

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ ПО ТОЧЕЧНЫМ ДАНЫМ В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

А. А. Потапков, С. Г. Пятков

Аннотация. Рассматриваются вопросы корректности обратных задач восстановления коэффициента теплопередачи с использованием набора значений решения в фиксированных точках на границе области. Условия типа дифракции используются на границе раздела сред. Граничные условия нелинейные и коэффициент теплопередачи представим в виде конечного отрезка ряда с неизвестными коэффициентами, зависящими от времени. При определенных условиях на данные доказывается, что существует единственное решение задачи локально по времени, которое зависит от данных задачи непрерывно. Доказательство опирается на априорные оценки и принцип сжимающих отображений.

DOI 10.33048/smzh.2026.67.309

Ключевые слова: обратная задача, коэффициент теплопередачи, параболическое уравнение, тепломассоперенос.

*Посвящается Геннадию Владимировичу Демиденко
в связи с его 70-летием*

1. Введение

В статье исследуются обратные задачи об определении коэффициента теплопередачи по точечным данным. Рассматривается параболическое уравнение вида

$$Mu = u_t - Lu = f(t, x), \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (1)$$

где

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t, x)u_{x_i} + a_0(t, x)u, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j,$$

$G \in \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей Γ . Считаем, что область G разделена на два открытых множества G^+ и G^- , $\overline{G^-} \subset G$, $\overline{G^+} \cup \overline{G^-} = \overline{G}$, $G^+ \cap G^- = \emptyset$, положим $\Gamma_0 = \partial G^+ \cap \partial G^-$, $S_0 = (0, T) \times \Gamma_0$, $S = (0, T) \times \Gamma$. Уравнение (1) дополняется начально-краевыми условиями:

$$Bu = \frac{\partial u}{\partial N} + \beta(t, x)(\varphi(u) - \varphi(\overline{u}_0)) = g, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad (2)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда и правительства Ханты-Мансийского автономного округа-ЮГРЫ (грант № 25-11-20026).

где

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} n_i u_{x_j},$$

и условиями сопряжения

$$\frac{\partial u^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial u^-}{\partial N}(t, x), \quad u^+(t, x) = u^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u^\pm}{\partial N}(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} \nu_j, \quad u^\pm(t, x_0) = \lim_{x \in G^\pm, x \rightarrow x_0 \in \Gamma_0} u(t, x),$$

$\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ и \vec{n} — внешние единичные нормали к ∂G^- и Γ . Условия переопределения имеют вид

$$u(t, b_i) = \psi_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4)$$

где $b_i \in \Gamma$, $\{b_i\}_{i=1}^r$ — некоторый набор точек. Задача состоит в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2)–(4), и неизвестной функции

$$\beta(t, x) = \sum_{i=1}^r \beta_i(t) \Phi_i(t, x),$$

где функции Φ_i заданы, а функции $\beta_i(t)$ считаются неизвестными.

Обратные задачи возникают в самых различных задачах при описании процессов тепломассопереноса, диффузии, фильтрации, в экологии и т. п. (см. [1–3]). В частности, задача (1)–(4) возникает при идентификации параметров тепломассопереноса в задачах описания тепловых режимов мерзлых грунтов и техногенного загрязнения почв [4–6]. В настоящее время имеется большое количество работ, посвященных численному решению задач (1)–(4) в различных постановках, возникающих в приложениях, точки $\{b_i\}$ в (4) могут быть как внутренними [7–12] так и граничными точками [13–15] области G (см. стационарный случай в [16]). Имеется ряд работ, посвященных определению коэффициента теплопередачи в нелинейном граничном условии вида

$$\frac{\partial u}{\partial N} + \rho(t) \varphi(u) = g,$$

где функция ρ считается неизвестной (см. [17]). Отметим работы (см. библиографию в [18–20]), где восстанавливается функция вида $\varphi(t, x, u)$ (иногда не зависящая от независимых переменных) в граничном условии Робина вида $\frac{\partial u}{\partial N} + \varphi(t, x, u) = g$ или близком условии. В этих работах используются интегральные условия переопределения различного вида и в некоторых случаях получены теоремы существования и единственности решений таких задач локально по времени. Основной метод построения приближенного решения — сведение задачи к задаче управления и минимизация соответствующего квадратичного функционала. Отметим, что очень часто эти две задачи не эквивалентны.

Теоретических результатов, посвященных задаче (1)–(4), немного. По-видимому, первая работа, посвященная задаче (1)–(4) в многомерном случае, есть работа [21] (см. также [22]), где в случае $Mu = u_t - \Delta u$ и $r = 1$ были показаны теорема существования и единственности классических решений задачи об определении потока и теорема единственности в задаче об определении коэффициента теплопередачи. Другой подход описан в работе [23], где получена теорема существования и единственности решений в случае $\varphi(u) = u$ и задача рассматривалась в обычной постановке (т. е. условия сопряжения отсутствуют). В данной работе мы используем ту же самую идею и получаем теорему существования и единственности решений в пространствах Соболева.

2. Определения и вспомогательные результаты

Пусть E — банахово пространство. Обозначения для пространств Лебега $L_p(G; E)$, Соболева $W_p^s(G; E)$, $W_p^s(Q; E)$ и Гёльдера $C^\alpha(\overline{G}; E)$ ($\alpha \geq 0$) стандартные (см. [24, 25]). Если $E = \mathbb{R}$ или $E = \mathbb{R}^n$, то пишем просто $W_p^s(G)$ и т. д. Все рассматриваемые пространства и коэффициенты уравнения (1) считаем вещественными. Под нормой вектора понимаем сумму норм координат. Для данного интервала $J = (0, T)$ положим $W_p^{s,r}(Q) = W_p^s(J; L_p(G)) \cap L_p(J; W_p^r(G))$. Соответственно $W_p^{s,r}(S) = W_p^s(J; L_p(\Gamma)) \cap L_p(J; W_p^r(\Gamma))$. Пусть $(u, v) = \int_G u(x)v(x) dx$

и $B_\delta(b_i)$ — шар радиуса δ с центром в точке b_i . Положим $G_\delta = G \cap \bigcup_{i=1}^r B_\delta(b_i)$,

$\Gamma_\delta = \Gamma \cap \bigcup_{i=1}^r B_\delta(b_i)$, $Q_\tau^\pm = (0, \tau) \times G^\pm$, $Q_\tau = (0, \tau) \times G$, $S_\tau = (0, \tau) \times \Gamma$.

Далее считаем, что $\Gamma, \Gamma_0 \in C^2$, $\Gamma_\delta \in C^3$ (см. определение в [26, гл. 1]) для некоторого $\delta > 0$. Без ограничения общности можем считать, что для каждого $i = 1, 2, \dots, r$ найдутся окрестность Y_i точки b_i и система координат y (локальная система координат), полученная с помощью поворота и переноса начала координат из исходной, такие, что $Y_i \cap \Gamma_0 = \emptyset$, ось y_n направлена по внутренней нормали к Γ в точке b_i , уравнение части границы $Y_i \cap \Gamma$ имеет вид $y_n = \gamma_i(y')$, $\gamma_i(0) = 0$, $|y'| < \delta$, $y' = (y_1, \dots, y_{n-1})$, причем $\gamma_i \in C^3(\overline{B'_\delta})$ ($B'_\delta = \{y' : |y'| < \delta\}$) и $G \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, 0 < y_n - \gamma_i(y') < \delta_1\}$, $(\mathbb{R}^n \setminus G) \cap Y_i = \{y : |y'| < \delta, -\delta_1 < y_n - \gamma_i(y') < 0\}$, $\delta_1 > (M+1)\delta$, где M — постоянная Липшица функции γ_i . Иначе уменьшим параметр δ . Далее считаем, что параметр $\delta > 0$ зафиксирован. Мы используем выпрямление границы: $z_n = y_n - \gamma_i(y')$, $z' = y'$, где y — локальная система координат в точке b_i . Оно и обратное к нему $y_n = z_n + \gamma_i(z')$, $y' = z'$ принадлежат классу C^3 (т. е. $y = y(z) \in C^3(\overline{Y_i})$). То же самое утверждение имеет место и для преобразований $x = x(y(z)) = x^i(z)$. Пусть $U = \{z : |z'| < \delta, 0 < z_n < \delta_1\}$, $Q_1^\tau = (0, \tau) \times U$, $Q_1 = (0, T) \times U$ и $S_1^\tau = (0, \tau) \times B'_\delta$, $S_1 = (0, T) \times B'_\delta$.

Будем использовать в пространстве $W_p^s(0, \beta; E)$ ($s \in (0, 1)$, $\beta > 0$, E — банахово пространство) норму

$$\|q(t)\|_{W_p^s(0, \beta; E)} = (\|q\|_{L_p(0, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, \beta}^p)^{1/p},$$

$$\langle q \rangle_{s, \beta}^p = \int_0^\beta \int_0^\beta \frac{\|q(t_1) - q(t_2)\|_E^p}{|t_1 - t_2|^{1+sp}} dt_1 dt_2.$$

При $s \in (0, 1)$ положим

$$\widetilde{W}_p^s(0, \beta; E) = \{q \in W_p^s(0, \beta; E) : t^{-s}q(t) \in L_p(0, \beta; E)\}.$$

Наделим это пространство нормой

$$\|q(t)\|_{\widetilde{W}_p^s(0, \beta; E)}^p = \left\| \frac{q}{t^s} \right\|_{L_p(0, \beta; E)}^p + \langle q \rangle_{s, \beta}^p.$$

Если $s \neq 1/p$, то эта норма и обычная норма $\|\cdot\|_{W_p^s(0, \beta; E)}$ для функций $q(t)$ таких, что $q(0) = 0$ при $s > 1/p$, эквивалентны (см. [24, п. 3.2.6, лемма 1]).

Положим

$$\widetilde{W}_p^{s, 2s}(Q_\beta) = \widetilde{W}_p^s(0, \beta; L_p(G)) \cap L_p(0, \beta; W_p^{2s}(G)).$$

Нормы $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)}$, $\|\cdot\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(G)}$ определяются естественным образом, например,

$$\|u\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\beta)} = \left(\|u\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(G)}^p + \|u\|_{L_p(0,\beta;W_p^{2s}(G))}^p \right)^{1/p}.$$

Аналогично определяем пространства $\widetilde{W}_p^s(0,\beta;L_p(\Gamma))$, $\widetilde{W}_p^{s,2s}(S_\beta)$. Далее считаем, что параметр $p > n + 2$ зафиксирован. Следующие две леммы известны (см. [27, леммы 1.19, 1.20]).

Лемма 1. *Существует постоянная C , не зависящая от $\tau \in (0, T]$, такая, что*

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \leq C \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}, \quad \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq C \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)}$$

для всех $v \in W_p^{1,2}(Q_\tau)$ таких, что $v(x, 0) = 0$. Здесь $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$ и $s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}$.

Лемма 2. *Пусть $s \in ((n + 2)/2p, 1)$. Тогда если $q \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и $v \in W_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то $qv \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ и справедлива оценка*

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_0 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} (\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)}).$$

Если $v \in W_p^{s,2s}(Q)$, то последнее неравенство можно переписать в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_1 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \|v\|_{W_p^{s,2s}(Q)},$$

а если $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$, то в виде

$$\|qv\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \leq c_2 \|q\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Для функций $v \in \widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)$ имеет место оценка

$$\|v\|_{W_p^{s,2s}(Q_\tau)} + \|v\|_{L_\infty(Q_\tau)} \leq c_3 \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s,2s}(Q_\tau)}.$$

Постоянные c_i , $i = 0, 1, 2, 3$, не зависят от q, v и $\tau \in (0, T]$. Множество Q_τ в этих утверждениях может быть заменено на S_τ (при этом считаем, что $s \in ((n + 1)/2p, 1)$).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условие $s \in ((n + 2)/2p, 1)$ гарантирует включение $W_p^{s,2s}(Q) \subset C(\overline{Q})$ (см. теорему 1.22 в [27]).

Лемма 3. *Пусть $\varphi(u) \in W_\infty^2(-R, R)$ для всех $R > 0$. Пусть $v \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$ и $\|v\|_{L_\infty(S_\tau)} = M$. Тогда*

$$\|\varphi(v)\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq c_1(M) + c_2(M) \|v\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}, \quad s_0 = 1/2 - 1/2p. \quad (5)$$

Пусть $v_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$, $i = 1, 2$, $\|v_i\|_{L_\infty(S_\tau)} + \|v_i\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq M$ и $v_1(0, x) = v_2(0, x)$. Тогда

$$\|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(M) \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)}. \quad (6)$$

Здесь постоянные $c_i(M)$, $i = 1, 2, 3$, не зависят от $\tau \leq T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценка (5) вытекает непосредственно из определения нормы в пространстве $W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)$. Чтобы получить оценку (6), воспользуемся равенством

$$\varphi(v_1) - \varphi(v_2) = \int_0^1 \varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2)) d\xi(v_1 - v_2).$$

Используя лемму 2 и неравенство (5), получим

$$\begin{aligned} \|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} &\leq \int_0^1 (\|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \\ &+ \|\varphi'(v_2 + \xi(v_1 - v_2))\|_{L_\infty(S_\tau)}) d\xi \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(M) \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}. \end{aligned}$$

Приведем условия на данные. Оператор L предполагается эллиптическим, т. е. существует постоянная $\delta_0 > 0$ такая, что

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \delta_0 |\xi|^2 \text{ для всех } (t, x) \in Q, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Кроме того, предположим, что

$$a_i \in L_p(Q), \quad a_{kl}|_{Q^\pm} \in C(\overline{Q^\pm}), \quad a_{kl}|_\Gamma \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad a_{kl}^\pm|_{\Gamma_0} \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_0), \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_0^+}{\partial N} = \frac{\partial u_0^-}{\partial N}, \quad u_0^+ = u_0^-, \quad x \in \Gamma_0, \quad s_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \quad (8)$$

$$\beta \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad g(0, x) = B(x, 0, \partial_x)u_0|_\Gamma, \quad \varphi(u) \in W_\infty^2(-R, R) \quad \forall R > 0, \quad (9)$$

$$u_0(x)|_{G^\pm} \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(G^\pm), \quad f \in L_p(Q), \quad g, \bar{u}_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S), \quad (10)$$

$$a_i \in L_\infty(0, T; W_p^1(G_\delta)), \quad a_{kl} \in L_\infty(0, T; W_\infty^1(G_\delta)), \quad \varphi(u) \in W_\infty^3(-R, R) \quad (11)$$

для каждого $R > 0$.

Построим функции $\varphi_i(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такие, что $\varphi_i(x) = 1$ в $B_{\delta/2}(b_i)$ и $\varphi_i(x) = 0$ в $\mathbb{R}^n \setminus B_{3\delta/4}(b_i)$.

Пусть Y_i — координатная окрестность точки $b_i \in \Gamma$. Выпрямим границу и перейдем к системе координат $z = (z', z_n)$. Мы также предполагаем, что

$$\nabla_{z'} \beta(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad (12)$$

$$\nabla_{z'} \varphi_i g(t, x^i(z', 0)), \quad \nabla_{z'} \varphi_i \bar{u}_0(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{z'} \varphi_i u_0(x^i(z)) \in W_p^{2-2/p}(U), \quad \nabla_{z'} a_{kl}(t, x^i(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1), \\ \nabla_{z'} \varphi_i f(t, x^i(z)) \in L_p(Q_1), \end{aligned} \quad (14)$$

где $k, l = 1, 2, \dots, n$, $i \leq r$. Можно показать, что условия (12)–(14) не зависят от введенной локальной системы координат y и системы координат z .

Теорема 1. Пусть выполнены условия (7)–(10). Тогда на некотором промежутке $[0, \tau_0]$ существует единственное решение u задачи (1)–(3) такое, что $u|_{Q_{\tau_0}^\pm} \in W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^\pm)$. Если $\beta = 0$, то справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} \leq C_0 (\|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} \\ + \|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau_0})}). \end{aligned} \quad (15)$$

Если $u_0 \equiv 0$, $\beta = 0$, то оценка может быть переписана в виде

$$\|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)} + \|u\|_{W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)} \leq C_1 (\|f\|_{L_p(Q_{\tau_0})} + \|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_{\tau_0})}), \quad (16)$$

где постоянная C_1 не зависит от τ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$M\Psi = f, \quad \Psi|_{t=0} = u_0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial N} \Big|_S = g_0, \quad g_0|_{t=0} = \frac{\partial u_0}{\partial N},$$

$$\frac{\partial \Psi^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial \Psi^-}{\partial N}(t, x), \quad \Psi^+(t, x) = \Psi^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0.$$

Фиксируем $\tau \leq T$. По теореме 2.19 в [27] существует единственное решение этой задачи из класса $\Psi \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ (обозначим его через $R_\tau(g_0)$), причем имеет место оценка

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq C_1(\|g_0\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^+)} + \|u_0\|_{W_p^{2-2/p}(G^-)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}).$$

Если $u_0 = 0$, то последнюю оценку можно уточнить:

$$\|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|R_\tau g_0\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq C_2(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)}), \quad (17)$$

где постоянная C_2 не зависит от параметра τ . Доказательство этой оценки повторяет соответствующее в теореме 2 в [28], поэтому его опустим. Тогда $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$ — решение задачи (1)–(3) в том и только в том случае, если

$$u|_S = R_\tau(g - \beta(t, x)(\varphi(u) - \varphi(\bar{u}_0)))|_S, \quad u|_S \in W_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau).$$

Покажем, что это уравнение имеет единственное решение, если параметр τ достаточно мал. Сделаем замену $u = v + \Phi$, $\Phi = R_\tau(g - \beta(\varphi(u_0) - \varphi(\bar{u}_0)))$. Тогда имеем уравнение

$$v|_S = R_\tau(g - \beta(t, x)(\varphi(v + \Phi) - \varphi(\bar{u}_0)))|_S - \Phi|_S = R_{0\tau}(v|_S). \quad (18)$$

Ищем решение этого уравнения в классе $v \in \widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)$, $s_1 = 1 - \frac{1}{2p}$. Возьмем $v = 0$. Получим $R_{0\tau}(0)$ — решение задачи

$$Mv = 0, \quad v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} \Big|_{S_\tau} = -\beta(\varphi(\Phi) - \varphi(u_0)) \in \widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau).$$

Возьмем $R_1 = 2\|R_{0T}(0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S)}$. Пусть $\|v_i\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} \leq R_1$. В силу теорем вложения $\|v_i\|_{C(\overline{S_\tau})} \leq C_0 R_1$, где C_0 — некоторая постоянная. По определению оператора R_τ правая часть в (18) обращается в нуль при $t = 0$. Покажем, что на малом промежутке времени оператор $R_{0\tau}(v)$ удовлетворяет условиям теоремы о неподвижной точке. В силу (17) и лемм 2, 3 имеем оценку

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)} \leq c_1 \|\beta(\varphi(v_1) - \varphi(v_2))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_2 \|\varphi(v_1) - \varphi(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_3(R_1) \|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}. \quad (19)$$

Отметим, что справедливо неравенство

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c\tau^{1/2} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)}, \quad s_1 = 1 - 1/2p, \quad (20)$$

где постоянная c не зависит от $\tau \leq T$. Действительно, непосредственно из определения нормы имеем

$$\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(0, \tau; L_p(\Gamma))} \leq c\tau^{1/2} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(0, \tau; L_p(\Gamma))}.$$

Далее,

$$\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_0}(\Gamma))} \leq c\|v\|_{L_p(0,\tau;W_p^{2s_1}(\Gamma))}^\theta \|v\|_{L_p(S_\tau)}^{1-\theta} \leq c_4\tau^{s_1(1-\theta)}\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)},$$

где $s_1(1-\theta) = 1/2$, $\theta = s_0/s_1$, используем лемму 1.14 в [27] и определение нормы в $W_p^{s_1}(0,\tau;L_p(\Gamma))$. Две последние оценки гарантируют (20). Используя оценки (20), (19), получим

$$\|R_{0\tau}(v_1) - R_{0\tau}(v_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)} \leq c_5(R_1)\tau^{\frac{1}{2}}\|v_1 - v_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_1,2s_1}(S_\tau)}.$$

Выберем τ_0 такое, что $\tau^{1/2}c_5(R_1) \leq \frac{1}{2}$ при $\tau \leq \tau_0$. Тогда выполняются условия теоремы о неподвижной точке и уравнение (18) имеет решение. Если $u_0 = 0$, то легко увидеть, что постоянные в используемых неравенствах не зависят от $\tau \leq \tau_0$ и, значит, имеет место оценка (16).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Без ограничения общности можем считать, что параметр τ_0 — убывающая функция от величины R_1 . В свою очередь, величина R_1 ограничена постоянной cM с $M = \|\beta\|_{W_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|\beta\|_{L_\infty(S_\tau)}$, c — постоянная, не зависящая от β , при этом норма v в $W_p^{s_1,2s_1}(S_{\tau_0})$ оценивается через $2R_1$ и норма v в $W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^+)$ и $W_p^{1,2}(Q_{\tau_0}^-)$ оценивается постоянной, зависящей от R_1 .

В следующей теореме используем локальную систему координат z .

Теорема 2. Пусть выполнены условия (7)–(14) и $\beta = 0$. Тогда решение задачи (1)–(3), полученное в теореме 1, обладает свойством $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^\tau)$, $i = 1, \dots, r$, причем если $u_0 \equiv 0$, то имеет место оценка

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'}\varphi_i u(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} &\leq C_1(\|g\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)} + \|f\|_{L_p(Q_\tau)} \\ &+ \sum_{i=1}^r (\|\nabla_{z'}\varphi_i f\|_{L_p(Q_1^\tau)} + \|\nabla_{z'}\varphi_i g(x^i(z', 0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau)})), \end{aligned}$$

где постоянная C_1 не зависит от $\tau \in (0, \tau_0]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство дословно повторяет рассуждения из теоремы 2 в [23] и использует оценку (17).

3. Основные результаты

Далее считаем, что функции $\Phi_i(t, x)$ обладают следующими свойствами:

$$\Phi_i \in W_p^{s_0,2s_0}(S), \quad \nabla_{z'}\Phi_i(t, x^j(z', 0)) \in W_p^{s_0,2s_0}(S_1), \quad i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (21)$$

Пусть $\Phi(t)$ — матрица с элементами $\phi_{ij} = \Phi_j(t, b_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, r$. В силу теорем вложения $\Phi_i(t, b_j) \in C^{1/2-(n+2)/2p}([0, T])$ (см. [27, теорема 1.22]). Дополнительные условия на данные имеют вид

$$\begin{aligned} |\varphi(\psi_i(t)) - \varphi(\bar{u}_0)(t, b_i)| &\geq \delta_1, \quad |\det \Phi| \geq \delta_1 > 0 \quad \forall t \in [0, T], \\ \psi_i &\in W_p^{s_1}(0, T), \quad u_0(b_i) = \psi_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, r, \end{aligned} \quad (22)$$

где δ_1 — положительная постоянная. Возьмем первое из равенств (2) в точке $(0, b_j)$. Имеем

$$\sum_{i=1}^r \beta_i(0)\Phi_i(0, b_j) = \frac{1}{(\varphi(u_0(b_j)) - \varphi(\bar{u}_0(0, b_j)))} \left(g(0, b_j) - \frac{\partial u_0(b_j)}{\partial N} \right), \quad (23)$$

где $j = 1, \dots, r$. Отсюда определяем величины $\beta_i(0)$. Если решение задачи (1)–(4) существует, то выполнено равенство

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial N} + \beta(0, x)[\varphi(u_0) - \varphi(\bar{u}_0)] = g(0, x), \quad x \in \Gamma, \quad (24)$$

где постоянные $\beta_j(0)$ — решение системы (23). Положим

$$\beta_0 = \sum_{i=1}^r \beta_i(0)\Phi_i(t, x), \quad \alpha = \beta - \beta_0, \quad \alpha_i = \beta_i(t) - \beta_i(0), \quad \vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r).$$

В силу условия (21) $\beta_0 \in W_p^{s_0, 2s_0}(S)$, $\nabla_{z'}\beta_0(x^j(z', 0)) \in W_p^{s_0, 2s_0}(S_1)$ для всех j . Построим функцию w_0 как решение задачи (1)–(3) с $\beta = \beta_0$. Решение существует на некотором промежутке $[0, \tau_0]$ и обладает свойствами, указанными в теоремах 1, 2. Сделаем замену $u = v + w_0$ в (1)–(4). Функция v есть решение обратной задачи

$$Mv = v_t - Lv = 0, \quad (t, x) \in Q = (0, T) \times G, \quad (25)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial N} + \beta_0(\varphi(v + w_0) - \varphi(w_0)) = -\alpha(\varphi(v + w_0) - \varphi(\bar{u}_0)), \quad (26)$$

$$\frac{\partial v^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial v^-}{\partial N}(t, x), \quad v^+(t, x) = v^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0, \quad (27)$$

$$v(t, b_i) = \tilde{\psi}_i(t) = \psi_i(t) - w_0(t, b_i). \quad (28)$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия (7), (8), (10), (11), (13), (14), (21), (22), (24). Тогда на некотором промежутке $[0, \tau_0]$ существует единственное решение задачи (1)–(4) такое, что $u \in W_p^{1,2}(Q_\tau^+) \cap W_p^{1,2}(Q_\tau^-)$, $\beta_i(t) \in W_p^{s_0}(0, \tau_0)$, $i = 1, 2, \dots, r$, причем $\nabla_{z'}\varphi_i u(x^i(z)) \in W_p^{1,2}(Q_1^{\tau_0})$, $i = 1, \dots, r$.

Доказательство. Достаточно доказать утверждение для вспомогательной задачи (25)–(28).

Построение операторного уравнения для нахождения вектор-функции $\vec{\alpha}$. Фиксируем $R_2 > 0$ (эту величину определим позже) и предположим, что $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau) : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq R_2\}$. Фиксируя $\vec{\alpha} \in B_{R_2}$ и решая задачу (25)–(27) на некотором промежутке $[0, \tau_0]$, мы тем самым построим отображение $\vec{\alpha} \rightarrow v(\vec{\alpha})$. Кроме этого отображения нам понадобится еще одно отображение. Фиксируя i и умножая уравнение (25) на φ_i , имеем

$$Mv_i = v_{it} - Lv_i = [\varphi_i, L]v = f_0, \quad v_i|_{t=0} = 0, \quad v_i = \varphi_i v, \quad (29)$$

где

$$[\varphi_i, L]v = \varphi_i Lv - L(\varphi_i v) = -2 \sum_{l,k=1}^n a_{lk} v_{x_k} \varphi_{ix_l} - \sum_{l,k=1}^n a_{lk} \varphi_{ix_l} x_k v - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ix_k} v.$$

Сделав замену переменных $x = x^i(z)$, перепишем уравнение в (29) в виде

$$v_{it} - c_{nn}(t, z)v_{iz_n z_n} = \sum_{l+k < 2n} c_{kl} v_{iz_k z_l} + \sum_{k=1}^n c_k v_{iz_k} + c_0 v_i + f_0 = f_{1i}, \quad z \in U. \quad (30)$$

Отметим, что $c_{nn} > 0$ для всех t, z . В силу свойств решения v и условий на коэффициенты имеем $\varphi f_{1i} \in L_p(Q_1^+)$, $\nabla_{z'}\varphi_i f_{1i} \in L_p(Q_1^+)$ и, более того, $f_{1i}(t, z', z_n) \in$

$C^\alpha(\overline{B_\delta}; L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1)))$ с $\alpha \leq 1 - (n-1)/p$ (см. теорему 1.22 в [27]), после может быть изменение на множестве меры нуль. Рассмотрим задачу

$$\omega_{it}(t, z_n) - c_{nn}(t, 0, z_n)\omega_{iz_n z_n} = f_{1i}(t, 0, z_n), \quad i \leq r, \quad z_n \in (0, \delta_1), \quad (31)$$

$$\omega_i(0, z_n) = 0, \quad \omega_i|_{z_n=0} = \tilde{\psi}_i(t), \quad \omega_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (32)$$

Пусть $v(\vec{\alpha})$ — решение задачи (25)–(27), построим функции ω_i как решения задач (31), (32). Таким образом, каждому $\vec{\alpha}$ отвечает функция v и набор функций ω_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Имеем

$$\frac{\partial v_i}{\partial N} = \sum_{j=1}^n \eta_j(t, z')v_{iz_j}(t, x^i(z', 0)).$$

Полагая $z' = 0$ и используя (28), запишем равенства

$$\begin{aligned} \eta_n(t, 0)\omega_{jz_n}(t, 0) + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t, 0)v_{z_i}(t, x^j(0)) \\ + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(w_0(t, b_j))) = -\alpha(t, b_j)(\varphi(\psi_j) - \varphi(\bar{u}_0)), \end{aligned} \quad (33)$$

которые также можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \alpha(t, b_j) = \frac{1}{\varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \left(\eta_n(t, 0)\omega_{jz_n}(t, 0) \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \eta_i(t, 0)v_{z_i}(t, b_j) + \beta_0(\varphi(\psi_j) - \varphi(w_0(t, b_j))) \right), \end{aligned} \quad (34)$$

где $\varphi(\psi_j) - \varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) \neq 0$ (см. (22)). Это и есть система для нахождения вектора $\vec{\alpha}$. Она может быть переписана в виде

$$\vec{\alpha} = \Phi^{-1} \vec{F}(\vec{\alpha}) = R(\vec{\alpha}), \quad (35)$$

где координата F_j вектора \vec{F} есть правая часть (34). Отметим, что лемма 2 гарантирует оценку

$$\|\Phi^{-1} \vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c \|\vec{F}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \quad (36)$$

Покажем, что оператор $R(\vec{\alpha})$ является сжимающим в некотором шаре $B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq R_2\}$ и переводит его в себя. Рассмотрим систему (35) и найдем $R(0)$. Если $\vec{\alpha} = 0$, то в силу теоремы единственности решение v задачи (25)–(27) есть 0. Тогда правая часть в (31) равна нулю и решения w_i задачи (31), (32) не зависят от $\vec{\alpha}$. Положим $R_2 = 2\|R(0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S)}$. Величина R_2 зависит только от известных данных задачи и не зависит от $\vec{\alpha}, \tau$.

Оценки для решений задачи (25)–(27). Без ограничения общности можем считать (см. замечание 1 и теорему 1), что промежуток $[0, \tau_0]$, на котором решение задачи (25)–(27) существует и единственно, не зависит от $\vec{\alpha} \in B_{R_2} = \{\vec{\alpha} : \|\vec{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq R_2\}$, а зависит только от величины R_2 . Далее, имеет место оценка (теорема 1)

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq C_2(R_2),$$

где постоянная C_2 зависит от R_2 , но не зависит от параметра τ . Пусть

$$g_0 = -\beta_0(\varphi(v + w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha(\varphi(v + w_0) - \varphi(\bar{u}_0)).$$

Из теоремы 2 вытекает, что найдется постоянная c_3 такая, что

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^\tau)} \\ & \leq c \left(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\varphi_i \nabla_{z'} g_0(t, x^i(z', 0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(S_1^\tau)} \right). \end{aligned}$$

Воспользовавшись леммами 2, 3, получим

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c(R_2).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \partial_{z_k} g_0 = & -\beta_{0z_k} (\varphi(v+w_0) - \varphi(w_0)) - \alpha_{z_k} (\varphi(v+w_0) - \varphi(\bar{u}_0)) \\ & - \beta_0 (\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k})) - \\ & - \alpha (\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(\bar{u}_0)\bar{u}_{0z_k}). \end{aligned}$$

Каждое слагаемое оценивается с использованием лемм 2, 3. Рассмотрим, например, третье слагаемое. Имеем

$$\begin{aligned} & \|\varphi_i \beta_0 (\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)(w_{0z_k}))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \\ & \leq c \|\varphi'(v+w_0)(v_{z_k} + w_{0z_k}) - \varphi'(w_0)w_{0z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \\ & \leq c_1 \|(\varphi'(v+w_0) - \varphi'(w_0))(v_{z_k} + w_{0z_k}) + \varphi'(w_0)v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \\ & \leq c_2 (\|\varphi'(v+w_0) - \varphi'(w_0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} (\|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} + \|v_{z_k} + w_{0z_k}\|_{L_\infty(S_1^\tau)}) \\ & \quad + (\|\varphi'(w_0)\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} + \|\varphi'(w_0)\|_{L_\infty(S_1^\tau)}) \|v_{z_k}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)}). \end{aligned} \quad (37)$$

Далее используем оценки

$$\|\nabla_{z'} w_0\|_{W_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} + \|\nabla_{z'} w_0\|_{L_\infty(S_1^\tau)} \leq c_1 \|w_0\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_1)}, \quad (38)$$

$$\|\nabla_{z'} v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq c_2 \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_1^\tau)}, \quad v \in \widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_1^\tau), \quad (39)$$

где постоянные c_1, c_2 не зависят от τ . Первая вытекает из [27, следствие 1.3, теорема 1.22]. Вторая также вытекает из следствия 1.3 в [27], но надо показать, что постоянная c_2 не зависит от τ . Существует оператор продолжения P функций, заданных на B'_δ в \mathbb{R}^{n-1} , такой, что $P \in L(W_p^s(B'_\delta), W_p^s(\mathbb{R}^{n-1}))$ для всех $s \in [0, 2]$ (метод Хестенса [24, § 4.2]). Поэтому достаточно получить оценки в случае, когда S_1^τ заменено на $\widetilde{S}_1^\tau = (0, \tau) \times \mathbb{R}^{n-1}$. Мы используем эквивалентные нормы в $\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau), \widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)$ (см. нормы в [24, п. 2.5.1]):

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)}^p & = \|vt^{-s_0}\|_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)}^p + \langle v \rangle_{s_0, \tau}^p \\ & \quad + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|v(t, z^1) - v(t, z^2)|^p}{|z^1 - z^2|^{n-1+2s_0p}} dx^1 dx^2 dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)}^p & = \|vt^{-s_1}\|_{L_p(\widetilde{S}_1^\tau)}^p + \langle v \rangle_{s_1, \tau}^p \\ & \quad + \int_0^\tau \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|v_{z_k}(t, z^1) - v_{z_k}(t, z^2)|^p}{|z^1 - z^2|^{n-1+2ps_0}} dx^1 dx^2. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменных $t = \xi\tau$, $x = \sqrt{\tau}y$, $z^1 = \sqrt{\tau}y_1$, $z^2 = \sqrt{\tau}y_2$. Имеем

$$\|\nabla_{z'} v\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)}^p = \tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2} \|\nabla_{y'} v(\tau\xi, \sqrt{\tau}y)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(\widetilde{S}_1^\tau)}^p.$$

Правая часть оценивается через $\tau^{1-s_0p-p/2+(n-1)/2} c \|v(\tau\xi, \sqrt{\tau}y)\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(\widetilde{S}_1^\tau)}^p$ (см. [27, следствие 1.3]). Сделав обратную замену переменных, придем к (39). Используя (39), (38) и лемму 3, получим, что правая часть в (37) оценивается через $c_3(R_2)$, эта постоянная зависит от $\|v\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_\tau)}$, $\|w_0\|_{W_p^{s_1, 2s_1}(S_1)}$, т. е. от R_2 . Таким образом, $\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)} \leq C_4(R_2)$. Окончательно имеем оценку

$$\|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^\pm)} \leq C_5(R_2). \quad (40)$$

Оценки для разности решений задачи (25)–(27). Пусть $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i = 1, 2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} \Phi_i, \quad j = 1, 2.$$

Каждая из этих функций удовлетворяет оценке (40). Тогда разности $v_1 - v_2 = \tilde{w}$, $\tilde{\alpha} = \alpha^1 - \alpha^2$ есть решение задачи

$$M\tilde{w} = \tilde{w}_t - L\tilde{w} = 0, \quad \tilde{w}|_{t=0} = 0, \quad (x, t) \in Q = G \times (0, T), \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial N} &= -\beta_0(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) - \frac{(\alpha^1 + \alpha^2)}{2}(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) \\ &\quad - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\varphi(v_1 + w_0) + \varphi(v_2 + w_0) - 2\varphi(\bar{w}_0)) = g_0. \end{aligned} \quad (42)$$

$$\frac{\partial \tilde{w}^+}{\partial N}(t, x) = \frac{\partial \tilde{w}^-}{\partial N}(t, x), \quad \tilde{w}^+(t, x) = \tilde{w}^-(t, x), \quad (t, x) \in S_0. \quad (43)$$

В силу леммы 2 и (21) $\tilde{\alpha}, \alpha^j \in \widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)$, $\nabla_{z'} \tilde{\alpha}(t, x^i(z', 0)), \nabla_{z'} \alpha^j(t, x^i(z', 0)) \in \widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)$, $i = 1, \dots, r$, и имеем оценки

$$\|\tilde{\alpha}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_1 \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad (44)$$

$$\|\alpha^1 + \alpha^2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} \leq c_1 (\|\vec{\alpha}_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} + \|\vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}) \leq 2c_1 R_2, \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \tilde{\alpha}(t, x^i(z', 0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq c_2 \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad (46)$$

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} (\alpha^1 + \alpha^2)(t, x^i(z', 0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_1^\tau)} \leq 2c_2 R_2, \quad (47)$$

где постоянная c_2 не зависит от τ . В силу теоремы 1, лемм 2, 3 и оценок (44)–(47), (40) не так трудно получить неравенства

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} &\leq c \|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)}, \\ \|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} &\leq c_5(R_2) \|\tilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0, 2s_0}(S_\tau)} + c_6(R_2) \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \end{aligned} \quad (48)$$

Воспользовавшись неравенством (20) и леммой 1, получим оценку

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} &\leq c_7(R_2)\tau^{1/2}(\|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \\ &\quad + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) + c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \end{aligned} \quad (49)$$

Выберем $\tau_1 \leq \tau_0$ так, чтобы $c_7(R_2)\tau^{1/2} \leq 1/2$ при $\tau \leq \tau_1$. Тогда из (48), (49) вытекает неравенство

$$\|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} \leq 2c_6(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}, \quad \tau \leq \tau_1. \quad (50)$$

Соответственно из леммы 1 и (48) имеем

$$\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^+)} \leq c_7(R_2)\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Далее, используя теорему 2, запишем оценку для решений задачи (41)–(43). Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \\ \leq c \left(\|g_0\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^+)} + \sum_{i=1}^r \|\varphi_i \nabla_{z'} g_0(t, x^i(z', 0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0,2s_0}(S_\tau^+)} \right). \end{aligned}$$

Первое слагаемое уже оценено. Оценим второе. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_{z_k} g_0 &= -\beta_{0z_k}(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) - \frac{(\alpha_{z_k}^1 + \alpha_{z_k}^2)}{2}(\varphi(v_1 + w_0) - \varphi(v_2 + w_0)) \\ &\quad - \frac{\tilde{\alpha}_{z_k}}{2}(\varphi(v_1 + w_0) + \varphi(v_2 + w_0) - 2\varphi(\bar{u}_0)) - \beta_0(\varphi'(v_1 + w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ &\quad - \varphi'(v_2 + w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k})) - \frac{(\alpha^1 + \alpha^2)}{2}(\varphi'(v_1 + w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ &\quad - \varphi'(v_2 + w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k})) - \frac{\tilde{\alpha}}{2}(\varphi'(v_1 + w_0)(v_{1z_k} + w_{0z_k}) \\ &\quad + \varphi'(v_2 + w_0)(v_{2z_k} + w_{0z_k}) - 2\varphi'(\bar{u}_0)\bar{u}_{0z_k}). \end{aligned}$$

Используя леммы 2,3, получение оценки (50) и саму оценку (50), выводим, что при $\tau \leq \tau_1$ имеет место оценка

$$\sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \leq c_8\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \quad (51)$$

Используя неравенства (50), (51), можем записать

$$\begin{aligned} \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \\ \leq c_5\|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}. \end{aligned} \quad (52)$$

ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ (31), (32). Оценим правую часть в (31) в $L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1))$. Имеем

$$\|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1))} \leq c_6\|f_{1i}(t, z', z_n)\|_{W_p^s(B_\delta^s; L_p((0,\tau) \times (0,\delta_1)))} = J$$

при $s > (n-1)/p$ (лемма 1.9 в [27]). Далее используем интерполяционные неравенства (см. теорему 1.19 в [27]). Имеем

$$J \leq c_7 \|f_{1i}(t, z)\|_{W_p^1(B'_\delta; L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1)))}^\theta \|f_{1i}(t, z)\|_{W_p^{-1}(B'_\delta; L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1)))}^{1-\theta}, \quad (53)$$

где $2\theta - 1 = s$. Исходя из определения f_{1i} и условий на коэффициенты, имеем

$$\|f_{1i}\|_{W_p^{-1}(B'_\delta; L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1)))} \leq c \|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^1(U))} \leq c_8 \tau^{1/2} \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)}, \quad (54)$$

где постоянная c_1 не зависит от τ . Последняя оценка получается, если мы применим интерполяционное неравенство

$$\|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^1(U))} \leq c_9 \|v\|_{L_p(0, \tau; W_p^2(U))}^{1/2} \|v\|_{L_p(0, \tau; L_p(U))}^{1/2}$$

и оценку $\|v\|_{L_p(0, \tau; L_p(U))} \leq \tau \|v_t\|_{L_p(0, \tau; L_p(U))}$, вытекающую из формулы Ньютона — Лейбница. Оценки (53), (54) влекут, что

$$\begin{aligned} \|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1))} &\leq c_{10} \tau^{(1-\theta)/2} (\|\nabla_{z'} \varphi_i v(t, z)\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \\ &+ \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} + \|v\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^-)}) \leq C_8(R_2) \tau^{(1-\theta)/2}, \end{aligned} \quad (55)$$

где C_8 — постоянная, не зависящая от τ . Используя свойства решений первой начально-краевой задачи [27, теорема 2.9], получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \|w_i(t, z_n)\|_{W_p^{1,2}((0, \tau) \times (0, \delta_1))} &\leq c \sum_{i=1}^r \|f_{1i}(t, 0, z_n)\|_{L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1))} \\ &\leq C_9(R_2) \tau^{(1-\theta)/2} + \sum_{i=1}^r \|\tilde{\psi}_i\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(0, \tau)}. \end{aligned}$$

Оценки для разности решений задачи (31), (32). Пусть, как и ранее, $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir}) \in B_{R_2}$, $i = 1, 2$, и v_i — соответствующие решения задачи (25)–(27), где функция α заменяется соответствующими функциями

$$\alpha^j = \sum_{i=1}^r \alpha_{ji} \Phi_i, \quad j = 1, 2.$$

Пусть w_i^j , $j = 1, 2$, — решения задач (31), (32) с новыми правыми частями, где вместо v стоят функции v_j и $w^0 = \varphi_i \tilde{\omega}$. Тогда разности $k_i = w_i^1 - w_i^2$ суть решения задач

$$\begin{aligned} k_{it} - c_{nn}(t, z_n) k_{iz_n z_n} &= \sum_{m+l < 2n} c_{ml} \omega_{z_m z_l}^0 + \sum_{m=1}^n c_m \omega_{z_m}^0 + c_0 \omega^0 \\ &+ [\varphi_i, L] \tilde{\omega}|_{z'=0} = \tilde{f}_i, \quad k_i|_{t=0} = 0, \quad k_i|_{z_n=0} = 0, \quad k_i|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i \leq r. \end{aligned}$$

Из известных свойств параболических задач (см., например, теорему 2.1 в [27] или [26]) имеем оценку

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0, \tau) \times (0, \delta_1))} \leq \sum_{i=1}^r \|\tilde{f}_i\|_{L_p((0, \tau) \times (0, \delta_1))}.$$

Используя аналог оценки (55) для оценки правой части, получим

$$\sum_{i=1}^r \|k_i\|_{W_p^{1,2}((0, \tau) \times (0, \delta_1))} \leq c_2 \tau^{\frac{1-\theta}{2}} \left(\|\tilde{\omega}\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau)} + \sum_{i=1}^r \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{\omega}(t, x^i(z))\|_{W_p^{1,2}(Q_\tau^+)} \right).$$

В частности, отсюда, из леммы 1 и (52) вытекает неравенство

$$\sum_{i=1}^r \|k_{iz_n}(t, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c_4 \tau^{(1-\theta)/2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}. \quad (56)$$

ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРА R . Считаем, что $\vec{\alpha}_i \in B_{R_2}$, $i = 1, 2$. Из (36) имеем

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c \sum_{i=1}^r \|F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}.$$

Используем старые обозначения: v_i , $i = 1, 2$, $\tilde{w} = v_1 - v_2$, $k_i = \omega_i^1 - \omega_i^2$, ω_j^i , $i = 1, 2$, — решения задач (31), (32). Рассмотрим первое слагаемое в координате $F_i(\vec{\alpha}_1) - F_i(\vec{\alpha}_2)$. Оно записывается в виде

$$J_1 = \frac{1}{\varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \eta_n(t, 0) k_{jz_n}(t, 0),$$

где

$$\eta_n = -\sqrt{1 + |\nabla \gamma_j|^2} \sum_{k, l=1}^n \tilde{a}_{kl}(y^j(z)) n_k n_l|_{z_n=0}.$$

Здесь $n_k = \gamma_{iz_k}(z') / \sqrt{1 + |\nabla \gamma_i|^2}$ при $k < n$, $n_n = -1 / \sqrt{1 + |\nabla \gamma_i|^2}$ и \tilde{a}_{kl} — старшие коэффициенты оператора L , записанного в локальной системе координат y . В силу леммы 2 и неравенства (56)

$$\|J_1\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c_1 \|k_{iz_n}(t, 0)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c_2 \tau^{\beta_1} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}, \quad (57)$$

где все постоянные не зависят от τ и β_1 — положительная постоянная. Рассмотрим второе слагаемое

$$J_2 = \frac{1}{\varphi(\bar{u}_0(t, b_j)) - \varphi(\psi_j)} \sum_{m=1}^{n-1} \eta_m(t, 0) \tilde{w}_{z_m}(t, b_j).$$

В силу леммы 2

$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c_2 \sum_{i=1}^r (\|\tilde{w}(t, x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} + \|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(0))\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)}).$$

Здесь каждое из слагаемых оценивается одинаково. Оценка (39) влечет, что

$$\|\tilde{w}\|_{W_p^1(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))} \leq c \|\tilde{w}\|_{\widetilde{W}_p^{s_1, 2s_1}(S_1^-)} \leq c_1 \|\tilde{w}\|_{W_p^{1,2}(Q_1^+)}.$$

В силу теорем вложения (теорема 1.22 в [27])

$$\|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(z))\|_{z=0} \|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau)} \leq c_2 \|\nabla_{z'} \varphi_i(\tilde{w}(t, x^i(z', 0)))\|_{W_p^s(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))},$$

при $s \in ((n-1)/p, 1)$. Далее, из вышеприведенных неравенств получим

$$\begin{aligned} & c_2 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^s(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))} \\ & \leq c_3 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^1(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))}^\theta \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^{-1}(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))}^{1-\theta} \\ & \leq c_4 \|\nabla_{z'} \varphi_i(\tilde{w}(t, x^i(z)))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^-)}^\theta \|\varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{L_p(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau))}^{1-\theta} \\ & \leq c_5 \|\nabla_{z'} \varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{W_p^{1,2}(Q_1^-)}^\theta \tau^{(1-\theta)/2} \|\varphi_i \tilde{w}(t, x^i(z', 0))\|_{L_p(B'_\delta; \widetilde{W}_p^{s_1}(0, \tau))}^{1-\theta}. \end{aligned}$$

Ссылаясь на лемму 1 и используя (52), получим оценку

$$\|\nabla_{z'} \tilde{w}(t, x^i(z))|_{z=0}\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_6 \tau^{\beta_2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)}.$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые в $\|J_2\|$, и можно сказать, что

$$\|J_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_7 \tau^{\beta_2} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \quad (58)$$

для некоторой постоянной $\beta_2 > 0$ и не зависящей от τ постоянной c_7 . Окончательная оценка, как вытекает из (57), (58), имеет вид

$$\|R(\vec{\alpha}_1) - R(\vec{\alpha}_2)\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)} \leq c_8 \tau^{\beta_0} \|\vec{\alpha}_1 - \vec{\alpha}_2\|_{\widetilde{W}_p^{s_0}(0,\tau)},$$

где $\beta_0 = \min(\beta_1, \beta_2)$ и постоянная c_8 не зависит от τ . Возьмем $\tau_2 \leq \tau_1$ такое, что $c_8 \tau_2^{\beta_0} \leq 1/2$. В этом случае оператор R переводит шар B_{R_2} в себя при $\tau \leq \tau_2$ и является в нем сжимающим. Следовательно, уравнение (35) имеет решение $\vec{\alpha} \in \widetilde{W}_p^{s_0}(0, \tau_2)$. Найдено v как решение задачи (25)–(27).

Покажем выполнение (28). Возьмем равенства (26), записанные в системе координат z и взятые в точке $t, x^i(0)$ ($x^i(0) = b_i$), и вычтем их из соответствующих равенств (33). Используя равенство $w_j(t, 0) + w_0(t, b_j) = \psi_j$, получим

$$\begin{aligned} \eta_n(t, 0)(w_{jz_n}(t, 0) - v_{z_n}(t, x^j(0))) \\ + (\beta_0 + \alpha)(\varphi(w_j(t, 0) + w_0(t, b_j)) - \varphi(v(t, b_j) + w_0(t, b_j))) = 0, \end{aligned} \quad (59)$$

где $i = 1, 2, \dots, r$. Функция $w_{0i} = \varphi_i v$ удовлетворяет уравнению (30). Возьмем в этом уравнении $z' = 0$ и вычтем его из равенства (31). Получим равенства

$$w_{it}(t, z_n) - w_{0it}(t, x^i(t, 0, z_n)) - c_{nn}(t, 0, z_n)(w_{iz_n z_n} - w_{0iz_n z_n}(t, x^i(t, 0, z_n))) = 0, \quad (60)$$

где $i \leq r$. Функции $w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, 0, z_n))$ удовлетворяют уравнениям (60), начальному условию $w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, 0, z_n))|_{t=0} = 0$, равенству (59) и

$$w_i(t, z_n) - w_{0i}(t, x^i(t, 0, z_n))|_{z_n=\delta_1} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Для этой задачи справедлив аналог теоремы 1 (доказательство ничем не отличается), и тогда в силу единственности решений смешанной начально-краевой задачи $w_i(t, z_n) = w_{0i}(t, x^i(t, 0, z_n))$. Следовательно, $w_{0i}(t, x^i(0)) = v(t, x^i(0)) = \tilde{\psi}_i$ для всех i . Поскольку локально по времени задача сводится к уравнению со сжимающим оператором, утверждение о единственности решений здесь очевидно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Ненарокомов А. В. Обратные задачи в исследовании сложного теплообмена. М.: Янус и К, 2009.
2. Ткаченко В. Н. Математическое моделирование, идентификация и управление технологическими процессами тепловой обработки материалов. Киев: Наук. думка, 2008.
3. Глаголев М. В., Сабреков А. Ф. Идентификация газообмена на границе экосистема/атмосфера: метод обратной задачи // Мат. биология и биоинформатика. 2012. Т. 7, № 1. С. 81–101.
4. Пермяков П. П. Идентификация параметров модели тепломассопереноса при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // Вестн. Томск. гос. ун-та. 2004. № 284. С. 226–238.
5. Пермяков П. П. Математическое моделирование негативных мерзлотных процессов. Новосибирск: СО РАН, 2023.

6. Пермяков П. П., Аммосов А. П. Математическое моделирование техногенного загрязнения в криолитозоне. Новосибирск: Наука, 2003.
7. Dantas L. V., Orlande H. R. B., Cotta R. M. Идентификация параметров модели тепломассообмена при техногенном загрязнении мерзлых грунтов // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2003. V. 46, N 9. P. 1587–1599.
8. Lugon J. Jr., Neto A. J. S. An inverse problem of parameter estimation in simultaneous heat and mass transfer in a one dimensional porous medium // *Proc. COBEM 2003. 17-th Intern. Congress on Mechanical Engineering*. 2003. São-Paulo: ABSM, 2003.
9. Varan L. A. B., Orlande H. R. B., Vianna F. L. V. Estimation of the convective heat transfer coefficient in pipelines with the Markov chain Monte-Carlo method // *Blucher Mechan. Engin. Proc.* 2014. V. 1, N 1. P. 1214–1225.
10. Osman A. M., Beck J. V. Nonlinear inverse problem for the estimation of time-and-space-dependent heat-transfer coefficients // *J. Thermophysics*. 2003. V. 3, N 2. P. 146–152.
11. Farahani S. D., Kowsary F., Ashjaee M. Experimental estimation heat flux and heat transfer coefficient by using inverse methods // *Sci. Iranica B*. 2016. V. 3, N 4. P. 1777–1786.
12. Su J., Hewitt G. F. Inverse heat conduction problem of estimating time-varying heat transfer coefficient // *Numerical Heat Transfer. Part A*. 2004. V. 45. P. 777–789.
13. Háo D. N., Thanh P. X., Lesnic D. Determination of the heat transfer coefficients in transient heat conduction // *Inverse Probl.* 2013. V. 29, N 9. 095020.
14. Lee J. D., Tanabe I., Takada K. Identification of the heat transfer coefficient on machine tool surface by inverse analysis // *JSME Intern. J., Ser. C*. 1999. V. 42, N 4. P. 1056–1060.
15. Onyango T. M., Ingham D. B., Lesnic D. Restoring boundary conditions in heat conduction // *J. Engin. Math.* 2008. V. 62. P. 85–101.
16. Wang S., Zhang L., Sun X., Jia H. Solution to two-dimensional steady inverse heat transfer problems with interior heat source based on the conjugate gradient method // *Math. Probl. Engin.* 2017. V. 2017. Article ID 2861342.
17. Da Silva W. B., Dutra J. C. S., Kopperschimidt C. E. P., Lesnic D., Aykroyd R. G. Sequential particle filter estimation of a time-dependent heat transfer coefficient in a multidimensional nonlinear inverse heat conduction problem // *Appl. Math. Modelling*. 2012. V. 89, N 1. P. 654–668.
18. Háo D. N., Huong B. V., Thanh P. X., Lesnic D. Identification of nonlinear heat transfer laws from boundary observations // *Appl. Anal.* 2015. V. 94, N 9. P. 1784–1799.
19. Slodicka M., Van Keer R. Determination of a Robin coefficient in semilinear parabolic problems by means of boundary measurements // *Inverse Probl.* 2002. V. 18, N 1. P. 139–152.
20. Rösch A. Stability estimates for the identification of nonlinear heat transfer laws by means of boundary measurements // *Inverse Probl.* 2002. V. 12, N 5. P. 743–756.
21. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problems of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. II // *Differ. Equ.* 1996. V. 32, N 11. P. 1515–1525.
22. Kostin A. B., Prilepko A. I. On some problem of the reconstruction of a boundary condition for a parabolic equation. I // *Differ. Equ.* 1996. V. 32, N 1. P. 113–122.
23. Pyatkov S. G., Baranchuk V. A. Determination of the heat transfer coefficient in mathematical models of heat and mass transfer // *Math. Notes*. 2023. V. 113, N 1. P. 93–108.
24. Triebel H. Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: Deutscher Verl. des Wissenschaften, 1978.
25. Amann H. Compact embeddings of vector-valued Sobolev and Besov spaces // *Glasnik Mat.* 2000. V. 35, N 1. P. 161–177.
26. Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type. Providence, RI: Am. Math. Soc., 1968.
27. Пятков С. Г. Краевые и обратные задачи для параболических и эллиптических уравнений и систем. Новосибирск: Наука, 2025.
28. Белоногов В. А., Пятков С. Г. О разрешимости задач сопряжения с условиями типа

неидеального контакта // Изв. вузов. Математика. 2020. № 7. С. 18-32.

Поступила в редакцию 7 марта 2026 г.

После доработки 7 марта 2026 г.

Принята к публикации 20 марта 2026 г.

Потапков Алексей Александрович,
Пятков Сергей Григорьевич (ORCID 0000-0002-7238-9559)
Югорский государственный университет,
Инженерная школа цифровых технологий,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628012
a.potapkov@ugrasu.ru, s.pyatkov@ugrasu.ru