нумерации страт данной размерности. Множество всех страт в Ω обозначается через Σ . Запись вида $\sigma_{kj} \prec \sigma_{ml}$ (или $\sigma_{ml} \succ \sigma_{kj}$) означает, что $k < m$ и $\sigma_{kj} \subset \partial\sigma_{ml} = \bar{\sigma}_{ml} \setminus \sigma_{ml}$; в этом случае мы будем говорить, что страты *примыкают* друг к другу. В данной работе эти примыкания подчиняются следующим требованиям.

- Пересечение замыканий любой пары несовпадающих страт либо пусто, либо является объединением страт семейства Σ .
- Граница $\partial\sigma_{kj} = \bar{\sigma}_{kj} \setminus \sigma_{kj}$ каждой страты является объединением страт меньшей размерности из Σ .

В отличие от, например, работ [7, 8] других требований к примыканиям страт не предъявляется, поскольку в данной работе внутренние (см. ниже) страты в Ω предполагаются плоскими.

Для постановки задачи Дирихле множество Ω представляется в виде объединения двух подмножеств: Ω° и $\partial\Omega^\circ$ — аналогов обычной области и ее границы. В качестве Ω° мы возьмем связанное открытое подмножество Ω , составленное из страт в Σ , замыкание которого совпадает с Ω ; $\partial\Omega^\circ = \Omega \setminus \Omega^\circ$. Все топологические термины относятся к топологии на Ω , порожденной *внутренней метрикой*: расстояние между точками $d(X, Y)$ определяется как инфимум длин непрерывных кривых, соединяющих эти точки и лежащих в Ω . Нетрудно заметить, что эта же топология индуцирована стандартной топологией объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$. В этой топологии $\partial\Omega^\circ$ является топологической границей Ω° .

Основное предположение этой работы, касающееся страт, состоит в том, что все страты имеют компактные замыкания, а внутренние страты — страты, являющиеся подмножествами Ω° — плоскими. Последнее означает, что минимальное линейное многообразие $L \subset \mathbb{R}^N$, содержащее σ_{kj} , имеет размерность k . Для простоты мы будем вместо «страта является подмножеством Ω » говорить «страта в Ω ».

На каждой страте σ_{kj} определена мера Лебега μ^k , согласующаяся с римановой метрикой на σ_{kj} , наследуемой этой стратой из $\mathbb{R}^N$. Из этих мер мы сформируем «стратифицированную» меру μ на Ω следующим образом: для произвольного подмножества $\omega \subset \Omega$ полагаем

$$\mu(\omega) = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \mu^k(\omega \cap \sigma_{kj}). \quad (1)$$

Ясно, что $\mu(\omega)$ определена только на таких ω , пересечения которых с каждой стратой σ_{kj} измеримы по мере μ^k . Нетрудно проверить, что такие множества образуют σ -алгебру, а интеграл Лебега измеримой по этой мере функции сводится к сумме

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{\sigma_{kj} \in \Sigma} \int_{\sigma_{kj}} f d\mu^k. \quad (2)$$

В прикладных задачах, моделируемых в виде уравнений на стратифицированных множествах, имеют дело с функциями, имеющими различные «физические» размерности на разных стратах. Уже сама мера, определенная формулой (1), может вызывать вопросы, поскольку слагаемые в ней имеют различные размерности, если интерпретировать меру Лебега μ^k как k -мерный объем. Во избежание двусмысленности можно считать, что в этой формуле вычисляется

интеграл от единицы, имеющей различную размерность D/M^k , где D — какая-нибудь фиксированная размерность. Например, если $D = \text{kg}$, то $\mu(\omega)$ равняется массе ω в килограммах. Теперь перейдем к определениям дивергенции и лапласиана на стратифицированном множестве.

Векторное поле $\vec{F}$ назовем *касательным* к Ω° , если его сужение на каждую страту $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ принадлежит касательному расслоению $T\sigma_{kj}$. Мы будем рассматривать касательные поля, непрерывно дифференцируемые на каждой страте; непрерывность таких полей в целом на Ω° не предполагается (при переходе со страты на страту могут происходить скачки значений, а при физической интерпретации еще и скачки размерности). В произвольной точке $X \in \sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ дивергенция $\nabla \cdot \vec{F}(X)$ касательного векторного поля определяется формулой

$$\nabla \cdot \vec{F}(X) = \nabla_k \cdot \vec{F}(X) + \sum_{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj}} \vec{\nu}_i \cdot \vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i). \quad (3)$$

Здесь ∇_k — классическая k -мерная дивергенция на σ_{kj} как на римановом многообразии; эта часть дивергенции ∇ применяется к сужению поля $\vec{F}$ на эту страту. Во второй сумме $\vec{\nu}_i$ — нормаль к σ_{kj} в точке X , направленная внутрь σ_{k+1i} , а $\vec{F}(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i)$ — предельное значение $\vec{F}(Y)$, когда точка $Y \in \sigma_{k+1i}$ стремится к X , оставаясь в σ_{k+1i} . Это как бы односторонние пределы поля $\vec{F}$ в точке X со стороны каждой $(k+1)$ -мерной страты, примыкающей к σ_{kj} , или продолжения по непрерывности в точку $X \in \partial\sigma_{k+1i}$ сужения поля на страту σ_{k+1i} . Поля, допускающие такие продолжения, составляют класс $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$. Можно показать (см. [10]), что введенное нами определение дивергенции является точным аналогом классического определения в том смысле, что эта стратифицированная дивергенция оказывается плотностью потока векторного поля по введенной выше стратифицированной мере.

Пусть теперь u — скалярная функция, определенная на Ω° . Через ∇u будем обозначать касательное векторное поле, составленное из обычных градиентов сужений u на страты из Ω° . Если это поле принадлежит классу $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$, а u непрерывна в целом на Ω° , то будем писать $u \in C^2(\Omega^\circ)$. Пусть далее p — *стратифицированная константа* — функция, принимающая на каждой страте постоянное значение. Тогда $p\nabla u$ принадлежит классу $\vec{C}^1(\Omega^\circ)$ и мы можем определить композицию $\nabla \cdot (p\nabla u)$. При $p \equiv 1$ так определенный оператор $\Delta u = \nabla \cdot \nabla u$ называется *жестким лапласианом* — в этой работе он не рассматривается. Здесь мы рассмотрим другой крайний случай, когда $p = 1$ на так называемых *свободных стратах* — стратах, не являющихся граничными стратами других страт, а на остальных стратах $p = 0$. Соответствующий оператор называется *мягким лапласианом* и обозначается $\tilde{\Delta}$. Он наиболее близок по своим свойствам, как мы покажем в следующем пункте, к классическому лапласиану. Очевидно, на свободных стратах мягкий лапласиан совпадает с классическим лапласианом (оператором Лапласа — Бельтрами), поскольку второе слагаемое — сумма в (3), составляемая для $\vec{F} = p\nabla u$, — отсутствует. Если же страта $\sigma_{kj} \subset \Omega^\circ$ является граничной стратой для свободных $(k+1)$ -мерных страт, то будет отсутствовать первое слагаемое, а потому в этом случае имеем

$$\tilde{\Delta}u(X) = \sum_{\substack{\sigma_{k+1i} \succ \sigma_{kj} \\ \sigma_{k+1i} \text{ свободна}}} \vec{\nu}_i \cdot \nabla u(X + 0 \cdot \vec{\nu}_i). \quad (4)$$

Наконец, в оставшихся стратах обе суммы оказываются пустыми; в этом случае мы полагаем по определению $\tilde{\Delta}u(X) = 0$ в каждой точке такой страты.

Для открытого множества $G \subset \Omega^\circ$ обозначим через $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(G)$ множество функций $u : G \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- u непрерывна на G ,
- для каждой свободной страты σ_{ni} сужение $u|_{G \cap \sigma_{ni}}$ дважды непрерывно дифференцируемо, а градиент ∇u этого сужения имеет непрерывное продолжение в каждую точку $X \in G \cap \sigma_{n-1j}$ любой внутренней страты σ_{n-1j} , примыкающей к σ_{ni} .

Функция $u : G \rightarrow \mathbb{R}$ называется *гармонической* на G , если $u \in \tilde{C}_{\text{loc}}^2(G)$ и u удовлетворяет уравнению

$$\tilde{\Delta}u(X) = 0$$

для всех $X \in G$.

§ 2. Свойства гармонических функций

Мы начнем с аналога теоремы о среднем. Определим сферу $S_r(X_0)$ обычным образом как множество точек в Ω , удаленных от X_0 на расстояние r в терминах упомянутой выше внутренней метрики на Ω . Если при этом r не превосходит расстояния до всех страт, не содержащих X_0 в своем замыкании, то r назовем *допустимым радиусом*, а сферу $S_r(X_0)$ — *допустимой сферой*. На рис. 1 показано, как могут выглядеть стратифицированные шары, соответствующие этим сферам.

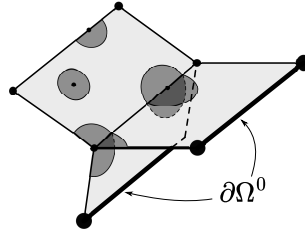


Рис. 1. Стратифицированные шары.

Пусть далее p — стратифицированная константа, фигурирующая в определении мягкого лапласиана.

Для $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимого $r > 0$ рассмотрим *среднее значение по сфере*:

$$M[S_r(X_0)]u = \frac{1}{|S_r(X_0)|_p} \int_{S_r(X_0)} pu \, d\mu_S,$$

где $|S_r(X_0)|_p = \int_{S_r(X_0)} p \, d\mu_S$, а p — стратифицированная константа, равная 1 на свободных стратах и 0 в остальных. Здесь μ_S — стратифицированная мера на сфере, которая рассматривается как стратифицированное множество; стратами сферы объявляются пересечения страт множества Ω с этой сферой. Аналогичное среднее $M[B_r(X_0)]u$ можно определить по допустимым шарам $B_r(X_0)$ и получить (см. [11]) следующее утверждение.

Теорема 1 (о среднем). Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, а u — гармоническая функция на Ω° . Тогда

$$M[S_r(X_0)]u = M[B_r(X_0)]u = u(X_0) \quad (5)$$

для сфер и соответственно шаров допустимого радиуса $r > 0$ с центрами X_0 , лежащими в Ω° .

Условие этой теоремы, касающееся размерности свободных страт, предполагается выполненным во всех дальнейших утверждениях, поскольку все они в той или иной степени опираются на сформулированное свойство средних.

В работе [10] приведена формула Пуассона для решения задачи Дирихле с мягким лапласианом в допустимых шарах $B \subset \Omega^\circ$ с центрами в стратах старшей и на единицу меньшей размерности; не приводя деталей, сформулируем это в виде теоремы о разрешимости.

Теорема 2. *Задача Дирихле для допустимого стратифицированного шара $B \subset \Omega^\circ$ с центром в страте максимальной или на единицу меньшей размерности однозначно разрешима для любой непрерывной граничной функции, заданной на соответствующей сфере.*

Как обычно, под решением задачи Дирихле в какой-либо области $U \subset \Omega^\circ$ понимается гармоническая функция класса $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(U) \cap C(\bar{U})$, принимающая предписанные значения на границе.

Опираясь на данное утверждение, теорема 1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3 (свойство среднего). *Пусть Ω — стратифицированное множество, у которого все свободные страты имеют одну и ту же размерность, а u — непрерывная функция на Ω° . Тогда u гармоническая тогда и только тогда, когда выполняется свойство среднего (5).*

В одну сторону — это в точности утверждение теоремы 1. В другую сторону достаточно заметить, что в стратах, размерность которых отстает от максимальной на две и более единиц, от u для гармоничности требуется лишь непрерывность; она есть в силу условий теоремы. В стратах большей размерности требуется проверять равенство $\tilde{\Delta}u = 0$, а его справедливость достаточно проверить на допустимых шарах с центрами в стратах максимальной или на единицу меньшей размерности. Здесь можно рассуждать по известной схеме, изложенной, например, в [2], поскольку по теореме 2 задача Дирихле разрешима в таких шарах. Она используется так. Поскольку u удовлетворяет равенству (5) на допустимых шарах, она достигает своих максимума и минимума на границе такого шара. Ее значения на границе этого шара используем как краевые для решения задачи Дирихле в нем, пусть v — соответствующее решение. Функция $u - v$ удовлетворяет равенству среднего, а потому достигает своих максимума и минимума на границе шара. Но она обращается в нуль на его границе, откуда следует, что u и v совпадают в шаре. Таким образом, u — гармоническая функция в шаре и $\tilde{\Delta}u = 0$ на этом шаре.

Следующее утверждение является точным аналогом классического неравенства Харнака. Его доказательство можно найти в работе [5].

Теорема 4 (неравенство Харнака). *Пусть Ω — стратифицированное множество, а K — произвольный компакт в Ω° . Тогда для каждой неотрицательной гармонической в Ω° функции u выполняется неравенство*

$$\sup_{X \in K} u(X) \leq C \inf_{X \in K} u(X)$$

с константой $C = C(K, \Omega^\circ)$, не зависящей от u .

Из неравенства Харнака очевидным образом (см., например, [2]) получается теорема Харнака о монотонной сходимости.

Теорема 5. Если неубывающая последовательность гармонических в некотором открытом подмножестве $G \subset \Omega^\circ$ функций сходится в некоторой точке X_0 , то она равномерно сходится на каждом компакте $K \subset G$.

Опираясь на свойство среднего отсюда выводят, что предельная функция является гармонической. В силу специфики нашей теоремы о среднем мы имеем следующее утверждение.

Теорема 6. Если все свободные страты имеют одинаковую размерность, то предельная функция в условиях предыдущей теоремы является гармонической в G .

Казалось бы, у нас все готово для применения метода Перрона к разрешимости задачи Дирихле (нужно только дать определение субгармонической функции), однако имеется довольно существенное препятствие, связанное с ограниченным характером теоремы 2 (центры шаров должны лежать в стратах старшей и на единицу меньшей размерности). Эту проблему помогает преодолеть следующее утверждение, являющееся аналогом теоремы о стирании особенностей. Оно верно лишь для так называемых усиленно прочных множеств. Мы называем стратифицированное множество Ω *усиленно прочным*, если все его свободные страты имеют одинаковую размерность n и для любой точки X_0 найдется допустимый шар, не теряющий связности при удалении из него точек, лежащих на стратах, размерность которых не превосходит $n - 2$.

Далее множество всех страт в Ω , размерность которых не превосходит $n - 2$, обозначается через Σ_{n-2} . Ясно, что число n — максимально возможная размерность страт в Ω ; его мы будем называть *размерностью стратифицированного множества*. Следующее утверждение является легким следствием теоремы, доказанной в [6].

Теорема 7 (о стирании особенностей). Пусть Ω — усиленно прочное стратифицированное множество размерности n , а u — ограниченная гармоническая функция на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Тогда Σ_{n-2} является устранимым множеством в том смысле, что u можно продолжить до гармонической функции на всем Ω° .

Теперь мы переходим к описанию свойств субгармонических в смысле мягкого лапласиана функций.

§ 3. Свойства субгармонических функций

Всюду далее стратифицированное множество Ω предполагается усиленно прочным. Это, напомним, предполагает, в частности, что все свободные страты имеют одинаковую размерность n . Можно показать, что в этом случае неравенство $\tilde{\Delta}u \geq 0$, первоначально принимаемое за *определение субгармонической функции*, влечет, как и в случае обычного лапласиана, неравенство

$$u(X_0) \leq M[B_r(X_0)]u, \quad (6)$$

верное для всех $X_0 \in \Omega^\circ$ и допустимых шаров $B_r(X_0)$.

Это неравенство в предположении непрерывности функции u на Ω принимается за *второе определение субгармонической функции*, которое оказывается более удобным для реализации метода Перрона, чем первое. Множество субгармонических в Ω функций обозначим через $S(\Omega)$. Аналогично можно определить субгармоническую функцию в любой области из Ω° . Из этого определения немедленно следует, что субгармоническая функция не может иметь в Ω° точек

локального нетривиального максимума; точка X_0 называется *точкой локального нетривиального максимума функции u* , если вблизи нее $u(X) \leq u(X_0)$ и ни в какой ее окрестности u не является постоянной. Это утверждение можно считать аналогом сильного принципа максимума. Из него очевидным образом получаем такое следствие (слабый принцип максимума).

Лемма 1. Пусть $u \in C(\overline{G})$ — субгармоническая в области $G \subset \Omega^\circ$ функция, тогда

$$u(X_0) \leq \max_{X \in \partial G} u(X) \quad (7)$$

для любой точки $X_0 \in G$.

Пусть u — субгармоническая функция, а $B_r(X_0)$ — допустимый шар с центром $X_0 \in \Omega^\circ$ в страте максимальной или на единицу меньшей размерности. Обозначим через $u_{X_0,r}$ функцию, которая совпадает с u на $\Omega \setminus B_r(X_0)$, является гармонической в шаре $B_r(X_0)$ и непрерывна в целом на Ω . Такая функция — назовем ее *гармонической срезкой* функции u в рассматриваемом шаре — существует в силу теоремы 2. Из предыдущей леммы выводим главное свойство гармонических срезов.

Лемма 2. Пусть $u \in S(\Omega)$, тогда $u_{X_0,r} \in S(\Omega)$. При этом $u(X) \leq u_{X_0,r}(X)$ для всех $X \in \Omega$.

Доказательства этой и всех последующих лемм этого раздела аналогичны тем, которые в классической ситуации приведены в [2, 3], поэтому мы не останавливаемся на подробностях.

Лемма 3. Функция u является гармонической тогда и только тогда, когда $u, -u \in S(\Omega)$.

При доказательстве используется свойство среднего (теорема 3) и тот очевидный факт, что $u, -u \in S(\Omega)$ тогда и только тогда, когда u непрерывна и для допустимых шаров выполняется формула (5).

Лемма 4. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k \in S(\Omega)$. Тогда верхняя огибающая

$$u(X) = \max \{u_1(X), u_2(X), \dots, u_k(X)\}$$

также принадлежит $S(\Omega)$.

В следующем разделе нам потребуются также супергармонические функции; для их определения нужно знак неравенства в (6) направить в противоположную сторону или назвать супергармонической такую функцию u , что $-u \in S(\Omega)$.

§ 4. Метод Перрона в задаче Дирихле для мягкого лапласиана

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\tilde{\Delta}u = 0, \quad (8)$$

$$u|_{\partial\Omega^\circ} = f, \quad (9)$$

где f непрерывна на $\partial\Omega^\circ$. Под ее решением будем понимать гармоническую в Ω° функцию класса $\tilde{C}_{\text{loc}}^2(\Omega^\circ) \cap C(\Omega)$. Разумеется, границу мы считаем непустой.

Следуя методу Перрона, введем класс $S_f = S_f(\Omega)$, состоящий из функций в $S(\Omega)$, принимающих на $\partial\Omega^\circ$ значения, не превосходящие предписанных условием (9); такие функции будем называть *субфункциями*. Назовем *решением Перрона* задачи (8), (9) верхнюю огибающую семейства S_f :

$$u(X) = \sup_{v \in S_f(\Omega)} v(X). \quad (10)$$

Заметим, что в силу принципа максимума (лемма 1) число, стоящее справа, не превосходит максимума граничной функции f , поэтому функция u ограничена на Ω сверху. Столь же просто показывается, что она ограничена снизу. Иными словами, функция u корректно определена.

Следующее утверждение является основным в данной работе.

Теорема 8. Пусть граница Ω° является регулярной, Ω усиленно прочным, а f — непрерывной на $\partial\Omega^\circ$ функцией. Тогда решение Перрона является решением задачи Дирихле (8), (9) в обычном смысле, т. е. является гармонической на Ω° функцией, непрерывной на Ω и принимающей предписанные значения на $\partial\Omega^\circ$.

Мы называем границу $\partial\Omega^\circ$ *регулярной*, если регулярной является каждая ее граничная точка.

Точка X_0 граничной страты меньшей, чем $n - 1$, размерности называется *регулярной граничной точкой*, если существует *барьер* в X_0 — супергармоническая функция, положительная на $\Omega \setminus \{X_0\}$ и обращающаяся в нуль в точке X_0 . Нетрудно показать, что, как и в классическом случае, достаточно построить *локальный барьер* — функцию, удовлетворяющую требуемым от барьера условиям в некоторой окрестности U точки X_0 ; из локального барьера на U легко строится барьер уже на всем Ω .

Точка X_0 граничной $(n - 1)$ -мерной страты σ_{n-1j} называется *регулярной граничной точкой*, если существуют *односторонние локальные барьеры* в X_0 в классическом смысле для каждой n -мерной страты σ_{ni} , примыкающей к σ_{n-1j} , т. е. функции, удовлетворяющие требуемым от барьера условиям в каждой связной компоненте пересечения $U \cap \sigma_{ni}$, содержащей точку X_0 в своем замыкании, для некоторой окрестности U точки X_0 . Поскольку внутри σ_{ni} стратифицированный лапласиан не отличается от классического, то и условия на барьер внутри такой связной компоненты тоже классические. Последний случай выделяется из-за того, что к $(n - 1)$ -мерной страте σ_{n-1j} могут примыкать несколько n -мерных страт, какие-то из которых возможно примыкают с двух сторон, и $(n - 1)$ -мерная страта может оказаться граничной, хотя все ее точки располагаются внутри Ω , если последнее рассматривать как обычное множество, а не как стратифицированное и «искусственным» образом разбитое на внутренность Ω° и границу $\partial\Omega^\circ$, как это описано выше. На рис. 2 таковой является страта σ_{11} .

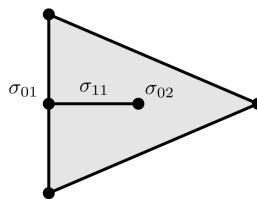


Рис. 2. «Внутренняя» граничная страта σ_{11} .

Проверку того, что решение u удовлетворяет граничным условиям в точках страты σ_{11} , достаточно провести по отдельности со стороны каждого из двух «берегов» двумерной страты, разделяемых стратой σ_{11} . Проще всего ввести «модифицированное» стратифицированное множество, сделав разрез вдоль σ_{11} и разделив σ_{11} на верхний и нижний берега разреза, имеющие общие граничные точки в вершинах. Иными словами, модифицированное стратифицированное множество получается пополнением множества $\Omega \setminus \sigma_{11}$ по его внутренней метрике. Тогда односторонние локальные барьеры в точках σ_{11} становятся локальными барьерами в соответствующих точках на берегах разреза для модифицированного стратифицированного множества, которые легко достроить до барьеров на всем этом множестве.

Аналогичным образом в общем случае односторонние локальные барьеры произвольной n -мерной страты в точках примыкающей к ней граничной $(n-1)$ -мерной страты σ_{n-1j} можно рассматривать как локальные барьеры модифицированного стратифицированного множества — пополнения $\Omega \setminus \sigma_{n-1j}$ по внутренней метрике последнего — и могут быть достроены до барьеров на нем.

Обоснование сформулированной теоремы в значительной степени следует образцам, приведенным в [2, 3], но содержит свою специфику: доказательство гармоничности проводится в три этапа. На первом этапе мы доказываем, что соотношение $\tilde{\Delta}u = 0$ выполняется на множестве $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$; эта часть доказательства проводится стандартно. Второй этап — проверка непрерывности u на Ω° — является следствием теоремы 7. Третий — непрерывность u на Ω и выполнение краевого условия на $\partial\Omega^\circ$ — опирается на регулярность границы. Несмотря на то, что некоторые части доказательства проводятся стандартно, мы проведем его во всех деталях ради замкнутости изложения. Мы следуем, главным образом, схеме доказательства, представленной в [2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Сначала покажем, что u гармонична на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Пусть X_0 — произвольная точка с центром в $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$, а $B_r(X_0)$ — допустимый шар. Из определения u посредством (10) следует существование такой последовательности $v_k \in S_f$, что $v_k(X_0) \rightarrow u(X_0)$ при $k \rightarrow \infty$; функции этой последовательности можно считать ограниченными снизу (в противном случае их нужно заменить на $\max\{v_k, m\}$, где m — минимум функции f). Из этой последовательности можно уже образовать неубывающую последовательность $\bar{v}_k = \max\{v_1, \dots, v_k\}$ функций, принадлежащих в силу леммы 4 множеству S_f и сходящуюся к $u(X_0)$ в точке X_0 , поскольку $v_k \leq \bar{v}_k \leq u$. Пусть теперь V_k — гармоническая срезка функции $\bar{v}_k$ в шаре $B_r(X_0)$. Очевидно, последовательность $\{V_k\}$ является неубывающей и в силу леммы 2 состоит из субгармонических функций семейства S_f . В точке X_0 эта последовательность по-прежнему сходится к $u(X_0)$. В силу теорем 5 и 6 последовательность $\{V_k\}$ сходится равномерно на любом шаре $B_\rho = B_\rho(X_0)$ при $\rho < r$ к некоторой гармонической в этом шаре функции $\bar{u}$. Если мы покажем, что $\bar{u} = u$ в B_ρ , то в силу произвольности X_0 , будет показана гармоничность u на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$.

Очевидно, $\bar{u} \leq u$. Предположим, что $\bar{u}(X^\circ) < u(X^\circ)$ в некоторой точке $X^\circ \in B_\rho$. Тогда существует такая функция $U \in S_f$, что $\bar{u}(X^\circ) < U(X^\circ)$. Переходя от функций V_k к $\bar{V}_k = \max\{U, V_k\}$, а затем — к их гармоническим срезкам $\tilde{V}_k$, получаем последовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $\tilde{u}$, гармонической в B_ρ , которая в точке X_0 по-прежнему равна $u(X_0)$, а в точке X° принимает значение больше $\bar{u}(X^\circ)$. Гармонические в B_ρ функции $\tilde{u}$ и $\bar{u}$ удовлетворяют условиям: $\tilde{u} \geq \bar{u}$ и $\tilde{u}(X_0) = \bar{u}(X_0)$. В силу принципа

максимума имеем $\tilde{u} = \bar{u}$ в B_ρ , что невозможно, так как $\tilde{u}(X^\circ) > \bar{u}(X^\circ)$. Полученное противоречие показывает, что u гармонична в B_ρ , а значит, и в $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$. Переходим ко второму этапу доказательства.

Второй этап доказательства сводится к констатации на основе теоремы 7 о стирании особенностей того, что функция u , будучи гармонической на $\Omega^\circ \setminus \Sigma_{n-2}$, является гармонической в целом на Ω° , и мы можем приступить к третьему этапу.

Мы покажем, что u «непрерывным образом» удовлетворяет условию (9). Пусть $X_0 \in \partial\Omega^\circ$ лежит на граничной страте из Σ_{n-2} . Для фиксированного $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta > 0$, что при $X \in \partial\Omega^\circ$ и $d(X, X_0) < \delta$ будет выполняться неравенство $|f(X) - f(X_0)| < \varepsilon$. Кроме того, для фиксированного барьера ψ — он существует в силу регулярности границы — можно выбрать $K > 0$ так, что на оставшейся части границы будет выполняться неравенство $K\psi(X) \geq 2M$, где M — максимум модуля граничной функции f . Ясно, что $f(X_0) - \varepsilon - K\psi(X)$ является субфункцией, поскольку на границе принимает значения, меньшие значений функции f . Аналогично $f(X_0) + \varepsilon + K\psi(X)$ является суперфункцией — супергармонической функцией, принимающей на границе значения, большие значений f . В силу принципа максимума для субгармонических функций получим на Ω

$$f(X_0) - \varepsilon - K\psi(X) \leq u(X) \leq f(X_0) + \varepsilon + K\psi(X),$$

откуда легко получаем

$$|u(X) - f(X_0)| \leq \varepsilon + K\psi(X)$$

для всех $X \in \Omega$, что с учетом свойств барьерных функций, завершает доказательство для случая $X_0 \in \Sigma_{n-2}$.

Если X_0 лежит на граничной страте σ_{n-1j} , то мы достроим односторонние локальные барьеры примыкающих n -мерных страт σ_{ni} до барьеров на модифицированном стратифицированном множестве (как это отмечено в комментариях ниже рис. 2) и, повторив рассуждения для каждого из полученных барьеров ψ , получим сходимость $u(X)$ к $f(X_0)$ при стремлении X к X_0 со стороны каждой страты σ_{ni} , если примыкание $\sigma_{ni} \succ \sigma_{n-1j}$ одностороннее, или со стороны каждого берега разреза страты σ_{ni} , если примыкание двустороннее. Поскольку это выполняется для всех $\sigma_{ni} \succ \sigma_{n-1j}$, то $u(X)$ стремится к $f(X_0)$ при стремлении X к X_0 во всем Ω . Теорема доказана.

§ 5. Построение барьеров

Предыдущая теорема носит несколько абстрактный характер, поскольку остается открытым вопрос об условиях регулярности граничных точек. Очевидно, например, что если размерность стратифицированного множества не меньше двух, а в границу включены только некоторые нульмерные страты, то соответствующая задача Дирихле, вообще говоря, не имеет решения. Это легко следует из теоремы о стирании особенностей; если функция гармонична и ограничена в окрестности такой изолированной граничной точки, то она однозначно продолжается в нее, а потому задавать произвольно граничное значение в этой точке невозможно. В классическом случае областей евклидова пространства вопрос решается емкостным критерием Винера, который тоже носит абстрактный характер, но найдены конкретные примеры, в которых он работает. Например,

он выполняется для граничных точек, удовлетворяющих условию внешнего шара или, более общо, условию внешнего конуса. Условие внешнего шара заведомо выполнено для областей с C^2 -гладкой границей, а условие внешнего конуса заведомо выполнено для точек липшицевых границ. В нашем случае все граничные страты считаются гладкими; как следствие точки граничных $(n-1)$ -мерных страт являются регулярными для n -мерного стратифицированного множества (т. е. размерность свободных страт равняется n).

В данной работе мы рассмотрим случай так называемой *прочной границы*, когда $\partial\Omega^\circ$ является замыканием объединения некоторого числа $(n-1)$ -мерных страт в предположении, что Ω является n -мерным усиленно прочным множеством. Пока мы здесь ограничиваемся случаем двумерного стратифицированного множества, поскольку в общем случае построение барьеров сталкивается с некоторыми трудностями.

Проблему представляет только построение локального барьера в точке X_0 , которая является точкой некоторой граничной нульмерной страты σ_{01} , которая, разумеется, сводится к этой точке: $\sigma_{01} = \{X_0\}$. Сначала мы рассмотрим случай, когда все страты, включая граничные, являются плоскими. Мы будем строить локальный барьер в точке X_0 в пределах некоторого допустимого шара $B_R = B_R(X_0)$.

Рассмотрим сферу $S_R(X_0)$ как стратифицированное множество, стратами которого являются ее пересечения со стратами Ω . Получившееся одномерное стратифицированное множество является метрическим графом, который мы обозначим через Γ . Его вершинами V_i являются точки пересечения одномерных страт $\sigma_{1i} \succ \sigma_{01}$ со сферой $S_R(X_0)$, а ребрами E_k — дуги больших окружностей, являющиеся пересечениями двумерных страт $\sigma_{2k} \succ \sigma_{01}$ с $S_R(X_0)$. Отметим, что ребра E_k , соответствующие двумерным стратам, имеющим двустороннее примыкание к σ_{1i} , являются петлями графа Γ . Мы рассматриваем полярные координаты (r, φ) для точек $\sigma_{2k} \cap B_R(X_0)$, считая полярный угол φ координатой на E_k , отсчитываемый естественным образом от 0 до максимального значения $\varphi_k \leq 2\pi$, если на E_k задана ориентация.

На рис. 3 показан фрагмент пересечения двумерного стратифицированного множества с шаром и соответствующий ему метрический граф.

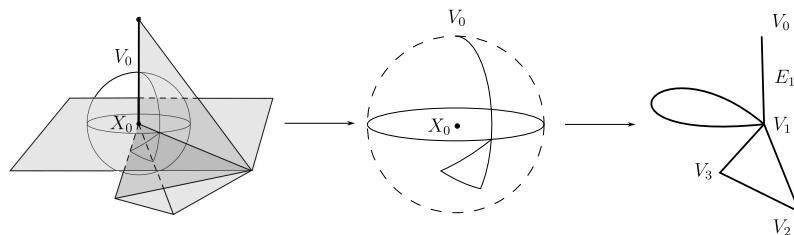


Рис. 3. Формирование метрического графа.

Так как граница Ω предполагается прочной, то найдется одномерная граничная страта, примыкающая к σ_{01} . Этой страте соответствует вершина графа Γ , которую мы обозначим через V_0 .

Ниже будет показано, что на графе Γ можно определить функцию $\lambda: \Gamma \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющую следующим условиям:

- (i) λ непрерывна на Γ ,
- (ii) $\lambda(V_0) = 0$ и $\lambda(X) > 0$ при $X \neq V_0$,
- (iii) существует постоянная α такая, что $\lambda'' \leq \alpha < 0$ на ребрах графа Γ ,

- (iv) $\sum_{\nu_i} \frac{d\lambda}{d\nu_i} < 0$ во всех вершинах графа Γ , исключая V_0 ; суммируются производные по направлениям «от вершины» во все примыкающие к ней ребра E_i .

Последние два требования можно записать в виде $\tilde{\Delta}_\Gamma \lambda < 0$, где $\tilde{\Delta}_\Gamma$ — мягкий лапласиан на одномерном стратифицированном множестве Γ с одной граничной стратой V_0 . Весь набор требований (i)–(iv) в целом описывает (строго) супергармоническую на Γ функцию, являющуюся барьером в точке V_0 . С помощью этой функции мы получим локальный барьер в точке X_0 , полагая

$$\psi(X) = r^\varepsilon(1 + \lambda(\varphi)),$$

где (r, φ) — полярные координаты точки X , лежащей в какой-нибудь двумерной страт. Мы здесь буквой λ обозначаем и функцию точки, и функцию аргумента φ ; отмечаем это во избежание путаницы. Если же X меняется в пределах одномерной страты σ_{1j} , то функция ψ оказывается функцией только переменной r ; полярный угол оказывается фиксированным. Неоднозначность задания полярного угла в последнем случае никак не скажется на наших построениях.

Покажем, что ψ действительно является локальным барьером в окрестности $U = B_R$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Положительность ψ на $U \setminus \{X_0\}$ и равенство $\psi(X_0) = 0$ очевидны. Непрерывность ψ — следствие непрерывности λ . Остается проверить неравенство $\tilde{\Delta}\psi \leq 0$, которое, как указывалось выше, влечет супергармоничность ψ ; там (см. начало § 3), правда, обсуждалась субгармоничность функции, но это рассуждение легко переносится на супергармонические функции. На фрагментах двумерных страт в U (они являются свободными) мягкий лапласиан совпадает с классическим, поэтому в полярных координатах имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}\psi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \varepsilon^2 r^{\varepsilon-2} (1 + \lambda(\varphi)) + r^{\varepsilon-2} \lambda''(\varphi) \\ &\leq (2\varepsilon^2 + \alpha) r^{\varepsilon-2} \leq \frac{\alpha}{2} r^{\varepsilon-2} < 0 \end{aligned}$$

при достаточно малом ε .

На одномерных неграничных стратах σ_{1j} мягкий лапласиан выражается формулой (4), а из $\frac{\partial}{\partial \nu_i} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$ следует $\frac{\partial \psi}{\partial \nu_i} = r^{\varepsilon-1} \frac{d\lambda}{d\varphi}$, и поэтому знак $\tilde{\Delta}\psi$ определяется суммой производных, фигурирующих в условии (iv).

Теперь остановимся на построении функции λ . Нам потребуются две функции θ и η , определенные на $[0, 2\pi]$ и обладающие следующими свойствами: θ — гладкая функция, возрастающая от нуля до единицы и удовлетворяющая (для некоторого β) неравенствам $\theta' \geq \beta > 0$, $\theta'' \leq -\beta$, а η — гладкая функция, удовлетворяющая условиям $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$, $\eta'' \leq -\beta$.

Ранжируем вершины графа Γ следующим образом. Если существует путь, ведущий из V_0 в вершину V , состоящий из k ребер, то при условии, что остальные пути, ведущие из V_0 в V , состоят из не меньшего числа ребер, назовем k рангом вершины V .

На нулевом шаге, на петлях с вершиной V_0 (если таковые имеются и ориентированы произвольно) полагаем $\lambda(X) = \eta(\varphi)$, где φ — значение параметра, соответствующее X (точке V_0 соответствуют два значения, $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$, но противоречия нет, так как $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$).

На первом шаге, на ребрах E_j , соединяющих V_0 с вершинами V_i первого ранга, положим $\lambda(X) = C_j \theta(\varphi)$, где положительные константы C_j подбираются

так, чтобы λ принимала постоянное значение λ_1 в вершинах первого ранга. Мы здесь считаем, что ребра E_j , примыкающие к V_0 , ориентированы в направлении от V_0 , а параметр φ меняется на E_j от нуля до φ_j (радианная мера, упомянутая выше). Теперь на каждом ребре E_j , являющемся петлей в вершине первого ранга или ребром, соединяющим две вершины V_i и V_k первого ранга (назовем его перемычкой), полагаем $\lambda(X) = \lambda_1 + D_j \eta(2\pi\varphi/\varphi_j)$ с некоторой положительной постоянной D_j ; напомним, что на концах отрезка $[0, 2\pi]$ функция η обращается в нуль, поэтому в вершине петли или на концах ребра-перемычки E_j (соответствующих значениям φ равным 0 и длине ребра φ_j) функция λ принимает значение λ_1 , что обеспечивает непрерывность λ на множестве, составленном из петель с вершиной V_0 ; ребер, соединяющих V_0 с вершинами первого ранга; петель в вершинах первого ранга; перемычек; а также самих вершин. При этом она удовлетворяет условиям (i)–(iii).

На втором шаге ребра, соединяющие вершины первого ранга с вершинами второго ранга, ориентируем в направлении от первых ко вторым и на них определяем значения функции λ , повторив конструкцию первого шага, но теперь нужно стартовать от значения λ_1 на вершинах первого ранга, а заканчивать значением λ_2 во всех вершинах второго ранга; т. е. на каждом таком ребре E_j должно быть $\lambda(X) = \lambda_1 + C_j \theta$ с подходящими C_j . Затем продолжаем λ на петли в вершинах второго ранга и на ребра-перемычки, соединяющие вершины второго ранга, полагая $\lambda(X) = \lambda_2 + D_j \eta(2\pi\varphi/\varphi_j)$ с некоторыми положительными D_j .

Ввиду конечности числа вершин в графе Γ этот процесс завершится через конечное число шагов, причем в силу усиленной прочности Ω все вершины графа будут ранжированы и мы получаем функцию λ на Γ .

Пока мы еще не обеспечили выполнения условия (iv), но это не составляет труда, если выбирать константы C_j на каждом шаге достаточно малыми относительно максимального значения соответствующих констант на предыдущем шаге, а все константы D_j затем выбрать достаточно малыми, чтобы удовлетворить условие (iv). При таком выборе отрицательный вклад от ребер, ведущих к вершинам предыдущего ранга, превосходит по модулю суммарный вклад ребер, ведущих к вершинам следующего ранга, петлей и перемычек.

Переходя к случаю «криволинейной границы», заметим, что если σ_{1j} является действительно криволинейной одномерной стратой, к которой примыкают две двумерные страты, то последние лежат в одной плоскости; в противном случае σ_{1j} не была бы криволинейной. В связи с этим геометрия стратифицированного множества в окрестности граничной нульмерной страты $\sigma_{0i} = \{X_0\}$ достаточно проста. Рис. 4 демонстрирует все особенности этой геометрии и способ ее «исправления» в пределах некоторого стратифицированного шара $B_R(X_0)$.

Каждая примыкающая к X_0 криволинейная страта, лежащая между двумя двумерными стратами, игнорируется при построении барьера, как будто вместо этой страты и двух двумерных страт, к ней примыкающих, рассматривается одна двумерная страта, из них составленная.

Если после этого останется двумерная страта, примыкающая к двум криволинейным граничным стратам $\sigma_{1j}, \sigma_{1k} \succ \{X_0\}$, или имеющая двустороннее примыкание к криволинейной граничной страте $\sigma_{1j} \succ \{X_0\}$, то других двумерных страт, примыкающих к X_0 уже не будет и мы строим локальный барьер в X_0 , как в классическом случае.

В противном случае каждую «тупиковую» двумерную страту с единствен-

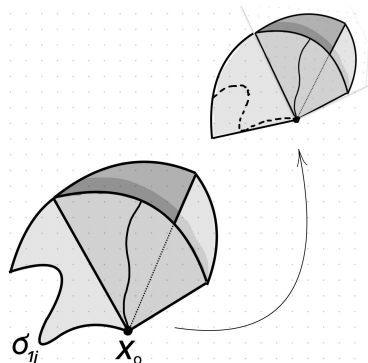


Рис. 4. Сведение к плоской границе.

ной, односторонне примыкающей к ней криволинейной граничной стратой $\sigma_{1j} \succ \{X_0\}$, мы погружаем в страту с прямолинейной границей, как это показано на рис. 4. Величина угла этой новой двумерной страты с вершиной в точке X_0 может доходить до 2π . Прямолинейная страта, заменяющая криволинейную страту σ_{1j} , включается в границу видоизмененного в пределах шара $B_R(X_0)$ исходного стратифицированного множества. Далее строится локальный барьер ψ по изложенной выше схеме, разработанной для случая, когда все граничные страты прямолинейны. Сужение ψ на исходное стратифицированное множество и является искомым локальным барьером в X_0 , поскольку это сужение наследует от ψ все необходимые для барьера свойства: при таком сужении сохраняются положительность, непрерывность в рассматриваемой граничной точке и требуемый знак мягкого лапласиана на внутренних стратах исходного множества. На искусственно добавленных частях видоизмененного множества дополнительных условий для исходной задачи не требуется.

ЛИТЕРАТУРА

1. Perron O. Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für $\Delta u = 0$ // Math. Z. 1923. V. 18, N 1. P. 42–54.
2. Гилбарт Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
3. John F. Partial differential equations. New York: Springer-Verl., 1982.
4. Nicaise S., Penkin O. Poincaré–Perron’s method for the Dirichlet problem on stratified sets // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 296, N 2. P. 504–520.
5. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Савастеев Д. В. Неравенство Харнака для гармонических функций на стратифицированном множестве // Сиб. мат. журн. 2023. Т. 64, № 5. С. 971–981.
6. Dairbekov N. S., Penkin O. M., Savasteev D. V. Removable singularities of harmonic functions on stratified sets // Symmetry. 2024. V. 16, N 4. 486. <https://doi.org/10.3390/sym16040486>
7. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Аналог неравенства Соболева на стратифицированном множестве // Алгебра и анализ. 2018. Т. 30, № 5. С. 149–158.
8. Даирбеков Н. С., Пенкин О. М., Сарыбекова Л. О. Неравенство Пуанкаре и p -связность стратифицированного множества // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 6. С. 1291–1302.
9. Фам Ф. Введение в топологическое исследование особенностей Ландау. М.: Мир, 1970.
10. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. М.: Физматлит, 2005.
11. Ощепкова С. Н., Пенкин О. М. Теорема о среднем для эллиптического оператора на

стратифицированном множестве // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 3. С. 417–426.

Поступила в редакцию 13 августа 2025 г.

После доработки 28 апреля 2026 г.

Принята к публикации 30 мая 2026 г.

Даирбеков Нурлан Слямханович (ORCID 0000-0002-2725-7549)

Университет Нархоз,

ул. Жандосова, 55, Алматы 050035, Казахстан;

Институт математики и математического моделирования,

ул. Шевченко, 28, Алматы 050000, Казахстан

nurlan.dairbekov@gmail.com

Пенкин Олег Михайлович (ORCID 0000-0001-9547-7597)

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., 1, Воронеж 394006

o.m.penkin@gmail.com

Савастеев Денис Владимирович (ORCID 0000-0001-9547-7597)

Воронежский государственный университет,

Университетская пл., 1, Воронеж 394006

savasteev@gmail.com