

СПЕКТРЫ НОРМИРОВАННЫХ ОБЪЕМОВ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

А. Ю. Веснин, А. А. Егоров

Аннотация. Рассматриваются трехмерные гиперболические многогранники конечного объема с конечным числом вершин. Нормированным объемом многогранника называется отношение его объема к числу вершин. Если задано некоторое множество гиперболических многогранников, то ему можно сопоставить множество нормированных объемов входящих в него многогранников. Это множество будем называть спектром нормированных объемов рассматриваемого множества. Нас будут интересовать прямоугольные гиперболические многогранники. Для подмножества идеальных многогранников мы находим границы спектра нормированных объемов и доказываем их точность. Кроме того, показываем, что спектр делится на дискретную и всюду плотную части. Для подмножества компактных многогранников мы получаем оценки спектра нормированных объемов, доказываем точность верхней границы, а также устанавливаем числовые промежутки, на которых спектр дискретен и всюду плотен. Границы указанных числовых промежутков выражаются через объем правильного идеального гиперболического тетраэдра и объем правильного идеального гиперболического октаэдра.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.402

Ключевые слова: пространство Лобачевского, гиперболический многогранник, прямоугольный многогранник, объем многогранника.

1. Введение

Изучение объемов трехмерных гиперболических многообразий и гиперболических многогранников является важным направлением развития современной геометрии. Представляет интерес описание множеств объемов и их свойств для различных классов многогранников (см., например, [1, 2]). С одной стороны, можно зафиксировать комбинаторное строение многогранника и ставить вопрос о том, при каких двугранных углах многогранник (с конечными или идеальными вершинами) имеет максимальный объем. Например, в силу известного результата Милнора [3] наибольший объем гиперболического 3-симплекса достигается на правильном идеальном 3-симплексе, т. е. на таком, у которого все вершины являются идеальными, а все двугранные углы равны между собой и, следовательно, равны $\pi/3$. Аналогичный результат имеет место в n -мерном случае. Как показано в [4], наибольший объем гиперболического n -симплекса достигается на правильном идеальном n -симплексе. С другой стороны, можно зафиксировать двугранные углы и ставить вопрос о том, какой многогранник

Работа выполнена в рамках госзадания ИМ СО РАН, а именно А. Ю. Веснин поддержан проектом No. FWNF-2026-0031, А. А. Егоров поддержан проектом No. FWNF-2026-0011.

имеет максимальный объем при заданном числе граней или вершин. Гиперболический многогранник называется прямоугольным, если все его двугранные углы равны $\pi/2$. О построении трехмерных гиперболических многообразий, соответствующих подгруппам без кручения в группах отражений прямоугольных многогранников, см. [5]. Целью данной работы является исследование объемов прямоугольных многогранников, нормированных по числу вершин.

Следуя [6], для гиперболического многогранника $\mathcal{P}$ конечного объема $\text{vol}(\mathcal{P})$ с конечным числом вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ определим *нормированный объем* как величину $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$. Пусть $\mathcal{R}$ — некоторое множество гиперболических многогранников. Множество $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$ нормированных объемов многогранников из $\mathcal{R}$ будем называть *спектром нормированных объемов* $\mathcal{R}$.

Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников через число их граней были получены Аткинсоном в [7]. Список из 825 наименьших по объему компактных прямоугольных гиперболических многогранников привел Иноуэ в работе [8]. Список из 248 наименьших значений объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников приведен в [9].

Обозначим через $\mathcal{R}_{ideal}$ множество всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, а через $\mathcal{R}_{comp}$ — множество всех компактных прямоугольных гиперболических многогранников. В обоих случаях мы предполагаем, что многогранники имеют конечный объем и конечное число вершин.

Нормированные объемы этих множеств и их спектры описываются в следующих теоремах, где используемые константы с точностью до шести знаков имеют следующие значения: $v_{oct} = 3,663862$ и $v_{tet} = 1,014941$.

Теорема 1.1. Спектр нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}\}$ принадлежит отрезку $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$, где нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точная. Спектр является дискретным на промежутке $[\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{4}v_{oct})$ и всюду плотным на отрезке $[\frac{1}{4}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct}]$.

Теорема 1.2. Спектр нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{comp}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}\}$ принадлежит промежутку $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{5}{8}v_{tet})$, где верхняя граница точная. На промежутке $[\frac{5}{192}v_{oct}, \frac{1}{32}v_{oct})$ спектр является дискретным, а на отрезке $[\frac{5}{16}v_{tet}, \frac{5}{8}v_{tet}]$ — всюду плотным.

Поведение спектра $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ на отрезке $[\frac{1}{32}v_{oct}, \frac{5}{16}v_{tet}]$ пока остается невыясненным, см. вопрос 6.2.

Отметим связь полученных результатов с теорией гиперболических узлов и зацеплений. Для гиперболического зацепления $L \subset S^3$ рассмотрим объем дополнения к нему, снабженного полной метрикой постоянной отрицательной кривизны, и обозначим его через $\text{vol}(L)$. Пусть $c(L)$ — минимальное число перекрестков среди всех диаграмм зацепления L . В работе [10] Чампанеркар, Кофман и Парселл определили *плотность объема* зацепления следующим образом: $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/c(L)$. Известно, что $\text{vd}(L) \leq v_{oct}$. Последовательность зацеплений L_n таких, что $c(L_n) \rightarrow \infty$, называется *геометрически максимальной*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vd}(L_n) = v_{oct}$. Примеры геометрически максимальных последовательностей зацеплений построены в [10].

Впоследствии Бартон [11] показал, что множество плотностей объемов всех гиперболических зацеплений всюду плотно в отрезке $[0, v_{oct}]$. Адамс, Калдерон

и Майер показали в работе [12], что множество плотностей объемов гиперболических зацеплений в утолщенных поверхностях $S_g \times I$, где $g \geq 2$, всюду плотно в отрезке $[0, 2v_{\text{oct}}]$.

В работе [13] Квон и Тхам исследовали специальный класс гиперболических зацеплений, которые называются полностью аугментированными зацеплениями (в англоязычной литературе они называются *fully augmented links* или кратко *FAL*). Для них естественной мерой сложности является число аугментаций (их также называют вертикальными компонентами зацепления). Для данного класса Квон и Тхам определили плотность объема как отношение объема дополнения зацепления к числу его вертикальных компонент и показали, что множество плотностей лежит в отрезке $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$, причем обе границы точны. Кроме того, они установили, что спектр дискретен в $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$.

Между полностью аугментированными зацеплениями и идеальными прямоугольными многогранниками существует естественная геометрическая связь: дополнение каждого такого зацепления разбивается на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника [14–16] (об аналогичном разбиении дополнений к зацеплениям в утолщенном торе см. [17]). При этом объем зацепления равен удвоенному объему многогранника, а число вертикальных компонент зацепления связано с числом вершин многогранника. Следовательно, с использованием подходящей нормировки спектр плотностей объемов зацеплений можно вложить в спектр нормированных объемов многогранников. Однако класс идеальных прямоугольных многогранников существенно шире, чем подкласс многогранников, возникающий из аугментированных зацеплений, в связи с чем естественно возникает вопрос об описании спектра объемов класса всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников.

Работа имеет следующую структуру. В разд. 2 приводятся основные определения и свойства идеальных прямоугольных гиперболических многогранников. Разд. 3 посвящен компактным прямоугольным гиперболическим многогранникам, в частности, многогранникам Лёбелля. В разд. 4 и 5 приводятся доказательства теоремы 1.1 и теоремы 1.2 соответственно. В разделе 6 сравниваются полученные результаты для нормированных объемов идеальных и компактных прямоугольных многогранников с результатами Квон и Тхам о спектре плотности объемов аугментированных зацеплений. В заключение сформулированы некоторые открытые вопросы и одна гипотеза.

2. Идеальные прямоугольные многогранники

Абстрактным многогранником будем называть такой клеточный комплекс на S^2 , который можно реализовать как выпуклый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве. Согласно классической теореме Штейница (см., например [18, гл. 1]), реализуемость клеточного комплекса как выпуклого евклидова многогранника эквивалентна тому, что его одномерный скелет является 3-связным графом без петель и кратных ребер. Напомним, что граф называется k -связным, если он содержит по крайней мере $k + 1$ вершину и любые две его различные вершины можно соединить по крайней мере k независимыми путями. В силу теоремы Менгера — Уитни граф, содержащий по крайней мере $k + 1$ вершину, является k -связным тогда и только тогда, когда после удаления любых его $k - 1$ вершин (и инцидентных им ребер), получается связный граф. Обозначим через $E(P)$ множество ребер абстрактного многогранника P . Раз-

меткой абстрактного графа P будем называть отображение $\mathcal{E} : E(P) \rightarrow (0, \pi/2]$. Пару $(P, \mathcal{E})$ будем называть *размеченным абстрактным многогранником*. Будем говорить, что размеченный абстрактный многогранник *реализуется как гиперболический многогранник*, если имеется такой многогранник $\mathcal{P}$ в гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^3$, что существует сохраняющий разметку изоморфизм графов, переводящий одномерный скелет $\mathcal{P}^{(1)}$ с разметкой его ребер двугранными углами в размеченный абстрактный многогранник $(P, \mathcal{E})$. Ниже мы будем рассматривать такие многогранники в $\mathbb{H}^3$, у которых все двугранные углы равны $\pi/2$, и будем называть их *прямоугольными*. Вершина многогранника в $\mathbb{H}^3$ называется *идеальной*, если она лежит на абсолюте $\partial\mathbb{H}^3$. Подробнее о многогранниках в пространстве $\mathbb{H}^3$ см. [19].

Пусть G — плоский граф, а G^* — граф, двойственный к G . Простую замкнутую кривую, составленную из $k \geq 3$ ребер в G^* , будем называть *k-обходом*. *Призматическим k-обходом* будем называть такой k -обход γ , что никакие два ребра графа G , пересекающие γ , не имеют общей вершины.

Необходимые и достаточные условия реализации в $\mathbb{H}^3$ размеченного абстрактного многогранника конечного объема были получены в работах Е. М. Андреева [20, 21] (см. также [22]). Мы приведем результат для частного случая прямоугольных многогранников, следуя работе [7]. В этом случае необходимые и достаточные условия являются чисто комбинаторными.

Теорема 2.1. *Прямоугольный абстрактный многогранник $(P, \mathcal{E})$ реализуется как гиперболический многогранник, который обозначим через $\mathcal{P}$, тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- (1) P имеет не менее шести граней;
- (2) каждая вершина в P имеет валентность 3 или 4;
- (3) для каждой трех граней (F_i, F_j, F_k) в P таких, что $F_i \cap F_j$ и $F_j \cap F_k$ являются ребрами в P с различными концами, выполнено $F_i \cap F_k = \emptyset$;
- (4) P^* не имеет призматических 4-обходов.

При этом каждая 3-валентная вершина в P соответствует конечной вершине в $\mathcal{P}$, каждая 4-валентная вершина в P соответствует идеальной вершине в $\mathcal{P}$, и реализация единственна с точностью до изометрии.

Идеальным прямоугольным многогранником будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник, у которого все вершины являются идеальными. Идеальные прямоугольные многогранники естественным образом связаны с теорией узлов, поскольку дополнения к гиперболическим полностью аугментированным зацеплениям разбиваются на пары изометричных идеальных прямоугольных многогранников (см. [14–16]).

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$ обозначим через F число граней, через V число вершин, а через p_k — число k -угольных граней, где $k \geq 3$. Тогда $F = \sum_{k \geq 3} p_k$. Поскольку все вершины многогранника являются 4-валентными, из формулы Эйлера для многогранников следует, что $F = V + 2$, откуда

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k. \quad (1)$$

В частности, идеальным прямоугольным многогранником с наименьшим числом граней является октаэдр.

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство идеальных прямоугольных многогранников, обобщающих октаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

ПРИМЕР 2.1. Для $n \geq 3$ n -антипризмой $A(n)$ называется $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним n -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по n треугольников, у которого в каждой вершине сходится по четыре ребра. Диаграммы Шлегеля антипризм $A(3)$ и $A(4)$ приведены на рис. 1. В частности, $A(3)$ является октаэдром. Реализуемость прямоугольных антипризм как идеальных гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольную гиперболическую n -антипризму будем обозначать через $\mathcal{A}(n)$.

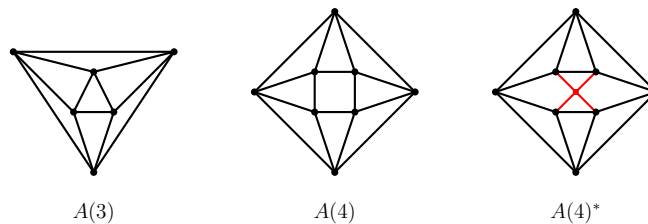


Рис. 1. Антипризмы $A(3)$ и $A(4)$, скрученная антипризма $A(4)^*$.

Следуя [23], определим операцию, которая называется *скручиванием ребер*. Операция состоит в следующем. Пусть P — абстрактный многогранник, у которого в некоторой грани имеются четыре различные 4-валентные вершины, образующие две пары смежных вершин, соединенных ребрами e_1 и e_2 . Применим преобразование в грани, состоящее в удалении ребер e_1 и e_2 , создании новой вершины v и соединении этой вершины ребрами с рассматриваемыми четырьмя вершинами. Многогранник, полученный в результате такого преобразования, обозначим через P^* . Будем говорить, что P^* получен из P *скручиванием ребер*. На рис. 2 указаны участвующие в скручивании ребра e_1 , e_2 и появившаяся новая вершина v с инцидентными ей ребрами.

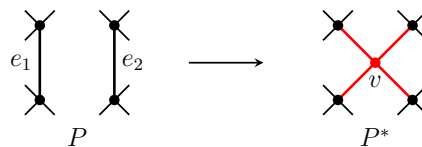


Рис. 2. Скручивание ребер e_1 и e_2 .

Из теоремы 2.1 следует, что если $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$, то $\mathcal{P}^* \in \mathcal{R}_{ideal}$. Следующий результат показывает, что любой многогранник из $\mathcal{R}_{ideal}$ является антипризмой или может быть получен из антипризмы с помощью конечного числа операций скручивания ребер.

Теорема 2.2 [23]. Класс многогранников $\mathcal{R}_{ideal}$ порождается антипризмами $\mathcal{A}(n)$, $n \geq 3$, и операциями скручивания ребер.

Традиционно объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляются с помощью функции Лобачевского $\Lambda(\theta)$, введенной Милнором [3],

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

Как показал Тёрстон [24], объем прямоугольной гиперболической n -антипризмы $\mathcal{A}(n)$, $n \geq 3$, выражается следующей формулой:

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) = 2n \left[\Lambda \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n} \right) + \Lambda \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n} \right) \right]. \quad (2)$$

Далее мы будем приводить все приближенные значения функции Лобачевского и объемы многогранников с точностью до шести знаков после запятой без указания отброшенных цифр многоточием. В частности, при $n = 3$ получаем объем идеального прямоугольного октаэдра:

$$v_{\text{oct}} = \text{vol}(\mathcal{A}(3)) = 8\Lambda(\pi/4) = 3,663862.$$

Из формулы (2) следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\mathcal{A}(n))}{\text{ver}(\mathcal{A}(n))} = \frac{v_{\text{oct}}}{2}$.

На рис. 3 приведен граф, представляющий пять поколений многогранников, полученных из $\mathcal{A}(4)$ операциями скручивания ребер. Вершины графа соответствуют многогранникам $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{24}$, где $\mathcal{P}_1 = \mathcal{A}(4)$. Две вершины соединяются ребром, если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием скручивания ребер.

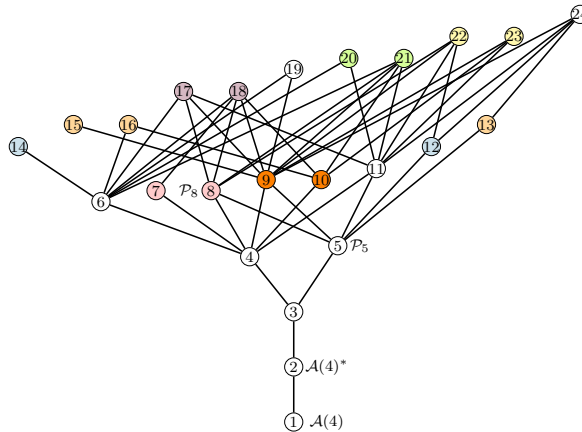


Рис. 3. Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{A}(4)$.

Отметим, что в рамках приближенных расчетов имеют место следующие равенства объемов:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{P}_7) &= \text{vol}(\mathcal{P}_8) = 10,991587; & \text{vol}(\mathcal{P}_9) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{10}) = 11,136296; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{12}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{14}) = 11,801747; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{13}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{15}) = \text{vol}(\mathcal{P}_{16}) = 12,046092; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{17}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{18}) = 12,276278; & \text{vol}(\mathcal{P}_{20}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{21}) = 12,611908; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{22}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{23}) = 12,883862. \end{aligned} \quad (3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При операции скручивания ребер нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{A}(4)^*$. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{A}(4)^*) > \omega(\mathcal{A}(4))$, поскольку $\omega(\mathcal{A}(4)) = \frac{6,023046}{8} = 0,75288$, а $\omega(\mathcal{A}(4)^*) = \frac{7,327725}{9} = 0,814191$. Так как многогранник $\mathcal{A}(4)^*$ можно составить из двух экземпляров $\mathcal{A}(3)$, то $\text{vol}(\mathcal{A}(4)^*) = 2\text{vol}(\mathcal{A}(3))$. Объемы многогранников $\mathcal{A}(3)$ и

$\mathcal{A}(4)$ вычислены по формуле (2). Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников, отмеченных на рис. 3 как $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$. Диаграммы Шлегеля этих многогранников приведены на рис. 4. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{P}_5^*) < \omega(\mathcal{P}_5)$, поскольку $\omega(\mathcal{P}_5) = \frac{10,149416}{11} = 0,922674$, а $\omega(\mathcal{P}_5^*) = \omega(\mathcal{P}_8) = \frac{10,991587}{12} = 0,915965$. Объемы многогранников $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8$ были вычислены в работе [9].

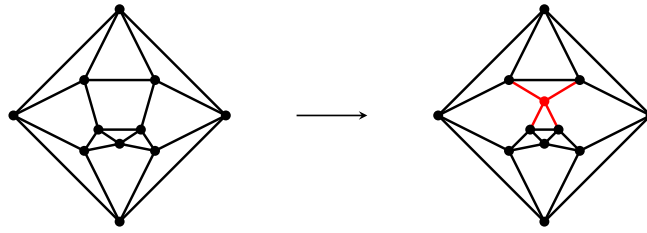


Рис. 4. Многогранники $\mathcal{P}_5$ и $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$.

Верхние и нижние оценки объемов идеальных прямоугольных многогранников через число вершин были получены Аткинсоном в [7].

Теорема 2.3 [7, теорема 2.2]. Если идеальный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ имеет $\text{ver}(\mathcal{P})$ вершин, то

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 2) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}}}{2}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 4). \quad (4)$$

Оба неравенства превращаются в равенства для правильного идеального гиперболического октаэдра — единственного идеального прямоугольного многогранника с шестью вершинами. Более того, верхняя оценка асимптотически точна: существует последовательность идеальных прямоугольных многогранников $\{Q_i\}$ с $\text{ver}(Q_i) \rightarrow \infty$ такая, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}.$$

Отметим, что в силу теоремы 2.1 в неравенстве (4) подразумевается, что $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$. В дальнейшем верхняя оценка из (4) была улучшена в [25] для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 8$, а в [26] — для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$.

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{ideal}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$, т. е. множество идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, имеющих n вершин. Объемы многогранников, принадлежащих множествам $\mathcal{R}_{ideal}^n$, где $6 \leq n \leq 21$, были вычислены в [9].

В табл. 1 для $6 \leq n \leq 21$ приведены следующие величины: число элементов $|\mathcal{R}_{ideal}^n|$ в множестве $\mathcal{R}_{ideal}^n$; число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)|$; минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ значения нормированных объемов.

3. Компактные прямоугольные многогранники

Компактным прямоугольным многогранником будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник, у которого все вершины являются конечными. В силу теоремы 2.1 все вершины компактного прямоугольного многогранника являются 3-валентными. Отметим (см., например [27, теорема 3.2]),

Таблица 1. Свойства нормированных объемов в идеальном случае

n	$ \mathcal{R}_{ideal}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$
6	1	1	0,610643	0,610643
7	0	0	-	-
8	1	1	0,752880	0,752880
9	1	1	0,814191	0,814191
10	2	2	0,813788	0,861241
11	2	2	0,880628	0,922674
12	9	7	0,845784	1,003841
13	11	7	0,907826	1,026982
14	37	17	0,864735	1,059477
15	79	31	0,920885	1,088771
16	249	79	0,876903	1,129321
17	671	172	0,927656	1,148432
18	2182	495	0,885188	1,180085
19	6692	1359	0,931280	1,204969
20	22131	4276	0,891085	1,229961
21	72405	13031	0,933202	1,248958

что каждая грань компактного прямоугольного многогранника является прямоугольным многоугольником и, следовательно, имеет не менее чем 5 сторон.

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}$ обозначим через F число его граней, V — число его вершин, и p_k — число его k -угольных граней, $k \geq 5$. Тогда $F = \sum_{k \geq 5} p_k$.

Из формулы Эйлера и 3-валентности вершин многогранника следует, что $2F = V + 4$, откуда

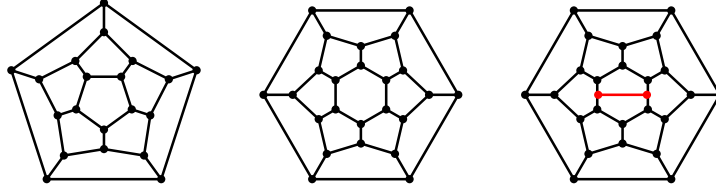
$$p_5 = 12 + \sum_{k \geq 7} (k - 6)p_k. \quad (5)$$

В частности, компактным прямоугольным гиперболическим многогранником с наименьшим числом граней, а следовательно, и с наименьшим числом вершин, является додекаэдр.

Поскольку условия реализации абстрактного прямоугольного многогранника как компактного прямоугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$ впервые исследовались А. В. Погореловым [28], эти многогранники называют также *многогранниками Погорелова*. Информация о жизни и научных исследованиях Алексея Васильевича Погорелова изложена в статье [29], приуроченной к 100-летию со дня его рождения. Отметим, что многогранники фуллеренов являются многогранниками Погорелова. Корреляция объемов прямоугольных гиперболических фуллеренов с химическими свойствами фуллеренов обсуждается в работе [30].

В следующем примере мы опишем одно бесконечное семейство компактных прямоугольных многогранников, обобщающих додекаэдр, которое будет играть важную роль в наших рассуждениях.

ПРИМЕР 3.1 [31]. Для $n \geq 5$ *многогранником Лёбелля* $L(n)$ называется $(2n + 2)$ -гранник с верхним и нижним n -угольными основаниями и боковой поверхностью из двух слоев по n пятиугольников, у которого в каждой вершине сходится по три ребра. Диаграммы Шлегеля многогранников $L(5)$ и $L(6)$ приведены на рис. 5. В частности, $L(5)$ является додекаэдром. Реализуемость прямоугольных многогранников Лёбелля как гиперболических многогранников следует из теоремы 2.1. Прямоугольные гиперболические многогранники Лёбелля

Рис. 5. Додекаэдр $L(5)$, многогранник $L(6)$ и многогранник $L(6)^+$.

будем обозначать через $\mathcal{L}(n)$.

Как показано в [32], объем многогранника $\mathcal{L}(n)$, $n \geq 5$, выражается следующей формулой:

$$\text{vol}(\mathcal{L}(n)) = \frac{n}{2} \left[2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) - \Lambda\left(2\theta_n - \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (6)$$

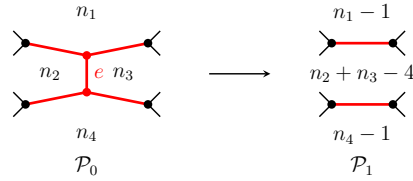
где

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right).$$

В частности, $\text{vol}(\mathcal{L}(5)) = 4,306210$ и $\text{vol}(\mathcal{L}(6)) = 6,023046$. Геометрические и арифметические свойства многогранников $\mathcal{L}(n)$ обсуждаются в работе [33]. О геометрических свойствах почти прямоугольных многогранников Лёбелля см. [34].

Следуя [27], определим две операции на множестве абстрактных многогранников: композицию и реберную хирургию. Пусть P_1 и P_2 — два абстрактных многогранника. Пусть F_1 — грань в P_1 , которая имеет столько же сторон, что и некоторая грань F_2 в P_2 . Определим новый абстрактный многогранник $P = P_1 \# P_2$ как результат комбинаторного объединения многогранников P_1 и P_2 вдоль граней F_1 и F_2 . Многогранник P будем называть *связной суммой*, или *композицией*, многогранников P_1 и P_2 . Как показано в [27, теорема 4.4], если многогранники P_1 и P_2 реализуются как компактные прямоугольные гиперболические, то P также реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. *Декомпозицией* будем называть операцию, обратную к композиции, т. е. разрезание многогранника P вдоль некоторого призматического k -обхода, $k \geq 5$, на два многогранника P_1 и P_2 , каждый из которых реализуется как компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Как показано в [27, теорема 6.4], если компактный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ является композицией компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, то $\text{vol}(\mathcal{P}) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$.

Пусть F_1 и F_2 — две различные грани в компактном прямоугольном гиперболическом многограннике $\mathcal{P}$. Будем говорить, что F_1 и F_2 *соединены ребром*, если они не являются смежными и найдется ребро e в $\mathcal{P}$, соединяющее вершину v_1 на границе F_1 с вершиной v_2 на границе F_2 . Поскольку все вершины в $\mathcal{P}$ являются 3-валентными, то каждое ребро соединяет лишь одну пару граней. Ребро e будем называть *хорошим*, если e соединяет грани с числом сторон не менее 6, и *очень хорошим*, если оно дополнительно не является частью призматического 5-обхода. *Реберной хирургией* вдоль ребра e будем называть удаление e с соответствующим изменением числа вершин, ребер и граней (рис. 6). Как показано в [27, теоремы 7.1, 8.6], если $\mathcal{P}_0$ — компактный прямоугольный гиперболический многогранник, а $e \in \mathcal{P}_0$ — очень хорошее ребро, то многогранник

Рис. 6. Реберная хирургия вдоль ребра e .

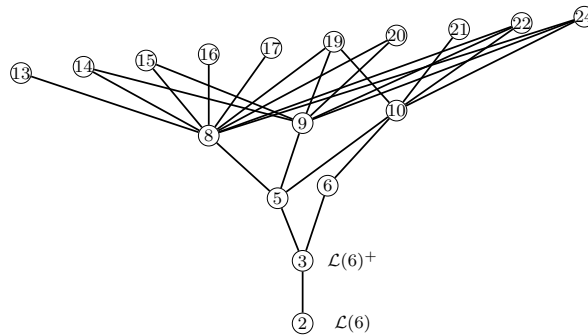
$\mathcal{P}_1$, полученный хирургией вдоль ребра e , также является компактным прямоугольным гиперболическим и при этом $\text{vol}(\mathcal{P}_0) > \text{vol}(\mathcal{P}_1)$.

Обратную операцию будем называть *добавлением ребра e* и обозначать полученный многогранник через $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{e\}$. На рис. 5 приведена диаграмма Шлегеля многогранника $L(6)^+$, полученного из $L(6)$ добавлением ребра.

Важная роль многогранников Лёбелля для описания структуры множества компактных прямоугольных гиперболических многогранников обусловлена следующей теоремой.

Теорема 3.1 [27, теорема 9.1]. Пусть $\mathcal{P}_0$ — компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность попарно не пересекающихся объединений компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ таких, что для $i = 1, \dots, k$ объединение $\mathcal{P}_i$ получено из $\mathcal{P}_{i-1}$ декомпозицией либо реберной хирургией, а $\mathcal{P}_k$ состоит из многогранников Лёбелля. Более того,

$$\text{vol}(\mathcal{P}_0) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_2) \geq \dots \geq \text{vol}(\mathcal{P}_k).$$

Рис. 7. Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{L}(6)$.

На рис. 7 представлен начальный подграф графа из работы [8], который иллюстрирует четыре поколения многогранников, полученных из $\mathcal{L}(6)$ операциями добавления ребра. Номера вершин соответствуют порядковым номерам многогранников в списке 825 первых многогранников из работы [8]. Две вершины соединяются ребром, если многогранники, соответствующие вершинам, связаны одним преобразованием добавления ребра.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. При операции добавления ребра нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться. Примером увеличения нормированного объема является пара $\mathcal{L}(6)$ и $\mathcal{L}(6)^+$, см. рис. 5. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{L}(6)^+) > \omega(\mathcal{L}(6))$, поскольку $\omega(\mathcal{L}(6)) = \frac{6.023046}{24} = 0,250960$, а

$\omega(\mathcal{L}(6)^+) = \frac{6,967011}{26} = 0,267961$. Примером уменьшения нормированного объема является пара многогранников $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$, см. рис. 8, где $\mathcal{Q}^+$ получен добавлением ребра, соединяющего ребра e_1 и e_2 многогранника $\mathcal{Q}$, имеющего 42 вершины. Имеет место неравенство $\omega(\mathcal{Q}) > \omega(\mathcal{Q}^+)$, поскольку $\omega(\mathcal{Q}) = \frac{12,713430}{42} = 0,302700$, а $\omega(\mathcal{Q}^+) = \frac{12,996118}{44} = 0,295366$.

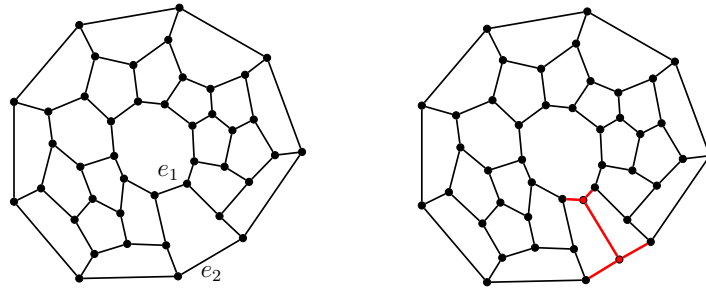


Рис. 8. Многогранники $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^+$.

Ниже мы будем использовать многогранники Лёбелля $\mathcal{L}(n)$ для построения новых компактных прямоугольных многогранников.

ПРИМЕР 3.2. Для целого $k \geq 1$ обозначим через $\mathcal{L}_k(n)$ многогранник с $2n(k+1)$ вершинами, построенный из k копий многогранника $\mathcal{L}(n)$ путем их последовательного склеивания вдоль n -угольных граней. В частности, $\mathcal{L}_1(n) = \mathcal{L}(n)$. В качестве примера на рис. 9 изображена развертка боковой поверхности многогранника $\mathcal{L}_3(6)$. Многогранники $\mathcal{L}_k(n)$ будем называть *башнями из многогранников Лёбелля*.

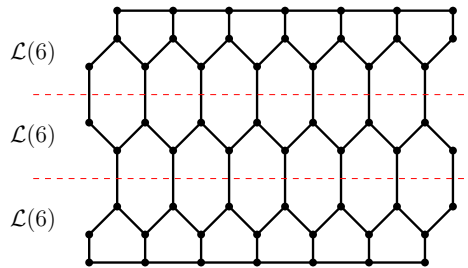


Рис. 9. Боковая поверхность многогранника $\mathcal{L}_3(6)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Многогранник $\mathcal{L}(n)$ имеет $2n$ изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к двум n -угольным граням. В силу построения башня $\mathcal{L}_k(n)$ имеет $2n$ таких же изометричных друг другу пятиугольных граней, прилегающих к верхней или нижней n -угольной грани башни.

В работе [35] было установлено следующее свойство.

Теорема 3.2 [35, теорема 3]. Для любого целого $k \geq 1$ для башен компактных прямоугольных гиперболических многогранников Лёбелля $\mathcal{L}_k(n)$ имеет место следующее свойство:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(\mathcal{L}_k(n))}{\text{ver}(\mathcal{L}_k(n))} = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5v_{\text{tet}}}{8}, \quad (7)$$

Таблица 2. Плотность нормированных объемов в компактном случае

n	$ \mathcal{R}_{comp}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$
20	1	1	0,215310	0,215310
22	0	0	-	-
24	1	1	0,250960	0,250960
26	1	1	0,267961	0,267961
28	3	3	0,270116	0,285722
30	4	4	0,287080	0,298220
32	12	12	0,281845	0,311786
34	23	23	0,286201	0,323119
36	71	71	0,289334	0,335671
38	187	187	0,291020	0,345760
40	627	627	0,292711	0,355566
42	1970	1952	0,294115	0,364289
44	6833	6771	0,295366	0,372678
46	23384	23082	0,296473	0,380143

где $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$ — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра.

В частности, при $k = 1$ получаем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}(n)) = \frac{5}{16}v_{\text{tet}}$, а при $k \rightarrow \infty$ имеем $\lim_{k, n \rightarrow \infty} \omega(\mathcal{L}_k(n)) = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$.

Оценки объемов компактных прямоугольных многогранников были получены Аткинсоном [7].

Теорема 3.3 [7, теорема 2.3]. Если компактный прямоугольный гиперболический многогранник $\mathcal{P}$ имеет $\text{ver}(\mathcal{P})$ вершин, то

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 8) \leq \text{vol}(\mathcal{P}) < \frac{5v_{\text{tet}}}{8}(\text{ver}(\mathcal{P}) - 10). \quad (8)$$

где $v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$ — объем правильного идеального гиперболического тетраэдра. При этом существует последовательность многогранников $\{R_i\} \in \mathcal{R}_{comp}$ с $\text{ver}(R_i)$ вершинами такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(R_i)}{\text{ver}(R_i)} = \frac{5}{8}v_{\text{tet}}$.

Как отмечено выше, минимальным по числу вершин компактным прямоугольным гиперболическим многогранником является додекаэдр. Таким образом, в формуле (8) подразумевается, что $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 20$. В дальнейшем верхняя оценка из (8) была улучшена в [25] для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 24$, а в [26] — для случая $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 81$.

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{comp}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$, т. е. множество компактных прямоугольных многогранников, имеющих ровно n вершин. Поскольку одномерные скелеты многогранников из $\mathcal{R}_{comp}^n$ являются 3-валентными графами, число вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ четно. Для четных $20 \leq n \leq 46$ число элементов $|\mathcal{R}_{comp}^n|$ в множестве $\mathcal{R}_{comp}^n$, число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)|$, а также минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ значения нормированных объемов приведены в табл. 2.

4. Доказательство теоремы 1.1

Установим, что $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) \subset [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}})$, при этом нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точна. Из неравенства (4) следует

неравенство

$$\frac{v_{\text{oct}} \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 2}{4 \operatorname{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{\text{oct}} \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 4}{2 \operatorname{ver}(\mathcal{P})},$$

где $\omega(\mathcal{P}) = \operatorname{vol}(\mathcal{P}) / \operatorname{ver}(\mathcal{P})$ и $\operatorname{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$. Рассмотрим нижнюю оценку. Поскольку при $N \geq 6$ функция $f(N) = \frac{N-2}{N}$ монотонно возрастает, то $\min_{N \geq 6} f(N) =$

$f(6) = \frac{2}{3}$, откуда $\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$ и равенство достигается на октаэдре. Рассмотрим верхнюю оценку. При $N \geq 6$ функция $g(N) = \frac{N-4}{N}$ монотонно возрастает и стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$, следовательно, если $\operatorname{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$, то имеет место неравенство $\omega(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$. При этом, поскольку по теореме 2.3 верхняя оценка в неравенстве (4) является асимптотически точной, то существует последовательность многогранников, для которой нормированный объем стремится к $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$. Значит, верхняя граница спектра равна $\frac{1}{2}v_{\text{oct}}$, но она не достигается.

Покажем, что на промежутке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$ спектр является дискретным. В самом деле, для произвольного $\frac{1}{6}v_{\text{oct}} < C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ рассмотрим отрезок $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Предположим, что $\omega(\mathcal{P}) \in [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Тогда из нижней оценки в неравенстве (4) имеем

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4} \left(1 - \frac{2}{\operatorname{ver}(\mathcal{P})}\right) \leq \omega(\mathcal{P}) \leq C.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \frac{2}{\operatorname{ver}(\mathcal{P})} \leq \frac{4C}{v_{\text{oct}}} \quad \text{и, далее,} \quad \operatorname{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{2v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 4C}.$$

В силу выбора C выражение в правой части неравенства положительно. Таким образом, число вершин $\operatorname{ver}(\mathcal{P})$ ограничено сверху величиной, зависящей только от C и константы v_{oct} .

Согласно теореме 2.1 идеальный прямоугольный гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 4-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом отрезке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$, где $C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$, содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на промежутке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$.

Теперь установим, что спектр нормированных объемов всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$. Для удобства изложения введем вспомогательные величины. Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ определим *модифицированное число вершин* $\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P})$ по формуле $\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P}) = \operatorname{ver}(\mathcal{P}) - 3$, а также определим *модифицированный нормированный объем* $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, полагая

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\operatorname{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\operatorname{ver}}(\mathcal{P})}.$$

В силу равенства (1) каждый многогранник из $\mathcal{R}_{\text{ideal}}$ имеет не менее восьми треугольных граней. Хорошо известно (см., например, [36, предложение 2.5]), что в геометрии Лобачевского любые два идеальных треугольника изометричны друг другу. Это свойство позволяет корректно определить операцию *связной суммы*, т. е. склейки двух идеальных прямоугольных многогранников вдоль их треугольных граней. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$. Выберем треугольные грани $T_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $T_2 \subset \mathcal{P}_2$. Поскольку T_1 и T_2 изометричны, мы можем склеить $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вдоль этих граней. Обозначим полученный многогранник через $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$.

Лемма 4.1. При операции связной суммы идеальных прямоугольных многогранников вдоль треугольных граней объем ведет себя аддитивно:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

а число вершин изменяется следующим образом:

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3.$$

При этом многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ является идеальным прямоугольным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с T_1 и T_2 , попарно образуют плоские двугранные углы величины π и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно, $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ снова является прямоугольным многогранником. Поскольку двумерная грань склейки имеет нулевой трехмерный объем, выполняется равенство $\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)$. При отождествлении граней склейки три идеальные вершины треугольника T_1 попарно отождествляются с тремя идеальными вершинами треугольника T_2 . Поскольку эти вершины лежат на абсолюте, после склейки остаются идеальными вершинами. Таким образом, 6 исходных вершин, соответствующих T_1 и T_2 , сливаются в 3 вершины, что приводит к формуле $\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3$. Лемма доказана.

Заметим, что при операции связной суммы модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) - 3 \\ &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) - 3) + (\text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

Вычислим модифицированный нормированный объем связной суммы:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)} = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}. \quad (9)$$

Таким образом, величина $\widetilde{\omega}$ для связной суммы многогранников ведет себя как взвешенное среднее значений $\widetilde{\omega}$ слагаемых, где весами выступают модифицированные числа вершин.

Рассмотрим последовательность многогранников $\#_k \mathcal{P}$, полученную последовательным склеиванием $k \geq 1$ копий одного и того же многогранника $\mathcal{P}$. Очевидно, что $\widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P})$. Заметим, что

$$\omega(\#_k \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_k \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3} = \widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) \cdot \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3}.$$

Поскольку $\widetilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) = k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, дробь справа стремится к 1. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Значит, чтобы аппроксимировать произвольное значение в $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть для многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ модифицированные объемы равны $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$. Без ограничения общности можем считать, что $A < B$. Покажем, как построить последовательность многогранников таких,

чтобы их нормированные объемы сходились к произвольному значению на интервале (A, B) . Обозначим через $\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2$ многогранник, полученный связной суммой k копий $\mathcal{P}_1$ и m копий $\mathcal{P}_2$ вдоль треугольных граней. Последовательно применяя формулу (9) получим

$$\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ выберем последовательности таких целых чисел $\{k_i\}$ и $\{m_i\}$, что $(k_i, m_i) = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{m_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{m_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений $\tilde{\omega}$ плотно в интервале между любыми двумя значениями $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$ и $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$.

Чтобы доказать плотность нормированных объемов на $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$ воспользуемся идеальными прямоугольными n -антипризмами $\mathcal{A}(n)$. Используя формулу (2), получаем, что при $n \rightarrow \infty$

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) \sim \frac{v_{\text{oct}}}{2}n.$$

При этом $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{A}(n)) = (2n + 2) - 3 = 2n - 1 \sim 2n$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\mathcal{A}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{v_{\text{oct}}}{2}n}{2n} = \frac{v_{\text{oct}}}{4}.$$

Таким образом, во-первых, найдется антипризма $\mathcal{A}(n)$ со значением $\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n))$, сколь угодно близким к $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$. Во-вторых, согласно теореме 2.3 существует последовательность многогранников $\{Q_i\}$, для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ и тем самым $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(Q_i) = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$.

Для сколь угодно малого ε выберем в качестве $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ многогранник $\mathcal{A}(n_\varepsilon)$, для которого $|\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n_\varepsilon)) - \frac{1}{4}v_{\text{oct}}| < \varepsilon$, а в качестве $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ выберем многогранник Q_{i_ε} из теоремы 2.3, для которого $|\frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \tilde{\omega}(Q_{i_\varepsilon})| < \varepsilon$. Применяя к многогранникам $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ и $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ те же рассуждения, что выше мы применяли к многогранникам $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$, получаем, что нормированный объем всюду плотен на интервале $(\frac{1}{4}v_{\text{oct}} + \varepsilon, \frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \varepsilon)$. Таким образом, нормированный объем всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$. Доказательство теоремы 1.1 завершено.

5. Доказательство теоремы 1.2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2. Покажем, что $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}}) \subset [\frac{5}{192}v_{\text{oct}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$. Разделив все части неравенства (8) на $\text{ver}(\mathcal{P})$, получим следующее неравенство для нормированного объема:

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 8}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10}{\text{ver}(\mathcal{P})}.$$

Как следует из формулы (5), минимальное число вершин для многогранника из $\mathcal{R}_{\text{comp}}$ равно 20. При $N \geq 20$ функция $h(N) = \frac{N-8}{N} = 1 - \frac{8}{N}$ монотонно

возрастает. Минимальные значения нормированных объемов многогранников из $\mathcal{R}_{comp}$ с числом вершин от 20 до 46 представлены в табл. 2. Подставляя $\text{ver}(\mathcal{P}) = 48$, получаем

$$\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{v_{\text{oct}}}{32} \cdot \frac{48 - 8}{48} = \frac{5}{192} v_{\text{oct}}.$$

Как видно из табл. 2, величина $\frac{5}{192} v_{\text{oct}}$ не превосходит минимальных значений нормированных объемов многогранников с числом вершин от 20 до 46, поэтому $\frac{5}{192} v_{\text{oct}}$ можно взять в качестве оценки на нижнюю границу спектра. Для верхней границы рассмотрим функцию $u(N) = \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \left(1 - \frac{10}{N}\right)$. Она стремится к $\frac{5v_{\text{tet}}}{8}$ при $N \rightarrow \infty$. Поскольку по теореме 3.3 верхняя оценка в (8) асимптотически точна, верхняя граница спектра равна $\frac{5}{8} v_{\text{tet}}$.

Покажем, что на промежутке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, \frac{1}{32} v_{\text{oct}}\right)$ спектр дискретный. В самом деле, для произвольного $\frac{5}{192} v_{\text{oct}} < C < \frac{v_{\text{oct}}}{32}$ рассмотрим отрезок $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$. Предположим, что $\omega(\mathcal{P}) \in \left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$. Тогда из нижней оценки в неравенстве (8) имеем

$$\frac{v_{\text{oct}}}{32} \left(1 - \frac{8}{\text{ver}(\mathcal{P})}\right) \leq C \quad \text{и, далее,} \quad \text{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{8v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 32C}.$$

В силу выбора C выражение в правой части неравенства положительное. Таким образом, число вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ ограничено сверху величиной, зависящей только от C и константы v_{oct} .

Согласно теореме 2.1 компактный гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 3-валентным графом. Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество возможных значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом отрезке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, C\right]$ содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на промежутке $\left[\frac{5}{192} v_{\text{oct}}, \frac{1}{32} v_{\text{oct}}\right)$.

Покажем, что в отрезке $\left[\frac{5}{16} v_{\text{tet}}, \frac{5}{8} v_{\text{tet}}\right]$ спектр всюду плотен. Определим операцию *связной суммы* (склейки) двух многогранников из $\mathcal{R}_{comp}$ вдоль двух изометричных пятиугольных граней.

Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}$ определим модифицированное число вершин $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) = \text{ver}(\mathcal{P}) - 10$, а также определим модифицированный нормализованный объем $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, полагая

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})}.$$

Связь между обычным нормированным объемом $\omega(\mathcal{P})$ и модифицированным $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ задается соотношением

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10} = \omega(\mathcal{P}) \cdot \frac{\text{ver}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P}) - 10}.$$

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{comp}$. Предположим, что имеются изометричные друг другу пятиугольные грани $F_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $F_2 \subset \mathcal{P}_2$. Склеим многогранники $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ вдоль этих граней и обозначим полученный многогранник через $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$. Данную операцию будем называть *связной суммой вдоль пятиугольных граней*.

Лемма 5.1. При операции связной суммы компактных прямоугольных многогранников вдоль пятиугольных граней объем ведет себя аддитивно:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

а число вершин изменяется следующим образом:

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10.$$

При этом многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ является компактным прямоугольным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При склейке прямоугольных многогранников грани, смежные с F_1 и F_2 , попарно образуют плоские двугранные углы величины π и сливаются в полные геодезические гиперграни. Прямые углы с остальными гранями при этом сохраняются, следовательно, $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ снова является прямоугольным многогранником. В компактном прямоугольном многограннике все вершины 3-валентные. Каждая вершина склеиваемой грани образована пересечением самой этой грани и двух перпендикулярных ей смежных. При склейке грань уходит во внутренность, а две смежные грани гладко сливаются. Следовательно, точка их пересечения становится внутренней точкой ребра и перестает быть вершиной. Поскольку две склеиваемые пятиугольные грани содержат суммарно 10 вершин, все они при отождествлении исчезают из 1-скелета, что дает искомую формулу. Лемма доказана.

При этом модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 10) - 10 = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2).$$

Следовательно, модифицированный нормированный объем связной суммы вдоль пятиугольных граней является взвешенным средним:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}. \quad (10)$$

Рассмотрим последовательное склеивание m копий одного и того же многогранника $\mathcal{P}$. Обозначим полученный многогранник символом $\#_m \mathcal{P}$. Тогда $\widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P})$, так как это среднее одинаковых величин. Связь между обычным и модифицированным нормированным объемом описывается формулой

$$\omega(\#_m \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_m \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10} = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) \frac{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) + 10}.$$

Поскольку $\widetilde{\text{ver}}(\#_m \mathcal{P}) = m \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, дробь справа стремится к 1. Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \omega(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\#_m \mathcal{P}) = \widetilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Это означает, что любое значение модифицированного нормированного объема $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ является предельной точкой для спектра обычных нормированных объемов ω . Таким образом, чтобы аппроксимировать произвольное значение в отрезке $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{8}]$ нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Пусть $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ — два многогранника из $\mathcal{R}_{\text{comp}}$. Пусть $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$, где $A < B$. Рассмотрим многогранник $\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2$, являющийся связной суммой k копий $\mathcal{P}_1$ и ℓ копий $\mathcal{P}_2$ вдоль изометричных друг другу пятиугольных граней. Тогда

$$\widetilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_\ell \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \ell \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ выберем последовательности таких целых чисел $\{k_i\}$ и $\{\ell_i\}$, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{\ell_i} = \frac{\alpha \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \widetilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{\ell_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений $\widetilde{\omega}$ плотно в интервале между любыми двумя значениями $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$ и $\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$.

Теперь перейдем к конкретным семействам многогранников. Для реализации связной суммы нам нужны многогранники с изометричными пятиугольными гранями. Рассмотрим многогранники Лёбелля $\mathcal{L}(n)$ и их башни $\mathcal{L}_k(n)$. При фиксированном n все боковые пятиугольные грани этих многогранников изометричны друг другу. Обозначим множество таких пятиугольных граней через $\mathcal{F}_n$. У многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ имеется по $2n$ попарно изометричных пятиугольных граней.

Более того, заметим, что если пара произвольных многогранников $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ имеет по p_1 и p_2 попарно изометричных пятиугольных граней из множества $\mathcal{F}_n$, то многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$, полученный связной суммой вдоль пары таких граней, имеет не менее $p_1 + p_2 - 12$ изометричных пятиугольных граней класса $\mathcal{F}_n$. Действительно, при склейке две грани $F_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $F_2 \subset \mathcal{P}_2$ уходят во внутренность многогранника. Кроме того, могут изменить свой комбинаторный тип (и тем самым перестать принадлежать классу $\mathcal{F}_n$) грани, инцидентные граням склейки — их ровно по 5 в каждом из многогранников. В худшем случае все эти 12 граней принадлежали $\mathcal{F}_n$ и были утрачены.

Далее будем полагать, что $n > 6$. Тогда после нескольких операций связной суммы, примененных к копиям многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ вдоль пятиугольных граней из множества $\mathcal{F}_n$, итоговый многогранник будет иметь не меньше пятиугольных граней класса $\mathcal{F}_n$, чем имеют $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$. Это позволяет повторять операцию связной суммы копий многогранников $\mathcal{L}(n)$ и $\mathcal{L}_k(n)$ любое требуемое количество раз.

В первую очередь отметим, что в силу формулы (7) концы интересующего нас отрезка $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$ можно получить как пределы последовательностей модифицированных объемов многогранников $\mathcal{L}(n)$ (устремляя n к бесконечности) и $\mathcal{L}_k(n)$ (устремляя n и k к бесконечности).

Для завершения доказательства заметим, что в силу формулы (7) для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа k_ε и n_ε такие, что

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{L}(n_\varepsilon)) \in \left[\frac{5v_{\text{tet}}}{16}, \frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon \right], \quad \widetilde{\omega}(\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)) \in \left[\frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8} \right].$$

Таким образом, мы можем построить связные суммы многогранников $\mathcal{L}(n_\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon)$ следующего вида:

$$\#_m \mathcal{L}(n_\varepsilon) \#_s \mathcal{L}_{k_\varepsilon}(n_\varepsilon),$$

и применить вышеописанную процедуру для аппроксимации любого числа в отрезке $[\frac{5v_{\text{tet}}}{16} + \varepsilon, \frac{5v_{\text{tet}}}{8} - \varepsilon]$. Доказательство теоремы 1.2 завершено.

6. Сравнение спектров и открытые вопросы

Как мы упоминали во введении, существует тесная связь между объемами полностью аугментированных зацеплений и объемами идеальных прямоугольных многогранников. Известно (см. [14–16]), что дополнение к любому полностью аугментированному гиперболическому зацеплению $L \subset S^3$ можно разрезать на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника $\mathcal{P}$. При этом выполняются соотношения

$$\text{vol}(L) = 2 \text{vol}(\mathcal{P}), \quad \text{ver}(\mathcal{P}) = 3a(L), \quad (11)$$

где $a(L)$ — число аугментаций (вертикальных компонент) зацепления.

Квон и Тхам [13] исследовали спектр плотности объема $\text{vd}(L)$ полностью аугментированного зацепления L , который определяется следующим образом: $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/a(L)$. Выразим эту величину через нормированный объем многогранника $\mathcal{P}$, соответствующего зацеплению L , воспользовавшись соотношениями (11):

$$\text{vd}(L) = \frac{2 \text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})/3} = 6 \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})} = 6\omega(\mathcal{P}).$$

В [13] показано, что спектр $\text{vd}(L)$ содержится в отрезке $[v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$, дискретен в $[v_{\text{oct}}, 2v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[2v_{\text{oct}}, 10v_{\text{tet}}]$. Пересчитывая эти отрезки для $\omega(\mathcal{P})$ (делением на 6), получаем, что для подкласса многогранников, соответствующих полностью аугментированным зацеплениям, спектр лежит в отрезке $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$, дискретен в $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{3}v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[\frac{1}{3}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$.

Сравнивая спектр $\Omega(\text{FAL})$ плотности объемов аугментированных зацеплений со спектром $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ нормированных объемов идеальных прямоугольных многогранников, отметим следующие факты (рис. 10).

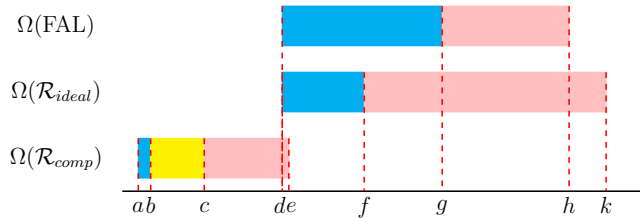


Рис. 10. Сравнение спектров нормированных объемов.

(1) Нижние границы спектров совпадают и равны $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}}$.

(2) Верхняя граница спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ равна $k = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$, что превосходит верхнюю границу $h = \frac{5}{3}v_{\text{tet}}$ спектра $\Omega(\text{FAL})$. Это различие объясняется тем, что класс всех идеальных прямоугольных многогранников существенно шире класса многогранников, возникающих из диаграмм зацеплений. Например, у многогранников, возникающих из зацеплений, каждая вершина инцидентна двум треугольникам, которые пересекаются ровно по этой вершине.

(3) Структуры спектров качественно совпадают: сначала идет дискретная часть, а затем всюду плотная часть. Переход от дискретной части к всюду плотной в случае $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$ происходит при значении $f = \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$, в то время как для случая $\Omega(\text{FAL})$ при значении $g = \frac{1}{3}v_{\text{oct}}$.

(4) Как видно из доказательства теоремы 1.1 и табл. 1, единственным нормированным объемом из $\Omega(\mathcal{R}_{\text{ideal}})$, который попадает в плотную часть спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$, является $d = \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643 \in [d, e)$, соответствующий октаэдру.

Соответствующие промежутки приведены на рис. 10, где указанные величины имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{192}v_{\text{oct}} = 0,068697, & b &= \frac{1}{32}v_{\text{oct}} = 0,114495, & c &= \frac{5}{16}v_{\text{tet}} = 0,317169, \\ d &= \frac{1}{6}v_{\text{oct}} = 0,610643, & e &= \frac{5}{8}v_{\text{tet}} = 0,634338, & f &= \frac{1}{4}v_{\text{oct}} = 0,915965, \\ g &= \frac{1}{3}v_{\text{oct}} = 1,221287, & h &= \frac{5}{3}v_{\text{tet}} = 1,691558, & k &= \frac{1}{2}v_{\text{oct}} = 1,831931. \end{aligned}$$

В цветной версии рис. 10 синим цветом отмечены области дискретной части спектра, розовым — области всюду плотной части спектра, а желтым — область, которая пока остается неисследованной.

В заключение сформулируем несколько открытых вопросов и одну гипотезу.

Вопрос 6.1. Какова точная нижняя граница спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников? Указанная в данной работе граница $a = \frac{5}{192}v_{\text{oct}}$ вытекает из формулы (8) и табл. 2, однако она не является точной.

Вопрос 6.2. Какова структура спектра $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников в отрезке $[b, c] = [\frac{1}{32}v_{\text{oct}}, \frac{5}{16}v_{\text{tet}}]$?

Наша гипотеза состоит в следующем.

Гипотеза 6.1. Спектр $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ нормированных объемов компактных прямоугольных многогранников лежит в отрезке $[\frac{\text{vol } \mathcal{L}(5)}{20}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$, причем обе границы точны. Более того, спектр $\Omega(\mathcal{R}_{\text{comp}})$ дискретен в отрезке $[\frac{\text{vol } \mathcal{L}(5)}{20}, \frac{5}{16}v_{\text{tet}}]$ и всюду плотен в $[\frac{5}{16}v_{\text{tet}}, \frac{5}{8}v_{\text{tet}}]$.

Вопрос 6.3. Как устроен спектр нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников, допускающих как конечные, так и идеальные вершины? В [37] было показано, что наименьший объем в этом классе многогранников равен $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ и достигается на треугольной бипирамиде, имеющей две конечные и три идеальные вершины.

Сравнивая объем антипризмы $\mathcal{A}(4)$ и объем многогранника Лёбелля $\mathcal{L}(6)$, можно заметить, что с точностью до шести знаков после запятой оба объема равны 6,023046. Более того, объемы $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{L}(6)$, вычисленные с точностью до 50 знаков после запятой, снова совпадают и равны

$$6,02304602004718882363418931461679711549802902472249\dots$$

Верно ли, что имеет место равенство $\text{vol}(\mathcal{A}(4)) = \text{vol}(\mathcal{L}(6))$? Поскольку оба объема выражаются через функцию Лобачевского, этот вопрос сводится к вопросу о том, имеет ли место следующее равенство:

$$\begin{aligned} 3 \left[2\Lambda(\theta_6) + \Lambda\left(\theta_6 + \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\theta_6 - \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_6\right) \right] \\ = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (12) \end{aligned}$$

где $\theta_6 = \frac{\pi}{2} - \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$? Заметим, что многогранник, составленный из двух идеальных прямоугольных антипризм $\mathcal{A}(4)$, известен как кубооктаэдр Q (см.,

например, рис. 3 в работе [37]). Формула для $\text{vol}(Q)$ была получена в [38, лемма 5.5] разбиением Q на идеальные тетраэдры. Из нее следует, что

$$4\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) + 8\Lambda(\phi) - 3\Lambda(2\phi) + \frac{1}{2}\Lambda(4\phi) = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (13)$$

где $\phi = \arctan(\sqrt{2})$.

Вопрос 6.4. *Имеет ли место равенство (12)? В частности, следует ли оно из (13)?*

Благодарность. Авторы выражают признательность рецензенту за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Belletti G. The maximum volume of hyperbolic polyhedra // Trans. Am. Math. Soc. 2021. V. 374, N 2. P. 1125–1153.
2. Costantino F., Gueritaud F., van der Veen R. On the volume conjecture for polyhedra // Geom. Dedicata. 2015. V. 179. P. 385–409.
3. Milnor J. Hyperbolic geometry: the first 150 years // Bull. Am. Math. Soc. 1982. V. 6. P. 9–24.
4. Haagerup U., Munkholm H. Simplices of maximal volume in hyperbolic n -space // Acta Math. 1981. V. 147. P. 1–11.
5. Веснин А. Ю. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия // Успехи мат. наук. 2017. Т. 72, № 2. С. 147–190.
6. Vesnin A. Volumes and normalized volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia. 2010. V. 57. P. 159–169.
7. Atkinson C. Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2009. V. 9. P. 1225–1254.
8. Inoue T. Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra // Experimental Math. 2022. V. 31, N 1. P. 165–183.
9. Vesnin A., Egorov A. Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space // Chebyshevskii Sbornik. 2020. V. 21, N 2. P. 65–83.
10. Champanerkar A., Kofman I., Purcell J. S. Geometrically and diagrammatically maximal knots // J. London Math. Soc. 2016. V. 94, N 3. P. 883–908.
11. Burton S. D. The spectra of volume and determinant densities of links // Topology Appl. 2016. V. 211. P. 38–55.
12. Adams C., Calderon A., Mayer N. Generalized bipyramids and hyperbolic volumes of alternating k -uniform tiling links // Topology Appl. 2020. V. 271. 107045.
13. Kwon A., Tham Y. H. On the volume density spectrum of fully augmented links // J. Knot Theory Ramif. 2025. V. 34, N 05. 2550011.
14. Lackenby M. The volume of hyperbolic alternating link complements. With an appendix by I. Agol and D. Thurston // Proc. London Math. Soc. 2004. V. 88. P. 204–224.
15. Purcell J. S. An introduction to fully augmented links // Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory, Contemp. Math. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. V. 541. P. 205–220.
16. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Верхние оценки объемов обобщенных гиперболических многогранников и зацеплений // Сиб. мат. журн. 2024. Т. 65, № 3. С. 534–551.
17. Kwon A. Fully augmented links in the thickened torus // Algebraic & Geometric Topology. 2025. V. 25, N 3. P. 1411–1432.
18. Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.
19. Alekseevskij D. V., Vinberg E. B., Solodovnikov A. S. Geometry of spaces of constant curvature // Geometry II, Encyclopedia Math. Sci. Berlin: Springer-Verl., 1993. V. 29. P. 1–138.
20. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 83, № 2. С. 256–260.
21. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81, № 3. С. 456–478.

22. Roeder R. K. W., Hubbard J. H., Dunbar W. D. Andreev's theorem on hyperbolic polyhedra // Ann. Inst. Fourier Grenoble. 2007. V. 57. P. 825–882.
23. Brinkmann G., Greenberg S., Greenhill C., McKay B. D., Thomas R., Wollan P. Generation of simple quadrangulations of the sphere // Discrete Mathematics. 2005. V. 305. P. 33–54.
24. Thurston W. P. The geometry and topology of three-manifolds. Collected works of William P. Thurston with commentary. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2022. V. IV.
25. Egorov A., Vesnin A. Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra // Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste. 2020. V. 52. P. 565–576.
26. Александров С. А., Богачев Н. В., Веснин А. Ю., Егоров А. А. Об объемах гиперболических прямоугольных многогранников // Мат. сб. 2023. Т. 214, № 2. С. 3–22.
27. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra // Algebraic & Geometric Topology. 2008. V. 8. P. 1523–1565.
28. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского // Мат. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
29. Борисенко А. А., Веснин А. Ю., Ивочкина Н. М. К столетию со дня рождения Алексея Васильевича Погорелова // Успехи мат. наук. 2019. Т. 74, № 6. С. 171–193.
30. Egorov A., Vesnin A. On correlation of hyperbolic volumes of fullerenes with their properties // Comput. Math. Biophys. 2020. V. 8. P. 150–167.
31. Веснин А. Ю. Трехмерные гиперболические многообразия типа Лёбелля // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 5. С. 50–53.
32. Веснин А. Ю. Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лёбелля // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 1. С. 17–23.
33. Bogachev N., Douba S. Geometric and arithmetic properties of Löbell polyhedra // Algebr. Geom. Topol. 2025. V. 25, N 4. P. 2281–2295.
34. Buser P., Mednykh A., Vesnin A. Lambert cube and Löbell polyhedron revisited // Advances in Geometry. 2012. V. 12. P. 525–548.
35. Веснин А. Ю., Реповш Д. Двусторонние оценки объемов прямоугольных гиперболических многогранников // Мат. заметки. 2011. Т. 89, № 1. С. 12–18.
36. Futer D., Gueritaud F. From angled triangulations to hyperbolic structures // Interactions between hyperbolic geometry, quantum topology and number theory. Providence, RI: Am. Math. Soc., 2011. P. 159–182. (Contemp. Math.; V. 541).
37. Веснин А. Ю., Егоров А. А. Прямоугольная группа Коксетера минимального кообъема в трехмерном гиперболическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2025. Т. 66, № 6. С. 1037–1056.
38. Adams C., Gomez-Raz F., Kang J., Krause L., Li G., Marple C., Tan Z. Hyperbolic handlebody complements in 3-manifolds // Topology Appl. 2026. V. 377. 109642.

Поступила в редакцию 6 апреля 2026 г.

После доработки 16 апреля 2026 г.

Принята к публикации 18 апреля 2026 г.

Веснин Андрей Юрьевич (ORCID 0000-0001-7553-1269)
 Егоров Андрей Александрович (ORCID 0009-0007-8795-8148)
 Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
 пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
 vesnin@math.nsc.ru, a.egorov2@g.nsu.ru